Markovljevi lanci s atomima

Šikić, Jakov

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jakov Šikić

MARKOVLJEVI LANCI S ATOMIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Svima koji nisu zaboravili svoje ideale

Sadržaj

Uvod

Markovljevi lanci su jedna od najvažnijih i najjednostavnijih klasa slučajnih procesa. Važnost slučajnih procesa, pa i teorije Markovljevih lanaca, očitava se u svestranosti primjena unutar širokoga spektra područja, od fizike pa do financijskih vremenskih nizova. Jedna od prvih motivacija razvoja teorije slučajnih procesa bilo je izumiranje aristokratskih prezimena u viktorijanskoj Engleskoj, koja je rezultirala Galton-Watsonovim procesom. U današnja vremena, možda najzanimljiviji primjer korištenja teorije Markovljevih lanaca jesu Markovljevi modeli kojima se *Google* koristi za rangiranje internetskih stranica. Teoriju Markovljevih lanaca započeo je ruski matematičar Andrei Markov, u čiju je čast teorija i dobila ime.

Modernu teoriju diskretnih Markovljevih lanaca započeo je u 30-im godinama 20. stoljeća Wolfgang Doeblin. Njegova prerana i tragična smrt u II. svjetskom ratu sigurno je usporila razvoj teorije. Ipak, većina teorije razvijena je do kraja 50-ih godina prošloga stoljeća. Ovaj će se rad baviti teorijom Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja. Temelji teorije postavljeni su 40-ih godina 20. stoljeća. U ovom ćemo se radu baviti proširenjem pomoću atoma. Takav je pristup izrazito intuitivan jer omogućava razvoj teorije analogno diskretnom slučaju i predstavlja najjednostavniji način proširenja teorije Markovljevih lanaca na općeniti skup stanja.

Rad je podijeljen u četiri poglavlja. U prvom se poglavlju, koncizno i bez dokazivanja tvrdnji, iznosi sažetak rezultata teorije Markovljevih lanaca na diskretnom skupu stanja. Drugo je poglavlje iskorišteno za uvođenje osnovnih elemenata teorije Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja, kao što su Markovljeve jezgre i njihova kompozicija. Poglavlje će završiti dokazivanjem jakog Markovljevog svojstva i iskazom nekih rezultata koji iz njega slijede. Nakon toga će se u trećem poglavlju uvesti pojam atoma. Pojam atoma i tvrdnje iz prethodnih poglavlja omogućit će dokaz raznih rezultata kao što su ergodski teorem i centralni granični teorem za Markovljeve lance na općenitom skupu stanja. Za kraj će se, u četvrtome poglavlju, pomoću primjera Gl/G/1 repa prikazati korištenje rezultata koje smo dokazali. Također će se pokazati način konstrukcije mnogobrojnih primjera Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja. U dodatku će biti iskazani neki rezultati iz teorije mjere i teorije vjerojatnosti koji su bili korišteni u radu.

Poglavlje 1

Markovljevi lanci na diskretnom skupu stanja

Ponavljanjem u ovome poglavlju prisjetit ćemo se osnovnih definicija i rezultata vezanih uz Markovljeve lance na diskretnome skupu stanja. Kasnije ćemo pokušati poopćiti teoriju ovoga poglavlja nadajući se sličnim ili potpuno analognim rezultatima. Tvrdnje ovoga poglavlja nećemo dokazivati, ali se dokazi mogu pronaći u [3] ili [5]. Započinjemo definicijom slučajnoga procesa i definicijom Markovljevoga lanca na prebrojivom prostoru stanja.

Definicija 1.0.1. *Neka je S skup.* Slučajan proces *s diskretnim vremenom i prostorom stanja S je familija $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajnih varijabli (ili elemenata) definiranih na nekom vjerojatnosom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u S.*

Definicija 1.0.2. *Neka je S prebrojiv skup. Slučajan proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u S je* Markovljev lanac *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \tag{1.1}$$

za svaki $n \geq 0$ i za sve $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$ za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

Svojstvo iz relacije (1.1) naziva se *Markovljevim svojstvom.* Intuitivno, Markovljevo svojstvo nam govori da ponašanje Markovljevoga lanca u neposrednoj budućnosti ovisi samo o sadašnjosti, a ne i o prošlosti. Važnu ulogu je igrao pojam *stohastičke matrice*.

Definicija 1.0.3. *Matrica $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ naziva se* stohastičkom matricom *ako je $p_{ij} \geq 0$ za sve $i, j \in S$, te*

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \text{ za sve } i \in S. \tag{1.2}$$

Prisjetimo se da je teorija bila građena za *homogene Markovljeve lance*. Lance kod kojih prijelazna vjerojatnost nije ovisila o vremenu.

Definicija 1.0.4. *Neka je $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ vjerojatnosna distribucija na S i neka je $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ stohastička matrica. Slučajan proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s prostorom stanja S je* homogen Markovljev lanac *s početnom distribucijom λ i prijelaznom matricom P ako vrijedi*

1. *$\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i$, za sve $i \in S$ te*

2. $$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij} \tag{1.3}$$
   za svaki $n \geq 0$ i za sve $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$.

Takvi lanci ponekad se nazivaju (λ, P)-Markovljevi lanci. A priori nije jasno da je homogeni Markovljev lanac zaista Markovljev lanac. Ta tvrdnja se lako dokazuje kao posljedica sljedećeg teorema, a izvod se može naći u [5].

Teorem 1.0.5. *Neka je X (λ, P)-Markovljev lanac. Tada za sve $n \geq 0$ i za sva stanja $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}. \tag{1.4}$$

Obratno, pretpostavimo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajan proces s konačnodimenzionalinim distribucijama danim formulom (1.4)*, gdje je λ neka vjerojatnosna distribucija na S, a P neka stohastička matrica na S. Tada je X (λ, P)-Markovljev lanac.*

Primijetimo da ovisno o S stohastička matrica može biti konačna matrica ili beskonačna. Množenje beskonačnih stohastičkih matrica definira se analogno kao kod konačnih. Ako su $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ i $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$ matrice, onda definiramo $PQ = (r_{ij} : i, j \in S)$ sa $r_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik} q_{kj}$. Primijenimo li to sada na n-tu potenciju dobivamo

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{i i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-2} i_{n-1}} p_{i_{n-1} j}. \tag{1.5}$$

Gdje je $P^n = (p_{ij}^{(n)} : i, j \in S)$. Dodatno iz (1.4) i (1.5) dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_{i_0 \in S} \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} j} \\ &= \sum_{i_0 \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 j}^{(n)} = (\lambda P^n)_j \ . \end{aligned}$$

Također definiramo uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}_i$ formulom $\mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}(A \mid X_0 = i), A \in \mathcal{F}$ pa dobivamo

$$\mathbb{P}_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)}, \text{ za sve } n \geq 0. \tag{1.6}$$

Dakle, vjerojatnost da se lanac u trenutku n nalazi u stanju j, a krenuo je iz stanja i, jednaka je ij-tom elementu n-te potencije prijelazne matrice P. Vrlo je važan rezultat poznat pod nazivom Chapman-Kolmogorovljeva jednakost:

$$\mathbb{P}_i(X_{m+n} = j) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}, \text{ za sve } m, n \geq 0 \text{ i sve } i, j \in S. \tag{1.7}$$

Intuitivno, izraz tvrdi da lanac koji kreće iz stanja i, te se u trenutku $n + m$ nalazi u stanju j, mora u trenutku n biti u nekom stanju $k \in S$, te iz tog stanja k u preostalih m koraka treba stići u stanje j.

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prostorom stanja S i prijelaznom matricom P. Za $B \subseteq S$ definiramo *prvo vrijeme pogađanja* toga skupa kao

$$T_B = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\}, \tag{1.8}$$

uz konvenciju $\min \emptyset = \infty$. Kada je B jednočlan skup, pisat ćemo T_j. Za podskup $C \subset S$ skupa stanja kažemo da je *zatvoren* ako za svako stanje $i \in C$ vrijedi $\mathbb{P}_i(T_{S \setminus C} = \infty) = 1$, tj. skup C je zatvoren ako lanac ne može izaći iz C. Za stanje $j \in S$ kažemo da je *apsorbirajuće* ako je $\{j\}$ zatvoren skup. Važnu ulogu imaju i *vremena zaustavljanja*.

Definicija 1.0.6. *Slučajna varijabla $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ zove se* vrijeme zaustavljanja *ako je za sve $n \geq 0$*

$$\{T \leq n\} \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n),$$

tj. događaj $\{T \leq n\}$ ovisi samo o $X_0, X_1, \dots, X_n$.

Sa δ^i ćemo označavati distribuciju koncentriranu u jednom stanju. Dakle $\delta^i = (\delta_{ij} : j \in S)$ gdje je δ_{ij} Kroneckerova delta. Za dano vrijeme zaustavljanja T definiramo slučajnu varijablu X_T formulom

$$X_T(\omega) = X_n(\omega), \text{ ako je } T(\omega) = n.$$

Sada možemo iskazati jako Markovljevo svojstvo.

Teorem 1.0.7 (Jako Markovljevo svojstvo)**.** *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ (λ, P)-Markovljev lanac na prostoru stanja S te neka je T vrijeme zaustavljanja. Tada je uvjetno na $X_T = i$ slučajni proces $(X_{T+n} : n \geq 0)$ (δ^i, P)-Markovljev lanac nezavisan od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \dots, X_T$.*

S $T_i^{(1)}$ označavat ćemo *prvo vrijeme povratka* u stanje i definirano sa $T_i^{(1)} = \min\{n > 0 : X_n = i\}$, uz konvenciju $\min \emptyset = \infty$.

Definicija 1.0.8. *Stanje $i \in S$ je* povratno *ako vrijedi* $\mathbb{P}_i\left(T_i^{(1)} < \infty\right) = 1$. *Stanje $i \in S$ je* prolazno *ako vrijedi* $\mathbb{P}_i\left(T_i^{(1)} < \infty\right) < 1$. *Stanje $i \in S$ je* pozitivno povratno *ako vrijedi* $\mathbb{E}_i\left(T_i^{(1)}\right) < \infty$ *te* nul-povratno *ako je povratno i vrijedi* $\mathbb{E}_i\left(T_i^{(1)}\right) = \infty$.

Označimo sa N_i broj posjeta stanju $i \in S$. Preciznije, $N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}}$. Idućim teoremima iskazuju se važne karakterizacije povratnosti i prolaznosti.

Teorem 1.0.9. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $i \in S$ *je povratno;*
2. $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$*;*
3. $\mathbb{E}_i N_i = \infty$*;*
4. $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 1$.

Teorem 1.0.10. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $i \in S$ *je prolazno;*
2. $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$*;*
3. $\mathbb{E}_i N_i < \infty$*;*
4. $\mathbb{P}_i(N_i < \infty) = 1$.

Ako vrijedi jedna od gornjih tvrdnji, N_i ima geometrijsku distribuciju s parametrom $\mathbb{P}_i(T_i^{(1)} = \infty)$ (uz vjerojatnost $\mathbb{P}_i$).

Prisjetimo se da je *stacionarna distribucija* Markovljevoga lanca vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i : i \in S)$ koja zadovoljava $\pi = \pi P$. Ako za početnu distribuciju Markovljevoga lanca uzmemo stacionarnu distribuciju, lanac će biti stacionaran proces. Netrivijalna mjera $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ je *invarijantna mjera* Markovljevoga lanca X ako vrijedi $\lambda = \lambda P$. U nastavku slijede dva važna rezultata vezana uz ove pojmove. Za stanja $i, j \in S$ kažemo da je j *dostižno* iz i ako vrijedi $\mathbb{P}_i(T_j < \infty) > 0$, a to ćemo označavati sa $i \longrightarrow j$. Kažemo da stanja $i, j \in S$ *komuniciraju* ako vrijedi $i \longrightarrow j$ i $j \longrightarrow i$. Lanac je *ireducibilan* ako sva stanja međusobno komuniciraju.

Propozicija 1.0.11. *Neka je $i \in S$ povratno stanje. Za $j \in S$ definiramo*

$$\nu_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{T_i^{(1)}-1} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}} .$$

Tada je ν invarijantna mjera. Ako je stanje i pozitivno povratno, tada je

$$\pi_j = \frac{\nu_j}{\mathbb{E}_i(T_i^{(1)})}, \ j \in S,$$

stacionarna distribucija.

Teorem 1.0.12. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i povratan Markovljev lanac. Tada je ν iz propozicije 1.0.11 invarijantna mjera, takva da vrijedi $\nu_j > 0$ za sve $j \in S$. Ako je λ neka druga invarijantna mjera za X, tada postoji $c > 0$, takav da je $\lambda = c\nu$.*

Primijetimo da iz ovih dvaju rezultata slijedi da će pozitivno povratni, ireducibilni lanci imati jedinstvenu stacionarnu distribuciju. Za kraj ovoga poglavlja iskazujemo ergodski teorem.

Teorem 1.0.13 (Ergodski teorem)**.** *Pretpostavimo da je Markovljev lanac $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i pozitivno povratan te neka je π njegova jedinstvena stacionarna distribucija. Pretpostavimo da je f nenegativna ili ograničena realna funkcija definirana na S. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j\right) = 1. \tag{1.9}$$

Poglavlje 2

Markovljevi lanci na općenitom skupu stanja

2.1 Osnovne definicije

Za početak ćemo uvesti općenitiju definiciju slučajnoga procesa. Zatim ćemo uvesti pojam filtracije i adaptiranosti slučajnoga procesa.

Definicija 2.1.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosti prostor,* $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ *izmjeriv prostor i* T *skup. Familija slučajnih varijabli s vrijednostima u* $\mathbb{X}$ *i indeksirana po* T *zove se* slučajni proces indeksiran po T s vrijednostima u $\mathbb{X}$.

Definicija 2.1.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor i* T *skup.*

1. *Rastući niz* σ*-podalgebri* $\{\mathcal{F}_k : k \in T\}$ *od* $\mathcal{F}$ *zove se filtracija izmjerivoga prostora* $(\Omega, \mathcal{F})$.

2. *Vjerojatnosni prostor s filtracijom* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k : k \in T\}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni je prostor nadopunjen s filtracijom.*

3. *Slučajan proces* $\{X_k : k \in T\}$ *zove se adaptirani s obzirom na filtraciju* $\{\mathcal{F}_k : k \in T\}$ *ako je za svaki* $k \in T$, X_k $\mathcal{F}_k$*-izmjeriva. Sa* $\{(X_k, \mathcal{F}_k) : k \in T\}$ *ćemo označavati da je proces* $\{X_k : k \in T\}$ *adaptiran s obzirom na filtraciju* $\{\mathcal{F}_k : k \in T\}$.

4. *Za slučajan proces* $\{X_k : k \in T\}$ *filtraciju zadanu sa* $\mathcal{F}_k^X = \sigma(X_j : j \leq k, j \in T)$ *zvat ćemo prirodnom filtracijom procesa* $\{X_k : k \in T\}$.

Primijetimo da je slučajan proces adaptiran s obzirom na svoju prirodnu filtraciju te je ona najmanja s obzirom na koju je adaptiran. Intuitivno, $\mathcal{F}_k$ možemo shvaćati kao dostupnu informaciju u vremenu k, a adaptiranost znači da se vjerojatnost događaja vezanih uz X_k

može izračunati na temelju informacije u vremenu k. Uvedimo sada definiciju Markovljevoga lanca na vjerojatnosnom prostoru s filtracijom.

Definicija 2.1.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k : k \in T\}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor s filtracijom. Adaptirani slučajni proces* $\{(X_k, \mathcal{F}_k) : k \in T\}$ *je Markovljev lanac ako za svaki* $k \in T$ *i* $A \in \mathcal{X}$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{k+1} \in A \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{P}(X_{k+1} \in A \mid X_k) \ \text{g.s.} \tag{2.1}$$

Ova je definicija zaista proširenje definicije 1.0.2. Naime, zadavanjem prirodne filtracije slučajnoga procesa u slučaju prebrojivoga skupa $\mathbb{X}$, prethodnu definiciju svodimo na definiciju 1.0.2. U nastavku ćemo na sljedeći način označavati ove skupove funkcija i mjera:

- $\mathbb{F}(\mathbb{X})$ - vektorski prostor izmjerivih funkcija sa $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
- $\mathbb{F}_+(\mathbb{X})$ - konus izmjerivih funkcija sa $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ na $([0,\infty], \mathcal{B}([0,\infty]))$;
- $\mathbb{F}_b(\mathbb{X})$ - podskup ograničenih funkcija od $\mathbb{F}(\mathbb{X})$;
- $\mathbb{M}_+(\mathcal{X})$ - skup mjera na $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$;
- $\mathbb{M}_1(\mathcal{X})$ - skup vjerojatnosnih mjera na $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$.

Primijetimo da je uvjet (2.1) ekvivalentan sa

$$\mathbb{E}[f(X_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[f(X_{k+1}) \mid X_k] \ \text{g.s.} \quad \text{za } \forall f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{X}) \cup \mathbb{F}_b(\mathbb{X}). \tag{2.2}$$

Naime, uvjet (2.1) se može zapisati kao $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_{k+1}) \mid X_k]$. Dakle, (2.2) povlači (2.1). Obratno, proizvoljna $f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{X})$ može se zapisati kao limes jednostavnih nenegativnih funkcija pa primjenom teorema o monotonoj konvergenciji slijedi tvrdnja za $f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{X})$. Ako je, pak, $f \in \mathbb{F}_b(\mathbb{X})$, tvrdnja slijedi zbog linearnosti uvjetnoga očekivanja i rastava f na f^+ i f^-.

U diskretnom slučaju vidjeli smo da je teorija bila građena za homogene Markovljeve lance te da je središnju ulogu imala matrica prijelaza. Ideja je da sada poopćimo ideju prijelazne matrice za skup stanja koji nije diskretan. Takav matematički objekt nazivat ćemo jezgra i definiramo ga u idućoj definiciji.

Definicija 2.1.4. *Neka su* $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ *i* $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ *dva izmjeriva prostora. Jezgra* N *na* $\mathbb{X} \times \mathcal{Y}$ *je preslikavanje* $N\colon \mathbb{X} \times \mathcal{Y} \to [0,\infty]$ *koje zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *za svaki* $x \in \mathbb{X}$*, preslikavanje* $N(x,\cdot)\colon A \to N(x,A)$ *je mjera na* $\mathcal{Y}$*;*
2. *za svaki* $A \in \mathcal{Y}$*, preslikavanje* $N(\cdot,A)\colon x \to N(x,A)$ *je izmjeriva funkcija sa* $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ *u* $([0,\infty], \mathcal{B}([0,\infty]))$.

Posebno, N je ograničena ako $\sup_{x\in\mathbb{X}} N(x,\mathbb{Y}) < \infty$. *$N$ je Markovljeva jezgra ako* $N(x,\mathbb{Y}) = 1$*, vrijedi za sve* $x \in \mathbb{X}$.

Primijetimo da, u diskretnom slučaju, možemo povezati jezgru i matricu prijelaza sa $N(i,\{j\}) = p_{ij}$. Dakle, zaista možemo govoriti o svojevrsnom proširenju pojma prijelazne matrice. Također, proizvoljna se σ-konačna mjera ν na prostoru $(\mathbb{Y},\mathcal{Y})$ može promatrati kao jezgra na $\mathbb{X}\times\mathcal{Y}$, definiranjem $N(x,A) = \nu(A)$ za sve $x \in \mathbb{X}$.

Neka je N jezgra na $\mathbb{X}\times\mathcal{Y}$ i $f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{Y})$. Tada definiramo funkciju $Nf\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}_+$ za $x \in \mathbb{X}$ izrazom

$$Nf(x) = \int_{\mathbb{Y}} f(y)N(x,\mathrm{d}y). \tag{2.3}$$

Ovakvu funkciju možemo definirati i za $f \in \mathbb{F}(\mathbb{Y})$ kad god Nf^+ i Nf^- nisu obje beskonačne na nekom skupu mjere jedan. Tada definiramo $Nf = Nf^+ - Nf^-$. Posebno Nf je dobro definirana za sve $f \in \mathbb{F}_b(\mathbb{Y})$. Često ćemo $Nf(x)$ označavati sa $N(x,f)$. Primijetimo da za $A \in \mathcal{Y}$ vrijedi $N\mathbb{1}_A(x) = \int_A N(x,\mathrm{d}y) = N(x,A)$. Iduća propozicija pokazuje da će ovakve funkcije biti nenegativne $\mathcal{X}$-izmjerive.

Propozicija 2.1.5. *Neka je N jezgra na $\mathbb{X}\times\mathcal{Y}$. Tada za sve $f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{Y})$ vrijedi $Nf \in \mathbb{F}_+(\mathbb{X})$. Štoviše, ako je N Markovljeva jezgra, tada je $|Nf|_\infty \le |f|_\infty$ ($|\cdot|_\infty$ je esencijalni supremum).*

Dokaz. Neka je f proizvoljna jednostavna nenegativna funkcija, tj. $f = \sum_{i\in I}\beta_i \mathbb{1}_{B_i}$ za konačnu kolekciju nenegativnih β_i i skupova $B_i \in \mathcal{Y}$. Tada za proizvoljni $x \in \mathbb{X}$, zbog linearnosti integrala i činjenice da je integral karakteristične funkcije jednak mjeri skupa, vrijedi $Nf(x) = \sum_{i\in I}\beta_i N(x,B_i)$. Nadalje, Nf je izmjeriva kao linearna kombinacija izmjerivih funkcija. Uočimo, $N(x,B_i)$ su izmjerivi po definiciji jezgre. Za svaku $f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{Y})$ postoji rastući niz $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ nenegativnih jednostavnih funkcija, takvih da $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$ za sve $y \in \mathbb{Y}$. Zbog teorema o monotonoj konvergenciji za svaki $x \in \mathbb{X}$ vrijedi

$$Nf(x) = \lim_{n\to\infty} Nf_n(x).$$

Dakle, Nf je izmjeriva kao limes niza izmjerivih funkcija. Štoviše, ako je N Markovljeva jezgra i $f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{Y})$, tada za svaki $x \in \mathbb{X}$ imamo

$$Nf(x) = \int_{\mathbb{Y}} f(y)N(x,\mathrm{d}y) \le |f|_\infty \int_{\mathbb{Y}} N(x,\mathrm{d}y) = |f|_\infty N(x,\mathbb{Y}) = |f|_\infty .$$

□

Prethodna propozicija nam omogućuje da jezgre promatramo kao operatore sa $\mathbb{F}_+(\mathbb{Y})$ u $\mathbb{F}_+(\mathbb{X})$, formulom $N(f) = Nf$. Ovdje zlorabimo notaciju označavajući sa N jezgru i pripadni operator. Primijetimo da je tako promatrani operator aditivan i pozitivno homogen, što slijedi iz analognih svojstava integrala. Također za rastući niz $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{F}_+(\mathbb{Y})$ iz teorema o monotonoj konvergenciji slijedi $\lim_{n\to\infty} Nf_n = N(\lim_{n\to\infty} f_n)$. Zanimljivo je da vrijedi i obrat koji je dan idućom propozicijom. Dokaz propozicije može se naći u [1].

Propozicija 2.1.6. *Neka je $M\colon \mathbb{F}_+(\mathbb{Y}) \to \mathbb{F}_+(\mathbb{X})$ aditivan i pozitivno homogen operator takav da je $\lim_{n\to\infty} M(f_n) = M(\lim_{n\to\infty} f_n)$ za svaki rastući niz funkcija iz $\mathbb{F}_+(\mathbb{Y})$. Tada vrijedi:*

1. *funkcija N definirana na $\mathbb{X} \times \mathcal{Y}$ sa $N(x, A) = M(\mathbb{1}_A)(x)$, $x \in \mathbb{X}, A \in \mathcal{Y}$, je jezgra;*
2. *$M(f) = Nf$ za sve $f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{Y})$.*

Jezgre mogu djelovati i na mjere. Neka je $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathcal{X})$, za $A \in \mathcal{Y}$, definiramo

$$\mu N(A) = \int_{\mathbb{X}} N(x, A)\mu(\mathrm{d}x). \tag{2.4}$$

Propozicija 2.1.7. *Neka je N jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{Y}$ i $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathcal{X})$. Tada je $\mu N \in \mathbb{M}_+(\mathcal{Y})$. Ako je N Markovljeva jezgra, tada je $\mu N(\mathbb{Y}) = \mu(\mathbb{X})$.*

Dokaz. Primijetimo da je $\mu N(A) \geq 0$ za sve $A \in \mathcal{Y}$ i $\mu N(\emptyset) = 0$ budući da je $N(x, \emptyset) = 0$ za sve $x \in \mathbb{X}$. Dakle, treba još pokazati da je μN σ-aditivna. Neka je $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{Y}$ niz međusobno disjunktnih skupova. Znamo da je za svaki $x \in \mathbb{X}$, $N(x, \cdot)$ mjera na $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$, dakle $N\left(x, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} N(x, A_i)$. Budući da je funkcija $x \mapsto N(x, A_i)$ nenegativna i izmjeriva za sve $i \in \mathbb{N}$, po Beppo Levijevom teoremu imamo

$$\mu N\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \int_{\mathbb{X}} N\left(x, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\mu(\mathrm{d}x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{X}} N(x, A_i)\mu(\mathrm{d}x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu N(A_i).$$

Za Markovljevu jezgru imamo

$$\mu N(\mathbb{Y}) = \int_{\mathbb{X}} N(x, \mathbb{Y})\mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{X}} \mu(\mathrm{d}x) = \mu(\mathbb{X}).$$

□

Prisjetimo se da je množenje matrica zapravo komponiranje linearnih operatora, analogno uvodimo pojam kompozicije jezgri sljedećom propozicijom.

Propozicija 2.1.8. *Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$, $(\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ tri izmjeriva prostora i neka su M i N dvije jezgre na $\mathbb{X} \times \mathcal{Y}$ i $\mathbb{Y} \times \mathcal{Z}$. Tada postoji jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{Z}$, koju ćemo zvati kompozicija ili produkt od M i N i označavati ju sa MN, takva da za sve $x \in \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{Z}$ i $f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{Z})$ vrijedi:*

$$MN(x, A) = \int_{\mathbb{Y}} N(y, A)M(x, \mathrm{d}y) \tag{2.5}$$

$$MNf(x) = M\left[Nf\right](x). \tag{2.6}$$

Nadalje, komponiranje jezgri je asocijativna operacija.

Dokaz. Kao što je već bilo komentirano, jezgre možemo promatrati kao operatore. Stoga možemo definirati novi operator $M \circ N$, gdje je $\circ$ prirodna kompozicija operatora. Sada želimo pokazati da taj operator zadovoljava uvjete iz propozicije 2.1.6. Aditivnost i pozitivna homogenost slijede iz svojstva kompozicije i analognih svojstava operatora koje komponiramo. Ako uzmemo proizvoljan rastući niz $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{F}_+(\mathbb{Z})$, primjenom teorema o monotonoj konvergenciji dva puta dobivamo $\lim_{n\to\infty} M \circ N(f_n) = M \circ N(\lim_{n\to\infty} f_n)$. Dakle, po propoziciji 2.1.6 postoji jezgra koju možemo označiti sa MN, takva da za sve $x \in \mathbb{X}$ i $f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{Z})$ vrijedi

$$M\left[Nf\right](x) = M \circ N(f)(x) = \int_{\mathbb{Z}} f(z) MN(x, \mathrm{d}z) = MNf(x).$$

Nadalje, za sve $x \in \mathbb{X}$ i $A \in \mathcal{Z}$ vrijedi

$$MN(x, A) = M(N\,\mathbb{1}_A)(x) = \int_{\mathbb{Y}} N\,\mathbb{1}_A(y) M(x, \mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{Y}} N(y, A) M(x, \mathrm{d}y).$$

Asocijativnost je posljedica asocijativnosti kompozicije operatora. $\square$

Sad za Markovljevu jezgru N na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ možemo definirati n-tu potenciju iterativno. Za $x \in \mathbb{X}$ i $A \in \mathcal{X}$ definiramo $N^0(x, A) = \delta_x(A)$, gdje je δ_x Diracova mjera. Za $n \geq 1$ induktivno definiramo N^n sa

$$N^n(x, A) = \int_{\mathbb{X}} N^{n-1}(y, A) N(x, \mathrm{d}y). \tag{2.7}$$

Za $k, n \geq 0$, iz definicije dobivamo poopćenu Chapman-Kolmogorovljevu jednakost

$$N^{n+k}(x, A) = \int_{\mathbb{X}} N^k(y, A) N^n(x, \mathrm{d}y). \tag{2.8}$$

Zaista u slučaju diskretnog skupa stanja $\mathbb{X}$, izraz (2.8) postaje (1.7). Idućom propozicijom uvodimo tenzorski produkt jezgara, koji će se pokazati presudnimn za proširenu definiciju homogenih Markovljevih lanaca. $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ označava produktnu σ-algebru.

Propozicija 2.1.9. *Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ i $(\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ tri izmjeriva prostora, te neka su M i N dvije jezgre na $\mathbb{X} \times \mathcal{Y}$ i $\mathbb{Y} \times \mathcal{Z}$. Tada postoji jezgra na $\mathbb{X} \times (\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$, koju ćemo zvati tenzorski produkt od M i N i označavati sa $M \otimes N$, takva da za sve $x \in \mathbb{X}$ i $f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{Y} \times \mathbb{Z}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ vrijedi*

$$M \otimes Nf(x) = \int_{\mathbb{Y}} \int_{\mathbb{Z}} f(y, z) N(y, \mathrm{d}z) M(x, \mathrm{d}y). \tag{2.9}$$

- *Ako su M i N ograničene, onda je $M \otimes N$ ograničena.*

- *Ako su M i N Markovljeve, onda je $M \otimes N$ Markovljeva.*

- *Tenzorski produkt je asocijativan.*

Dokaz. Primijetimo da gornji integral zbog Fubinijevoga teorema možemo pisati u bilo kojemu obliku. Definiramo preslikavanje $I\colon \mathbb{F}_+(\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}) \to \mathbb{F}_+(\mathbb{X})$ sa

$$If(x) = \int_{\mathbb{Y}} \int_{\mathbb{Z}} f(y,z)N(y,\mathrm{d}z)M(x,\mathrm{d}y).$$

Preslikavanje je aditivno i pozitivno homogeno zbog analognih tvrdnji za integral. Također zbog teorema o monotonoj konvergenciji $I(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$ za svaki rastući niz $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dakle, iz propozicije 2.1.6 slijedi postojanje takvoga operatora. Neka su M i N ograničene. Tada imamo

$$\sup_{x\in\mathbb{X}} M\otimes N(x,\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}) = \sup_{x\in\mathbb{X}} M\otimes N(\mathbb{1}_{\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}})(x) = \sup_{x\in\mathbb{X}} \int_{\mathbb{Y}} \int_{\mathbb{Z}} N(y,\mathrm{d}z)M(x,\mathrm{d}y) < \infty.$$

Dakle, $M\otimes N$ je ograničena. Ako su M i N Markovljeve, imamo

$$M\otimes N(x,\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}) = M\otimes N(\mathbb{1}_{\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}})(x) = \int_{\mathbb{Y}} \int_{\mathbb{Z}} N(y,\mathrm{d}z)M(x,\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{Y}} M(x,\mathrm{d}y) = 1.$$

Dakle, $M\otimes N$ je Markovljeva. Neka je $(\mathbb{U},\mathcal{U})$ još jedan izmjeriv prostor i P jezgra na $\mathbb{Z}\times\mathcal{U}$. Imamo

$$\begin{aligned}(M\otimes N)\otimes Pf(x) &= \int_{\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{U}} f(y,z,u)M\otimes N(x,\mathrm{d}(y,z))P(z,\mathrm{d}u) = \\ &= \int_{\mathbb{Y}} \int_{\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{U}} f(y,z,u)M(x,\mathrm{d}y)N(y,\mathrm{d}z)P(z,\mathrm{d}u) = \\ &= \int_{\mathbb{Y}} \int_{\mathbb{Z}\times\mathbb{U}} f(y,z,u)M(x,\mathrm{d}y)N\otimes P(y,\mathrm{d}(z,u)) = M\otimes(N\otimes P)f(x).\end{aligned}$$

Dakle, tenzorski produkt je asocijativan. □

Za $n \geq 1$ n-ta tenzorska potencija $P^{\otimes n}$ jezgre P na $\mathbb{X}\times\mathcal{X}$ je jezgra na $(\mathbb{X},\mathcal{X}^{\otimes n})$ definirana sa

$$P^{\otimes n}f(x) = \int_{\mathbb{X}^n} f(x_1,\dots,x_n)P(x,\mathrm{d}x_1)\cdots P(x_{n-1},\mathrm{d}x_n). \tag{2.10}$$

Ako je ν σ-konačna mjera na $(\mathbb{X},\mathcal{X})$ i N jezgra na $\mathbb{X}\times\mathcal{Y}$, tada definiramo tenzorski produkt od ν i N, koji ćemo označavati sa $\nu\otimes N$ i koji će biti mjera na $(\mathbb{X}\times\mathbb{Y},\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})$ definirana sa

$$\nu\otimes N(A\times B) = \int_A N(x,B)\nu(\mathrm{d}x), \quad \text{za sve } A\in\mathcal{X}, B\in\mathcal{Y}.$$

Sada smo u prilici definirati homogene Markovljeve lance. U nastavku je $T = \mathbb{Z}_+$ ili $T = \mathbb{Z}$.

Definicija 2.1.10 (Homogeni Markovljevi lanci)**.** *Neka je* $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ *izmjeriv prostor i neka je* P *Markovljeva jezgra na* $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$*. Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k : k \in T\}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor s filtracijom. Adaptirani slučajni proces* $\{(X_k, \mathcal{F}_k) : k \in T\}$ *se zove* homogeni Markovljev lanac *s jezgrom* P *ako za svaki* $A \in \mathcal{X}$ *i* $k \in T$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{k+1} \in A \mid \mathcal{F}_k) = P(X_k, A) \text{ g.s.} \tag{2.11}$$

Ako je $T = \mathbb{Z}_+$*, onda se distribucija od* X_0 *naziva* početnom *distribucijom.*

Prvo primijetimo da je prethodna definicija poopćenje definicije 1.0.4. Kao i kod Markovljevoga lanca izraz (2.11) je ekvivalentan sa

$$\mathbb{E}\left[f(X_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k\right] = Pf(X_k) \text{ g.s.} \quad \text{za } \forall f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{X}) \cup \mathbb{F}_b(\mathbb{X}). \tag{2.12}$$

Naime uvjet (2.11) može se zapisati kao $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(X_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k\right] = P\,\mathbb{1}_A(X_k)$ g.s. Dakle, jedan smjer slijedi iz činjenice $\mathbb{1}_A \in \mathbb{F}_+(\mathbb{X}) \cup \mathbb{F}_b(\mathbb{X})$. Obratno, (2.12) vrijedi za jednostavne nenegativne funkcije zbog aditivnosti i pozitivne homogenosti uvjetnoga očekivanja i P-a. Nadalje, po teoremu o monotonoj konvergenciji (2.12) vrijedi za sve $f \in \mathbb{F}_+(\mathbb{X})$. Za $f \in \mathbb{F}_b(\mathbb{X})$ tvrdnja slijedi zbog linearnosti uvjetnoga očekivanja i načina na koji smo u ovom slučaju definirali Pf.

Ako je $\{(X_k, \mathcal{F}_k) : k \in T\}$ homogen Markovljev lanac, tada je $\{(X_k, \mathcal{F}^X_k) : k \in T\}$ također homogen Markovljev lanac. Naime, vrijedi $\mathcal{F}^X_k \subseteq \mathcal{F}_k$ za sve $k \in T$ jer je po definiciji 2.1.2 $\mathcal{F}^X_k$ najmanja σ-algebra takva da su slučajne varijable $\{X_j : j \leq k, j \in T\}$ izmjerive. U nastavku ćemo podrazumijevati prirodnu filtraciju, ako drugačije nije navedeno. Sada jednostavnije možemo pisati da je $\{X_k : k \in T\}$ homogeni Markovljev lanac. Također, ako nije drukčije navedeno, $T = \mathbb{Z}_+$. Ako su $f\colon \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{R}$ dvije funkcije, onda ćemo sa $f \otimes g$ označavati funkciju sa $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ u $\mathbb{R}$ definiranu za sve $(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ sa $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$. Naravno oznaka se prirodno proširuje za veći broj funkcija. Idući teorem je poopćenje teorema 1.0.5.

Teorem 2.1.11. *Neka je* P *Markovljeva jezgra na* $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ *i* ν *vjerojatnosna mjera na* $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$*. Slučajan proces* $\{X_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ *s vrijednostima u* $\mathbb{X}$ *je homogeni Markovljev lanac s jezgrom* P *i početnom distribucijom* ν *ako i samo ako je* $\nu \otimes P^{\otimes k}$ *distribucija od* $(X_0, \ldots, X_k)$ *za sve* $k \in Z_+$*.*

Dokaz. Neka je $\{X_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ homogeni Markovljev lanac i fiksirajmo $k \geq 0$. Želimo dokazati da vrijedi

$$\mathbb{E}\left[f(X_0, \ldots, X_k)\right] = \nu \otimes P^{\otimes k}(f), \quad \text{za } \forall f \in \mathbb{F}_b(\mathbb{X}^{k+1}, \mathcal{X}^{\otimes(k+1)}). \tag{2.13}$$

Znamo da je $\nu \otimes P^{\otimes k}$ mjera na $(\mathbb{X}^{k+1}, \mathcal{X}^{\otimes(k+1)})$ pa $\nu \otimes P^{\otimes k}(f)$ označava integral od f nad $\mathbb{X}^{k+1}$ s obzirom na mjeru $\nu \otimes P^{\otimes k}$. Također primijetimo da nam je dovoljna i slabija tvrdnja od (2.13)

$$\mathbb{E}\left[f(X_0, \ldots, X_k)\right] = \nu \otimes P^{\otimes k}(f), \quad \text{za } \forall f = \mathbb{1}_A,\ A \in \mathcal{X}^{\otimes(k+1)}. \tag{2.14}$$

Budući da je integral karakteristične funkcije upravo mjera skupa na kojemu je karakteristična funkcija definirana, jasno je da (2.14) povlači tvrdnju teorema. Da bismo dokazali (2.13), poslužit ćemo se teoremom 5.0.1, i to tako da ćemo za $\mathcal{H}$ uzeti sve ograničene funkcije koje zadovoljavaju (2.13). Neka je $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ rastući ograničeni niz funkcija iz $\mathcal{H}$. Rastavimo taj niz na $f_n^+ - f_n^-$, time dobivamo dva rastuća, ograničena i nenegativna niza. Teorem o monotonoj konvergenciji pokazuje da ta dva niza konvergiraju prema $f^+, f^- \in \mathcal{H}$. Jasno je da je $\mathcal{H}$ vektorski prostor kao potprostor $\mathbb{F}(\mathbb{X})$ pa linearnost povlači prvi uvjet teorema 5.0.1. Pokažimo i drugi uvjet teorema 5.0.1. Dakle, pokazujemo da $\mathcal{H}$ sadrži funkcije oblika

$$f_0(x_0)\cdots f_k(x_k), \quad f_i = \mathbb{1}_{A_i}, A_i \in \mathcal{X}. \tag{2.15}$$

Dokaz provodimo indukcijom. Za $k = 0$ tvrdnja vrijedi budući da je ν iz pretpostavke distribucija od X_0. Za $k \geq 1$ pretpostavljamo da (2.13) vrijedi za $k-1$ i f oblika kao iz (2.15). Tada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{k} f_j(X_j)\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{k-1} f_j(X_j)\, \mathbb{E}[f_k(X_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{k-1} f_j(X_j) P f_k(X_{k-1})\right] \\
&= \nu \otimes P^{\otimes(k-1)}(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{k-1} P f_k) \\
&= \nu \otimes P^{\otimes k}(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{k-1} \otimes f_k).
\end{aligned}$$

U drugom smo koraku iskoristili svojstvo homogenoga Markovljeva lanca, a u trećem korak indukcije. U zadnjem smo koraku iskoristili

$$P(fPg) = P \otimes P(f \otimes g), \tag{2.16}$$

naime za svaki $x \in \mathbb{X}$ imamo

$$\begin{aligned}
P(fPg)(x) &= \int_{\mathbb{X}} f(x_0) P g(x_0) P(x, \mathrm{d}x_0) \\
&= \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{X}} f(x_0) g(x_1) P(x, \mathrm{d}x_0) P(x_0, \mathrm{d}x_1) \\
&= \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{X}} f \otimes g(x_0, x_1) P(x, \mathrm{d}x_0) P(x_0, \mathrm{d}x_1) \\
&= P \otimes P(f \otimes g)(x).
\end{aligned}$$

Time je kompletiran prvi smjer. Obratno, pretpostavimo da se radi o istim distribucijama. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}\left[f(X_0, \ldots, X_k)\right] = \nu \otimes P^{\otimes k}(f), \tag{2.17}$$

za sve $f \in \mathbb{F}(\mathbb{X}^{k+1}, \mathcal{X}^{\otimes(k+1)})$ kad su integrali dobro definirani. Ako uzmemo $k = 0$, dobivamo da je ν distribucija od X_0. Za $k \geq 1$ dokazat ćemo da za proizvoljnu $f = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{X}$ i svaku $Y = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathcal{F}_{k-1}^X$ vrijedi

$$\mathbb{E}\left[f(X_k)Y\right] = \mathbb{E}\left[Pf(X_{k-1})Y\right]. \tag{2.18}$$

Označimo sa $\mathcal{G}_k$ skup svih ograničenih $\mathcal{F}_{k-1}^X$-izmjerivih slučajnih varijabli koje zadovoljavaju (2.18). Jasno je da se radi o vektorskome prostoru. Ako uzmemo rastući i ograničen niz $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{G}_k$, ponovnim razdvajanjem na dva niza, primjenom teorema o monotonoj konvergenciji i korištenjem linearnosti od $\mathcal{G}_k$, dobivamo prvi uvjet teorema 5.0.1. Nadalje, za $Y = \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{1}_{B_i}(X_i)$, gdje je $B_i \in \mathcal{X}$ za $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(X_k)Y\right] &= \mathbb{E}\left[f(X_k)\prod_{i=0}^{k-1}\mathbb{1}_{B_i}(X_i)\right] = \nu \otimes P^{\otimes k}(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{k-1} \otimes f) = \\ &= \nu \otimes P^{\otimes(k-1)}(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{k-1}Pf) = \mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{k-1} f_j(X_j)Pf(X_{k-1})\right] = \mathbb{E}\left[Pf(X_{k-1})Y\right].\end{aligned}$$

Sad smo u prilici još jednom se pozvati na teorem 5.0.1, čime je dokaz završen. □

Pokažimo sad kako su homogeni Markovljevi lanci zaista Markovljevi lanci. Primijetimo da je dovoljno dokazati da za $f = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{X}$, $k \in T$ vrijedi

$$\mathbb{E}[f(X_{k+1}) \mid X_k] = Pf(X_k). \tag{2.19}$$

Da bismo to pokazali, uzmimo $Y = \prod_{i=0}^{k} \mathbb{1}_{B_i}(X_i)$, gdje je $B_k \in \mathcal{X}$ proizvoljan, a $B_i = \mathbb{X}$ za $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Primijetimo da je zapravo $Y = \mathbb{1}_{B_k}(X_k)$. Sada imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(X_{k+1})Y\right] &= \mathbb{E}\left[f(X_{k+1})\prod_{i=0}^{k}\mathbb{1}_{B_i}(X_i)\right] \overset{2.1.11}{=} \nu \otimes P^{\otimes(k+1)}(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{k-1} \otimes f_k \otimes f) = \\ &= \nu \otimes P^{\otimes k}(f_0 \otimes \cdots \otimes f_k Pf) \overset{2.1.11}{=} \mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{k} f_j(X_j)Pf(X_k)\right] = \mathbb{E}\left[Pf(X_k)Y\right].\end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti $B_k \in \mathcal{X}$ slijedi (2.19).

Korolar 2.1.12. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ i ν vjerojatnosna mjera na $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$. Neka je $\{X_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ homogeni Markovljev lanac na $\mathbb{X}$ s jezgrom P i početnom distribucijom ν. Tada je za sve $n, k \geq 0$, $\nu P^n \otimes P^{\otimes k}$ distribucija od $(X_n, \ldots, X_{n+k})$. Također, za sve $n, m, k \geq 0$ i sve ograničene izmjerive funkcije f definirane na $\mathbb{X}^{k+1}$ vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[f(X_{n+m}, \ldots, X_{n+m+k}) \,\middle|\, \mathcal{F}_n^{\mathbb{X}}\right] = P^m \otimes P^{\otimes k} f(X_n).$$

Dokaz. Fiksirajmo $n \geq 0$ te odredimo distribuciju od X_n. Za proizvoljni $A \in \mathcal{X}$ imamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X_0 \in \mathbb{X}, \dots, X_{n-1} \in \mathbb{X}, X_n \in A) &\overset{2.1.11}{=} \nu \otimes P^{\otimes n}(\underbrace{\mathbb{X} \times \cdots \times \mathbb{X}}_{n \text{ puta}} \times A) = \\
&= \int_{\mathbb{X}} P^{\otimes n}(x_0, \underbrace{\mathbb{X} \times \cdots \times \mathbb{X}}_{n-1 \text{ puta}} \times A)\nu(\mathrm{d}x_0) = \\
&= \int_{\mathbb{X}} P^{\otimes n}\, \mathbb{1}_{\mathbb{X}\times\cdots\times\mathbb{X}\times A}(x_0)\nu(\mathrm{d}x_0) = \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{X}} \cdots \int_{\mathbb{X}}}_{n \text{ puta}} \int_A \nu(\mathrm{d}x_0)P(x_0, \mathrm{d}x_1)\cdots P(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) = \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{X}} \cdots \int_{\mathbb{X}}}_{n+1 \text{ puta}} \nu(\mathrm{d}x_0)P(x_0, \mathrm{d}x_1)\cdots P(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n)\delta_A(x_n) = \\
&= \int_{\mathbb{X}} P^n(x_0, A)\nu(\mathrm{d}x_0) \\
&= \nu P^n(A).
\end{aligned}
$$

Dakle, νP^n je distribucija od X_n ako sada promatramo novi lanac gdje je $T = \{n, n+1, \dots\}$. Ponovno se radi o homogenom Markovljevu lancu jer sve varijable zadovoljavaju definicijsko svojstvo budući da su dio homogenoga lanca. Početna je distribucija novoga lanca distribucija od X_n. Dakle, po teoremu 2.1.11 slijedi da je $\nu P^n \otimes P^{\otimes k}$ distribucija od $(X_n, \dots, X_{n+k})$.

Po već pokazanome, $\nu \otimes P^{\otimes(n+m+k)}$ jest distribucija od $(X_0, \dots, X_{n+m+k})$. Dakle, vrijedi

$$\mathbb{E}\left[f(X_0, \dots, X_{n+m+k})\right] = \nu \otimes P^{\otimes(n+m+k)}(f)$$

za sve $f \in \mathbb{F}(\mathbb{X}^{n+m+k+1}, \mathcal{X}^{\otimes(n+m+k+1)})$ kada su integrali dobro definirani. Trebamo dokazati da za proizvoljnu izmjerivu i ograničenu f i svaku $Y = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathcal{F}_n^{\mathbb{X}}$ vrijedi

$$\mathbb{E}\left[f(X_{n+m}, \dots, X_{n+m+k})Y\right] = \mathbb{E}\left[P^m \otimes P^{\otimes k} f(X_n)Y\right].$$

Za razliku od prije, sada ćemo funkcijom smatrati zajedno f i Y. Označimo sa $\mathcal{G}_{n+m+k}$ skup svih ograničenih $\mathcal{F}^X_{n+m+k}$-izmjerivih slučajnih varijabli koje imaju takav oblik i zadovoljavaju prethodno svojstvo. Jasno je da se radi o vektorskome prostoru. Ako uzmemo rastući i ograničen niz $\{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{G}_n$, ponovnim razdvajanjem na dva niza, primjenom teorema o monotonoj konvergenciji i korištenjem linearnosti od $\mathcal{G}_n$ dobivamo prvi uvjet teorema 5.0.1. Nadalje, za $Y = \prod_{i=0}^n \mathbb{1}_{B_i}(X_i)$, gdje je $B_i \in \mathcal{X}$ i $f = \prod_{j=n+m}^{n+m+k} \mathbb{1}_{A_j}$, gdje je $A_j \in \mathcal{X}$, imamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(X_{n+m},\dots,X_{n+m+k})Y\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{j=n+m}^{n+m+k} \mathbb{1}_{A_j}(X_j)\prod_{i=0}^{n}\mathbb{1}_{B_i}(X_i)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{j=n+m}^{n+m+k} \mathbb{1}_{A_j}(X_j)\prod_{k=n+1}^{n+m-1}\mathbb{1}_{\mathbb{X}}(X_k)\prod_{i=0}^{n}\mathbb{1}_{B_i}(X_i)\right] \\
&= \nu \otimes P^{\otimes(n+m+k)}(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{n+m+k}) \\
&= \nu \otimes P^{\otimes n}(f_0 \otimes \cdots \otimes f_n P^m f_{n+m} P f_{n+m+1} P \cdots P f_{n+m+k}) \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{n}\mathbb{1}_{B_i}(X_i) P^m f_{n+m} P f_{n+m+1} P \cdots P f_{n+m+k}(X_n)\right] \\
&\overset{(2.16)}{=} \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{n}\mathbb{1}_{B_i}(X_i) P^m \otimes P^{\otimes k} f(X_n)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[P^m \otimes P^{\otimes k} f(X_n) Y\right].
\end{aligned}
$$

Primjenom teorema 5.0.1 slijedi tvrdnja. □

U nastavku definiramo invarijantnu mjeru i pokazujemo da je Markovljev lanac stacionaran ako i samo ako mu je početna distribucija invarijantna mjera, što je analogon istoga rezultata u diskretnom slučaju. Prisjetimo se da je slučajan proces $\{X_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ stacionaran ako za sve $k, p \geq 0$, distribucija slučajnoga vektora $(X_k, \dots, X_{k+p})$, ne ovisi o k.

Definicija 2.1.13. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$.*

- *Netrivijalna mjera μ je podinvarijantna za P ako je μ σ-konačna i $\mu P \leq \mu$.*
- *Netrivijalna mjera μ je invarijantna za P ako je μ σ-konačna i $\mu P = \mu$.*
- *Netrivijalna realna mjera μ je invarijantna za P ako je $\mu P = \mu$.*

Markovljeva jezgra P pozitivna je ako za nju postoji invarijantna vjerojatnosna mjera.

Teorem 2.1.14. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k : k \in \mathbb{Z}_+\}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor s filtracijom i neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$. Markovljev lanac $\{(X_k, \mathcal{F}_k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ definiran na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k : k \in \mathbb{Z}_+\}, \mathbb{P})$ s jezgrom P je stacionaran ako i samo ako je početna distribucija invarijantna za P.*

Dokaz. Neka π označava početnu distribuciju. Ako je lanac stacionaran, onda X_0 i X_1 imaju iste distribucije. A to znači da je $\pi = \pi P$. Obratno, ako je $\pi P = \pi$, tada je i $\pi P^h = \pi$ za sve $h \geq 0$. Prema korolaru 2.1.12 je $\pi P^h \otimes P^{\otimes n} = \pi \otimes P^{\otimes n}$ distribucija od $(X_h, \dots, X_{h+n})$, što ne ovisi o h. □

2.2 Jako Markovljevo svojstvo

Definicija 2.2.1 (Koordinatni proces). *Neka je* $\Omega = \mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+}$ *skup nizova* $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots)$ *koji sa* $\mathcal{X}^{\otimes \mathbb{Z}_+}$ *čini izmjeriv prostor.* Koordinatni proces $\{X_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ *definira se sa*

$$X_k(\omega) = \omega_k,\ \omega \in \Omega. \tag{2.20}$$

Kanonskim prostorom *nazivat ćemo* $(\mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+}, \mathcal{X}^{\otimes \mathbb{Z}_+})$*, a* $\omega \in \Omega$ *nazivat ćemo trajektorija ili put.*

Za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ definiramo $\mathcal{F}_n^{ko} = \sigma(X_m : m \leq n)$. Skup $A \in \mathcal{F}_n^{ko}$ može se zapisati kao $A = A_n \times \mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+}$, gdje je $A_n \in \mathcal{X}^{\otimes(n+1)}$. Funkcija $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{F}_n^{ko}$-izmjeriva ako ovisi samo o prvih n koordinata. Posebno preslikavanje koje vraća n-tu koordinatu je $\mathcal{F}_n^{ko}$-izmjerivo. Familiju $\{\mathcal{F}_n^{ko} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ ćemo nazivati kanonskom filtracijom. Zapravo se radi o prirodnoj filtraciji koordinatnoga procesa. Definiramo algebru $\mathcal{A} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n^{ko}$. Skup $A \in \mathcal{A}$ zove se cilindar ako vrijedi

$$A = \prod_{n=0}^{\infty} A_n,\ A_n \in \mathcal{X},$$

gdje je $A_n \neq \mathbb{X}$ za samo konačno mnogo n-ova. Konačno, sa $\mathcal{F}$ označavamo σ-algebru generiranu sa $\mathcal{A}$. Po konstrukciji, vrijedi $\mathcal{F} = \sigma(X_m : m \in \mathbb{Z}_+)$. Također, prisjetimo se da se $\mathcal{X}^{\otimes \mathbb{Z}_+}$ definira kao σ-algebra skupa svih cilindara. Budući su X_k upravo projekcije, slijedi $\mathcal{X}^{\otimes \mathbb{Z}_+} = \mathcal{F}$.

Teorem 2.2.2. *Neka je* $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ *izmjeriv prostor te neka je* P *Markovljeva jezgra na* $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$*. Za svaku vjerojatnosnu mjeru* ν *na* $\mathcal{X}$*, postoji jedinstvena vjerojatnosna* $\mathbb{P}_\nu$ *na kanonskom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+}, \mathcal{X}^{\otimes \mathbb{Z}_+})$*, takva da je koordinatni proces* $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ *Markovljev lanac s jezgrom* P *i početnom distribucijom* ν*.*

Dokaz teorema može se pronaći u [1]. Ovaj je teorem važan jer nam daje egzistenciju Markovljevoga lanca za proizvoljnu jezgru i početnu distribuciju. Također, indirektno će nam omogućiti iskaz i dokaz jakoga Markovljevog svojstva.

Definicija 2.2.3 (Kanonski Markovljev lanac). Kanonski Markovljev lanac *s jezgrom* P *na* $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ *je koordinatni proces* $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ *na kanonskome prostoru s filtracijom* $(\mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+}, \mathcal{X}^{\otimes \mathbb{Z}_+}, \{\mathcal{F}_k^{ko} : k \in \mathbb{Z}_+\})$ *nadopunjen s familijom vjerojatnosnih mjera* $\{\mathbb{P}_\nu : \nu \in \mathbb{M}_1(\mathcal{X})\}$ *danih teoremom 2.2.2.*

Ako jezgra P ima invarijantnu mjeru π, onda po teoremu 2.1.14 je kanonski lanac $\{X_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ stacionaran s početnom distribucijom $\mathbb{P}_\pi$. Sada uvodimo pojam operatora pomaka koji će igrati važnu ulogu u nastavku.

Definicija 2.2.4. *Neka je* $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ *izmjeriv prostor. Preslikavanje* $\theta\colon \mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+} \to \mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+}$ *definirano sa*

$$\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) \mapsto \theta(\omega) = (\omega_1, \omega_2, \dots) \tag{2.21}$$

naziva se operator pomaka.

Propozicija 2.2.5. *Operator pomaka* θ *je* $\mathcal{X}^{\otimes \mathbb{Z}_+}$*-izmjeriv.*

Dokaz. Za $n \in \mathbb{N}$ i $H \in \mathcal{X}^{\otimes n}$ promatrajmo cilindar $H \times \mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+}$

$$H \times \mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+} = \{\omega \in \Omega : (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in H\}. \tag{2.22}$$

Tada je

$$\theta^{-1}(H \times \mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+}) = \{\omega \in \Omega : (\omega_0, \dots, \omega_n) \in \mathbb{X} \times H\} = \mathbb{X} \times H \times \mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+}$$

još jedan cilindar. Budući da cilindri generiraju $\mathcal{X}^{\otimes \mathbb{Z}_+}$, tj. da je $\mathcal{X}^{\otimes \mathbb{Z}_+} = \sigma(C)$, gdje je C polualgebra cilindara, slijedi tvrdnja. □

Nadalje, sa θ_0 označavat ćemo identitetu. Za $k \geq 1$ induktivno definiramo

$$\theta_k = \theta_{k-1} \circ \theta.$$

Neka je $\{X_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ koordinatni proces na $\mathbb{X}^{\mathbb{Z}_+}$. Tada za $j, k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$X_k \circ \theta_j = X_{j+k}. \tag{2.23}$$

Također, za sve $p, k \in \mathbb{Z}_+$ i $A_0, \dots, A_p \in \mathcal{X}$ vrijedi

$$\theta_k^{-1}\{X_0 \in A_0, \dots, X_p \in A_p\} = \{X_k \in A_0, \dots, X_{k+p} \in A_p\}.$$

Dakle, θ_k je $\left(\sigma(X_j : j \geq k), \mathcal{X}^{\otimes \mathbb{Z}_+}\right)$-izmjeriva. Primijetimo da se ovo ne kosi s prethodnom propozicijom jer uzimanjem veće σ-algebre u domeni ne gubimo svojstvo izmjerivosti.

U nastavku ćemo promatrati $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k : k \in \mathbb{Z}_+\}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor s filtracijom i adaptirani proces, $\{(X_n, \mathcal{F}_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Definiramo $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{F}_k$, σ-podalgebru $\mathcal{F}$ generiranu sa $\{\mathcal{F}_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$. Sada uvodimo proširenu definiciju vremena zaustavljanja. Budući da naziv dolazi iz kockarskoga žargona, intuitivno, vrijeme zaustavljanja možemo shvaćati kao vrijeme u kojemu igrač napušta igru prema nekom pravilu na temelju trenutno dostupnih informacija.

Definicija 2.2.6 (Vrijeme zaustavljanja)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k : k \in T\}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor s filtracijom.*

1. *Slučajna varijabla* $\tau\colon \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ *se zove* vrijeme zaustavljanja *ako za sve* $k \in \mathbb{Z}_+$ *vrijedi* $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$.

2. *Familija $\mathcal{F}_\tau$ događaja $A \in \mathcal{F}$, takvih da za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi $A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$, nazivat ćemo σ-algebra događaja koji prethode vremenu τ.*

Zaista, radi se o proširenju definicije 1.0.6. Naime u toj definiciji prešutno je korištena prirodna filtracija te također treba primijetiti da je $\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}$. Za svako vrijeme zaustavljanja τ događaj $\{\tau = \infty\}$ pripada $\mathcal{F}_\infty$ jer se radi o komplementu unije događaja $\{\tau = n\}$. Slijedi da je $B \cap \{\tau = \infty\} \in \mathcal{F}_\infty$ za sve $B \in \mathcal{F}_\tau$, što pokazuje da je τ $\mathcal{F}_\infty$-izmjeriva.

Definicija 2.2.7 (prvo vrijeme pogađanja i povratka)**.** *Za $A \in \mathcal{X}$ i proces $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, prvo vrijeme pogađanja τ_A i prvo vrijeme povratka σ_A skupa A definirani su sa*

$$\tau_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}, \tag{2.24}$$

$$\sigma_A = \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}, \tag{2.25}$$

uz konvenciju $\inf \emptyset = \infty$*. Induktivno definiramo n-to vrijeme povratka sa* $\sigma_A^{(0)} = 0$ *te za sve* $k \geq 0$

$$\sigma_A^{(k+1)} = \inf\left\{n > \sigma_A^{(k)} : X_n \in A\right\}. \tag{2.26}$$

Zaista se radi o vremenima zaustavljanja, naime za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$\{\tau_A = n\} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{X_k \in A\}^c \cap \{X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n,$$

$$\{\sigma_A = n\} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \{X_k \in A\}^c \cap \{X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

Kao i u diskretnom slučaju definiramo $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$. U slučaju $\tau(\omega) = \infty$ uzimamo proizvoljnu $\mathcal{F}_\infty$-izmjerivu varijablu. Primijetimo da je slučajna varijabla X_τ $\mathcal{F}_\tau$-izmjeriva budući da za $A \in \mathcal{X}$ i $k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau = k\} = \{X_k \in A\} \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k.$$

Neka je τ slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Definiramo θ_τ na $\{\tau < \infty\}$ sa

$$\theta_\tau(\omega) = \theta_{\tau(\omega)}(\omega). \tag{2.27}$$

Dakle, sada imamo $X_\tau = X_k$ na $\{\tau = k\}$ i $X_k \circ \theta_\tau = X_{\tau+k}$ na $\{\tau < \infty\}$. Iduća propozicija će nam omogućiti zbrajanje i komponiranje nekih od novouvedenih pojmova.

Propozicija 2.2.8. *Neka je $\{\mathcal{F}_n^{ko} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ kanonska filtracija. Neka su τ i σ vremena zaustavljanja s obzirom na $\{\mathcal{F}_n^{ko} : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. *Za sve $n, m \in \mathbb{Z}_+$, vrijedi $\theta_n^{-1}(\mathcal{F}_m^{ko}) = \sigma(X_n, \dots, X_{n+m})$.*
2. *Slučajna varijabla definirana sa*

$$\rho = \begin{cases} \sigma + \tau \circ \theta_\sigma & \text{na } \{\sigma < \infty\} \\ \infty & \text{inače} \end{cases}$$

je vrijeme zaustavljanja. Na $\{\sigma < \infty\} \cap \{\tau < \infty\}$ vrijedi, $X_\tau \circ \theta_\sigma = X_\rho$.

Dokaz. Za sve $A \in \mathcal{X}$ i sve $k, n \in \mathbb{Z}_+$ imamo

$$\theta_n^{-1}\{X_k \in A\} = \{X_k \circ \theta_n \in A\} = \{X_{k+n} \in A\}.$$

Budući da je σ-algebra $\mathcal{F}_m^{ko}$ generirana događajima oblika $\{X_k \in A\}$, gdje je $A \in \mathcal{X}$ i $k \in \{0, \dots, m\}$, onda je σ-algebra $\theta_n^{-1}(\mathcal{F}_m)$ generirana događajima oblika $\{X_{k+n} \in A\}$, gdje je $A \in \mathcal{X}$ i $k \in \{0, \dots, m\}$. Po definiciji ti isti događaji generiraju σ-algebru $\sigma(X_n, \dots, X_{n+m})$, što kompletira prvu tvrdnju.

Nadalje, pokazujemo da je za $k \in \mathbb{Z}_+$, $k + \tau \circ \theta_k$ vrijeme zaustavljanja. Budući da je τ vrijeme zaustavljanja, vrijedi $\{\tau = m - k\} \in \mathcal{F}_{m-k}^{ko}$. Zbog prve tvrdnje vrijedi $\theta_k^{-1}\{\tau = m - k\} \in \mathcal{F}_m^{ko}$. Sada imamo

$$\{k + \tau \circ \theta_k = m\} = \{\tau \circ \theta_k = m - k\} = \theta_k^{-1}\{\tau = m - k\} \in \mathcal{F}_m^{ko}.$$

Dakle, $k + \tau \circ \theta_k$ je vrijeme zaustavljanja. Nadalje, zbog definicije ρ-a imamo

$$\begin{aligned} \{\rho = m\} = \{\sigma + \tau \circ \theta_\sigma = m\} &= \bigcup_{k=0}^{m} \{k + \tau \circ \theta_k = m, \sigma = k\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{m} \{k + \tau \circ \theta_k = m\} \cap \{\sigma = k\}. \end{aligned}$$

Budući da su σ i $k + \tau \circ \theta_k$ vremena zaustavljanja, dobivamo $\{\rho = m\} \in \mathcal{F}_m^{ko}$, što pokazuje drugu tvrdnju. Ako su $\tau(\omega)$ i $\sigma(\omega)$ konačne, imamo

$$X_\tau \circ \theta_\sigma(\omega) = X_{\tau \circ \theta_{\sigma(\omega)}}(\theta_\sigma(\omega)) = X_{\sigma + \tau \circ \theta_\sigma}(\omega).$$

□

Iduća propozicija izravna je posljedica prethodne, a njeni rezultati bit će važni tijekom nastavka.

Propozicija 2.2.9. *Za izmjerive skupove $A \in \mathcal{X}$, n-ta vremena povratka su vremena zaustavljanja u odnosu na kanonsku filtraciju. Dodatno vrijedi $\sigma_A = 1 + \tau_A \circ \theta_1$ te za $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi*

$$\sigma_A^{(n+1)} = \sigma_A^{(n)} + \sigma_A \circ \theta_{\sigma_A^{(n)}} \text{ na } \{\sigma_A^{(n)} < \infty\}. \tag{2.28}$$

U nastavku iznosimo glavni rezultat ovoga poglavlja. Također ćemo se koristiti sljedećim oznakama. Pripadno očekivanje od $\mathbb{P}_\nu$ označavat ćemo sa $\mathbb{E}_\nu$. Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{X}$, kraće ćemo označavati $\mathbb{P}_{\delta_x}$ i $\mathbb{E}_{\delta_x}$ sa $\mathbb{P}_x$ i $\mathbb{E}_x$.

Teorem 2.2.10 (Markovljevo svojstvo)**.** *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ i $\nu \in \mathbb{M}_1(\mathcal{X})$. Za svaku $\mathcal{F}$-izmjerivu pozitivnu ili ograničenu slučajnu varijablu Y i $k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi*

$$\mathbb{E}_\nu[Y \circ \theta_k \mid \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}_{X_k}[Y] \quad \mathbb{P}_\nu\text{ - } g.s. \tag{2.29}$$

Napomena 2.2.11. *Desna strana relacije* (2.29) *je kompozicija funkcije $x \mapsto \mathbb{E}_x[Y]$ i X_k.*

Dokaz. Da bismo dokazali (2.29), poslužit ćemo se teoremom 5.0.1 tako da ćemo za $\mathcal{H}$ uzeti sve ograničene slučajne varijable koje zadovoljavaju (2.29). Neka je $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ rastući ograničeni niz slučajnih varijabli iz $\mathcal{H}$. Rastavimo taj niz na $Y_n^+ - Y_n^-$, time dobivamo dva rastuća, ograničena i nenegativna niza. Teorem o monotonoj konvergenciji pokazuje da ta dva niza konvergiraju prema $Y^+, Y^- \in \mathcal{H}$. Jasno je da je $\mathcal{H}$ vektorski prostor pa linearnost povlači prvi uvjet teorema 5.0.1. Pokažimo i drugi uvjet teorema 5.0.1. Za proizvoljne $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{X}$ i $B_0, \dots, B_j \in \mathcal{X}$ imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\nu\left[\prod_{i=0}^{k} \mathbb{1}_{A_i}(X_i) \prod_{z=0}^{j} \mathbb{1}_{B_z}(X_{z+k})\right] \overset{2.1.11}{=} \\
&= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{A_0}(x_0)\nu(\mathrm{d}x_0) \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{A_1}(x_1)P(x_0, \mathrm{d}x_1)\cdots \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{A_k}(x_k)\, \mathbb{1}_{B_0}(x_k)P(x_{k-1}, \mathrm{d}x_k)\cdots \\
&\cdots \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{B_j}(x_{k+j})P(x_{k+j-1}, \mathrm{d}x_{k+j}) = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{A_0}(x_0)\nu(\mathrm{d}x_0)\cdots \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{A_k}(x_k)P(x_{k-1}, \mathrm{d}x_k) \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{B_0}(y_0)\delta_{X_k}(y_0)\cdots \\
&\cdots \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{B_j}(y_j)P(y_{j-1}, \mathrm{d}y_j) = \mathbb{E}_\nu\left[\mathbb{E}_{X_k}\left[\prod_{z=0}^{j} \mathbb{1}_{B_z}(X_z)\right] \prod_{i=0}^{k} \mathbb{1}_{A_i}(X_i)\right],
\end{aligned}$$

što dokazuje drugu tvrdnju teorema 5.0.1. Primijetimo da gornji integral zbog Fubinijevoga teorema možemo pisati u bilo kojem obliku. Tvrdnja slijedi primjenom teorema 5.0.1. □

Idućim teoremom ovaj rezultat proširujemo u jako Markovljevo svojstvo.

Teorem 2.2.12 (Jako Markovljevo svojstvo)**.** *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ i $\nu \in \mathbb{M}_1(\mathcal{X})$. Za svaku $\mathcal{F}$-izmjerivu pozitivnu ili ograničenu slučajnu varijablu Y i vrijeme zaustavljanja τ vrijedi*

$$\mathbb{E}_\nu[Y \circ \theta_\tau\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} \mid \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}_{X_\tau}[Y]\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} \quad \mathbb{P}_\nu\text{ - } g.s. \tag{2.30}$$

Dokaz. Treba pokazati da za svaki $A \in \mathcal{F}_\tau$ vrijedi

$$\mathbb{E}_\nu[\mathbb{1}_A\, Y \circ \theta_\tau\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}] = \mathbb{E}_\nu[\mathbb{1}_A\, \mathbb{E}_{X_\tau}[Y]\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}]. \tag{2.31}$$

Za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$ je $A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$. Iz prethodnoga teorema dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu\left[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau=k\}}\, Y \circ \theta_\tau\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau=k\}}\, Y \circ \theta_k\right] \\ &= \mathbb{E}_\nu\left[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau=k\}}\, \mathbb{E}_{X_k}[Y]\right] = \mathbb{E}_\nu\left[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau=k\}}\, \mathbb{E}_{X_\tau}[Y]\right].\end{aligned}$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu[\mathbb{1}_A\, Y \circ \theta_\tau\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_\nu\left[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau=k\}}\, Y \circ \theta_k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_\nu\left[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau=k\}}\, \mathbb{E}_{X_k}[Y]\right] = \mathbb{E}_\nu[\mathbb{1}_A\, \mathbb{E}_{X_\tau}[Y]\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}].\end{aligned}$$

□

Sada možemo primijeniti jako Markovljevo svojstvo na n-ta vremena povrataka. Jako Markovljevo svojstvo nam zapravo govori da ako počnemo gledati ispočetka lanac u nekom vremenu zaustavljanja τ, tada uvjetno na $\mathcal{F}_\tau$ dobivamo ponovno Markovljev lanac s istom jezgrom i početnom distribucijom koncentriranom u X_τ.

Propozicija 2.2.13. *Neka je $C \in \mathcal{X}$.*

1. *Ako je za sve $x \in C$, $\mathbb{P}_x(\sigma_C < \infty) = 1$, onda za sve $x \in C$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathbb{P}_x(\sigma_C^{(n)} < \infty) = 1$.*

2. *Ako je za sve $x \in C^c$, $\mathbb{P}_x(\sigma_C < \infty) = 1$, onda za sve $x \in \mathbb{X}$ vrijedi $\mathbb{P}_x(\sigma_C < \infty) = 1$.*

Dokaz. Prvu tvrdnju dokazujemo indukcijom. Baza indukcije je trivijalno zadovoljena. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Zbog jakog Markovljevog svojstva za $x \in C$ imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\sigma_C^{(n+1)} < \infty) &= \mathbb{P}_x(\sigma_C^{(n)} < \infty, \sigma_C \circ \theta_{\sigma_C^{(n)}} < \infty) \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sigma_C^{(n)}<\infty\}}\, \mathbb{1}_{\{\sigma_C\circ\theta_{\sigma_C^{(n)}}<\infty\}} \mid \mathcal{F}_{\sigma_C^{(n)}}]\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{\sigma_C^{(n)}<\infty\}}\, \mathbb{P}_{X_{\sigma_C^{(n)}}}(\sigma_C < \infty)\right] = \mathbb{P}_x(\sigma_C^{(n)} < \infty) = 1.\end{aligned}$$

Budući da je $\mathbb{P}_x(\sigma < \infty) = 1$ za sve $x \in C$, onda je $\mathbb{P}_{X_{\sigma_C^{(n)}}}(\sigma_C < \infty) = 1$, što objašnjava predzadnju jednakost u prethodnome izvodu. Za $x \in \mathbb{X}$, imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\sigma_C < \infty) &= \mathbb{P}_x(X_1 \in C) + \mathbb{P}_x(X_1 \in C^c, \sigma_C \circ \theta < \infty)\\ &= \mathbb{P}_x(X_1 \in C) + \mathbb{P}_x(X_1 \in C^c) = 1,\end{aligned}$$

čime je dokazana i druga tvrdnja. □

Prisjetimo se da se restrikcija σ-algebre na proizvoljan skup $C \in \mathcal{X}$ definira sa

$$\mathcal{X}_C = \{A \cap C : A \in \mathcal{X}\}. \tag{2.32}$$

Definicija 2.2.14 (Restringirana jezgra). *Za sve $C \in \mathcal{X}$,* restringirana jezgra *Q_C na $C \times \mathcal{X}_C$ definira se sa*

$$Q_C(x, B) = \mathbb{P}_x(X_{\sigma_C} \in B, \sigma_C < \infty),\ x \in C, B \in \mathcal{X}_C. \tag{2.33}$$

Uvedimo pojam dostižnosti skupa koji će igrati važnu ulogu u idućem poglavlju.

Definicija 2.2.15 (Dostižan skup). *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$.*

1. *Skup $A \in \mathcal{X}$ je* dostižan *ako je $\mathbb{P}_x(\sigma_A < \infty) > 0$ za sve $x \in \mathbb{X}$.*

2. *Kolekciju svih dostižnih skupova označavat ćemo sa $\mathcal{X}_P^+$.*

U idućoj lemi dane su karakterizacije dostižnosti.

Lema 2.2.16. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$. Za proizvoljni $A \in \mathcal{X}$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *A je dostižan.*

2. *Za svaki $x \in \mathbb{X}$ postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da je $P^n(x, A) > 0$.*

3. *Za svaku $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathcal{X})$ postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da je $\mu P^n(A) > 0$.*

4. *Za svaki $x \in A^c$ vrijedi $\mathbb{P}_x(\sigma_A < \infty) > 0$.*

Dokaz se može pronaći u [1]. Ovaj rezultat je poopćenje propozicije koja se nalazi u [5]. Definiramo još neke pojmove koji su nužni za daljnji razvoj teorije.

Definicija 2.2.17. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$. Domena privlačnosti C_+ nepraznoga skupa $C \in \mathcal{X}$ je skup stanja $x \in \mathbb{X}$, takvih da vrijedi*

$$C_+ = \{x \in \mathbb{X} : \mathbb{P}_x(\sigma_C < \infty) = 1\}. \tag{2.34}$$

Ako je $C_+ = \mathbb{X}$, onda se skup C naziva privlačnim skupom.

Definicija 2.2.18 (Broj posjeta, potencijalna jezgra)**.** *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$.*

1. *Broj posjeta N_A skupu $A \in \mathcal{X}$ definira se sa*

$$N_A = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_A(X_k). \tag{2.35}$$

2. *Za sve $x \in \mathbb{X}$ i $A \in \mathcal{X}$ očekivani broj $U(x, A)$ posjeta skupu A s početkom u x definira se sa*

$$U(x, A) = \mathbb{E}_x[N_A] = \sum_{k=0}^{\infty} P^k(x, A). \tag{2.36}$$

Jezgra U se naziva potencijalna jezgra od P.

U nastavku iznosimo teorem i lemu koji će igrati važnu ulogu u idućem poglavlju. Prije toga definiramo dvije posebne mjere. Za proizvoljnu mjeru $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathcal{X})$ i $C \in \mathcal{X}$ definiramo mjere μ_C^0 i μ_C^1 sa

$$\mu_C^0(B) = \int_C \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\sigma_C - 1} \mathbb{1}_B(X_k)\right]\mu(\mathrm{d}x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_C \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{k<\sigma_C\}}\, \mathbb{1}_B(X_k)\right]\mu(\mathrm{d}x), \tag{2.37}$$

$$\mu_C^1(B) = \int_C \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=1}^{\sigma_C} \mathbb{1}_B(X_k)\right]\mu(\mathrm{d}x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{k\le\sigma_C\}}\, \mathbb{1}_B(X_k)\right]\mu(\mathrm{d}x). \tag{2.38}$$

Rezultati u nastavku bit će nužni za dokaz postojanja invarijantne mjere u idućem poglavlju. Iznosimo ih bez dokaza. Dokazi tvrdnji mogu se naći u [1].

Lema 2.2.19. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$, $C \in \mathcal{X}$ i $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathcal{X})$. Tada je $\mu_C^1 = \mu_C^0 P$.*

Teorem 2.2.20. *Neka je $C \in \mathcal{X}$, P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$, π_C vjerojatnosna mjera na $\mathcal{X}_C$ i π_C^0 definirana sa* (2.37) *za $\mu = \pi_C$. Tada je restrikcija π_C^0 na skup C π_C. Također vrijedi $\pi_C^0 = \pi_C^0 P$ ako i samo ako je $\pi_C = \pi_C Q_C$.*

Poglavlje 3

Markovljevi lanci s atomima

3.1 Osnovne definicije

Definicija 3.1.1 (Atom)**.** *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$. Podskup $\alpha \in \mathcal{X}$ zove se* atom *ako postoji $\nu \in \mathbb{M}_1(\mathcal{X})$, takva da je $P(x, \cdot) = \nu$ za sve $x \in \alpha$.*

Primijetimo da je jednočlan skup trivijalno atom. Nažalost, takvi atomi neće biti od prevelike koristi jer će za općeniti skup stanja biti rijetko dostižni. Ipak, lanac iz idućeg primjera definiran je na $\mathbb{R}_+$ i posjeduje jednočlan dostižan skup.

Primjer 3.1.2 (Reflektirana slučajna šetnja)**.** *Promatramo slučajnu šetnju na $\mathbb{R}_+$ reflektiranu u nuli definiranu sa $X_k = (X_{k-1} + Z_k)^+$, gdje je $\{Z_k : k \in \mathbb{N}\}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih realnih slučajnih varijabli i $X_0 = 0$. Skup $\{0\}$ je atom. Neka je ν distribucija od Z_1 i pretpostavimo da postoji $a > 0$, takav da vrijedi $\nu(\langle -\infty, -a\rangle) > 0$. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x \leq na$ vrijedi*

$$P^n(x, \{0\}) \geq \mathbb{P}(Z_1 \leq -a, \dots, Z_n \leq -a) = \nu(\langle -\infty, -a\rangle)^n > 0.$$

Zbog korolara 2.2.16 i Arhimedovoga aksioma slijedi da je atom $\{0\}$ dostižan.

U nastavku uvodimo notaciju za funkcije koje su konstantne na atomu α. Za funkciju h koja je konstantna na α, pisat ćemo $h(\alpha)$ umjesto $h(x)$ za sve $x \in \alpha$. Sljedeća definicija je svojevrsno poopćenje definicije 1.0.8 jer su jednočlani skupovi atomi. Također primijetimo da je zbog definicijskoga svojstva atoma $U(x, \alpha)$ konstantna za sve $x \in \alpha$. Dakle, možemo kraće pisati $U(\alpha, \alpha)$.

Definicija 3.1.3. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ i neka je α atom. Atom α je* povratan *ako vrijedi $U(\alpha, \alpha) = \infty$, a* prolazan *ako vrijedi $U(\alpha, \alpha) < \infty$.*

Kao i u diskretnom slučaju, iznosimo karakterizacije povratnosti i prolaznosti. Zapravo, radi se o poopćenju teorema 1.0.9 i 1.0.10.

Teorem 3.1.4. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ i neka je $\alpha \in \mathcal{X}$ atom.*

1. *Atom α je povratan ako je zadovoljeno jedno od ovih ekvivalentnih svojstava:*

   a) $\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty) = 1$*;*

   b) $\mathbb{P}_\alpha(N_\alpha = \infty) = 1$*;*

   c) $U(\alpha, \alpha) = \infty$.

   U tom slučaju, za sve $x \in \mathbb{X}$, $\mathbb{P}_x(\sigma_\alpha < \infty) = \mathbb{P}_x(N_\alpha = \infty)$.

2. *Atom α je prolazan ako je zadovoljeno jedno od ovih ekvivalentnih svojstava:*

   a) $\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty) < 1$*;*

   b) $\mathbb{P}_\alpha(N_\alpha < \infty) = 1$*;*

   c) $U(\alpha, \alpha) < \infty$.

   U tom slučaju, broj posjeta N_α ima geometrijsku razdiobu s parametrom $\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha = \infty)$ uz vjerojatnost $\mathbb{P}_\alpha$.

Dokaz. Primjenom jakog Markovljevog svojstva i definicije n-tog vremena povratka, za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\alpha\left(\sigma_\alpha^{(n)} < \infty\right) &= \mathbb{P}_\alpha\left(\sigma_\alpha^{(n-1)} < \infty, \sigma_\alpha \circ \theta_{\sigma_\alpha^{(n-1)}} < \infty\right) \\
&= \mathbb{E}_\alpha\left[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sigma_\alpha^{(n-1)} < \infty\}} \mathbb{1}_{\{\sigma_\alpha \circ \theta_{\sigma_\alpha^{(n-1)}} < \infty\}} \mid \mathcal{F}_{\sigma_\alpha^{(n-1)}}]\right] \\
&= \mathbb{E}_\alpha\left[\mathbb{1}_{\{\sigma_\alpha^{(n-1)} < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\sigma_\alpha^{(n-1)}}}(\sigma_\alpha < \infty)\right] \\
&= \mathbb{P}_\alpha\left(\sigma_\alpha^{(n-1)} < \infty\right) \mathbb{P}_\alpha\left(\sigma_\alpha < \infty\right),
\end{aligned}$$

gdje smo u prvom koraku koristili propoziciju 2.2.9, u drugom koraku svojstvo uvjetnoga očekivanja, a u trećem jako Markovljevo svojstvo. Budući da je α atom vrijedi $\mathbb{P}_{X_{\sigma_\alpha^{(n)}}}(\sigma_\alpha < \infty) = \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty)$, što objašnjava zadnju jednakost u prethodnome izvodu. Dalje, indukcijom dobivamo

$$\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha^{(n)} < \infty) = (\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty))^n. \tag{3.1}$$

To povlači

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\alpha(N_\alpha = \infty) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\alpha(N_\alpha \geq n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha^{(n)} < \infty) = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty))^n \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

i

$$U(\alpha,\alpha) = \mathbb{E}_\alpha[N_\alpha] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha^{(n)} < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty))^n. \tag{3.3}$$

Za $x \in \mathbb{X}$ zbog jakog Markovljevog svojstva vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(N_\alpha = \infty) &= \mathbb{P}_x(N_\alpha \circ \theta_{\sigma_\alpha} = \infty, \sigma_\alpha < \infty) \\ &= \mathbb{P}_x(\sigma_\alpha < \infty)\, \mathbb{P}_\alpha(N_\alpha = \infty). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Zbog (3.2) vrijedi $\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty) = 1$ ako i samo ako je $\mathbb{P}_\alpha(N_\alpha = \infty) = 1$. Nadalje, zbog (3.3) vrijedi $\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty) = 1$ ako i samo ako je $U(\alpha,\alpha) = \infty$. Izraz (3.4) povlači, za sve $x \in \mathbb{X}$ vrijedi $\mathbb{P}_x(\sigma_\alpha < \infty) = \mathbb{P}_x(N_\alpha = \infty)$.

Slično, zbog (3.2) vrijedi $\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty) < 1$ ako i samo ako je $\mathbb{P}_\alpha(N_\alpha = \infty) < 1$. Nadalje, zbog (3.3) vrijedi $\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty) < 1$ ako i samo ako je $U(\alpha,\alpha) < \infty$. Dodatno, zbog izraza (3.1) imamo

$$\mathbb{P}_\alpha(N_\alpha > n) = \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha^{(n)} < \infty) = (\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty))^n.$$

Dakle, N_α uz vjerojatnost $\mathbb{P}_\alpha$ ima geometrijsku distribuciju sa $p = \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha = \infty)$. Dakle, $U(\alpha,\alpha) = 1/\,\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha = \infty)$. □

3.2 Invarijantna mjera i nezavisnost izleta

Definicija 3.2.1. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$. Atom $\alpha \in \mathcal{X}$ jest:*

1. *pozitivan ako vrijedi $\mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha] < \infty$;*
2. *nul-povratan ako je povratan i $\mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha] = \infty$.*

Primijetimo da $\mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha] < \infty$ povlači $\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha = \infty) = 0$, što je ekvivalentno sa $\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty) = 1$. Dakle, pozitivni atom je i povratan. Definiramo mjeru λ_α na $\mathcal{X}$ sa

$$\lambda_\alpha(A) = \mathbb{E}_\alpha\left[\sum_{k=1}^{\sigma_\alpha} \mathbb{1}_A(X_k)\right], \quad A \in \mathcal{X}. \tag{3.5}$$

Idući rezultat poopćuje propoziciju 1.0.11, teorem 1.0.12 i komentar ispod njih.

Teorem 3.2.2. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ i neka je α dostižan atom.*

1. *Atom α je povratan ako i samo ako je λ_α invarijantna za P.*
2. *Ako je α povratan, tada je svaka podinvarijantna mjera λ za P invarijantna, proporcionalna sa λ_α, zadovoljava $\lambda(\alpha) < \infty$ i za sve $B \in \mathcal{X}$ vrijedi*

$$\lambda(B) = \lambda(\alpha)\lambda_\alpha(B) = \lambda(\alpha) \int_\alpha \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\sigma_\alpha - 1} \mathbb{1}_B(X_k)\right] \lambda_\alpha(\mathrm{d}x).$$

3. *Neka je α povratan. Tada je α pozitivan ako i samo ako P dopušta jedinstvenu invarijantnu vjerojatnosnu mjeru. Ako je α pozitivan, tada je jedinstvena vjerojatnosna mjera dana sa $\pi = \lambda_\alpha / \mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha]$.*

Dokaz. Ako je α povratan, primijetimo da je $\lambda_\alpha(\alpha) = \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty) = 1$. Zbog povratnosti i dostižnosti atoma α λ_α je σ-konačna, detalji se mogu naći u [1]. Definiramo mjeru ν_α na $\mathcal{X}_\alpha$ sa $\nu_\alpha(B) = \mathbb{P}_\alpha(X_{\sigma_\alpha} \in B, \sigma_\alpha < \infty)$ za $B \in \mathcal{X}_\alpha$. Neka je Q_α restringirana jezgra na skup α. Budući da je α atom vrijedi:

$$Q_\alpha(x, B) = \mathbb{P}_x(X_{\sigma_\alpha} \in B, \sigma_\alpha < \infty) = \nu_\alpha(B), \; x \in \alpha, B \in \mathcal{X}_\alpha.$$

Ako je $\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty) = 1$, onda je $\nu_\alpha(\alpha) = 1$. Dakle, ako je α povratan, ν_α je vjerojatnosna mjera. Također, zbog toga što je α atom, ν_α je invarijantna za Q_α. Naime, za $B \in \mathcal{X}_\alpha$ vrijedi

$$\nu_\alpha Q_\alpha(B) = \int_\alpha Q_\alpha(x, B)\nu_\alpha(\mathrm{d}x) = Q_\alpha(\alpha, B) \int_\alpha \nu_\alpha(\mathrm{d}x) = Q_\alpha(\alpha, B) = \nu_\alpha(B).$$

Primjenom teorema 2.2.20 za $C = \alpha$ dobivamo da je mjera ν_α^0 definiran za $B \in \mathcal{X}$ sa

$$\nu_\alpha^0(B) = \int_\alpha \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_\alpha - 1} \mathbb{1}_B(X_k) \right] \nu_\alpha(\mathrm{d}x)$$

invarijantna za P. Primjenom leme 2.2.19, za sve $B \in \mathcal{X}$, imamo

$$\nu_\alpha^0(B) = \nu_\alpha^0 P(B) = \nu_\alpha^1(B) = \int_\alpha \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\sigma_\alpha} \mathbb{1}_B(X_k) \right] \nu_\alpha(\mathrm{d}x) = \lambda_\alpha(B).$$

Dakle, λ_α je invarijantna za P. Dokaz obrata i druge tvrdnje teorema mogu se pronaći u [1].

Ako je α pozitivan, tada je $\lambda_\alpha(\mathbb{X}) = \mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha] < \infty$ i $\lambda_\alpha/\lambda_\alpha(\mathbb{X}) = \lambda_\alpha / \mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha]$ je jedinstvena invarijantna vjerojatnosna mjera. Obratno, neka je α povratan i P dopušta jedinstvenu invarijantnu vjerojatnosnu mjeru π. Tada je, po drugoj tvrdnji teorema, π proporcionalan sa λ_α. Budući da je $\pi(\mathbb{X}) = 1 < \infty$, imamo

$$\mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha] = \lambda_\alpha(\mathbb{X}) = \frac{1}{\pi(\alpha)} < \infty,$$

što pokazuje da je α pozitivan. □

U nastavku promatramo Markovljeve lance s povratnim atomom α. Povratnost atoma će nam garantirati da će se lanac u atomu naći beskonačno mnogo puta ako krene iz α. To nam omogućava da proučavamo izlete između izlaska i povratka u α. Iduća propozicija i korolar pokazuju da će takvi izleti biti nezavisni i jednako distribuirani. Već su u [5] bili pokazani analogni rezultati za Markovljeve lance s diskretnim skupom stanja.

Propozicija 3.2.3. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ te α povratni atom. Neka su $Z_0, \ldots, Z_k$ $\mathcal{F}_{\sigma_\alpha}$-izmjerive slučajne varijable, takve da je za $i \in \{1, \ldots, k\}$ funkcija $x \mapsto \mathbb{E}_x[Z_i]$ konstantna na α. Tada za svaku početnu distribuciju $\lambda \in \mathbb{M}_1(\mathcal{X})$, takvu da je $\mathbb{P}_\lambda(\sigma_\alpha < \infty) = 1$, vrijedi*

$$\mathbb{E}_\lambda\left[\prod_{i=0}^{k} Z_i \circ \theta_{\sigma_\alpha^{(i)}}\right] = \mathbb{E}_\lambda[Z_0] \prod_{l=1}^{k} \mathbb{E}_\alpha[Z_i]. \tag{3.6}$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom. Za $k = 1$ pretpostavka da je $x \mapsto \mathbb{E}_x[Z_1]$ konstantna na α i jako Markovljevo svojstvo daju

$$\mathbb{E}_\lambda[Z_0 Z_1 \circ \theta_{\sigma_\alpha}] = \mathbb{E}_\lambda[Z_0\, \mathbb{E}_{X_{\sigma_\alpha}}[Z_1]] = \mathbb{E}_\lambda[Z_0\, \mathbb{E}_\alpha[Z_1]] = \mathbb{E}_\lambda[Z_0]\, \mathbb{E}_\alpha[Z_1].$$

Pretpostavimo da (3.6) vrijedi za neki $k \geq 1$. Iz definicije operatora θ i definicije n-tih vremena povrataka dobivamo $\theta_{\sigma_\alpha^{(k)}} = \theta_{\sigma_\alpha^{(k-1)}} \circ \theta_{\sigma_\alpha}$ na $\{\theta_{\sigma_\alpha^{(k)}} < \infty\}$. Prethodna tvrdnja, pretpostavka koraka indukcije i jako Markovljevo svojstvo, daju

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\lambda\left[\prod_{i=0}^{k} Z_i \circ \theta_{\sigma_\alpha^{(i)}}\right] &= \mathbb{E}_\lambda\left[Z_0\left(\prod_{i=1}^{k} Z_i \circ \theta_{\sigma_\alpha^{(i-1)}}\right) \circ \theta_{\sigma_\alpha}\right] \\ &= \mathbb{E}_\lambda\left[Z_0\, \mathbb{E}_{X_{\sigma_\alpha}}\left[\prod_{i=1}^{k} Z_i \circ \theta_{\sigma_\alpha^{(i-1)}}\right]\right] = \mathbb{E}_\lambda[Z_0] \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}_\alpha[Z_i].\end{aligned}$$

□

Sada za $f \in \mathbb{F}(\mathbb{X})$ definirao $\mathcal{E}_1(\alpha, f) = \sum_{k=1}^{\sigma_\alpha} f(X_k)$ i induktivno proširujemo na $n \in \mathbb{N}$ sa

$$\mathcal{E}_{n+1}(\alpha, f) = \mathcal{E}_1(\alpha, f) \circ \theta_{\sigma_\alpha^{(n)}} = \sum_{k=\sigma_\alpha^{(n)}+1}^{\sigma_\alpha^{(n+1)}} f(X_k). \tag{3.7}$$

Korolar 3.2.4. *Neka je P Markovljeva jezgra te α povratan atom. Tada je, uz vjerojatnost $\mathbb{P}_\alpha$, $\{\mathcal{E}_n(\alpha, f), n \in \mathbb{N}\}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Za svaku $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathcal{X})$, takvu da $\mathbb{P}_\mu(\sigma_\alpha < \infty) = 1$, slučajne varijable $\mathcal{E}_n(\alpha, f), n \in \mathbb{N}$ su nezavisne, a varijable $\mathcal{E}_n(\alpha, f), n \geq 2$ su nezavisne jednako distribuirane.*

Dokaz. Budući da je α povratan, vrijedi $\mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha < \infty) = 1$ pa po teoremu 3.2.3 slijedi nezavisnost, dok je jednaka distribuiranost posljedica jakog Markovljevog svojstva. Nezavisnost se u drugoj tvrdnji ponovno dobiva primjenom teorema 3.2.3, $\mathcal{E}_1(\alpha, f)$ nije jednako distribuirana kao ostale varijable jer ima drukčiju početnu distribuciju. □

3.3 Ergodski teorem

U ovom poglavlju poučavati ćemo g.s.-konvergenciju sljedećih izraza

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k), \qquad \frac{\sum_{k=1}^{n} f(X_k)}{\sum_{k=1}^{n} g(X_k)}.$$

Prvo iskazujemo i dokazujemo pomoćnu tvrdnju.

Lema 3.3.1. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X}\times\mathcal{X}$ te neka je α povratni atom. Za konačnu λ_α-integrabilnu funkciju f i za svaku početnu distribuciju μ, takvu da je $\mathbb{P}_\mu(\sigma_\alpha < \infty) = 1$, vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{\sum_{k=1}^{n} f(X_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_\alpha(X_k)} = \lambda_\alpha(f) \quad \mathbb{P}_\mu\text{-}g.s. \tag{3.8}$$

Dokaz. Prvo pokazujemo sljedeću tvrdnju

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{\sum_{k=1}^{n} f(X_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_\alpha(X_k)} = \lambda_\alpha(f) \quad \mathbb{P}_\alpha\text{-g.s.} \tag{3.9}$$

Neka je f još dodatno i nenegativna. Promatramo niz $\{\mathcal{E}_k(\alpha, f) : k \in \mathbb{N}\}$. Po korolaru 3.2.4 promatrani niz je nezavisan i jednako distribuiran uz $\mathbb{P}_\alpha$. Dodatno, slučajna varijabla $\mathcal{E}_1(\alpha, f)$ je $\mathcal{F}_{\sigma_\alpha}$-izmjeriva. Po definiciji od λ_α imamo

$$\mathbb{E}_\alpha[\mathcal{E}_1(\alpha, f)] = \mathbb{E}_\alpha\left[\sum_{k=1}^{\sigma_\alpha} f(X_k)\right] = \lambda_\alpha(f).$$

Primjenom teorema 5.0.4 dobivamo

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\sigma_\alpha^{(n)}} f(X_k) = \frac{\mathcal{E}_1(\alpha, f) + \cdots + \mathcal{E}_n(\alpha, f)}{n} \stackrel{\mathbb{P}_\alpha\text{-g.s.}}{\longrightarrow} \lambda_\alpha(f).$$

U prethodnom izrazu n možemo zamijeniti proizvoljnim slučajnim nizom prirodnih brojeva koji konvergira u beskonačno $\mathbb{P}_\alpha$-g.s. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\nu_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_\alpha(X_k)$. Budući da je α povratan, slijedi da je $\nu_n \to \infty$ $\mathbb{P}_\alpha$-g.s. Imamo

$$\frac{\sum_{k=1}^{\sigma_\alpha^{(\nu_n)}} f(X_k)}{\nu_n} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} f(X_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_\alpha(X_k)} \le \left(\frac{\nu_n + 1}{\nu_n}\right) \frac{\sum_{k=1}^{\sigma_\alpha^{(\nu_n+1)}} f(X_k)}{\nu_n + 1},$$

pa po teoremu o "sendviču" i zbog rastava $f = f^+ - f^-$ slijedi (3.9).

Neka je sada μ početna distribucija, takva da je $\mathbb{P}_\mu(\sigma_\alpha < \infty) = 1$. Budući da je α povratan, vrijedi $\mathbb{P}_\mu(N_\alpha = \infty) = 1$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$ $\mathbb{P}_\mu$-g.s. pa za $n \geq \sigma_\alpha$ možemo napraviti sljedeći rastav

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} f(X_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_\alpha(X_k)} = \frac{\sum_{k=1}^{\sigma_\alpha} f(X_k)}{v_n} + \frac{\sum_{\sigma_\alpha+1}^{n} f(X_k)}{1 + \sum_{k=\sigma_\alpha+1}^{n} \mathbb{1}_\alpha(X_k)}. \tag{3.10}$$

Zbog $\mathbb{P}_\mu(\sigma_\alpha < \infty) = 1$ i $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$ $\mathbb{P}_\mu$-g.s. vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\sigma_\alpha} f(X_k)}{v_n} = 0 \quad \mathbb{P}_\mu\text{-g.s.} \tag{3.11}$$

Budući da je $\mathbb{P}_\mu(\sigma_\alpha < \infty) = 1$, jako Markovljevo svojstvo i (3.9) daju

$$\mathbb{P}_\mu\left(\lim_{l\to\infty} \frac{\sum_{k=\sigma_\alpha+1}^{\sigma_\alpha+l} f(X_k)}{\sum_{k=\sigma_\alpha+1}^{\sigma_\alpha+l} \mathbb{1}_\alpha(X_k)} = \lambda_\alpha(f)\right) = \mathbb{P}_\alpha\left(\lim_{l\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{l} f(X_k)}{\sum_{k=1}^{l} \mathbb{1}_\alpha(X_k)} = \lambda_\alpha(f)\right) = 1.$$

Konačno, zbog prethodne tvrdnje imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=\sigma_\alpha+1}^{n} f(X_k)}{1 + \sum_{k=\sigma_\alpha+1}^{n} \mathbb{1}_\alpha(X_k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=\sigma_\alpha+1}^{n} f(X_k)}{\sum_{k=\sigma_\alpha+1}^{n} \mathbb{1}_\alpha(X_k)} = \lim_{l\to\infty} \frac{\sum_{k=\sigma_\alpha+1}^{\sigma_\alpha+l} f(X_k)}{\sum_{k=\sigma_\alpha+1}^{\sigma_\alpha+l} \mathbb{1}_\alpha(X_k)} = \lambda_\alpha(f) \quad \mathbb{P}_\mu\text{-g.s.}$$

□

Teorem 3.3.2. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$. Neka je α povratan i dostižan atom. Neka je λ podinvarijantna mjera za P. Tada za svaku početnu distribuciju μ, takvu da je $\mathbb{P}_\mu(\sigma_\alpha < \infty) = 1$, i sve konačne μ-integrabilne funkcije f, g, takve da je $\lambda(g) \neq 0$, vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f(X_k)}{\sum_{k=1}^{n} g(X_k)} = \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)} \quad \mathbb{P}_\mu\text{-g.s.}$$

Dokaz. Po teoremu 3.2.2 imamo $\lambda = \lambda(\alpha)\lambda_\alpha$, λ je invarijantna za P i $0 < \lambda(\alpha) < \infty$. To povlači da su iste funkcije integrabilne s obzirom na λ_α i λ te

$$\frac{\lambda_\alpha(f)}{\lambda_\alpha(g)} = \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)}.$$

Sada možemo primijeniti lemu 3.3.1 na funkcije f i g i uzeti omjer dobivenih limesa. □

Idući se korolar bavi oblikom funkcije $g \equiv 1$, ali će limes biti različit ovisno o tome je li atom pozitivan ili nul-povratan.

Korolar 3.3.3 (Ergodski teorem)**.** *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ te α dostižan i povratan atom. Neka je μ vjerojatnosna mjera, takva da vrijedi $\mathbb{P}_\mu(\sigma_\alpha < \infty) = 1$.*

1. *Ako je α pozitivan i π jedinstvena vjerojatnosna invarijantna mjera, tada za svaku konačnu π-integrabilnu funkciju f vrijedi*
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \overset{\mathbb{P}_\mu\text{-g.s.}}{\longrightarrow} \pi(f).$$
2. *Ako je α nul-povratan i λ podinvarijantna mjera za P, tada za sve konačne λ-integrabilne funkcije f vrijedi*
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \overset{\mathbb{P}_\mu\text{-g.s.}}{\longrightarrow} 0.$$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi izravno primjenom teorema 3.2.2 i 3.3.2 uz $g \equiv 1$. Pretpostavimo sad da je α nul-povratan. Po teoremu 3.2.2 imamo $\lambda = \lambda(\alpha)\lambda_\alpha$ i λ je invarijantna za P. Tada je $\lambda(\mathbb{X}) = \lambda(\alpha)\lambda_\alpha(\mathbb{X}) = \lambda(\alpha)\,\mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha] = \infty$. Neka je f nenegativna funkcija, takva da vrijedi $\lambda(f) < \infty$. Budući da je λ σ-konačna, za svaki $\varepsilon > 0$, možemo odabrati skup F tako da vrijedi $0 < \lambda(F) < \infty$ i $\lambda(f)/\lambda(F) < \varepsilon$. Primjenom teorema 3.3.2 za $g \equiv \mathbb{1}_F$ dobivamo
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} f(X_k)}{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_F(X_k)} = \frac{\lambda(f)}{\lambda(F)} < \varepsilon \ \mathbb{P}_\mu\text{-g.s.},$$
gdje prvi limes u izrazu postoji zbog teorema 3.3.2 uz $g \equiv 1$. Zbog proizvoljnosti ε slijedi druga tvrdnja. □

3.4 Centralni granični teorem

Neka je P Markovljeva jezgra s invarijantnom vjerojatnosnom mjerom π i neka je $f \in \mathbb{F}(\mathbb{X})$ funkcija, takva da vrijedi $\pi(|f|) < \infty$. Kažemo da niz $\{f(X_k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ zadovoljava centralni granični teorem ako postoji konstanta $\sigma^2(f) \geq 0$, takva da vrijedi
$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(f(X_k) - \pi(f))}{\sqrt{n}} \overset{D}{\longrightarrow} N(0, \sigma^2(f))$$
uz vjerojatnost $\mathbb{P}_\mu$ za svaku početnu distribuciju $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathcal{X})$. Dopuštat ćemo i slučaj kada je $\sigma^2(f) = 0$. U tom ćemo slučaju imati i konvergenciju po vjerojatnosti budući da su konvergencija po distribuciji i vjerojatnosti ekvivalentne u slučaju konstantnoga limesa.

Lema 3.4.1. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$, α privlačan atom koji zadovoljava $\mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha] < \infty$, $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathcal{X})$ i neka je $\nu_n = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_\alpha(X_k)$. Tada za sve $\varepsilon > 0$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi*
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}_\mu(n - \sigma_\alpha^{(\nu_n)} > k) \leq \varepsilon.$$

Dokaz. Zbog Markovljevog svojstva za sve $n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\mu(n - \sigma_\alpha^{(v_n)} = k) &\leq \mathbb{P}_\mu(X_{n-k} \in \alpha, \sigma_\alpha \circ \theta_{n-k} > k) \\ &= \mathbb{P}_\mu(X_{n-k} \in \alpha)\, \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha > k) \leq \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha > k).\end{aligned}$$

Budući da je $\mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha] < \infty$, vrijedi

$$\mathbb{P}_\mu(n - \sigma_\alpha^{(v_n)} > k) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbb{P}_\mu(n - \sigma_\alpha^{(v_n)} = j) \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha > j) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Zadnja tvrdnja slijedi zbog $\mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha > j)$. Također, pretpostavka privlačnosti bila je nužna kako bismo mogli tvrditi da će lanac bez obzira na početnu distribuciju doći u α. Primijetimo da ako je skup privlačan, onda je skup i povratan. Sada smo u prilici iznijeti centralni granični teorem.

Teorem 3.4.2. *Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$, α privlačan i pozitivan atom. Označimo sa π jedinstvenu invarijantnu vjerojatnosnu mjeru od P. Neka je $f \in \mathbb{F}(\mathbb{X})$ funkcija koja zadovoljava*

$$\pi(|f|) < \infty, \quad \mathbb{E}_\alpha\left[\left(\sum_{k=1}^{\sigma_\alpha}(f(X_k) - \pi(f))\right)^2\right] < \infty. \tag{3.12}$$

Tada za svaku početnu distribuciju $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathcal{X})$ vrijedi

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(f(X_k) - \pi(f))}{\sqrt{n}} \overset{D\text{-}\mathbb{P}_\mu}{\longrightarrow} N(0, \sigma^2(f)), \tag{3.13}$$

gdje je

$$\sigma^2(f) = \frac{1}{\mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha]}\, \mathbb{E}_\alpha\left[\left(\sum_{k=1}^{\sigma_\alpha}(f(X_k) - \pi(f))\right)^2\right]. \tag{3.14}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\pi(f) = 0$. U suprotnom promatramo $\{f(X_k) - \pi(f) : k \in \mathbb{Z}_+\}$. Nadalje, rastavljamo $\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$ na izlete između odlazaka i dolazaka u α. Neka je kao i prije $v_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_\alpha(X_k)$. Primjenom korolara 3.3.3 za $f = \mathbb{1}_\alpha$ dobivamo

$$\frac{v_n}{n} \overset{\mathbb{P}_\mu\text{-g.s}}{\longrightarrow} \pi(\alpha) = \frac{1}{\mathbb{E}_\alpha[\sigma_\alpha]}. \tag{3.15}$$

Dakle, $v_n \to \infty$ $\mathbb{P}_\mu$-g.s. pa možemo samo promatrati događaj $\{v_n \geq 2\}$. Tada imamo

$$\sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \mathcal{E}_1(\alpha, f) + \sum_{k=2}^{v_n} \mathcal{E}_j(\alpha, f) + \sum_{i=\sigma_\alpha^{(v_n)}+1}^{n} f(X_i).$$

Budući da je α privlačan i pozitivan, po korolaru 3.2.4 su $\mathcal{E}_j(\alpha, f)$, $j \geq 1$ nezavisne slučajne varijable uz $\mathbb{P}_\mu$ za sve početne distribucije μ. Također su $\mathcal{E}_j(\alpha, f)$, $j \geq 2$ nezavisne jednako distribuirane uz $\mathbb{P}_\mu$. Teorem 5.0.2, (3.12) i (3.15) povlače da $n^{-1/2} \sum_{j=2}^{\nu_n} \mathcal{E}_j(\alpha, f)$ konvergira po distribuciji u $N(0, \sigma^2(f))$ uz $\mathbb{P}_\mu$. Teorem će biti dokazan ako pokažemo da vrijedi

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} \left| \sum_{k=1}^{n} f(X_k) - \sum_{j=2}^{\nu_n} \mathcal{E}_j(\alpha, f) \right| \\
&\qquad \leq \limsup_{n\to\infty} n^{-1/2} |\mathcal{E}_1(\alpha, f)| + \limsup_{n\to\infty} n^{-1/2} \left| \sum_{i=\sigma_\alpha^{(\nu_n)}+1}^{n} f(X_i) \right| = 0,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

gdje limesi trebaju vrijediti za $\mathbb{P}_\mu$ za svaku početnu distribuciju μ. Budući da je α privlačan, vrijedi $\mathbb{P}_\mu(\sigma_\alpha < \infty) = 1$. Stoga, suma $\mathcal{E}_1(\alpha, f)$ ima $\mathbb{P}_\mu$-g.s. konačno sumanada, stoga $\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} \mathcal{E}_1(\alpha, f) = 0$ $\mathbb{P}_\mu$-g.s. Da bismo zaključili gornju tvrdnju, trebamo pokazati da kad $n \to \infty$, onda

$$n^{-1/2} \left| \sum_{i=\sigma_\alpha^{(\nu_n)}+1}^{n} f(X_i) \right| \xrightarrow{\mathbb{P}_\mu} 0. \tag{3.17}$$

Neka je $\varepsilon > 0$, proizvoljan. Po lemi 3.4.1 možemo odabrati $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\mathbb{P}_\mu(n - \sigma_\alpha^{(\nu_n)} > k) < \varepsilon/2$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dalje imamo

$$\begin{aligned}
A_n &= \mathbb{P}_\mu \left(n^{-1/2} \left| \sum_{j=\sigma_\alpha^{(\nu_n)}+1}^{n} f(X_j) \right| > \eta \right) \\
&\leq \mathbb{P}_\mu(n - \sigma_\alpha^{(\nu_n)} > k) + \mathbb{P}_\mu \left(n^{-1/2} \left| \sum_{j=\sigma_\alpha^{(\nu_n)}+1}^{n} f(X_j) \right| > \eta, n - \sigma_\alpha^{(\nu_n)} \leq k \right) \\
&\leq \varepsilon/2 + \sum_{s=1}^{k} \mathbb{P}_\mu \left(n^{-1/2} \sum_{j=\sigma_\alpha^{(\nu_n)}}^{\sigma_\alpha^{(\nu_n)}+k} |f(X_j)| > \eta, n - \sigma_\alpha^{(\nu_n)} = s \right) \\
&\leq \varepsilon/2 + \sum_{s=1}^{k} \mathbb{P}_\mu \left(n^{-1/2} \sum_{j=n-s}^{n-s+k} |f(X_j)| > \eta, X_{n-s} \in \alpha, \sigma_\alpha \circ \theta_{n-s} > s \right).
\end{aligned}$$

Stoga, zbog Markovljevog svojstva, imamo $A_n \leq \varepsilon/2 + \sum_{s=1}^{\infty} a_n(s)$ gdje je

$$a_n(s) = \mathbb{P}_\alpha \left(n^{-1/2} \sum_{j=0}^{k} |f(X_j)| > \eta, \sigma_\alpha > s \right) \mathbb{1}_{\{s \leq n\}}.$$

Primijetimo da za svaki $s \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n(s) = 0$ i $a_n(s) \leq \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha > s)$. Nadalje, budući da je $\sum_{s=1}^{\infty} \mathbb{P}_\alpha(\sigma_\alpha > s) < \infty$, primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo $\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{\infty} a_n(s) = 0$. Zbog proizvoljnosti konstante ε imamo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\mu \left(n^{-1/2} \left| \sum_{\sigma_\alpha^{(\nu n)}+1}^{n} f(X_k) \right| > \eta \right) = 0.$$

□

Poglavlje 4

Primjeri

Prisjetimo se kako u primjeru 3.1.2 nismo pokazali da se radi o Markovljevom lancu. Iduća lema omogućit će nam da pokažemo da se radi o homogenom Markovljevom lancu.

Lema 4.0.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, X i Y slučajne varijable s vrijednostima u $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$. Neka je $\mathcal{G}$ σ-algebra nezavisna sa Y i neka je X $(\mathcal{G}, \mathcal{X})$-izmjeriva, $\varphi\colon \mathbb{X}^2 \mapsto \mathbb{R}$ funkcija, takva da je $\mathbb{E}\,|\varphi(X,Y)| < \infty$ i neka je $g(x) = \mathbb{E}[\varphi(x,Y)]$. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y) \mid \mathcal{G}] = g(X).$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je $\varphi(x,y) = \mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{1}_B(y)$ za proizvoljne $A, B \in \mathcal{F}$. Neka je $C \in \mathcal{G}$. Tada zbog nezavisnosti Y i $\mathcal{G}$ imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(X,Y)\,\mathbb{1}_C] &= \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap C \cap \{Y \in B\}) \\ &= \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap C)\,\mathbb{P}(\{Y \in B\}).\end{aligned}$$

Budući da je $g(x) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{1}_A(Y)] = \mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{P}(Y \in B)$, imamo

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap C)\,\mathbb{P}(\{Y \in B\}) = \mathbb{E}[g(X)\,\mathbb{1}_C].$$

Dakle, vrijedi $\mathbb{E}[\varphi(X,Y) \mid \mathcal{G}] = g(X)$. Sada primjenjujemo teorem 5.0.3. Neka $\mathcal{A}$ sadržava sve skupove oblika $A \times B$ $A, B \in \mathbb{X}$. Onda je $\mathcal{A}$ π-sistem koji sadržava $\mathbb{X}^2$. Neka je $\mathcal{H}$ skup funkcija φ koje zadovoljavaju traženo svojstvo. Prva pretpostavka teorema 5.0.3 je dokazana gore. Preostale dvije pretpostavke slijede iz teorema o dominiranoj konvergenciji i linearnosti uvjetnoga očekivanja. $\square$

Sada uzimanjem $\mathcal{G} = \mathcal{F}_k$, $X = X_k$, $Y = Z_{k+1}$ i $\varphi(x, y) = \mathbb{1}_A(x + y)^+$ za $A \in \mathcal{X}$. Primjenom prethodnoga rezultata dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1} \in A \mid \mathcal{F}_k) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_k + Z_{k+1})^+ \mid \mathcal{F}_k] \\ &= g(x) \circ X_k \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(x + Z_{k+1})^+] \circ X_k \\ &= \mathbb{P}((x + Z_{k+1})^+ \in A) \circ X_k \\ &= \nu_1(X_k, A),\end{aligned}$$

gdje je ν_1 zadan sa

$$\nu_1(x, A) = \begin{cases} \nu(\langle -\infty, -x]) + \nu(\{A > 0\} - x) & 0 \in A \\ \nu(\{A > 0\} - x) & 0 \notin A \end{cases}$$

i gdje je $\{A > 0\} - x = \{a - x : a > 0, a \in A\}$ te ν distribucija od Z_1. Prethodni izvod pokazuje da se zaista radi o homogenom Markovljevom lancu. Pa se rezultati 3. poglavlja mogu razmatrati za reflektiranu slučajnu šetnju. Pokažimo da je slučajna šetnja na $\mathbb{R}^d$ homogen Markovljev lanac.

Primjer 4.0.2 (Slučajna šetnja)**.** *Neka su $\xi_1, \xi_2, \ldots \in \mathbb{R}^d$ nezavisne jednako distribuirane s distribucijom μ. Neka je $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$ i neka je $X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Ponovno primjenom leme 4.0.1 uz $\mathcal{G} = \mathcal{F}_k$, $X = X_k$, $Y = \xi_{k+1}$ i $\varphi(x, y) = \mathbb{1}_A(x + y)$ za $A \in \mathcal{X}$ imamo*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1} \in A \mid \mathcal{F}_k) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_k + \xi_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k] \\ &= g(x) \circ X_k \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(x + \xi_{k+1})] \circ X_k \\ &= \mathbb{P}(x + \xi_{k+1} \in A) \circ X_k \\ &= \mathbb{P}(\xi_{k+1} \in A - x) \circ X_k \\ &= \mu(A - X_k)\end{aligned}$$

gdje je $A - x = \{a - x : a \in A\}$. Dakle, $(X_n)_n$ je homogen Markovljev lanac s početnom distribucijom δ_x i Markovljevom jezgrom $P(x, A) = \mu(A - x)$.

Dakle, vidimo da uz pomoć lema 4.0.1 možemo konstruirati širok spektar primjera. Također se primjenom leme 4.0.1 može pokazati da je autoregresivni proces reda jedan također homogen Markovljev lanac. Dakle, lema 4.0.1 je svojevrsni dovoljni uvjet da procesi generirani funkcijom φ budu homogeni Markovljevi lanci. Zanimljivo je da se uz dodatnu pretpostavku na $\mathbb{X}$ može pokazati i obrat, koji je iskazan u idućem teoremu koji nećemo dokazivati.

Teorem 4.0.3. *Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ izmjeriv prostor i neka je $\mathcal{X}$ prebrojivo generirana. Neka je P Markovljeva jezgra na $\mathbb{X} \times \mathcal{X}$ i ν vjerojatnost na $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$. Neka je $\{Z_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ n.j.d. niz uniformno distribuiranih varijabli na $[0, 1]$. Tada postoje izmjeriva funkcija g sa $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ u $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ i izmjeriva funkcija f sa $(\mathbb{X} \times [0, 1], \mathcal{X} \otimes \mathcal{B}([0, 1]))$ u $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$, takve da je niz $\{X_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ definiran sa $X_0 = g(Z_0)$ i $X_{k+1} = f(X_k, Z_{k+1})$ za $k \geq 0$ homogen Markovljev lanac s početno distribucijom ν i Markovljevom jezgrom P.*

Teorem se može pronaći u [1].

4.1 Gl/G/1 rep

Zamislimo da promatramo malu poslovnicu pošte u kojoj radi samo jedan zaposlenik. Kupci ulaze u poslovnicu i stanu u red ispred blagajne na kojoj radi jedini zaposlenik. Naravno, red u poslovnici funkcionira na uobičajen način tako da osoba koja je prva ušla u red i prva dolazi do blagajne. U nastavku će nam biti od interesa znati koliko je svaki kupac čekao svoju uslugu. Jasno, budući da je vrijeme čekanja realna varijabla, nužna će biti teorija Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja.

Ovakvu situaciju modelirat ćemo Gl/G/1 repom. Neka je $\xi_1, \xi_2, \ldots$ nezavisan jednako distribuiran niz slučajnih varijabli, W_n definiramo induktivno sa $W_n = (W_{n-1} + \xi_n)^+$ za $n > 0$ i $W_0 = 0$. Da bismo objasnili notaciju, neka su vremena dolazaka kupaca dana čistim procesom obnavljanja, to jest u vremenima $0 = T_0 < T_1 < T_2 \ldots$, gdje su $\zeta_n = T_n - T_{n-1}$, $n \geq 1$ nezavisne jednako distribuirane. Neka su $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable koje predstavljaju vremena posluživanja n-tog kupca, neka su također nezavisne sa $(T_n)_{n\geq 0}$. Neka je $\xi_n = \eta_{n-1} - \zeta_n$. Uz ovakve definicije W_n je zaista vrijeme čekanja do usluživanja n-tog kupca. Naime, primijetimo da $(n-1)$-ti kupac pridodaje η_{n-1} vremena zaposleniku da odradi. Ako zaposlenik cijelo vrijeme radi tijekom $[T_{n-1}, T_n\rangle$, onda smanjuje opseg svoga posla za ζ_n. Ako je $W_{n-1} + \eta_{n-1} < \zeta_n$, tada će zaposlenik uspjeti završiti sav posao i idući će kupac biti odmah na redu.

U oznaci Gl/G/1, Gl označava da je proces vremena dolazaka nezavisan s proizvoljnom distribucijom, G označava da je proces vremena usluživanja nezavisan s proizvoljnom distribucijom, a 1 označava da će za red biti zadužen jedan zaposlenik.

Primijetimo da je $(W_n)_{n\geq 0}$ zapravo reflektirana slučajna šetnja, a za nju je već pokazano da je homogeni Markovljev lanac i da je $\{0\}$ dostižan atom ako postoji $a > 0$, takav da vrijedi $\nu(\langle -\infty, -a\rangle) > 0$ gdje je ν distribucija od ξ_1. Primijetimo kako se W_n i $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ podudaraju sve do $N = \inf\{n : S_n < 0\}$ i $W_N = 0$. Pretpostavimo li da je $\mathbb{E}[\xi_1] < 0$, po teoremu 5.0.4 imamo

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{g.s.}} \mathbb{E}[\xi_1] < 0.$$

Nadalje za g.s. $\omega \in \Omega$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = \mathbb{E}[\xi_1] < 0.$$

Dakle, za g.s. $\omega \in \Omega$ postoji n_ω, takav da je $S_{n_\omega}(\omega) < 0$. Dakle, $\mathbb{P}(S_n < 0 \text{ za neki } n) = 1$. Pa dobivamo

$$\mathbb{P}(W_n = 0 \text{ za neki } n) = 1,$$

što pokazuje da je $\{0\}$ povratan atom. Ako je $\mathbb{E}[\xi_1] = 0$, također se može pokazati da je $\{0\}$ povratan atom, ali je dokaz zahtjevniji pa ga radi opširnosti rada izostavljamo.

Pretpostavimo li da je $\mathbb{E}[\xi_1] > 0$, po teoremu 5.0.4 imamo

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{g.s.}} \mathbb{E}[\xi_1] > 0$$

što znači da

$$S_n \xrightarrow{\text{g.s.}} \infty.$$

Dakle, za g.s $\omega \in \Omega$ postoji n_ω, takav da je $S_n(\omega) > 0$ za sve $n \geq n_\omega$. Dakle, $\mathbb{P}(S_n \leq 0 \text{ za konačno } n\text{-ova}) = 1$ pa dobivamo

$$\mathbb{P}(W_n = 0 \text{ za konačno } n\text{-ova }) = 1$$

što pokazuje da je $\{0\}$ prolazan atom.

Dakle, u slučaju $\mathbb{E}[\xi_1] \leq 0$ primjenom teorem 3.2.2 dobivamo da je

$$\lambda_0(A) = \mathbb{E}_0\left[\sum_{k=1}^{\sigma_0} \mathbb{1}_A(X_k)\right], \quad A \in \mathcal{X}$$

invarijantna mjera za pripadnu Markovljevu jezgru te je svaka druga podinvarijantna mjera invarijantna i proporcionalna sa λ_0.

Poglavlje 5

Dodatak

U ovom se poglavlju nalaze neki korišteni rezultati iz teorije vjerojatnosti i teorije mjere.

Teorem 5.0.1. *Neka je $\mathcal{H}$ vektorski prostor ograničenih realnih funkcija na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Također, neka je $\{X_i : i \in I\}$ familija izmjerivih funkcija sa $(\Omega, \mathcal{A})$ u $(\mathbb{X}_i, \mathcal{F}_i)$. Pretpostavimo da vrijedi:*

1. *ako je $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ ograničen rastući niz funkcija u $\mathcal{H}$, onda $\sup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \in \mathcal{H}$,*
2. *za svaki konačni podskup J od I i proizvoljne $A_j \in \mathcal{F}_j$, $j \in J$ je*

$$\prod_{j\in J} \mathbb{1}_{A_j} \circ X_j \in \mathcal{H}.$$

Tada $\mathcal{H}$ sadržava sve ograničene $\sigma(X_i : i \in I)$-izmjerive funkcije.

Teorem se može pronaći u [1]. Stacionarni proces $\{X_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ je m-nezavisan za $m \in \mathbb{N}$ ako su $(X_0, \dots, X_i)$ i $(X_j, X_{j+1} \dots)$ nezavisni kad god $j - i > m$.

Teorem 5.0.2. *Neka je $m \in \mathbb{N}$, $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ stacionaran m-nezavisan proces s očekivanjem 0 i neka je $\{\eta_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ niz slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednost u $\mathbb{N}$, takve da vrijedi*

$$\frac{\eta_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \vartheta \in (0, \infty) \tag{5.1}$$

na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada vrijedi

$$\frac{\sum_{k=0}^{\eta_n} Y_k}{\sqrt{\eta_n}} \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2) \quad i \quad \frac{\sum_{k=0}^{\eta_n} Y_k}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0, \vartheta\sigma^2)$$

gdje je $\sigma^2 = \mathbb{E}[{Y_0}^2] + 2\sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}[Y_0 Y_k]$.

Dokaz se može naći u [1].

Teorem 5.0.3. *Neka je $\mathcal{A}$ π-sistem koji sadržava Ω i neka je $\mathcal{H}$ kolekcija realnih funkcija koja zadovoljava navedeno.*

1. *Ako je $A \in \mathcal{A}$, onda je $\mathbb{1}_A \in \mathcal{H}$.*
2. *Ako su $f, g \in \mathcal{H}$, onda je $f + g$ i cf u $\mathcal{H}$ za svaki $c \in \mathbb{R}$.*
3. *Ako je $f_n \in \mathcal{H}$ niz nenegativnih funkcija koje rastu u ograničenu funkciju f, onda je $f \in \mathcal{H}$.*

Tada $\mathcal{H}$ sadržava sve $\sigma(\mathcal{A})$-izmjerive ograničene funkcije.

Dokaz se može pronaći u [2].

Teorem 5.0.4 (Kolmogorov)**.** *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Tada niz $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, n \in \mathbb{N}\right)$ konvergira gotovo sigurno ako i samo ako $\mathbb{E}[X_1]$ postoji, i u tom je slučaju*

$$\overset{g.s.}{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \mathbb{E}[X_1].$$

Dokaz se može pronaći u [4].

Bibliografija

[1] R. Douc, E. Moulines, P. Priouret i P. Soulier, *Markov Chains*, Springer, 2018.

[2] R. Durett, *Probability: Theory and Examples*, Duxbury Press, 1996.

[3] J. R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge University Press, 1997.

[4] N. Sarapa, *Teorija Vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.

[5] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci predavanja*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/ml12-predavanja.html`, (kolovoz, 2021.).

Sažetak

Ovaj se rad bavi Markovljevim lancima na općenitom skupu stanja. Radi jednostavnosti, bavimo se Markovljevim lancima s atomima. Takvi lanci predstavljaju važnu klasu slučajnih procesa te su primjenjivi na široki spektar nematematičkih područja. U prvom se poglavlju iznosi sažetak osnovnih rezultata teorije Markovljevih lanaca na diskretnom skupu stanja. Drugo poglavlje je iskorišteno za uvođenje pojma Markovljeve jezgre te definicije Markovljevih lanaca i homogenih Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja. Teoremom 2.1.11 dokazana je važna karakterizacija uvjeta homogenih Markovljevih lanaca. U nastavku se poglavlja dokazuje jako Markovljevo svojstvo te iskazuju neke njegove posljedice koje će biti korištene u nastavku. Na početku trećega poglavlja, definicijom 3.1.1, uvodi se pojam atoma. Nadalje, analogno diskretnom slučaju, definiraju se i dokazuju karakterizacije povratnosti i prolaznosti atoma. Teoremom 3.2.2 dokazuju se nužni i dovoljni uvjeti za postojanje inavarijantne mjere i distribucije. Nadalje, u korolaru 3.3.3 dokazuje se ergodski teorem. Krunu razmatranja predstavlja centralni granični teorem za homogene Markovljeve lance, dokazan teoremom 3.4.2. U završnom se poglavlju rada prikazuju neki primjeri Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja, pri čemu je najviše pozornosti dano Gl/G/1 repu.

Summary

This work deals with Markov chains on a general state space. For simplicity, we deal with atomic Markov chains. Such chains represent an important class of stochastic processes and are applicable to a wide range of non-mathematical fields. In the first chapter we survey basic results of Markov chain theory on a discrete state space. The second chapter is dedicated to introduction of a Markov kernel, also the definition of Markov chains and homogeneous Markov chains on a general state space. Theorem 2.1.11 proves an important characterization of homogeneous Markov chains. Moreover, we prove the strong Markov property and state some of its consequences which will be used in later chapters. In the beginning of the third chapter, through definition 3.1.1, we introduce the concept of an atom. Furthermore, in analogy with a discrete state space we define and prove the characterization of atomic recurrence and transience. Theorem 3.2.2 proves necessary and sufficient conditions for the existence of an invariant measure and distribution. Corollary 3.3.3 proves the ergodic theorem. In the end through theorem 3.4.2 we prove the central limit theorem for homogeneous Markov chains. In the last chapter we present some examples of Markov chains on a general state space, where the most notable example is a Gl/G/1 queue.

Životopis

Rođen sam 11. veljače 1997. godine u Zagreb, preciznije u Petrovoj bolnici. Osnovnu školu Ivana Filipovića završavam 2012. godine. Iste godine upisujem zagrebačku XV. gimnaziju. Nakon završene gimnazije, 2016. godine, upisujem Preddiplomski studiji Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog studija, 2019. godine upisujem Diplomski studij Matematička statistika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.