

# Električni krug za Lorenzov atraktor

---

Uroš, Stijepo

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:919652>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-03**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Stijepo Uroš

Električni krug za Lorenzov atraktor

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Stijepo Uroš**

Diplomski rad

# **Električni krug za Lorenzov atraktor**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Emil Tafra

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2021.

Prvo bih se htio zahvaliti svome mentoru, izv. prof. dr. sc. Emilu Tafri na velikoj pomoći pri izradi ovog diplomskog rada.

Također bih se htio zahvaliti svojoj obitelji, gospodi i ninjama na velikoj podršci i pomoći tijekom školovanja.

Na kraju bih se želio posebno zahvaliti Niki Golubić na izrazitoj podršci, strpljenju i pomoći pri uređivanju diplomskog rada.

## Sažetak

Lorenzov atraktor jedan je od prvih stranih atraktora i općenito kaotičnih sustava te je cilj ovog rada napraviti analogni elektronički sklop koji će rješavati Lorenzov sustav jednadžbi. Lorenzov sustav prolazi kroz kvalitativne promjene kada mijenjamo parametre sustava te će biti prikazano kako se rješenje sustava mijenja kada mijenjamo parametar  $r$ . Povećavanjem  $r$ -a opažen je prelazak iz stabilnog ponašanja sustava u kaotično ponašanje kroz područje privremenog kaosa. Sklop dobro radi za niske vrijednosti parametra  $r$  dok za visoke vrijednosti dobivamo iskrivljene slike trajektorija zbog ograničenja korištenih operacijskih pojačala.

Ključne riječi: elektronički sklop, nelinearnost, Lorenzov atraktor, kaos, čudni atraktor, fraktali, analogni množitelj, fazni prostor, bifurkacija, stacionarne točke, granično kolo

# A Lorenz Attractor Circuit

## Abstract

The Lorenz attractor is one of the first strange attractors and one of the first chaotic systems in general. The goal of this thesis is to make an electric circuit which will solve the Lorenz system of equations. Lorenz system experiences qualitative changes as the parameters are changed and it will be shown how do the solutions of the system change as the parameter  $r$  is changed. As  $r$  was increased, we noted the transition from stable system behaviour into a chaotic one through the transient chaos region. The circuit works properly for small values of parameter  $r$  while for the large values we get distorted trajectories do to the limitations of the used operational amplifiers.

Keywords: electric circuit, nonlinearity, Lorenz attractor, chaos, strange attractor, fractal, analog multiplier, phase space, bifurcation, stationary points, limit cycle

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Lorenzov sustav</b>	<b>2</b>
2.1	Osnovna svojstva sustava . . . . .	2
2.1.1	Nelinearnost . . . . .	2
2.1.2	Simetrija . . . . .	2
2.1.3	Disipativnost . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Stacionarne točke</b>	<b>5</b>
3.1	Postojanje stacionarnih točaka . . . . .	5
3.2	Stabilnost stacionarnih točaka . . . . .	6
3.2.1	Stabilnost ishodišta . . . . .	6
3.2.2	Stabilnost $C^+$ i $C^-$ . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Atraktori</b>	<b>9</b>
4.1	Strani atraktor . . . . .	9
4.2	Stranost Lorenzovog sustava i njegova geometrija . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Kaos</b>	<b>11</b>
5.1	Odlike kaosa . . . . .	11
5.2	Lyapunov eksponent . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Elektronički sklop za Lorenzov atraktor</b>	<b>14</b>
6.1	Rad sklopa . . . . .	14
6.2	Analogni množitelj MPY634 . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Analiza rezultata</b>	<b>19</b>
<b>8</b>	<b>Zaključak</b>	<b>29</b>
<b>9</b>	<b>Metodički dio</b>	<b>30</b>
9.1	Istraživački usmjerena nastava fizike . . . . .	30
9.2	Nastavna priprema- Bernoullijeva jednadžba . . . . .	32
	<b>Literatura</b>	<b>43</b>

# 1 Uvod

Elektronički sklopovi pružaju jednostavnu i jeftinu mogućnost izvedbe određenih funkcija koje inače zahtijevaju mnogo računalnih resursa. Simuliranje evolucije sustava, kao što je Lorenzov sustav, mogući su, kako ćemo mi i pokazati u ovom radu, uz pomoć nekoliko jednostavnih i jeftinih elemenata poput analognog množitelja i operacijskih pojačala.

Lorenzov sustav kvalitetno mijenja svoje ponašanje promjenom parametara sustava od jednostavnih ponašanja do kaosa i natrag u red. U ovom ćemo radu opisati svojstva Lorenzovog atraktora i analizirat ćemo stacionarne točke te njihovu promjenu kroz promjenu parametara.

Opisat ćemo i rad sklopa te rad analognog množitelja korištenog u izvedbi elektroničkog sklopa. Na kraju će biti prezentirani rezultati dobiveni našim sklopom te će biti naglasiti ograničenja sklopa. Elektronički sklopovi, za razliku od računalnih simulacija, predstavljaju realni proces te samim time imaju više ograničenja nametnuta samim elementima sklopa i nesavršenošću istih.



## 2 Lorenzov sustav

Lorenzov sustav jednađbi :

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (2.1)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz \quad (2.2)$$

$$\dot{z} = xy - bz \quad (2.3)$$

prvi je izveo Ed Lorenz za pojednostavljeni opis termalne konvekcije [1].  $\sigma, r, b > 0$  su parametri sustava.  $\sigma$  se naziva Prandtlov broj,  $r$  se naziva Rayleighov broj, dok  $b$  nema ime [1]. Ovo je sustav nelinearnih diferencijalnih jednađbi prvog reda.

### 2.1 Osnovna svojstva sustava

#### 2.1.1 Nelinearnost

Druga i treća jednađba Lorentzovog sustava jednađbi sadrži članove  $xz$  i  $xy$  što ovaj sustav čini nelinearnim.

#### 2.1.2 Simetrija

Napravimo li zamjenu  $:(x(t), y(t), z(t)) \rightarrow (-x(t), -y(t), z(t))$  dobivamo isti sustav:

$$-\dot{x} = \sigma((-y) - (-x))$$

$$-\dot{y} = r(-x) - (-y) - (-x)z$$

$$-\dot{z} = (-x)(-y) - bz$$

↓

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

### 2.1.3 Disipativnost

Možemo pokazati da je Lorenzov sustav disipativan tako da pokažemo da se volumen faznog prostora koji zauzimaju trajektorije Lorenzovog sustava smanjuje.

Promjenu volumena faznog prostora  $dV$  u vremenu  $dt$  možemo prikazati kao volumen koji površina, koja ga omeđuje, prebriše u vremenu  $dt$ . Za to nam je potrebna trenutna brzina točke faznog prostora  $\vec{v}$  i smjer normale  $\hat{n}$  na početni volumen. Volumen možemo zapisati kao:

$$V = \int d\vec{l} \cdot \hat{n} \cdot dA \quad (2.4)$$

gdje je  $\hat{n}$  smjer normale na površinu  $dA$ . Možemo obje strane podijeliti s  $dt$  i dobit ćemo:

$$\dot{V} = \int \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \vec{n} \cdot dA \quad (2.5)$$

$$\dot{V} = \oint_S \vec{v} \cdot \hat{n} \cdot dA \quad (2.6)$$

gdje je  $\vec{v}$  trenutna brzina točke na površini koja omeđuje volumen. Koristeći teorem o divergenciji :  $\int_V (\vec{\nabla} \cdot v) d\tau = \oint_S (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA$  [2] dobit ćemo:

$$\dot{V} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \cdot dV \quad (2.7)$$

Za Lorenzov sustav:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \left( \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right) \cdot (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (2.8)$$

$$= \left( \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right) \cdot (\sigma(y-x), rx-y-xz, xy-bz) \quad (2.9)$$

$$= (-\sigma) + (-1) + (-b) \quad (2.10)$$

$$= -(\sigma + 1 + b) \quad (2.11)$$

Uvrstimo li ovo u izraz za promjenu volumena imamo:

$$\dot{V} = \int_V -(\sigma + 1 + b) \cdot dV \quad (2.12)$$

$$= -(\sigma + 1 + b) \int_V dV \quad (2.13)$$

$$= -(\sigma + 1 + b)V \quad (2.14)$$

Volumen  $V$  te parametri  $\sigma$  i  $b$  su uvijek pozitivni pa je vremenska promjena volumena uvijek negativna, odnosno volumen se uvijek smanjuje. Ovo dokazuje da sve trajektorije na posljatku padnu u prostor kojemu je volumen 0.

### 3 Stacionarne točke

#### 3.1 Postojanje stacionarnih točaka

Stacionarne točke ovog sustava možemo pronaći iz uvjeta:

$$\dot{x} = 0 \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = 0 \quad (3.2)$$

$$\dot{z} = 0 \quad (3.3)$$

Iz prve jednadžbe imamo:

$$0 = \sigma(y - x) \rightarrow x = y \quad (3.4)$$

što nam treću jednadžbu pretvara u:

$$0 = y^2 - bz \rightarrow z = \frac{y^2}{b} \quad (3.5)$$

i na posljetku imamo:

$$0 = ry - y - y \cdot \frac{y^2}{b} \rightarrow y(r - 1 - \frac{y^2}{b}) = 0 \quad (3.6)$$

Posljednja jednadžba ima rješenja:

$$y_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$y_{2,3}^2 - br_{2,3} + b = 0 \rightarrow y_2 = \sqrt{b(r-1)}; y_3 = -\sqrt{b(r-1)} \quad (3.8)$$

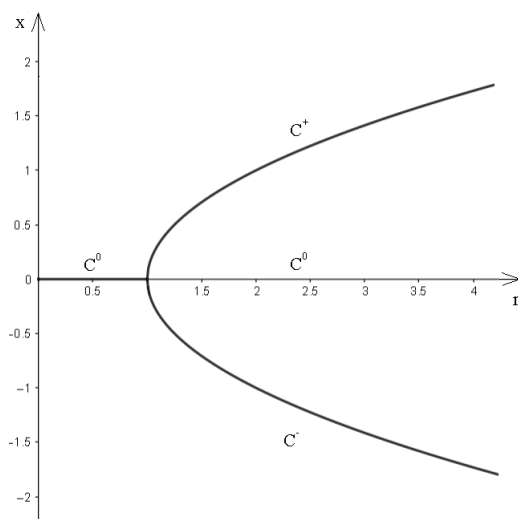
Imamo tri stacionarne točke:

$$(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0) \quad (3.9)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (3.10)$$

$$(x_3, y_3, z_3) = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (3.11)$$

Prva stacionarna točka se naziva  $C^0$ , dok se druga i treća stacionarna točka se nazivaju  $C^+$  i  $C^-$ . Možemo primijetiti da prva stacionarna točka, ishodište sustava, postoji bez obzira na odabir parametara  $r$ ,  $\sigma$  i  $b$ , dok druge dvije točke imaju realne vrijednosti za  $r > 1$ . Za  $r > 1$  imamo pojavu *pitchfork* bifurkacije, odnosno pojavu stvaranja simetričnih stabilnih stacionarnih točaka prilikom koje  $C^0$  postaje nestabilna. Za  $r \rightarrow 1^+$  one se približavaju ishodištu.



Slika 3.1: *Pitchfork* bifurkacija

## 3.2 Stabilnost stacionarnih točaka

### 3.2.1 Stabilnost ishodišta

Lorentzov je sustav disipativan pa možemo koristiti Lyapunovu funkciju oblika:

$$V = \frac{1}{\sigma} x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.12)$$

da pokažemo da je ishodište globalno stabilno za  $r < 1$  [1].

Vidimo da je  $V$  omeđen s donje strane s 0 te ako pokažemo da za  $r < 1$  vrijedi  $\dot{V} < 0$

duž trajektorija, tada znamo da sve trajektorije moraju završiti u ishodištu.

Deriviranjem izraza 3.12 dobivamo:

$$\dot{V} = \frac{2}{\sigma} x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} \quad (3.13)$$

$$= \frac{2}{\sigma} x(\sigma(y-x) + 2y(rx-y-xz)) + 2z(xy-bz) \quad (3.14)$$

$$= 2(r+1)xy - x^2 - 2y^2 - 2bz^2 \quad (3.15)$$

Preostaje nam razriješiti prvi član s desne strane jednakosti. To možemo napraviti nadopunjavanjem na potpuni kvadrat:

$$\dot{V} = -2 \left[ x^2 - (r+1)xy + \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 y^2 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 y^2 \right] - 2y^2 - 2bz^2 \quad (3.16)$$

$$= -2 \left[ \left(x - \frac{r+1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 y^2 \right] - 2y^2 - 2bz^2 \quad (3.17)$$

$$= -2 \left(x - \frac{r+1}{2}y\right)^2 - 2 \left(1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right) y^2 - 2bz^2 \quad (3.18)$$

Vidimo da se za  $r < 1$  i  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , gdje drugi član s desne strane jednakosti ima realnu vrijednost, Lyapunova funkcija monotono smanjuje prema nuli. To znači da svaka trajektorija na kraju završi u ishodištu te je ishodište globalno stabilno.

Dodatno, kada je  $r < 1$  i  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  tada  $\dot{V} = 0$  i  $V = 0$ , što znači da ako smo krenuli iz ishodište ostajemo u ishodištu.

### 3.2.2 Stabilnost $C^+$ i $C^-$

Točke  $C^+$  i  $C^-$  stabilne su za [1]:

$$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \quad (3.19)$$

U  $r = r_H$   $C^+$  i  $C^-$  gube stabilnost u potkritičnoj Hopfovoju bifurkaciji [3] upijanjem sedlenog kola.

Za  $r > r_H$   $C^+$  i  $C^-$  su sedlene točke te odbijaju sve trajektorije od sebe. Lorenz je pokazao da sva granična kola koja postoje za  $r > r_H$  moraju biti nestabilna [4], što znači da se trajektorije odbijaju od jednog nestabilnog objekta (kola ili stacionarne točke) do drugoga i pri tome imaju čudna dugoročna gibanja. Sva ta beskonačna

gibanja se događaju u prostoru nultog volumena i bez presijecanja trajektorija.

Ovdje dolazimo do kaotičnog gibanja za  $r > r_H$  kojega ćemo pobliže definirati u sljedećim poglavljima.

## 4 Atraktori

Atraktor je skup u kojega sve susjedne trajektorije konvergiraju, odnosno atraktor je zatvoreni skup  $A$  koji ima sljedeća svojstva [1]:

1.  $A$  je invarijantni skup: sve trajektorije  $x(t)$  koje počinju u  $A$  zauvijek ostaju u  $A$
2.  $A$  privlači otvoreni skup početnih uvjeta: postoji otvoreni skup  $U$  koji sadrži  $A$  takav da ako  $x(0) \in U$ , tada udaljenost od  $x(t)$  do  $A$  teži k nuli kako  $t \rightarrow \infty$ .  $A$  privlači sve trajektorije koje kreću dovoljno blizu njemu.
3.  $A$  je najmanji mogući skup: ne postoji podskup od  $A$  koji zadovoljava svojstva 1 i 2.

### 4.1 Strani atraktor

Ime strani atraktor prvi put koriste Ruelle i Takens 1971. za opis turbulentnog gibanja, a možemo ga definirati kao atraktor koji imaju hipersenzitivnu ovisnost na početne uvijete [1]. Puno stranih atraktora su fraktali, objekti s necjelobrojnom dimenzijom i svojstvom samosličnosti [6] i "stranost" tih skupova je za tadašnje znanstvenike bila upravo to. Danas su fraktali puno bolje poznati i dinamika sustava se smatra bitnija od geometrijskih svojstava pa ako želimo naglasiti ili dinamiku ili geometriju sustava koristimo ime kaotični atraktor ili fraktalni atraktor.

### 4.2 Stranost Lorenzovog sustava i njegova geometrija

Lorenz je primijetio stranost svoga sustava jednadžbi kada je promatrao trajektorije za  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  i  $r = 28$  [1]. Dobio je grafove  $x - t$ ,  $y - t$  i  $z - t$  slične kao one sa slika 7.10, 7.11 i 7.12 te je primijetio da su aperiodične. Također je prikazao te trajektorije u faznom prostoru te je dobio prikaze leptirovih krila slične onima sa slike 7.9. Lorenz primjećuje da je broj krugova koje trajektorija napravi oko  $C^+$  i  $C^-$  je slučajni i nepredvidljiv.

U 3D prikazu tih trajektorija se dobro vidi da preklapanja trajektorija koje se vide na  $x - z$  prikazima, kao onim na 7.9, zapravo nisu preklapanja već posljedica prikazivanja samo dvije dimenzije. Također, vidi se spajanje tih dvaju krila leptira u donjem dijelu slike 7.9, što predstavlja problem jer teorem o jedinstvenosti rješenja



kaže da se trajektorije ne smiju spajati ni preklapati [1]. Lorenz taj problem rješava tako što kaže da se te dvije plohe samo prividno spajaju te da se nama to pričinjava zbog jako uskog skupa i nedovoljne numeričke preciznosti naših uređaja [1]. Prostor koji zauzima atraktor se razvlači (posljedica hipersenzitivne ovisnosti na početne uvjete), skuplja (posljedica disipativnosti) i preklapa. Ako pratimo određeni skup početnih uvjeta on se rasteže, skuplja i preklapa oko nestabilnih objekata (ishodišta,  $C^+$  i  $C^-$ ). Preklapanje nastaje u donjem dijelu slika 7.14, ali po teoremu o jedinstvenosti rješenja dvije plohe, nastale preklapanjem, ne mogu se spojiti u početnu plohu, početni skup, što znači da moraju ići dalje po atraktoru. Kada ta ploha napravi još jedan krug po atraktoru preklapa se još jednom i nastaju četiri plohe. Ovaj postupak ponavljamo u beskonačnost i vidimo da dobivamo beskonačno puta preklopljene plohe koje su samoslične. Ovo što smo opisali je fraktal što znači da je Lorenzov atraktor fraktal i njegova dimenzija je 2.05. [1].

## 5 Kaos

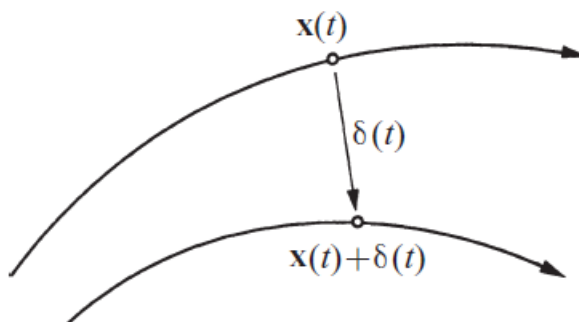
### 5.1 Odlike kaosa

Kaos je teško definirati, ali većina znanstvenika se slože oko tri sastavnica u radnoj definiciji kaosa: Kaos je dugotrajno aperiodično ponašanje u determinističkom sustavu koji ima odlike hipersenzitivne ovisnosti o početnim uvjetima [1, 4]. Možemo ukratko opisati svaki od ključnih sastavnica kaosa:

1. "Dugotrajno aperiodično ponašanje"-trajektorije ne upadnu u fiksne točke, periodičke ni kvaziperiodične putanje kako  $t \rightarrow \infty$ . Ovdje zahtijevamo da postoji otvoreni skup početnih uvjeta koji rezultiraju dugotrajnim aperiodičnim ponašanjem.
2. "Deterministički sustav"- sustav nema šuma ni slučajnih događaja, sva nepravilna ponašanja proizlaze iz nelinearnosti sustava.
3. "Hipersenzitivna ovisnost o početnim uvjetima"-susjedne trajektorije se separiraju eksponencijalno brzo, odnosno imaju pozitivan Lyapunov eksponent.

### 5.2 Lyapunov eksponent

Kaos definira hipersenzitivna ovisnost o početnim uvjetima pa ako uzmemo dvije trajektorije koje su nekom trenutku udaljene za jako malu udaljenost  $\delta(t)$ , kao one sa slike 5.1:



Slika 5.1: Bliske trajektorije udaljene za  $\delta(t)$ . Slika preuzeta s [1].

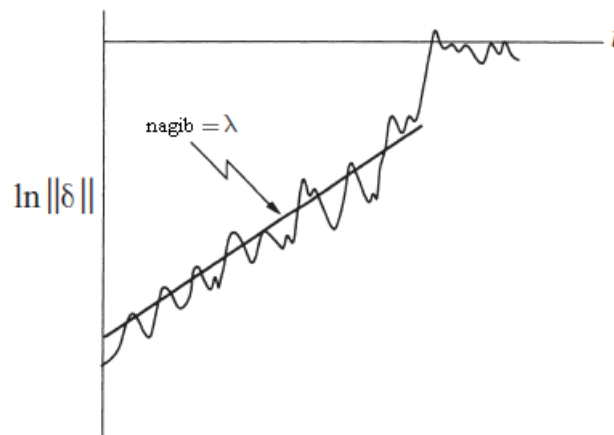
Te dvije trajektorije se nakon relativno kratkog vremena znatno udalje jedna od

druge. Za Lorenzov sustav one se eksponencijalno brzo separiraju:

$$\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\|e^{\lambda t} \quad (5.1)$$

$\lambda$  se naziva Lyapunov eksponent i preko njega možemo određivati je li sustav ima hipersenzitivnu ovisnost na početne uvijete odnosno, posjeduje li jedan od uvjeta kaotičnosti. Kaotični sustavi moraju imati pozitivan Lyapunov eksponent. Za Lorenzov sustav on je  $\lambda = 0.9$ .

Ovo možemo detaljnije prikazati  $\ln\|\delta\| - t$  grafom prikazanim na slici 5.2:



Slika 5.2:  $\ln\|\delta\| - t$  graf za Lorenzov atraktor. Slika djelomično preuzeta s [1].

Na slici su naznačeni aproksimirani izraz 5.1 i stvarni izgled grafa. Možemo ukratko naznačiti razlike [1]:

1.  $\ln\|\delta\| - t$  je rijetko kada pravac jer se bliske trajektorije ne udaljavaju jednako brzo u svakom dijelu atraktora.
2. Kada je udaljenost između trajektorija slična veličini atraktora, dolazi do izravnavanja krivulje  $\ln\|\delta\| - t$ . Trajektorije se ne mogu udaljiti više nego što je veličina atraktora.
3. U aproksimaciji  $\lambda$  nazivamo Lyapunovim eksponentom i treba naglasiti da:
  - u  $n$ -dimenzionalnom sustavu postoji  $n$  različitih Lyapunovih eksponenta. Ako uzmemo infinitezimalno veliku sferu početnih uvjeta i pustimo je da evoluira u vremenu ona postaje infinitezimalni elipsoid. Nazovemo li  $k$ -tu glavnu os elipsoida  $\delta_k(t), k = 1, \dots, n$  tada  $\delta_k(t) \sim \delta_k(0)e^{\lambda_k t}$  i vidimo da imamo  $n$  različitih  $\lambda_k$ . Kako elipsoid evoluira njegova veličina je određena najpozitivnijim  $\lambda_k$ , on

daja najveću separaciju, pa je naš  $\lambda$  zapravo najveći  $\lambda_k$ .

$\lambda$  ovisi o odabranoj trajektoriji pa bi ga trebali usrednjiti za puno točaka duž trajektorije da dobijemo točnu vrijednost:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|$$

[4]

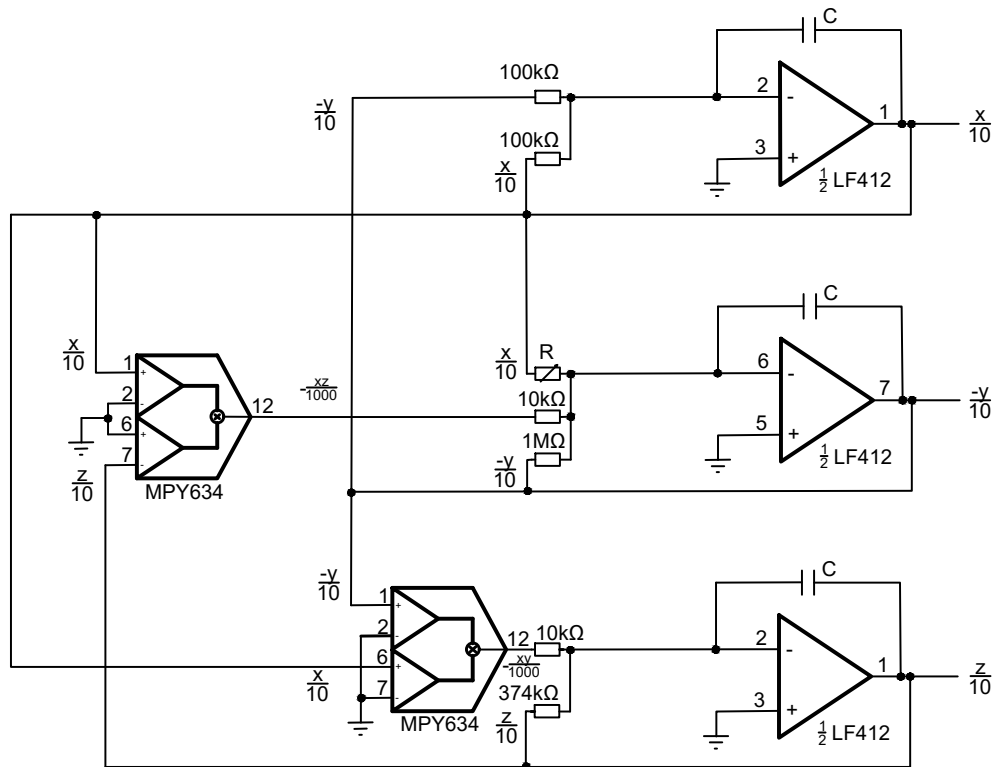
Svako mjerenje ima određenu neodređenost pa tako i svi početni uvjeti imaju određenu neodređenost  $\|\delta_0\|$ . U kaotičnim sustavima ta neodređenost raste  $\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\|e^{\lambda t}$  što znači da nakon određenog vremena  $t$  odstupanje postaje preveliko u odnosu na toleranciju  $a$ . Uz uvjet  $\|\delta(t)\| \geq a$ , nepouzdanost je veća od tolerancije, naši rezultati postaju nepouzdana nakon vremena [1]:

$$t_h \sim O\left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{\|\delta_0\|}\right) \quad (5.2)$$

Logaritmička ovisnost o  $\|\delta_0\|$  nas sprječava da znatno poboljšamo dugotrajna predviđanja u kaotičnim sustavima.

## 6 Elektronički sklop za Lorenzov atraktor

Na slici 6.1 prikazan je elektronički sklop za Lorenzov atraktor s  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  i promjenjivim  $r$ :



Slika 6.1: Elektronički sklop za Lorenzov atraktor.

Naznačeni kondenzatori imaju kapacitet  $C = 0.1 \mu\text{F}$ . Ideja za ovu izvedbu je preuzeta s [7].

### 6.1 Rad sklopa

Sklop se sastoji od tri operacijska pojačala te dva analogna množitelja. Detaljan opis rada analognih množitelja opisan je u sljedećem potpoglavlju. Kao što je i prikazano u sklopu, njihova je uloga da pomnože dva signala koja dovodimo na njihov ulaz. Operacijska pojačala spojena su kao invertirani zbrajajući integratori te je njihov izlaz

oblika [8]:

$$V_{\text{OUT}} = -\frac{1}{C} \int \left( \frac{V_{\text{in},1}}{R_1} + \frac{V_{\text{in},2}}{R_2} + \dots \right) dt \quad (6.1)$$

Za prvo operacijsko pojačalo imamo:

$$\frac{x}{10} = -\frac{1}{0.1 \mu\text{F}} \int \left( \frac{-y}{100 \text{ k}\Omega} + \frac{x}{100 \text{ k}\Omega} \right) dt \quad (6.2)$$

$$\frac{x}{10} = \int \frac{1}{0.1 \mu\text{F} \cdot 1 \text{ M}\Omega} (y - x) dt \quad (6.3)$$

$$\frac{x}{10} = \int 10 \text{ s}^{-1} (y - x) dt \quad (6.4)$$

Vidimo da s desne strane jednadžbe imamo integral od  $\dot{x}$ , a s lijeve strane imamo skalirani izlaz  $x$ , odnosno prvo operacijsko pojačalo rješava jednadžbu 2.1. To skaliranje je korisno jer operacijska pojačala mogu dati izlazni napon do napona njihovog napajanja, u našem slučaju 15 V [9], a naši izlazi, kao što se vidi iz stacionarnih točaka  $C^+$  i  $C^-$  za velike  $r$ , bi trebali biti i do više stotina volti. Skaliranje nam daje veći raspon za koji je naš sklop upotrebljiv.

Za drugo operacijsko pojačalo imamo:

$$\frac{-y}{10} = -\frac{1}{0.1 \mu\text{F}} \int \left( \frac{x}{R} + \frac{-y}{1 \text{ M}\Omega} + \frac{-xz}{1000 \text{ k}\Omega} \right) dt \quad (6.5)$$

$$\frac{y}{10} = \int \frac{1}{0.1 \mu\text{F} \cdot 10 \text{ M}\Omega} \left( \frac{10 \text{ M}\Omega}{10R} x - y - xz \right) dt \quad (6.6)$$

$$\frac{y}{10} = \int \left( \frac{1 \text{ M}\Omega}{R} x - y - xz \right) \text{ s}^{-1} dt \quad (6.7)$$

Vidimo da s desne strane jednadžbe imamo integral od  $\dot{y}$  ako vrijedi da:

$$r = \frac{1 \text{ M}\Omega}{R} \quad (6.8)$$

dok s lijeve strane imamo skalirani izlaz  $y$ , odnosno drugo operacijsko pojačalo rješava jednadžbu 2.2.

Za treće operacijsko pojačalo imamo:

$$\frac{z}{10} = -\frac{1}{0.1 \mu\text{F}} \int \left( \frac{-xy}{1000} + \frac{z}{374 \text{k}\Omega} \right) dt \quad (6.9)$$

$$\frac{z}{10} = \int \frac{1}{0.1 \mu\text{F} \cdot 10 \text{M}\Omega} \left( xy - \frac{8}{3}z \right) dt \quad (6.10)$$

$$\frac{z}{10} = \int \left( xy - \frac{8}{3}z \right) \text{s}^{-1} dt \quad (6.11)$$

Vidimo da s desne strane jednadžbe imamo integral od  $\dot{z}$ , a s lijeve strane imamo skalirani izlaz  $z$ , odnosno treće operacijsko pojačalo rješava jednadžbu 2.3.

Skaliranje izlaza ovisi o odabiru kondenzatora  $C$ , ali kvalitativno ponašanje: postojanje ili ne postojanje kaosa, bifurkacije, itd., ne ovisi o odabiru kondenzatora  $C$ . U slučaju da trebamo promijeniti parametre  $\sigma$  i  $b$  to postizemo promjenom otpornika slično kao i za parametar  $r$ . Naš sklop uvijek kreće od ishodišta jer ga možemo samo upaliti i uzgasiti da bismo ga resetirali.

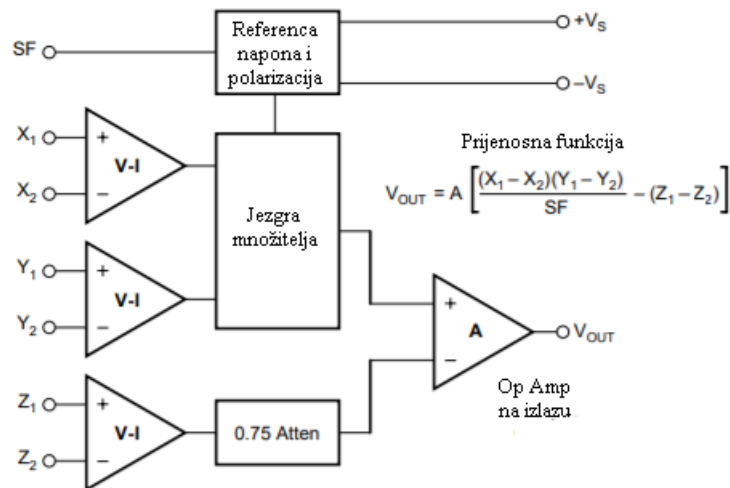
## 6.2 Analogni množitelj MPY634

Množitelj korišten u izvedbi elektroničkog sklopa sa slike 6.1 je MPY634.

MPY634 je širokopojasni, visoko precizni, četverokvadranti analogni množitelj i njegov funkcionalni blok-dijagram je prikazan na slici 6.2. On ima 6 ulaza i jedan izlaz. Konačan rad množitelja je opisan prijenosnom funkcijom:

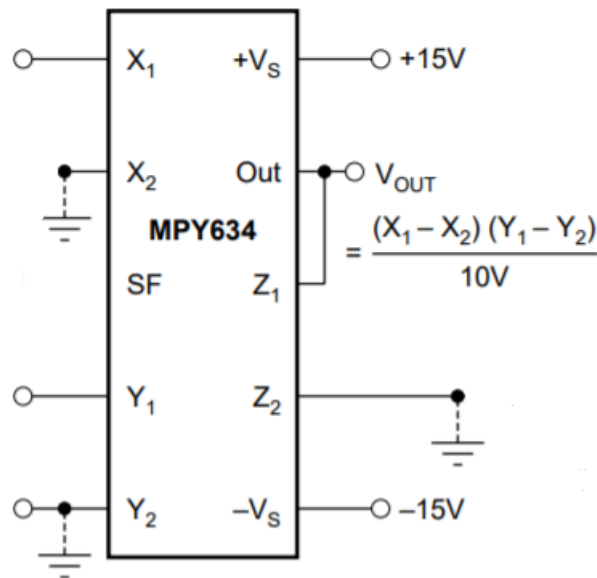
$$V_{\text{OUT}} = A \left[ \frac{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)}{\text{SF}} - (Z_1 - Z_2) \right] \quad (6.12)$$

Iz funkcionalnog blok-dijagrama možemo vidjeti kako se dobiva ta funkcija. Parovi ulaza  $X_1; X_2$ ,  $Y_1; Y_2$  i  $Z_1; Z_2$  prolaze kroz  $V - I$  pretvarače gdje se parovi oduzimaju. Dalje, izlazi  $X$  i  $Y$  pretvarača idu u jezgru množitelja koja te signale množi i dijeli sa SF. SF je faktor skaliranja signala koji je u MPY634 laserski obrezan na 10 V, ali se može mijenjati u rasponu od [3,10] V spajanjem vanjskih otpornika. Izlaz jezgre množitelja tada se dovodi na neinvertirani ulaz izlaznog operacijskog pojačala s pojačanjem  $A$ . Također, na invertirani ulaz izlaznog operacijskog pojačala dovodimo izlaz  $Z$  pretvarača. Uloga izlaznog operacijskog pojačala je da oduzme i pojača izlaz jezgre množitelja i izlaz  $Z$  pretvarača.



Slika 6.2: MPY634: Funkcionalni blok dijagram. Slika djelomično preuzeta s [10].

Spajanjem MPY634 kao običnog množitelja, kao što ga mi koristimo u našem sklopu i kao što je prikazano na slici 6.3:



Slika 6.3: MPY634 spojen kao obični množitelj. Slika djelomično preuzeta s [10].

dobivamo pojednostavljenu prijenosnu funkciju koju možemo izvesti promatranjem izlaznog operacijskog pojačala kao idealnog.

Idealno operacijsko pojačalo ima beskonačno pojačanje  $A = \infty$  te se proizvoljni izlazni napon može dobiti s infinitezimalnom vrijednošću unutar uglatih zagrada u



izrazu (6.12). Iz toga dobivamo:

$$\frac{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)}{SF} - (Z_1 - Z_2) = 0 \quad (6.13)$$

Kada je sklop spojen kao na slici 6.3 tada  $SF=10\text{ V}$ ,  $Z_1 = V_{\text{Out}}$  i  $Z_2 = 0$  i dobivamo:

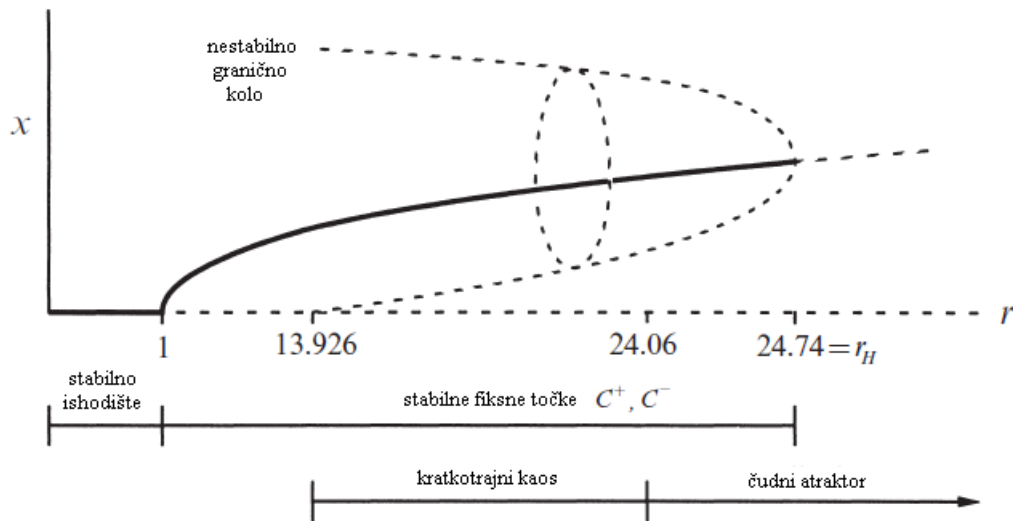
$$\frac{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)}{10\text{ V}} - (V_{\text{OUT}} - 0) = 0 \quad (6.14)$$

↓

$$V_{\text{OUT}} = \frac{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)}{10\text{ V}} \quad (6.15)$$

## 7 Analiza rezultata

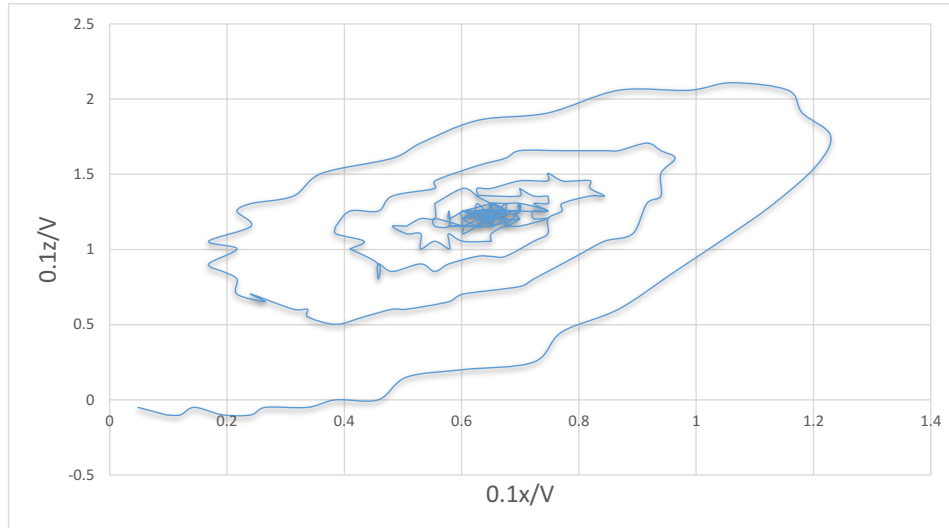
Za promatranje ponašanja rješenja Lorenzovog sustava jednadžbi potrebno je odabrati vrijednosti parametara  $\sigma$ ,  $b$  i  $r$ . Kao što je prikazano na slici 6.1 koristimo  $\sigma = 10$  i  $b = \frac{8}{3}$  i mijenjamo  $r$ . Tako možemo usporediti rezultate dobivene našim sklopom s ponašanjem opisanim na slici 7.1.



Slika 7.1: Ponašanje za mali  $r$ . Slika djelomično preuzeta s [1].

Za  $r < 1$  nismo u stanju prikazati stabilnost ishodišta jer naš sklop uvijek kreće od početnih uvjeta  $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0)$ . Jedino što možemo pokazati jest da se trajektorija ne udaljava od ishodišta.

Za  $1 < r$  ishodište postaje sedlena točka i javljaju se  $C^+$  i  $C^-$  kao stabilni čvorovi i za  $1.3456172 < r < 13.96$  postaju stabilni fokusi. Na slici 7.2 prikazano je ponašanje za  $R = 86 \text{ k}\Omega$  odnosno  $r = 11.36$ :



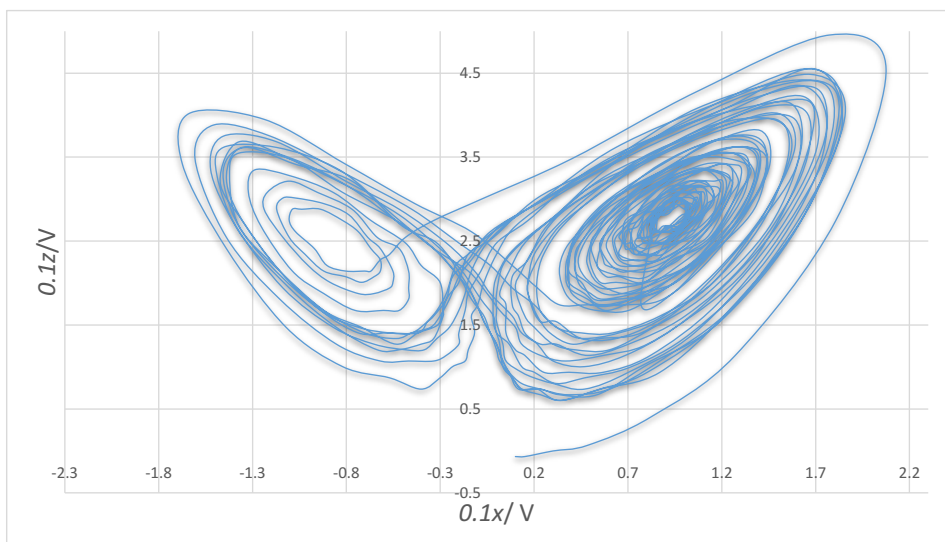
Slika 7.2: Ponašanje za  $R = 86 \text{ k}\Omega$  ( $r = 11.36$ ).

U  $r = 13.96$  dolazi do pojave homokliničke bifurkacije kada se spirala sa slike 7.2 dodirne sa svojim parom oko  $C^-$  u ishodištu [4]. Homoklinička bifurkacija nastaje spajanjem sedla i graničnog kola te dobivamo homokliničke trajektorije koje povezuju sedlenu točku samu sa sobom. Sve unutar graničnog kola (homokliničke trajektorije) upada ili u  $C^+$  ili  $C^-$  koji su još uvijek stabilni fokusi oko kojih je formirano nestabilno granično kolo. Ovakvo ponašanje se nastavlja sve do  $r = r_H$ . U našem slučaju:

$$r_H = \frac{10(10 + \frac{8}{3} + 3)}{10 - \frac{8}{3} - 1} \quad (7.1)$$

$$= 24.737 \quad (7.2)$$

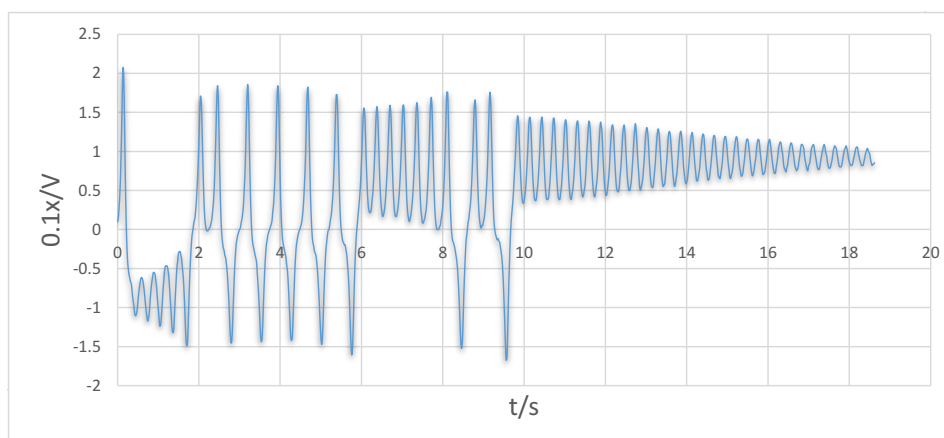
Na slici 7.3 prikazano je ponašanje za  $R = 36 \text{ k}\Omega$  odnosno  $r = 27.78$ :



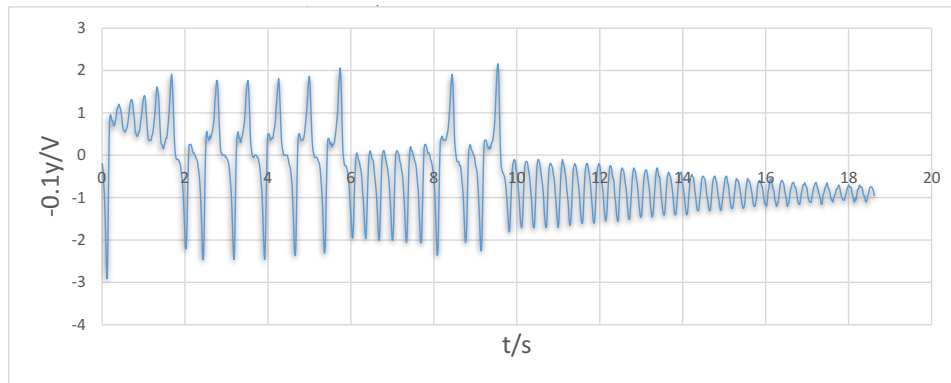
Slika 7.3: Ponašanje za  $R = 36 \text{ k}\Omega$  ( $r = 27.78$ ).

Ovdje imamo određeno odstupanje, iako je  $r$  sa slike 7.3 veći od teorijske vrijednosti  $r_h$  trajektorija upada u  $C^+$ . Realni električni krugovi posjeduju određeno odstupanje što dovodi do ovakvih rezultata.

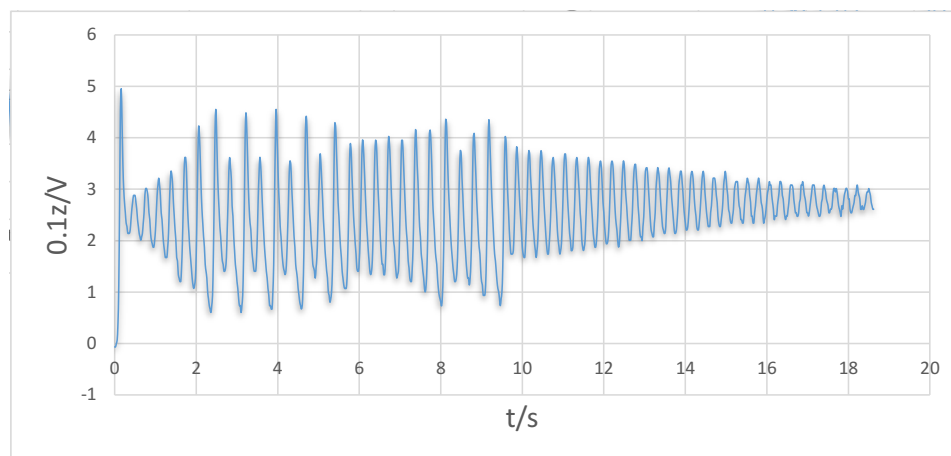
Ako pogledamo grafove  $x-t$ ,  $y-t$  i  $z-t$  za trajektoriju sa slike 7.3 vidimo da trajektorije kratkotrajno imaju odlike kaotičnog gibanja, ali se nakon nekog vremena smire u  $C^+$  ili  $C^-$ , u našem slučaju  $C^+$ . To nije pravo kaotično gibanje već samo kratkotrajno kaotično gibanje jer trajektorija našeg determinističkog sustava ima odlike hipersenzitivne ovisnosti o početnim uvjetima to ponašanje nije dugotrajno aperiodično.



Slika 7.4:  $x-t$  graf za  $R = 36 \text{ k}\Omega$  ( $r = 27.78$ ).



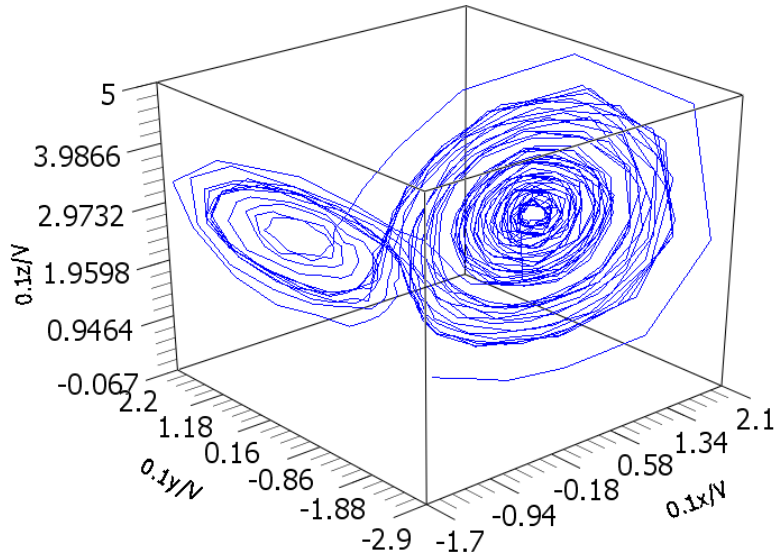
Slika 7.5:  $y - t$  graf za  $R = 36 \text{ k}\Omega$  ( $r = 27.78$ ).



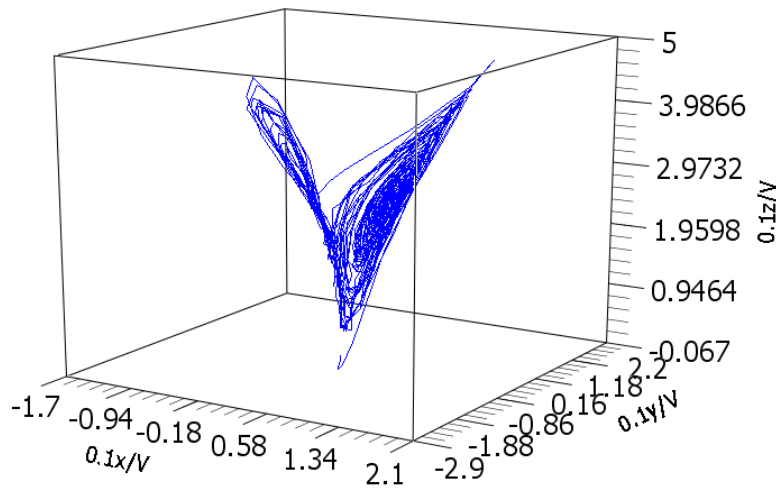
Slika 7.6:  $z - t$  graf za  $R = 36 \text{ k}\Omega$  ( $r = 27.78$ ).

Kratkotrajni kaos pokazuje kako deterministički sustavi s jednostavnim konačnim stanjem mogu biti nepredvidljivi, kao npr. bacanje kockice [1].

Također, možemo ovo gibanje prikazati i u tri dimenzije. Tako se dobiju čudesne prikazi trajektorije i nultog volumena kojeg iste zauzimaju u faznom prostoru.



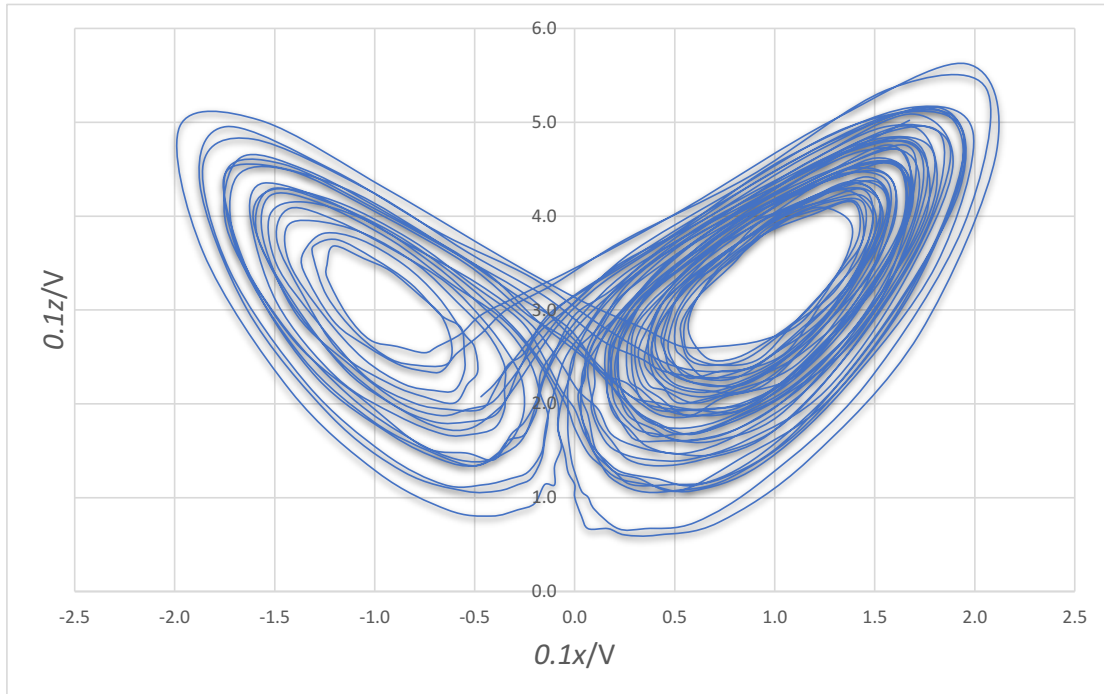
Slika 7.7: 3D graf za  $R = 36 \text{ k}\Omega$  ( $r = 27.78$ ).



Slika 7.8: 3D graf za  $R = 36 \text{ k}\Omega$  ( $r = 27.78$ ).

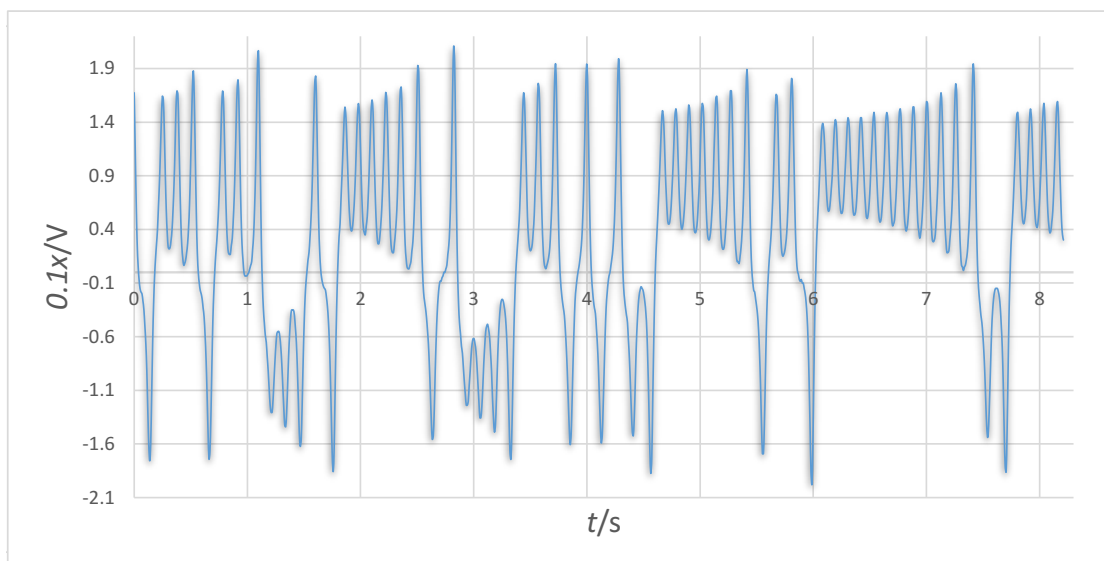
Kako  $r$  raste prema  $r_h$  vrijeme provedeno u ovom kratkotrajnom kaotičnom gibanju raste [1] i za  $r = 24.06$  to vrijeme postaje beskonačno. Primijetimo još da za  $24.06 < r < 24.74$  imamo i stabilne točke i čudne atraktore što implicira postojanje histereze između kaosa i ravnotežnog stanja, ovisno s koje strane prelazimo granice tog intervala.

Za  $r > 24.74$   $C^+$  i  $C^-$  gube stabilnost upijanjem nestabilnog graničnog kola te imamo kaotično gibanje. Na slici 7.9 prikazano je ponašanje za  $R = 31\text{ k}\Omega$  odnosno  $r = 32.26$ :

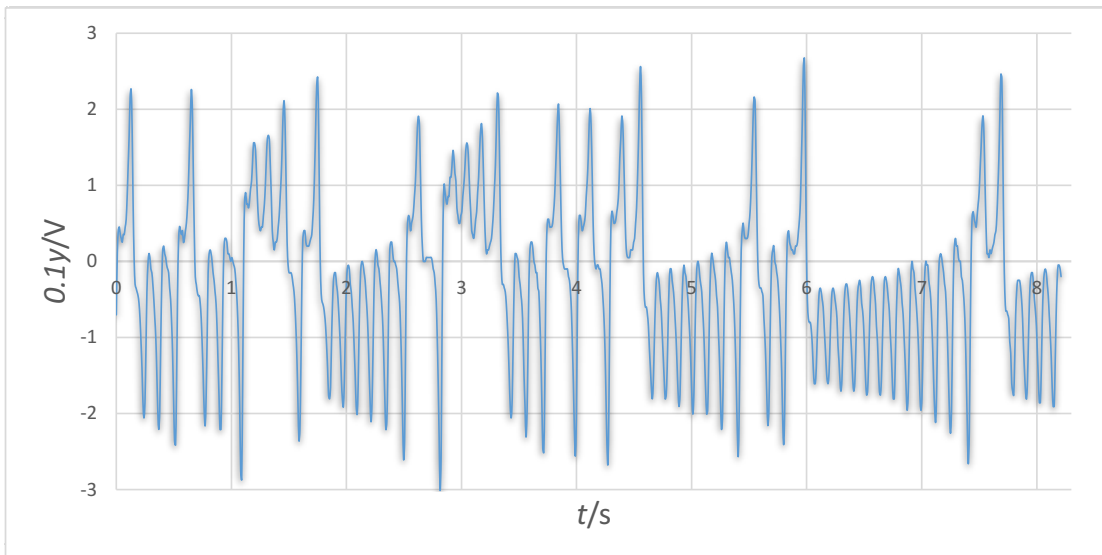


Slika 7.9: Ponašanje za  $R = 31\text{ k}\Omega$  ( $r = 32.26$ ).

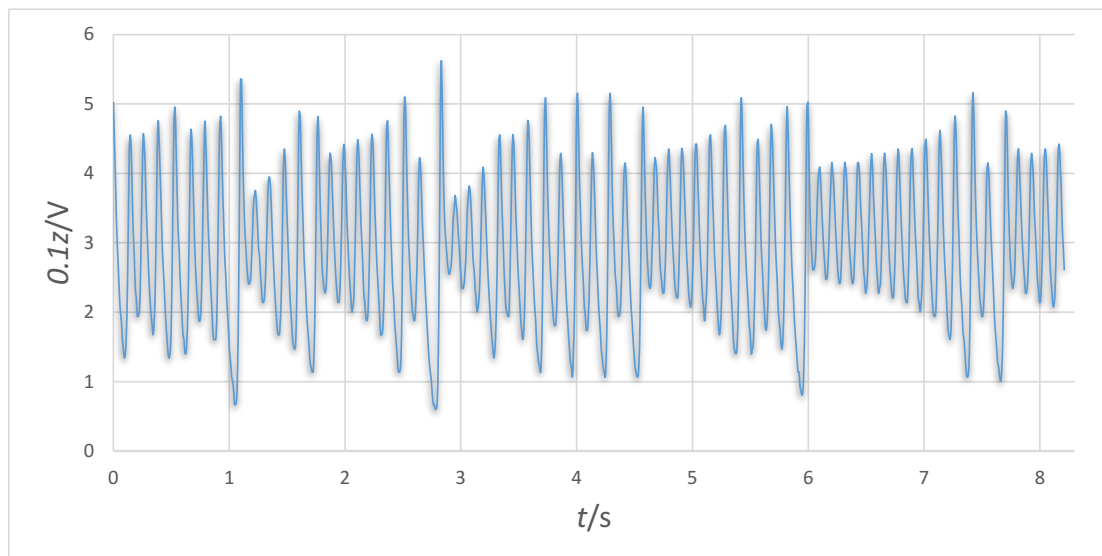
Ako pogledamo grafove  $x - t$ ,  $y - t$  i  $z - t$  za trajektoriju sa slike 7.9 vidimo da su trajektorije neperiodične te da se zauvijek gibaju kaotično. Možemo primijetiti još i da trajektorije nikada ne odlutaju predaleko od atraktora.



Slika 7.10:  $x - t$  graf za  $R = 31\text{ k}\Omega$  ( $r = 32.26$ ).



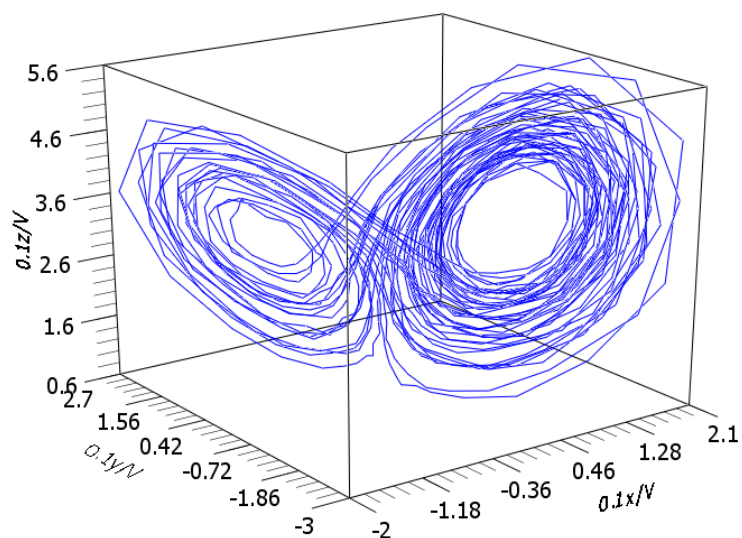
Slika 7.11:  $y - t$  graf za  $R = 31 \text{ k}\Omega$  ( $r = 32.26$ ).



Slika 7.12:  $z - t$  graf za  $R = 31 \text{ k}\Omega$  ( $r = 32.26$ ).

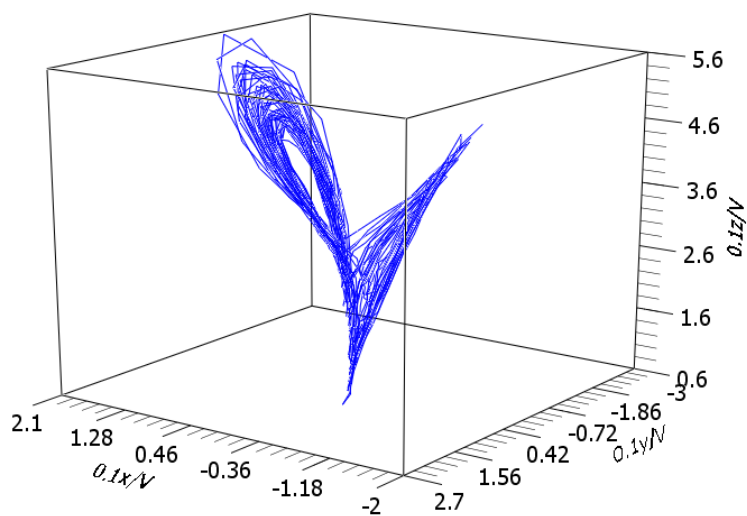
Također, možemo ovo gibanje prikazati i u tri dimenzije. Slično kao i prije vidimo lijepi prikaz takozvanih krila leptira u 3D.





Slika 7.13: 3D graf za  $R = 31 \text{ k}\Omega$  ( $r = 32.26$ ).

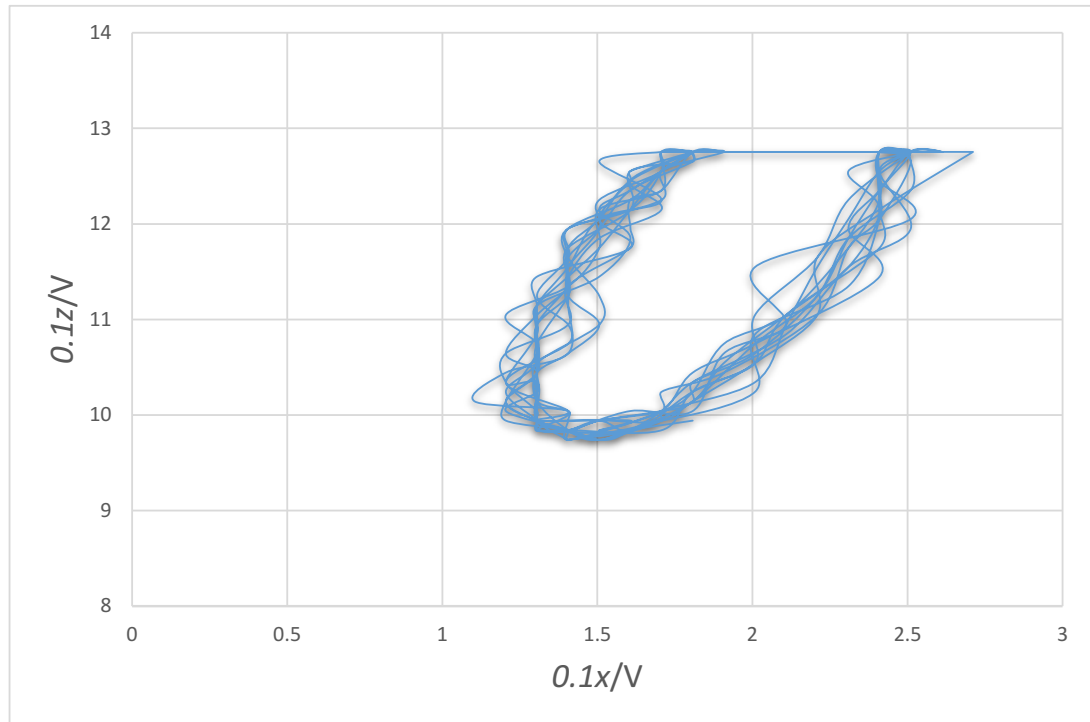
Na slikama 7.9 i 7.13 trajektorija izgleda kao da prolazi više puta istom točkom, ali sa slike 7.14 se vidi da to zapravo nije tako već su te točke razmaknute.



Slika 7.14: 3D graf za  $R = 31 \text{ k}\Omega$  ( $r = 32.26$ ).

Sa slike 7.14 se dobro vidi spajanje krila i kako zapravo ne zauzimaju volumen.

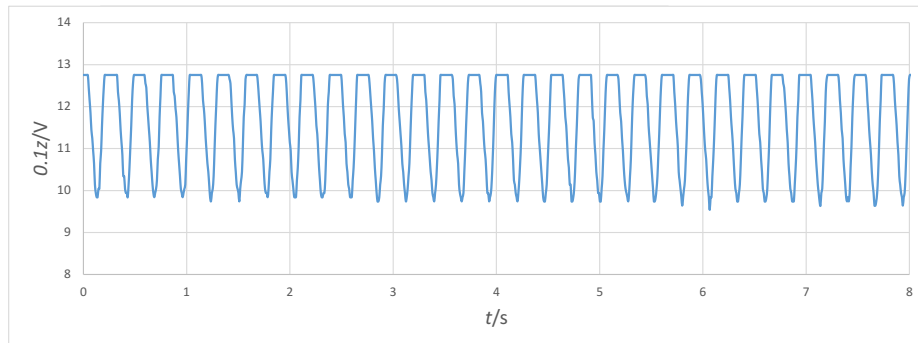
Za  $28 < r < 313$  Lorenzov sustav je većinom kaotičan, ali postoje određeni intervali periodičnosti od kojih su tri najveća  $99.524 < r < 100.795$ ;  $145 < r < 166$  i  $214.4 < r$  [1]. Na slici 7.15 prikazano je ponašanje za  $R = 9 \text{ k}\Omega$  odnosno  $r = 111.1$ :



Slika 7.15: Ponašanje za  $R = 9 \text{ k}\Omega$  ( $r = 111.1$ ).

Trajektorija sa slike 7.15 nije periodična, ali važnije je što tu vidimo ograničenje našega sklopa. Operacijska pojačala u našem sklopu ne mogu proizvesti dovoljan izlazni napon da bih dobili potpuno ispravnu sliku trajektorije. Gornji dio slike je otkinut pa ne vidimo ponašanje u tom dijelu trajektorije. Promjenom skaliranja opisanog u potpoglavlju 6.1 mogu se dobiti i slike za veće  $r$ -ove.

Još možemo prikazati  $z-t$  graf za  $R = 9\text{ k}\Omega$  odnosno  $r = 111.1$  jer je  $z$ -komponenta jedina otkinuta:



Slika 7.16:  $z-t$  graf za  $R = 9\text{ k}\Omega$  ( $r = 111.1$ ).

Možemo primijetiti na slici 7.16 da je maksimalna vrijednost signala 12.75 V.

Za  $r > 313$  ponašanje sustava postaje jednostavno jer imamo granično kolo koje se ponaša kao globalni atraktor [11]. Da bi bili u stanju dobiti sliku tih trajektorija potrebno je znatno promijeniti kondenzatore i otpornike u našem sklopu da bi dobiveno skaliranje izlaza  $x$ ,  $y$  i posebno  $z$ , koji je najveći, omogućilo prikaz tih trajektorija.

## 8 Zaključak

Dobivene slike trajektorija 7.2, 7.3 i 7.9 prikazanih u faznom prostoru prikazuju kvalitativne promjene u Lorenzovom sustavu nastale promjenom parametra  $r$ .

Na slikama 7.4, 7.5 i 7.6 se vidi privremeni kaos koji se na kraju smiri i trajektorija upadne u jednu od stabilnih stacionarnih točaka, dok se na slikama 7.10, 7.11 i 7.12 vidi kaos, odnosno dugotrajno aperiodičko gibanje.

Ograničenja sklopa jasno se vidi za visoke vrijednosti  $r$ -a, kao na slici 7.15 i 7.16, gdje vidimo otkidanje trajektorija zbog nemogućnosti operacijskih pojačala da proizvedu dovoljan izlazni napon. Ograničenje ovoga sklopa je izlazni napon  $V_O = 12.75\text{ V}$ .

Ova ograničenja moguće je zaobići povećanjem kapaciteta kondenzatora i primjerenom promjenom otpornika u sklopu. Na taj način sklop rješava Lorentzov sustav, ali je skaliranje još veće (izlazni napon je još manji).

Također, ovaj sklop se da prilagoditi i za promjenu parametara  $\sigma$  i  $b$  tako da se određeni otpornici zamjene s otporničkom dekadom ili promjenjivim otpornikom.

## 9 Metodički dio

### 9.1 Istraživački usmjerena nastava fizike

Učenje fizike zahtjeva visoki stupanj intelektualnog angažmana od strane učenika i učenik mora biti aktivan sudionik u učenju [12]. Hake definira  $g$ -faktor ili faktor prirasta kao koeficijent prirasta i mogućeg prirasta:

$$g = \frac{\% < \text{post} > - \% < \text{pre} >}{100\% - \% < \text{pre} >} \quad (9.1)$$

Njega koristi za procjenu učinkovitosti u promoviranju konceptualnih znanja predmeta fizike u srednjem i visokom obrazovanju. Primarno je uspoređivao tradicionalne oblike nastave i oblike nastave koji se zasnivaju na interaktivnim metodama primjenom testova konceptualnog znanja. Svi tradicionalni oblici nastave, bez obzira na predavački stil, su ostvarili, kako ga Hake definira, slabi prosječni prirast  $g_T = 0.23 \pm 0.04$ , dok su oblici nastave koji se zasnivaju na interaktivnim metodama ostvarili u prosjeku srednji prosječni prirast  $g_{IE} = 0.48 \pm 0.14$  [13]. Iz ovih rezultata vidimo da bi se trebalo udaljiti od tradicionalnog oblika nastave.

Također, većina edukacijskih stručnjaka u svijetu smatra da je glavni cilj nastave fizike izgraditi prirodoslovnu pismenost kod učenika [14]. Istraživački usmjerena nastava fizike se preporučuje u tu svrhu [15] te je propisana novim kurikulumom [16] u Hrvatskoj.

Istraživački usmjerena nastava fizike može se opisati kao obrazovna strategija u kojoj učenik testira svoje hipoteze kroz eksperimente i/ili opažanja [17]. Tijekom istraživački usmjerene nastave učenik dobiva značajno usmjeravanje i vođenje od strane učitelja, glavna pitanja zadaje učitelj, dok učenici smišljaju eksperimente, kontroliraju varijable, postavljaju i testiraju hipoteze, samostalno opažaju, zapisuju rezultate i izvode zaključke [14]. Pri tome učitelj koristi interaktivne nastavne metode:

1. vođenje razredne rasprave
2. korištenje kartica za odgovaranje na konceptualna pitanja s ponuđenim odgo-

vorima

3. kooperativno rješavanje zadataka u malim skupinama
4. interaktivno frontalno izvođenje demonstracijskih pokusa (učenici predviđaju, opisuju, opažaju, zaključuju) ili učeničko izvođenje pokusa u malim skupinama
5. korištenje interaktivnih nastavnih softvera uz diskusiju.

Sve interaktivne nastavne metode potiču učenički angažman i učenik je tijekom njih aktivan sudionik nastave [14].

Struktura nastavnog sata u okviru istraživački usmjerene nastave može se opisati kao [14]:

1. Uvodni dio: uvodni problem i opservacijski pokus
2. Središnji dio: istraživanje pojave i konstrukcija matematičkog modela
3. Završni dio: evaluacija i primjena modela te konceptualna pitanja

## 9.2 Nastavna priprema- Bernoullijeva jednadžba

STUDENT: Stijepo Uroš

RAZRED: 2.

NASTAVNA JEDINICA: Bernoullijeva jednadžba

PREDVIĐENI BROJ SATI: 1 školski sat

### PREDMETNI ISHODI

- FIZ SŠ C.2.2. Primjenjuje zakone dinamike fluida.

#### **Razrada ishoda:**

Izvodi Bernoullijevu jednadžbu.

Primjenjuje Bernoullijevu jednadžbu.

- FIZ SŠ C.2.9. Rješava fizičke probleme.

#### **Razrada ishoda:**

Izabire potrebne informacije i primjenjiva fizička načela.

Identificira ciljeve rješavanja problema.

Vizualizira problemsku situaciju.

- FIZ SŠ C.2.10. Istražuje fizičke pojave.

#### **Razrada ishoda:**

Istražuje pojavu uz pomoć demonstracijskog pokusa.

Objašnjava zaključke.

Istražuje pojavu s pomoću računalne simulacije.

Objašnjava pojavu u prirodi, prikazanu pokusom ili računalnom simulacijom.

### MEĐUPREDMETNI ISHODI

uku A.4/5.3. Kreativno mišljenje. Stvara nove i originalne veze među idejama, situacijama i problemima.

uku A.4/5.4. Kritičko mišljenje. Učenik samostalno kritički promišlja i vrednuje ideje.

uku B.4/5.1. Planiranje. Samostalno procjenjuje što zna, a što tek treba naučiti.

## **VRSTA NASTAVE: ISTRAŽIVAČKI USMJERENA NASTAVA**

### **NASTAVNE METODE**

1. Metoda razgovora - razredna rasprava
2. Demonstracija pokusa
3. Metoda pisanja/crtanja
4. Metoda usmenog izlaganja

### **Oblici rada**

1. Frontalni
2. Individualni
3. U paru

### **NASTAVNA POMAGALA I SREDSTVA**

Dva A4 papira, ploča, kreda, bilježnica, računalo, dijaprojektor, Pitotova cijev sa spojenim manometrom sa živom, kartice sa slovima.

### **LITERATURA**

- Horvat, D., Hrupec, D., Fizika 3, Element
- Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2019).  
*Kurikulum nastavnog predmeta Fizika za osnovne škole i gimnazije.*
- Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2019).  
*Kurikulum međupredmetne teme Učiti kako učiti za osnovne i srednje škole.*
- Paar, V., Hrlec, A., Sambolek, M., Vadjla Reštar, K., Fizika oko nas 2, Školska knjiga
- <https://phet.colorado.edu/sims/cheerpj/fluid-pressure-and-flow/latest/fluid-pressure-and-flow.html?simulation=fluid-pressure-and-flow>



## TIJEK NASTAVNOG SATA

### UVODNI DIO

UVODNI PROBLEM: **Što će se dogoditi s dva vertikalna papira kada puhnemo između njih?**

OPSERVACIJSKI POKUS:

Pribor: dva A4 papira.

Frontalno izvedemo pokus i pitamo učenike za opažanje.

**Učenici bi trebali opaziti da su se dva papira približila.**

- *Što mislite zašto se ovo dogodilo? Zašto općenito tijela mijenjaju stanje gibanja?*

Očekujemo da će nam učenici reći da je zrak djelovao na papir silom i natjerao ga da se pomakne.

- *Što je zrak?*

Očekujemo da će nam učenici reći da je zrak fluid.

- *Koje sile koje djeluju na tijelo uronjeno u fluid poznajete i koji su uzroci tih sila?*

Očekujemo da će nam učenici spomenuti silu uzgona i da je njezin uzrok razlika tlakova na gornjoj i donjoj površini tijela.

Raspravimo s njima da se zbog razlike tlakova javila sila u vertikalnom smjeru i da je mi zovemo uzgon i što misle je li ova pojava koju su opazili možda isto nastala zbog razlike tlakova, ali sada razlike tlakova na vertikalnim stranama.

- *S koje strane papira tlak mora biti veći da bi se papiri približili i zašto?*

Očekujemo da će nam učenici reći da tlak treba biti veći s vanjske strane papira da bi se oni približili jer tada nastaje sila koja ih približava.

Tražimo od njih da skiciraju tu situaciju u svojim bilježnicama.

- *Zašto se ovo nije dogodilo prije kada smo promatrali uzgon?*

- *Po čemu se ove dvije situacije razlikuju?*

Očekujemo da će nam reći da se sada zrak giba s unutarnje strane papira pa se možda zbog toga nešto mijenja.

- *Što je uzrok tlaka unutar fluida?*

Očekujemo da će nam učenici reći da je uzrok sudar sa stijenkom zbog nasumičnog gibanja čestica fluida.

Objasnimo učenicima da se taj tlak zove statički tlak jer je prisutan i kada se fluid ne giba.

- *Kako se neka čestica zraka još giba kad puhenmo između papira?*
- *Hoće li to gibanje uzrokovati još nekim tlakom?*

Očekujemo da će nam učenici reći da se čestica zraka giba usmjereno prema dole, u smjeru u kojemu smo puhnuli i da bi to gibanje trebalo uzrokovati još nekim tlakom jer će se sudariti jače zbog tog dodatnog gibanja.

Objasnimo učenicima da se taj tlak zove dinamički tlak jer je uzrokovan usmjerenim gibanjem fluida.

- *Koji se tlak smanji kada puhnemo između papira?*

Očekujemo da će nam učenici reći da se smanji statički tlak jer on djeluje na papire.

- *Što mislite o čemu bi mogla ovisiti promjena statičkog tlaka unutar fluida kada se fluid giba?*

Očekujemo da će nam reći da ovisi o brzini fluida. S njima raspravimo da se okolni zrak također može gibati te da bi trebalo gledati razlike brzina okolnog zraka i zraka između papira.

- *Što mislite je li svejedno o kojem se fluidu radi?*

Očekujemo da će nam učenici reći da nije svejedno te ih navedemo da fluid najbolje definira njegova gustoća te da ćemo provjeravati ovisnost o gustoći fluida.

## SREDIŠNJI DIO

Prikažemo simulaciju protjecanja vode kroz cijev (link na simulaciju se nalazi u literaturi) te učenicima objasnimo sve opcije simulacije.

**ISTRAŽIVAČKO PITANJE 1: Kako razlika statičkih tlakova u fluidu ovisi o razlici brzina u fluidu?**

- *Kako ćemo to ispitati?*
- *Što trebamo držati konstantnim?*

Očekujemo da će nam učenici reći da postavimo dva instrumenta za mjerenje brzine i dva instrumenta za mjerenje statičkog tlaka (barometra) na dvije točke iste dubine u cijevi te da trebamo mjeriti tlakove i brzine protjecanja. Mijenjamo brzinu protjecanja u jednoj od točaka i trebamo držati gustoću konstantnom. Moguće da će učenici preskočiti dio s istom dubinom u cijevi pa treba naglasiti da je to potrebno zbog hidrostatskog tlaka koji se mijenja s dubinom.

- *Kako ćemo mijenjati brzinu protjecanja?*

Očekujemo da će se učenici prisjetiti jednadžbe kontinuiteta te da će reći da ako suzimo cijev da će povećati brzina protjecanja.

Tražimo od njih da skiciraju tablicu u koju će zapisivati rezultate. Mi istu skiciramo na ploči.

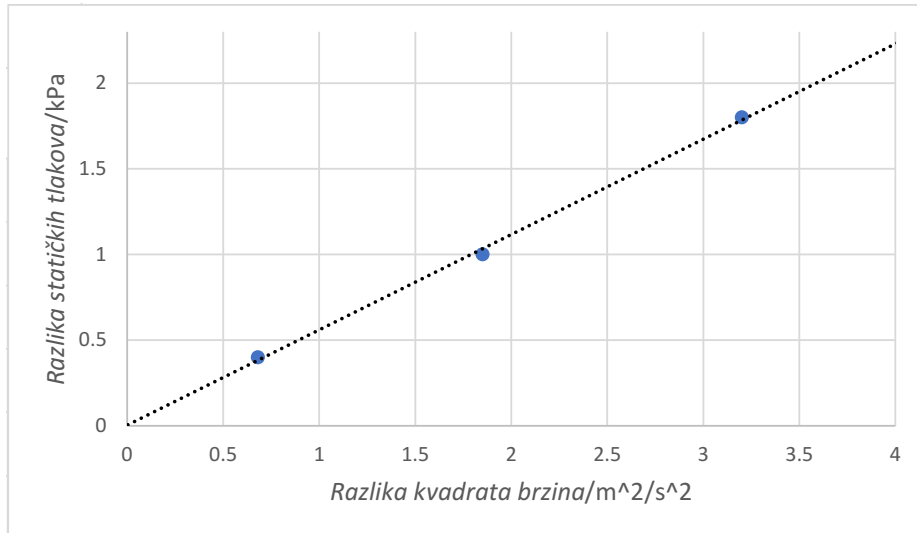
**ISTRAŽIVAČKI POKUS 1:**

Pribor: računalo i dijaprojektor.

Izmjerimo tri vrijednosti tlaka u dvije točke unutar cijevi za tri različite brzine protjecanja u jednoj od točaka. Rezultate zapišemo u tablicu i od učenika tražimo da izračunaju razlike statičkih tlakova i razlike kvadrata brzina (zbog uštede vremena).

$p_1/ \text{kPa}$	$p_2/ \text{kPa}$	$v_1/ \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$v_2/ \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$p_1 - p_2/ \text{kPa}$	$v_2^2 - v_1^2/ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$
110,2	109,8	1,6	1,8	0,4	0,68
110,2	109,2	1,6	2,1	1	1,85
110,2	108,4	1,6	2,4	1,8	3,2

Nacrtamo graf ovisnosti razlike tlakova o razlici kvadrata brzine.



**Zaključak:** Razlika statičkih tlakova je proporcionalna razlici kvadrata brzina:

$$p_1 - p_2 \sim v_2^2 - v_1^2$$

**ISTRAŽIVAČKO PITANJE 2: Kako razlika statičkih tlakova u fluidu ovisi o gustoći fluida?**

- *Kako ćemo to ispitati?*
- *Što trebamo držati konstantnim?*

Očekujemo da će nam učenici reći da postavimo dva instrumenta za mjerenje brzine i dva instrumenta za mjerenje statičkog tlaka (barometra) na dvije točke iste dubine u cijevi te da trebamo mijenjati gustoću i mjeriti tlakove te da trebamo brzinu protjecanja držati konstantnom.

Tražimo od njih da skiciraju tablicu u koju će zapisivati rezultate. Mi istu skiciramo na ploči.

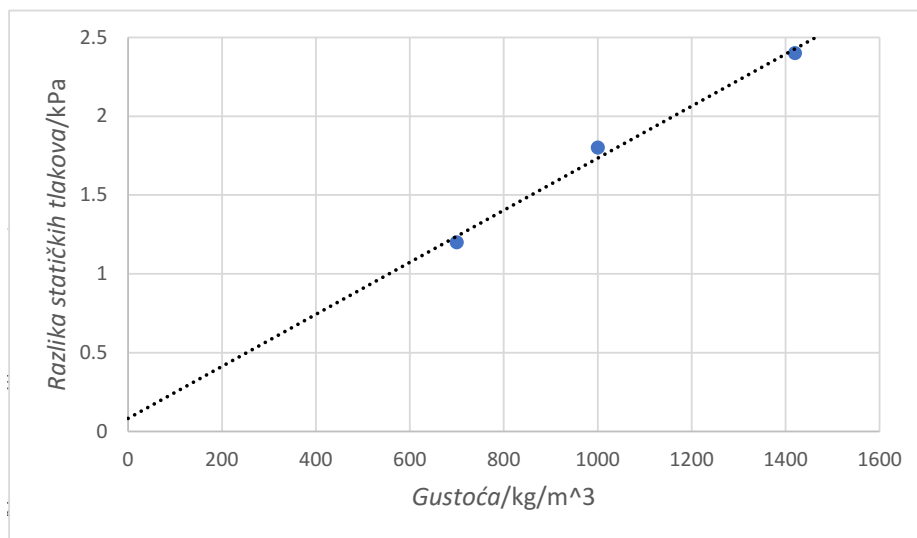
## ISTRAŽIVAČKI POKUS 2:

Pribor: računalo i dijaprojektor.

Izmjerimo tri vrijednosti tlaka u dvije točke unutar cijevi za tri različite gustoće. Rezultate zapišemo u tablicu i od učenika tražimo da izračunaju razliku statičkih tlakova.

$p_1/$ kPa	$p_2/$ kPa	$\rho/$ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$p_1 - p_2/$ kPa
107,5	106,3	700	1,2
110,2	108,4	1000	1,8
113,8	111,4	1420	2,4

Nacrtamo graf ovisnosti razlike statičkih tlakova o gustoći fluida.



**Zaključak:** Razlika statičkih tlakova je proporcionalna s gustoćom fluida:

$$p_1 - p_2 \sim \rho$$

Tražimo od učenika da sumiraju ova dva zaključka u:

$$p_1 - p_2 \sim \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

- Što nam nedostaje da bi imali jednakost?

Očekujemo da će nam učenici reći da nedostaje konstanta proporcionalnosti.

Objasnimo učenicima da se ta konstanta može izračunati iz zakona očuvanja energije i da je konačni izraz:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

ili :

$$\boxed{p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}}$$

- Što primjećujete o lijevoj i desnoj strani jednadžbe i čemu su one jednake?

Očekujemo da će nam reći da su konstantne i da su jednake ukupnom tlaku odnosno:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = \text{konst.}$$

$$p_{uk} = p + \frac{\rho v^2}{2}$$

- Što je u ovom izrazu dinamički, a što statički tlak?

Očekujemo da će nam učenici reći da je prvi član statički tlak, a da je drugi član dinamički tlak.

- Može li mi netko reći što nama ova jednadžba govori?

Očekujemo da će učenici imati problema s interpretacijom rezultata pa ih uz pomoć potpitanja navedemo na to da nam ovaj izraz govori da je ukupni tlak na poprečni presjek cijevi kojom teče fluid konstantan te da što je brzina fluida veća, statički tlak je manji.

- Ovaj izraz zove se Bernoullijeva jednadžba.

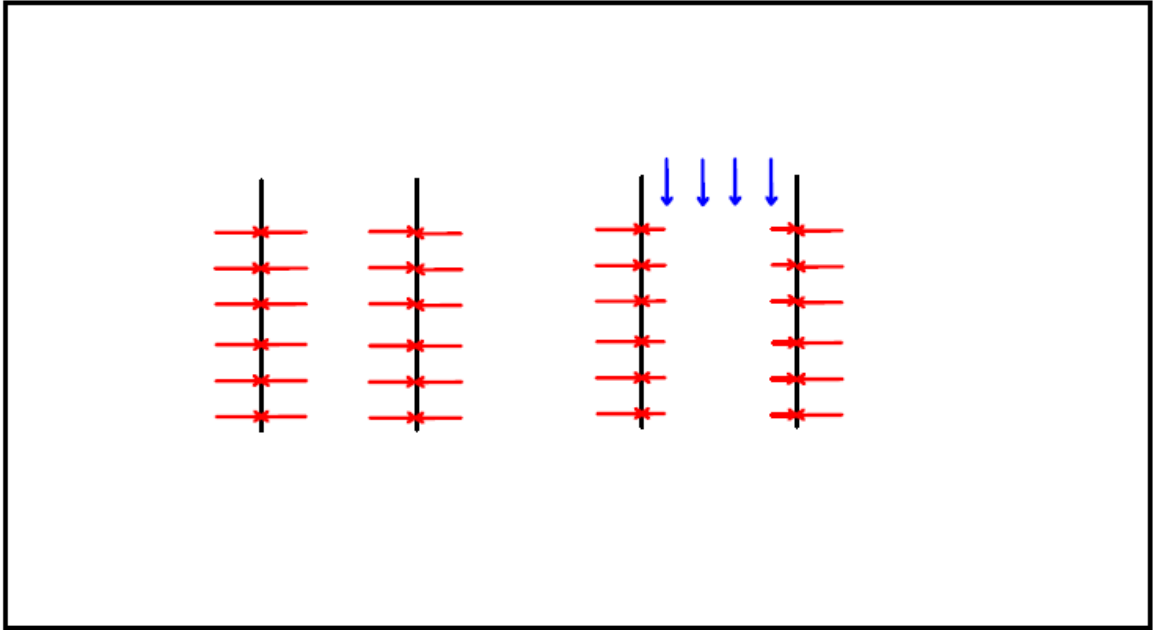
## ZAVRŠNI DIO

Evaluiramo izvedeni izraz preko uvodnog problema.

- *Idemo provjeriti njezinu valjanost na onome što smo opazili na početku sata.*
- *Što bi se trebalo dogoditi s papirima po Bernoullijevoj jednadžbi kada puhnemo između njih?*

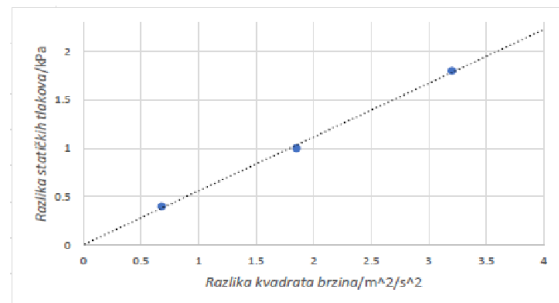
Očekujemo da će nam učenici reći da bi se trebali spojiti jer se između njih zrak brže giba pa je tlak manji te da se ona slaže s našim opažanjima.

## PLAN PLOČE



IP1: Kako razlika statičkih tlakova u fluidu ovisi o razlici brzina u fluidu?

$p_1/$ kPa	$p_2/$ kPa	$v_1/$ $\frac{m}{s}$	$v_2/$ $\frac{m}{s}$	$p_1 - p_2/$ kPa	$v_2^2 - v_1^2/$ $\frac{m^2}{s^2}$
110,2	109,8	1,6	1,8	0,4	0,68
110,2	109,2	1,6	2,1	1	1,85
110,2	108,4	1,6	2,4	1,8	3,2

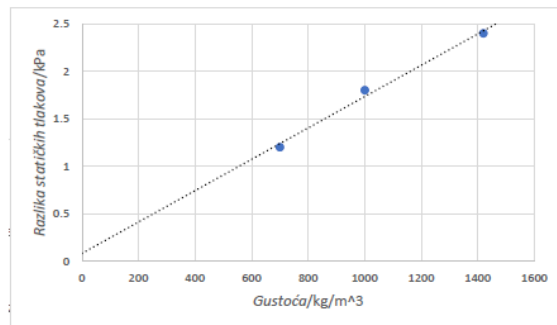


Zaključak: Razlika statičkih tlakova je proporcionalna razlici kvadrata brzina!  $p_1 - p_2 \sim v_2^2 - v_1^2$



IP2: Kako razlika statičkih tlakova u fluidu ovisi o gustoći fluida?

$p_1/$ kPa	$p_2/$ kPa	$\rho/$ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$p_1 - p_2/$ kPa
107,5	106,3	700	1,2
110,2	108,4	1000	1,8
113,8	111,4	1420	2,4



Zaključak: Razlika statičkih tlakova je proporcionalna gustoći fluida!

$$p_1 - p_2 \sim \rho$$

$$p_1 - p_2 \sim \rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$p_1 - p_2 = A\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \text{konst.} \quad \text{Bernoullijeva jednadžba}$$

statički tlak

dinamički tlak

## Bibliography

- [1] Strogatz, Steven H. Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Boulder, CO :Westview Press, a member of the Perseus Books Group, 2015.
- [2] Griffiths, D. J. Introduction to electrodynamics. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 1999.
- [3] Marsden, J. E., and McCracken, M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York : Springer, 1976.
- [4] Radić, D. , DJiDS\_skripta.pdf, [http://www.phy.pmf.unizg.hr/~dradic/DJiDS\\_skripta.pdf](http://www.phy.pmf.unizg.hr/~dradic/DJiDS_skripta.pdf),1.8.2021.
- [5] Ruelle, D.;Takens, F. On the nature of turbulence. Communications in Mathematical Physics, Vol. 20, 3(1971), 167–192. doi:10.1007/bf01646553
- [6] Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=20346>, 5.8.2021.
- [7] Shema sklopa [http://seti.harvard.edu/unusual\\_stuff/misc/lorenz.htm](http://seti.harvard.edu/unusual_stuff/misc/lorenz.htm)
- [8] Horowitz, P., Hill, W. The art of electronics (3rd ed.). Cambridge, TAS, Australia: Cambridge University Press, 2015.
- [9] LF412 datasheet [https://www.ti.com/lit/ds/symlink/lf412-n.pdf?ts=1629644815834&ref\\_url=https%253A%252F%252Fwww.google.com%252F](https://www.ti.com/lit/ds/symlink/lf412-n.pdf?ts=1629644815834&ref_url=https%253A%252F%252Fwww.google.com%252F),7.8.2021.
- [10] MPY634 datasheet <https://www.ti.com/lit/ds/symlink/mpy634.pdf>,7.8.2021.
- [11] Sparrow, C. The Lorenz equations: Bifurcations, chaos, and strange attractors. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [12] Planinić, M. , Poglavlja\_1\_i\_2\_rv20.pdf, <http://metodika.phy.hr/claroline/claroline/document/document.php?cidReset=true&cidReq=MET1N>,9.8.2021.

- [13] Hake, Richard R. Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses.//American Journal of Physics, Vol. 66,1(1998), 64–74. doi:10.1119/1.18809
- [14] Planinić, M. , Poglavlja\_3.i.4.rv20.pdf, <http://metodika.phy.hr/claroline/claroline/document/document.php?cidReset=true&cidReq=MET1N>,9.8.2021.
- [15] Rocard, M. (2007). Science Education NOW: A renewed Pedagogy for the Future of Europe, Brussels: European Commission.<https://www.eesc.europa.eu/sites/default/files/resources/docs/rapportrocardfinal.pdf>, 9.08.2021
- [16] MZOS (2019): Kurikulum nastavnog predmeta Fizika za osnovne škole i gimnazije. <https://pisa.ncvvo.hr>,9.8.2021.
- [17] Pedaste, Margus; Mäeots, Mario; Leijen, Äli; Sarapuu, Tago. Improving students' inquiry skills through reflection and self-regulation scaffolds.// Technology, Instruction, Cognition and Learning. Vol. 9 (2012). 81-95.