SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mara Vlašić

RAZUMIJEVANJE POTEŠKOĆA U PRIMJENI NEKIH MATEMATIČKIH KONCEPATA NA STUDIJU FIZIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mirko Planinić

Zagreb, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Mirku Planiniću na razumijevanju, vodstvu, trudu i vremenu uloženom u izradu ovog diplomskog rada te svom znanju koje mi je prenio u ovih pet godina učenja.

Zahvaljujem se svim kolegama koji su pristupili upitniku i pomogli mi da diplomiram kao i onima koji su uvijek bili tu tijekom studiranja.

Zahvaljujem se mojoj obitelji koja je uvijek bila uz mene svojim savjetima i neizmjernoj podršci.

Sadržaj

Uvod

Matematika, kemija, fizika i biologija dugi niz godina bili su jedna znanost pod nazivom filozofija prirode. Kasnije, kako je znanje raslo i specijalizacija pojedinih disciplina postala neophodna za daljnji napredak znanosti, došli smo do osamostaljivanja, odnosno specijalizacije svake pojedine discipline. Na današnja, mnoga složenija pitanja na koje još uvijek ne znamo odgovore, ključni dio istraživanja je upravo rad na više područja.

Matematika i fizika su dva usko povezana područja znanosti. Budući da je poznavanje matematike postalo jedno od važnih vještina za rješavanje problema u različitim društvenim i prirodnim znanostima, danas se govori o matematici kao jeziku fizike, ali i drugih prirodnih i društvenih znanosti. Drugim riječima, za fizičare (i ostale znanstvenike) matematika je alat koji se koristi za odgovaranje na pitanja. Jezikom matematike opisujemo temeljne odnose između fizikalnih veličina.

Matematičko modeliranje nekog problema u fizici moglo bi se svesti na sljedeće korake:

1) polazište je situacija ili problem u stvarnom svijetu,

2) pojednostavljenje ili idealiziranje situacije i problema na način da uvodimo neke pretpostavke

3) preciziramo i konkretiziramo problem

4) nastajanje realnog modela problema.

Korištenjem matematike kroz proces matematizacije (uvođenjem varijabli i određivanjem njihovih veza ...) stvaramo matematički model problema. Tada dolazimo do procesa rješavanja problema koristeći se odgovarajućim metodama i postupcima unutar matematike kako bi dobili matematički rezultat problema. Takav dobiveni matematički rezultat vraćamo u stvarni problem.

Nakon toga ispitujemo njegovu smislenost i interpretiramo ga u odnosu na polaznu situaciju ili problem. Veliki dio učenika i studenata nije u stanju primijeniti matematičke vještine u rješavanju fizičkih problema, te ćemo stoga u ovom diplomskom radu istražiti poteškoće u primjeni i fizikalnom razumijevanju matematičkih koncepta kao što su: simbolički integrali te gradijent kod uvodnih kolegija fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Glavna svrha ovog istraživanja je otkriti studentske poteškoće, te učiniti korak prema rješavanju praznine između studentskog razmišljanja o matematičkim konceptima i njihovog konteksta u fizici. U ovom istraživanju ispitali smo studente trećih godina preddiplomskih studija fizike na Fizičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu i analizirali smo dobivene rezultate. Na kraju ćemo dati preporuke za otklanjanje otkrivenih poteškoća.

Poglavlje 1

Motivacija

1.1 Matematika i fizika

Povijesni pregled

Još od antičkih vremena brojni filozofi, matematičari i fizičari bavili su se proučavanjem odnosa matematike i fizike, a odnedavno i povjesničari kao i prosvjetni djelatnici. Svi se slažu da su matematika i fizika dva usko povezana područja te se često navodi da je matematika za fizičare alat koji koriste u odgovaranju na brojna pitanja, dok je fizika matematičarima izvor inspiracije i nadahnuća za otkrivanje nekih novih neistraženih polja i alata.

Najznačajniji predstavnik toga razdoblja bio je Aristotel koji je napisao temelj razvoju znanosti kojega danas poznajemo u knjizi pod nazivom: "Fizika". Tekst je napisan na starogrčkom i prepisan iz preživjelih rukopisa. Jednu od tema koju je Aristotel obrađivao u svom djelu "Fizika" bilo je i pitanje kako se istraživanje koje provode matematičari razlikuje od istraživanja koje provode fizičari. Osim u Aristotelovoj "Fizici", razmišljanja kako je matematika jezik prirode susrećemo i u djelima pitagorejaca: Brojevi vladaju svijetom i Sve je broj. Čak i dva tisućljeća kasnije, Galileo Galilei u jednoj svojoj je knjizi napisao: „Knjiga prirode napisana je matematičkim jezikom.“

Tijekom mnogih otkrića kroz povijest matematika i fizika se isprepliću, tako je Arhimed prije nego je došao do matematičkog dokaza za volumen kugle, pomoću uravnoteženja tijela na skali, otkrio rješenje. Upravo stvaranje i razvoj računa bili su uvelike povezani s tadašnjim potrebama fizike. Matematika se razvijala onako kako je fizici bila potrebna u određenom trenutku. Konstantno je postojala potreba za unapređenjem matematike.

Kako je vrijeme prolazilo, matematika koja se koristila u fizici postala je sofisticiranija.

Razlika

Iako su dobro povezani i isprepleću se, svaka od tih dviju znanosti oslanja se na različite metode istraživanja. Fizika pitanja rješava kombinirajući mnoge teorije, eksperimente, opažanja i modele kako bi podržala ili opovrgnula nove ideje o prirodi, ili pak izmijenila postojeće.

Suprotno od toga, matematika se bavi apstraktnim temama i matematičari tražeći pravilnosti i obrasce razvijaju nove ideje, a potom i teorije oslanjajući se na logiku i matematičko zaključivanje. Dakle, umjesto eksperimenata i opažanja kojima fizičari podržavaju svoje ideje, matematičari koriste dokaze.

Bez obzira na to što se fizika uvelike oslanja na matematiku, fizičari se ne bave razumijevanjem apstraktnih matematičkih ideja na isti način na koji to rade matematičari.

Gdje se susreću u školstvu?

Kroz cijelo osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje učenika u različitim trenucima primjenjuju se različite nastavne metode poučavanja. U fizici se pokazalo da učenici loše ili gotovo nikako ne povezuju koncepte i matematički alat kojim se pritom koriste.

Kroz kurikulum RH za nastavni predmet Fizike [1], na mnogim mjestima možemo uočiti spominjanje matematičkih koncepata:

- Prepoznaje matematički model …
- Matematički i grafički prikazuje …
- Matematički opisuje i tumači …
- … na temelju matematičkog modela.
- Tumači matematički opis …
- Crtežom i matematičkim izrazom opisuje …
- Matematički modelira …

Fizika se kao znanost često koristi matematičkim znanjima za opis fizičkih zakona, funkcionalne ovisnosti fizičkih veličina, crtanja grafičkih prikaza, vektorskog prikaza fizičkih veličina, rješavanja jednadžbi te primjenu logaritamskih, eksponencijalnih i trigonometrijskih funkcija. Stoga je nužno stvoriti poveznice s matematičkim područjem kurikuluma kako bi matematički sadržaji bili povezani s fizičkim na razini ciklusa poučavanja, učenja i korištenja procesnim vještinama radi razvijanja kreativnosti i inovativnosti u rješavanju fizičkih zadataka i mogućnosti matematičkog zapisa fizičkog zakona na temelju provedenog eksperimentalnog istraživanja. (Kurikulum nastavnog predmeta fizika za osnovne škole i gimnazije, 2019.)

Od prvih nastavnih sati na kojima se učenici susreću s fizikom proteže se i poznavanje nekih matematičkih metoda. Učenje fizike od učenika zahtjeva uočavanje i opisivanje zakonitosti u raznim svakodnevnim situacijama koje će prevesti u matematički model. Takav proces zahtjeva iskustvo i vježbu. Učenici se već na samom početku učenja fizike na neformalan način susreću s nekim matematičkim zakonitostima. Na različite načine učenici predočavaju prikaze svakodnevnih situacija (grafovi, tablice s podatcima, izrazi, formule, jednadžbe . . .). Tako npr. učenici koriste vektore kod određivanja rezultantne sile, kvadratnu jednadžbu kod obrade vertikalnog hitca, trigonometrije kod sila na kosini i geometrijske optike, trigonometrijske funkcije kod opisivanja titranja i valova.

Povezivanjem matematike i fizike od prvih nastavnih jedinica fizike otklanja se dio problema. No, dio problema ipak ostaje te fizika ostaje samo na razini shvaćanja koncepata bez da se dodatno produbi: „Što će to nama?“ i „Što nam to točno govori?“ Dakle, osim same primjene matematike u fizici, dužni smo s učenicima i raspraviti kako bi učenici ubuduće mogli primijeniti svoje znanje iz matematike u jednostavnim, ali i složenijim fizikalnim problemima.

1.2 Fakultetsko obrazovanje

Visoko obrazovanje je sljedeći stupanj obrazovanja nakon srednje škole u kojem učenici/studenti stječu visoko obrazovanje iz znanstvene, stručne i umjetničke djelatnosti te mnogih drugih djelatnosti koji su u skladu sa zakonom i statutom kako je navedeno na službenim stranicama Ministarstva znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske.

S ciljem visokog obrazovanja budućih naraštaja navedena visoka učilišta provode sveučilišne i stručne studije.

Fakultetsko obrazovanje pripomaže u stjecanju mnogo znanja iz različitog niza predmeta, kao i naprednih znanja iz određenih predmeta. Također, fakultetsko obrazovanje povećava sposobnost apstraktnog i kritičnog mišljenja, jasnog izražavanja misli prilikom donošenja odluke. Te stečene vještine korisne su i na poslu i u svakodnevnom životu.

Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu nudi visokoškolsko obrazovanje upravo u području matematike i fizike. Uz matematiku i fiziku, Fakultet nudi sveučilišne studije i znanstveno-istraživačke programe iz područja biologije, geofizike, geografije, geologije i kemije. Skoro sve su one dio tzv. STEM područja (engl. *Science, Tehnology, Engineering and Mathematics*) iznimno važnog za tehnološki razvoj i napredak. Na PMF-u se upravo njeguju prirodoslovlje i matematika kako bi pridonijeli znanosti i obrazovanju, kako u Republici Hrvatskoj tako i u svijetu.

1.3 Motivacija

Upravo povezanost matematike i fizike i njihovo međusobno shvaćanje i razumijevanje kao i prenošenje kvalitetnog znanja služi kao motivacija u pisanju ovog diplomskog rada. Nastavnici s učenicima tijekom cijelog osnovnoškolskog, srednjoškolskog obrazovanja najčešće primjenjuju matematičke metode u nastavi fizike, ali o njima rijetko raspravljaju s učenicima. Upravo zbog toga ovim diplomskim radom htjeli smo provjeriti razumijevanje matematičkih koncepata kod studenata fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Željeli smo provjeriti jesu li studenti upisavši studij Fizike produbili svoje znanje u povezivanju i razumijevanju uloge matematike unutar fizike. Kao dio ovog diplomskog rada, želimo da naši studenti postanu vještiji matematičari i da uklonimo pojedine poteškoće prilikom korištenja matematike u fizici.

1.4 Metode istraživanja u edukacijskoj fizici

Istraživanja u području edukacije fizike potaknuta su potrebom za učinkovitijom nastavom fizike na svim razinama obrazovanja [2]. Glavni cilj edukacijskog istraživanja u fizici je što bolje shvatiti učeničke/studentske poteškoće prilikom učenja fizike. Prilikom izvođenja bilo kakvog istraživanja motrebno je odabrati ispravne metode kojima ćemo to istraživanje provesti. Razlikujemo tri vrste metoda u edukacijskom istraživanju fizike: kvantitativna, kvalitativna i istraživanje kombiniranom metodologijom.
U svakom istraživanju postoje tri osnovne faze [7]:

1. konceptualizacija (izbor i definiranje teme istraživanja kao i razlog, odabir literature, utvrđivanje ciljeva i formuliranje hipoteza koje ćemo proučavati),
2. operacionalizacija (izrada nacrta istraživanja, odabir metoda i tehnika, odabir uzorka, izrada plana i odabir programa za obradu podataka) i
3. realizacija (prikupljanje, obrada i analiza podataka, donošenje zaključaka i izrada izvještaja).

Kvalitativne metode istraživanja

Ovu vrstu istraživanja karakteriziraju opisni podaci i mala količina uzorka skupljena u prirodnom okruženju. Pet je osnovnih kvalitativnih metoda [6]:

1. *Intervju*

Intervju je metoda u kojoj dvije ili više osoba sudjeluje u verbalnoj i neverbalnoj interakciji s ciljem prikupljanja podataka. [2] Intervju se odvija na način da istraživač sugovornicima postavlja pitanja i bilježi odgovore koje će kasnije koristiti u istraživanju ili pisanju rada i novinskog članka. Istraživač ima unaprijed strukturiran i formuliran redosljed pitanja kako bi ispitivanje bilo što kvalitetnije, ali i kako bi zadražo kontrolu nad razgovorom.

2. *Anketa*

Anketa je metoda postavljanja pitanja, a ima ulogu kao i intervju. [2] Ankete su strukturirane u obliku intervjua, ali u pisanom obliku. Istraživač je unaprijed odredio niz pitanja koja su dana ispitaniku na popunjanje. Ona je dobra kako bi se ispitao veliki broj populacije u što kraćem vremenu.

3. *Artefakt*

Ova metoda može uključivati, npr. nastavne pripreme, planove, programe, crteže ideja, komentare, ... [2] Artefakt je naziv za predmete koje je izradio čovjek.

4. *Elektronski izvori podataka*

Pod elektronske izvore podataka ubrajamo baze podataka s cjelovitim tekstom članka, biografske baze, elektroničke knjige, citatne baze, enciklopedije, leksikoni, rječnici, ... [2] Elektronski izvori podataka su daju nam efikasniji i brži uvid u veliki broj podataka i informacija iz različitih područja.

5. *Promatranje*

Ova metoda pruža priliku istraživačima sakupljati informacije o slijedu aktivnosti. Prije promatranja potrebno je sastaviti plan istraživanja kako bi opažač mogao usmjeriti svoju pažnju na bitne aspekte koji se relevantni za istraživanje.

Kvantitativne metode istraživanja

Kvantitaivne metode se korsite kada istraživač želi pomoću statistike bolje opisati i objasniti zaključke. Razlikujemo dvije vrste kvantitativnih metoda istraživanja [3]:

1. *Deskriptivna statistika*

Ova metoda je pogodna za anketno istraživanje, koje ima za cilj identificirati i dokumentirati neke univerzalne obrasce velikog broja ispitanika, tj. u velikim uzorcima populacije. [2]

2. *Inferencijalna statistika*

U ovoj metodi se izvode zaključci o populaciji na temelju izabranog uzorka oslanjajući se na teoriju vjerojatnosti. [2]

Poglavlje 2

Ciljevi i metode istraživanja

2.1 Studentska literatura

Prije sastavljanja konceptualnog testa kojim želimo provjeriti studentsko razumijevanje, proučeno je gradivo pojedinih kolegija nastavničkih i istraživačkih smjerova. Studenti polaznici Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu na Fizičkom odsjeku u prve dvije akademske godine susreću se s matematičkim predmetima u kojima uče različite matematičke koncepte te njihovu primjenu unutar različitih fizikalnih problema. U sljedećim odlomcima obradit ćemo najosnovnije pojmove vezane za integral i gradijent koji su potrebni za rješavanje konceptualnog testa koji smo pripremili za studente kako bi provjerili njihovo razumijevanje. Kod obrade integrala korištena je skripta iz Matematičke analize 1 i 2 [9] koja se koristi na uvodn im matematičkim kolegijima na studiju fizike, dok nam je za obradu gradijenta poslužila knjiga Introduction to Electrodinamic [10].

Izrada i smisao koncepta integrala i deriviranja u pojedinim fizikalnim problemima je mnogo važnija od same sposobnosti da se stvarno izračuna.

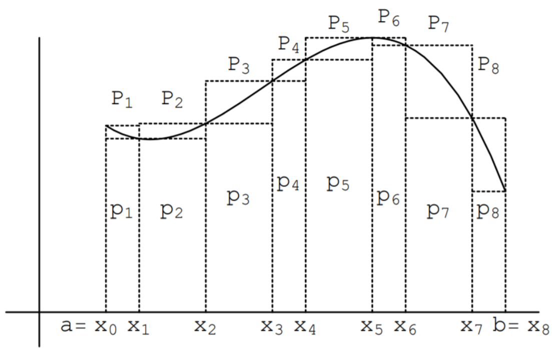
Što je integral?

Integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ je površina ispod krivulje $y = f(x)$ i iznad x-osi, umanjena za površinu iznad krivulje $y = f(x)$ i ispod x-osi, za sve $x \in [a, b]$.

Ako je dana funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ograničena na segmentu $[a, b]$ onda ona poprima infimum (m) i supremum (M) na tom segmentu. Infimum na podsegmentu je veći ili jednak infimumu na segmentu, a supremum na podsegmentu je manji ili jednak supremumu na segmentu. Za $n \in \mathbf{N}$ podijelimo (izvršimo subdiviziju) segment $[a, b]$ točkama

$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ na n dijelova. Neka je $m_k = inf(f)$ i $M_k = sup(f)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Sada definiramo donju Darbouxovu sumu $s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$ i gornju Darbouxovu sumu $S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$. Jasno je da vrijedi $m(b-a) \leq s \leq S \leq M(b-a)$.



Slika 2.1: Donja i gornja Darbouxova suma. Slika preuzeta iz [9]

Neka je A skup svih donjih Darbouxovih suma s i B skup svih gornjih Darbouxovih suma S funkcije f na segmentu $[a, b]$. Iz gornje nejednakosti slijedi da su skupovi A i B ograničeni odozdo s $m(b-a)$ i odozgo $M(b-a)$. Zbog njihove ograničenosti odozdo i odozgo, postoje $\sup A$ i $\inf B$. Označimo li s $I^* = \inf B$ i $I_* = \sup A$, za njih općenito vrijedi $I_* \leq I^*$. U slučaju da su oni jednaki, taj broj nazivamo (određeni) integral funkcije f $(I = I_* = I^*)$ i pišemo:

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{2.1}$$

Ukratko, priča o gornjim i donjim sumama, odnosno aproksimacija površine ispod grafa funkcije vertikalnim pravokutnim odjelcima čije su površine veće od tražene površine, te manje od tražene površine govori: Ako se smanjuje širina vertikalnih pravokutnika nad kojima su konstruirane aproksimativne površine, tako da njihova širina teži nuli, dobijemo neku konačnu graničnu vrijednost. U slučaju da je ta granična vrijednost jednaka sumi površine "većih" pravokutnika i površini "manjih" pravokutnika, kažemo da određeni integral postoji i poprima vrijednost tog graničnog izraza. Odnosno zbroj okomitih odsječaka približava se vrijednosti tražene površine ispod krivulje kada širina odsječaka teži nuli.

Linijski, površinski i volumni integrali nastali su upravo zbog potreba u primjeni fizike i do danas odrađuju vrlo bitnu ulogu pri oblikovanju raznih fizikalnih zakona, ponajviše u području elektrodinamike.

Što je gradijent?

Pretpostavimo li kako imamo funkciju jedne varijable $f(x)$. Derivacija $\frac{df}{dx}$ nam govori koliko brzo se funkcija $f(x)$ mijenja kad mijenjamo argument x za infinitezimalno malu količinu dx.

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)dx \tag{2.2}$$

Dakle, ako x promijenimo za količinu dx, tada se f mijenja za količinu df. Derivacija $\frac{df}{dx}$ je nagib grafa $f - x$.

Pretpostavimo li sad da imamo funkciju tri varijable $T(x, y, z)$. Njena derivacija bi nam trebala reći koliko se brzo funkcija mijenja ako se mijanju varijable x, y i z za neke male vrijednosti. Kod funkcije s tri varijable je malo kompliciranije jer sada ovisi u kojem smjeru se pomičemo.

Razmislimo li o pitanju: "Koliko brzo se T mijenja?" Vidjet ćemo da pitanje ima beskonačno odgovora, po jedno za svaki smjer kretanja.

Teorem parcijalne derivacije glasi:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz \tag{2.3}$$

Ono nam govori kako se funkcije T mijenja za sve tri varijable za infinitezimalne promjene dx, dx i dz. Možemo primijetiti da nismo koristili beskonačno mnogo derivacija, već samo tri derivacije duž pomaka u smjeru tri koordinatne osi.

Preoblikujemo li prethodnu jednakost dobijemo:

$$\begin{aligned} dT &= \left(\frac{dT}{dx}\hat{x} + \frac{dT}{d}\hat{y} + \frac{dT}{dz}\hat{z}\right) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) \\ &= (\nabla T) \cdot (dl) \end{aligned} \tag{2.4}$$

gdje je

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z} \tag{2.5}$$

gradijent funkcije T. ∇T je vektor s tri komponente, generalizacija derivacije koju smo tražili. Gradijent kao i svaki vektor ima duljinu, smjer i orijentaciju.

Gradijent ∇T pokazuje u smjeru maksimalnog rasta funkcije T.

Veličina $|\nabla T|$ daje nagib u smjeru maksimalnog rasta.

Zamislite li da se nalazite na padinama planine, pogledate li okolo, pronaći ćete najstrmiji okolni put. Smjer toga puta je gradijent, a izmjerite li nagib u tom smjeru dobijemo veličinu gradijenta.

Promotrit ćemo za kraj što znači kada je gradijent jednak nuli. Ako je $\nabla T = 0$ u nekoj točki (x, y, z), onda je $dT = 0$ za male pomake oko točke (x, y, z). Tada govorimo o stacionarnoj točki funkcije $T(x, y, z)$. To može biti točka minimuma, maksimuma ili sedlasta točka. Ako želimo odrediti točku ekstrema funkcije tri varijable, dovoljno je odrediti kada je gradijent funkcije jednak nuli.

2.2 Istraživanje

Studenti upisani na studij fizike suočavaju se s računima u kojima je neizbježna integracija ili pak derivacija. Metode integriranja i deriviranja susrećemo u raznim domaćim zadaćama kao i u ispitima. Studenti Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu i nastavničkog i istraživačkog posebno, susreću se s matematičkim problemima na prve dvije godine fakulteta u okviru matematičkih kolegija. Iako su studenti najčešće sposobni slijediti rutinski postupak u računanju integrala i derivacija, ne znamo razumiju li njihovo stvarno korištenje i ulogu u pojedinim problemima. Autori [8] nekih knjiga tvrde da je optimalno tumačenje i osmišljavanje kontekstualiziranih integrala i derivacija prvi korak u razumijevanju i radu s njima na studiju fizike i inženjerstva.

Ono čime ćemo se baviti u ovom diplomskom radu jesu integrali i gradijenti u pojedinim matematičkim i fizikalnim problemima, te shvaćanje njihove uloge. Upravo su integriranje i deriviranje postali osnovni alat u računu s mnogobrojnim primjenama u znanosti i inžinjerstvu.

Za ispitivanje studentskog razumijevanja integrala korištena su neka pitanja iz disertacije Nathaniela R. Amosa.[11] N.R. Amos u svojoj disertaciji ispitivao je povezanost simboličkih integrala s fizikalnim značenjem kod studenata na početnim kolegijima fizike.

N. R. Amos navodi kako je nekoliko desetljeća istraživanja matematičkog i fizičkog obrazovanja bacilo svjetlo na konceptualnu prazninu u cjelovitom razumijevanju među studentima početne razine. U suštini znanstvenik iznosi kako studenti pojam integriranja vežu za sami znak integracije koji ih upozorava kako je nešto potrebno integrirati, ali ne i važnost diferencijala i diferencijalnog produkta unutar integrala, koji su se pokazali kao zapreke studentima u brojnim istraživanjima.

Sve konceptualne zapreke koje koče razumijevanje integrala u nastavi fizike na visokim sveučilištima, podvrgnute su brojnim pokušajima identificiranja i stvaranja uspješnih strategija za otklanjanje poteškoća i usmjerivanje studentskog razumijevanja. Svrha takvih istraživanja je upoznati studente s temeljima teorije kako bi uspješno naučili integraciju.

Prema uzoru na razna ispitivanja [8, 11] razumijevanja integrala, sastavljen je kratki konceptualni test razumijevanja gradijenta kojim će se ispitati studentsko razumijevanje u matematičke pozadine gradijenta za uporabu na kolegijima fizike. Zadatci korišteni za ispitivanje razumijevanja i njegovo samo produbljivanje preuzeti su s kolegija Matematike i Fizike na prvim godinama na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.

2.3 Ciljevi istraživanja

Integral

U našem istraživanju usredotočili smo se na sljedeće probleme u konceptualnom razumjevanju primjene integrala.

I1. Prevođenje fizikalnog problema u matematičke izraze pomoću integrala

Ispitivali smo kako studenti međusobno pretvaraju konceptualiziraju diferencijale, diferencijalne produkte i integrale u različitim fizikalnim kontekstima, te smo ovim istraživanjem istražili učestalost progrešaka među našim studentima.

I2. Fizikalna interpretacija pojedinih matematičkih simbola i izraza

Budući da studenti obično nemaju predodžbu da matematički simboli predstavljaju stvarne fizikalne veličine, vjerojatno si neće postavljati pitanja što oni znače i gdje se koriste.

Kako bi se velika većina fizičara mogla međusobno sporazumjeti dogovorno su određene neke veličine. Tako veličina x_0 izražena u metrima predstavlja neko specifično mjesto koje se ne mijenja, L označava duljinu u metrima, x-om uobičajeno označavamo promjenjiv položaj i slične, iako se nabrojane razlike čine irelevantne one su često neophodne za razumijevanje problema s različitim količinama i vrstama količina. Poznaju li naši studenti razlike između pojedinih diferencijala, diferencijalnih produkata i integrala općenito?

I3. Mjerne jedinice fizikalnih veličina

Fizika nastoji svakom simbolu pridružiti određeno značenje kao što su fizikalni kontekst ili jedinice. To simbolima daje dodatno značenje koje možda početnik u fizici nije ni svjestan da postoje. Tako npr. ako je s F označena sila, a s x položaj onda integral $\int_{x_1}^{x_2} F dx$ ima mjernu jedinicu Nm, a ne samo N kako većina studenata može biti sklona misliti.

Gradijent

Kao i kod integrala, usredotočili smo se na pojedine ciljeve istraživanja kojima ćemo ispitati konceptualno razumijevanje gradijenta.

Smjer gradijenta pokazuje smjer najbržeg prirasta funkcije, a komponente gradijenta računamo kao parcijalne derivacije skalarne funkcije po odabranim osima. U fizici često koristimo gradijent kod temperature, električnog potencijala, koncentracije, gustoće, tlaka, vlažnosti i sl.

G1. Računski pronalazak vektor gradijenta u određenoj točki funkcije

Prva provjera kod gradijenta će biti poznavanje tehnike računa gradijenta u nekoj točki. Dakle, studentima će biti potrebno parcijalno derivirati funkciju po svakoj varijabli i zapisati u obliku vektora.

G2. Razumjevanje fizikalne interpretacije gradijenta na nekim zadacima iz elektrodinamike

Fizičari često razmatraju gradijent temperature, električnog potencijala, koncentracije gustoće, tlaka, vlažnosti i sl. Tako je npr. iznos gradijenta temperature, potreban za račun struje topline dok se gradijent električnog potencijala koristi za određivanje električnog polja i tome slično. Ispitat će se razumijevanje gradijenta na nekim zadacima iz elektrodinamike.

G3. Grafičko određivanje vektora gradijenta u danoj točki funkcije

Osim samog računanja gradijenta, provjerili smo i njegovu geometrijsku interpretaciju. Geometrijski interpretirati jednostavno znači uzeti nešto što nije izvorno unutar područja geometrije i vizualno ga prikazati nečim drugim osim jednadžbom ili samo brojem. Time ćemo provjeriti jesu li studenti razumjeli u kojem smjeru prikazuje vektor određene funkcije f u nekoj točki P.

2.4 Metode istraživanja i uzorak ispitanika

Na samom početku odabira teme diplomskog rada trebalo je odabrati koje matematičke koncepte ćemo ispitivati. Prvi korak bio je razgovor sa sadašnjim i bivšim kolegama koji su položili većinu predmeta ili pak završili fakultet. Zanimalo nas je s kojim su metodama i područjima matematike imali najviše poteškoća tijekom fakultetskog obrazovanja.

Budući da su studenti nabrojali veliku većinu matematičkih koncepata koji se koriste u fizici, možemo zaključiti da im primjena matematičkih koncepata u fizikalnim problemima nije najdraži dio fizike. Ipak najviše puta su se ponavljali integrali i integriranje po raznim varijablama koje nisu x, diferencijalne jednadžbe, gradijent, tenzori, rotacije, divergencije i Taylorov red. Također spominjali su i nabla operator koji se koristi kod gradijenta, divergencije i rotacije, proporcionalost i omjeri te grafički prikazi.

Odlučili smo provjeriti razumjevanje poteškoća u primjeni integrala i gradijenta kod studenata. Istraživanje smo proveli online pomoću platforme Microsoft Forms u kojem je bio kreiran test te je takav poslan studentima na ispunjavanje.

Ispitivanje studentskog razumijevanja integrala i gradijenta sastojalo se od dva dijela uvodnog testa koji je uz zadatke otvorenog tipa sadržavao i zadatke višestrukog izbora. Prvi test je poslužio za ispitivanje nekih aspekata integrala i gradijenta gdje se u većini zadataka tražilo od studenata da objasne svoje odgovore, te su takvi odgovori najviše poslužili za kreiranje drugog dijela ispitivanja u kojem smo studentima dali zadatke koji su se sastojali od višestrukog izbora na osnovu njihovih odgovora tijekom prvog ispitivanja. Neki zadaci su izbačeni u drugom testiranju jer su imali veliki postotak točnih odgovora (više od 90%) ili su bili loše formulirani. Također, izostavljen je bio zadatak u kojem je bilo previše raznolikih odgovora jer bi kod ponovljenog testiranja bilo previše izbora na zaokruživanje. Tijekom ovog diplomskog rada najviše ćemo analizirati drugi konceptualni test te komentirati i pojedine odgovore studenata prvog konceptualnog testa.

Prvom testu pristupilo je 30 studenata, pretežno nastavničkih smjerova (njih 28). Prosječno vrijeme ispunjavanja prvog testa bilo je 58 minuta i 36 sekundi.

Drugom testu pristupilo je 108 studenata, od kojih je s nastavničkog smjera bilo 83, a istraživača 25. Prosječno vrijeme rješavanja bilo je 11 minuta i 54 sekunde.

Uz integrale i gradijente, studenti su u prvom konceptualnom testu pitani o proporcionalnosti i omjerima. Proporcionalnost i omjeri izbačeni su iz drugog konceputalnog testa kako bi test bio što kraći te nam omogućio da više studenata ispuni test koji je bio online. Dakle, na pitanja o proporcionalnosti i omjerima odgovorilo je spomenutih 30 studenata. Ukratko ćemo prokomentirati i te odgovore.

U sljedećem poglavlju obradit ćemo ukupne rezultate svih studenata Fizičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu po pojedinim zadacima u oba konceptualna testa, a kasnije ćemo prikazati tablicom razlike nastavničkog i istraživačkog smjera po zadatcima.

Poglavlje 3

Rezultati istraživanja

3.1 Integral

Uspoređivanje simbola

Najveći dio prvog dijela ispitivanja je obuhvaćao „uspoređivanje simbola“ za što je bilo ukupno tri podzadatka. Jedan takav podzadatak prikazan je tablicom ispod. Svaki od tri podzadatka sastojao se od interpretacije, mjerne jedinice i razlike. Studenti su dobili za zadatak da kroz par riječi interpretiraju fizikalno značenje fizikalnog diferencijala, diferencijalnog produkta i integrala, da odrede pripadnu mjernu jedinicu i ukratko opišu razliku između dvije slične ali simbolički različite fizikalne veličine. Uspoređivanje se vršilo između sljedećih parova: $\Delta t - dt$, $\frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{dx}{dt}$, $Fdx - \int_{x_0}^{x} Fdx$, pri čemu su F sila, x položaj, a t vrijeme.

U sljedećoj tablici nalazi se jedan od najčešćih studentskih odgovora na prvu tablicu, odnosno prvi podzadatak. Zadatak je glasio: Student računa brzinu. U pojedinim zadacima ne može se odlučiti što upotrijebiti $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ili $\frac{dx}{dt}$. Najprije usporedite Δx i dt.

simbol	interpretacija	mjerna jedinica	razlika
Δt	*neki vremenski interval koji može biti par sekundi do par sati*	*s*	*Razlika je u primjeni. Δ t se koristi kod računanja srednje brzine tijela, a dt se koristi kod računanja trenutne brzine tijela.*
dt	*beskonačno mali dio vremena (trenutak)*	*s*	

Student 1

Studenti su pitani o interpretaciji i mjernim jedinicama odabranih veličina jer se na taj način moglo istražiti njihovo konceptualno razumijevanje simboličkih veličina. Proučavajući odgovore svih studenata koji su ispunjavali konceptualni test, možemo zaključiti kako su bili iznimno složni kako Δt pokazuje neki konačni vremenski interval koji ima svoj početni i konačni trenutak, dok dt predstavlja infinitezimalno mali vremenski interval koji teži nuli. Razlikuju se u tome što Δt ima dva ruba, dok dt ima jedan rub jer teži nuli. Zanimljivo je kako su svi studenti, nakon što su dali objašnjenje što predstavlja diferencijal dt, odgovorili kako je mjerna jedinica diferencijala dt sekunda, što u drugom konceptualnom testu u kojem se od studenata tražilo samo da zaokruže koja je mjerna jedinica diferencijala dt nije bio slučaj. O tome ćemo u nastavku.

Kod uspoređivanja $\frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{dx}{dt}$ svi studenti su napisali kako $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ predstavlja srednju brzinu, a $\frac{dx}{dt}$ trenutnu te kako su njihove mjerne jedinice m/s.

Sljedeći podzadatak je glasio: Usporedite $Fdx - \int_{x_0}^{x} Fdx$. Najčešći odgovor bio je ujedno i točan odgovor gdje su studenti najčešće odgovarali kako prva veličina predstavlja diferencijal pomaka pomnožen s konstantom. Ako F nije funkcija od x, tad se radi o diferencijalnom komadiću rada sile čiji smjer djelovanja je paralelan s pomakom. Drugi izraz se odnosi na ukupan rad duž pomaka od x_0 do x. Mjerna jedinica za oba je džul [J].

Ovi zadatci su izostavljeni iz drugog konceptualnog testa jer su bili približno 100% točno riješeni.

Interpretacija i mjerna jedinica

Sljedeći blok pitanja sastojao se od provjeravanja interpretacije fizikalnog diferencijala, diferencijalnog produkta i integrala na primjeru opisanog događaja, a potom smo na sljedećoj stranici Microsoft Forms-a provjerili mjerne jedinice u istim zadatcima. Studenti su bili zamoljeni kod rješavanja mjernih jedinica da se ne vraćaju na prethodnu stranicu gdje se tražila interpretacija istih. Svih šest pitanja je bilo zatvorenog tipa na zaokruživanje koje smo ponovili u oba kruga istraživanja. Na sljedećim primjerima prikazan je jedan par takvog pitanja.

Zadatak 4. Automobil putuje po pravcu. Između vremena t_1 i t_2 (u sekundama), on ima brzinu po pomaku v izraženu u metrima po sekundi. Što od navedenog najbolje opisuje integral $\int_{t_1}^{t_2} vdt$?

A. Ukupna brzina auta u vremenu između t_1 i t_2.

B. Ukupna promjena položaja automobila u vremenu između t_1 i t_2.

C. Prosječna brzina automobila u vremenu između t_1 i t_2.

D. Ukupna promjena brzine automobila u vremenu između t_1 i t_2.

E. Prosječni položaj automobila u vremenu između t_1 i t_2.

Slika 3.1: Četvrti zadatak (c) drugog konceptualnog testa u interpretiranju integrala na primjeru opisanog događaja.

Zadatak 5. Dok lopta pada s visine h, štoperica se koristi za mjerenje vremena t (u sekundama). Što od sljedećeg prikazuje moguće jedinice za dt?

A. metara/sekundi

B. nema jedinicu

C. sekundi/metar

D. 1/sekundu

E. sekunde

Slika 3.2: Peti zadatak (c) drugog konceptualnog testa u određivanju mjerne jedinice integrala na primjeru opisanog događaja.

Osim primjera integrala prikazanog na slici, studenti su pitani za interpretaciju i mjernu jedinicu fizikalnog diferencijala dt i diferencijalnog produkta adt.

83% studenata na zadatak prikazan na slici dalo je točan odgovor da je $\int_{t_1}^{t_2} vdt$ ukupna promjena položaja automobila u vremenu između t_1 i t_2, te ih je 91% odgovorilo da je mjerna jedinica metar. Za diferencijalni produkt adt, 62% studenata je zaokružilo točan odgovor da je to izuzetno mala promjena brzine elektrona, ostatak se opredijelio za odgovore: „Brzina promjene brzine elektrona mijenja se kako vrijeme prolazi“ (12%) i „Brzina elektrona u jednom trenutku“ (18%). Također, 71% ih se složilo kako je mjerna jedinica metar po sekundi.

Skoro četvrtina studenata, točnije 23% je reklo da fizikalni diferencijal dt nema mjernu jedinicu, dok je 72% ipak točno odgovorilo da je mjerna jedinica sekunda. Od 23% koje tvrdi da dt nema mjernu jedinicu, čak pola ih je bilo koenzistetno te je i na pitanje o mjernoj jedinici adt odgovorilo da je točan odgovor metri po sekundi na kvadrat.

Na ovaj blok pitanja 64% studenata je sve točno odgovorilo.

Pretvaranje fizikalnog problema u matematički izraz

Iduće područje ispitivanja koje je provedeno na studentima, a koje se nalazilo samo u drugom dijelu istraživanja bilo je prevođenje rečenice u simbole. Taj dio se sastojao od dva pitanja u kojima je na prvo pitanje trebalo napisati jednadžbu (sa znakom jednakosti) za rad koji je biciklist obavio prilikom sabijanja pumpe za infinitezimalnu duljinu dx. Pumpa je oblika cilindra ispunjena zrakom s pomoćnim klipom unutar kojeg je zrak pri tlaku p i površine poprečnog presjeka A. Točan odgovor $dW = pAdx$ dalo je 63% studenata, dok su sljedeći najčešći netočni odgovori bili $W = pAdx$ i $dW = \frac{p}{A}dx$ (oba s 16%). Možemo primijetiti kako je 79% studenata odabralo jedan od odgovora koji se odnosi na infinitezimalni dio rada.

Drugo pitanje se odnosilo na žicu duljine L koja sadrži naboj Q ravnomjerno raspoređen po svojoj duljini, te su studenti imali zadatak napisati izraz za količinu naboja sadržanog u duljini dl žice. Samo 36% studenata odabralo je točan odgovor $\frac{Q}{L}dl$, dok je idući najpopularniji odgovor s 32% odabira bilo Qdl. Ostatak studenata se rasporedio na $QLdl$ i $\frac{Q}{L}$.

Slabiju riješenost na drugom zadatku u odnosu na prvi možemo pripisati tome što su prvi primjer studenti češće sretali u nastavi i ispitima. Iako da bismo mogli tvrditi da je neki koncept usvojen trebalo bi ga se znati primjeniti i u raznim područjima gradiva (rad sile i linearna gustoće naboja.)

Integral i derivacija

Također, provjeravali smo koliko studenata misli da bilo koji integral poništava bilo koju derivaciju. Kao rezultat pitanja na sljedećoj stranici htjeli smo da studenti prepoznaju da derivacije i integrali nisu uvijek nužno inverzne operacije.

Zadatak 8. Student: "Mjerna jedinica izraza $\int \frac{dp}{dt} dx$ mora biti ista kao i od p jer integral derivacije vraća originalnu funkciju." Slažete li se ili se ne slažete sa studentom?

A. slažem se

B. ne slažem se

Slika 3.3: Osmi zadatak drugog konceptualnog testa iz razumijevanja integrala.

Bitno je uočiti kako se ovim zadatkom samo tražilo od studenata da usporede mjernu jedinicu integrala s mjernom jedinicom veličine p. Dakle, nismo od njih tražili niti da identificiraju mjerne jedinice niti da izračunaju integral.

U prvom provedenom testu u kojem se uz odgovor *slažem se / ne slažem se* tražilo i objašnjenje, 5 od 30 studenata je reklo da se slaže s izjavom. Niti jedan od tih pet studenata nije imalo valjano objašnjenje ili uopće ikakvo objašnjenje.

"Slažem se, $p = mv$, $dp/dt \cdot dx = dx/dt \cdot dp$"

Student 12

"Da, Integral $df = f + c$"

Student 22

Studenti koji se nisu složili s izjavom u većini slučajeva su uočili kako se integral i derivacija međusobno poništavaju, ali samo ako se integrira i derivira po istoj varijabli.

"Slažem se s tvrdnjom općenito jer ako brzinu integriramo, dobijemo put/pomak, a ako pomak deriviramo, dobijemo brzinu. Derivacija - integracija su reverzibilne funkcije (deriviranje x daje 1, a integriranje 1 po dx daje x, pa bih rekla da to vrijedi i za mjerne jedinice). U gore navedenom izrazu ne bih rekla da to vrijedi jer deriviramo i integriramo po različitim varijablama, derivacija po vremenu pa integracija po putu, ne bih očekivala isti izraz i mjernu jedinicu."

Student 3

Također, osim što se derivacija i integracija međusobno poništavaju, one su operacije, a ne funkcije što smo mogli uočiti u par studentskih odgovora.

U drugom dijelu istraživanja ponovili smo zadatak gdje se od studenata tražilo samo da kliknu na odgovor je li se slažu ili ne slažu s navedenom izjavom. Skoro četvrtina ispitanika složila s izjavom studenta kako integral ima istu mjernu jedinicu kao i veličina p, točnije njih 23%.

Student A nasuprot Student B

Sljedeći set pitanja prikazan je na slici i sastojao se od dva pitanja u kojima su ponuđene izjave pojedinih studenata, te su studenti trebali odabrati s kojim kolegom se najviše slažu. Naravno, mogli su odabrati i više njih. Konceptualni zadatak ponovili smo u oba istraživanja, jedina razlika je bila što smo u prvom istraživanju od studenata tražili obrazloženje, a u drugom istraživanju studenti su samo trebali zaokružiti s kojim od ponuđenih izjava se najviše slažu.

Zadatak 9. Studenti sada raspravljaju o veličinama dx i F_1dx pr čemu je F_1 sila u smjeru dx. S kojim se studentom najviše slažete? Objasnite svoj odgovor.

Student A: Definitivno sam vidio dx u derivacijama. Veličina F_1dx govori o promjeni F_1. Onda najvjerojatnije ima mjernu jedinicu [N]/[m] što znači sila po putu.

Student B: Zapravo mislim da F_1dx nam govori koji je rad obavljen na kutiji tijekom puta dx tako da bi mjerna jedinica bila [N][m] jer je dx put u [m].

Student C: Oboje ste u krivu. Govori nam da je to sila u jednoj trenutnoj poziciji. Tada dx nema nikakvo posebno značenje ili mjernu jedinicu sam za sebe osim toga što nam govori da je nešto trenutno.

A. Student A

B. Student B

C. Student C

Slika 3.4: Deveti zadatak u kojem se studenti trebaju opredjeliti s kojom izjavom se najviše slažu.

U prvom istraživanju u kojem smo od studenata tražili objašnjenja u zadatcima 3.4 i 3.5, bilo je nekih jako zanimljivih odgovora. Jedan od točnih odgovora na prvi zadatak koje su ponudili studenti je:

”Najviše se slažem sa studentom B. Student A je u krivu. Promjena F1 bi bila dF1/dx i tada bi mjerna jedinica valjala, ali pošto je umnožak F1dx tada je mjerna jedinica Njutn-metar (Nm). dx nam govori da je nešto trenutno i uzimamo u obzir da je to sila u toj trenutnoj poziciji, ali dx predstavlja trenutni pomak i ima mjernu jedinicu metar (m). Pošto je rad umnožak sile i puta/pomaka student B je upravu. Umnožak F1dx pokazuje koliki je rad na kutiji u položaju dx i mjerna jedinica je ispravna.”

Student 1

Dvadeset pet od sto osam studenata je na postavljeno pitanje o mjernoj jedinici fizikalnog diferencijala dt odgovorilo da ono nema mjernu jedinicu. Petnaest studenata je odabralo studenta C koji tvrdi da dx nema posebno značenje niti mjernu jedinicu, dok ih je 10 odabralo studenta B koji govori da je dx put u metrima. Jednostavno to što student razumije ili ne razumije značenje dt nije jamstvo da će on razumjeti ili ne razumjeti dx. Razumjevanje jednog koncepta traži snalaženje u raznim područjima fizike.

Zadatak 10. Studenti raspravljaju o veličinama $F_1 dx$ i $F_1 \Delta x_1$, pri čemu je sila F_1 sila u smjeru dx. S kojim se studentom najviše slažete? Objasnite svoj odgovor.

Student A: Ja sam poprilično siguran da su $F_1 dx$ i $F_1 \Delta x_1$ ista stvar i da nema velike razlike među njima. Oboje predstavljaju količinu rada i identični su.

Student B: Zapravo, postoji jedna važna razlika između njih: Δx_1 je konačna količina pomaka, a dx je infinitezimalna količina pomaka. Stoga mislim da je $F_1 dx$ beskonačno mala količina rada, a da je $F_1 \Delta x_1$ konačna količina rada.

Student C: Postoji razlika zasigurno. Sjećam se da je dx u osnovi nula, pa je $F_1 dx$ nula količine rada, što se zapravo uopće ne broji.

A. Student A

B. Student B

C. Student C

Slika 3.5: Deseti zadatak u kojem se studenti trebaju opredjeliti s kojom izjavom se najviše slažu.

Prethodna slika prikazuje drugi zadatak 3.5 u kojem su se studenti trebali složiti s jednim od kolega i argumentirati zašto se upravo s njim slažu. Većina studenata se složila s studentom B, dok je idući najpopularniji odgovor bio C. Studenti su uglavnom imali slična obrazloženja, a jedan od takvih ćemo navesti:

"Slažem se sa studentom C jer znamo da dx znači nešto trenutno"

Student 19

U drugom istraživanju u kojima je studentima bilo ponuđeno da zaokruže s kojim studentom se najviše slažu, na prvo pitanje 3.4 je čak 73% studenata bilo suglasno sa studentom B, dok je sljedeći najčešći odgovor bio C koje je zaokružilo 22% studenata. Od tih 22% studenata, odnosno 23 studenta čiji odabrani odgovor govori da dx nema neko posebno značenje ili mjernu jedinicu, 14 ih se izjasnilo na pitanje o mjernoj jedinici dt kako ono nema mjernu jedinicu, dok ih 8 tvrdi da je mjerna jedinica sekunda.

Na drugo pitanje 3.5 o F_1dx i $F_1\Delta x_1$, 88% studenata se složilo sa studentom B koji govori da je F_1dx beskonačno mala količina rada, a da je $F_1\Delta x_1$ konačna količina rada.

Dva studenta su na oba pitanja zaokružili sva tri ponuđena odgovora istaknuvši tako da se slažu s izjavama svo troje studenata. Odabir sve tri izjave može biti posljedica neznanja ili neodlučnosti. Možemo sa sigurnošću utvrditi da student razumije ili ne razumije pojedini koncept tek kada se traži i objašnjenje odabranog izbora.

3.2 Gradijent

Određivanje gradijenta funkcije

Studenti su nakon provjere poznavanja integrala pitani o gradijentu. Prvi zadatak bio je izračunati gradijent funkcije $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ u točki $(3, 4, 5)$. U prvoj anketi ima raznolikih odgovora, najveći problem studentima je bilo zapravo je li gradijent skalar ili vektor, pojedini studenti su i miješali ta dva pojma. Navest ćemo neke odgovore studenata.

Od 30 studenata koje je pristupilo prvom istraživanju kao rezultat gradijenta vektor je odredilo 17 studenata, među kojima nisu svi bili točno izračunati.

"Gradijent $f(x, y, z) = (df/dx, df/dy, df/dz) = (1, 2y, 3z^2)$, Gradijent $f(3, 4, 5) = (1, 8, 75)$"

Student 15

Do dolaska do točnog rezultata student koristi krivi simbol za parcijalnu derivaciju ili ne zna da se to što radi zove parcijalna derivacija. Također, budući da je ispitivanje provedeno online moguće je i da je studentu samo bilo jednostavnije pisati slovo d umjesto umetanja simbola za parcialnu derivaciju ∂. Za neke studente možemo sa sigurnošću reći da znaju kako se radi o parcijalnoj derivaciji te su si dali truda i u upisivanju odgovarajućeg simbola.

$$"\nabla f = (\partial f/\partial x)e_1 + (\partial f/\partial y)e_2 + (\partial f/\partial z)e_3 \rightarrow (\partial f/\partial x) = 1, (\partial f/\partial y) = 2y, (\partial f/\partial z) = 3z^2, \nabla f = e_1 + 2ye_2 + 3z^2e_3\nabla f(r); r = (3,4,5) \rightarrow r = e_1 + 8e_2 + 75e_3"$$

Student 30

Na isto pitanje 11 od 30 studenata je za rezultat gradijenta dobilo skalar. Izračunali su skalar kao rezultat na način da su derivirali funkciju po komponentama koje nisu zapisali u obliku vektora, već ih međusobno zbrojili. Odmah na prvo pitanje možemo primijetiti da studentima nije poznat sam koncept gradijenta kao vektora.

"Gradijent ove funkcije možemo izračunati kao zbroj parcijalnih derivacija funkcije. Dakle:$(df/dx + df/dy + df/dz).((x + y2 + z3)/dx + (x + y2 + z3)/dy + (x + y2 + z3)/dz) = 1 + 2y + 3z2-$ *sada uvrstimo brojeve* $= 1 + 2 * 4 + 3 * 5^2 = 84."$

Student 1

"Operator gradijenta se označava znakom nabla (naopaki trokut) i na funkciju djeluje tako da se vrši parcijalna derivacija po svakoj od varijabli, u ovom slučaju x, y i z, pa bi rezultat bio 1+2y+3z na kvadrat"

Student 21

Neki studenti su otišli korak dalje u nepoznavanju pojmova vektora i skalara, te su odlučno pomiješali ta dva koncepta između kojih su stavili znak jednakosti.

$$"(1, 2y, 3z^2) = 3 + 8 + 75 = 86"$$

Student 12

"Rez. = 84 grad. f(x,y,z)= (df/dx, df/dy, df/dz)"

Student 28

Zadatak je ponovljen u drugom krugu ispitivanja gdje su studenti mogli izabrati jedan od ponuđenih odgovora $1 + 2y + 3z$, 84, 86, $(1, 2y, 3z)$, $(1, 8, 75)$ i $(3, 8, 75)$. Uzmemo li u obzir da prva tri odgovora predstavljaju skalar, a druga tri vektor, čak 36% studenata za rezultat gradijenta odabire skalar. 56% studenata je točno izračunalo gradijent funkcije u danoj točki, odnosno odabralo točan odgovor $(1, 8, 75)$.

Prelaskom na zadatak u kojem učenici nakon izračuna gradijenta dobivaju zadatak s kontekstom u kojem se sada mrav nalazi u koordinatnom sustavu i mora bježati u smjeru najbržeg smanjenja koncentracije toksina, studenti u odgovorima pišu najraznovrsnije odgovore. Odgovore nije bilo moguće grupirati u par skupina kako bi isti zadatak bio dan u drugom testu u obliku zatvorenog zadatka na zaokruživanje, te je taj zadatak izbačen iz daljnjeg istraživanja. Bitno je naglasiti kako studenti nisu direktno pitani da izračunaju gradijent već smjer najbržeg smanjenja dane funkcije koja predstavlja koncentraciju toksina.

Mrav se nalazi u ishodištu koordinatnog sustava u toksičnoj atmosferi. Koncentracija toksina je dana funkcijom

$$f(x, y, z) = e^{-3x} + \sin(yz) + e^{-y^2}$$

U kojem smjeru treba mrav bježati da se koncentracija toksina najbrže smanji?

Slika 3.6: Zadatak iz prvog konceptualnog testa koji je izbačen iz daljnjeg ispitivanja.

U x smjeru trebao bi bježati mrav kako bi pobjegao u smjeru najbržeg smanjenja koncentracije toksina, odnosno kao rezultat računanja negativnog gradijenta zadane funkcije dobije se vektor $(3, 0, 0)$. Studentima je bilo potrebno odrediti negativni gradijent budući da gradijent pokazuje u smjeru najbržeg rasta funkcije, dok se u zadatku traži vektor najbržeg pada. Zanimljivo je kako je 7 od 11 studenata koje je na prethodni zadatak kod računanja gradijenta za rezultat dobilo skalar, u ovom zadatku rješenje zapisuje u vektorskom obliku. Budući da je odgovora bilo raznolikih, navest ćemo neke i točne i netočne.

Tražimo gradijent i izjednačimo s 0 *kad je derivacija pozitivna, a onda se povećava, kad je negativna se smanjuje* $Gf = -3e^{-}3x + zcos(yz) + ycos(yz) - 2ye^{-y^2}$ *Uvrstimo* $x = y = z$ *i dobijemo* -3 *stoga u* $(1, 1, 1)$ *dobijemo pozitivnu vrijednost, a u* $(-1, -1, -1)$ *dobijemo negativnu vrijednost, stoga treba ići u negativno*

Student 9

U smjeru gradijenta (gradijent je vektor i on pokazuje smjer najbržeg pada) Uvrstimo u sve tri derivacije po dx, dy i dz vrijednost jer se mrav nalazi u ishodištu, dobijemo: (-3,0,0)

Student 14

Smjer gradijenta pokazuje smjer najbrže promjene f-je od veće k manjoj vrijednosti f-je. $\nabla f(x,y,z) = (df/dx, df/dy, df/dz) = (-3 * e^{-3x}, z * cos(yz) + -2y * e^{-y^2}, y * cos(yz))$ $\nabla f(0,0,0) = (-3,0,0)$. *Mrav treba bježati u smjeru vektora* $(-3,0,0)$.

Student 15

Nakon zadatka u kojem je trebalo izračunati gradijent funkcije u nekoj točki, studenti su pitani kako će izračunati električno polje ako znaju vrijednost potencijala u nekoj točki. Ključno je ovdje da se ne može izračunati električno polje ako znamo samo vrijednost potencijala u jednoj točki. Trebali bismo znati vrijednosti potencijala u okolini te točke da bismo izračunali gradijent tj. polje. Prevedemo li ovaj zadatak u čisto matematički zadatak po uzoru na prethodni, očitije je da je zadatak nerješiv.

Primjer 3.2.1. *Odredite gradijent funkcije* $f(x,y,z)$ *u točki* $(3,4,5)$ *čija je vrijednost u danoj točki* $f(3,4,5) = 84$*?*

U prvom krugu ispitivanja u kojem je bilo postavljeno pitanje otvorenog tipa, samo dvoje studenata je napisalo da se električno polje ne može izračunati. Dok ih je 21 od 30 napisalo kako se električno polje računa kao (negativni) gradijent potencijala.

"To ne možemo napraviti."

Student 6

"Ne, jer nam to ne daje informaciju o promjeni potencijala koja nam treba za električno polje"

Student 8

Možemo primjetiti kako studenti teško usvajaju koncept gradijenta.

Primjena u fizici na nekim primjerima

U drugom krugu ispitivanja ponovljen je isti zadatak gdje su studenti trebali zaokružiti jedan od ponuđenih odgovora:

a. Električno polje tada računamo kao omjer potencijala i probnog naboja.

b. Električno polje tada računao kao umnožak potencijala i probnog naboja.

c. Električno polje tada računamo kao negativni gradijent potencijala u toj točki.

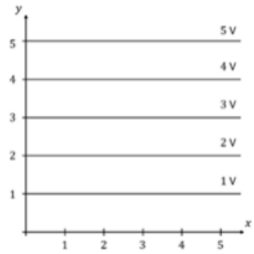
d. Električno polje računamo kao gradijent potencijala u toj točki.

e. Ne možemo izračunati električno polje.

Samo 12% studenata je reklo da se električno polje ne može izračunati, a 74% studenata je dalo odgovor da se električno polje računa preko gradijenta potencijala bilo ono s negativnim ili pozitivnim predznakom.

U idućem dijelu studenti su trebali iskoristiti činjenicu kako je električno polje negativni gradijent električnog potencijala, što se dalo primjetiti iz prethodnog zadatka kako im je to vrlo dobro poznato i što se tiče teorijske pozadine potrebne za zadatak možemo pretpostaviti da nije bila prepreka. Zadatak je prikazan ispod.

Zadatak 3. Na grafu na slici prikazana je raspodjela ekvipotencijalnih linija u dvodimenzionalnom kartezijevom sustavu. Pretpostavite da se potencijal linearno smanjuje u smjeru $-y$ i nema lokalne fluktuacije, koje bi utjecale na lokalno polje. Odredite smjer vektora električnog polja upotrebom gradijenta potencijala.



A. $+x$ smjer

B. $-x$ smjer

C. $+y$ smjer

D. $-y$ smjer

E. u smjeru kazaljke na satu

F. u smjeru suprotnom od kazaljke na satu

Slika 3.7: Treći zadatak drugog konceptualnog testa iz poznavanja primjene gradijenta unutar fizike.

Tijekom prvog dijela istraživanja u kojem su zadatci bili otvorenog tipa, 23 od 30 studenata se odlučilo za smjer y osi, ono što im je zadavalo probleme jest orijentacija. Čak 11 od 23 studenata je ponudilo odgovor s krivim predznakom, odnosno u smjeru $+y$ osi. U ovom pitanju moglo se primijetiti kako studenti kod netočnog odgovora nisu ponudili nikakvo objašnjenje, dok su se točni odgovori cjelovito obrazlagali riječima ili računom.

"Električno polje pokazuje u smjeru smanjenja potencijala jer je električno polje negativni gradijent potencijala, budući da gradijent raste u +y smjeru, gradijent potencijala pokazuje u +y smjeru, a potom negativni gradijent potencijala odnosno električno polje pokazuje u -y smjeru"

Student 20

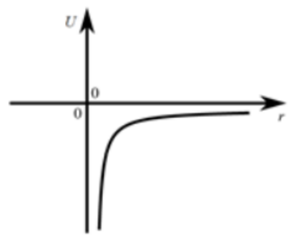
$$"V(x,y) = y, E = -\nabla V = -[\partial V(x,y)/\partial x e_1 + \partial V(x,y)/\partial y e_2] = -e_2"$$

Student 30

Kod ponovljenog zadataka u drugom krugu istraživanja 76% studenata se složilo kako gradijent pokazuje duž y osi, iako nisu bili toliko složni oko orijentacije. Njih 34% je pogriješilo u orijentaciji vektora. Među ponuđenim odgovorima na zaokruživanje bilo je ponuđeno i u smjeru kazaljke na satu i suprotno od smjera kazaljke na satu, jedan od ta dva odgovora odabralo je 10% studenata.

Studenti su u predzadnjem bloku pitanja odgovorili još na dva pitanja iz područja elektrodinamike.

Zadatak 4. Električna potencijalna energija U naboja q i Q na međusobnoj udaljenosti r prikazana je na grafu. Naboj Q smješten je u ishodištu.



Što veličina dU/dr u bilo kojoj točki predstavlja?

A. Jakost električnog polja u promatranoj točki

B. Iznos sile na naboj q u promatranoj točki.

C. Potencijalnu energiju naboja q.

D. Akceleraciju naboja q.

E. Potencijalnu energiju u promatranoj točki.

Slika 3.8: Četvrti zadatak drugog konceptualnog testa iz poznavanja primjene gradijenta unutar fizike.

Studenti su pitani što predstavlja veličine $\frac{dU}{dr}$ u bilo kojoj točki grafa funkcije $U(r)$ prikazanog na slici 3.8. 54% studenata je odgovorilo da je to veličina koja predstavlja iznos sile na naboj q u promatranoj točki, dok sljedeći najčešći odgovor glasi da veličina $\frac{dU}{dr}$ predstavlja jakost električnog polja u promatranoj točki. Taj odgovor je odabrala točno četvrtina studenata, njih 25%.

U prethodnom zadatku primijetili smo da su studenti odlično zapamtili kako je električno polje negativni gradijent potencijala, ali kad se radi o konzervativnoj sili kao u ovom primjeru manje im je poznato da je konzervativna sila upravo negativni gradijent potencijalne energije što se u ovom zadatku i tražilo od studenata, a to je poznavanje još jedne primjene gradijenta u fizici. Problem ćemo pobliže objasniti u sljedećim paragrafima te ćemo objasniti razliku između potencijala i potencijalne energije.

Za dva električni nabijena balona, dva magneta ili loptu i Zemlju kažemo da imaju potencijalnu energiju. Potencijalna energija vezana je za sustav od bar dva tijela i ovisi o položaju tih tijela. Razlog takvog naziva leži upravo u tome što će ta tijela u međudjelovanju kada ih pustimo dobiti kinetičku energiju. Dakle, potencijalna energija je moguća (kinetička) energija, ona ima potencijal da se pretvori u drugi oblik energije. Sila između tih tijela mora biti takva da rad te sile ne ovisi o putu, već samo o početnom i konačnom položaju. Takvu silu nazivamo konzervativnom silom. Primjeri takvih sila su gravitacijska, električna, elastična sila, ... Za svaku silu čija je rotacija jednaka nuli možemo reći da se radi o konzervativnoj sili. Tada vektorsko polje možemo prikazati kao gradijent skalarne funkcije jer je rotacija gradijenta uvijek nula. O tome nam govori Helmholtzov prvi teorem:

Teorem 3.2.2. *Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne za vektorsko polje F:*

(a) $\nabla \times F = 0$ *svugdje.*

(b) $\int_a^b F \cdot dl$ *ne ovisi o putu.*

(c) $\oint F \cdot dl = 0$ *za bilo koju zatvorenu petlju.*

(d) *F je gradijent neke skalarne funkcije* $F = -\nabla V$.

Električna potencijalna energija sustavu čestica i izvor polja se mijenja za iznos rada nad sustavom $E_p = qEd$. S ciljem uvođenja nove veličine koja će ovisiti samo o svojstvima prostora u kojem postoji električno polje i koje će biti povezano s promjenom električne potencijalne enrgije nazivamo napon. Napon definiramo između dvije točke kao

$$U_{AB} = \frac{\Delta E_p}{q} \tag{3.1}$$

Budući da se napon odnosi na dvije točke u prostoru, definiramo električni potencijal kao veličinu koja je povezana s električnom potencijalnom energijom i ima vrijednost u svakoj pojedinoj točki prostora. Dakle, električni potencijal je kada svakoj točki polja pridružimo vrijednost napona u odnosu na fiksnu točku A.

U idućem zadatku studenti su ponovno trebali iskoristiti činjenicu da je električno polje negativni gradijent potencijala što smo već primijetili da im ne predstavlja nikakav problem. U ovom zadatku su, dakle, trebali derivirati električni potencijal $V(x, y, z)$ po x, y i z.

Zadatak 5. U danom području prostora električni potencijal je zadan

$$V(x, y, z) = A + Bx + Cx^3 + Dxy$$

gdje su A, B, C i D su pozitivne konstante. Koje od ovih tvrdnji su točne za električno polje u tom području prostora?

A. Povećanje konstante A, povećat će se električno polje u svim točkama prostora.

B. Smanjenje konstante A, smanjit će se električno polje u svim točkama prostora.

C. Električno polje nema z komponentu.

D. Električno polje u ishodištu koordinatnog sustava jednako je 0.

Slika 3.9: Peti zadatak drugog konceptualnog testa gdje se električno polje dobije pomoću negativnog gradijenta potencijala.

Na ponuđeno pitanje bilo je moguće odabrati više točnih odgovora, te se 38% studenata odlučilo za točan odgovor C, dok je 19% njih uz C zaokružilo i odgovor D. Sljedeći najčešći odgovor bila je kombinacija odgovora A i B, koje je odabralo 10% studenata.

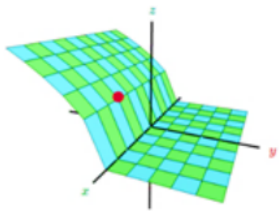
Sveukupno odgovor C samostalno ili uz druge odgovore je odabralo 88% studenata.

Grafički prikaz

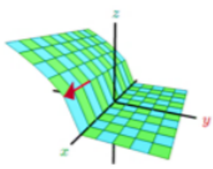
Za sami kraj nakon cijelog niza pitanja o gradijentima studenti su dobili dva zadatka grafičkog prikaza funkcije f i točke P, trebali su odrediti prikaz gradijenta funkcije f u točki P. U prvom primjeru točka P je bila smještena u maksimumu funkcije, te se 68% studenata složilo da je gradijent funkcije u točki ekstrema jednak nuli. Drugi najčešći odgovor je da gradijent pripada tangenti na funkciju u točki P, što je odabralo 18% studenata.

Dok se u šestom zadatku od studenata tražilo da odrede gradijent, u sedmom zadatku 3.10 (zadatak preuzet s [5]) bili su pitani da odrede prikaz negativnog gradijenta. 48% studenata je zaokružilo točan odgovor C koji pokazuje u smjeru pada. Vektor koji pokazuje u

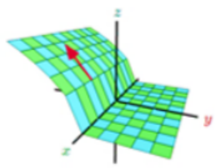
Zadatak 7. Na slici je prikazan graf skalarne funkcije f i točke P.



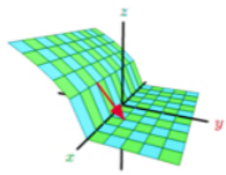
Koja od ponuđenih slika prikazuje gradijent funkcije f u točki P?



A.



B.



C.

D. Gradijent funkcije f u točki P jednak je nula.

Slika 3.10: Sedmi zadatak drugog konceptualnog testa u kojem se od studenata tražilo da odrede grafički prikaz vektora gradijenta.

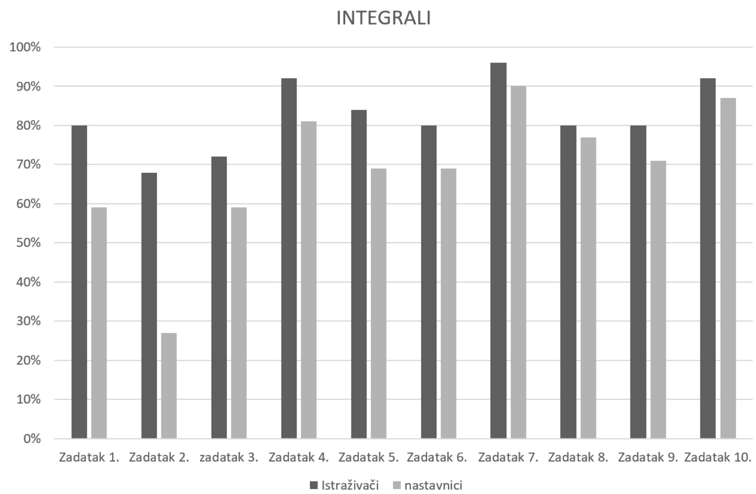
smjeru rasta funkcije je zaokružilo 33% studenata. Ostatak se opredijelio za odgovor koji kaže da je gradijent funkcije u točki P jednak 0.

Nakon cijelog bloka pitanja o gradijentu možemo zaključiti kako studentima nije najjasniji pojam gradijenta kao vektora, te da u slučajevima u kojima je o gradijentu govori kao o vektoru nisu sigurni pokazuje li ono u smjeru najbržeg rasta ili pada funkcije.

3.3 Usporedba rezultata konceptualnog testa

Budući da su konceptualne testove riješavali studenti nastavničkog i istraživačkog smjera, napravit ćemo kratku analizu međusobne usporedbe. Pojedini zadaci iz prvog i drugog konceptualnog testa prikazani su u prethodnom poglavlju, a cijeli drugi konceptualni test u kojem ćemo analizirati odgovore, ovisno o smjeru, prikazan je u dodatku.

Pomoću stupičastog dijagrama prikazat ćemo postotak točno rješavanih pojedinih zadataka te komentirati zanimljive najčešće pogreške nekih zadataka. Crni stupac predstavlja postotak točno riješenosti pojedinog zadatka studenata istraživačkog smjera, dok sivi stupac predstavlja točnu riješenost nastavničkog smjera.

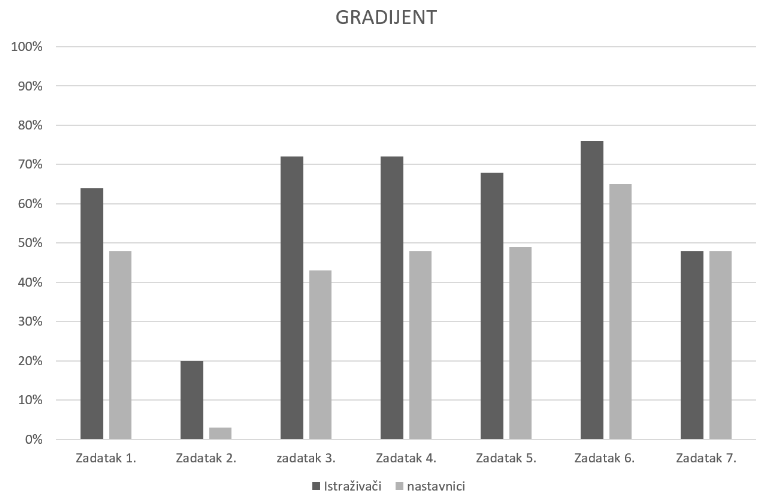


Slika 3.11: Stupčastim dijagramom je prikazan postotak točno riješenosti pojedinih zadataka iz razumijevanja konceptualnog dijela integrala (crna - istraživači, siva - nastavnički smjerovi)

Pri rješavanju integrala vidimo da studenti istraživačkog smjera imaju veći postotak odabira točnog odgovora kod svakog zadatka i ono minimalno iznosi približno 70%. Postotci riješenosti studenata nastavničkog smjera malo su lošiji. Najveća razlika se primjećuje kod drugog zadatka u kojem smo od studenata tražili da zaokruže izraz za količinu naboja Q sadržane u duljini dl duž žice, gdje je najpopulariniji odgovor bio ujedno i onaj netočni Qdl.

Uz istu legendu prikazat ćemo stupčasti dijagram po zadacima za drugi dio konceptualnog testa koji ispituje razumijevanje gradijenta.

Promatrajući dijagram koji predstavlja riješenost gradijenta, vidimo kako je gradijent lošije riješen od integrala, pa možemo zaključiti kako studenti imaju većih poteškoća s primjenom i razumjevanjem koncepta gradijenta nego integrala.



Slika 3.12: Stupčastim dijagramom je prikazan postotak točno riješenosti pojedinih zadataka iz razumijevanja konceptualnog dijela gradijenta (crna - istraživači, siva - nastavnički smjerovi)

Dok je točna riješenost integrala kod studenata istraživačkog smjera velikom većinom prelazila preko 70%, kod gradijenta taj postotak predstavlja gornju granicu točno riješenosti. Opet možemo primijetiti kako istraživački smjer ima veći postotak riješenosti na svim zadatcima, osim na zadnjem.

Naime, na zadnjem zadatku postotak točne riješenosti i istraživačkog i nastavničkog smjera iznosi 48%. Drugi najpopularniji odgovor bio je upravo onaj u kojem vektor gradijenta pokazuje u suprotnom smjeru odabralo je 44% studenata istraživačkog smjera i 36% studenata nastavničkih smjerova.

Najlošije riješen zadatak cijelog konceptualnog testa bilo je pitanje: Ako znamo potencijal u jednoj točki prostora, kako možemo izračunati električno polje u toj točki? Na to pitanje je točan odgovor dalo 5 studenata istraživačkog smjera (20%) i 8 studenta nastavničkog smjera (3%). Za odgovor da se električno polje tada računa kao negativni gradijent potencijala odgovorilo je 60% ispitanih studenata istraživačkog smjera i 66% ispitanih studenata nastavničkih smjerova.

Također, vidimo kako su istraživači znatno bolje riješili središnji dio koji je sadržavao zadatke iz primjene gradijenta unutar elektrodinamike.

Poglavlje 4

Preporuke o svladavanju poteškoća

Glavni cilj pisanja diplomskog rada bio je otkriti konceptualne poteškoće koji se javljaju među našim studentima fizike na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Uz otkrivanje konceptualnih poteškoća, cilj je predložiti različite metode i načine otklanjanja istih. U ovom poglavlju ćemo kroz nekoliko idućih stranica nabrojati uočene poteškoće koje su se javljale kod većeg broja studenata, ali i različite aktivnosti kojima ćemo popraviti studentsko shvaćanje i razumijevanje integrala i gradijenta.

Iako na jednom ispitanom primjeru ne možemo tvrditi kako su studenti usvojili taj dio gradiva i da će ga znati primjeniti u svakom sljedećem sličnom problemu, gledajući riješenost konceptualnih testova, studenti su vrlo dobro riješili dio u kojima se ispitivao integral, a nešto lošije gradijent.

4.1 Uočene poteškoće

- *Prevođenje fizikalnog problema u matematičke izraze pomoću integrala*

Na dva ispitana primjera, uočili smo kako je jedan (rad sile) znatno bolje riješen u odnosu na drugi (linearna gustoća naboja). To smo potkrijepili time što su studenti puno češće u nastavi sretali zadatke u kojima se spominjao rad sile nego linearna gustoća naboja. Pitanje je bi li se studenti snašli i u raznim drugim primjerima koje ne susreću toliko često u nastavi. Također, kod zadataka 3.5 u najpopularnijem odgovoru se nalazila rečenica: "... $F_1 dx$ je beskonačno mala količina rada". Iz toga vidimo da zapravo obje strane jednakosti $F_1 dx$ i beskonačno mala količina rada moraju predstavljati jednake količine, u ovom slučaju infinitezimalno male količine.

- *Fizikalna interpretacija pojedinih matematičkih simbola i izraza*

Studente smo pitali da interpretiraju diferencijal, diferencijalni produkt i integral.

- *Mjerne jedinice fizikalnih veličina*

U prvom konceptualnom testu na dva mjesta je bilo postavljeno pitanje o mjernoj jedinici diferencijala dt. Pri put u tablici gdje su studenti morali riječima opisati i usporediti dt i Δt. Zanimljivo je kako je velika većina studenata nakon što je objasnila što predstavlja diferencijal dt točno napisala i njenu mjernu jedinicu, dok se u slučaju kada je trebalo samo zaokružiti mjernu jedinicu, četvrtina studenata opredjelila za odgovor kako dt nema mjernu jedinicu.

- *Računski pronalazak vektor gradijenta u određenoj točki funkcije*

Imali smo pretpostavku da je računanje studentima rutinski zadatak za razliku od konceptualnog razumjevanja, vidjeli smo kako studentima računanje gradijenta ipak nije rutinski postupak. Od raznih rezultata koji su predstavljali vektore i skalare, neki su i u međukoracima spojili ta dva koncepta. Također, kod deriviranja pojedinih komponenta uočili smo kako nije svim studentima jasno da se radi o parcijalnim derivacijama. Kako bi otklonili ovu poteškoću potrebno je studentima jasnije produbiti pojam gradijenta kao vektora koji pokazuje smjer najbržeg prirasta neke zadane funkcije. Jedan od mogućih uzroka nastanku tog problema možemo pripisati tome što se većina problema koje rješavamo na fakultetu svodi na jednostavnije primjere u jednodimenzionalnom sustavu, koje bi studenti sami trebali moći poopćiti. U jednodimenzionalnom sustavu rješenje je derivacija $\frac{df}{dx}$ čije rješenje je skalar, a ne vektor, i ono nam predstavlja nagib funkcije u promatranoj točki.

- *Razumijvanje fizikalne interpretacije gradijenta na nekim zadacima iz elektrodinamike*

Iako studenti nisu bili vješti kod dobivanja vektora kao rezultat računanja gradijenta, u pojedinim primjerima iz elektrodinamike govorili su upravo o smjeru vektora. S obzirom na rezultate možemo reći da dio studenata nije uočio problem i nije se vratio na prethodne zadatke kako bi ispravio odgovore.

Već smo napomenuli da su studenti zapamtili činjenicu da je električno polje negativni gradijent potencijala ali treba istaknuti da imaju problema s konceptima konzervativnih sila, potencijalne energije i potencijala.

- *Grafičko određivanje vektora gradijenta u danoj točki funkcije*

Dakle, derivacija funkcije $y = f(x)$ u x je nagib grafa, tj. koeficijent smjera tangente u točki $T(x, y)$. Promatravši parcijalne derivacije, koje su nam potrebne za određivanje vektora gradijenta u nekoj točki funkcije, možemo ih interpretirati kao nagibe krivulja, tj. koeficijente smjera tangenti u točki $T(a, b, c)$ na krivulje koje su nastale kao presjeci plohe π s ravninama $y = b$ i $x = a$. S obzirom na to, možemo zaključiti kako vektor gradijenta pokazuje u smjeru rasta funkcije, dok je u ekstremu gradijent jednak nul-vektoru.

4.2 O aktivnostima i radionicama

Na kraju istraživanja možemo reći da znamo kako poboljšati razumijevanje. Budući da znamo što je problem kod shvaćanja integrala i gradijenta, možemo dizajnirati vježbe koje bi malo po malo uklonile raširene miskoncepcije. Vježbe ćemo koncipirati kroz niz aktivnosti kao što su rješavanje zadataka i radionica. One su predviđene za studentsko samostalno rješavanje pri kojoj je naveden cilj aktivnosti, nastavni oblik, nastavna metoda i potrebni materijal te kratki tijek aktivnosti. Aktivnosti nisu predviđene da se sve odrade u jednom terminu predavanja/vježbi već da se kombiniraju po potrebi. Također, aktivnosti mogu poslužiti kako bi se produbilo već usvojeno gradivo. Sve su aktivnosti pripremljene za rad u paru ili u grupama, te dolazimo do rješenja metodom diskusije i analize.

4.3 Aktivnosti i radionice

Aktivnost 1. - Otkrivanje integrala

Cilj aktivnosti: Studenti će otkriti koncept integrala kao inverznu operaciju derivacije.

Primjer 4.3.1. *Spremnik goriva ima rupu na dnu. Gorivo polako istječe na asfalt brzinom u metrima kvadratnim po minuti koja je dana formulom* $v(t) = 8t^2 + t + 2$. *Brzina širenja goriva ovisi o broju t minuta nakon početka istjecanja goriva iz spremnika.*

(a) Koliko iznosi brzina širenja goriva nakon sat vremena?

(b) Kolika je površina mrlje goriva nakon sat vremena?

Studenti će ovim zadatkom produbiti značenje operacije integrala kao inverzne operacije deriviranja. Brzinu širenja goriva nakon jednog sata moguće je izračunati na način da se u jednadžbu brzine u ovisnosti o vremenu $v(t)$ uvrsti $t = 60$ min, budući da je t vrijeme u minutama nakon početka istjecanja goriva. Sljedeći korak je nešto teži u kojem upravo studenti moraju otkriti koncept integrala.

Izrazom $v(t)$ koji se mjeri u metrima na kvadrat po minuti dana je brzina promjene površine mrlje u vremenu.

$$v(60) = 8 \cdot 60^2 + 60 + 2 = 7262 \text{ m}^2/\text{min} = 435720 \text{ m}^2/\text{h} = 0,43572 \text{ km}^2/\text{h} \qquad (4.1)$$

Znamo da se naftna mrlja širi brzinom $v(t) = 8t^2 + t + 2$ i pitanje je kolika je površina mrlje nakon nekog vremena t. Ono što možemo primjetiti je kako se brzo mrlja širi i kako se brzo mijenja njena površina u vremenu izraženom u minutama. Brzinom $v(t)$ nam je zadana brzina širenja nafte, a ono nam je zapravo brzina promjene površine. Dakle, imamo brzinu promjene površine, a zapravo tražimo promjenu površine. Drugim riječima imamo derivaciju površine, a želimo površinu. To nas dovodi do temeljnog pitanja: "Koja funkcija ima derivaciju $v(t)$?"

Ovim pitanjem uvodimo novi pojam, a to je integriranje.

$$P(t) = \int_0^{60} v(t)dt = \int_0^{60} (8t^2+t+2)dt = \left(8 \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t\right)\Big|_0^{60} = \frac{8}{3}60^3+\frac{1}{2}60^2+2\cdot 60 = 577920\,\text{km}^2 \qquad (4.2)$$

Ovu aktivnost možemo koristiti i u srednjoj školi pri obradi integrala kao motivacijski zadatak kojim bi učenike naveli da otkriju koncept integrala.

Aktivnost 2. - Električno polje tanke žice

Cilj aktivnosti: Primjena integrala u konkrentnim zadacima.

Primjer 4.3.2. *Jako tanko plastično uže duljine L nosi naboj +Q koji je uniformno raspoređen duž užeta. Pronađite električno polje u točki P koja se nalazi na udaljenosti d od desnog ruba užeta kao na slici. (Pomoć: Električno polje točkastog naboja q na udaljenosti r dano je formulom:* $\overrightarrow{E} = k\frac{q}{r^2}\overrightarrow{r}$*)*
Električno polje možemo odrediti iz jednadžbe $\overrightarrow{E} = \int d\overrightarrow{E}$*. Što* $d\overrightarrow{E}$ *predstavlja u ovom problemu? Izrazi* $d\overrightarrow{E}$*. Promislite i napišite strategiju kojom bi riješili ovaj problem. [12]*

Slika 4.1: Uže duljine L uniformnog naboja $+Q$. Slika preuzeta iz [12] uz male modifikacije.

Pred studentima je klasični problem iz elektrodinamike koji zahtjeva integraciju.

Kako bi studenti pronašli ukupno električno polje u točki P užeta duljine L potrebno je najprije usitniti uže na beskonačno male komade svaki duljine dx i beskonačno male količine naboja dq. Sljedeći korak je postavljanje jednadžbe za dE koja je beskonačno malo električno polje u točki P zbog beskonačno malog naboja dq. Posljednji korak je pronaći ukupno električno polje E integrirajući dE.

$$\overrightarrow{E} = \int d\overrightarrow{E} \tag{4.3}$$

$$\overrightarrow{\eta} = (0, 0, z) - (x, 0, 0) = (-x, 0, z)$$

$$\overrightarrow{\eta} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}}(-x, 0, z)$$

$$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r^2}\overrightarrow{r} = k\frac{\lambda dr}{r^2}\overrightarrow{r}$$

Temeljna ideja integracije je usitnjavanje objekta na male komadiće i dodavanje količine (ili učinka) svakog djela.

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\lambda(dx\hat{x} + dz\hat{z})}{(x^2 + z^2)^{3/2}}(-x, 0, z)$$

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\int_V \frac{\lambda x dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}\hat{x} + \int_V \frac{\lambda z dz}{(x^2 + z^2)^{3/2}}\hat{z}\right]$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{-\lambda x dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}}\Bigg|_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2 + z^2}} - \frac{1}{|z|}\right]$$

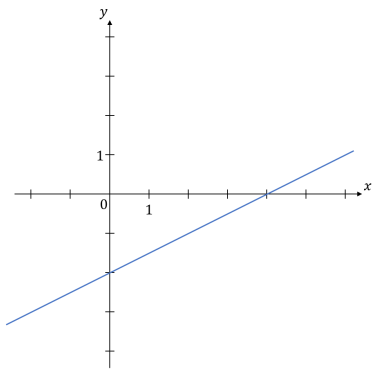
$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda z dz}{(x^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda z \frac{x}{z^2(x^2+z^2)^{1/2}}\Bigg|_0^L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{z}\frac{x}{(x^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\overrightarrow{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{L^2+z^2}} - \frac{1}{|z|}\right)\hat{x} + \frac{L}{z}\frac{1}{\sqrt{L^2+z^2}}\hat{z}\right]$$

Aktivnost 3. - Derivacija i integral

Cilj aktivnosti: Studenti će otkriti vezu funkcije i grafa derivacije funkcije.

Primjer 4.3.3. *Na slici je prikazan graf derivacije funkcije f(x). Odredite točku u kojoj funkcija ima ekstrem.*



Slika 4.2: Graf derivacije funkcije $f(x)$. Slika izrađena u PowerPointu.

Ako je F antiderivacija funkcije f, onda je $F + C$, gdje je C realni broj, antiderivacija funkcije f. Antiderivacije se razlikuju do na konstantu. Pretpostavimo da je konstanta C jednaka nuli i nacrtat ćemo graf funkcije $f(x)$.

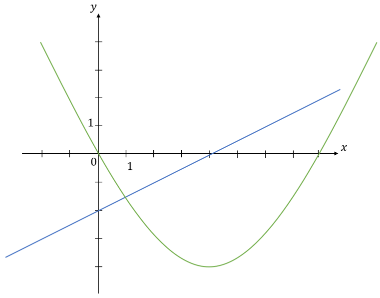
Iz grafa derivacije iščitamo jednadžbu pravca pomoću dvije nultočke $(4, 0)$ i $(0, -2)$:

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \tag{4.4}$$

Integrirajući izraz 4.4 dobijemo:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x \tag{4.5}$$

Skiciramo li oba grafa imamo sljedeću sliku 4.3:



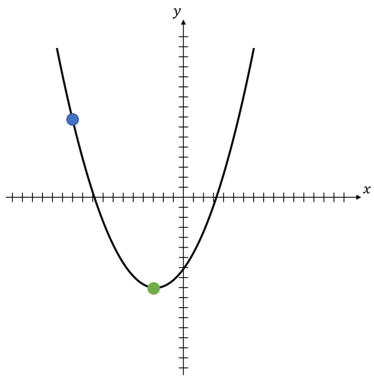
Slika 4.3: Grafovi $f(x)$ (zeleni) i $f'(x)$ (plavi). Slika izrađena u PowerPointu.

Iz grafa funkcije i njene derivacije možemo uočiti kako funkcija ima tjeme za neki $x = a$, što je upravo i nultočka njene derivacije $(a, 0)$.

Aktivnost 4. - Algoritam gradijentnog silaska [13]

Cilj aktivnosti: Studenti će otkriti algoritam gradijentnog silaska.

Primjer 4.3.4. *Pretpostavite da hodate duž grafa kao na slici koji predstavlja udolinu i trenutno se nalazite u plavoj točki. Vaš zadatak je doći do minimuma funkcije, ali iz svog položaja niste u mogućnosti vidjeti minimum funkcije, već se kretati samo naprijed i nazad. Pri objašnjavanju dolaska do zelene točke koristite gradijentom.*



Slika 4.4: Graf funkcije $f(x)$. Slika izrađena u PowerPointu.

Zanimaju nas odgovori na dva pitanja:

(1) ”U kojem smjeru se spustiti?”

U kojem smjeru se spustiti znači pomaknemo li se prema negativnijim ili pozitivnijim vrijednostima x, hoće li se vrijednosti funkcije $f(x)$ za "novu" vrijednost x smanjiti.

Nagib krivulje daje nam pozitivnu vrijednost kada se krivulja povećava i negativnu vrijednost kada se krivulja smanjuje. Nadalje, imajte na umu da će u određenoj točki, kada se krivulja povećava, definitivno postojati minimumi s njene lijeve strane, i obrnuto. Kombinirajući ove dvije činjenice dobivamo: "Kad je nagib krivulje pozitivan, tada se pomaknite lijevo, a kada je nagib negativan, pomaknite se desno - jer tu leže minimumi"

(2) "Koliko se spustiti u jednom koraku?"

Intuitivno, da bismo ubrzali rad algoritma, možda bismo htjeli odabrati što veću vrijednost. Iako se čini da je ova logika točna, postoji rizik od prekomjernog snimanja minimuma i time se algoritam usporava u konvergenciji, ili još gore, u razilaženju. Stoga je korak, u jednoj iteraciji, kojim se algoritam gradijentnog silaska spušta brzina učenja α.

Na gornjoj slici 4.4, nagib tangentne linije u zelenoj točki na koordinati x_0 je negativan, pa će njegova derivacija biti negativna. Derivacija u točki je samo broj, $f'(x) \leq 0$. Tada će pomak po x biti:

$$x = x_0 - f'(x) \cdot \alpha$$

Oduzimamo negativan broj od x, što ga čini većim. Točka će se pomaknuti udesno.
Proces se nastavlja sve dok algoritam ne dosegne minimum. Ali što to znači? Minimum, naime dno parabole, je točka u kojoj tangenta ima nagib nule: savršeno vodoravna linija. Derivacija takve vodoravne crte je 0, pa algoritam na kraju neće ništa dodati ili oduzeti od x_0:

$$x_0 = x - 0$$

U ovom se trenutku x više ne pomiče: dosegnut je minimum.

Aktivnost 5. - Ekvipotencijalne plohe

Cilj aktivnosti: Studenti će otkriti zašto je gradijent okomit na ekvipotencijalne plohe.

Primjer 4.3.5. *Zašto je gradijent okomit na ekvipotencijalne krivulje/plohe?*

Studenti će prvo razmisliti o odgovoru, a potom računski prikazati zašto je gradijent okomit na ekvipotencijalne plohe.

Pretpostavimo da imamo funkciju $w = f(x, y)$ koja ima ekvipotencijalne krivulje $f(x, y) = c$. Ovo nam daje vezu između x i y varijable i možemo pisati $y = y(x)$. Jednadžba krivulje sada je:

$$f(x, y(x)) = c$$

Koristeći lančano pravilo dobijemo sljedeću jednakost:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \tag{4.6}$$

Zadnja jednakost nam daje nagib ekvipotencijalne krivulje.
Sada, $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ čiji je nagib jednak:

$$\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x} \tag{4.7}$$

Ovaj nagib je negativan i recipročan nagibu ekvipotencijalne krivulje izračunate poviše.

Poglavlje 5

Zaključak

Naši studenti nisu "*tabula rasa*" te već samim dolaskom na studij Fizike imaju neka iskustva i unaprijed formirane koncepte kroz koji oni promatraju svaku novu dospjelu informaciju. Od studenata želimo intelektualnu angažiranost tijekom predavanja i vježbi te aktivno učenje kako bi produbili znanja i vještine.

Svako je učenje proces konstrukcije mentalnih modela u kojima se odvija ugradnja novih informacija u već postojeće formulirano znanje. Ukoliko student uspješno ugradi novu informaciju možemo reći da ju je razumio.

Ispitavši studentsko razumijevanje integrala i gradijenta uočili smo kako su studenti ostvarili bolje rezultate u razumijevanju integrala, kao i da su istraživački smjerovi imali bolji postotak točne riješenosti.

Studenti su bolje riješili zadatke u kojima se tražilo objašnjenje (npr. kada su pitani za mjernu jedinicu dt, bolja riješenost je bila u prvom konceptualnom testu u kojem smo ispitali i fizikalno značenje diferencijala dt). Kod sličnih primjera mogli smo uočiti da bolji postotak točne riješenosti imaju oni primjeri koji se češće pojavljuju u nastavi. Razumijevanje jednog koncepta traži snalaženje u raznim područjima fizike.

Na studiju fizike trebalo bi poboljšati studentsko razumijevanje gradijenta, koristiti više primjera i riješavati jednostavne ali trodimenzionalne slučajeve u kojima se koristi gradijent. Kod čisto matematičkog računa gradijenta funkcije u odabranoj točki, primjetili smo kako studenti nisu osvjestili gradijent kao vektor. Pojedini studenti su pri računu gradijenta miješali koncepte vektora i skalara.

Na kraju diplomskog rada predloženo je par aktivnosti i radionica čiju efikasnost nažalost nismo imali vremena za provjeriti, ali ono može poslužiti za daljnji smjer istraživanja.

Sa sigurnošću možemo tvrditi da student razumije ili ne razumije neki koncept tek kada se traži i objašnjenje odabranog izbora. Smatram da je prvi test bio bolji za uočavanje poteškoća, a drugi je bolji za ispitivanje učestalosti pojedinih teškoća.

I da opet ponovimo za kraj glavni cilj ovog diplomskog je da naši studenti postani vještiji matematičari i da uklonimo pojedine poteškoće prilikom korištenja matematike u fizici.

Dodatak A

Konceptualni test II

Integral

Zadatak 1. Biciklist odluči napumpati jednu od guma na biciklu. Pumpa je oblika cilindra ispunjenog zrakom s pomičnim klipom. Zrak unutar cilindra je pri tlaku p i cilindar ima površinu poprečnog presjeka A. Napiši jednadžbu (sa znakom jednakosti) za rad koji je biciklist obavio prilikom sabijanja pumpe za infinitezimalno malu duljinu dx.

A. $dW = PAdx$

B. $W = PAdx$

C. $PAdx$

D. $dW = \frac{P}{A}dx$

E. $W = \frac{P}{A}dx$

F. $\frac{P}{A}dx$

Zadatak 2. Žica duljine l sadrži naboj Q ravnomjerno raspoređen po svojoj duljini. Pronađite izraz za količinu naboja sadržane u duljini dl duž žice.

A. Qdl

B. $QLdl$

C. σdl

D. ρdl

E. $\frac{Q}{L}$

F. $\frac{Q}{L}dl$

Zadatak 3. Elektron u magnetskom polju ubrzava akceleracijom a (u metrima / sekundi^2) u trenutku t (u sekundama). Što od sljedećeg najbolje opisuje adt?

A. Ubrzanje elektrona u jednom trenutku.

B. Brzina promjene akceleracije elektrona mijenja se kako vrijeme prolazi.

C. Brzina promjene brzine elektrona mijenja se kako vrijeme prolazi.

D. Izuzetno mala promjena brzine elektrona.

E. Brzina elektrona u jednom trenutku.

Zadatak 4. Automobil putuje po pravcu. Između vremena t_1 i t_2 (u sekundama), on ima brzinu po pomaku v izraženu u metrima po sekundi. Što od navedenog najbolje opisuje integral $\int_{t_1}^{t_2} vdt$?

A. Ukupna brzina auta u vremenu između t_1 i t_2.

B. Ukupna promjena položaja automobila u vremenu između t_1 i t_2.

C. Prosječna brzina automobila u vremenu između t_1 i t_2.

D. Ukupna promjena brzine automobila u vremenu između t_1 i t_2.

E. Prosječni položaj automobila u vremenu između t_1 i t_2.

Zadatak 5. Dok lopta pada s visine h, štoperica se koristi za mjerenje vremena t (u sekundama). Što od sljedećeg prikazuje moguće jedinice za dt?

A. metara/sekundi

B. nema jedinicu

C. sekundi/metar

D. 1/sekundu

E. sekunde

Zadatak 6. Biciklist se vozi konstantnom brzinom v (u metrima / sekundi) u trenutku t (u sekundama). Što od sljedećeg prikazuje moguće jedinice za vdt?

A. metara/sekundi^2

B. metara/sekundi^3

C. metara/sekundi

D. metara

E. nema jedinicu

Zadatak 7. Automobil putuje po pravcu. Između vremena t_1 i t_2 (u sekundama), on ima brzinu po pomaku v izraženu u metrima po sekundi. Što od navedenog najbolje opisuje integral $\int_{t_1}^{t_2} vdt$?

A. nema mjernu jedinicu

B. metara / sekudni

C. metara

D. metri · sekunde

Zadatak 8. Student: "Mjerna jedinica izraza $\int \frac{dp}{dt}dx$ mora biti ista kao i od p jer integral derivacije vraća originalnu funkciju." Slažete li se ili se ne slažete sa studentom?

A. slažem se

B. ne slažem se

Zadatak 9. Studenti sada raspravljaju o veličinama dx i F_1dx pr čemu je F_1 sila u smjeru dx. S kojim se studentom najviše slažete? Objasnite svoj odgovor.

Student A: Definitivno sam vidio dx u derivacijama. Veličina F_1dx govori o promjeni F_1. Onda najvjerojatnije ima mjernu jedinicu [N]/[m] što znači sila po putu.

Student B: Zapravo mislim da $F_1 dx$ nam govori koji je rad obavljen na kutiji tijekom puta dx tako da bi mjerna jedinica bila [N][m] jer je dx put u [m].

Student C: Oboje ste u krivu. Govori nam da je to sila u jednoj trenutnoj poziciji. Tada dx nema nikakvo posebno značenje ili mjernu jedinicu sam za sebe osim toga što nam govori da je nešto trenutno.

A. Student A

B. Student B

C. Student C

Zadatak 10. Studenti raspravljaju o veličinama $F_1 dx$ i $F_1 \Delta x_1$, pri čemu je sila F_1 sila u smjeru dx. S kojim se studentom najviše slažete? Objasnite svoj odgovor.

Student A: Ja sam poprilično siguran da su $F_1 dx$ i $F_1 \Delta x_1$ ista stvar i da nema velike razlike među njima. Oboje predstavljaju količinu rada i identični su.

Student B: Zapravo, postoji jedna važna razlika između njih: Δx_1 je konačna količina pomaka, a dx je infinitezimalna količina pomaka. Stoga mislim da je $F_1 dx$ beskonačno mala količina rada, a da je $F_1 \Delta x_1$ konačna količina rada.

Student C: Postoji razlika zasigurno. Sjećam se da je dx u osnovi nula, pa je $F_1 dx$ nula količine rada, što se zapravo uopće ne broji.

A. Student A

B. Student B

C. Student C

Gradijent

Zadatak 1. Izračunaj gradijent funkcije $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ u točki $(3, 4, 5)$.

A. $1 + 2y + 3z$

B. 84

C. 86

D. $(1, 2y, 3z)$

E. $(1, 8, 75)$

F. $(3, 8, 75)$

Zadatak 2. Ako znamo potencijal u jednoj točki prostora, kako možemo izračunati električno polje u toj točki?

A. Električno polje tada računamo kao omjer potencijala i probnog naboja.

B. Električno polje tada računao kao umnožak potencijala i probnog naboja.

C. Električno polje tada računamo kao negativni gradijent potencijala u toj točki.

D. Električno polje računamo kao gradijent potencijala u toj točki.

E. Ne možemo izračunati električno polje.

Zadatak 3. Na grafu na slici prikazana je raspodjela ekvipotencijalnih linija u dvodimenzionalnom kartezijevom sustavu. Pretpostavite da se potencijal linearno smanjuje u smjeru $-y$ i nema lokalne fluktuacije, koje bi utjecale na lokalno polje. Odredite smjer vektora električnog polja upotrebom gradijenta potencijala.

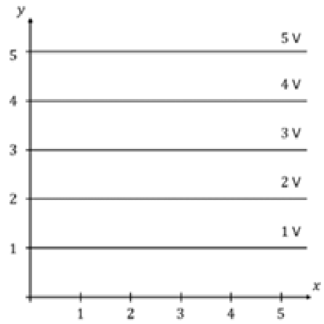
A. $+x$ smjer

B. $-x$ smjer

C. $+y$ smjer

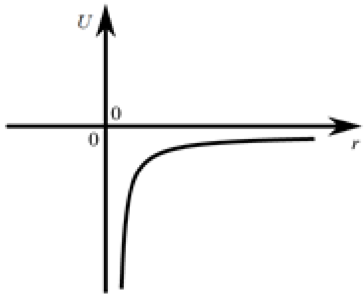
D. $-y$ smjer

E. u smjeru kazaljke na satu



F. u smjeru suprotnom od kazaljke na satu

Zadatak 4. Električna potencijalna energija U naboja q i Q na međusobnoj udaljenosti r prikazana je na grafu. Naboj Q smješten je u ishodištu.



Što veličina dU/dr u bilo kojoj točki predstavlja?

A. Jakost električnog polja u promatranoj točki

B. Iznos sile na naboj q u promatranoj točki.

C. Potencijalnu energiju naboja q.

D. Akceleraciju naboja q.

E. Potencijalnu energiju u promatranoj točki.

Zadatak 5. U danom području prostora električni potencijal je zadan

$$V(x, y, z) = A + Bx + Cx^3 + Dxy$$

gdje su A, B, C i D su pozitivne konstante. Koje od ovih tvrdnji su točne za električno polje u tom području prostora?

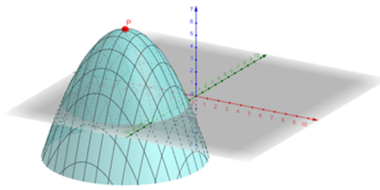
A. Povećanje konstante A, povećat će se električno polje u svim točkama prostora.

B. Smanjenje konstante A, smanjit će se električno polje u svim točkama prostora.

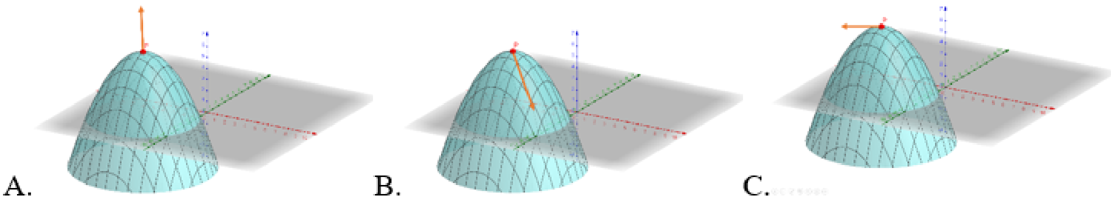
C. Električno polje nema z komponentu.

D. Električno polje u ishodištu koordinatnog sustava jednako je 0.

Zadatak 6. Na slici je prikazan graf skalarne funkcije f i točke P. Koja od ponuđenih

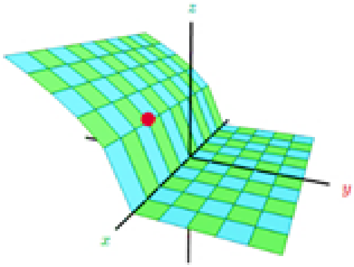


slika prikazuje gradijent funkcije f u točki P?

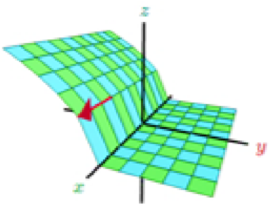


D. Gradijent funkcije f u točki P jednak je nula.

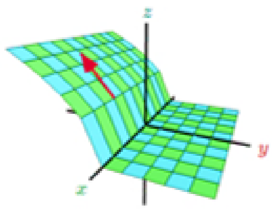
Zadatak 7. Na slici je prikazan graf skalarne funkcije f i točke P.



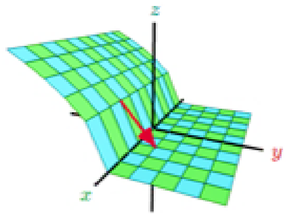
Koja od ponuđenih slika prikazuje gradijent funkcije f u točki P?



A.



B.



C.

D. Gradijent funkcije f u točki P jednak je nula.

Bibliografija

[1] Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Fizike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_10_210.html, 29.8.2021.

[2] Jelovica, Erceg, Kvalitativne i kvantitativne metode istraživanja u edukacijskoj fizici, Zbornik radova XV. hrvatskog simpozija o nastavi fizike, 7.-8. travnja 2021.

[3] L. Ding and X. Liu, Getting Started with Qualitative Methods in Physics Education Research, PER, 2, (2012.)

[4] All about gradient https://www.resourceaholic.com/2014/06/all-about-gradient.html (posjet: 31.8.2021.)

[5] Khan Academy https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/partial-derivative-and-gradient-articles/a/the-gradient (posjet: 21.2.2021.)

[6] V. K. Otero and D. B: Harlow, Getting Started with Qualitative Physics Education Research, PER, 2, (2009.)

[7] V. Lamza Posavec, Metode društvenih istraživanja, Institut društvenih znanosti Ivo Pilar, Zagreb 2004.

[8] Steven R. Jones. Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. The Journal of Mathematical Behavior, 38:9–28, Jun 2015.

[9] Guljaš, B. Matematička analiza 1 i 2, predavanja PMF

[10] Griffiths, D. J. Introduction to electrodynamics. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 1999.

[11] Nathaniel R. Amos, B.S., M.S. Graduate Program in Physics The Ohio State University 2017; Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy in the Graduate School of The Ohio State University

[12] Dehui Hu, Understanding introductory students' application of integrals in physics from multiple perspectives, B.S., University of Science and Technology of China, 2009

[13] Algoritam gradijentnog silaska `https://medium.com/@rndayala/gradient-descent-algorithm-2553ccc79750` (posjet: 2.9.2021.)

Sažetak

Ukratko, diplomski rad je napisan s ciljem istražiti razumjevanje u primjeni matematičkih koncepata kod studenata Fizičkog odsijeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Matematički koncpeti koje smo provjeravali su integrali i gradijenti. Istraživanje se sastojalo od nekoliko koraka. Prvo smo u razgovoru sa starijim studentima istražili koji su im matematički koncepti zadavali najviše problema tijekom fakultetskog obrazovanja. Nakon toga smo dali pitanja otvorenog tipa ne bi li se skupilo sto više smjerova razmišljanja i ponudilo kasnije u testu zatvorenog tipa kao odgovore što smo onda proveli na većem uzorku ispitanika. Istraživanje smo proveli pomoću konceptualnog testa u online formatu na platformi Microsoft Forms. Kod integrala ispitali smo pretvaranje fizikalnog problema u matematički izraz, fizikalnu interpretaciju pojedinih matematičkih simbola i izraza te mjerne jedinice fizikalnih veličina. U dijelu ispitivanja razumijevanja gradijenta provjerili smo znaju li studenti računski pronaći vektor gradijenta u određenoj točki funkcije, ponudili smo im neke zadatke iz elektrodinamike u kojima smo htjeli provjeriti njihovu primjenu te na kraju i grafičko određivanje vektora gradijenta u danoj točki. U jednom od koraka istraživanja provjerili smo i proporcionalnost i omjere koji su ostali kao uvod za daljnja proučavanja i ispitivanja. Na kraju diplomskog rada predložili smo način uklanjanja uočenih poteškoća.

Ključne riječi: integral, gradijent, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Fizički odsjek

Summary

The graduate thesis was written with the intention of investigating the understanding of the application of mathematical concepts with the students of the Physics department at the Faculty of Science at the University of Zagreb. The mathematical concepts which were inspected were integrals and gradients. The research consisted of a few steps. Firstly, through a conversation with the older students at the university, we tried to find out which mathematical concepts gave them the most trouble throughout their education at the university. Afterwards, we gave out open-type questions so we could collect as many opinions from students from different departments, and later on, offered closed-type questions, which we carried out across a larger number of respondents. The research was carried out through a conceptual exam in an online form through the platform of Microsoft Forms. When it came to integrals, we examined the conversion of problems in physics into mathematical expressions, the physical interpretation of individual mathematical symbols and expressions, and then the metric units of physical quantities. In the part of the research where we examined the understanding of the gradient, we inspected if the students knew how to numerically find the vector of the gradient at a given point. In one of the steps of the research, we inspected the proportions and the rations which remained as an introduction to further studies and research. At the end of the thesis, we suggested a way to eliminate the said difficulties.

Key words: integral, gradient, University of Zagreb Faculty of Science, Department of Physics

Životopis

Rođena sam 24. listopada 1997. godine u Dubrovniku. Pohađala sam Osnovnu školu Marina Držića u Dubrovniku, a potom upisujem Gimnaziju Dubrovnik, smjer: prirodoslovno matematička gimnazija. Srednjoškolsko obrazovanje završavam 2016. godine, a iste godine upisujem sveučilišni integrirani preddiplomski i diplomski studij Matematika i fizika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Na petoj godini studiranja (2021. godine), osvojila sam Dekanovu nagradu za izuzetan uspjeh na studiju.

Tijekom studija bila sam demonstratorica iz kolegija: Osnove fizike 1, Osnove fizike 2, Osnove fizike 3, Osnove fizike 4, Elementarna geometrija i Konstruktivne metode u geometriji.