# Povijesni pregled brojevnih sustava

Vukčević, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Vukčević

# POVIJESNI PREGLED BROJEVNIH SUSTAVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Igor Ciganović, doc. dr. sc.

Zagreb, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Veliku zahvalnost dugujem mami, tati, Luki, Kristijanu te svim prijateljima koji su mi bili podrška u izazovima studiranja.*
*Hvala i mentoru doc. dr. sc. Igoru Ciganoviću na trudu i pomoći pri izradi ovog diplomskog rada.*

# Sadržaj

# Uvod

Brojevi su svuda oko nas pa se ne možemo ne zapitati kakav je bio njihov razvoj. Kada i gdje su se pojavili? Jesu li izgledali onako kako danas izgledaju? Kako su ljudi nekada računali? Na ova, ali i mnoga druga pitanja, odgovore će pokušati dati ovaj diplomski rad. Uz kratak povijesni kontekst, primjere računanja te poneku zanimljivost, opisan je razvoj brojevnih sustava u Egiptu, Mezopotamiji, Grčkoj, Rimu, Kini, Indiji te kod Arapa i Hrvata.

Kako bi se lakše shvatio razvoj brojevnih sustava, na početku rada su definirani brojevni sustavi. Brojevne sustave možemo razlikovati po strukturi (npr. aditivni), jesu li položajni ili ne te po bazi. Brojevni sustav koji danas koristimo je položajni, aditivno-multiplikativni i dekadski (decimalni).

Povijesni pregled razvoja brojevnih sustava započinjemo pričom o pramatematici. Ljudi nekada nisu shvaćali brojeve onako kako ih mi danas shvaćamo. Shvaćali su razliku između jednog vuka ili više njih, no ne i razliku između pet ili šest vukova. Prva su se računanja (prebrojavanja) vršila pomoću prstiju, kamenih oblutaka, zareza na kostima ili komadima drva te čvorova na užadi.

Kada vidimo da netko ima neuredan rukopis često kao pošalicu znamo reći da piše hijeroglifima. Ipak, egipatski hijeroglifi su puno više od toga. Oni predstavljaju različite prikaze iz stvarnog života (ljude, životinje...). Izumom papirusa hijeroglife zamjenjuju hijeratski znakovi. Egipatski je brojevni sustav bio dekadski i aditivan, a zbrajanje i oduzimanje je bilo lako. Egipćani su znali množiti i dijeliti te su koristili razlomke.

U Mezopotamiji se koristio seksagezimalni brojevni sustav u kombinaciji s klinastim pismom. Babilonci su poznati po korištenju aritmetičkih tablica koje su nastale zahvaljujući njihovoj naprednoj matematici. Poznavali su i Pitagorin poučak čak 1000 godina prije Pitagorina rođenja.

Osim što su poznati po Olimpijskim igrama, Grci su poznati i po matematici. Koristili su akrofonski (atički) brojevni sustav te kasnije alfabetski. Znali su dokazati da dijagonala kvadrata nije sumjerljiva stranici kvadrata što danas interpretiramo kao iracionalnost broja $\sqrt{2}$.

Rimski se brojevni sustav i danas ponekad koristi, no njegova je uporaba estetske prirode. On je aditivno-suptraktivni brojevni sustav, a računanje je često teško. Iz tog su razloga Rimljani, kao i mnogi drugi narodi, koristili abakus.

U Kini su se koristile štapićaste brojke te pozicijski brojevni sustav. Kod računanja se i danas često koristi abakus.

Razvoj brojeva u Indiji kreće od brahmanskih preko gupta do nagari znamenki. Brojevni je sustav bio pozicijski, a postoje naznake da su Indijci već u 6. st. poznavali nulu. Arapi su koristili nekoliko brojevnih sustava, no najznačajniji je bio dekadski pozicijski brojevni sustav kojeg su preuzeli od Indijaca, zajedno sa znamenkama. Razvoj današnjih znamenki potječe od znamenki koje su koristili Arapi sa zapada. Indijci i Arapi su u početku računali pomoću abakusa, a postepeno su svoje metode prilagođavali uporabi papira.

Hrvati su glagoljicom počeli pisati u 9. st., a glagoljske brojeve pronalazimo na poznatoj Baščanskoj ploči. Brojevi su se zapisivali na način da se stavio kvadratić ispred i iza odgovarajućeg glagoljskog slova. Što se tiče računanja, Hrvati su imali zanimljiv način množenja "na ruke".

Povijesni pregled brojevnih sustava završavamo binarnim brojevnim sustavom koji se koristi u računalima i elektroničkim uređajima. Pozicijski je i aditivno-multiplikativni.

Zapis pojedinih znamenki često se razlikovao od naroda do naroda ili tokom godina unutar jedne civilizacije. U ovome su radu prikazani najzastupljeniji i najznačajniji zapisi.

# Poglavlje 1

# Brojevni sustavi

## 1.1 O brojevnim sustavima

Prema [6], brojevni je sustav način zapisivanja brojeva i njihova tumačenja, a sastoji se od skupa znamenki i pravila za pisanje znamenki.

Brojevni su sustavi po strukturi najčešće aditivni ili aditivno-multiplikativni (v. [11]).

- Kod **aditivnog brojevnog sustava** broj se predočava zbrajanjem vrijednosti pojedinih znakova.
- Kod **aditivno-suptraktivnog brojevnog sustava** broj se predočava zbrajanjem, ali i oduzimanjem vrijednosti pojedinih znakova.
- **Aditivno-multiplikativni brojevni sustav** rabi znakove čije se vrijednosti međusobno zbrajanju i množe.

Brojevne sustave možemo podijeliti na položajne (pozicijske) i nepoložajne (nepozicijske) (v. [11]).

- **Položajni brojevni sustav** prikazuje brojeve znamenkama kojima vrijednost ovisi o položaju u zapisu broja. Vrijednost znamenaka prema lijevo množi se s odgovarajućim potencijama baze što znači da znamenka koja se nalazi na posljednjem mjestu ima vlastitu vrijednost (množi se s $b^0 = 1$, gdje je $b$ baza), slijedeća se znamenka množi s $b^1$ itd.
- **Nepoložajni brojevni sustav** prikazuje brojeve znamenkama kojima vrijednost ne ovisi o položaju u zapisu broja.

Indijsko-arapski brojevni sustav kakvim se danas koristimo je položajni i aditivno-multiplikativni. To znači da vrijednost prve znamenke 2 u 2021. godini ima vrijednost 2 000, vrijednost znamenke 2 na trećem mjestu ima vrijednost 20, tj. vrijednost znamenke ovisi o položaju te vrijedi

$$2021 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0. \tag{1.1}$$

Rimski brojevni sustav, kojeg ćemo kasnije detaljnije opisati, je primjer nepoložajnog te aditivno-suptraktivnog brojevnog sustava. Primjer aditivnosti uočavamo kod broja XX gdje zbrajamo vrijednosti svih znamenki, tj. vrijedi XX = 10 + 10 = 20. Korištenje oduzimanja vidimo na primjeru broja XXIX. Vrijedi $10 + 10 + (10 - 1) = 29$ (v. [11]).

Brojevne sustave možemo podijeliti i prema osnovici ili bazi. Tako brojevi sustavi mogu biti dekadski (baza 10), binarni (baza 2), oktalni (baza 8), heksadekadski (baza 16) itd. (v. [11]). Dekadski brojevni sustav ima najširu primjenu, binarni, oktalni i heksadekadski se koriste u računalima, a seksagezimalni (baza 60) djelomično kod mjerenja vremena i kutova.

Broj znamenaka u nekom sustavu naziva se baza brojevnog sustava (v. [6]). Najmanja znamenka svakog sustava je 0, a najveća je znamenka za jedan manja od baze. Uzmimo za primjer dekadski brojevni sustav (baza 10) kojemu su znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9.

Prema ([11]), neki slijed znamenaka u različitim brojevnim sustavima može predstavljati različite brojeve. U dekadskom brojevnom sustavu znamenke 11 predstavljaju broj jedanaest, a u binarnom brojevnom sustavu broj tri. Kako ne bi došlo do nesporazuma, bazu možemo označiti indeksom s desne strane broja (npr. $11_{10}$ ili $11_2$).

## 1.2 Zapisivanje brojeva u različitim brojevnim sustavima

Na primjeru broja 2021 (v. 1.1) smo pokazali kako se računa vrijednost broja u dekadskom brojevnom sustavu, no sličan postupak možemo primijeniti i na drugim brojevnim sustavima.

**Primjer 1.2.1.** *Računanje vrijednosti broja* $145_5$ *u dekadskom brojevnom sustavu.*

$$\begin{aligned} 145_5 &= 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 5 \cdot 5^0 \\ &= 1 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \\ &= 50_{10} \end{aligned}$$

Ako želimo broj zadan u sustavu s bazom većom od 10 prikazati u dekadskom brojevnom sustavu, koristimo velika slova engleske abecede. Tada je vrijednost znamenke A jednaka 10, znamenke B 11, C 12 itd.

**Primjer 1.2.2.** *Prikazivanje broja* $2A9_{12}$ *u dekadskom brojevnom sustavu.*

$$\begin{aligned} 2A9_{12} &= 2 \cdot 12^2 + A \cdot 12^1 + 9 \cdot 12^0 \\ &= 2 \cdot 144 + 10 \cdot 12 + 9 \cdot 1 \\ &= 288 + 120 + 9 \\ &= 417_{10} \end{aligned}$$

Ako želimo primijeniti obrnuti postupak, tj. prikazati broj zapisan dekadskim brojevnim sustavom u nekom drugom sustavu, broj ćemo uzastopno dijeliti brojem koji je baza željenog sustava i zapisivati cjelobrojne ostatke. Kada će rezultat dijeljenja biti 0, ostaci se zapisuju redom od dolje prema gore te predstavljaju zapis broja u željenoj bazi (v. [6]).

**Primjer 1.2.3.** *Prikazivanje broja* $417_{10}$ *u sustavu s bazom 12.*

| | ostatak |
|---|---|
| 417 : 12 = 34 | 9 |
| 34 : 12 = 2 | 10 = A |
| 2 : 12 = 0 | 2 ↑ |

Tablica 1.1: $417_{10} = 2A9_{12}$

Vrijedi $417_{10} = 2A9_{12}$.

# Poglavlje 2

# Pramatematika

## 2.1 Kada nastaje matematika?

Riječ matematika vuče korijene iz Grčke riječi *mathemata* koja je u ranim zapisima označavala bilo koji oblik uputa ili učenja. Kako se znanost razvijala, javila se potreba da se navedeni izraz ograniči na određeno područje. Pitagorejci su pod izrazom *mathemata* proučavali aritmetiku i geometriju koje su ranije bile zasebno proučavane. Pitagorejska poveznica riječi matematika s područjima algebre i geometrije stvara dojam da matematika kao takva započinje u Klasičnoj Grčkoj (600. - 300. pr. Kr.), no njena povijest seže mnogo dalje, navodi Burton ([3], str. 1). Već prije 20 000 godina ljudi su imali potrebu brojati stoku, objekte za razmjenu ili dane. Međutim, razvoj brojanja i računanja, zajedno s riječima za brojeve i simbolima, je bio postepen pa je nemoguće odrediti točno vrijeme nastanka.

## 2.2 Pramatematika

Boyer ([2], str. 3) smatra kako su prvotna shvaćanja brojeva bila više povezana s kontrastom objekata, nego sličnošću. Ljudi su shvaćali razliku između jednog vuka i više njih, nejednakost u veličini ribe bjelice i kita, razliku u zakrivljenosti Mjeseca i ravnog drveta. Postepeno su ljudi počeli shvaćati da u kaosu postoji jednakost, a na temelju sličnosti u brojevima i oblicima znanost i matematika su rođene. Razlike su ukazivale na jednakost. Naime, razlika između jedne ovce i stada, između jednog stabla i šume, jednog vuka i više njih ukazuje da jedna ovca, jedno stablo i jedan vuk imaju nešto zajedničko - njihovu jedinstvenost. Na isti način možemo promatrati i parove. Opisani razvoj apstrakcije matematike vjerojatno je nastao jednako rano kao i čovjekovo otkriće vatre (prije cca. 300 000 godina), navodi Boyer. Da je opisani razvoj bio dug i postepen sugerira nam činjenica da u nekim jezicima (npr. Grčki) postoji istaknuta razlika između jedan, dva i više od dva, dok u većini jezika danas postoji usporedba između jednine i množine.

Prema [3], teško da je postojala kultura koja nije imala svijest o brojevima. Neka su plemena Aboridžina u Australiji brojala do dva. Sve brojeve veće od dva su nazivali "puno" (eng. *much/many*). Južnoamerički Indijanci koji su živjeli uz pritoke rijeke Amazone znali su brojati do šest, no imena su imali samo za brojeve jedan i dva. Broj tri su nazivali "dva-jedan", broj četiri "dva-dva" itd. Sličan su sustav koristili i Bušmani u Južnoj Africi. Oni su znali brojati do deset, ponovno koristeći samo dvije riječi ($10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$). Za brojeve veće od deset fraze su bile prekomplicirane. Zanimljivo je kako takva plemena nisu željela mijenjati npr. dvije krave za četiri svinje, ali nisu imali problema s razmjenom jedne krave za dvije svinje i druge krave za još dvije svinje.

Prsti jedne ruke predstavljali su setove od dva, tri, četiri ili pet objekata, dok se broj jedan na početku nije smatrao "brojem", navodi Boyer ([2], str. 3). Prsti na obje ruke i na obje noge prikazivali su setove sa do dvadeset objekata. Kada prsti nisu bili dovoljni, koristili su se kameni oblutci. Kameni su oblutci predstavljali vezu s brojem objekata nekog seta, a često su bili grupirani po pet (vjerojatno zbog poveznice s pet prstiju jedne ruke).

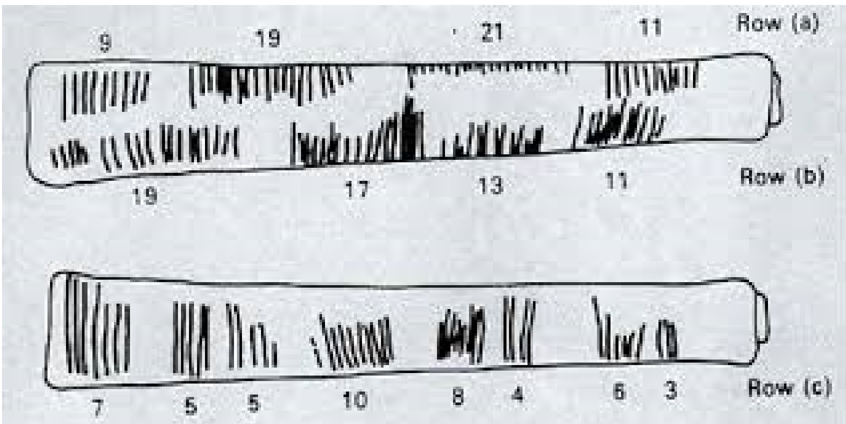
Ako se željelo prebrojati ovce, onda su se one puštale kroz uski prolaz i za svaku se ovcu bacio jedan oblutak. Dok je stado bilo zatvoreno tokom noći, oblutci su se premještali s jedne hrpe na drugu dok se tako sve ovce nisu prebrojale. Kada se trebala proslaviti pobjeda, sporazum ili osnutak sela, često su se gradili stupovi u kojima je po jedan kamen predstavljao svaku prisutnu osobu (v. [3], str. 2).

Ifrah ([13]) navodi kako su ljudi nekada imali percepciju brojeva od 1 do 4. Za više od toga trebalo je naučiti računati što podrazumijeva razvoj vještina za manipulaciju brojeva te u svrhu razvoja pamćenja i komunikacije razvoj lingvističkog instrumenta tj. imena brojeva. Kasnije je trebalo razviti i način zapisivanja brojeva. Ipak, brojati se ne mora na način na koji smo mi to naučili, a gore opisani modeli su pravi primjer toga.

Iako hrpe kamenja, razumljivo, nisu povijesno očuvane, očuvani su čvorovi koji se sastoje od konopaca različitih dužina ili boja te kosti, komadići drveta i kamena na kojima su ljudi zarezima označavali brojčane zapise. Jedan zarez predstavljao je jedan objekt, a često su bili grupirani po pet. Takav način bilježenja datira 30 000 god. pr. Kr. Jedan od takvih primjera je kost mladog vuka pronađena 1937. god. na području tadašnje Čehoslovačke. Kost je duga otprilike 7 inča (17.78 cm) te sadrži 55 dubokih zareza. Zarezi su uglavnom podjednake dužine te grupirani po pet. Dugo se godina smatralo kako zarezi predstavljaju broj životinja ubijenih u lovu. Novije teorije govore kako su ljudi pomoću tih zareza računali vrijeme. Jedan je takav primjer pronađen i u špilji u Francuskoj (cca. 1880. god.).

Zarezi na toj kosti grupirani su u nizove ponavljajućih brojeva te odgovaraju broju dana uzastopnih faza mjeseca što nas navodi da pomislimo da se radi o lunarnom kalendaru, navodi Burton ([3], str. 2). Prema Boyeru ([2], str. 4), navedene su kosti dokaz da je ideja brojeva starija od tehnoloških otkrića poput uporabe metala ili izuma kotača. Brojevi su stariji od civilizacija i pisanja u uobičajenom smislu tih riječi.

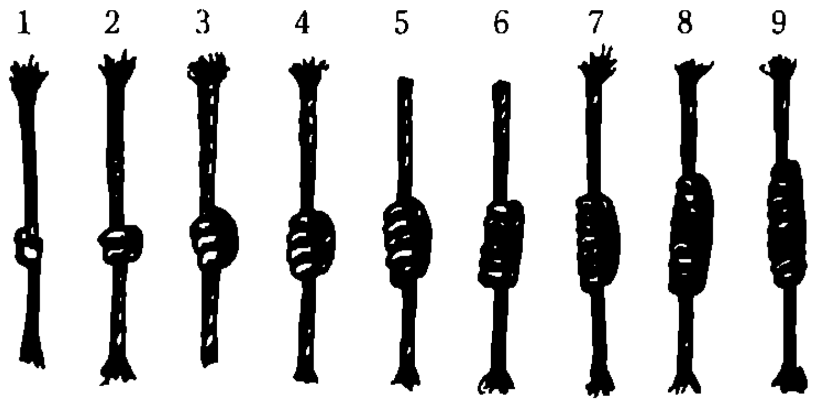
Sličan je primjer kosti iz Išanga (obala jezera Edward, jedan od izvora rijeke Nil). Dokazi datiraju 17 500 god. pr. Kr. te se vjeruje da je ovaj fosil drška alata koji se koristio za graviranje, tetoviranje ili pisanje u nekom obliku. Na sebi sadrži zareze podijeljene u 3 kolone (v. 2.1) te se čini kako ta podjela nije dekorativna. U jednom od stupaca grupe se sastoje od 11, 21, 19 i 9 zareza. Osnovni obrazac mogao bi biti 10 + 1, 20 + 1, 20 − 1 i 10 − 1. Zarezi su u drugom stupcu podijeljeni u osam grupa u sljedećem poretku: 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 7. Ovaj nam poredak sugerira množenje brojem 2. Posljednji stupac ima četiri grupe koje se sastoje od 11, 13, 17 i 19 zareza. Redoslijed je možda slučajan i ne implicira proste brojeve. S obzirom na to da je suma prvog stupca jednaka sumi drugog i iznosi 60, tj. $11+21+9+9 = 60$ i $11+13+17+19 = 60$, postoji mogućnost da je kost zapravo lunarni kalendar, tj. da prvi i treći stupac prikazuju dva lunarna mjeseca, navodi Burton ([3], str. 3).




Slika 2.1: Crtež kosti iz Išanga sa zarezima (preuzeto iz [1])

Burton ([3], str. 3.-4.) navodi mnoštvo drugih primjera uporabe zareza, ne samo u primitivnih naroda. Iako su oblutci i kosti sa zarezima jedni od najstarijih oblika vođenja evidencije, koristili su se i u novom vijeku. Od 12. st. u Velikoj Britaniji ravni su se komadići drva lješnjaka koristili kao zadužnice ili mjenice. Zarezi su bili različitih veličina i oblika, a svaki je predstavljao određeni iznos novca. Širina zareza je označavala vrijednost novca. Tako je npr. zarez koji je predstavljao £1 000 bio širine ruke, zarez za £100 bio debljine palca, a zarez za £20 debljine malog prsta. Kad je dan zajam, štap sa zarezima je bio prepolovljen. Na taj su način obje strane zadržale po jednu polovicu štapa i transakcija je mogla biti provjerena spajanjem dviju polovica. Opisana je praksa ukinuta 1826. godine po nalogu parlamenta.

Osim zareza, neki su narodi koristili čvorove kako bi brojali dane ili objekte. Herodot (Grčka, 5. st. pr. Kr.) je u svom djelu *Povijest* napisao da je perzijski kralj Darije I. Veliki dao Jonjanima uže zavezano u čvorove da im služi kao kalendar. Narod Inka koji je živio na području današnjeg Perua također je koristio užad s čvorovima (*quipu*) kao izvješće o službenim transakcijama vezanim uz zemlju ili građane. *Quipu* je bila važna Inkama jer nije postojao drugi oblik zapisivanja (v. [3], str. 5.). Sastojala se od glavnog debelog konopa na kojeg su dodani drugi konopci različitih duljina i boja. Svaki je konop predstavljao drugi objekt koji se brojao, npr. jedan je konop prikazivao broj ovaca, a drugi broj koza. Korišten je decimalni sustav na način da su jedinice prikazane na dnu užadi, iznad njih su bile desetice itd. Uže bez čvorova označavalo je nulu. Prema Ifrahu [13], i danas neki narodi na području Bolivije i Perua koriste slične naprave za brojanje - tzv. *chimpu*.




Slika 2.2: Užad *quipu*: prvih devet brojeva (preuzeto iz [13], str. 68.)

# Poglavlje 3

# Egipat

## 3.1 Povijesni pregled

”Egipat je dar Nila” poznata je uzrečica koja opisuje Egipat koji se razvio na plodnom tlu uz rijeku Nil. Između 3500. i 3100. god. pr. Kr. poljoprivredne su se zajednice na obali rijeke Nil postepeno sjedinjavale u veće zajednice, sve dok nisu nastala dva kraljevstva - Gornji i Donji Egipat. Oko 3100. god. pr. Kr. dva su se kraljevstva ujedinila zbog vojnih osvajanja s juga. Osvajanja je predvodio Meneš kojeg danas smatramo prvim faraonom Egipta. S obzirom na to da je Egipat okružen pustinjama koje su ga štitile od invazija, jedna je od najstabilnijih i najdugovječnijih antičkih civilizacija. Trideset i dvije dinastije vladale su Egiptom od ujedinjenja dvaju kraljevstva do Kleopatrina kraja 31. god. pr. Kr. Potreba za brojevima i aritmetikom pojavila se čim je Egipat ujedinjen. Trebalo je provesti popis stanovništva, nametnut je porez, koristio se kalendar itd. Već oko 3500. god. pr. Kr. Egipćani su imali razvijen brojevni sustav, navodi Burton [3].

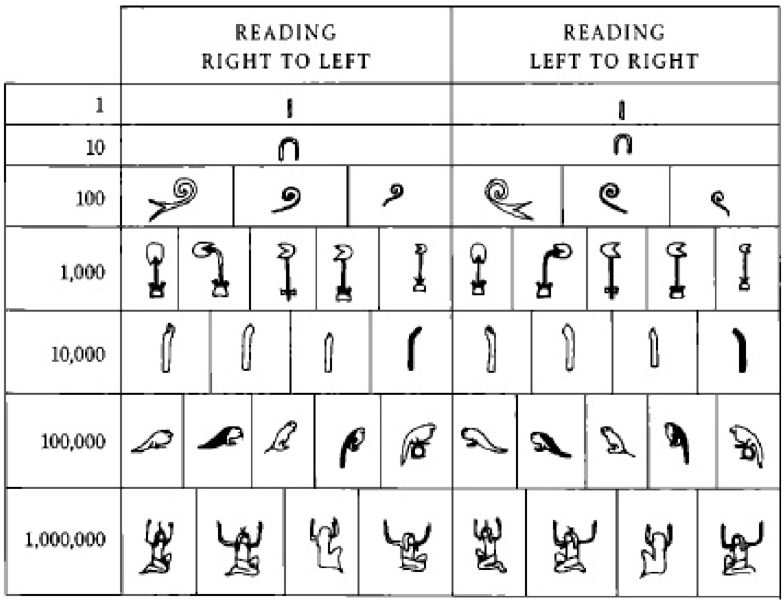
U Rosetti je 1799. godine, u sklopu Napoleonovih ekspedicija, pronađen kamen koji je pisan na tri pisma: grčko, demotsko i egipatsko (hijeroglifi). Boyer ([3], str. 11.) navodi kako je prethodno poznavanje grčkog pisma omogućilo dešifriranje demotskog i egipatskog (hijeroglifa).

Dva najpoznatija i najvažnija izvora iz kojih saznajemo o matematici starih Egipćana su Rhindov i Moskovski papirus (v. [3], str.32.). Rhindov je papirus pronađen 1858. godine u Luxoru. Napisao ga je hijeratskim pismom oko 1650. god. pr. Kr. pisar Ahmes, a u njemu se nalazi 85 različitih praktičnih matematičkih zadataka.

## 3.2 Hijeroglifi

Hijeroglifi su detaljni piktogrami koji predstavljaju ljude u različitim pozicijama, životinje, građevine, zvijezde itd. Pisani su u recima ili stupcima, a smjer čitanja je određen orijentacijom figura (v. [13], str. 163.).

Egipćani su koristili dekadski brojevni sustav te su postojali posebni znakovi za svaku sljedeću potenciju broja 10 sve do broja $10^6$ (v. slika 3.1.) Jedinice su prikazivane jednom vertikalnom crticom, desetice znakom koji podsjeća na potkovu, stotice spiralom (zavrnuta žica), tisućice cvijetom lotusa, desettisućice prstom, stotisućice žabom, a milijuni muškarcem koji kleči i podiže ruke k nebu, navodi Ifrah [13].




Slika 3.1: Hijeroglifske brojke - čitanje s desna na lijevo i obratno (preuzeto iz [13], str. 165.)

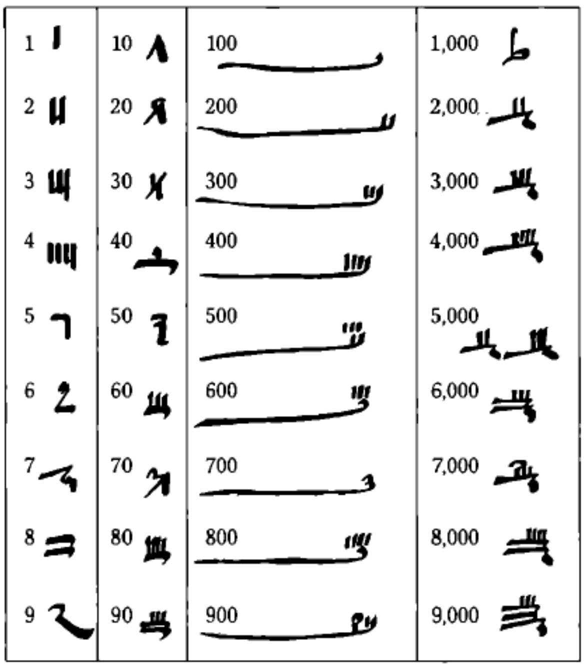
Brojevni je sustav bio aditivan što znači da je svaki broj prikazan skupinom znakova jednak sumi vrijednosti prikazanih znakova. Uobičajeno je bilo da se piše s desna na lijevo te da se veće potencije pišu prve. Ukoliko su se znamenke pisale s lijeva na desno, sve su bile okrenute prema smjeru pisanja iz kojega se kretalo. Kako bi se uštedjelo na prostoru, znamenke su se pisale u nekoliko redaka, a način grupiranja nije utjecao na vrijednost broja. Burton [3] navodi primjer broja 142 136 (v. 3.2) kojeg možemo zapisati kao

$$142136 = 1 \cdot 100000 + 4 \cdot 10000 + 2 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1.$$

Slika 3.2: Egipatski zapis broja 142136 (preuzeto iz [3], str. 11.)

## 3.3 Hijeratske brojke

Izumom papirusa pisanje je u Egipćana pojednostavljeno pa tako nastaju hijeratski znakovi. Hijeratski brojevni sustav i dalje je dekadski i aditivan, no jedna je oznaka sada predstavljala skup jednakih simbola. U nastavku je prikazana slika s hijeratskim brojkama iz koje uočavamo da su znakovi za 1, 10, 100 i 1000 pojednostavljeni hijeroglifi. Iz hijeratskog se pisma daljnjim pojednostavljivanjem razvilo demotsko, navodi Burton [3].



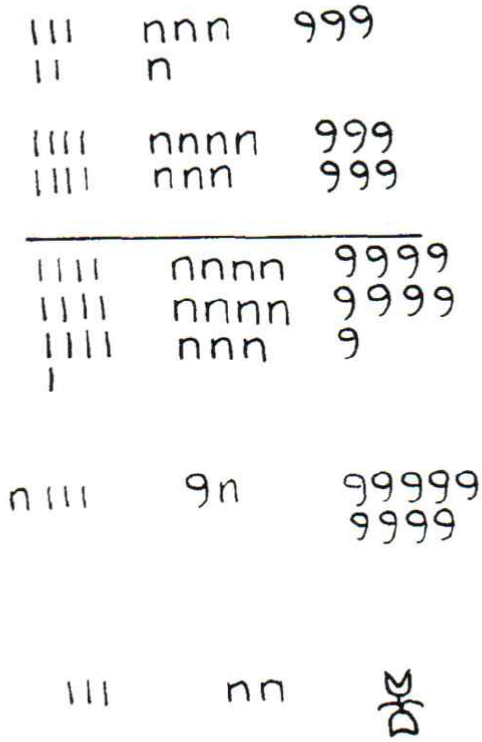

Slika 3.3: Hijeratske brojke (preuzeto iz [13], str. 170.)

## 3.4 Zbrajanje i oduzimanje

Zbrajanje je i oduzimanje u Egipćana bilo relativno lako, a opisuje ga Burton (v. [3], str. 11.-12.). Kod zbrajanja su se sakupljali (zbrajali) odgovarajući simboli i deset se istih simbola zamijenilo za sljedeći veći simbol. Pokažimo na primjeru kako se to radilo.

**Primjer 3.4.1.** *Zbrajanje brojeva 345 i 678.*

Ako zbrajamo jedinice, dobivamo trinaest jedinica što možemo zamijeniti za jednu deseticu i tri jedinice. Ako zbrajamo desetice, dobivamo jedanaest desetica što je jednako jednoj stotici i jednoj desetici. Naposlijetku zbrajajući stotice dobivamo devet stotica. Sada imamo jednu deseticu, tri jedinice, jednu stoticu, jednu deseticu te devet stotica. Ponovnim zbrajanjem odgovarajućih znamenki dolazimo do tri jedinice, dvije desetice, i deset stotica (=jedna tisućica) što je jednako broju 1023. Cijeli je postupak prikazan na slici 3.4.

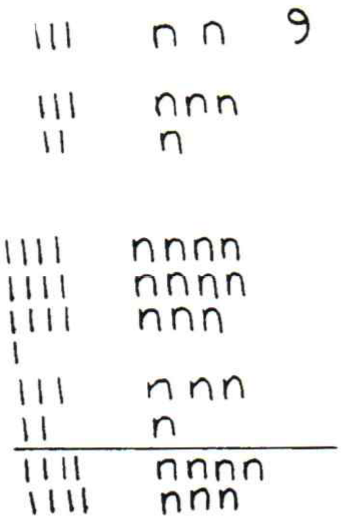


Slika 3.4: Zbrajanje 345 + 678 = 1023 u Egiptu (preuzeto iz [3], str. 12.)

Oduzimanje se provodilo na isti način, ali u obrnutom redoslijedu. Objasnimo na primjeru brojeva 123 i 45 oduzimanje.

**Primjer 3.4.2.** *Oduzimanje* 123 – 45.

Odmah uočavamo da od tri jedinice ne znamo oduzeti pet jedinica, kao što od dvije desetice ne znamo oduzeti četiri desetice. Iz tog razloga jedan veći simbol možemo zamijeniti za deset manjih. Kako bi naše oduzimanje imalo smisla, u broju 123 jednu ćemo stoticu zamijeniti za deset desetica i jednu deseticu za deset jedinica nakon čega nam ostaje jedanaest desetica i trinaest jedinica. Sada lako oduzimamo i dolazimo do broja 78. Cijeli je postupak prikazan na slici 3.5.



Slika 3.5: Oduzimanje $123 - 45 = 78$ u Egiptu (preuzeto iz [3], str. 12.)

Iako su Egipćani imali simbole za brojeve, nisu imali stalne oznake za aritmetičke operacije. U Rhindovom papirusu zbrajanje se i oduzimanje označavalo simbolima koji su predstavljali noge osobe koja dolazi ili odlazi.

## 3.5 Množenje i dijeljenje

S obzirom na to da su Egipćani koristili brojevni sustav koji je bio aditivan, množenje i dijeljenje se svodilo na uzastopno zbrajanje. Egipćani su množili dva broja na način da su udvostručavali jedan faktor i na kraju zbrajali odgovarajuće duplikacije. Burton (v. [3], str. 35.-37.) na primjerima objašnjava množenje i dijeljene, a isti će primjeri biti objašnjeni u nastavku.

**Primjer 3.5.1.** *Množenje brojeva 19 i 71.*

Za početak zapisujemo brojeve 1 i 71 u odgovarajuće stupce te ih udvostručujemo.

| | |
|---|---|
| 1 | 71 |
| 2 | 142 |
| 4 | 284 |
| 8 | 568 |
| 16 | 1136 |

Tablica 3.1: Udvostručavanje brojeva 1 i 71

S udvostručavanjem stajemo kada u prvom stupcu dobijemo broj veći od prvog faktora ($16 \cdot 2 = 32 > 19$). S obzirom na to da je $19 = 16 + 2 + 1$, zbrajamo odgovarajuće brojeve iz desnog stupca (v. 3.2). Vrijedi

$$19 \cdot 71 = (16 + 2 + 1) \cdot 71 = 1136 + 142 + 71 = 1349.$$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 71 | ← |
| 2 | 142 | ← |
| 4 | 284 | |
| 8 | 568 | |
| 16 | 1136 | ← |
| 19 | 1349 | |

Tablica 3.2: Zbrajanje odgovarajućih brojeva

Postupak je analogan ako ga započinjemo s udvostručavanjem broja 19. Tada vrijedi

$$71 \cdot 19 = (64 + 4 + 2 + 1) \cdot 19 = 1216 + 76 + 38 + 19 = 1349.$$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 19 | ← |
| 2 | 38 | ← |
| 4 | 76 | ← |
| 8 | 152 | |
| 16 | 304 | |
| 32 | 608 | |
| 64 | 1216 | ← |
| 71 | 1349 | |

Tablica 3.3: Egipatsko množenje $71 \cdot 19 = 1349$

Opisana metoda množenja brojeva uvijek daje rezultat jer svaki pozitivan cijeli broj možemo prikazati kao sumu međusobno različitih potencija broja 2. Za pretpostaviti je da stari Egipćani nisu znali dokazati spomenuto pravilo, no u njega su vjerovali potaknuti mnogim primjerima.

**Primjer 3.5.2.** *Dijeljenje broja 91 brojem 7.*

Postupak dijeljenja možemo interpretirati kao obrnuto množenje. Kod dijeljenja broja 91 brojem 7 vrijedi jednadžba $7x = 91$, gdje je broj $x$ količnik. Stari bi Egipćani sada udvostručavali broj 7 sve do broja 91, tj. stali bi u onome trenutku kada bi produkt množenja prethodnog broja brojem 2 bio veći od 91. S obzirom na to da je $56 \cdot 2 = 112$, posljednji broj kojeg ćemo uzeti u obzir je upravo 56. Vrijedi da je $7 + 28 + 56 = 91$ pa zbrajamo odgovarajuće vrijednosti iz prvog stupca, tj. $1 + 4 + 8 = 13$. Slijedi da je broj 13 količnik dijeljenja broja 91 brojem 7. Postupak je prikazan tablicom 3.4.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 7 | ← |
| 2 | 14 | |
| 4 | 28 | ← |
| 8 | 56 | ← |
| 13 | 91 | |

Tablica 3.4: Egipatsko dijeljenje $91 : 7 = 13$

Za razliku od množenja, dijeljenje nekih brojeva nije bilo jednostavno te je zahtijevalo uvođenje razlomaka.

**Primjer 3.5.3.** *Dijeljenje broja 35 brojem 8.*

Primjećujemo da broj 35 ne možemo zapisati kao sumu brojeva $8, 16$ i 32. Zbog toga su stari Egipćani u daljnjem postupku prepolavljali djelitelj (u ovom slučaju broj 8) pa je postupak izgledao kao u tablici 3.5. Vrijedi $1 + 2 + 32 = 35$, tj. količnik je jednak $4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | |
| 2 | 16 | |
| 4 | 32 | ← |
| $\frac{1}{2}$ | 4 | |
| $\frac{1}{4}$ | 2 | ← |
| $\frac{1}{8}$ | 1 | ← |
| $4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ | 35 | |

Tablica 3.5: Egipatsko dijeljenje $35 : 8 = 4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

**Primjer 3.5.4.** *Dijeljenje broja 16 brojem 3.*

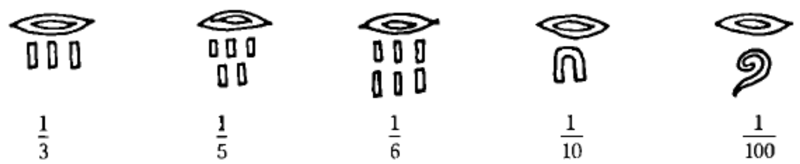
Na sličan se način kao u primjeru 3.5.3 može dobiti količnik brojeva 16 i 3, ali u ovome slučaju nećemo brojeve u prvom stupcu raspolavljati, već ćemo gledati trećine. Postupak je prikazan tablicom 3.6.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | $\leftarrow$ |
| 2 | 6 | |
| 4 | 12 | $\leftarrow$ |
| $\frac{2}{3}$ | 2 | |
| $\frac{1}{3}$ | 1 | $\leftarrow$ |
| $5+\frac{1}{3}$ | 16 | |

Tablica 3.6: Egipatsko dijeljenje $16 : 3 = 5 + \frac{1}{3}$

## 3.6 Egipatski razlomci

Ranije je kod opisivanja algoritma za dijeljenje brojeva spomenut pojam razlomka. Egipćani su se znali koristiti razlomcima, no samo jediničnim. Iznimka je bio razlomak $\frac{2}{3}$. Razlomak $\frac{2}{3}$ imao je svoj vlastiti simbol, a jedinični su se razlomci zapisivali na način da se nacrtao izduženi oval (usta) iznad broja koji se nalazio u nazivniku (v. [3], str. 37.). Boyer [2] navodi kako je oval zamijenjen točkom kod razlomaka zapisanih hijeratskim brojkama.




Slika 3.6: Egipatski razlomci (preuzeto iz [13], str. 169.)

Ukoliko je nazivnik bio neki veći broj, tj. nije stao ispod znaka usta, usta su se zapisala na desnoj strani broja (v. slika 3.7).

Iako znamo da npr. razlomak $\frac{6}{7}$ možemo zapisati kao sumu

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7},$$

Egipćani su navedeni zapis smatrali apsurdnim te su radije koristili zapis

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}.$$

$\frac{1}{249}$

Slika 3.7: Zapisivanje egipatskog razlomka s velikim nazivnikom (v.[13], str. 169.)

Burton ([3], str. 37.) uspoređuje dolaženje do dekompozicije razlomka $\frac{6}{7}$ s dijeljenjem broja 6 brojem 7 (v. tablica 3.7).

| | | |
|---|---|---|
| $1$ | $7$ | |
| $\frac{1}{2}$ | $3 + \frac{1}{2}$ | $\leftarrow$ |
| $\frac{1}{4}$ | $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ | $\leftarrow$ |
| $\frac{1}{7}$ | $1$ | |
| $\frac{1}{14}$ | $\frac{1}{2}$ | $\leftarrow$ |
| $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{4}$ | $\leftarrow$ |
| $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$ | $6$ | |

Tablica 3.7: Egipatsko dijeljenje $6 : 7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$

Kako bi traženje navedenih kompozicija bilo lakše, Egipćani su se koristili tablicama. Na početku Rhindovog papirusa se nalazi tablica koja zauzima čak jednu trećinu navedenog papirusa, a u njoj se nalaze dekompozicije razlomaka s brojnikom 2 i nazivnicima koji su neparni brojevi između 5 i 101 ([3], str. 37.).

Iako nije otkriveno pravilo ili algoritam koji je dovodio do dekompozicije razlomaka, Burton navodi neke pravilnosti ([3], str. 39.). Poželjni su mali nazivnici (ne veći od 1 000), broj jediničnih razlomaka u dekompoziciji nikada nije veći od 4, parni nazivnici su poželjniji od neparnih (pogotovo za prvi član), članovi s manjim nazivnicima se pišu prvi te nikoja dva člana u dekompoziciji nisu ista. Također, ponekad se nazivnik prvog člana znao uvećati ako je to podrazumijevalo da su ostali nazivnici manji brojevi. To vidimo na primjeru dekompozicije razlomka $\frac{2}{31}$ gdje je preferirana dekompozicija $\frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$ naspram dekompozicije $\frac{1}{18} + \frac{1}{186} + \frac{1}{279}$.

Svaki se racionalan broj može prikazati kao suma konačno mnogo različitih jediničnih razlomaka, a mi ćemo navesti dvije metode takvih dekompozicija. Prva se metoda zasniva na identitetu

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)},$$

koji nam omogućava da se jedinični razlomak zapiše kao suma dva druga jedinična razlomka, a proces možemo ponavljati koliko puta želimo. Općenito dekompoziciju razlomka $\frac{m}{n}$ možemo zapisati na način

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$+\frac{1}{n(n+1)+1} + \frac{1}{n(n+1)[n(n+1)+1]} + \cdots.$$

Uočavamo da se broj razlomaka u svakom koraku povećava (kao i šansa za njihovo ponavljanje), no proces je konačan, navodi Burton (v.[3], str. 40.-42.). Ova nam metoda pokazuje kako zapis egipatskih razlomaka nije jedinstven.

**Primjer 3.6.1.** *Dekompozicija razlomka $\frac{3}{5}$ (v. [3], str. 41.).*

Razlomak $\frac{3}{5}$ možemo zapisati na način

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}.$$

Posljednja dva razlomka u dekompoziciji možemo zapisati kao

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5\cdot 6},$$

tj. vrijedi

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right).$$

Kako bi svi jedinični razlomci u dekompoziciji bili različiti, na isti način rapisujemo posljednja dva razlomka iz gornjeg izraza.

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{6\cdot 7},$$

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{31} + \frac{1}{30\cdot 31},$$

pa vrijedi

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} + \frac{1}{31} + \frac{1}{930},$$

tj.

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{42} + \frac{1}{930}.$$

Fibonacci je 1202. godine objavio algoritam kojim se svaki racionalan broj između 0 i 1 može zapisati kao suma različitih jediničnih razlomaka.

**Ideja algoritma** (v. [3], str. 42.)**:**
Pretpostavimo da je dan razlomak $\frac{a}{b}$ za koji vrijedi $0 < \frac{a}{b} < 1$. Pronalazimo cijeli broj $n_1$ takav da

$$\frac{1}{n_1} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{1}{n_1 - 1}, \tag{3.1}$$

tj.

$$n_1 - 1 < \frac{b}{a} \leqslant n_1.$$

Slijedi,

$$n_1 a - a < b \leqslant n_1 a.$$

Daljnjim raspisom lijeve strane nejednakosti dolazimo do identiteta

$$n_1 a - b < a. \tag{3.2}$$

Ako od razlomka $\frac{a}{b}$ oduzmemo $\frac{1}{n_1}$ dobivamo

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{n_1} = \frac{n_1 a - b}{b n_1} = \frac{a_1}{b_1}, \tag{3.3}$$

iz čega slijedi

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{a_1}{b_1}.$$

Iz jednadžbi 3.1 i 3.3 slijedi da je brojnik $a_1$ novog razlomka manji od brojnika $a$ početnog razlomka. Ako je $a_1 = 0$, postupak je gotov.
U suprotnom, postupak se ponavlja s razlomkom $\frac{a_1}{b_1}$, tj. dobivamo

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{a_2}{b_2},$$

za $a_2 < a_1$. Sa svakim sljedećim korakom brojnik posljednjeg razlomka se smanjuje te naposlijetku dolazimo do razlomka $\frac{a_k}{b_k}$ za koji vrijedi $a_k = 1$.
Za padajući niz $1 \leqslant a_k < a_{k-1} < ... < a_1 < a$ postupak je konačan, a dekompozicija glasi

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + ... + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{b_k}.$$

**Primjer 3.6.2.** *Dekompozicija razlomka $\frac{2}{19}$ Fibonaccijevom metodom.*

Neka je $\frac{a}{b} = \frac{2}{19}$. Vrijedi nejednakost $9 < \frac{19}{2} < 10$, tj. $\frac{1}{10} < \frac{2}{19} < \frac{1}{9}$. Prema formuli 3.1 zaključujemo da vrijedi $n_1 = 10$. Oduzimanjem (formula 3.3) dobivamo

$$\frac{2}{19} - \frac{1}{10} = \frac{20-19}{19 \cdot 10} = \frac{1}{190}.$$

S obzirom na to da je brojnik novog razlomka jednak 1, algoritam ovdje završava i vrijedi

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{10} + \frac{1}{190}.$$

## 3.7 Praktični problemi

Veliki dio Rhindovog papirusa zauzimaju praktični zadaci koji se bave tematikom ravnomjerne podjele pogače na određeni broj muškaraca ili određivanjem količine žita potrebnog za izradu piva. Navedeni su problemi bili jednostavni te su se svodili na rješavanje današnjih linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, navodi Burton ([3]).

**Problem 24 iz Rhindovog papirusa** *Hrpa i njena sedmina čine 19. Koliko sadrži hrpa? (v. [3], str.43)*

Koristeći današnju matematiku problem možemo zapisati kao

$$x + \frac{x}{7} = 19, \tag{3.4}$$

tj.

$$\frac{8x}{7} = 19.$$

Ahmes je razmišljao: "Koliko puta 8 mora biti pomnožen da dobijemo 19, toliko puta 7 mora biti pomnožen da dobijemo točan broj.". Ovom je rečenicom zapravo opisao metodu lažne pretpostavke. Objasnimo to koristeći današnju terminologiju.

Ako rješavamo jednadžbu 3.4, lažno možemo pretpostaviti da je rješenje $x = 7$. Lijeva strana jednadžbe tada iznosi $7 + \frac{7}{7} = 8$ umjesto 19. Kako bi ipak dobili 19, broj 8 moramo pomnožiti s $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Vrijednost $x$ dobivamo množenjem lažne pretpostavke, tj. broja 7, brojem $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

$$x = \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) 7 = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Lažnu pretpostavku $x = 7$ možemo poopćiti na bilo koji broj $x = a$. Ako stavimo $a + \frac{a}{7} = b$ i $bc = 19$, tada $x = ac$ zadovoljava jednadžbu 3.4, tj. vrijedi

$$ac + \frac{ac}{7} = \left(a + \frac{a}{7}\right) c = bc = 19.$$

# Poglavlje 4

# Mezopotamija

## 4.1 Povijesni pregled

Osim Egipta, veliki utjecaj na razvoj matematike imali su i narodi s područja Mezopotamije - zemlje između dviju rijeka, Eufrata i Tigrisa. Civilizacija se ondje počela formirati otprilike u isto doba kao i na području Egipta, cca. 3 500. god. pr. Kr. ili ranije. Ranije smo spomenuli kako je Egipatska kultura bila zaštićena pustinjama koje ju okružuju. Ravnica između dviju rijeka nije bila lako obranjiva te je oduvijek bila privlačna osvajačima. Osvajači su pritom prigrlili kulturu naroda koji je onda živio prije njih te uživali u bogatstvu zemlje sve dok i oni naposlijetku nisu bili pokoreni, navodi Burton ([3], str. 18.).

Na području Mezopotamije Sumerani su gradili kuće i hramove koje su ukrašavali keramikom i mozaicima geometrijskih oblika. Moguće je da je klinasto pismo koje su Sumerani koristili jedan od prvih oblika pisane komunikacije, navodi Boyer ([2], str. 26.).

Jedna od najznačajnijih invazija na tom području bila je invazija Akađana. Osvajači su postepeno upijali kulturu osvojenog područja, a time i klinasto pismo. Boyer ističe kako je klinasto pismo bilo jaka poveznica između različitih naroda i kultura. Porezi, zakoni, priče i mnoge druge stvari bilježile su se na mekim glinenim pločicama koje su se potom zapekle. S obzirom na to da su pločice bile izdržljivije od papirusa koji se koristio u Egiptu, danas imamo puno više dokaza o matematici s područja Mezopotamije nego o egipatskoj.

Ako govorimo o matematici koja se razvijala na području Mezopotamije, često ćemo naići na naziv "babilonska matematika", iako to nije sasvim ispravno jer pod babilonsku matematiku tada svrstavamo matematiku koja se razvijala i prije i nakon što je grad Babilon bio centar razvoja kulture povezane s opisanim područjem i imenom. Babilon konkretno možemo smjestiti u vremenski okvir od 2000. do otprilike 600. god. pr. Kr. Perzijski kralj

Kir Veliki 538. god. pr. Kr. osvaja Babilon, a babilonska se matematika nastavlja kroz dinastiju Seleukida na području Sirije skoro do početaka kršćanstva (v. [2], str. 26.).

Nekoliko je stotina glinenih pločica očuvano, a većina pripada razdoblju od 1800. do 1600. god. pr. Kr. Možemo zaključiti kako je babilonska matematika u puno područja bila naprednija od egipatske (osim možda u nekim geometrijskim pravilima), navodi Burton ([3], str. 59.) Također, Babiloncima možemo pripisati prvenstvo mnogih matematičkih otkrića - npr. Pitagorin poučak. Toliki napredak možemo pripisati korištenju seksagezimalnog brojevnog sustava koji je omogućio lako računanje s razlomcima.

Babilonci su poznati po korištenju matematičkih tablica, no osim glinenih pločica s matematičkim tablicama, postojale su i pločice s različitim algebarskim i geometrijskim problemima. Te su pločice sadržavale numeričke probleme uz odgovarajuće račune i odgovore, no procedure koje su se provodile ne možemo poopćiti. Ipak, te nam pločice daju naslutiti da su Babilonci (za razliku od Egipćana) imali donekle teoretski pristup matematici, navodi Burton ([3], str. 60.).

## 4.2 Seksagezimalni brojevni sustav i klinasto pismo

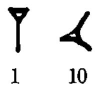
U babilonskoj je matematici korištena kombinacija dekadskog i seksagezimalnog (baza 60) brojevnog sustava. Boyer (v. [2], str. 28.) ističe kako postoji puno diskusija o motivaciji za korištenje takvog brojevnog sustava: astronomija, kombinacija prethodnih brojevnih sustava (baze 6 i 10) itd. Iako današnje društvo većinom koristi decimalni brojevni sustav, bazu 60 možemo pronaći kod računanja vremena i mjerenja kutova.

Burton ([3], str. 20.) navodi kako su Babilonci prvi ljudi (prije Grka) koji su koristili barem djelomičan pozicijski brojevni sustav. Pozicijske brojevne sustave karakterizira činjenica da vrijednost simbola ovisi o njegovoj poziciji. Prednost korištenja pozicijskog brojevnog sustava je u tome što je potrebno koristiti manji broj znakova kako bi se iskazao neki broj.

S obzirom na to da je babilonski brojevni sustav bio seksagezimalni i pozicijski, posljednje znamenka u nekom cijelom broju može imati vrijednost od 1 do 59. Predzadnja znamenka označava višekratnike broja 60, znamenka prije nje višekratnike broja $60^2$ itd. Burton ([3], str. 21.) navodi primjer broja kojeg bi Babilonci u seksagezimalnom brojevnom sustavu zapisali kao 3 25 4, a u dekadskom bi glasio:

$$3 \cdot 60^2 + 25 \cdot 60 + 4 = 12304.$$

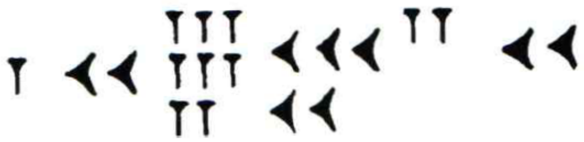
Zapisivanje brojeva kod Babilonaca je bilo mnogo jednostavnije nego u Egiptu jer se svaki broj mogao zapisati kao kombinacija samo 2 znaka. Uspravan klin imao je vrijednost 1 i mogao se koristiti 9 puta, a široki klin postavljen postrance predstavljao je vrijednost 10 i mogao se koristiti do 5 puta (v. [3], str. 21.).




Slika 4.1: Klinasti brojevi 1 i 10 (preuzeto iz [13], str. 146.)

Simboli koji su predstavljali desetice zapisivali su se lijevo od onih koji su označavali jedinice, a kod zapisivanja su se koristili i razmaci koji su grupirali simbole prema silaznim potencijama broja 60. Na slici 4.2 je prikazan babilonski zapis broja 319940. Vrijedi

$$1 \cdot 60^3 + 28 \cdot 60^2 + 52 \cdot 60 + 20 = 319940.$$



Slika 4.2: Broj 319940 (preuzeto iz [3], str. 22.)

Zanimljivo je i da su Babilonci povremeno koristili znak za oduzimanje koji se sastojao od jednog uspravnog i jednog polegnutog klina. Korištenjem tog znaka broj 19 se mogao prikazati kao razlika brojeva 20 i 1 (v. 4.3). Drugi način prikazivanja broj 19 bio bi pomoću jednog znaka za deseticu i 9 znakova za jedinice (v. [3], str. 22.).

Slika 4.3: Zapisan je broj 20=21-1 (preuzeto iz [3], str. 22.)

Burton ističe kako je korištenje opisanog brojevnog sustava ponekad dovodilo do konfliktnih situacija. Naime, Babilonci nisu imali oznaku za 0 pa su se različiti brojevi zapisivali na isti način. Usporedimo zapis brojeva 84 i 3624 u seksagezimalnoj bazi:

$$1 \cdot 60 + 24 = 84$$

$$1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 24 = 3624.$$

Kako bi razlučili o kojem se broju radi, Babilonci su se oslanjali na kontekst, no ponekad se u zapisu ostavljala i praznina, tj. razmak koji je indicirao da nedostaje jedno seksigezimalno mjesto. Od 300. god. pr. Kr. Babilonci u takvim situacijama koriste poseban simbol (v. 4.4). Ipak, simbol je korišten samo povremeno te još uvijek nije postojao simbol koji bi označavao izostanak znamenke na kraju broja (ne znamo označava li posljednja znamenka jedinicu, deseticu... ili čak razlomak) pa su zabune i dalje bile česte. (v. [3], str. 22.-23.)

Slika 4.4: Dva načina označavanja praznine ([3], str. 22.)

Kako bismo uskladili pisanje i razlikovali cijele brojeve od razlomaka, danas možemo koristiti notaciju za seksagezimalnu bazu

$$25, 0, 3; 30 \text{ za broj } 90003\tfrac{1}{2} = 25 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 3 + \tfrac{30}{60},$$

tj.

$$25, 0; 3, 30 \text{ za } 1500\tfrac{7}{120} = 25 \cdot 60 + 0 + \tfrac{3}{60} + \tfrac{30}{60^2}.$$

Boyer ([2], str. 30.) ističe kako su Babilonci iskoristili pozicijski brojevni sustav pa su na isti način prikazivali i cijele brojeve i razlomke, što je pojednostavilo njihovo računanje u usporedbi s npr. egipatskim načinom.

Oko 150. god. aleksandrijski astronom Ptolomej počinje koristiti *omicron* (prvo slovo grčke riječi "ništa") u svrhu današnje nule. Osim što je znak koristio na mjestima praznina, koristio ga je i kao posljednju znamenku broja. Ipak, ne postoje dokazi na temelju kojih bi zaključili da je Ptolomej *o* tretirao kao broj, navodi Burton ([3], str. 23.).

Theon iz Aleksandrije (4.st.) navodi kako se baza 60 koristila zbog velikog broja djelitelja broja 60 što je omogućavalo lako korištenje nekih razlomaka, tj. više je razlomaka imalo konačan zapis (npr. $\frac{1}{3} = \frac{20}{60} = 20{\cdot}60^{-1}$). Svi ostali razlomci koji se nisu mogli proširiti u razlomke s nazivnikom 60 bili su aproksimirani razlomcima s konačnim zapisom.

## 4.3 Matematičke tablice

Babilonci su, zahvaljujući svojoj naprednoj matematici, izradili mnoge kompleksne aritmetičke tablice. U brojnim su tablicama navedeni kvadrati, kubovi te drugi i treći korijeni brojeva od 1 do 50. U Berlinu se nalazi tablica koja osim što prikazuje $n^2$ i $n^3$ za brojeve $n = 1, 2, ..., 20, 30, 40, 50$ prikazuje i sumu $n^2 + n^3$. Pretpostavlja se da se ta tablica koristila za rješavanje kubnih jednadžbi oblika $x^3 + x^2 = a$ (v. [3], str. 59.).

Na velikom se broju tablica nalaze sadržaji vezani uz recipročne brojeve. Te su se tablice uglavnom sastojale od sva stupca, kao u tablici 4.1. Produkt brojeva u svakom retku jednak je 60, tj. broj u lijevom stupcu recipročan je broj broja u desnom stupcu (u seksagezimalnoj bazi).

| | |
|---|---|
| 4 | 15 |
| 5 | 12 |
| 6 | 10 |
| 8 | 7;30 |
| 9 | 6;40 |
| 10 | 6 |
| 12 | 5 |
| 15 | 4 |
| 16 | 3;45 |
| 18 | 3,20 |

Tablica 4.1: Tablica recipročnih brojeva (v. [3], str. 59.)

Burton navodi kako tablice ipak imaju neke manjkavosti. Brojevi 7, 11, 13, 14 i još neki nedostaju. Razlog je taj što su Babiloncima jedino konačni seksagezimalni razlomci bili razumljivi. Uzmimo za primjer razlomak $\frac{1}{7}$ za kojeg vrijedi $\frac{1}{7} = 0; 8, 34, 17, 8, 34, 17....$

Kasnije tablice daju gornju i donju granicu razlomka $\frac{1}{7}$, tj. vrijedi

$$8, 34, 16, 59 < \frac{1}{7} < 8, 34, 18.$$

Burton ([3], str. 60.) ističe kako babilonsko dijeljenje nije bilo "nespretno" kao u Egipćana. Dijeljenje broja $a$ brojem $b$ interpretirali su kao množenje $a \cdot \frac{1}{b}$. Kada je recipročan broj djelitelja pronađen u tablici ili izračunat, provodilo se množenje uz korištenje tablica množenja. Tako npr. dijeljenje broja 7 brojem 2 glasi:

$$7 : 2 = 7 \cdot (0; 30) = 0; 210 = 3; 30 = 3\frac{1}{2}.$$

Boyer ([2], str. 32.) spominje i tablice koje bi danas mogli nazvati (anti)logaritamskim. U tablicama je navedeno prvih deset potencija za baze 9 i 16 te 1,40 i 3,45. Postavljeno je pitanje o tome na koju potenciju treba podići neku bazu da bi se dobio određeni broj. Pitanje je ekvivalentno današnjem pitanju o tome koliko iznosi logaritam zadanog broja s određenom bazom. Razlika između babilonskih "logaritamskih" tablica i današnjih je u tome što tablice tada nisu bile sistematične.

## 4.4 Množenje

Ifrah ([13], str. 155.-156.) nam na zanimljivom primjeru demonstrira kako bi Babilonci pomnožili brojeve 692 i 25. Kako bi uspješno pomnožili brojeve potrebna nam je tablica u kojoj su navedeni umnošci brojeva s brojem 25.

| | TRANSCRIPTION | | TRANSLATION (decimal positional system) | |
|---|---|---|---|---|
| SIDE 1 | 1 | [25] | 1 | 25 |
| | 2 | [50] | 2 | 50 |
| | 3 | [1;15] | 3 | 75 |
| | 4 | [1;40] | 4 | 100 |
| | 5 | [2;05] | 5 | 125 |
| | 6 | [2;30] | 6 | 150 |
| | 7 | [2;55] | 7 | 175 |
| | 8 | [3;20] | 8 | 200 |
| | 9 | [3;45] | 9 | 225 |
| | 10 | [4;10] | 10 | 250 |
| | 11 | [4;35] | 11 | 275 |
| | 12 | [5; ] | 12 | 300 |
| | 13 | [5;25] | 13 | 325 |
| | 14 | [5;50] | 14 | 350 |
| | 15 | [6;15] | 15 | 375 |
| | 16 | [6;40] | 16 | 400 |
| SIDE 2 | 17 | [7;05] | 17 | 425 |
| | 18 | [7;30] | 18 | 450 |
| | 19 | [7;45]* | 19 | 465* |
| | 20 | [8;20] | 20 | 500 |
| | 30 | [12;30] | 30 | 750 |
| | 40 | [16;40] | 40 | 1,000 |
| | 50 | [20;50] | 50 | 1,250 |

Slika 4.5: Tablica množenja s brojem 25 (preuzeto iz [13], str. 155.)

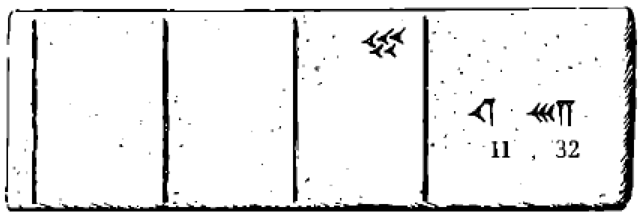
**Primjer 4.4.1.** *Množenje brojeva 692 i 25.*

Broj 692 je jednak broju (11,32)[1] u notaciji seksagezimalnog brojevnog sustava koju smo objasnili ranije. To znači da vrijedi $11 \cdot 60 + 32 = 692$.

Babilonci su brojeve množili na način da su ucrtali tri stupca na mokru glinenu pločicu. U prvi stupac s desne strane unose se vrijednosti od 1 do 59, u srednji stupac višekratnici broja 60 (u oznakama od 1 do 59), a u prvi stupac s lijeve strane višekratnici broja 3600 u oznakama od 1 do 59. Za početak, desno od trećeg stupca se unosi broj koji množimo, tj. broj (11,32) (v. 4.6).


Slika 4.6: Upisujemo broj $692 = (11, 32)$ desno od posljednjeg stupca (preuzeto iz [13], str. 155.)

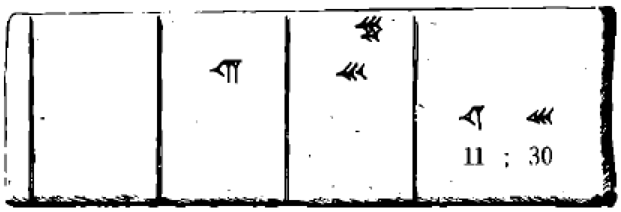
Koristeći tablicu množenja s brojem 25 4.5 pronalazimo umnožak brojeva 2 i 25, tj. broj 50. Broj 50 upisujemo u prvi stupac s desne strane (v. 4.7), a broj 2 izbrišemo.




Slika 4.7: $2 \cdot 25 = 50$ (preuzeto iz [13], str. 155.)

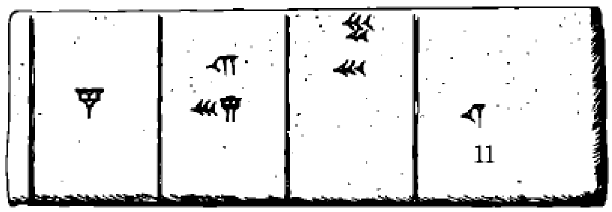
Sljedeći nam je korak otkriti koliki je umnožak brojeva 30 i 25, a iz tablice 4.5 uočavamo da je to broj 750, tj. (12,30). Broj 30 unosimo u prvi stupac s desne strane, a broj 12 u srednji stupac (v. 4.8).

[1]Ifrah koristi notaciju (11;32) za broj 692, no mi ćemo koristiti (11,32) kako bi bila u skladu s ostatkom rada.



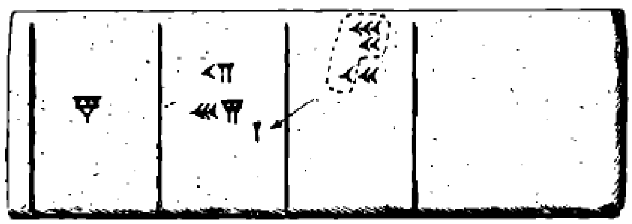

Slika 4.8: $30 \cdot 25 = (12, 30)$ (preuzeto iz [13], str. 156.)

Sada možemo izbrisati broj 30 s desne strane i pomnožiti brojeve 11 i 25. Ponovnim uvidom u tablicu zaključujemo kako je umnožak brojeva 11 i 25 jednak (4,35). Broj 35 unosimo u srednji stupac, a broj 4 u prvi stupac s lijeve strane, kao na slici 4.9.



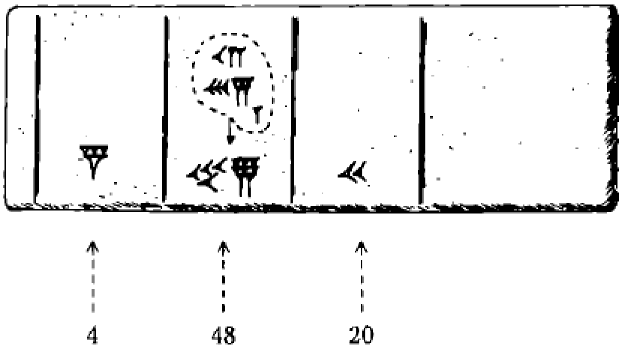

Slika 4.9: $11 \cdot 25 = (4, 35)$ (preuzeto iz [13], str. 156.)

U ovome trenutku možemo obrisati broj 11 s desne strane tablice. Uočavamo da prvom stupcu s desne strane imamo 8 oznaka. Sada možemo izbrisati 6 oznaka i prenijeti ih u prethodni stupac (v. 4.10).



Slika 4.10: Prenošenje brojeva iz jednog stupca u drugi (preuzeto iz [13], str. 156.)

Nakon opisane transformacije u srednjem stupcu sada imamo 4 oznake za desetice i 8 oznaka jedinica. S obzirom na to da suma nije veća od 60, određene brojeve ne moramo prenositi u prethodni stupac - dovoljno je samo urednije zapisati broj 48 (v. 4.11).




Slika 4.11: Urednije zapisivanje broja 48 - konačan rezultat (preuzeto iz [13], str. 156.)

Rješenje provedenog množenja danas u seksagezimalnom brojevnom sustavu možemo zapisati na način:

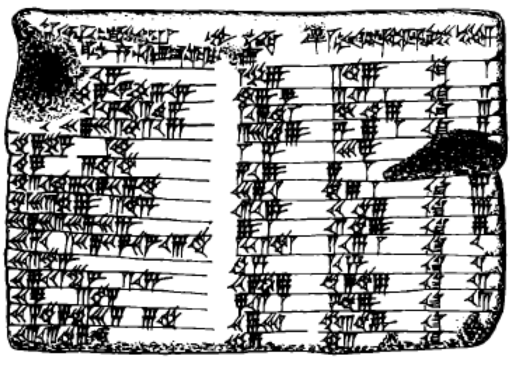
$$(11, 32) \cdot 25 = (4, 48, 20),$$

tj. vrijedi

$$(4, 48, 20) = 4 \cdot 60^2 + 48 \cdot 60 + 20 = 17300.$$

## 4.5 Pitagorin poučak

Pločica Plimpton 322 dešifrirana je 1945. godine, a datira između 1900. i 1600. pr. Kr. Analiza sadržaja koji se nalazi na pločici nedvojbeno nam govori kako su babilonski matematičari poznavali Pitagorin poučak više od 1 000 godina prije Pitagorina rođenja.



Slika 4.12: Plimpton 322 (preuzeto iz [13], str. 151.)

Pločica je dio veće pločice, tj. njen desni dio. Uočavamo tri stupca s naslovima. Posljednji se stupac sastoji od brojeva od 1 do 15 pa pretpostavljamo da služi kao numeracija redaka. Preostala dva stupca su zanimljivija. Prijevodi naslova upućuju na to da se radi o širini i dijagonali, a nije teško provjeriti da napisani brojevi zadovoljavaju duljinu kraka i hipotenuze pravokutnog trokuta kojemu su duljine svih stranica cijeli brojevi. Uzmimo za primjer prvi redak u kojem stoje brojevi 119 169 1. Vrijedi

$$169^2 - 119^2 = 120^2.$$

Pločica sadrži nekoliko grešaka. Prema Burtonu [3], neke su nastale zbog pogreški u korištenju seksagezimalnog brojevnog sustava, a neke su i danas neobjašnjene. Ipak, postavlja se pitanje o tome kako su Babilonci znali odrediti brojeve $x, y, z$ koji zadovoljavaju izraz $x^2 + y^2 = z^2$.

Nepotpuni dokaz o tome da su Babilonci imali metodu za rješavanje jednadžbe $x^2+y^2 = z^2$ pronađen je u četvrtom, nepotpunom, stupcu tablice. Taj se stupac sastoji od vrijednosti $\frac{z^2}{x^2}$ što sugerira da se relacija $x^2 + y^2 = z^2$ mogla svesti na problem

$$\left(\frac{z}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 \tag{4.1}$$

navodi Burton ([3], str. 69.). Ako uvedemo supstitucije

$$\alpha = \frac{z}{x}, \beta = \frac{y}{x} \tag{4.2}$$

izraz 4.1 postaje

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1. \tag{4.3}$$

Iz jednadžbe 4.3 slijedi da želimo konstruirati pravokutni trokut sa stranicama duljine 1, $\alpha$ i $\beta$. U sljedećem koraku prepoznajemo razliku kvadrata

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 1.$$

Uočavamo da se radio o racionalnim brojevima pa slijedi da ako je produkt dva broja jednak 1, onda su ta dva broja recipročna. Dakle, jedan je broj $\frac{m}{n}$, a drugi $\frac{n}{m}$, za $m$ i $n$ cijele brojeve. Vrijedi,

$$(\alpha + \beta) = \frac{m}{n}, (\alpha - \beta) = \frac{n}{m}. \tag{4.4}$$

Zbrajanjem i oduzimanjem jednadžbi 4.4 dobivamo vrijednosti $\alpha$ i $\beta$.

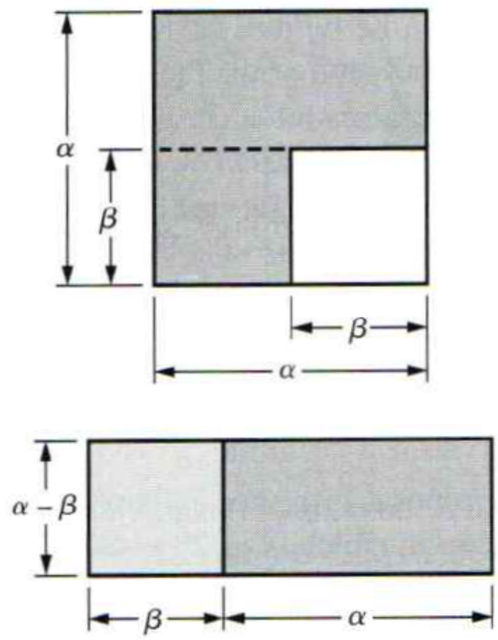
$$\alpha = \frac{m^2 + n^2}{2mn}, \beta = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$

Korištenjem izraza iz supstitucija 4.2 $y = \beta x$ i $z = \alpha x$ te definiranjem $x = 2mn$, slijedi da za rješenja početne jednadžbe vrijedi

$$x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2. \tag{4.5}$$

Dobivene formule 4.5 su poznate formule za pronalazak duljina stranica pravokutnog trokuta u skupu cijelih brojeva.

Kako bi se došlo do navedenih formula, osoba osim što mora znati zbrajati i oduzimati razlomke, mora i poznavati formulu za razliku kvadrata, no moguće je da su to Babilonci znali grafički objasniti. Na slici 4.13 prikazan je kvadrat sa stranicom duljine $\alpha$ te je unutar njega ucrtan kvadrat sa stranicom duljine $\beta$. Sivo osjenčana površina unutar velikog kvadrata iznosi $\alpha^2 - \beta^2$. Ako osjenčani dio presložimo, dobivamo pravokutnik kojemu površina iznosi $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$.




Slika 4.13: Razlika kvadrata (preuzeto iz [3], str. 71.)

# Poglavlje 5

# Grčka

## 5.1 Povijesni pregled

Grci su matematiku oformili kao jedinstvenu disciplinu na način da su sistematizirali pravila računanja. Burton ([3], str. 79.) navodi kako su Grci matematiku doživljavali apstraktno. Uzmimo za usporedbu babilonsku i egipatsku matematiku koje su bile alat te su se praktično koristile dok je u Grčkoj matematika bila intelektualna disciplina.

Dok su u Egiptu povijesni nalazi sačuvani na papirusu ili u Babilonu na glinenim pločicama, grčkih izvora nije puno sačuvano. Ranu grčku povijest stoga interpretiramo na temelju mitova i legendi zapisanih stoljećima nakon što se smatra da su se desili. Prema Burtonu ([3], str. 79.), mnogi od izvora su kopije kopija originala pa ne možemo znati koliko su prepisivači koristili svoju maštu dok su ih pisali ili koliko su dobro razumjeli original.

Važno je i napomenuti kako Grci nisu uvijek bili vezani uz područje na kojem danas žive. Kolonizaciju su započeli na obali i otocima Male Azije u razdoblju od 11. do 9. st. pr. Kr. Sredinom 8. st. pr. Kr. grčki su gradovi osnovani duž obale Mediterana, a raštrkana naselja sve do istočne obale Crnog mora. Sve do 650. god. pr. Kr. glavni smjer širenja su bile južna Italija i Sicilija. Upravo su sve te migracije Grcima omogućile uspostavu stranih tržišta te postavile materijalne temelje za razvoj umjetnosti, književnosti i znanosti, navodi Burton ([3], str. 80.). Svi rani grčki matematičari potječu upravo iz Male Azije, južne Italije ili Afrike.

S obzirom na raštrkanost grčkih područja te prirodne barijere, grčki narod nije odgovarao jednom vladaru. Naime, Grci su bili vjerni svojim matičnim gradovima (Atena, Korint, Teba, Sparta), a ne Grčkoj kao cjelini. Krajem 6. i početkom 5. st. pr. Kr. Grci su ujedinili svoje snage zbog perzijskih osvajanja. Ipak, niti jedno ujedinjenje nije dugo trajalo jer je svaka pobjeda dovodila do propasti grada-države u lokalnom ratu. Kraj je nastupio kada je Filip II. Makedonski nadjačao sjedinjene grčke snage 338. god. pr. Kr. te postavio sebe kao vladara svih grčkih država (osim Sparte). Filipa nasljeđuje njegov sin Aleksandar Veliki koji je konačno ujedinio Grčku te vladao područjem većim od 2 000 000 kvadratnih milja (oko 5 179 976 km$^2$). U godinama koje slijede, sve do 1. st. pr. Kr., trajalo je veliko helenističko razdoblje (v. [3], str. 82.).

Prve su Olimpijske igre održane 776. god. pr. Kr. Grčka se književnost do toga trenutka već bila razvila, no o matematici toga vremena ne znamo ništa. Boyer ([2], str. 49.) navodi kako su prošla skoro dva stoljeća do spominjanja matematike. Tada su se, u 6. st. pr. Kr., pojavili Tales iz Mileta i Pitagora sa Samosa. Problem je u tome što niti jedno djelo navedene dvojice nije preživjelo niti imamo dokaza da je neko njihovo djelo postojalo. Ipak, pripisuju im se mnoga otkrića. S obzirom na njihova putovanja u centre antičkih učenja, usvojili su mnoga znanja. U Egiptu su naučili geometriju, a Tales je u Babilonu došao u dodir s astronomskim tablicama. Prema Boyeru, Grci nisu oklijevali u preuzimanju znanja iz drugih kultura jer u suprotnom ne bi ovoliko brzo napredovali u razvoju svojih znanja.

Jedna od stvari koji su Grci usvojili od susjeda je i pisanje feničkim alfabetom. Svaki simbol alfabeta predstavljao je jedan suglasnik, a oznaka za samoglasnike nije bilo. Budući da je fenički alfabet imao više simbola za suglasnike nego što je u grčkom jeziku bilo potrebno, Grci su neke feničke znakove usvojili i prilagodili. Burton kao primjer navodi znak $\alpha$ koji je označavao suglasnik u feničkom alfabetu, no kod Grka je postao simbol za samoglasnik $A$. U grčkim gradovima-državama postojalo je desetak različitih verzija grčkog alfabeta. Postepeno je alfabet kojim su se koristili Jonjani dobio na važnosti. Atenjani su 403. god. pr. Kr. službeno prihvatili taj alfabet te su on brzo proširio ostatkom grčkog područja (v. [3], str. 80.).

Kod antičkih se civilizacija pretpostavljalo da su svećenici ti koji su stručni u pisanju i matematici. Ipak, kod Grka to nije bilo tako. Grčko je obrazovanje bilo otvorenije te usmjereno na amatere. Razlog tome može biti činjenica da u Grčkoj nije postojalo jako svećenstvo koje bi monopoliziralo obrazovanje. Burton ([3], str. 81.) dodaje kako su prvi grčki intelektualci bili poslovni ljudi kojima je obrazovanje služilo za razonodu.

## 5.2 Akrofonski (atički) brojevni sustav

Akrofonski (atički) brojevni sustav sastojao se od posebnih znakova za brojeve 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1 000, 5 000, 10 000 i 50 000 te je bio aditivan. Broj 1 se označavao vertikalnom crticom, a ostali su brojevi bili označavani prvim slovom svoga grčkog naziva (od kuda potječe i naziv sustava) ili kombinacijom slova. Atički se brojevni sustav koristio u prvom tisućljeću prije Krista, navodi Ifrah ([13], str. 182.).

| oznaka | koja je jednaka slovu | čija je vrijednost | je prvo slovo riječi | koja je grčki naziv broja |
|---|---|---|---|---|
| Γ | PI (arhaična verzija slova Π) | 5 | Πεντε (Pente) | pet |
| Δ | DELTA | 10 | Δεκα (Deka) | deset |
| H | ETA | 100 | Ηεκατον (Hekaton) | sto |
| X | KHI | 1,000 | Χιλιοι (Khilioi) | tisuću |
| M | MU | 10,000 | Μυριοι (Murioi) | deset tisuća |

Slika 5.1: Prvo slovo naziva broja označava broj (prijevod tablice preuzete iz [13], str. 182.)

Na slici 5.1 vidimo da su brojevi 5, 10, 100, 1 000 i 10 000 označavani prvim slovom svoga imena, a slika 5.2 nam prikazuje kako se oznake za brojeve 50, 500, 5 000 i 50 000 sastoje od kombinacija prethodno opisanih znakova poštujući pravilo umnoška.

| | | |
|---|---|---|
| 50 | 𐅄 = Γ . Δ | 5 × 10 |
| 500 | 𐅅 = Γ . H | 5 × 100 |
| 5,000 | 𐅆 = Γ . X | 5 × 1,000 |
| 50,000 | 𐅇 = Γ . M | 5 × 10,000 |

Slika 5.2: Zapis brojeva 5, 10, 100, 1 000 i 10 000 (preuzeto iz [13], str. 182.)

Boyer ([2], str. 63.) navodi primjer broja 45 678 koji se pisao kao na slici 5.3. Korištena su četiri simbola za vrijednost 10 000, po jedan simbol za vrijednosti 5 000, 500, 100 i 50, dva simbola za vrijednost 10, jedan za vrijednost 5 i tri za vrijednost 1. Ukupno, $4 \cdot 10000 + 5000 + 500 + 100 + 50 + 2 \cdot 10 + 5 + 3 \cdot 1 = 45678$.

Slika 5.3: Broj 45 678 (preuzeto iz [2], str. 63.)

## 5.3 Alfabetski brojevni sustav

Grci su oko 5. st. pr. Kr. (jonsko doba) razvili brojevni sustav, no s većim brojem znakova. Brojeve su označili s 24 slova Grčkog alfabeta te tri dodatna fenička slova (za brojeve 6, 90 i 900), navodi Burton ([3], str. 14.).

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Α | Β | Γ | Δ | Ε | Ϝ | Ζ | Η | Θ | Ι | Κ | Λ | Μ | Ν |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| Ξ | Ο | Π | Ϙ | Ρ | Σ | Τ | Υ | Φ | Χ | Ψ | Ω | Ϡ | |
| 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | |

Slika 5.4: Alfabetski brojevni sustav (preuzeto iz [2], str. 64.)

Boyer ([2], str. 64.) ističe kako su Grci postepeno brojeve počeli povezivati s malim slovima grčkog alfabeta jer su ona bila lakša za pisanje, baš kao što su Egipćani nakon izuma papirusa umjesto hijeroglifa počeli koristiti hijeratske znakove.

| | | |
|---|---|---|
| 1 $\alpha$ | 10 $\iota$ | 100 $\rho$ |
| 2 $\beta$ | 20 $\kappa$ | 200 $\sigma$ |
| 3 $\gamma$ | 30 $\lambda$ | 300 $\tau$ |
| 4 $\delta$ | 40 $\mu$ | 400 $\upsilon$ |
| 5 $\varepsilon$ | 50 $\nu$ | 500 $\phi$ |
| 6 ϛ | 60 $\xi$ | 600 $\chi$ |
| 7 $\zeta$ | 70 $o$ | 700 $\psi$ |
| 8 $\eta$ | 80 $\pi$ | 800 $\omega$ |
| 9 $\theta$ | 90 ϙ | 900 ϡ |

Slika 5.5: Alfabetski brojevni sustav - mala slova (preuzeto iz [3], str. 14.)

Brojevni je sustav bio aditivan te se su svi brojevi između 1 i 999 mogli prikazati sa do 3 simbola. Kod većih se brojeva zarez (crtica s donje lijeve strane) stavljao ispred odgovarajuće znamenke jedinica (od 1 do 9). Time je naznačeno množenje znamenke jedinica s 1 000. Uzmimo za primjer broj $,\beta$ koji nije označavao vrijednost 2 već $2 \cdot 1000 = 2000$, navodi Burton ([3], str. 14.).


Slika 5.6: Zapis prvih 9 višekratnika broja 1000 (preuzeto iz [2], str. 65.)

Desettisućice su označavane slovom M koje je bilo prvo slovo riječi *myriad* (deset tisuća). Slovo M je bilo zapisano ili ispod ili iza simbola za broj od 1 do 9 999. Uzmimo za primjer broj 40 000 koji se pisao kao $\delta$M ili broj 1 500 000 = $\rho\nu$M. Za zapis još većih brojeva Grci su koristili potencije broja 10 000. Tako je npr. MM označavalo $10\,000^2$ ([3], str. 14.-15.).

Prema Burtonu ([3], str. 15.), Grci su se kod zapisivanja brojeva uvijek držali istog poretka - od najvećeg višekratnika broja 10 na lijevoj strani do najmanjeg na desnoj. S obzirom na to da je poredak bio uvriježen, ponekad su se mogli izostaviti zarezi. Uzmimo za primjer broj $\delta\sigma\lambda\delta = 4234$. Iako se isto slovo nalazi na mjestu tisućica i jedinica, jasno je o kojem se broju radi.

Rani grčki zapis brojeva općenito je dobro funkcionirao. Ipak, kod zapisa razlomaka ponekad je bilo miskoncepcija. Grci su, baš kao Egipćani, koristili jedinične razlomke, ističe Boyer ([2], str. 65.). Nakon što bi se zapisao nazivnik, stavljena je oznaka ´ kako bi se naglasilo da se radi o razlomku. Razlomak $\frac{1}{34}$ na taj bi se način zapisao kao $\lambda\delta'$. Problem je u tome što bi se navedeni zapis mogao protumačiti i kao broj $30\frac{1}{4}$. U takvim je situacijama pomagao kontekst.

## 5.4 Množenje

Grci su za množenje brojeva imali poseban algoritam (Grčko množenje) koji ćemo najlakše objasniti na primjeru (v. [3], str. 14.).

**Primjer 5.4.1.** *Množenje brojeva 24 i 53.*

U primjeru sa slike 5.7 Grci su prvo množili $20 \cdot 50$, zatim $20 \cdot 3$, $4 \cdot 50$ te $4 \cdot 3$. Naposljetku su se zbrajali pojedinačni umnošci brojeva. Ideja je bila u tome da se broj koji se sastoji od više simbola zapiše kao zbroj brojeva koji se mogu zapisati jednim simbolom.

| | | |
|---|---|---|
| $\kappa\ \delta$ | 24 | |
| $\nu\ \gamma$ | $\times$ 53 | |
| ${}_{\prime}\alpha\ \xi$ | 1000 | 60 |
| $\sigma\ \iota\beta$ | 200 | 12 |
| ${}_{\prime}\alpha\sigma\ o\beta$ | 1200 | 72 = 1272 |

Slika 5.7: $24 \cdot 53$ (preuzeto iz [3], str. 15.)

Ova bi metoda u modernoj notaciji glasila:

$$\begin{aligned} 24 \cdot 53 &= (20 + 4)(50 + 3) \\ &= 20 \cdot 50 + 20 \cdot 3 + 4 \cdot 50 + 4 \cdot 3 \\ &= 1272. \end{aligned}$$

## 5.5 Iracionalni brojevi

Druga propozicija u 10. knjizi Euklidovih *Elemenata* govori nam o nesumjerljivim veličinama: dvije su nejednake veličine nesumjerljive ako se manja od dviju veličina neprestano oduzima od veće, a ono što ostane nikad ne mjeri onu prije nje (v. [4]). U slobodnom prijevodu bismo nesumjerljive veličine mogli definirati kao dvije veličine kod kojih u Euklidovom algoritmu niti jedan dobiveni ostatak ne dijeli manju.

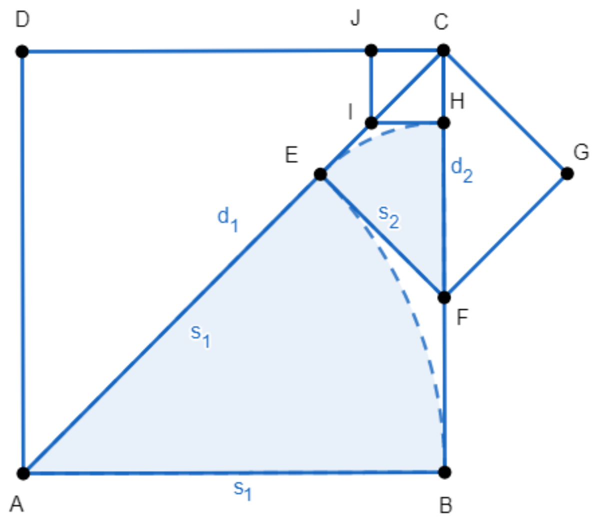
Grci su znali dokazati kako dijagonala kvadrata nije sumjerljiva stranici kvadrata što bi danas mogli interpretirati kao iracionalnost broja $\sqrt{2}$ (v. [3], str. 109.-110.). Pitagorejci su navedeno otkriće dugo skrivali jer se kosilo s njihovom filozofijom da je broj srž svih stvari, tj. da su sve duljine sumjerljive jediničnoj.

*Dokaz.* U kvadratu $ABCD$ nacrtamo kružni isječak tako da mu je jedan polumjer stranica kvadrata $\overline{AB}$, drugi se polumjer nalazi na dijagonali $\overline{AC}$ i kružni luk je $\overset{\frown}{BE}$ kao na slici 5.8. Neka je $|AB| = s_1$ i $|AC| = d_1$.

Crtamo dužinu $\overline{EF}$ okomitu na $\overline{AC}$ tako da se točka $F$ nalazi na stranici $\overline{BC}$. Lako dokazujemo da vrijedi $\triangle ABF \cong \triangle AFE$ iz čega slijedi $\overline{FB} = \overline{FE}$.

Trokut $\triangle CEF$ je jednakokračan pa vrijedi $\overline{CE} = \overline{FE}$.

Sljedeći je korak konstrukcija kvadrata $CEFG$ sa stranicom duljine $s_2 = |CE| = d_1 - s_1$ i dijagonalom duljine $d_2 = |CB| - |FB| = s_1 - s_2$.




Slika 5.8: Kvadrat $ABCD$

Ako sada promatramo stranicu $\overline{FE}$ i dijagonalu $\overline{FC}$ kvadrata $CEFG$, kao što smo na početku promatrali stranicu $\overline{AB}$ i dijagonalu $\overline{AC}$ kvadrata $ABCD$, dolazimo do dužine $\overline{CH}$ koja će imati duljinu $s_3$ i biti stranica trećeg kvadrata. Vrijedi $s_3 = d_2 - s_2$ i $d_3 = |CE| - |EI| = s_2 - s_3$. Postupak možemo dalje ponavljati konstruirajući sve manje kvadrate za čije će stranice i dijagonale vrijediti

$$s_n = d_{n-1} - s_{n-1}, d_n = s_{n-1} - s_n.$$

Pretpostavimo da su stranica i dijagonala kvadrata sumjerljive, tj. da imaju zajednički djelitelj $\delta$ te da postoje cijeli brojevi $M_1$ i $N_1$ takvi da $s_1 = M_1\delta$ i $d_1 = N_1\delta$. Sada vrijedi

$$s_2 = d_1 - s_1 = (N_1 - M_1)\delta = M_2\delta,$$

$$d_2 = s_1 - s_2 = (M_1 - M_2)\delta = N_2\delta,$$

za $M_2 < M_1$ i $N_2 < N_1$. Daljnjim raspisom dolazimo do

$$1 \leq ... < M_3 < M_2 < M_1, 1 \leq ... < N_3 < N_2 < N_1.$$

Ovime smo došli do kontradikcije. Postoji konačan broj pozitivnih cijeli brojeva koji su manji od $M_1$ i $N_1$, tj. naši nizovi su konačni i algoritam mora završiti nakon konačnog broja koraka. Ovo je kontradikcija s idejom da kvadrate možemo konstruirati do beskonačnosti. □

Teodor iz Kirene (rođen 470. god. pr. Kr.) geometrijski je dokazao iracionalnost brojeva $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ i $\sqrt{17}$, tj. da te duljine nisu sumjerljive jediničnoj.

# Poglavlje 6

# Rim

## 6.1 Povijesni pregled

Povijest rimskih znamenki seže u daleku prošlost. Ifrah ([13], str. 189.) smatra kako im početci datiraju stotinama, a možda i tisućama godina prije rimske civilizacije. Od 7. do 4. st. pr. Kr. talijanskim su poluotokom dominirali Etruščani - narod kojemu ne znamo podrijetlo ni jezik. Oni su se u vrijeme Rimskog Carstva asimilirali s osvajačima, a danas je prihvaćena hipoteza da etruščanske znamenke imaju grčke korijene (prisjetimo se da su Grci bili kolonizatori).

S obzirom na to da su Rimljani bili osvajači, rimski se brojevni sustav raširio po Europi. Oko 1300. god. indijsko-arapski je brojevni sustav zamijenio rimski te se koristi i danas (v. [8]).

Danas rimske brojeve možemo pronaći na građevinama, u imenima monarha, papa, brodova i sportskih događaja. Rimske se znamenke koriste u astronomiji, periodnom sustavu elemenata, glazbi itd. Prema Hom (v. [10]), njihova je uporaba danas estetske prirode, a ne funkcionalne te daje osjećaj povijesnosti i bezvremenosti - uzmimo za primjer korištenje rimskih brojeva na satovima.

## 6.2 Rimski brojevni sustav

Znamenke za brojeve $1, 5$ i $10$ možemo povezati s prstima na dvjema rukama. Vertikalnu liniju I koja simbolizira vrijednost 1 možemo povezati s jednim prstom, V (vrijednost 5) s oblikom dlana kada palac odmaknemo od ostalih prstiju, a X (vrijednost 10) s dva dlana (v. [10]).

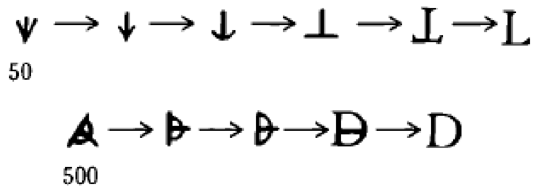
| I | V | X | L | C | D | M |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |

Tablica 6.1: Brojevi $1, 5, 10, 50, 100, 500$ i 1000 u rimskom brojevnom sustavu

Iako bismo danas mogli pretpostaviti da su oznake za znamenke u tablici 6.1 zapravo slova latinskog alfabeta, Ifrah ([13]) napominje kako to nije istina. Znamenke vuku korijene u nekim prethodnim oblicima (v. slika 6.1).


Slika 6.1: Znamenke koje su prethodile rimskim znamenkama (preuzeto iz [13], str. 188.)

Oznake za brojeve $1, 5$ i 10 (vertikalna linija, šiljasti kut i križić) kasnije su lako zamijenjene slovima I, V i X, no ostale su znamenke tek postepeno poprimile oblik slova latinskog alfabeta. Na slici 6.2 vidimo kako su se postepeno mijenjali zapisi brojeva 50 i 500.




Slika 6.2: Kako su nastale znamenke L i D za brojeve 50 i 500 (preuzeto iz [13], str. 188.)

Rimski je brojevni sustav primarno bio aditivan, navodi Ifrah ([13], str. 187.). Ako bismo željeli zapisati broj 187, zapis bi glasio

$$187 = 100 + 50 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = \text{CLXXXVII}.$$

Prema Ifrahu ([13]), rimski je brojevni sustav bio zakompliciran uvođenjem pravila prema kojem ukoliko znamenku manje vrijednosti zapišemo ispred znamenke s većom vrijednosti, onda se manja vrijednost oduzima od veće. Uzmimo kao primjer brojeve 4 i 40 koji su se tada zapisivali na način:

$$4 = 5 - 1 = \text{IV},$$

$$40 = 50 - 10 = \text{XL}.$$

Postoje još neka pravila (v. [10]):

- niti jedan se simbol ne smije koristiti više od tri puta za redom,
- oduzimati se mogu jedino potencije broja 10, tj. vrijednosti 1, 10 i 100 (broj 95 ne zapisujemo kao VC = 100 − 5, već kao XCV = 100 − 10 + 5),
- oduzimati možemo samo jedan broj (broj 13 ne zapisujemo kao IIXV = 10 − 2 + 5, već kao XIII = 10 + 1 + 1 + 1),
- ne možemo oduzimati broj od broja koji je od njega više od deset puta veći (broj 1 možemo oduzeti od broja 10, ali ne možemo od broja 100),
- ako želimo zapisati veće brojeve, iznad jednog ili više brojeva ćemo staviti vertikalnu crtu koja će označavati da se vrijednost brojeva množi s 1000 (v. slika 6.3).

Ifrah ([13], str. 198.) ističe kako je zapisivanje velikih brojeva pomoću vertikalne linije iznad znamenki ponekad dovodilo do zabuna jer je postojala starija konvencija da se svi brojevi koji se zapisuju pomoću slova označavaju s vertikalnom linijom iznad.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{\mathrm{V}}$ | = | 5,000 | = | $5 \times 1{,}000$ |
| $\overline{\mathrm{X}}$ | = | 10,000 | = | $10 \times 1{,}000$ |
| $\overline{\mathrm{LXXX}}\mathrm{III}$ | = | 83,000 | = | $83 \times 1{,}000$ |

Slika 6.3: Označavanje velikih brojeva u srednjem vijeku (preuzeto iz [13], str. 198.)

Iako su bili svjesni razlomaka, Rimljani ih nisu znali brojčano zapisati. Razlomke su izražavali u pisanom obliku ($\frac{3}{8}$ =*tres octavae*). Uobičajeno je bilo razlomke izražavati koristeći unce. Jedna unca bila je $\frac{1}{12}$ rimske mjere za težinu, no kasnije je označavala $\frac{1}{12}$ bilo čega. Rimljani su tako znali izraziti $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$, no taj zapis nije bio jednak današnjem. $\frac{1}{4}$ se pisala kao $\frac{3}{12}$ (3 unce) u duhu duodecimalnih razlomaka (v. [8]). Također, Rimljani nisu poznavali koncept broja 0.

O tome kako je teško zapisivati brojeve u rimskom brojevnom sustavu svjedoči i natpis na upravnoj zgradi Hrvatskih željeznica u Zagrebu. Naime, na zgradi je trebala biti ispisana godina izgradnje - 1903., tj. MCMIII= 1000 + 1000 − 100 + 1 + 1 + 1, no zapisano je MDCCCCIII= 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 100 + 1 + 1 + 1 što se kosi s gore napisanim pravilima.


Slika 6.4: Zgrada uprave Hrvatskih željeznica (preuzeto iz [18])

## 6.3 Zbrajanje

Kod zbrajanja su se u rimskom brojevnom sustavu poredale sve znamenke brojeva koji se zbrajaju te se izraz pojednostavljivao. Pokažimo na primjeru preuzetom iz ([8]) kako je to izgledalo.

**Primjer 6.3.1.** *Zbrajanje brojeva 7 i 22.*

Zapis bojeva 7 i 22 u rimskom brojevnom sustavu glasi VII i XXII, tj. računamo VII+XXII. Za početak ćemo sve znamenke zapisati u padajućem redoslijedu, tj. na početku ćemo navesti znamenke koje imaju veće vrijednosti:

$$\mathrm{XXVIIII}.$$

Iz zapisa vidimo da broj 9, tj. VIIII nije zapisan prema pravilima pa ga mijenjamo u IX. Sada naš izraz glasi

$$\mathrm{XXIX}.$$

Zaključujemo kako vrijedi

$$\mathrm{VII} + \mathrm{XXII} = \mathrm{XXIX},$$

tj.,

$$7 + 22 = 29.$$

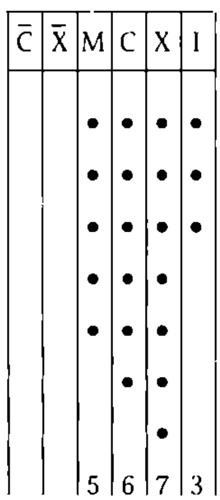
Općenito, računanje u rimskom brojevnom sustavu nije bilo lako. Ifrah ([13], str. 187.) navodi primjer zbrajanja $232+413+1231+1852$ koje je gotovo nemoguće bez prevođenja u brojevni sustav kojeg danas koristimo (slika 6.5).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | CCXXXII | | 232 |
| + | CCCCXIII | + | 413 |
| + | MCCXXXI | + | 1,231 |
| + | MDCCCLII | + | 1,852 |
| = | MMMDCCXXVIII | | 3,728 |

Slika 6.5: 232 + 413 + 1231 + 1852 (preuzeto iz [13], str. 187.)

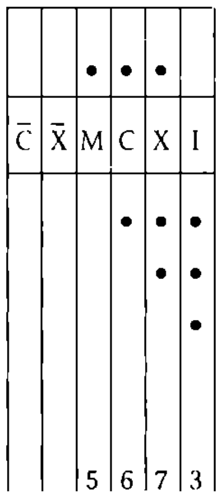
## 6.4 Rimski abakus - zbrajanje i množenje

Zbog komplikacija kod računanja Rimljani su, kao i Grci, koristili abakus. U Rimu je abakus bio tablica u kojoj su paralelne linije odvajale stupce. Svaki je stupac predstavljao potenciju broja 10 na način da je prvi stupac s desne strane bio povezan s jedinicama, drugi s deseticama itd. Kako bi se prikazao neki broj, određeni broj oblutaka je bio stavljen u odgovarajući stupac. Kako bi se npr. prikazao broj 5673 (v. slika 6.6) tri su oblutka stavljena u prvi stupac s desne strane, sedam u drugi, šest u treći i pet u četvrti, navodi Ifrah ([13], str. 203.).




Slika 6.6: Prikaz broja 5673 pomoću abakusa (preuzeto iz [13], str. 203.)

Kako bi se računanje olakšalo, svaki je stupac podijeljen na gornji i donji dio, navodi Ifrah. Oblutci u donjem dijelu predstavljaju po jednu jediničnu vrijednost toga stupca, a oblutci u gornjem dijelu predstavljaju pola jedinične vrijednosti sljedećeg stupca, tj. pet puta veću jediničnu vrijednost stupca u kojem se nalaze. To bi značilo da jedan oblutak u prvom stupcu s desne strane u gornjem dijelu predstavlja vrijednost 5, u drugom stupcu s desne strane u gornjem dijelu 50 itd.



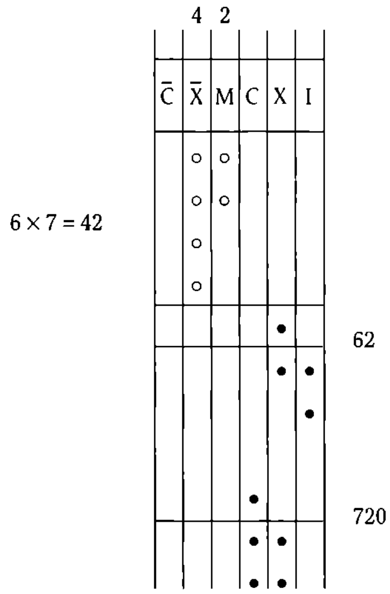

Slika 6.7: Prikaz broja 5673 pomoću abakusa podijeljenog na gornji i donji dio (preuzeto iz [13], str. 204.)

Prema Ifrahu ([13], str. 204.), računanje se izvodilo pomičući oblutke iz gornjeg u donji dio. Zbrajalo se na način da su se postavili oblutci koji su predstavljali pribrojnike te su se izvodile manipulacije. Kod abakusa koji je bio podijeljen na gornji i donji dio, svakih se pet oblutaka iz donjeg dijela nekog stupca zamijenilo jednim oblutkom u gornjem dijelu, a svaka su se dva oblutka iz gornjeg dijela zamijenila jednim oblutkom u donjem dijelu stupca s većom jediničnom vrijednošću. Oduzimalo se na sličan način.

Pokažimo na primjeru kako su se pomoću abakusa mogla pomnožiti dva broja (v.[13], str. 204.).

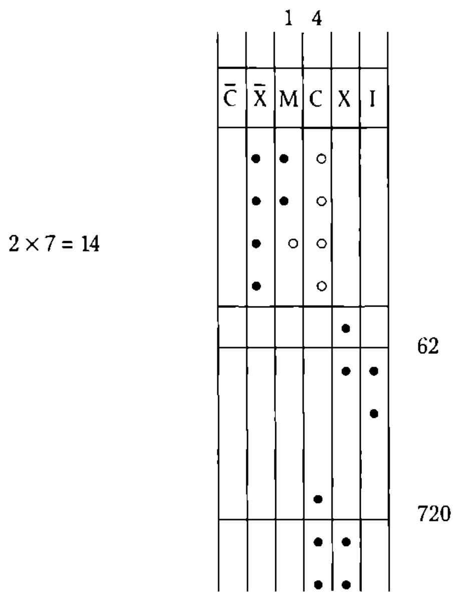
**Primjer 6.4.1.** *Množenje brojeva 720 i 62.*

Za početak se brojevi 720 i 62 prikažu pomoću abakusa kao na slici 6.8. U sljedećem se koraku množe brojevi 7 (s vrijednošću 700) i 6 (s vrijednošću 60). Njihov je umnožak broj 42 (tj. 42 000) kojeg ćemo prikazati tako što ćemo položiti dva oblutka u četvrti stupac s desne strane i četiri oblutka u peti.



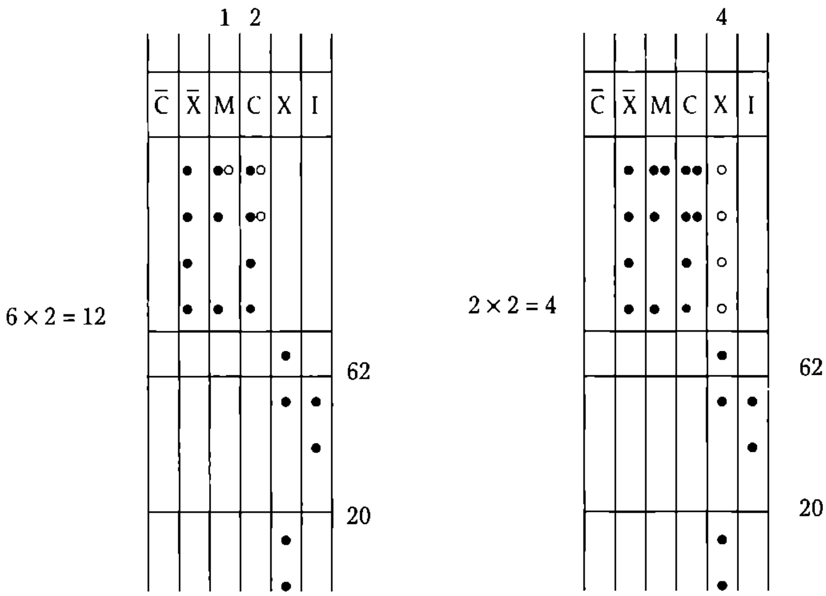

Slika 6.8: Prikaz brojeva 720 i 62 abakusom te računanje umnoška $6 \cdot 7 = 42$ (preuzeto iz [13], str. 204.)

Sada množimo broj 7 (od 720) i broj 2 (od 62). Njihov je umnožak broj 14 (s vrijednošću 1 400) pa stavljamo oblutke u odgovarajuće stupce kao i u prethodnom koraku (slika 6.9).



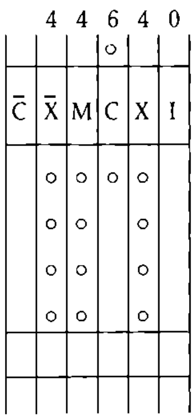

Slika 6.9: Umnožak $2 \cdot 7 = 14$ prikazan je bijelim oblutcima (preuzeto iz [13], str. 204.)

S obzirom na to da smo broj 7 iz broja 720 pomnožili i sa 6 i sa 2, mičemo oblutke koji ga predstavljaju. U sljedeća dva koraka množimo brojeve 2 (od 20) i 6 (od 62) te brojeve 2 (od 20) i 2 (od 62). Njihove umnoške, 12 (s vrijednošću 1 200) i 4 (s vrijednošću 40), prikazujemo pomoću oblutaka u abakusu (slika 6.10).




Slika 6.10: Umnošci $6 \cdot 2 = 12$ i $2 \cdot 2 = 4$ (preuzeto iz [13], str. 204.)

U posljednjem koraku pojednostavljujemo dobiveno, tj. reduciramo broj oblutaka na ranije opisani način. Rješenje množenja je broj 44 640 (slika 6.11).




Slika 6.11: Rezultat množenja $720 \cdot 62 = 44640$ (preuzeto iz [13], str. 205.)

# Poglavlje 7

# Kina

## 7.1 Povijesni pregled

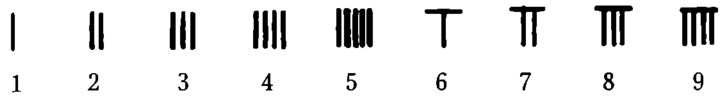
Kineska i indijska civilizacija su starije od grčke i rimske, no usporedive su s civilizacijama razvijenim na području Mezopotamije i Nila, navodi Boyer ([2], str. 217.). Tradicionalno se prvo Kinesko Carstvo smješta u 2750. god. pr. Kr., no postoji konzervativno mišljenje koje ranu kinesku civilizaciju smješta bliže 1000. god. pr. Kr. Odrediti godine nastanka kineskih matematičkih djela još je teže. Djelo *Chou Pei Suan Ching* se smatra najstarijim kineskim klasikom, no vjeruje se da ga je pisalo više autora kroz dulji vremenski period pa je nemoguće odrediti kada je nastalo. Knjiga sadrži astronomske proračune, neka svojstva pravokutnog trokuta te razlomke. Neki ljudi smještaju navedeno djelo u doba oko 1200. god. pr. Kr., a drugi u 1. st. pr. Kr. Boyer navodi kako je razumno djelo smjestiti u doba oko 300. god. pr. Kr. jer je oko 250. god. pr. Kr. nastalo djelo *Chiu-chang suan-shu*.

Djelo *Chiu-chang suan-shu* ili *Devet poglavlja umijeća računanja* sadrži 246 problema o mjerenjima, poljoprivredi, porezima, računanjima, rješenjima jednadžbi, svojstvima pravokutnog trokuta itd. Boyer ([2], str. 218.) uspoređuje kinesku matematiku koja je bila usmjerena na specifične probleme s Grcima koji su u to doba pisali logičke i sistematske rasprave.

## 7.2 Kineske štapićaste brojke

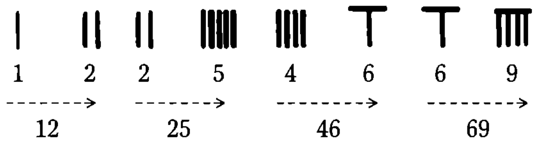
Kineski, japanski i korejski su matematičari koristili pozicijski brojevni sustav. Primjere korištenja ovog sustava nalazimo u 2. st. pr. Kr., no vrlo je moguće da ima i dulju povijest, navodi Ifrah ([13], str. 278.).

Sustav koji je u Kini poznat pod imenom *suan zi*, a u Japanu kao *sangi*, sličan je modernom brojevnom sustavu koji se koristi. Baza mu je bila decimalna, a vrijednost pojedine znamenke ovisi o njenoj poziciji unutar broja. Ipak, dok naš sustav koristi 9 znamenki čija forma nema veze s vrijednošću, u kineskom brojevnom sustavu se koriste vertikalne i horizontalne crtice koje predstavljaju prvih 9 brojeva (v. [13], str. 278.). Brojevi od 1 do 5 zapisivali su se odgovarajućim brojem vertikalnih crtica, a brojevi 6, 7, 8 i 9 s jednom horizontalnom crticom iznad jedne, dvije, tri ili četiri vertikalne (v. slika 7.1).




Slika 7.1: Kineske brojke (preuzeto iz [13], str. 279.)

Primjere zapisivanja brojeva u ovom sustavu dao nam je Cai Jiu Feng, kineski filozof koji umire 1230. godine (v. slika 7.2).

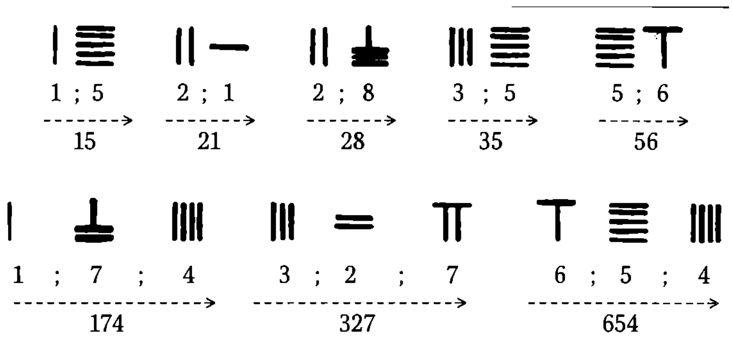



Slika 7.2: Brojevi 12, 25, 46 i 69 (preuzeto iz [13], str. 279.)

Prema Ifrahu ([13], str. 278.), zapisivanje brojeva često je bilo dvosmisleno. Uzmimo za primjer brojeve 12 i 3 (v. slika 7.2 za broj 12 i slika 7.1 za 3). Kinezi su tom problemu doskočili na način da su osmislili drugi sustav zapisivanja jedinica. Sustav je bio analogan prvom, no primarno su se koristile horizontalne crtice, a ne vertikalne. Prvih je pet brojeva bilo prikazano odgovarajućim brojem horizontalnih crtica, a brojevi od 6 do 9 s jednom vertikalnom crticom iznad odgovarajućeg broja horizontalnih crtica (v. slika 7.3).

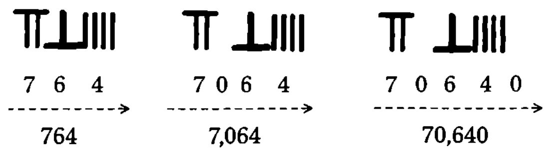

Slika 7.3: Kineske brojke - modificirani sustav (preuzeto iz [13], str. 279.)

Kako bi zapisivali višeznamenkaste brojeve bez da zapisi budu dvosmisleni, kineski su matematičari kombinirali opisana dva sustava (v. slika 7.4). Jedinice, stotice, desettisućice itd. su bile zapisivane vertikalnim crticama, a desetice, tisućice itd. horizontalnim ([13], str. 279.).



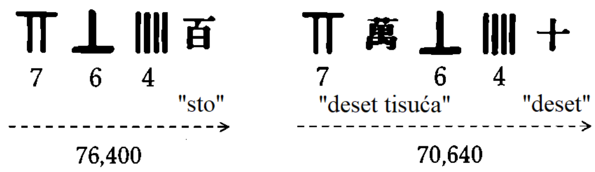

Slika 7.4: Kineski zapis višeznamenkastih brojeva (preuzeto iz [13], str. 280.)

Navedenim modifikacijama ipak nisu riješeni svi problemi jer kineski matematičari još uvijek nisu poznavali nulu. Na početku je stavljan razmak na mjesto gdje nije bilo znamenke, no i dalje su neki brojevi mogli biti pomiješani. Uzmimo za primjer brojeve 764, 7 064 te 70 640 kao na slici 7.5.



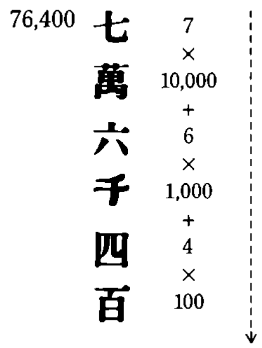

Slika 7.5: Zapis brojeva 764, 7 064 i 70 640 (preuzeto iz [13], str. 280.)

Kako bi se izbjegli problemi s ”prazninama”, neki su matematičari koristili znakove iz tradicionalnog brojevnog sustava koji su predstavljali različite potencije broja 10, kao na slici 7.6, navodi Ifrah ([13], str. 281.).




Slika 7.6: Zapis brojeva 76 400 i 70 640 (preuzeto iz [13], str. 281.)

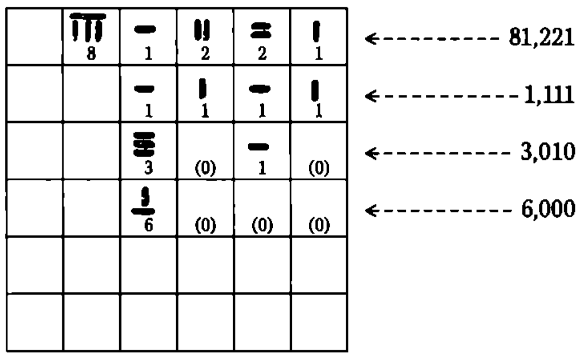
Drugi su pak koristili pravokutnu mrežu u koju su upisivali brojeve ostavljajući prazan kvadratić za svaku znamenku koja nedostaje. Treći su brojeve pisali na posve tradicionalan način kao na slici 7.7. Prema Ifrahu (v. [13], str. 281.), Kinezi tek od 8. st. koriste poseban znak - kružić, na mjestu gdje nedostaje znamenka. Smatra se da su ideju preuzeli od indijske civilizacije.




Slika 7.7: Tradicionalni zapis broja 76 400 (preuzeto iz [13], str. 281.)

## 7.3 Kineski abakus - zbrajanje i množenje

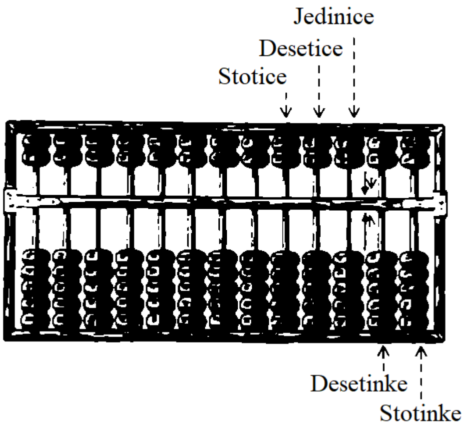
Kinezi su za računanje tokom godina koristili različite verzije abakusa. Za izvođenje aritmetičkih operacija koristili su male štapiće izrađene od bjelokosti ili bambusa na pločicama koje su imale izgled šahovnice. Svaki je stupac te šahovnice imao određenu vrijednost. Prvi stupac s desne strane označavao je jedinice, drugi desetice itd. Kako bi računanje bilo što jednostavnije, kineski su matematičari modificirali pisani oblik znamenki, navodi Ifrah ([13], str. 284.). Boyer ([2], str. 221.) navodi kako se sa štapićima vrlo spretno računalo. Neki pisac iz 11. st. zapisao je kako lete tako brzo da oko ne može pratiti njihove pomake.




Slika 7.8: Prikaz brojeva uz pomoć štapića na šahovnici (preuzeto iz [13], str. 285.)

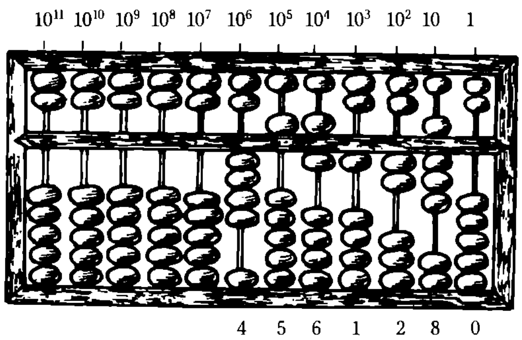
Najpoznatiji je abakus *Suan pan* (ploča za računanje, v. slika 7.9) čiji prvi primjeri korištenja datiraju u 14.st. To je jedini uređaj na kojem se mogu izvoditi sve aritmetičke procedure brzo i jednostavno. I danas je vrlo korišten u Kini. Koriste ga astronomi, trgovci, bankari, matematičari i dr., navodi Ifrah ([13], str. 288.).

Kineski abakus ima drveni okvir za kojeg su pričvršćene metalne šipke na kojima se nalaze drvene ili plastične perlice. Na sredini abakusa vidimo pregradu, a na svakoj se šipki nalazi po 7 perlica. 5 je perlica ispod drvene pregrade, a 2 su iznad. Kod računanja su se odgovarajući brojevi gurali prema sredini, tj. pregradi. Svaka šipka odgovara jednoj potenciji broja 10. U pravilu prve dvije šipke s desne strane abakusa predstavljaju decimalne razlomke, treća šipka predstavlja jedinice, četvrta desetice itd. (v. [13], str. 290.).




Slika 7.9: *Suan pan* (preuzeto iz [13], str. 290.)

Perlice na donjem dijelu abakusa vrijede jednu jedinicu, a one na gornjem dijelu pet. Ifrah navodi primjer broja 9 koji se na abakusu prikazao s 4 perlice donjeg dijela i 1 perlicom s gornjeg dijela. Za veće je brojeve korišten isti princip. Uzmimo za primjer broj 4 561 280 kao na slici 7.10. Uočavamo da na prvoj šipke s desne strane nije označen niti jedan broj što označava izostanak simbola.

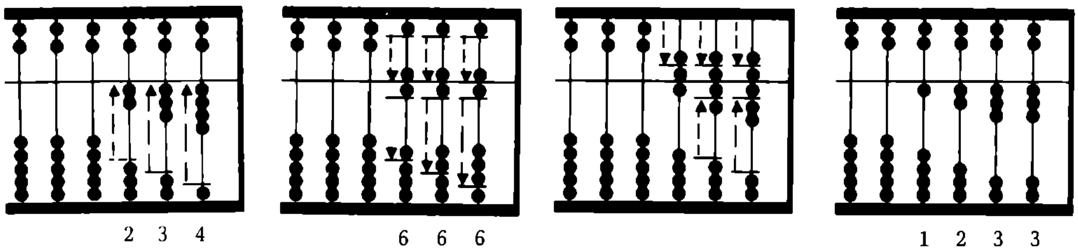



Slika 7.10: Broj 4 561 280 prikazan na kineskom abakusu (preuzeto iz [13], str. 291.)

U nastavku ćemo prikazati kako se računalo na primjeru s cijelim brojevima. Zbog toga na prvoj šipki s desne strane možemo prikazati jedinice (izostavljamo decimalni dio). Za početak ćemo zbrojiti brojeve 234, 432 i 567.

**Primjer 7.3.1.** *Zbrajanje brojeva 234, 432 i 567 pomoću abakusa (v. [13], str. 291.-292).*

Kao prvi korak na abakusu označavamo broj 234. Kako bismo broju 234 dodali broj 432 pomičemo odgovarajući broj perlica. Na šipki koja predstavlja stotice trebali bismo podići četiri jedinične perlice, no samo su nam tri ostale slobodne jer su dvije već podignute. Zbog toga ćemo spustiti prema sredini jednu perlicu koja označava broj 5, te spustiti prema dolje jednu perlicu koja ima vrijednosti 1. Vrijedi $5 - 1 = 4$. Na mjestu desetica podignute su već tri perlice, a mi bismo trebali podići još tri. Ponovno spuštamo jednu perlicu s vrijednošću 5 prema sredini i mičemo dvije jedinične perlice jer $5 - 2 = 3$. Isti postupak ponavljamo na šipki s jedinicama. Spuštamo jednu perlicu s vrijednošću 5 i mičemo tri perlice koje vrijede 1 jer $5 - 3 = 2$. Dobivamo rješenje 666, a abakus sada izgleda kao na slici 7.11 prikaz 2.




Slika 7.11: 234 + 432 + 567 (preuzeto iz [13], str. 291.-292.)

Na kraju je potrebno dodati broj 567. Postupak je analogan. Na šipki sa stoticama spuštamo jednu perlicu za broj 5, na šipki sa deseticama spuštamo jednu perlicu za broj 5 i podižemo jednu perlicu za broj 1 jer $5 + 1 = 6$. Na šipki koja predstavlja jedinice spuštamo perlicu koja predstavlja broj 5 i podižemo dvije perlice koje predstavljaju 2 jer $5 + 2 = 7$. Abakus u ovome trenutku izgleda kao na slici 7.11 prikaz 3.

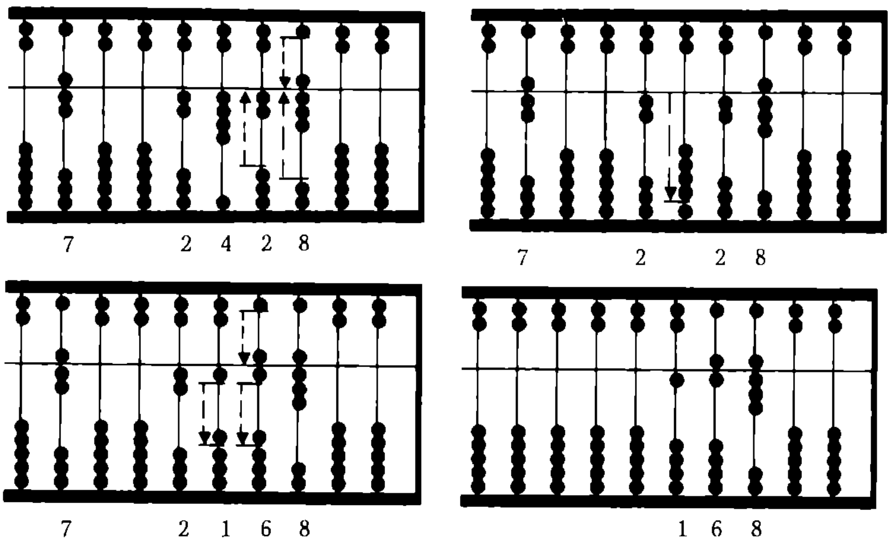
Sada još preostaje pojednostaviti dobiveno jer primjećujemo da u gornjem dijelu abakusa imamo spuštene po dvije perlice koje nose vrijednosti 5. Na šipki sa stoticama mičemo dvije perlice iz gornjeg dijela, a na šipki s tisućicama podižemo jednu perlicu iz donjeg dijela abakusa. Ponavljamo postupak, na šipki s deseticama mičemo dvije perlice iz gornjeg dijela, a podižemo jednu perlicu iz donjeg dijela šipke koja označava stotice. Na šipki s jedinicama mičemo dvije perlice iz gornjeg dijela i podižemo jednu perlicu iz donjeg dijela šipke koja označava desetice. Abakus sada izgleda kao na slici 7.11 prikaz 4 te čitamo rezultat: 1 233.

Proces oduzimanje pomoću abakusa bio je obrnut procesu zbrajanja. Množenje se provodilo kao uzastopno zbrajanje, a dijeljenje kao uzastopno oduzimanje. Pokažimo na primjeru brojeva 24 i 7 kako je izgledalo množenje.

Ifrah napominje da je proces množenja bio jednak za parove brojeva 24 i 7, 24 000 i 7, 24 i 700, 0.24 i 7 te 24 i 0.007. Znamenke svakog rezultata će biti jednake, bitno je samo pamtiti o kojoj se potenciji broja 10 radi.

**Primjer 7.3.2.** *Množenje brojeva 24 i 7 (v. [13], str. 292.-293.).*

Prvi je korak određivanje brojeva na abakusu. Broj 7 će se nalaziti na lijevoj strani abakusa, a broj 24 na desnoj. Bitno je da se između njih nalazi nekoliko praznih šipki. Sada mentalno množimo 7 i 4 (od 24) i znamo da je umnožak broj 28. Broj 28 označavamo na abakusu desno od broja 24. Četiri perlice koje označavaju broj 4 sada možemo maknuti, tj. spustiti (v. slika 7.12 prikazi 1 i 2).




Slika 7.12: Množenje brojeva 7 i 24 pomoću abakusa (preuzeto iz [13], str. 293.)

Sljedeći je korak množenje brojeva 7 i 2. Umnožak je broj 14 koji ćemo označiti na šipkama desno od broja 2. Prva šipka s desne strane broja 2 je prazna (tamo se prije nalazio broj 4) te u njoj podižemo jednu perlicu na donjoj strani. Desno od te šipke moramo naznačiti još 4 jedinice, međutim već su dvije perlice podignute. Spuštamo jednu perlicu prema sredini na gornjoj strani, a s donjeg dijela mičemo jednu perlicu jer $5 - 1 = 4$. Možemo maknuti perlice koje predstavljaju brojeve 7 i 2 te čitamo rezultat: 168 (v. slika 7.12 prikazi 3 i 4).

# Poglavlje 8

# Indija

## 8.1 Povijesni pregled

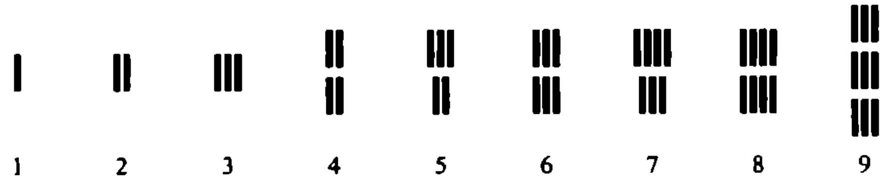
Arheološka iskopavanja u gradu Mohendžo Daro daju nam dokaze o postojanju stare civilizacije u Indiji u vrijeme nastajanja egipatskih piramida. Ipak, ne postoje matematički zapisi iz tog vremena. Kasnije su zemlju okupirali Arijci koje uvode kaste i razvijaju književnost na sanskrtu, navodi Boyer ([2], 229.). Buda, veliki vjerski učitelj, živio je u doba Pitagorina posjeta Indiji te postoje tvrdnje da je Pitagora svoj veliki teorem zapravo naučio od Hindusa. Današnje studije opovrgavaju te tvrdnje zbog povezanosti Babilonaca s teoremom tisuću godina ranije.

Elementarna geometrija koja je bila potrebna kod izgradnje hramova i oltara može se pronaći u matematičkim knjigama Sulvasutrama (pravila konopa). Mogući utjecaj matematike koja se razvijala u Mezopotamiji vidimo u poznavanju Pitagorina teorema. Apastamba, autor jedne od knjiga, znao je da je kvadrat duljine dijagonale pravokutnika jednak zbroju kvadrata duljina susjednih stranica pravokutnika. U knjizi nalazimo i pravila za konstrukciju pravokutnih trokuta koristeći konope koji imaju duljine Pitagorinih trojki. Razdoblje Sulvasutri završava oko 2. st. kada nastupa razdoblje Siddhanti, knjiga o astronomiji. Osnutkom dinastije Gubta (290. god.) započinje renesansa kulture na sanskrtu, a Siddhante su jedan od proizvoda toga razdoblja, navodi Boyer.

476. godine rođen je Aryabhata, autor jednog od najstarijih indijskih matematičkih djela, no indijska je matematika svakako starija od njega. Boyer ([2], 229.) uspoređuje godinu rođenja Aryabhate s godinom pada Rimskog Carstva, a početke indijske matematike smješta u razdoblje prije mitskog osnutka Rima (753. god. pr. Kr.). Valja napomenuti kako je kod razvoja indijske matematike nedostajalo kontinuiteta.

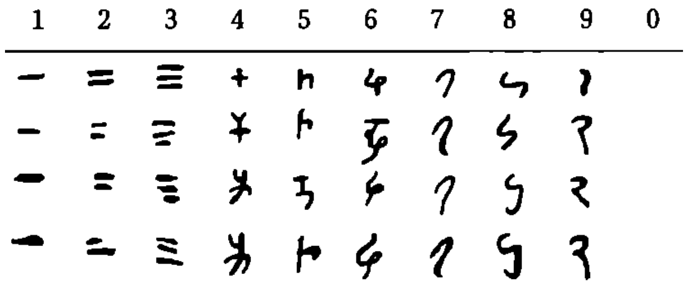
## 8.2 Brahmanske, gupta i nagari znamenke

Razvoj znamenki u Indiji podsjeća na Grčku. U natpisima iz 3. st. pr. Kr. u gradu Mohendžo Daro pronalazimo grupirane vertikalne crtice. U novijem sustavu ponovno pronalazimo korištenje vertikalnih crtica, no dodani su novi simboli za brojeve 4, 10, 12 i 100. Iz tog sustava nastaju brahmanske brojke koje podsjećaju na grčki alfabetski brojevni sustav. Boyer ([2], str. 234.) se pita je li slučajnost što je navedena promjena brojki nastala samo kratak period nakon što su Grci umjesto akrofonskog brojevnog sustava počeli koristiti alfabetski.



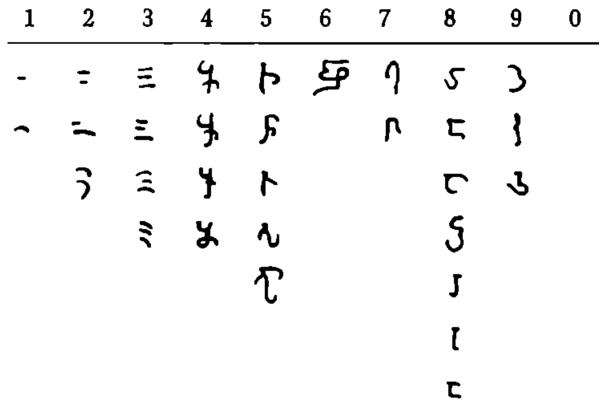

Slika 8.1: Rekonstrukcija indijskog zapisa brojki koje su bile početna točka prema razvoju brahmanskih brojki (preuzeto iz [13], str. 391.)

Na slici 8.2 vidimo primjer brahmanskih brojki nastalih u 1. ili 2. st. u budističkim špiljama Nasika.



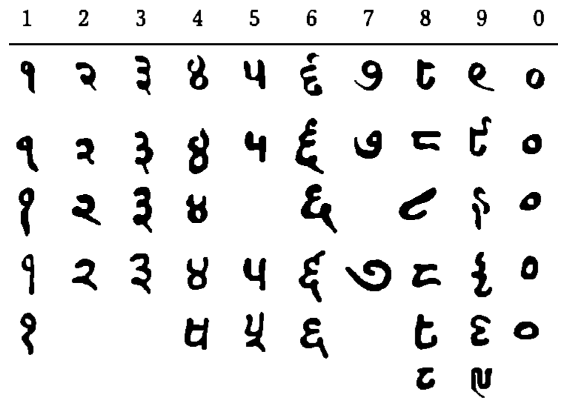

Slika 8.2: Brahmanske brojke (preuzeto iz [13], str. 378.)

Gupta znamenke koristile su se za vrijeme dinastije istog imena (cca. 240. - 535. god.). Na slici 8.3 vidimo gupta znamenke iz razdoblja od 4. do 6. st. Svi simboli koji su u uobičajenoj upotrebi u sjevernoj Indiji i centralnoj Aziji vuku korijene od gupta znamenki (v. [13], str. 379.-380.).




Slika 8.3: Gupta znamenke (preuzeto iz [13], str. 379.)

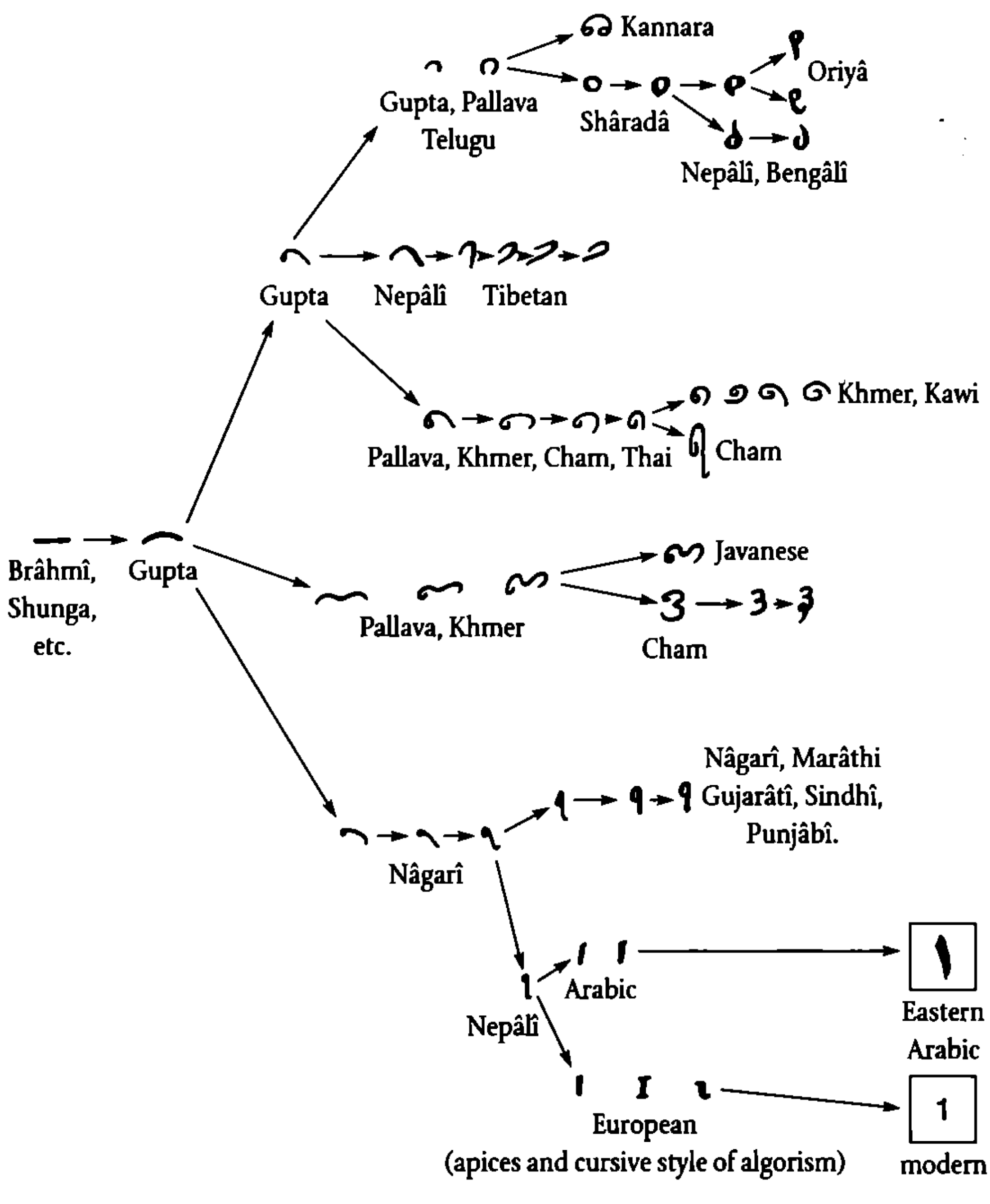
Kasnije od gupta znamenki nastaju nagari znamenke koje ubrzo postaju glavno pismo sanskrta te hindskog jezika ([13], str. 380.). Moderne nagari znamenke prikazane su na slici 8.4, a koriste se i danas u nekim indijskim državama. Al-Biruni (oko 1030. god.) navodi kako su upravo to znamenke koje su Arapi preuzeli od Indijaca zajedno s pozicijskim brojevnim sustavom ([13], str. 368.).




Slika 8.4: Moderne nagari znamenke (preuzeto iz [13], str. 368.)

S obzirom na to da je indijski brojevni sustav bio pozicijski, znamenke za prvih devet brojeva su bile dovoljne za zapisati sve veće brojeve, tj. ostale znamenke nisu bile potrebne. Nije sasvim jasno kada je došlo do te redukcije. Ipak, valja naglasiti kako spominjemo samo devet znamenki, a ne deset. Razlog tome je činjenica da Indijci još uvijek nisu imali notaciju za zapis znamenke koja nedostaje, navodi Boyer ([2], str. 234.).

Na slici 8.5 vidimo razvoj znamenke 1 do oblika u kojem ju mi danas koristimo. Put započinje s brahmanskim brojkama pa preko gupta i nagari znamenki dolazi u Europu.




Slika 8.5: Evolucija znamenke 1 (preuzeto iz [13], str. 392.)

## 8.3 Nula

Kada govorimo o nuli, razlikujemo dva značenja - nulu koja simbolizira prazno mjesto (npr. 0 u broju 205 koja omogućava da se brojevi 2 i 5 nalaze na dobrom mjestu) te nulu kao broj sam po sebi ([16]).

Ifrah ističe primjere koji nam pokazuju kako su Indijci već u 6. st. poznavali nulu. Iako ti primjeri nisu konkretni dokazi, pokazuju nam kako je pozicijski brojevni sustav bio dulje vrijeme u upotrebi. Prvi konkretni dokazi o korištenju nule i decimalnog pozicijskog brojevnog sustava datiraju u drugu polovicu 9. st. i nalaze se na dva kamena natpisa. Natpisi su pisani na sanskrtu te vidimo upotrebu nagari znamenki. Prvi natpis smještamo u 875., a drugi u 876. godinu. Na drugome se kamenu vidi broj 270, navodi Ifrah ([13], str. 400.).

S obzirom na to da su se u početku brojevi povezivali sa skupinama objekata, nula nije bila kandidat za broj (u smislu vrijednosti). Ipak, pojam broja je s vremenom postajao sve apstraktniji te se udaljavao od poveznice sa skupinom objekata čime je omogućeno promatranje negativnih brojeva i nule. Problem kod korištenja negativnih brojeva i nule vezan je uz aritmetičke operacije ([16]).

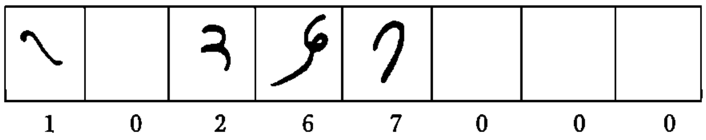
Brahmagupta je u 7. st. pokušao dati pravila za računanje s nulom i negativnim brojevima. Rekao je kako je nula rezultat oduzimanja nekog broja od samog sebe te da je zbroj nule i negativnog broja negativan broj, zbroj pozitivnog broja i nule pozitivan broj, zbroj nule i nule nula. Na isti je način definirao i pravila za oduzimanje. Navodi kako je broj pomnožen s nulom jednak nula, no dijeljenje s nulom mu je predstavljalo problem. Tvrdio je da je nula podijeljena nulom nula te da je broj $n$ podijeljen nulom razlomak $\frac{n}{0}$ ([16]).

Prema ([16]), Mahavira 830. god. ispravno navodi kako je umnožak nule i nule jednak nula te da broj ostaje isti kada se od njega oduzme nula. Mahavira je pokušao ispraviti Brahmaguptine navode o dijeljenju nulom pa navodi kako broj ostaje nepromijenjen kod dijeljenja nulom.

Bhaskara se i više od 500 god. nakon Brahmagupte borio s objašnjenjem dijeljenja nulom. Tvrdio je da vrijedi $\frac{n}{0} = \infty$ što je očito netočno jer implicira $0 \cdot \infty = n$, tj. da su svi brojevi jednaki. Ipak, točno je naveo svojstva $0^2 = 0$ i $\sqrt{0} = 0$ [16]).

## 8.4 Množenje

Indijski matematičari, osim prstiju, za računanje su koristili i različita pomagala. Jedno od pomagala bio je i abakus. Brojeve su zapisivali na finome pijesku unutar stupaca koji su imali određenu decimalnu vrijednost. Na slici 8.6 vidimo zapis broja 10 267 000 koji je nedvojbeno bio jednostavniji od zapisa broja koristeći nazive na sanskrtu ([13], str. 434.-435.).




Slika 8.6: Indijski zapis broja 10 267 000 (preuzeto iz [13], str. 434.)

Bhaskara II (oko 1150. god.) je često koristio visoko razvijeni sustav množenja brojeva. Nazivao ga je *sthanakhanda*, tj. razdvajanje pozicija. Opišimo ga na primjeru.

**Primjer 8.4.1.** *Množenje brojeva 325 i 243 (v. [13], str. 573.).*

Postupak započinjemo zapisivanjem znamenki brojeva koje množimo kao na slici 8.7.

$$\begin{array}{ccc} 2\,4\,3 & 2\,4\,3 & 2\,4\,3 \\ 3 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Slika 8.7: Početan zapis brojeva pri množenju 325 · 243 (preuzeto iz [13], str. 573.)

Nakon što smo zapisali znamenke, množimo s 5 (počinjemo na desnoj strani). $5 \cdot 3 = 15$ pa ispod linije zapisujemo broj 15 bez prenošenja znamenki, tj. vrijednosti. Preskačemo množenje s 4 te računamo $5 \cdot 2 = 10$ i zapisujemo broj 10. Sada množimo $5 \cdot 4 = 20$ i rezultat zapisujemo ispod prethodna dva rezultata, za jedno mjesto pomaknuto u lijevu stranu. Povlačimo liniju i zbrajamo dobivene brojeve kao na slici 8.8.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2 & 4 & 3 & & 2 & 4 & 3 & & 2 & 4 & 3 \\ & 3 & & & & 2 & & & & 5 & \\ \hline & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 5 \\ & & & & & & & & 2 & 0 & \\ \hline & & & 1 & 2 & 1 & 5 & & & & \end{array}$$

Slika 8.8: Postupak množenja 325 · 243 - 2. dio (preuzeto iz [13], str. 573.)

Postupak ponavljamo pri množenju broja 243 s 2 i s 3 te naš zapis sada izgleda kao na 8.9.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | | 2 | 4 | 3 | | 2 | 4 | 3 |
| | 3 | | | | 2 | | | | 5 | |
| 6 | | 9 | | 4 | | 6 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 1 | 2 | | | | 8 | | | 2 | 0 | |
| | | | 1 | 2 | 1 | 5 | | | | |
| | | | 4 | 8 | 6 | | | | | |
| | | 7 | 2 | 9 | | | | | | |

Slika 8.9: Postupak množenja $325 \cdot 243$ - 3. dio (preuzeto iz [13], str. 573.)

Na kraju zbrojimo dobivene sume. Rješenje množenja je broj 78 975 (v. 8.10).

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | | 2 | 4 | 3 | | 2 | 4 | 3 |
| | 3 | | | | 2 | | | | 5 | |
| 6 | | 9 | | 4 | | 6 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 1 | 2 | | | | 8 | | | 2 | 0 | |
| | | | 1 | 2 | 1 | 5 | | | | |
| | | | 4 | 8 | 6 | | | | | |
| | | 7 | 2 | 9 | | | | | | |
| | | 7 | 8 | 9 | 7 | 5 | | | | |

Slika 8.10: Konačno rješenje množenja $325 \cdot 243$ (preuzeto iz [13], str. 573.)

S obzirom na utjecaj indijske matematike na Arape, neki primjeri indijskih računanja mogu se pronaći i u sljedećem poglavlju.

# Poglavlje 9

# Arapi

## 9.1 Povijesni pregled

U 7. st. utemeljen je Islam, a pustinjska su plemena s Arapskog poluotoka tu vjeru proširila diljem Sredozemlja. Arapi su osvojili Damask 635. godine, Jeruzalem 637., Egipat između 639. i 642. Osvojili su i Španjolsku te dijelove Francuske. U međuvremenu je arapska vojska kroz Siriju i Perziju došla i do sjevernog dijela Indije. Kalifi, vladari novog carstva, vladali su iz Damaska (v. [3], str. 227.).

762. godine odlučeno je da će se na rijeci Tigris graditi novi glavni grad - Bagdad, navodi Burton (v. [3], str. 227.). Bagdad brzo postaje trgovački i kulturni centar, a arapski jezik se učio u velikom dijelu svijeta. Intelektualna ostavština Grka bila je veliko blago Arapima. Kalif al-Mamun osnovao je Kuću mudrosti koja je bila neka vrsta akademije, a u njoj su se prepisivali grčki rukopisi.

Ifrah ([13], str. 513.) ističe kako su se prevodila djela Euklida, Ptolomeja, Aristotela, Platona, Diofanta i mnogih drugih. Ovdje možemo razaznati raznolikost i bogatstvo prevođenih djela. Prijevodi su se proširili po sveučilištima i knjižnicama diljem islamskog svijeta.

Što se tiče arapskih matematičara, istaknimo al-Khwarizmija. On je djelovao pod zaštitom kalifa al-Mamuna u Kući mudrosti te je bio dvorski astronom. Kroz njegova dva djela (o aritmetici i o algebri) Europa je upoznala indijske brojke i algebarski pristup matematici. Njegova knjiga o aritmetici najranije je arapsko djelo koje objašnjava indijski decimalni brojevni sustav. Osim što spominje devet znakova za brojeve od 1 do 9, al-Khwarizmi koristi nulu: kada u oduzimanju ništa ne ostane, stavi kružić kako mjesto ne bi bilo prazno, navodi Burton (v. [3], str. 227.). Niti jedan original arapske verzije navedene knjige nije preživio, no dostupan nam je latinski prijevod *Algoritmi de numero Indorum*. Utjecaj knjige na Europu bio je toliko snažan da su se nove znamenke počele nazivati arapskim, bez obzira na indijske korijene.

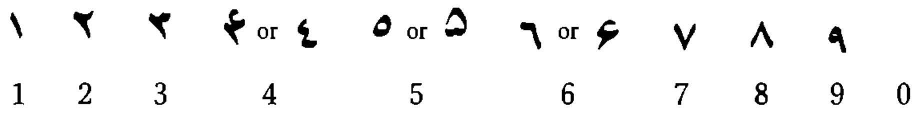
Algebra svoj naziv duguje izrazu *al-jabr* koji je dio naslova al-Khwarizmijeve knjige o algebri - *Hisab al-jabr w'al muqabalah*. Knjiga je u 12. st. prevedena pod latinskim nazivom *Liber Algebrae et Almucabola* koja daje ime dijelu matematike koji proučava rješenja jednadžbi. Iz latinskog prijevoda al-Khwarizmijevog imena dolazi i riječ *algoritam* koja je u ono vrijeme označavala umjetnost računanja s indoarapskim znamenkama, ističe Burton (v. [3], str. 228.).

Iako su Arapi puno pažnje pridavali prevođenju tekstova, neka matematička otkrića možemo pripisati baš njima. Oni su prepoznali iracionalna rješenja kvadratnih jednadžbi, no nisu poznavali koncept negativnih rješenja (v. [3], str. 230.).

## 9.2 Arapski brojevi

Tokom duljeg vremenskog perioda Arapi su koristili nekoliko brojevnih sustava. Jedan je brojevni sustav zahtijevao računanje prstima dok su se brojevi pisali riječima, a koristili su ga trgovci. Drugi je sustav seksagezimalni, a brojevi su se zapisivali kao slova arapskog alfabeta. Konačno, treći je brojevni sustav preuzeo indijske znamenke te je bio dekadski i pozicijski (v. [17]).

Postoji mišljenje da su Arapi preuzeli indijske brojke prilikom osvajanja, no vjerojatnija je priča o dolasku grupe indijskih učenjaka na dvor kalifa al-Mansura 776. godine, navodi Ifrah (v. [13], str. 529.). Kako su Arapi od Indijaca učili o astronomiji, došli su u dodir s indijskim brojevima i računanjima. Kada su Arapi naučili navedeni brojevni sustav, kopirali su ga. Znamenke kakve su krajem 9. st. koristili istočni Arapi bile su vrlo slične indijskim nagari znamenkama, no Arapi su ih postepeno modificirali (vjerojatno zbog načina na koji su sjedili dok su pisali rukopise na papirusu). Znakovi koje su arapski autori nazivali indijskim brojkama prikazani su na slici 9.1.




Slika 9.1: Indijske brojke (preuzeto iz [13], str. 534.)

Znamenke sa slike 9.1 još se uvijek koriste u Jordanu, Siriji, Saudijskoj Arabiji, Iraku, Iranu, Egiptu, Jemenu, Pakistanu, Afganistanu, muslimanskom djelu Indije, Malaji i Madagaskaru. Ipak, arapske znamenke koje mi koristimo ne vuku podrijetlo u opisanim znamenkama, navodi Ifrah ([13], str. 534.). Iako možemo reći da smo preuzeli brojeve od Arapa, preuzeli smo ih od Arapa sa zapada (sjever Afrike i Španjolska), a ne od Arapa s Bliskog Istoka.

## 9.3 Množenje

Arapi su računali na tlu ili na prašnjavim plohama, navodi Ifrah ([13], str. 556.). Na površini su naznačili nekoliko paralelnih linija, tj. stupaca koji su odgovarali različitim vrijednostima u dekadskom sustavu. Unutar stupaca su zapisivali brojeve - svaka je znamenka bila u svome stupcu čime je bila naznačena njena vrijednost. Korištenjem ovog sustava nije bilo potrebe za nulom jer se stupac mogao ostaviti prazan. Na slici 9.2 vidimo zapis broja 4 069 kakav su osim Arapa koristili i Indijci.

| desettisućice | tisućice | stotice | desetice | jedinice |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | | 6 | 9 |

Slika 9.2: Broj 4 069 (preuzeto iz [13], str. 557.)

Pokažimo na primjeru kako su se množili brojevi.

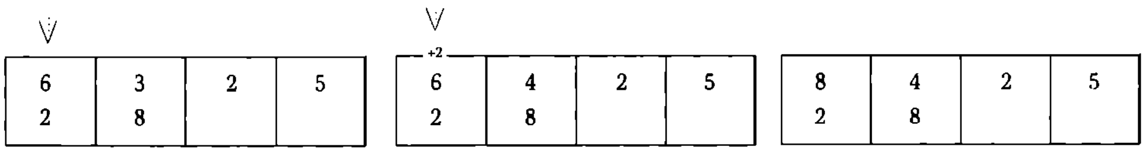
**Primjer 9.3.1.** *Množenje brojeva 325 i 28 (v. [13], str. 557.).*

Potrebna su nam četiri stupca u koje ćemo upisati znamenke. U istom stupcu mora biti znamenka množenika koja ima najveću vrijednost te znamenka množitelja koja ima najmanju vrijednost, kao na slici 9.3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | 5 |
| 2 | 8 | | |

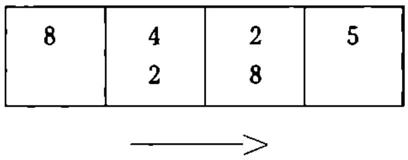
Slika 9.3: Upisivanje množenika i množitelja u stupce (preuzeto iz [13], str. 557.)

Računamo $3 \cdot 2$ i umnožak 6 upisujemo lijevo od broja 3. Dalje računamo $3 \cdot 8$. S obzirom na to da je umnožak 24, brišemo broj 3, na njegovo mjesto upisujemo broj 4, a na mjesto broja 6 upisujemo 8 jer $6 + 2 = 8$ (v. slika 9.4).



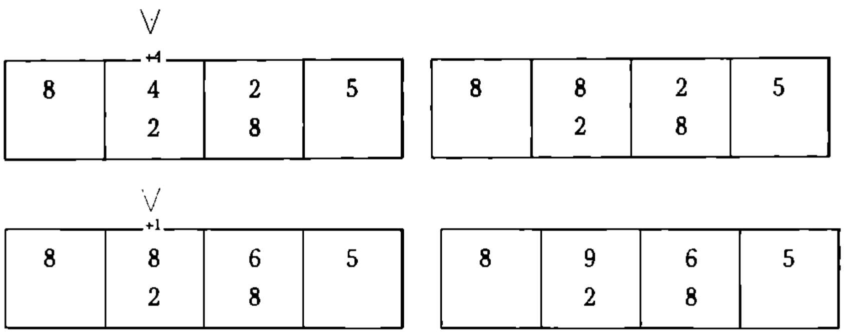

Slika 9.4: Nastavak množenja 235 · 28 - 1. korak (preuzeto iz [13], str. 557.)

Ovime je prvi korak gotov pa pomičemo znamenke množitelja za jedno mjesto u desnu stranu (v. slika 9.5).



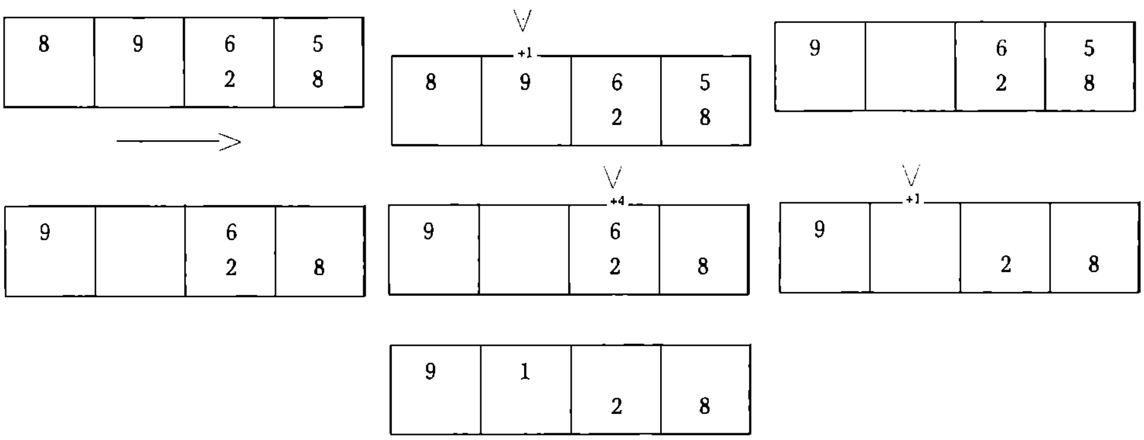

Slika 9.5: Nastavak množenja 235 · 28 - pomičemo znamenke množitelja (preuzeto iz [13], str. 557.)

Ponavljamo postupak, no množimo 2 · 2 i 2 · 8 (v. slika 9.6).



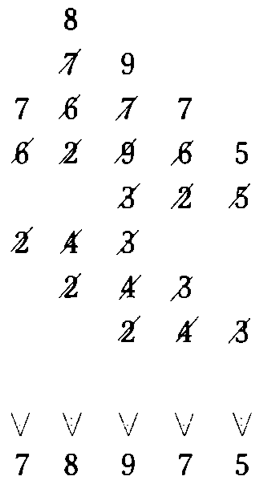

Slika 9.6: Nastavak množenja 235 · 28 - 2. korak (preuzeto iz [13], str. 557.-558.)

Kada smo završili drugi korak, znamenke množitelja ponovno pomičemo za jedno mjesto u desnu stranu i ponavljamo množenja, ali ovoga puta s brojem 5, kao na slici 9.7. Na kraju očitavamo vrijednost umnoška: 9 100. U opisanom postupku množenja nismo morali koristiti znamenku za nulu pa je jasno zašto neki arapski rukopisi ne spominju nulu pri korištenju indijskih brojeva i računanju s njima. I Indijci su koristili isti način računanja, no brzo ga napuštaju razvojem pozicijskog brojevnog sustava.



Slika 9.7: Posljednji korak pri množenju $235 \cdot 28$ (preuzeto iz [13], str. 558.)

Prirodno je bilo da su Arapi računanje željeli pojednostaviti. Željeli su računati bez brisanja ili križanja znamenki itd. Na slici 9.8 vidimo pokušaj pojednostavljivanja množenja na način da su se izbrisale linije koje određuju stupce te se nisu brisale pomoćne znamenke. Prednost ovog načina množenja i razlog zbog kojeg su ga dugo koristili muslimanski matematičari je u tome što se proces mogao provjeriti (za razliku od prethodnog množenja kada su se brisale znamenke). Ovakav način množenja koristio je al-Uqlidisi u 10. st. Iz istog razloga je ovaj tip množenja opstao u Europi do kraja 18. st., navodi Ifrah ([13], str. 566.).

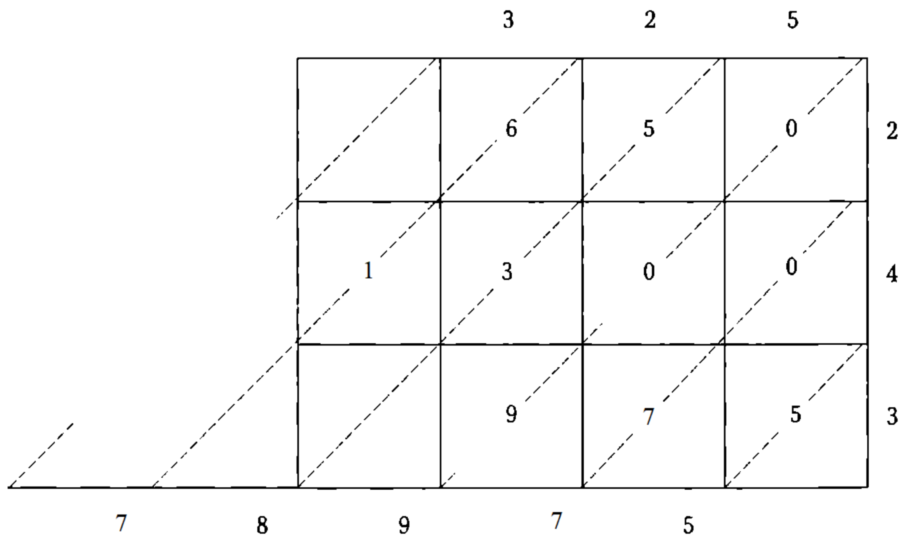


Slika 9.8: Množenje $325 \cdot 243$ - 2. način (preuzeto iz [13], str. 566.)

Osim navedenih, postojale su i druge metode množenja brojeva. Treća je metoda detaljnije prikazana u primjeru 9.3.2.

**Primjer 9.3.2.** *Množenje brojeva 325 i 28 - 3. način (v. [13], str. 569.-571.).*

Brojevi 325 i 243 množili su se na način da su se računali umnošci po recima i stupcima. Ukoliko je umnožak bio veći od 9, desetice su se prenosile u sljedeći stupac s lijeve strane. Prvi je korak bio pomnožiti brojeve 5 i 2. S obzirom na to da je $5 \cdot 2 = 10$, u prvo se polje s desne strane upisuje 0, a 1 se prenosi. U drugo polje upisujemo rezultat računanja $2 \cdot 2 + 1 = 5$, a u treće polje rezultat $3 \cdot 2 = 6$. Postupak se ponovio u drugom i trećem retku, a konačno se rješenje dobilo zbrajanjem brojeva po dijagonalama.




Slika 9.9: Množenje 325 · 243 - 3. način (preuzeto iz [13], str. 566.)

# Poglavlje 10

# Hrvati

## 10.1 Povijesni pregled

Ako pogledamo razvoj brojevnih sustava u svijetu, ne možemo se ne zapitati kako se prije mnogo godina računalo na području današnje Republike Hrvatske. Hrvatsku srednjovjekovnu pismenost obilježila je glagoljaška kultura. Prema [12], glagoljica je najstarije slavensko pismo. Osmišljena je polovicom 9. st. kao pismo slavenskih prijevoda grčkih liturgijskih tekstova za potrebe širenja kršćanstva među slavenskim narodima. Postoje dvije skupine teorija o podrijetlu glagoljice. Zastupnici jedne skupine smatraju kako je Konstantin Filozof stvorio glagoljicu izravno iz nekog drugog pisma (jednog ili kombinacijom više njih), a kod druge teorije zastupnici se slažu kako je stvorio samostalan slovni sustav izvodeći slova po simboličnim načelima ili kombiniranjem ograničenog broja geometrijskih likova ili njihovih dijelova. Danas su paleografi većinski usuglašeni da je glagoljica zasebno i autorsko pismo.

Godine 1248. papa Inocent IV. šalje pismo senjskom biskupu Filipu. Pismo sadržava papino dopuštenje da biskup vrši bogoslužje na crkvenoslavenskome jeziku iz knjiga pisanih glagoljicom. Ovime je pismom po prvi puta jedan katolički biskup dobio dopuštenje da misu služi na nelatinskom jeziku. Pismo stoga shvaćamo kao jasan i izravan dokaz prihvaćanja glagoljice i slavenskog bogoslužja u hrvatskim krajevima, navodi [14].

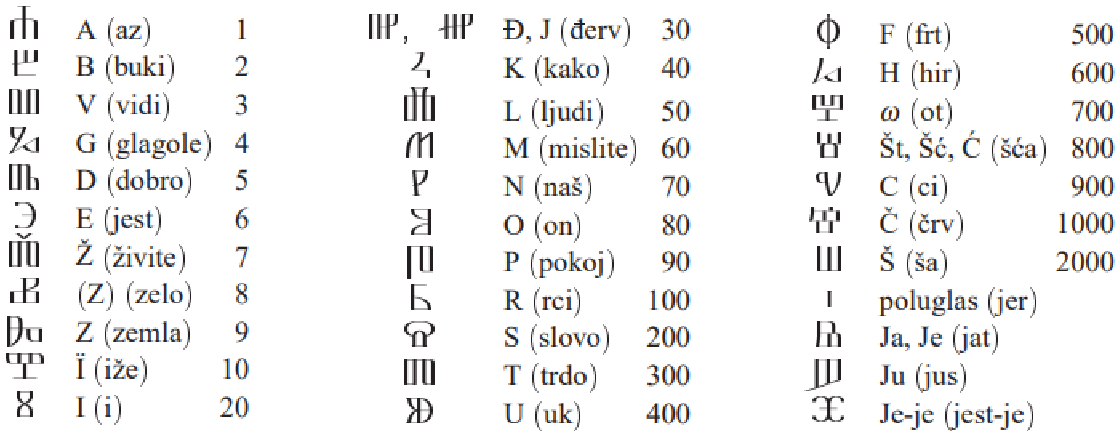
Prema [12], Hrvati su glagoljicom počeli pisati u drugoj polovici 9. st., a od kraja 12. st. jedini su narod koji upotrebljava i razvija glagoljicu. Glagoljica je bila glavno pismo za hrvatskostaroslavenski jezik sve do početka 16. st. kada latinica prevladava. Uporaba glagoljice se od tada neprestano smanjuje, a najdulje je zadržana u liturgiji. Republika Hrvatska je 2014. godine ”umijeće čitanja, pisanja i tiskanja glagoljice” proglasila hrvatskim nematerijalnim kulturnim dobrom, v. [20].

## 10.2 Glagoljski brojevi

Brojeve pisane glagoljicom pronalazimo već na *Bašćanskoj ploči* (kraj 11. st.). Ondje se spominje 12 apostola i 4 evanđelista. Dvanaest se apostola u mnogim glagoljskim knjigama zapisuje kao 'dva na deset apostolov' iz čega vidimo da se brojevi zapisuju onako kako se izgovaraju, navodi Žubrinić u [21].

Prema Žubriniću (v. [22]), Juraj iz Slavonije (1355./60.-1416.) je bio profesor na sveučilištu Sorbonne u Parizu. Ondje je u posljednjem desetljeću 14. st. napisao prvu poznatu glagoljašku početnicu radi poučavanja francuskih studenata hrvatskoj glagoljici. U zapisu je Juraj po sjećanju zapisao molitve *Očenaš*, *Zdravomarijo*, *Vjerovanje Nicejsko*, *Vjerovanje Apostolsko* te psalam *Smiluj mi se Bože*.

Juraj je u rukopisu želio pokazati kako se pišu glagoljska slova, zajedno s odgovarajućim nazivima i brojevnim vrijednostima. Na slici 10.1 glagoljska su slova zapisana onako kako je to činio Juraj iz Slavonije, v. [21].




Slika 10.1: Glagoljski brojevi - uglata glagoljica (preuzeto iz [21])

Brojevi su se zapisivali na način da se stavio mali kvadratić ispred i iza odgovarajućeg slova, a ponekad i vitica iznad slova (v. [21]). Zapisivanje višeznamenkastih brojeva opisati ćemo na primjeru. Recimo da želimo zapisati broj 97. Njega shvaćamo kao 90 + 7 iz čega slijedi da zapisujemo kvadratić, oznaku za slovo P (broj 90), kvadratić, oznaku za slovo Ž (broj 7) i kvadratić (v. slika 10.2).

Slika 10.2: Glagoljski zapis broja 97 (preuzeto iz [21])

Iznimka u zapisivanju brojeva su brojevi od 11 do 19. Kod navedenih se dvoznamenkastih brojeva najprije pišu znamenke jedinica, a zatim znamenke desetica. Takav način pisanja možemo povezati s današnjim nazivima tih brojeva. Jedanaest nastaje od starohrvatskog 'jedan na dest' (jedan na deset), dvanaest od 'dva na dest' (dva na deset), trinaest od 'tri na dest' (tri na deset) itd. Slika 10.3 prikazuje zapis broja 12 kao 1 + 11, v.[21].

Slika 10.3: Glagoljski zapis broja 12 (preuzeto iz [21])

## 10.3 Množenje

Spomenimo još, kao zanimljivost, način množenja brojeva od 5 do 10. Ova stara vještina primjer je računanja primjerenog konkretnim potrebama tadašnjeg života. Postupak su dokumentirali i opisali Radić i Žubrinić [19].

Kako bismo pravilno koristili ovu vještinu, od nas se očekuje da napamet znamo množiti brojeve od 1 do 5. Svaki od brojeva koje množimo možemo prikazati prstima jedne ruke i to na način da broj 6 prikažemo s jednim podignutim prstom i 4 stisnuta, broj 7 s dva podignuta prsta i 3 stisnuta i tako sve do 10 (svih 5 prstiju je podignuto).

Recimo da želimo pomnožiti brojeve 6 i 7. Jednom ćemo rukom prikazati broj 6 (1 podignuti prst), a drugom rukom broj 7 (dva podignuta prsta). Rezultat dobivamo tako što zbrojimo podignute prste na obje ruke kao desetice ((1 + 2) desetice = 3 desetice = 30) te tom broju pribrojimo umnožak brojeva stisnutih prstiju ($4 \cdot 3 = 12$). Dakle, $30 + 12 = 42$. Preostaje nam još dokazati da objašnjeni postupak uvijek daje točan rezultat.

*Dokaz.* Ako množimo brojeve $x$ i $y$ na opisani način, najprije ćemo na jednoj ruci dignuti $x - 5$ prstiju, a na drugoj $y - 5$. Zbroj podignutih prstiju na obje ruke iznosi

$$(x - 5) + (y - 5) = x + y - 10.$$

Navedeni zbroj gledamo kao broj desetica, tj. broj

$$10[x + y - 10] = 10x + 10y - 100. \tag{10.1}$$

Dobivenom broju dodajemo umnožak broja stisnutih prstiju jedne ruke s brojem prstiju druge ruke, tj.

$$[5 - (x - 5)] \cdot [5 - (y - 5)] = (10 - x)(10 - y) = 100 - 10x - 10y + xy. \tag{10.2}$$

Za kraj provjeravamo je li zbroj brojeva (10.1) i (10.2) jednak umnošku $xy$.

$$(10x + 10y - 100) + (100 - 10x - 10y + xy) = xy.$$

□

# Poglavlje 11

# Binarni brojevni sustav

## 11.1 Povijesni pregled

Binarni je brojevni sustav sustav s bazom 2. To znači da se svi brojevi mogu zapisati kombinacijom samo dviju znamenki - 0 i 1. Također, ovo je pozicijski i aditivno-multiplikativni brojevni sustav.

Prema Edutoriju ([5]), najmanja jedinica podatka koju računalo može prepoznati je bit (**bi**nary digi**t**), a ona može imati dva stanja - uključeno/isključeno, da/ne, istina/laž tj. 0/1 (eng. on/off).

Binarni kod, tj. binarni brojevni sustav jezik je računala i elektroničkih uređaja, navodi [9]. Korištenje binarnog brojevnog sustava pronalazimo i u antičkom Egiptu, a G. W. Leibniz, matematičar i filozof koji je živio u 17. stoljeću, osmislio je binarni brojevni sustav kakav se koristi danas. Leibniz je pomoću binarnog brojevnog sustava verbalne logičke izjave pretvarao u matematičke, koristeći samo dvije znamenke. U članku *Explication de l'Arithmétique Binaire* iz 1703. god. pokazao je kako uz pomoć nula i jedinica prikazivati brojeve te računati s njima.

Leibnizu je binarni brojevni sustav bio način kombiniranja matematike s vjerom i filozofijom te nije imao drugu svrhu. To se mijenja početkom 20. st. kada su u vrijeme Drugog svjetskog rata izumljena prva računala koja su zahtijevala korištenje ograničenog jezika kako bi se mogle kontrolirati funkcije (v. [9]).

## 11.2 Prikazivanje brojeva u binarnom brojevnom sustavu

Iako smo u prvom poglavlju objasnili kako se broj iz neke baze pretvara u dekadsku i obratno, ponovimo to još jednom te proširimo i na decimalne brojeve.

**Primjer 11.2.1.** *Prikazivanje broja* $100111_2$ *u dekadskom brojevnom sustavu.*

$$\begin{aligned} 100111_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 32 + 4 + 2 + 1 \\ &= 39_{10} \end{aligned} \tag{11.1}$$

Isti bismo postupak koristili i u radu s decimalnim brojevima, no znamenke koje se nalaze s desne strane decimalne točke bi množili s negativnim potencijama broja 10.

**Primjer 11.2.2.** *Prikazivanje broja* $1011.101_2$ *u dekadskom brojevnom sustavu (v. [5]).*

$$\begin{aligned} 1011.101_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \\ &= 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} \\ &= 8 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\ &= 11 + 0,5 + 0,125 \\ &= 11.625_{10} \end{aligned} \tag{11.2}$$

**Primjer 11.2.3.** *Prikazivanje broja* $39_{10}$ *u binarnom brojevnom sustavu.*

Postupak kojeg ćemo provesti je obrnut postupku opisanom u 11.1, a za njegovo prikazivanje koristit ćemo tablicu.

| cjelobrojno dijeljenje | ostatak |
|---|---|
| 39 : 2 = 19 | 1 |
| 19 : 2 = 9 | 1 |
| 9 : 2 = 4 | 1 |
| 4 : 2 = 2 | 0 |
| 2 : 2 = 1 | 0 |
| 1 : 2 = 0 | 1 ↑ |

Tablica 11.1: $39_{10} = 100111_2$

Dakle, $39_{10} = 100111_2$.

Kada pretvaramo decimalni broj zapisan u dekadskom brojevnom sustavu u binarni, cijeli dio broja dijelimo bazom, kao u prethodnom primjeru, a decimalni dio broja množimo bazom (zapisujemo cijeli dio, a decimalni množimo dalje). Množenje je gotovo kada kao rezultat dobijemo 1.0 ili dogovoreni broj decimala. Ostatke pri dijeljenju zapisujemo redom od dolje prema gore, a cjelobrojne dijelove koje smo dobili kod množenja od gore prema dolje (v. [5]).

**Primjer 11.2.4.** *Prikazivanje broja* $11.625_{10}$ *u binarnom brojevnom sustavu.*

Postupak kojeg ćemo provesti je obrnut postupku opisanom u 11.2.

| cijeli dio | | decimalni dio | | |
|---|---|---|---|---|
| dijeljenje | ostatak | množenje | cijeli dio | decimalni dio |
| $11 : 2 = 5$ | 1 | $0.625 \cdot 2 =$ | $1 \downarrow$ | 0.25 |
| $5 : 2 = 2$ | 1 | $0.25 \cdot 2 =$ | 0 | 0.5 |
| $2 : 2 = 1$ | 0 | $0.5 \cdot 2 =$ | 1 | 0 |
| $1 : 2 = 0$ | $1 \uparrow$ | | | |

Tablica 11.2: $11.625_{10} = 1011.101_2$

Dakle, $11.625_{10} = 1011.101_2$.

## 11.3 Zbrajanje i oduzimanje

Kako bismo što lakše zbrajali u binarnom brojevnom sustava, poslužit ćemo se pomoćnom tablicom za zbrajanje 11.3:

| zbrajanje | dekadski sustav | binarni sustav |
|---|---|---|
| $0 + 0 =$ | 0 | 0 |
| $0 + 1 =$ | 1 | 1 |
| $1 + 1 =$ | 2 | 10 |
| $1 + 1 + 1 =$ | 3 | 11 |

Tablica 11.3: Zbrajanje brojeva - pomoćna tablica

**Primjer 11.3.1.** *Zbrajanje binarnih brojeva* 1011 *i* 11 *(v. [7]).*

Zbrajanje binarnih brojeva funkcionira jednako kao i zbrajanje u dekadskoj bazi. Ukoliko se u pojedinom koraku kao parcijalna suma dobije višeznamenkasti broj, onda se posljednja znamenka zapisuje, a ostale se prenose (znamenke označene crvenom bojom na prikazu ispod). Na početku računamo zbroj znamenki 1 i 1 koje se nalaze na krajnjoj desnoj poziciji. Njihov je zbroj u binarnom brojevnom sustavu 10 pa znamenku 0 pišemo ispod crte, a znamenku 1 prenosimo dalje. U drugom koraku zbrajamo 1 i 1 te još jednu znamenku 1 koju smo ranije prenijeli. Rezultat je 11 pa znamenku 1 pišemo i znamenku 1 prenosimo dalje. Postupak se analogno nastavlja.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Oduzimanje binarnih brojeva svodimo na zbrajanje. Ako bismo željeli izračunati $25-9$, onda možemo provesti zbrajanje $25 + (-9)$. Kako bismo zapisali negativan broj, u ovom slučaju $-9$, koristit ćemo metodu dvojnog komplementa koju ćemo objasniti na primjeru (v. [7]).

**Primjer 11.3.2.** *Računamo* $25 - 9$*, tj.* $11001_2 - 1001_2$.

Prvi je korak nadopunjavanje nulama jer oba broja moraju imati jednak broj znamenki.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

U drugom koraku kod umanjitelja zamijenimo nule jedinicama i jedinice nulama (dobivamo komplement).

$$01001 \rightarrow 10110$$

U trećem koraku komplementu dodajemo 1 (dobivamo dvojni komplement).

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & & & & & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Dalje provodimo zbrajanje, no umjesto dodavanja negativnog broja dodajemo njegov dvojni komplement. Kada dobijemo zbroj, krajnju lijevu znamenku mičemo (tzv. preljev), a preostale su znamenke traženi broj.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & \color{red}{\cancel{1}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Vrijedi $11001_2 - 1001_2 = 10000_2$, tj. $25 - 9 = 16$.

## 11.4 Množenje i dijeljenje

Množenje se u binarnom brojevnom sustavu provodi analogno kao i u dekadskom. Čak štoviše, jednostavnije je od množenja u dekadskom brojevnom sustavu jer se množe samo znamenke nula i jedinica (v. [15]).

**Primjer 11.4.1.** *Računamo* $1101_2 \cdot 101_2$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
+ & & & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & &
\end{array}
$$

Dijeljenje je u binarnom brojevnom sustavu također analogno dijeljenju u dekadskom. Kada određujemo prvu znamenku kvocijenta dvaju brojeva, procjenjujemo koliko puta djelitelj "stane" u početni niz znamenki djelitelja. Postoje samo dva odgovora - 0 ili 1.

**Primjer 11.4.2.** *Računamo* $100011_2 : 111_2$ *(v. [15]).*

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & : 111 = 101 \\
- & 1 & 1 & 1 & & & & \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & - & 1 & 1 & 1 & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

# Bibliografija


[1] African Heritage: *The Ishango Bone: Craddle of Ancient Mathematics*, dostupno na `https://afrolegends.com/2013/08/29/the-ishango-bone-craddle-of-mathematics/` (lipanj 2021.)

[2] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, Princeton University Press, New Jersey, 1985.

[3] D. M. Burton, *The History of Mathematics: an introduction - 5th ed.*, McGraw Hill, Boston [etc.], 2003.

[4] Clay Mathematics Institute Historical Archive: *Euclid's Elements, Book X*, dostupno na `https://www.claymath.org/library/historical/euclid/book10.html` (kolovoz 2021.)

[5] K.T. Dlačić, T. Široka, *Edutorij: Binarni brojevni sustav*, dostupno na `https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/c4e1aebf-48e0-4d92-b6a9-0716a4e1c740/html/418_binarni_brojevni_sustav.html` (kolovoz 2021.)

[6] K.T. Dlačić, T. Široka, *Edutorij: Brojevni sustavi*, dostupno na `https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/c4e1aebf-48e0-4d92-b6a9-0716a4e1c740/html/417_brojevni_sustavi.html` (kolovoz 2021.)

[7] K.T. Dlačić, T. Široka, *Edutorij: Zbrajanje brojeva u binarnom brojevnom sustavu*, dostupno na `https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/c4e1aebf-48e0-4d92-b6a9-0716a4e1c740/html/419_zbrajanje_brojeva_u_binarnom_brojevnom_sustavu.html` (kolovoz 2021.)

[8] encyclopedia.com: *Roman Numerals: Their Origins, Impact, and Limitations*, dostupno na `https://www.encyclopedia.com/science/encyclopedias-almanacs-transcripts-and-maps/roman-numerals-their-origins-impact-and-limitations` (kolovoz 2021.)

[9] O. Gonzalez, *Gottgried Wilheim Leibniz: How his binary system shaped the digital age*, dostupno na https://www.inverse.com/article/46587-gottfried-wilhelm-leibniz-binary-system (kolovoz 2021.)

[10] E. J. Hom, *Roman Numerals: Conversion, Meaning & Origins*, dostupno na https://www.livescience.com/32052-roman-numerals.html/ (kolovoz 2021.)

[11] Hrvatska enciklopedija: *brojevni sustav*, dostupno na https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=9668 (kolovoz 2021.)

[12] Hrvatska enciklopedija: *glagoljica*, dostupno na http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=22160 (svibanj 2021.)

[13] G. Ifrah, *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*, John Wiley & Sons, Inc., Kanada, 2000.

[14] Institut za hrvatski jezik i jezikoslovlje: *Pismo pape Inocenta IV. senjskomu biskupu Filipu*, dostupno na http://ihjj.hr/iz-povijesti/pismo-pape-inocenta-iv-senjskomu-biskupu-filipu/3/ (svibanj 2021.)

[15] V. Krčadinac, *Osnove algoritama - predavanja*, Sveučičište u Zagrebu, 2016. - dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/oa/oa-skripta.pdf

[16] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *A history of Zero*, dostupno na https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Zero/ (kolovoz 2021.)

[17] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *The Arabic numeral system*, dostupno na https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Arabic_numerals/ (kolovoz 2021.)

[18] Portal hrvatske tehničke baštine: *HŽ – Hrvatske željeznice d. o. o.*, dostupno na https://tehnika.lzmk.hr/hrvatske-zeljeznice-d-o-o/ (kolovoz 2021.)

[19] N. Radić, D. Žubrinić, *Kako su računali naši stari*, Matematika i škola, 3 (1999), 78-81

[20] Registar kulturnih dobara RH: *Umijeće čitanja, pisanja i tiskanja glagoljice*, dostupno na https://registar.kulturnadobra.hr/#/details/Z-6236 (svibanj 2021.)

[21] D. Žubrinić, *Glagoljski brojevi*, Matematika i škola, 11 (2001), 72-74

[22] D. Žubrinić, *Juraj Slovinac*, dostupno na http://www.croatianhistory.net/etf/juraj.html (svibanj 2021.)

# Sažetak

U ovome je radu prikazan kratak povijesni pregled razvoja brojevnih sustava - od pramatematike preko Egipta, Mezopotamije, Grčke, Rima, Indije, Kine i Arapa do brojevnih sustava koji se danas koriste u računalima. Svakom je brojevnom sustavu posvećeno jedno poglavlje u kojem je dan povijesni kontekst te su navedene osnovne značajke uz poneki primjer računanja ili zanimljivost. U zasebnom su poglavlju proučavane i glagoljske brojke koje su koristili Hrvati od 9. st. Kako bi se lakše shvatio razvoj brojevnih sustava, na početku rada su predstavljene i objašnjene osnovne tvrdnje o brojevnim sustavima.

# Summary

This paper presents a brief historical overview of the development of numeral systems - from pre-mathematics through Egypt, Mesopotamia, Greece, Rome, India, China and the Arabs to numeral systems used in computers today. Each chapter is dedicated to one numeral system in which is given the historical context and the basic features, with some examples of calculation or interesting facts. In a separate chapter Glagolitic numerals used by Croats from the 9th century were also studied. In order to better understand the development of numeral systems, the basic statements about numeral systems are presented and explained at the beginning of the paper.

# Životopis

Rođena sam 8. srpnja 1996. godine u Zagrebu gdje sam pohađala Osnovnu školu Odra i Prvu gimanziju. Nakon završetka srednje škole upisujem preddiplomski sveučilišni studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Akademski naziv sveučilišne prvostupnice edukacije matematike stekla sam 2019. godine, a iste godine studij nastavljam na diplomskom sveučilišnom studiju Matematika - nastavnički smjer.