SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Župić

STRUKTURALNI MODELI KREDITNOG RIZIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Azra Tafro

Zagreb, 2021

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mojoj učiteljici koja mi je još u prvom razredu osnovne škole usadila ljubav prema matematici.

Najveće hvala mojim roditeljima i braći koji su vjerovali u mene i kada ja nisam.

Hvala mojim prijateljima i kolegama što je školovanje bilo i zabavno.

Zahvaljujem se i svojoj mentorici doc. dr. sc. Azri Tafro na strpljenju i razumijevanju.

Sadržaj

Uvod

Važan pojam u svijetu ekonomije i financija je pojam financijskog rizika. U knjizi [4] financijski se rizik definira kao vjerojatnost da će poduzeće/organizacija izgubiti prihode ili ostvariti manje prihoda nego što očekuje.
Jedan od temeljnih tipova financijskog rizika je kreditni rizik koji se javlja kada dužnik nije u stanju podmiriti svoje obaveze te na taj način davatelj duga gubi prihode ili ostvaruje manje od očekivanog.
U analizi kreditnog rizika, važno je procijeniti dužnika i njegovu imovinu. U prvom poglavlju ovog rada objasnit ćemo kako i kojim elementima opisujemo rizičnost dužnika, navesti osnovne varijable kreditnog rizika te na kraju uvesti pojam kreditnih izvedenica. Također, definirat ćemo i europsku *call* i *put* opciju na dionicu čije cijene ćemo odrediti u idućem poglavlju.
Drugo poglavlje predstavlja cijelu matematičku pozadinu potrebnu za modeliranje kreditnog rizika. Temelji se na procesu Brownovog gibanja koji će nam koristiti za modeliranje kretanja cijena dionica, Itôvom integralnom računu i stohastičkim diferencijalnim jednadžbama. Zatim uvodimo Black-Scholes-Mertonov model s ciljem određivanja nearbitražnih cijena europskih *call* opcija.
U trećem poglavlju baziramo se na strukturalne modele i temeljni tip tog modela, Mertonov model. Navodimo pretpostavke o tržištu na kojem se truguju te pokazujemo kako se određuju cijene pomoću Black-Scholes-Mertonovog modela.
Kako je ključan pojam kreditnog rizika pojam *defaulta*, odredit ćemo i vjerojatnost ulaska u *default* poduzeća obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru. Na kraju rada bavimo se proširenjima Mertonovog modela. Objasnit ćemo kako se Mertonov model implementira u praksi kao KMV model. Nakon toga uvodimo modele koji se baziraju na kreditnim migracijama i želimo pokazati kako se oni modeliraju kao strukturalni modeli.
Na kraju rada navodimo još dva modela, prvi koji u proces kretanja cijena dionica uključuje i nagle skokove ili padove, difuzijske modele sa skokovima i multivarijatne modele koji mogu modelirati istodobno više od jednog poduzeća.

Poglavlje 1

Kreditni rizik

1.1 Uvod

Kreditni rizik predstavlja rizik nepodmirivanja obveza dužnika u vremenski ugovorenim rokovima. Ako se obveze ne ispune, kažemo da je došlo do neizvršenja novčanih obaveza (eng. *default*). U nastavku rada zbog jednostavnosti, koristit ćemo izraz *default*.
Default može nastati prilikom bilo koje financijske aktivnosti koja uključuje vraćanje duga. Najčešće se odnosi na financijske institucije koje se moraju zaštititi od rizičnih klijenata i mogućnosti nevraćanja duga. Ilustrirajmo koncept kreditnog rizika na primjeru bankarskih kredita. Banke daju zajmove klijentima te se na taj način suočavaju s rizikom da taj dug neće biti vraćen i da će se njihova imovina smanjiti. Upravo zbog toga što je odobravanje kredita njihova primarna aktivnost, banke veliku pažnju pridaju proučavanju kreditnog rizika, metodama kontrole rizika te provođenju kreditnih analiza.
Kako bi se rizik kontrolirao, vrlo je važno pokušati predvidjeti kretanje financijske imovine dužnika te procijeniti njegovu rizičnost.

1.2 Modeliranje kreditnog rizika

U ovom poglavlju objasnit ćemo osnovni koncept modeliranja kreditnog rizika. Navest ćemo elemente kreditnog rizika te temeljne matematičke pojmove koji su potrebni. Teorija iz ovog poglavlja bazira se na [2], [10] i [12].

Elementi kreditnog rizika

Navodimo elemente kreditnog rizika pomoću kojih možemo opisati rizičnost dužnika:

1. Vjerojatnost ulaska u *default*, jedan od najvažnijih pojmova u modeliranju, a predstavlja vjerojatnost da će se druga strana oglušiti na ugovorne obveze. Prema Baselskom sporazumu, do *defaulta* dolazi ako dužnik kasni više od 90 dana od datuma dospijeća duga sa vraćanjem duga.

2. Stopa naplate loših kredita, postotak nominalne vrijednosti koju je dužnik sposoban vratiti nakon što je ušao u *default*.

3. Kreditne migracije, kretanje iz jedne skupine kreditnog rejtinga [1] u drugu skupinu, pri čemu kreditni rejting predstavlja skupinu u koju svrstavamo poduzeće ovisno o njegovoj kreditnoj sposobnosti. Dužnik se može kretati u skupinu više ili niže kvalitete.

4. Default i kreditna korelacija, stupanj koji mjeri povezanost kreditne sposobnosti i kvalitete kredite jednog dužnika s kreditnom sposobnosti i kvalitetom kredita drugog dužnika.

5. Kreditna koncentracija i distribucija rizika, mjeri koliko (u postotku) neki instrument utječe na rizik portfelja ili koliko pojedinačni dužnik doprinosi rizičnosti cijelog portfelja.

Sada želimo definirati osnovne matematičke pojmove i navesti parametre koje koristimo kako bismo modelirali kreditni rizik nekog poduzeća. Počet ćemo s definicijom vjerojatnosti, vjerojatnosnog prostora i filtracije na tom vjerojatnosnom prostoru, a zatim ćemo prijeći na definiranje varijabli koje će nam biti potrebne.

Definicija 1.2.1. *Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja. Vjerojatnost na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ koja zadovoljava sljedeća tri aksioma:*

1. *(nenegativnost) $\mathbb{P}(A) \geq 0$, za sve $A \in \mathcal{F}$,*

2. *(normiranost) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,*

3. *(σ-aditivnost) Za sve $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih događaja $A_j \in \mathcal{F}$ vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j). \tag{1.1}$$

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zove se vjerojatnosni prostor.

Definicija 1.2.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.*

[1] eng. rating, ocjena

1. *Familija* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ *σ-podalgebri takvih da je* $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ *za svaki* $n \geq 0$ *zove se filtracija.*

2. *Slučajni proces* $X = (X_n : n \geq 0)$ *zove se adaptiran obzirom na filtraciju* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ *ako je za svaki* $n \geq 0$ *slučajna varijabla* X_n $\mathcal{F}_n$*-izmjeriva.*

3. *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *slučajni proces. Za* $n \geq 0$ *definiramo* ${\mathcal{F}_n}^0 := \sigma(X_0, ...X_n)$. *Tada se filtracija* $\mathbb{F}^0 = ({\mathcal{F}_n}^0 : n \geq 0)$ *zove prirodna filtracija od X.*

Sada imamo dovoljno matematičke podloge da bismo definirali neke od osnovnih varijabli kreditnog rizika.
Pretpostavimo da je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ filtracija obzirom na taj vjerojatnosni prostor i T vremenski horizont. Također, pretpostavljamo da promatramo neko poduzeće. Promatramo sljedeće slučajne varijable kreditnog rizika:

1. Proces vrijednosti imovine poduzeća $V = (V_t : t \geq 0)$, tj. vrijednost imovine poduzeća koja je dana u svakom trenutku $t \leq T$.

2. Barijerni proces v definiran kao granični proces *defaulta*, trenutak u kojem barijerni proces premaši vrijednost poduzeća određuje vrijeme *defaulta*.

3. X, obaveze poduzeća koje trebaju biti namirene u vremenu $t \leq T$.

4. Vrijeme defaulta τ koje definiramo kao $\tau = \inf\{t > 0 : V_t \leq v_t\}$. Općenito, slučajna varijabla $\tau : \Omega \to \{0, 1, ..., \}$ zove se vrijeme zaustavljanja ako za svaki $\tau \in \{0, 1, ..., T\}$ vrijedi $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Zapravo, τ je prvo vrijeme kada barijerni proces dosegne vrijednost imovine. Po definiciji slijedi da je τ vrijeme zaustavljanja.

1.3 Kreditne izvedenice

Općenito, pojam financijskih izvedenica predstavlja bilo koji financijski instrument čija je vrijednost izvedena iz vrijednosti glavnog instrumenta, npr. cijena opcije na dionicu izvedena je iz cijene dionice.
Jedan tip financijskih izvedenica su kreditne izvedenice, ugovori koji su prilagođeni potrebama i željama kupaca, a svima im je zajedničko da omogućavaju prebacivanje kreditnog rizika s jedne strane na drugu, tj. sredstvo su sprječavanja izloženosti riziku. Pojam kreditnih izvedenica nastao je ranih 1990-ih a predstavlja bilo koji financijski instrument koji kontrolira rizik ulaska u *default*, tj. kreditni rizik. Ovaj odjeljak baziran je na [1], [2] i [8].
Najčešći tipovi kreditnih izvedenica su:

1. *Forward* ugovori, ugovori koji daju pravo i obvezu da se obavi kupnja ili prodaja u unaprijed određenom vremenskom trenutku T po unaprijed određenoj cijeni K.

Postoje dvije strane, ona koja kupuje imovinu (duga pozicija) i ona koja se obavezuje isporučiti imovinu (kratka pozicija). Elementi *forward* ugovora su datum dospijeća T, cijena izvršenja forwarda $f(t, T)$ i cijena vrijednosnice u trenutku T koja je dana sa S_T. U trenutku $t = 0$ vrijedi $f(0, T) = K$.
Ako je $S_T \geq f(0, T)$ investitor u dugoj poziciji kupuje vrijednosnicu po cijeni $f(0, T)$ i prodaje je po tržišnoj cijeni S_T te na taj način zarađuje razliku $S_T - f(0, T)$.
Ako je $S_T < f(0, T)$ situacija je obrnuta i investitor u kratkoj poziciji zarađuje razliku $f(0, T) - S_T$.

2. Opcije
Za razliku od *forward* ugovora, opcije su ugovori koji daju pravo, ali ne i obavezu da se obavi kupnja ili prodaja vrijednosnice po unaprijed dogovorenoj cijeni na unaprijed dogovoreni datum. Ovisno o tome radi li se o kupnji ili prodaji, postoje dvije vrste opcija:

   Definicija 1.3.1. *Call opcija je ugovor koji daje pravo, ali ne i obavezu vlasniku opcije na kupovinu imovine po unaprijed dogovorenoj cijeni na unaprijed dogovoren datum.*

   Definicija 1.3.2. *Put opcija je ugovor koji daje pravo, ali ne i obavezu vlasniku opcije na prodaju imovine po unaprijed dogovorenoj cijeni na unaprijed dogovoren datum.*

   Također, postoje dva tipa opcija obzirom na vrijeme dospijeća. Ako se kupovina/prodaja obavlja u vremenu T, radi se o europskoj opciji, a ako se obavlja u bilo kojem trenutku do vremena T, govorimo o američkoj opciji.

3. Zamjene
Zamjene su ugovori u kojem dvije strane dogovaraju razmjenu financijske imovine ili novčanih tokova na unaprijed dogovoreni datum. Najčešći primjeri su kamatne zamjene kod kojih se provodi zamjena jedne vrste kamatnih obveza za drugu (u istoj valuti) i valutne zamjene gdje se mijenjaju obaveze plaćanja u jednoj valuti za obaveze u drugoj valuti.

U ovom radu posebno će nam biti važne opcije na dionice, točnije europska *call* opcija na dionicu koja će nam služiti za modeliranje kretanja cijena dionica.

Primjer 1.3.3. *(europska call i put opcija na dionicu) Pretpostavimo da je K cijena izvršenja opcije, S_t vrijednost dionice u trenutku t i T vrijeme dospijeća opcije. Ako se radi o europskoj call opciji, dogovara se kupovina imovine koja se treba izvršiti u trenutku T. U slučaju*

da je $S_T > K$ vlasnik opcije će obaviti kupovinu te potom prodati dionicu po tržišnoj vrijednosti. U slučaju da je $S_T \leq K$ opcija se neće izvršiti.
Vrijednost call opcije u trenutku T je dana s :

$$C_T = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0). \tag{1.2}$$

Ako se radi o europskoj put opciji dogovara se prodaja imovine u trenutku T. Mogli bismo doći do cijene put opcije razmišljajući analogno kao i kod call opcije, no koristit ćemo sljedeću relaciju:

$$C_T - P_T = S_T - K.$$

Ova relacija se zove call-put paritet, a iz nje slijedi da je cijena put opcije u trenutku T jednaka

$$P_T = (S_T - K)^+ - (S_T - K) = (K - S_T)^+.$$

Poglavlje 2

Matematička podloga strukturalnih modela

2.1 Uvod

U ovom poglavlju definirat ćemo sve matematičke pojmove koji su nam potrebni za modeliranje kreditnog rizika Mertonovim modelom u poglavlju 3. Teorija se temelji na Brownovom gibanju, ekvivalentnoj martingalnoj mjeri i Girsanovljevom teoremu te Itôvom integralnom računu i stohastičkim diferencijalnim jednadžbama.
U odjeljku 2.5 izvest ćemo Black-Scholes-Mertonov model koji čini bazu za određivanje cijena financijske imovine. Pomoću njega ćemo u posljednjem odjeljku 2.6 odrediti cijenu euoropske *call* opcije. Sve definicije, iskazi i dokazi teorema i propozicije mogu se pronaći u [2], [7] i [8].

2.2 Brownovo gibanje

Prvo trebamo definirati Brownovo gibanje jer ćemo pomoću njega modelirati proces cijena dionica $S(t)$.
Brownovo gibanje duguje naziv škotskom botaničaru Robertu Brownu, a postojanje je dokazao američki matematičar i filozof Norbert Wiener, stoga Brownovo gibanje često nazivamo i Wienerovim procesom. Svoje mjesto je našlo u raznim područjima. Primjerice, u svijet ekonomije Brownovo gibanje uvodi Louis Bachelier, a svijet fizike Albert Einstein. Kasnije, Paul Samuelson konstruira Itôv integralni račun koji se bazira na Brownovom gibanju, a Merton ga koristi za modeliranje cijena imovine u financijskom području. U nastavku poglavlja vidjet ćemo da se Brownovo gibanje zbog svoje strukture prirodno nameće kao sredstvo za modeliranje varijabli koje su uzrokovane slučajnim fluktuacijama (vidi [2]).

Uz pojam Brownovog gibanja vežemo i pojam filtracije za Brownovo gibanje. U nastavku poglavlja definiramo pojmove.

Definicija 2.2.1. *(Brownovo gibanje) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajni proces $B = (B_t : t \geq 0)$ je Brownovo gibanje ako vrijedi:*

1. *Putovi $t \mapsto B_t(\omega)$ su neprekidne funkcije sa $\mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}$ (za g.s. $\omega \in \Omega$).*
2. *$B_0 = 0$.*
3. *Za sve $m \in \mathbb{N}$ i $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ prirasti*

$$B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

   su nezavisni.

4. *Za sve $0 \leq s < t$ prirast $B_t - B_s$ je normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom $t - s$.*

Ovu definiciju možemo iskazati i na drugačiji način. Ako sa ΔB označimo promjenu u vrijednosti slučajnog procesa B u malom vremenskom intervalu Δt, slučajni proces $B = (B_t : t \geq 0)$ je Brownovo gibanje ako vrijedi:

1. Za sve male vremenske intervale Δt vrijedi:

$$\Delta B = \varepsilon \Delta t, \tag{2.1}$$

   pri čemu je ε standardna normalna varijabla, tj. $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

2. Prirasti ΔB su nezavisni za sve male vremenske intervale Δt.

Kako je ε standardna normalna varijabla, iz 2.1 slijedi da je ΔB također normalno distribuirana slučajna varijabla, ali s očekivanjem 0 i varijancom Δt, tj.

$$\Delta B \sim N(0, \Delta t).$$

Posebno vrijedi:

$$B_t = B_t - B_0 \sim N(0, t).$$

Distribucija varijable B_t nam je veoma važna jer se na njoj baziraju distribucije ostalih varijabli strukturalnih modela.

Definicija 2.2.2. *(Filtracija za Brownovo gibanje) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na tom prostoru. Filtracija za Brownovo gibanje je familija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ σ-algebri koja zadovoljava:*

1. *Za sve* $0 \leq s < t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *(informacija kasnije ne može biti manja od informacije ranije).*

2. *(Adaptiranost) Za svaki* $t \geq 0$, B_t *je* $\mathcal{F}_t$*-izmjeriva slučajna varijabla (informacija dostupna u trenutku t dovoljna je za računanje Brownovog gibanja u tom trenutku).*

3. *(Nezavisnost budućih prirasta) Za sve* $0 \leq s < t$, *prirast* $B_t - B_s$ *nezavisan je od* $\mathcal{F}_s$ *(svaki prirast Brownovog gibanja nakon vremena s nezavisan je od informacije dostupne u trenutku s).*

Najjednostavnije što možemo uzeti za filtraciju Brownovog gibanja je najmanja σ-algebra generirana tim Brownovim gibanjem do trenutka t, tj. $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$.
Također, može se pokazati da putovi Brownovog gibanja $t \mapsto B_t(\omega)$ nisu nigdje diferencijabilni.
U idućem potpoglavlju detaljno ćemo pojasniti neka važna svojstva Brownovog gibanja kao što su martingalno i Markovljevo svojstvo.

Svojstva Brownovog gibanja

Da bismo pokazali martingalno svojstvo, prvo moramo definirati pojam martingala.

Definicija 2.2.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i neka je* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ *filtracija. Slučajni proces* $M = (M_t : t \geq 0)$ *je martingal ako vrijedi:*

1. M *je* $\mathbb{F}$*-adaptiran.*

2. *Za sve* $t \geq 0$, $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$.

3. *Za sve* $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ *g.s.*

$\mathbb{F}$- adaptiranost znači da je slučajna varijabla M_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva za svaki $n \geq 0$. Zapravo, ako znamo sve vrijednosti procesa M do sadašnjeg trenutka, uključujući i sadašnji, tada je očekivana vrijednost u budućnosti jednaka sadašnjoj vrijednosti. Lako se pokaže da je Brownovo gibanje martingal s obzirom na filtraciju generiranu tim Brownovim gibanjem. Tvrdnja slijedi iz nezavisnosti $B_t - B_s$ od $\mathcal{F}_s$, a $\mathbb{F}$-adaptiranost i konačnost očekivanja očito vrijede.
Neka je $0 \leq s \leq t$. Tada vrijedi:

$$E[B_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s \mid \mathcal{F}_s] = B_s. \tag{2.2}$$

Sljedeće zanimljivo svojstvo je Markovljevo svojstvo. Prvo ćemo definirati Markovljev proces te iskazati teorem koji pokazuje da Brownovo gibanje ima Markovljevo svojstvo.

Definicija 2.2.4. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor te neka je* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ *filtracija. Adaptiran slučajni proces* $X = (X_t : t \geq 0)$ *je Markovljev proces, ako za sve* $0 \leq s \leq t$ *i za sve Borel-izmjerive funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *postoji Borel-izmjeriva funkcija* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takva da je*

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = g(X_s) \text{ g.s.}$$

Teorem 2.2.5. *Neka je* $B = (B_t : t \geq 0)$ *Brownovo gibanje te neka je* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ *filtracija za to Brownovo gibanje. Tada je B Markovljev proces.*

Očekivana vrijednost neke funkcije Brownovog gibanja u trenutku t, uvjetno na σ-algebru $\mathcal{F}_s$ jednaka je vrijednosti neke druge funkcije u trenutku s. Drugim riječima, svako stanje procesa B u budućnosti ne ovisi o prethodnim stanjima, već samo o sadašnjem. Objasnit ćemo bolje na primjeru cijene dionice koja prati Brownovo gibanje i ima Markovljevo svojstvo o čemu se radi. Pretpostavimo da je cijena dionice 100 Kn. Tada buduća cijena dionice ovisi samo o trenutnoj cijeni, a ostale prethodne zanemarujemo. Kako pretpostavljamo da cijenu dionice možemo modelirati Brownovim gibanjem, promjena u cijeni dionice od vremenskog trenutka $t = 0$ do trenutka $t = 1$ je normalno distribuirana s očekivanjem 0 i varijancom 1. Analogno, promjena od trenutka $t = 0$ do trenutka $t = 2$ jednaka je zbroju promjena od trenutka $t = 0$ do $t = 1$ (distribucija promjene je $N(0, 1)$) i od trenutka $t = 1$ do $t = 2$ (distribucija promjene je $N(0, 1)$). Kako su promjene nezavisne, promjena od trenutka $t = 0$ do trenutka $t = 2$ normalno je distribuirana sa zbrojenim očekivanjem i varijancama. Prezicnije, prati distribuciju $N(0, 2)$. Zapravo vrijedi i općenitije, promjena u cijeni dionica od trenutka $t = 0$ do trenutka $t = T$ normalno je distribuirana s parametrima 0 i T.

Kvadratna varijacija Brownovog gibanja

Definirat ćemo pojam kvadratne varijacije Brownovog gibanja te intuitivno i formalno odrediti koliko iznosi za Brownovo gibanje na intervalu $[0, T]$. Počnimo s definicijom varijacije prvog reda neke funkcije.

Definicija 2.2.6. *Neka je* $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ *funkcija. Particija intervala* $[0, T]$ *je skup* $\Pi = t_0, t_1, ..., t_n$ *točaka takvih da je* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$*. Dijametar particije* Π *je najveća veličina koraka :* $||\Pi|| := \max_{j=0,...,n-1}(t_{j+1} - t_j)$*. Varijacija prvog reda funkcije* f *na intervalu* $[0, T]$ *definira se kao*

$$V_T(f) = \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|. \tag{2.3}$$

Ako je taj limes konačan, funkcija f je konačne varijacije.

Važna je posljedica sljedeće propozicije koja govori o varijaciji neprekidnog martingala.

Propozicija 2.2.7. *Neprekidni martingal je konačne varijacije ako i samo ako je konstantan.*

Kako je Brownovo gibanje neprekidni martingal koji očito nije konstantan slijedi da je beskonačne (neomeđene) varijacije.
Sada prelazimo na kvadratnu varijaciju.

Definicija 2.2.8. *Neka je $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ funkcija. Kvadratna varijacija od f na intervalu $[0, T]$ definira se kao:*

$$[f, f](T) := \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2. \tag{2.4}$$

Za f kažemo da je konačne kvadratne varijacije ako gornji limes postoji i konačan je. Slučajni proces $X = (X_t : t \leq 0)$ je konačne kvadratne varijacije ako postoji slučajan proces $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t : t \geq 0)$ takav da je

$$\langle X \rangle_T = (P) \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |X_{t_{j+1}} - X_{t_j}|^2. \tag{2.5}$$

Proces $\langle X \rangle$ zovemo proces kvadratne varijacije od X.

Pretpostavimo da promatramo Brownovo gibanje B na intervalu $[0, 1]$. Odaberemo neku veličinu koraka, npr. $\frac{1}{n}$, pustimo $n \to \infty$ (želimo jako male promjene u kretanju) te računamo

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left[B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right]^2. \tag{2.6}$$

Ovaj izraz predstavlja kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja, a glavna ideja je da kada pustimo $n \to \infty$ limes je jednak desnom rubu intervala koji promatramo, tj. 1. Ovakav zaključak nas motivira na to da je kvadratna varijacija Brownovog gibanja na intervalu $[0, T]$ jednaka upravo T, za svaki $T \geq 0$. Sljedeći teorem to potvrđuje.

Teorem 2.2.9. *Neka je B Brownovo gibanje. Tada je $\langle B \rangle_T = T$ za sve $T \geq 0$ gotovo sigurno.*

Dokaz možemo pronaći u [8], a ovaj teorem govori da se kvadratna varijacija u svakom trenutku povećava za jedinicu vremena, npr. neka je dan interval $[0, 4]$. Tada je kvadratna varijacija na tom intervalu jednaka 4, a na intervalu $[0, 2]$ jednaka je 2. Očito slijedi da je onda na intervalu $[2, 4]$ jednaka 2.

2.3 Girsanovljev teorem

Itôv integral

Želimo definirati $\int_0^T H_t dB_t$, gdje je $H = (H_t : 0 \leq t \leq T)$ adaptiran slučajan proces, a $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Kako znamo da je Brownovo gibanje neomeđene varijacije, ovaj integral ne možemo definirati po trajektorijama Brownovog gibanja. Moramo koristiti drugi pristup, Itôv integral ćemo definirati po koracima, prvo za jednostavne integrande, a potom ćemo definiciju proširiti i za opće integrande. Definicije iz ovog poglavlja preuzete su iz [8].
Da bismo definirali Itôv integral za jednostavne integrande, prvo moramo definirati jednostavan proces.

Definicija 2.3.1. *Adaptiran slučajan proces $H = (H_t : 0 \leq t \leq T)$ zove se jednostavan proces ako je*

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j 1_{[t_j, t_{j+1}\rangle}(t), \tag{2.7}$$

gdje je $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$ particija intervala $[0, T]$, a ϕ_j su omeđene $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjerive slučajne varijable, $j = 0, ..., n-1$.

Drugim riječima, H se ne može mijenjati na intervalima particije. Na svakom intervalu $[t_j, t_{j+1}\rangle$ jednak je slučajnoj varijabli $\phi(j)$. Familiju jednostavnih procesa zvat ćemo ε_T.
Sada smo spremni definirati Itôv integral obzirom na takav jednostavan proces H.

Definicija 2.3.2. *Za jednostavan proces H definiramo slučajan proces $I = (I_t : t \geq 0)$ s*

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t}), \tag{2.8}$$

pri čemu je $a \wedge b = \min\{a, b\}$. Proces $I = (I_t : t \geq 0)$ zovemo Itôv integral jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B.

Sada proširujemo definiciju na opće integrande, sve adaptirane slučajne procese $H = (H_t : t \geq 0)$ za koje vrijedi:

$$\mathbb{E} \int_0^T H_t^2 dt < \infty. \tag{2.9}$$

Familija općih integranada je vektorski prostor $\mathcal{L}^2_{ad}$ sa skalarnim produktom

$$\langle H, K \rangle_{\mathcal{L}^2_{ad}} = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_t K_t dt\right], \quad H, K \in \mathcal{L}^2_{ad} \tag{2.10}$$

i normom
$$\|H\|^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} = \langle H, H\rangle_{\mathcal{L}^2_{ad}} = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_t^2 dt\right]. \tag{2.11}$$
Kako se svaki niz $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ može aproksimirati nizom jednostavnih procesa $H^{(n)} \in \varepsilon_T$, tada Itôv integral općih integranada definiramo kao limes integrala jednostavnih procesa u odnosu na Brownovo gibanje, a sva svojstva se prenose i na ove integrale. Taj limes postoji zato što je niz Itôvih integrala jednostavnih procesa Cauchyjev u potpunom prostoru (L^2) pa sigurno konvergira. Više detalja može se pronaći u [8].
Pišemo:
$$\int_0^t H_u dB_u = (L^2)\lim_{n\to\infty}\int_0^t H_u^{(n)} dB_u, \quad H_u \in \mathcal{L}^2_{ad} \text{ i } H_u^{(n)} \in \varepsilon_T. \tag{2.12}$$
Sada ćemo iskazati teorem koji govori o svojstvima Itôvog integrala.

Teorem 2.3.3. *Neka je $T \geq 0$ te neka je $H = (H_t : t \geq 0) \in \mathcal{L}^2_{ad}$. Tada Itôv integral općih integranada ima sljedeća svojstva:*

1. *(neprekidnost) Funkcija $t \mapsto I_t$ je neprekidna na $[0, T]$ g.s.*
2. *(linearnost) Za H, $K \in \mathcal{L}^2_{ad}$ i α i β konstante vrijedi:*
$$((\alpha H + \beta K)\cdot B)_t = \alpha(H\cdot B)_t + \beta(K \cdot B)_t.$$
3. *(Itôva izometrija)*
$$\mathbb{E}I_t^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_u^2 du\right].$$
4. *I je martingal obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$.*

Kada smo definirali osnovne pojmove Itôvog integralnog računa možemo prijeći na ekvivalentnu martingalnu mjeru i Girsanovljev teorem.
Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka je Z nenegativna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}Z = 1$. Definiramo $\mathbb{P}^* : \mathcal{F} \to [0, 1]$ formulom:
$$\mathbb{P}^*(A) := \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega). \tag{2.13}$$

Kako vrijedi $\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}^*(A) = 0$, za svaki $A \in \mathcal{F}$, po definiciji slijedi da su vjerojatnosti $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}^*$ ekvivalentne na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Mjera $\mathbb{P}^*$ jako je važna u modeliranju rizika a naziva se ekvivalentna martingalna mjera. Uz nju, očekivana vrijednost rizične imovine jednaka je očekivanoj vrijednosti nerizične imovine. Upravo zato se ekvivalentna martingalna mjera naziva i mjera neutralna na rizik. Kako je ona dana formulom 2.13, preostaje odrediti proces Z da bismo konstruirali mjeru $\mathbb{P}^*$. Sljedeći teorem nam daje rješenje.

Teorem 2.3.4. *(Girsanovljev teorem) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ filtracija za to Brownovo gibanje. Za adaptiran slučajan proces $\Theta = (\Theta_t : 0 \leq t \leq T)$ takav da je*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Theta_s^2 ds\right] < \infty$$

definiramo

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \Theta_u dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_u^2 du\right), \quad Z = Z_T.$$

$$B_t^* = B_t + \int_0^t \Theta_u du.$$

Ako vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Theta_u^2 Z_u^2 du\right] < \infty,$$

tada je slučajni proces $B^* = (B_t^* : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}^*$.

Vidimo da pomoću Girsanovljevog teorema lako konstruiramo vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Brownovo gibanje B^* obzirom na $\mathbb{P}^*$ je zapravo Brownovo gibanje s driftom (pomakom), a ključan korak je odrediti proces Z koji uz Riemannov sadrži i Itôv integral.

2.4 Stohastičke diferencijalne jednadžbe

U ovom poglavlju uvodimo osnovni alat na kojem se bazira Itôv integralni račun, a to su stohastičke diferencijalne jednadžbe. Prvo ćemo definirati Itôv proces i pojam linearne stohastičke diferencijalne jednadžbe, a zatim iskazati Itôvu formulu (K. Itô, 1951.) koja je temelj Itôvog integralnog računa i više puta ćemo je koristiti u ovom radu.

Definicija 2.4.1. *Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija za to Brownovo gibanje. Itôv proces je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ oblika*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds,$$

gdje je $X_0 \in \mathbb{R}$, a $H = (H_t : t \geq 0)$ i $V = (V_t : t \geq 0)$ adaptirani procesi t.d. $H \in \mathcal{L}_{ad}^2$ i $\int_0^t |V_s| ds < \infty$ g.s. za sve $t \geq 0$.

Definicija 2.4.2. *Linearna stohastička diferencijalna jednadžba (SDJ) je stohastička jednadžba oblika*

$$X_t = Y_t + \int_0^t X_s dZ_s,$$

odnosno zapisano u diferencijalnom obliku

$$dX_t = dY_t + X_t dZ_t, \quad X_0 = Y_0,$$

gdje su $Y = (Y_t : t \geq 0)$ i $Z = (Z_t : t \geq 0)$ Itôvi procesi.

U nastavku navodimo dva primjera modela koji su opisani stohastičkim diferencijalnim jednadžbama, a potom Itôvu formulu, najvažniji rezultat Itôvog integralnog računa.

Primjer 2.4.3. *(Vasicekov model kamatnih stopa) Vasicekov model modelira kretanje procesa kamatnih stopa $R = (R_t : t \geq 0)$, a opisano je linearnom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom*

$$dR_t = (\alpha - \beta R_t)dt + \sigma dB_t, \quad t \geq 0.$$

Primjer 2.4.4. *(Cox-Ingersoll-Ross-ov (CIR) model kamatnih stopa) Za $\alpha, \beta, \sigma > 0$ kretanje procesa kamatnih stopa $R = (R_t : t \geq 0)$ opisano je diferencijalnom stohastičkom jednadžbom*

$$dR_t = (\alpha - \beta R_t)dt + \sigma \sqrt{t} dB_t, \quad t \geq 0.$$

Teorem 2.4.5. *(Itôva formula) Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces i neka je $f(t, x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ i $f_{xx}(t, x)$. Tada za svaki $T \geq 0$ vrijedi:*

$$\begin{aligned} f(T, X_T) &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t)\, dt + \int_0^T f_x(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t)\, d\langle X \rangle_t \\ &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t)\, dt + \int_0^T f_x(t, X_t)\, H_t\, dB_t + \int_0^T f_x(t, X_t)\, V_t dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t)\, {H_t}^2 dt. \end{aligned}$$

Formulu možemo i jednostavnije zapisati:

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)\, dX_t\, dX_t. \tag{2.14}$$

Primjer 2.4.6. *Na ovom primjeru primjenit ćemo Itôvu formulu na proces $(B_t^2 : t \geq 0)$, gdje je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje.*
Definiramo funkciju $f(t, x) = x^2$, td. vrijedi $f(t, B_t) = B_t^2$. Tada su parcijalne derivacije jednake :
$f_t(t, x) = 0$, $f_x(t, x) = 2x$, $f_{xx}(t, x) = 2$. Iz Itôve formule 2.14 slijedi:

$$df(t, B_t) = dB_t^2 = 0 + 2B_t dB_t + dt = 2B_t dB_t + dt.$$

2.5 Black-Scholes-Mertonov model

Black-Scholes-Mertonov model naziv je za određivanje cijena europskih opcija na dionice, a model su izveli Fischer Black, Myron Scholes i Robert Merton 70-ih godina prošlog stoljeća ([5]). Predstavljao je otkriće u svijetu matematike i ekonomije zbog toga što se određivanje cijena temelji na vrijednosti kapitala, tj. na vrijednosti dionice. Cilj ovog poglavlja je pomoću ovog modela odrediti cijenu europske *call* opcije na dionicu, a koristit ćemo literaturu [5], [7] i [8].

Geometrijsko Brownovo gibanje

Kada smo precizno definirali Brownovo gibanje i Itôvu formulu, uvodimo pojam geometrijskog Brownovog gibanja na kojem se bazira Black-Scholes-Mertonov model s kojim ćemo se detaljno upoznati u ovom poglavlju.
Geometrijsko Brownovo gibanje je slučajan proces cijena dionice S_t za koji vrijedi:

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma B_t + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t\right), \tag{2.15}$$

pri čemu je S_0 početna cijena dionice, α srednja stopa povrata, a σ volatilnost cijene dionice.
Parametar α predstavlja očekivani povrat dionice u nekom periodu, a σ mjeri osjetljivost povrata na promjene. Volatilnost najčešće procjenjujemo standardnom devijacijom log-povrata, a srednju stopu povrata aritmetičkom sredinom svih povrata. Parametar α ovisi proporcionalno o kamatnim stopama na tržištu i rizičnosti dionice S_t. No ipak, kada je riječ o rizičnosti, α možemo zanemariti jer ćemo pokazati da vrijednost opcije na dionicu neće ovisiti o α.

Svojstva financijskog tržišta

Pretpostavljamo da se na financijskom tržištu trguje novcem i dionicama. Novac predstavlja imovinu koja nije izložena riziku, a novcem se trguje po kamatnoj stopi r. Možemo ulagati u novac ili ga posuđivati. Kamatna stopa r može biti fiksna ili promjenjiva. Tako na primjer, ako uložimo M kuna u trenutku 0 po fiksnoj kamatnoj stopi r, u trenutku t imat ćemo $e^{rt}M$ kuna. Nasuprot tome, ako uložimo M kuna po promjenjivoj kamatnoj stopi (kamatna stopa ovisi o svakom trenutku) u trenutku t imat ćemo $Me^{\int_0^t r(s)ds}$ kuna.
Proces $e^{\int_0^t r(s)ds}$ zovemo procesom ukamaćivanja i označavamo ga s R_t, a proces definiran s $e^{-\int_0^t r(s)ds}$ nazivamo procesom diskontiranja D_t.

Dionica predstavlja rizičnu imovinu, a njen proces kretanja cijena dan je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom dobivenom pomoću Itôve formule 2.14 za funkciju $f(t,x) = S_0 e^x$ pri čemu je $S_t = f(t, X_t)$, a X_t Itôv proces dan s

$$X_t = \sigma B_t + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t.$$

Parcijalne derivacije jednake su:

$$\begin{aligned} f_t(t,x) &= 0. \\ f_x(t,x) &= f_{xx}(t,x) = S_0 e^x. \end{aligned}$$

Tada stohastička jednadžba za kretanje cijena dionice dobivena pomoću geometrijskog Brownovog gibanja u Black-Scholes-Mertonovom modelu glasi

$$\begin{aligned} dS_t &= df(t, X_t) \\ &= 0 + S_0 e^{X_t} dX_t + S_0 e^{X_t} dX_t dX_t \\ &= \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Primjetimo da se desna strana sastoji od dva dijela, jednog koji sadrži srednju stopu povrata α i drugog koji sadrži volatilnost cijene dionice σ. Član na lijevoj strani, dS_t, predstavlja promjenu cijene dionice u malom vremenskom intervalu, tj. od trenutka t do trenutka $t + \Delta$t. Sličnim razmišljanjem, zaključci se mogu proširiti i na $\alpha(s)$ i $\sigma(s)$ koji se mogu mijenjati kroz vrijeme, tj. ovise o trenutku s. U tom slučaju to su slučajni procesi a cijene dionica se modeliraju generaliziranim geometrijskim Brownovim gibanjem. Kod Mertonovog modela to neće biti potrebno pa nastavljamo dalje s geometrijskim Brownovim gibanjem.
Osim pretpostavke o kretanju cijena dionice pomoću Brownovog gibanja, navest ćemo i ostale pretpostavke o financijskom tržištu na kojem se trguje.

1. Nema transakcijskih troškova niti poreza, tj. trguje se bez troškova.
2. Sva imovina je beskonačno djeljiva i likvidna što znači da postoji onoliko imovine koliko je potrebno za ulaganje i posuđivanje.
3. Nema isplaćivanja dividendi.
4. Dopuštena je kratka prodaja (eng. *short sale*), tj. u portfelju u nekom trenutku broj jedinica imovine može biti negativan.
5. Trgovanje je neprekidno, trguje se u bilo kojem trenutku $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.
6. Kamatna stopa r jednaka je za posuđivanje i ulaganje, a ne nosi sa sobom rizik.

7. Nema mogućnosti arbitraže.

Nadalje, vratimo se na proces kretanja cijena dionica i pokažimo da proces S_t ima log-normalnu distribuciju što će nam biti od koristi pri određivanju cijena opcija na dionicu.

Definicija 2.5.1. *Za slučajnu varijablu $X > 0$ kažemo da ima log-normalnu distribuciju ako slučajna varijabla $Y = \log X$ ima normalnu distribuciju.*

Također vrijedi:

$$\text{Y ima normalnu distribuciju} \Rightarrow X = e^Y \text{ ima log-normalnu distribuciju}$$

Tvrdnja slijedi direktno pomoću funkcije gustoće normalne distribucije, a detalji se mogu pronaći u [8].
Zaključujemo ako $\log S(t)$ ima normalnu razdiobu, tada će $S(t)$ imati log-normalnu distribuciju sa istim parametrima. To ćemo pokazati Koristeći Itôvu formulu 2.14 za funkciju $f(t,x) = \log x$. Tada vrijedi:

$$f(t,x) = \log x, \text{ td. } f(t,S_t) = \log S_t.$$

$$f_t(t,x) = 0.$$

$$f_x(t,x) = \tfrac{1}{x}.$$

$$f_{xx}(t,x) = \tfrac{-1}{x^2}.$$

$$\Rightarrow df(t,S_t) = d\log S_t = (\alpha - \tfrac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dB_t.$$

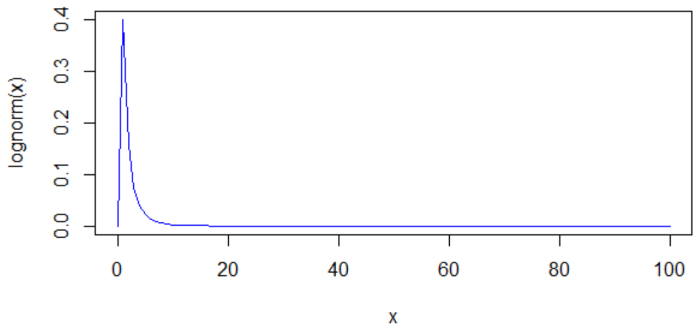
$$\Rightarrow \log S(t) = \log S(0) + (\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t).$$

Vidimo da je proces $\log S(t)$ zapravo geometrijsko Brownovo gibanje sa parametrima $\alpha - \frac{\sigma^2}{2}$ i σ. Kako znamo da je za takav proces, promjena u vrijednostima između trenutaka $t = 0$ i $t = T$ normalno distribuirana slijedi:

$$\Rightarrow \log S(T) - \log S(0) \sim N\Big((\alpha - \tfrac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\Big).$$

$$\Rightarrow \log S(T) \sim N\Big(\log S(0) + (\alpha - \tfrac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\Big).$$

Log-normalna distribucija ima zanimljiva svojstva. Za razliku od normalne distribucije koja je definirana i za negativne vrijednosti, log-normalna distribucija uzima samo pozitivne brojeve što je pogodno za modeliranje financijske imovine koja postiže takve vrijednosti.



Slika 2.1: Log-normalna distribucija

Pretpostavimo da je Y slučajna varijabla koja ima log-normalnu distribuciju s parametrima μ i σ^2. Tada je očekivanje te varijable dano s

$$\mathbb{E}(Y) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}},$$

a varijanca je dana s

$$\mathrm{Var}(Y) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}.$$

Za $Y = S_T$ imamo:

$$\mathbb{E}S_T = S_0 e^{\alpha T}.$$

$$\mathrm{Var}S_T = (e^{\sigma^2} - 1)S_0^2 e^{2\alpha T}.$$

Log-normalnost procesa S_T će nam biti iznimno važna kod određivanja vjerojatnosti ulaska u *default* u poglavlju 3.

Računanje srednje stope povrata i volatilnosti

Objasnit ćemo malo detaljnije kako se u praksi procjenjuju parametri α i σ, a u tome će nam pomoći literatura [5]. Pretpostavimo da imamo $n + 1$ podataka o cijenama dionice $\{S_0, S_1, ..., S_n\}$ u nekom vremenskom periodu τ, pri čemu se τ mjeri u godinama. Primjerice, možemo imati godišnje podatke o cijenama dionica pa je tada $\tau = 1$. Također, pretpostavimo da je kamatna stopa promjenjiva.

Računamo log-povrate na cijene dionica:

$$\begin{aligned} u_t &= \log(\frac{S_t}{S_{t-1}}), \quad t = 1, ..., n. \\ \Longrightarrow \frac{S_t}{S_{t-1}} &= e^{u_t}. \\ \Longrightarrow S_t &= S_{t-1}e^{u_t}. \end{aligned}$$

Zaključujemo da u_t zapravo predstavlja neprekidnu kamatnu stopu na dionicu u trenutku t. Kako smo pokazali da

$$\log S(T) - \log S(0) \sim N\left((\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\right), \tag{2.17}$$

i vremenski se trenuci t povećavaju za interval τ, tj. $t = \tau, 2\tau, ...$ vrijedi

$$u_t = \log S(\tau) - \log S(0) \sim N\left((\alpha - \frac{\sigma^2}{2})\tau, \sigma^2 \tau\right). \tag{2.18}$$

Nakon što smo izračunali log-povrate, iz podataka o cijenama dionica koje imamo odredimo uzoračku varijancu log-povrata. Uzoračka varijanca je dana s

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}. \tag{2.19}$$

$$\bar{u} = \mathbb{E}(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}. \tag{2.20}$$

Iz formule 2.18 slijedi da je

$$s = \sqrt{\sigma^2 \tau} = \sigma\sqrt{\tau} \Longrightarrow \hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}. \tag{2.21}$$

Pomoću procijenjene vrijednosti parametra volatilnosti σ možemo procijeniti i parametar srednje stope povrata α. Kako je distribucija u_t dana formulom 2.18, a očekivanje $\mathbb{E}(u)$ jednako uzoračkoj aritmetičkoj sredini (2.20) slijedi

$$\bar{u} = (\alpha - \frac{\hat{\sigma}^2}{2})\tau \Longrightarrow \alpha - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \frac{\bar{u}}{\tau} \Longrightarrow \hat{\alpha} = \frac{\bar{u}}{\tau} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}. \tag{2.22}$$

Zaključujemo, procedura za procjenu parametara σ i α je sljedeća:

1. Iz dobivenog uzorka cijena dionica izračunati uzoračku varijancu danu formulom 2.19.

2. Pomoću uzoračke varijance procijeniti parametar σ dan formulom 2.21.

3. Pomoću parametra σ procijeniti parametar α dan formulom 2.22.

2.6 Određivanje cijene europske call opcije

U prvom poglavlju definirali smo pojam financijskih izvedenica i europske call opcije, a sada ćemo definirati još neke pojmove koji su nam potrebni da bismo odredili njezinu cijenu. Rezultati koje ćemo navesti značili su veliko otkriće u svijetu matematike i ekonomije 70-ih godina prošlog stoljeća, a čine bazu za određivanju cijena svih ostalih izvedenica. Definicije i teoremi iz ovog poglavlja mogu se pronaći u [7] i [8]. Krećemo s osnovnim definicijama s ciljem da iskažemo dva osnovna teorema određivanja cijena financijske imovine.

Definicija 2.6.1. *Slučajni zahtjev je slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *takva da je*

$$0 \leq C < \infty \quad \mathbb{P} - g.s.$$

U kontekstu slučajnih zahtjeva možemo definirati i pojam izvedenice. Na tržištu na kojem se trguje novcem S_0 *i dionicom* S_1 *izvedenicu D definiramo:*

$$D = f(S_0, S_1), \text{ u trenutku } t = 1,$$

pri čemu je f *Borelova funkcija,* $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$.

Definicija 2.6.2. *Portfelj je vektor* $\phi = (\phi^0, \phi^1)$, *gdje je prva komponenta broj jedinica novca, a druga broj dionica koje investitor posjeduje u trenutku* $t = 0$.
Vrijednost portfelja u trenutku t jednaka je

$$V_t(\phi) = \phi^0 S_t^0 + \phi^1 S_t^1,$$

pri čemu je S_t^0 *broj jedinica novca u trenutku t, a* S_t^1 *broj dionica u trenutku t.*

Definicija 2.6.3. *Slučajni zahtjev C je dostižan ako postoji portfelj* ϕ *takav da je* $V_T(\phi) = C$, *tj. vrijednost portfelja V u trenutku T jednaka je vrijednosti slučajnog zahtjeva. Kažemo da C replicira* ϕ.

Dostižnost slučajnih zahtjeva će nam biti bitna kod konstrukcije potpunog tržišta, a potpuno tržište koje ne dopušta arbitražu daje jedinstvenu ekvivalentnu martingalnu mjeru. No, idemo prvo definirati pojam arbitraže i potpunosti tržišta.

Definicija 2.6.4. *Portfelj* ϕ *naziva se arbitraža ako vrijedi* $\phi \cdot S_0 = 0$, *ali* $\phi \cdot S_1 \geq 0$ *i* $\mathbb{P}[\phi \cdot S_1 > 0] > 0$.

Arbitraža je zapravo portfelj koji donosi pozitivan profit $\mathbb{P} - g.s.$. Kako su takvi portfelji nerealni i gotovo da ih ne možemo pronaći na tržištu tražit ćemo nearbitražne cijene financijske imovine.

Definicija 2.6.5. *Tržište je potpuno ako je svaki slučajan zahtjev dostižan.*

Sada smo spremni iskazati dva osnovna teorema za određivanje cijena financijske imovine koji se baziraju na ekvivalentnoj martingalnoj mjeri.

Teorem 2.6.6. *(Prvi fundamentalni teorem određivanja cijene imovine) Tržište ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Također, za konstrukciju ekvivalentne martingalne mjere, važan je pojam potpunosti tržišta.

Teorem 2.6.7. *(Drugi fundamentalni teorem određivanja cijene imovine) Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Tada je tržište potpuno ako i samo ako postoji jedinstvena martingalna mjera.*

Preostaje još pokazati kako određujemo cijena slučajnih zahtjeva. Sljedeća propozicija nam daje alat za to.

Propozicija 2.6.8. *Ako prošireni model tržišta* $(R, S, \Pi(C))$ *dopušta ekvivalentnu martingalnu mjeru* $\mathbb{P}^*$ *tada je*

$$\Pi(C)_t = R_t\, \mathbb{E}^*[D_T C \mid \mathcal{F}_t]. \tag{2.23}$$

Napokon, idemo odrediti cijenu europske call opcije pomoću propozicije 2.6.8. Potrebna nam je vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ iz Girsanovljevog teorema.
Neka je $C = \max\{S_t - K, 0\} = (S_t - K)_+$ cijena *call* opcije, te neka su σ i r redom volatilnost i kamatna stopa. Tada je cijena europske *call* opcije na dionicu dana s:

$$c(t, S_t) = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \mid \mathcal{S}_t],$$

gdje druga jednakost slijedi iz činjenice da je S_t Markovljev proces. Detaljan račun se nalazi u [8], a dobijemo da je:

$$c(t, x) = x\phi(d_{t,1}) - e^{-r(T-t)}\phi(d_{t,2}).$$

$$d_{t,1} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log\frac{x}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right].$$

$$d_{t,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log\frac{x}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right].$$

Za $x = S_t$ imamo:

$$c(t, S_t) = S_t\phi(d_{t,1}) - e^{-r(T-t)}\phi(d_{t,2}),$$

pri čemu je ϕ funkcija distribucije jedinične normalne razdiobe, tj.

$$\phi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-z^2}{2}} dz.$$

Zanimljivo je uočiti da Black-Scholes-Mertonova formula ne sadrži parametar α. On se mijenja s kamatnom stopom r, što znači da rizičnost ne utječe na rješenje jednadžbe. Upravo zato možemo reći da je ova formula neutralna na rizik.

Poglavlje 3

Mertonov model i proširenja

3.1 Kvantitativni modeli kreditnog rizika

Kvantitativni modeli kreditnog rizika proučavaju uzroke nastanka *defaulta* i kreditnu sposobnost dužnika te pomoću tih parametara modeliraju odgovarajuće cijene i traže načine kako zaštititi ugovore koji su izloženi kreditnom riziku. Modele kreditnog rizika možemo podijeliti u dvije skupine, strukturalne i reducirane modele. Strukturalni modeli koncentriraju se na vrijednost imovine poduzeća i kapitalnu strukturu (izvore financiranja poduzeća). Oni pretpostavljaju da je *default* uzrokovan nižom vrijednosti imovine poduzeća u odnosu na obaveze koje trebaju biti podmirene.
Za razliku od strukturalnih modela, reducirani modeli su koncentrirani samo na proces koji je potaknuo *default* te zanemaruju vrijednost poduzeća. Razvoj strukturalnih modela dugujemo Robertu C. Mertonu, američkom sociologu koji je 1974. izveo model određivanja cijena financijske imovine. Navest ćemo pretpostavke modela, pojasniti kako se određuju cijene imovine i izračunati vjerojatnost ulaska u *default*. Također, navodimo i proširenja Mertonovog modela. Teorija iz ovog poglavlja bazira se na [1] i [4].

3.2 Pretpostavke

Kako je Mertonov model tip strukturalnog modela, do neispunjavanja obveza dolazi ako je vrijednost imovine poduzeća manja od vrijednosti duga koji je potrebno otplatiti. Stoga, promatramo poduzeće i njegovu vrijednost imovine. Pretpostavljamo da je kretanje vrijednosti imovine opisano slučajnim procesom $V = (V_t : t \geq 0)$. Vrijednost imovine V u svakom trenutku t je zapravo zbroj:

1. vrijednosti temeljnog kapitala S_t koji se formira izdavanjem dionica,
2. vrijednosti duga B_t koji predstavlja obaveze koje poduzeće treba podmiriti.

Prema tome imamo:

$$V = (V_t : 0 \leq t \leq T) = (S_t + B_t : 0 \leq t \leq T).$$

Kod Mertonovog modela, B_t je dug u vidu beskuponske obveznice s nominalnom vrijednosti B i datumom dospijeća T. Dug B_T koji treba otplatiti zapravo je jednak nominalnoj vrijednosti obveznice B. U nastavku rada, B će označavati dug poduzeća koji je potrebno namiriti u vremenu dospijeća T.
Ostalo je objasniti pojam beskuponske obveznice. Kao što joj samo ime govori, beskuponska obveznica sa sobom ne donosi kupone, tj. ne donosi kamatu u vremenskim intervalima do dospijeća već se ukamaćivanje događa samo jednom do dospijeća.
Odmah uočavamo jedan problem Mertonovog modela, a to je veliko pojednostavljenje mogućnosti zaduživanja poduzeća. U realnom svijetu postoje razne druge opcije zaduživanja i moguće je zaduživanju u bilo kojem vremenskom trenutku tako da ovaj model ipak ne oslikava pravo stanje na tržištu.
U svom radu ([6]) Merton uvodi pretpostavke o financijskom tržištu na kojem se trguje. Neke od njih se podudaraju s pretpostavkama u Black-Scholes-Mertonovom modelu:

1. Nema transakcijskih troškova i poreza.

2. Nema ograničenja na količinu imovine kojom se trguje i svi trgovatelji imaju pristup potrebnim informacijama.

3. Postoji devizno tržište na kojem se posuđuje/ulaže po istoj kamatnoj stopi.

4. Dozvoljena je kratka prodaja imovine.

5. Trgovanje se odvija neprekidno u vremenu, tj. moguće trgovanje je u bilo kojem trenutku $s \in \mathbb{R}$, $0 \leq s \leq t$.

6. Kamatna stopa $r \geq 0$ sa sobom ne nosi premiju rizika i jednaka je za posuđivanje i ulaganje.

7. Proces vrijednosti imovine V_t dan je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom.

8. Vrijedi Modigliani-Millerov teorem, tj. vrijednost poduzeća ne ovisi o kapitalnoj strukturi (izvorima financiranja) (vidi [9]).

9. Nema isplaćivanja dividendi ni novog zaduživanja.

Imajući na umu ove pretpostavke, odredit ćemo cijene dionica S_t.
U nastavku rada, postat će jasno zašto smo uveli pojam Brownovog gibanja, geometrijskog Brownovog gibanja i Black-Scholes-Mertonov model.

3.3 Određivanje cijena

Iz strukture vrijednosti imovine V i duga B koje smo definirali u poglavlju 3.2 zaključujemo da do *defaulta* može doći jedino u vremenu dospijeća obveznice, tj. u trenutku T. Razlikujemo dva slučaja :

1. $V_T > B$, ne dolazi do *defaulta*, poduzeće uspješno otplaćuje dug B, vrijednost dionice u trenutku T jednaka je $S_T = V_T - B$, a kako se dug otplaćuje njegova vrijednost je $B_T = B$.

2. $V_T \leq B$, dolazi do *defaulta*, poduzeće nema dovoljno imovine da bi otplatilo dug, a vrijednost dionice u trenutku T jednaka je $S_T = 0$. Kako poduzeće ne može otplatiti dug, davatelj duga dobiva vrijednost imovine poduzeća, tj. $B_T = V_T$.

Zbog toga što predstavlja graničnu vrijednost za ulazak u *default*, B se naziva i točkom *defaulta*.
Iz navedenog slijedi

$$\begin{aligned} S_T &= \max\{V_T - B, 0\}. \\ B_T &= \min\{V_T, B\}. \end{aligned}$$

Vrijeme ulaska u *default* jednako je:

$$\tau = T \cdot 1_{\{V_T < B\}} + \infty \cdot 1_{\{V_T \geq B\}}.$$

Jedna od osnovnih pretpostavki Mertonovog modela je pretpostavka da se proces vrijednosti imovine V_t modelira pomoću geometrijskog Brownovog gibanja (2.5), tj.

$$dV_t = \alpha V_t dt + \sigma V_t \, dB_t \, ,$$

gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, a B_t Brownovo gibanje. Primjetimo da proces S_t odgovara europskoj *call* opciji na vrijednost imovine V_t pa ćemo iskoristiti sve pokazano iz Black-Scholes-Mertonovog modela za određivanje cijena S_t. Prema (2.6) cijena je dana s Black-Scholes-Mertonovom formulom:

$$S_t = c(t, V_t) = V_t \phi(d_{t,1}) - Be^{-r(T-t)} \phi(d_{t,2}). \tag{3.1}$$

$$d_{t,1} = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left[\log V_t - \log B + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) \right]. \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} d_{t,2} &= \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left[\log V_t - \log B + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) \right] \\ &= d_{t,1} - \sigma \sqrt{T-t}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

a ϕ je funkcija distribucije standardne normalne razdiobe.

3.4 Vjerojatnost ulaska u default

Nakon što smo odredili cijene dionice S_t želimo odrediti vjerojatnost ulaska u *default* obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}$. Jednostavnim računom dobijemo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_T \leq B) &= \mathbb{P}(\log V_T \leq \log B)\\ &= \phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{B}{V_0} - (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T\right)\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Intuitivno, što je veća nominalna vrijednost B logično je pretpostaviti da je i veća vjerojatnost neispunjavanja obveza jer se obveze povećavaju i sve teže ih je otplatiti. Također, ako se V_0 i α povećavaju, tj. početna vrijednost imovine je veća i srednja stopa povrata na imovinu je veća, vjerojatnost ulaska u *default* je manja. Matematički, iz formule koju smo izveli, vidimo da je vjerojatnost ulaska u *default* funkcija koja ovisi o $\{B, \alpha, V_0, \sigma\}$. Rastuća je u B, a padajuća u α i V_0, a za $V_0 \geq B$ padajuća je i u σ.
U ovom poglavlju ćemo izračunati vjerojatnost ulaska u *default* obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ koju konstruiramo pomoću Girsanovljevog teorema(2.3.4). Na taj način ćemo odrediti vjerojatnost ulaska u *default* koja je neutralna na rizik.
Trebamo odrediti:

$$\mathbb{P}^*(V_T \leq B) \tag{3.5}$$

Kako V_t ima log-normalnu distribuciju slijedi da $\log V_t$ ima normalnu distribuciju, tj. vrijedi:

$$\begin{aligned} &\log V_t \sim N\left(\log V_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\right)\\ \implies &\frac{\log V_T - \log V_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2}T)}{\sigma\sqrt{T}} \sim N(0,1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sada možemo odrediti vjerojatnost 3.5.
Vrijedi:

$$\mathbb{P}^*(V_T \leq B) = \mathbb{P}^*(\log V_T \leq \log B) \tag{3.7}$$

$$= \mathbb{P}^*\left(\frac{\log V_T}{\sigma\sqrt{T}} \leq \frac{\log B}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{3.8}$$

$$= \mathbb{P}^*\left(\frac{\log V_T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{-\log V_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \leq \frac{\log V_T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{-\log V_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{3.9}$$

$$= \mathbb{P}^*\left(\frac{\log V_T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{-\log V_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \leq -d_{0,2}\right) \tag{3.10}$$

$$= \phi(-d_{0,2}) \tag{3.11}$$

$$= 1 - \phi(d_{0,2}) \tag{3.12}$$

Slijedi da je izrazom $1 - \phi(d_{0,2})$ definirana vjerojatnost ulaska u *default* neutralna na rizik.
Može se definirati i općenitije, izrazom $1 - \phi(d_{t,2})$ definiramo tu vjerojatnost u bilo kojem trenutku t.

3.5 KMV model

Kao što smo vidjeli, Mertonov model znatno pojednostavljuje svari. Merton pretpostavlja da do *defaulta* može doći samo u vremenu dospijeća obveznice T i da se poduzeće može zadužiti samo jednom.
U realnom svijetu, do *defaulta* dolazi kada dug B prvi put dosegne vrijednost imovine V. Preciznije :

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : V_t \leq B\}.$$

Prema tome, τ je zapravo vrijeme zaustavljanja.
Ovakvi zaključci doveli su do proširenja Mertonovog modela kako bi prezentirao realniju sliku financijskog tržišta.
Prvi model koji ćemo spomenuti je KMV model, a koristit ćemo literaturu [4].
Dobio je naziv po poduzeću koje ga je dovelo na tržište, a to je KMV, privatno poduzeće koje su otvorili Kealhofer, McQuown i Vasicek. Uvelike je korišten u industriji, a o tome govori činjenica da 80% najvećih financijskih institucija na svijetu koristi baš ovaj model.
Najvažniji pojam kod ovog modela je očekivana frekvencija *defaulta*, eng. *expected default frequency* (EDF). Zbog jednostavnosti, u nastavku rada ćemo koristiti izraz EDF.
EDF je vjerojatnost da će, prema procjeni KMV modelom, neko poduzeće ući u *default* u roku od jedne godine. Prema Mertonu, vjerojatnost ulaska u *default* za $T = 1$ je vjerojatnost da će dug B dosegnuti razinu V_1. Koristeći 3.4 imamo :

$$\begin{aligned} EDF_{Merton} &= \phi\left(\frac{1}{\sigma}(\log B - \log V_0 - (\alpha - \frac{\sigma^2}{2}))\right) \\ &= 1 - \phi\left(\frac{1}{\sigma}(\log V_0 - \log B + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2}))\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Sada ćemo objasniti kako se implementira funkcija EDF_{KMV} koja se bazira na funkciji EDF_{Merton} danoj formulom 3.13.

1. B se mijenja sa $\tilde{B}$ koji uključuje sva zaduživanja u roku jedne godine pa realnije reprezentira strukturu duga poduzeća. Naime, moguća su nova zaduživanja i ulaganja prije dospijeća pa je time moguć i *default* prije dospijeća.

2. Funkcija distribucije normalne jedinične razdiobe iz formule 3.13 koja ima uzak rep mijenja se nekom distribucijom šireg repa pogodnijom za postizanje većih ili ekstremnijih vrijednosti. Ta funkcija je empirijska funkcija koja se temelji na ogromnoj bazi podataka prijašnjih ulazaka u *default* različitih poduzeća za različite vremenske trenutke.

3. Prije određivanja vjerojatnosti ulaska u *default*, KMV model dodatno uvodi varijablu, udaljenost od *defaulta*, eng. *distance to default* (DD), koja je dana s:

$$DD := \frac{V_0 - \tilde{B}}{\sigma V_0}, \tag{3.14}$$

pri čemu je $\tilde{B}$ točka *defaulta*, tj. obaveze koje se otplaćuju u roku jedne godine. (Prisjetimo se, sada B iz Mertonovog modela mijenjamo s $\tilde{B}$).
U nastavku ćemo umjesto *distance to default* koristiti izraz DD.
Važno je uočiti, kako za dovoljno male α i σ, tj.

$$\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \approx 0,$$

vrijedi:

$$\frac{1}{\sigma}\left(\log\frac{V_0}{B} + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})\right) \approx \frac{V_0 - \tilde{B}}{\sigma V_0} = DD, \tag{3.15}$$

zbog toga što vrijedi

$$\log V_0 - \log \tilde{B} \approx \frac{V_0 - \tilde{B}}{V_0}. \tag{3.16}$$

Iz ove aproksimacije slijedi da argument funkcije jedinične normalne razdiobe iz formule 3.13 možemo zamijeniti s DD.
Konačno, vrijedi:

$$EDF_{KMV} = F_{EMP}(DD) = F_{EMP}(\frac{V_0 - \tilde{B}}{\sigma V_0}). \tag{3.17}$$

Na taj način, KMV model pokušava nadomjestiti nedostatke Mertonovog modela.
Za kraj ćemo spomenuti kako se određuje vrijednost kapitala kod KMV modela.
Kod Mertonovog modela, vrijednost kapitala dana je kao rješenje Black-Scholes-Mertonove formule:

$$S_t = c(t, V_t; r, \sigma, B, T).$$

Kod implementacije KMV modela imamo malo drugačiju situaciju, koristimo Black-Scholes-Mertonovu formulu, ali i dodajemo dva dodatna parametra. Vrijednost kapitala je dana s

$$S_t = f(t, V_t; r, \sigma, d, T, c).$$

pri čemu parametar d predstavlja financijsku polugu poduzeća (koeficijent zaduženosti poduzeća), a parametar c prosječnu kamatu na dugoročan dug. Također, volatilnost je dana s

$$\sigma = g(t, V_t; r, \sigma, d, T, c). \tag{3.18}$$

Kako su u fiksiranom trenutku ove dvije jednadžbe zapravo jednadžbe s dvije nepoznanice(ovise samo o V_t i σ), V i σ računamo rješavanjem sustava.

3.6 Modeli bazirani na kreditnim migracijama

Ovi modeli bazirani su na kreditnom rejtingu i kreditnim migracijama. Pojam kreditnih migracija predstavlja kretanje poduzeća iz jedne skupine u drugu ovisno o njegovom kreditnom rejtingu. Kreditni rejting poduzeća mjeri sposobnost poduzeća da namiri svoje obveze i ne dođe do *defaulta*. Tri su najpoznatije agencije za dodjelu kreditnog rejtinga, Fitch, Moody's i S&P koje prema svojim kriterijima svrstavaju poduzeća u određenu skupinu, od AAA do D, gdje je AAA najviša kreditna kvaliteta a D neispunjavanje obveza.

Glavna pretpostavka ovakvih modela je da svrstavanje poduzeća u određenu skupinu kreditnog rejtinga zapravo određuje njegovu vjerojatnost ulaska u *default* pa tu vjerojatnost samo iščitamo iz matrice tranzicijskih vjerojatnosti. Da bismo bolje objasnili o čemu se radi, pogledat ćemo tablicu 3.1 koja je preuzeta iz literature [4] kao i sva teorija iz ovog odjeljka.
Na toj tablici prikazane su vjerojatnosti prelaska iz jedne skupine u drugu u roku jedne godine, a izračunao ih je S&P. Vidimo da je npr. vjerojatnost da će neko poduzeće koje je na početku godine svrstano u skupinu BBB na kraju godine ući u *default* jednako 0.18%.
Na drugoj tablici (3.2) koja je također preuzeta iz [4] prikazane su vjerojatnosti ulaska u *default* u sljedećih 15 godina za poduzeća ovisno o kreditnim razredima kojima pripadaju. Te vjerojatnosti je također izračunao S&P. Tako primjerice, poduzeće koje pripada razredu B u iduće dvije godine ulazi u *default* s vjerojatnošću od 11%.
Ovakve matrice se kreiraju na osnovu baze prethodnih podataka, a iznimno su bitne kod modeliranja kreditnih migracija.

Kako se u ovom radu koncentriramo na Mertonov model, pokazat ćemo kako se modeli bazirani na kreditnim migracijama mogu modelirati kao Mertonovi modeli.
Uzmimo neko poduzeće koje pripada određenom kreditnom razredu (skupini). Promatramo kreditne migracije tog poduzeća u vremenskom intervalu $[0, T]$. Konstruiramo matricu tranzicijskih vjerojatnosti $p(j) : 0 \leq j \leq n$ u kojoj $p(0)$ predstavlja vjerojatnost ulaska u *default* poduzeća, a ostali $j = 1, ..., n$ predstavljaju ostale kreditne razrede. Interval $[-\infty, +\infty]$ podijelimo na $n + 1$ intervala koji su odvojeni pragovima:

	Rejting na kraju godine							
Početni rejting	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	*default*
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0.00	0.00	0.00
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0.00
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	1.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0.00	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0.00	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

Tablica 3.1: Matrica tranzicijskih vjerojatnosti

	Vrijeme							
Početni rejting	1	2	3	4	5	7	10	15
AAA	0.00	0.00	0.07	0.15	0.24	0.66	1.40	1.40
AA	0.00	0.02	0.12	0.25	0.43	0.89	1.29	1.40
A	0.06	0.16	0.27	0.44	0.67	1.12	2.17	3.00
BBB	0.18	0.44	0.72	1.27	1.78	2.99	4.34	4.70
BB	1.06	3.48	6.12	8.68	10.97	14.46	17.73	19.91
B	5.20	11.00	15.95	19.40	21.88	25.14	29.02	30.65
CCC	19.79	26.92	31.63	35.97	40.15	42.64	45.10	45.10

Tablica 3.2: Kumulativne vjerojatnosti *defaluta* u idućih 15 godina

$$-\infty = \tilde{d}_0 < \tilde{d}_1 < ... < \tilde{d}_n < \widetilde{d_{n+1}} = \infty.$$

Pragove odabiremo tako da vrijedi

$$\mathbb{P}(\tilde{d}_j < V_T < \widetilde{d_{j+1}}) = \tilde{p}_j,\ j = 0, ..., n$$

pri čemu je V proces vrijednosti imovine kao onaj iz Mertonovog modela dan stohastičkom jednadžbom:

$$dV_t = \alpha V_t dt + \sigma V_t\, dB_t,$$

a rješenje u trenutku $t = T$ s

$$V_T = S_0 \exp(\sigma B_T + (\alpha - \tfrac{\sigma^2}{2})T).$$

Zaključujemo da poduzeće pripada kreditnom razredu j u periodu T ako i samo ako vrijedi $\tilde{d}_j < V_t < \widetilde{d_{j+1}}$.

Ako stavimo

$$X_t = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\log V_T - \log V_0 - (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T),$$

$$d_j = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\log \tilde{d}_j - \log V_0 - (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T),$$

zapravo smo se prebacili na proces X pa možemo zaključiti da poduzeće pripada kreditnom razredu j u periodu T ako i samo ako vrijedi $d_j < X_T < d_{j+1}$. Proces X_T zapravo aproksimira log-povrat na vrijednost imovine za dovoljno male α i σ, tj. $X_T \approx \log V_T - \log V_0$. Kako pretpostavljamo da je vrijednost imovine dana procesom Brownovog gibanja, slijedi da vrijedi $X_T \approx \frac{B_T - B_0}{\sqrt{T}}$. Uočavamo da varijabla X_T ima normalnu distribuciju zbog normalne distribucije varijable B_T.

Usporedba KMV i modela baziranih na kreditnim migracijama

Usporedit ćemo KMV model s modelima baziranim na kreditnim migracijama. Svaki od njih ima svoje prednosti i nedostatke. Prvo ćemo navesti prednosti KMV modela.

1. Kreditnim agencijama treba dosta vremena da ažuriraju svoje podatke, a to može biti problem kod naglog pada ili rasta kreditne sposobnosti nekog poduzeća. Nasuprot tome, kod KMV modela, EDF jako brzo prepoznaje takve promjene.

2. Varijabla EDF kod KMV modela dobro oslikava tržište zbog ovisnosti o varijabli DD koja se kreće zajedno s ekonomskim promjenama. Naime, DD raste za vrijeme ekspanzije a pada za vrijeme recesije. Kod modela baziranih na rejtingu, matrice vjerojatnosti prelaska iz jednog razreda u drugi slabo reagiraju na makroekonomska kretanja tako da ne prikazuju stvarno stanje na tržištu.

I modeli bazirani na kreditnom rejtingu imaju svoje prednosti:

1. Kod kreditnih migracija, jedina informacija koja nam je potrebna je kreditni razred poduzeća. Znatno je lakše pronaći poduzeće čiji rejting znamo, u odnosu na poduzeće čije je izdavanje dionica javno dostupno kakvo mora biti kod KMV modela.

2. Ponekad, uslijed naglih pojava na tržištu dionica, EDF može jako narasti, zapravo više nego što bi trebao te na taj način se ne podudara s pravom slikom ekonomskog stanja poduzeća. Kod modela kreditnih migracija takve promjene nisu vidljive.

3.7 Modeli sa stohastičkim kamatnim stopama

Kod Mertonovog modela, pretpostavljali smo da je kamatna stopa r konstantna, no u stvarnosti ona može biti i promjenjiva. Diskusiju o kamatnim stopama smo obavili u odjeljku 2.5 poglavlja 2, a sada ćemo pokazati kako se modelira kreditni rizik obzirom na takve kamatne stope. Ovaj odjeljak se bazira na knjizi [1].
Modeli sa stohastičkim kamatnim stopama pretpostavljaju da se kamatna stopa može mijenjati, tj. da prati neku stohastičku diferencijalnu jednadžbu pa samim time uključuju i rizik promjene kamatne stope (kamatni rizik).
Pretpostavljamo da kretanje kamatne stope prati Vasicekov model kamatnih stopa koji smo spomenuli u odjeljku 2.4. Preciznije, vrijedi:

$$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \sigma_r dB_t,$$

pri čemu je proces $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$, a α, β i σ_r su pozitivne konstante.
Kako modeli sa stohastičkim kamatnim stopama pripadaju strukturalnim modelima kreditnog rizika, moramo odrediti proces vrijednosti imovine poduzeća, V. Da bismo odredili stohastičku diferencijalnu jednadžbu procesa V, nužno je definirati pojam generaliziranog geometrijskog Brownovog gibanja. Za razliku od geometrijskog Brownovog gibanja (vidi 2.5) kod kojeg su parametri bili konstantni, generalizirano Brownovo gibanje uključuje promjenjive parametre što je pogodno u slučaju promjenjivih kamatnih stopa. Definicija geometrijskog Brownovog gibanja preuzeta je iz [8].

Definicija 3.7.1. *(Generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija obzirom na to Brownovo gibanje. Nadalje, neka su procesi $(\alpha = \alpha_t : t \geq 0)$ i $\sigma = (\sigma_t : t \geq 0)$ adaptirani procesi t.d. $\sigma \in \mathcal{L}^2_{ad}$ i $\int_0^t |\alpha_s| ds < \infty$. Tada je generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje dano procesom $S = (S_t : t \geq 0)$ koji zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:*

$$dS_t = \alpha_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t.$$

Proces vrijednosti imovine poduzeća $V = (V_t : t \geq 0)$ prati generalizirano geometrijsko gibanje, tj. stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

$$dV_t = r_t V_t dt + \sigma_V V_t dB_t^*. \tag{3.19}$$

Važno je napomenuti da je i Brownovo gibanje $B^* = (B_t^* : t \geq 0)$ Brownovo gibanje obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$.

3.8 Difuzijski model sa skokovima

Kako bismo realnije opisali stanje na financijskom tržištu, želimo u kretanje vrijednosti imovine uključiti i skokove (eng. *jumps*) koji su potaknuti naglim rastom ili padom cijena dionica. U svrhu određivanja procesa kretanja cijena dionice $S = (S_t : t \geq 0)$, moramo definirati pojam Poissonovog procesa. Definicija je preuzeta iz [4], a teorija ovog odjeljka temelji se na [5] i [13].

Definicija 3.8.1. *(Brojeći proces) Stohastički proces $N = (N_t : t \geq 0)$ je brojeći proces ako vrijedi:*

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}},$$

pri čemu je S proces obnavljanja. (Definicija procesa obnavljanja može se pronaći u [11]).

Definicija 3.8.2. *(Poissonov proces) Stohastički proces $N = (N_t : t \geq 0)$ je Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *$N(0) = 0$ g.s.*
2. *N je brojeći proces.*
3. *N ima stacionarne i nezavisne priraste.*
4. *Za svaki $t > 0$, N_t ima Poissonovu distribuciju s parametrom λt, tj. vrijedi:*

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \tag{3.20}$$

Tada je stohastička diferencijalna jednadžba kretanja cijene dionice zbroj difuzijskog dijela koji je dan geometrijskim Brownovim gibanjem i skoka koji je uzrokovan Poissonovim procesom. Temeljna pretpostavka Mertonovog difuzijskog modela sa skokovima je da skokovi prate log-normalnu distribuciju. Neka je veličina skoka dana procesom nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli $Y = (Y_t : t \geq 0)$. Nakon svakog skoka, S_t se poveća/smanji na $Y_t S_t$, tj.

$$dS_t = Y_t S_t - S_t.$$

Dijeljenjem sa S_t imamo:

$$\frac{dS_t}{S_t} = Y_t - 1. \tag{3.21}$$

Pretpostavimo sada da imamo više od jednog skoka, točnije neka imamo N_t skokova. Pimjerice, nakon tri skoka vrijednost dionice S_t jednaka je $S_t Y_1 Y_2 Y_3$ i vrijedi:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\prod_{i=1}^{3} Y_i) - 1. \tag{3.22}$$

Također, kako je $N = (N_t : t \geq 0)$ Poissonov proces s intenzitetom λ vrijedi:

$$dN_t = \begin{cases} 1, s = \lambda dt \\ 0, t = 1 - \lambda dt \end{cases},$$

gdje su s i t vjerojatnosti postizanja 1 ili 0.
Također, treba napomenuti da pretpostavljamo da su N_t, B_t i Y_i nezavisni što znači da lako možemo odrediti

$$\mathbb{E}(Y_{t-1}dN_t) = \mathbb{E}(Y_{t-1})\mathbb{E}(dN_t) = k\lambda dt.$$

$$k := \mathbb{E}(Y_{t-1}).$$

Slijedi da je promjena cijene dionice jednaka:

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \alpha dt + \sigma dB_t + d\left[\sum_{i=1}^{N_t}(Y_i - 1)\right] - \mathbb{E}(Y_{t-1}dN_t) \\ &= (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dB_t + d\left[\sum_{i=1}^{N_t}(Y_i - 1)\right]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Interpretiramo parametre iz formule 3.23:

1. k, prosječna veličina skoka, td. $\log(1 + k) \sim N(\gamma, \delta^2)$.
2. λ, prosječan broj skokova u jednoj godini.
3. N_t, broj skokova na intervalu $[0, t]$.
4. $Y_i - 1$, veličina i-tog skoka.

Sada ćemo na primjeru pokazati kako u praksi generiramo procese skokova.

Primjer 3.8.3. *Kako bismo simulirali procese skokova, nužno je prvo odrediti:*

1. *Broj skokova*
2. *Veličinu skokova*

Na tablici 3.3 preuzetoj iz [5] prikazane su vjerojatnosti broja skokova m iz skupa $\{0, ..., 8\}$. *U drugom stupcu prikazane su vjerojatnosti pogađanja točno m skokova, a u trećem stupcu vjerojatnosti pogađanja m ili manje skokova u periodu od dvije godine. Te vjerojatnosti se računaju pomoću Poissonove distribucije, pa tako primjerice vjerojatnost da će se u iduće*

Broj skokova, m	Točno m skokova	m ili manje skokova
0	0.3679	0.3679
1	0.3679	0.7358
2	0.1839	0.9197
3	0.0613	0.9810
4	0.0153	0.9963
5	0.0031	0.9994
6	0.0005	0.9999
7	0.0001	1.0000
8	0.0000	1.0000

Tablica 3.3: Vjerojatnosti broja skokova u iduće dvije godine

dvije godine dogoditi točno dva skoka (pod pretpostavkom da je prosječan broj skokova u jednoj godini $\lambda = 0.5$*) jednaka je:*

$$\frac{e^{-0.5 \cdot 2} \cdot (0.5 \cdot 2)^2}{2!}$$

Generiramo slučajne brojeve između 0 *i* 1 *te gledamo tablicu 3.3. Ako slučajan broj upada u interval između* 0 *i* 0.3679 *nema skoka, ako upada u interval između* 0.3679 *i* 0.7358 *broj skokova je jednak* 1 *itd. Na taj način generiramo brojeve skokova m.*
Veličine skokova generiramo na način da za svaki skok simuliramo njegovu funkciju distribucije onda kada se pojavi.

3.9 Multivarijatni modeli

Na kraju ovog rada, kratko uvodimo i multivarijatne modele (vidi [4]). Kod prethodno spomenutih modela promatrali smo isključivo jedno poduzeće, njegovu kreditnu sposobnost i vjerojatnost ulaska u *default*.
Nasuprot tome, multivarijatni modeli proširuju Mertonov model u vidu toga da uzimaju u obzir m poduzeća i m procesa vrijednosti imovine. Preciznije vrijednost imovine u trenutku t dana je vektorom:

$$V_t = (V_{t,1}, ..., V_{t,m}), \tag{3.24}$$

s vektorom pomaka

$$\eta_V = (\eta_{V,1}, ..., \eta_{V,m}), \tag{3.25}$$

i vektorom volatilnosti

$$\sigma_V = (\sigma_{V,1}, ..., \sigma_{V,m}). \tag{3.26}$$

Tada za svaki i, $V_{T,i}$ predstavlja rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe geometrijskog Brownovog gibanja, tj. vrijedi:

$$V_{T,i} = V_0 \exp\left((\alpha_{V,i} - \frac{\sigma_{V,i}^2}{2})T + \sigma_{V,i} B_{T,i}\right), i = 1, ..., m. \tag{3.27}$$

Svaka komponenta vektora V ima svoje parametre geometrijskog Brownovog gibanja, a možemo definirati i vektor Brownovog gibanja:

$$B_T := (B_{T,1}, ..., B_{T,M}). \tag{3.28}$$

Ovaj vektor je multivarijatni normalni vektor, ali na tome ćemo i stati jer detalji premašuju opseg ovog rada.

Bibliografija

[1] T. R. Bielecki, M. Rutkowski, *Credit risk: modeling, valuation and hedging*, Springer Science & Business Media, 2013.

[2] N. H. Bingham, R. Kiesel, *Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives*, Springer Science & Business Media, 2013.

[3] R. S. Tsay, *Analysis of financial time series*, Vol. 543. John wiley & sons, 2005.

[4] A. J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts, *Quantitative risk management: Concepts, Techniques and Tools*, Economics Books, 2015.

[5] J. C. Hull, *Options futures and other derivatives*, Pearson Education India, 2003.

[6] R. C. Merton, *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*, The Journal of finance 29.2 (1974): 449-470.

[7] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 1*, 2021, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm1_p11_2.pdf`, (preuzeto 10. 8. 2021.)

[8] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 2*, 2021, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm2_p12.pdf`, (preuzeto 10. 8. 2021)

[9] R. C. Merton, *On the pricing of contingent claims and the Modigliani-Miller theorem*, Journal of Financial Economics 5.2 (1977): 241-249.

[10] N. Sandrić i Z. Vondraček, Vjerojatnost, 2019, `https://www.pmf.unizg.hr/images/50023697/vjer_predavanja.pdf` (preuzeto 10. 8. 2021.).

[11] Z. Vondraček, Slučajni procesi, 2010, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp-p03.pdf` (preuzeto 10. 8. 2021.).

[12] Z. Vondraček, Slučajni procesi, 2010, https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp-p01.pdf (preuzeto 10. 8. 2021.).

[13] Merton's Jump-Diffusion Model, dostupno na https://www.csie.ntu.edu.tw/~lyuu/finance1/2015/20150513.pdf (kolovoz, 2021.).

Sažetak

Kreditni rizik je rizik neispunjavanja obaveza dužnika, a uz njega najčešće vežemo pojam *defaulta*, tj. neizvršenja novčanih obaveza.
U ovom radu želimo pokazati kako procjenjujemo rizičnost dužnika, njegovo kretanje financijske imovine te vjerojatnost ulaska u *default*. Također, navodimo podjelu kreditnih modela na strukturalne i reducirane modele.
Bavimo se strukturalnim modelima koji u fokus stavljaju vrijednost imovine poduzeća i pretpostavljaju da do *defaulta* dolazi kada vrijednost obaveza koje treba namiriti dosegne vrijednost imovine poduzeća.
Predstavnik strukturalnih modela je Mertonov model koji se temelji na Black-Scholes-Mertonovom modelu pomoću kojeg smo odredili cijene financijske imovine.
Kako Mertonov model ima jednostavnu strukturu, na kraju rada naveli smo i neka proširenja Mertonovog modela koja su nastala s ciljem da nadoknade nedostatke Mertonovog modela.

Summary

Credit risk is a risk that a counterparty will not meet obligations, and it is most often associated with the term of *default*.
In this thesis, we want to show how we assess the risk of the counterparty, his movement of financial assets and the probability of entering the *default*. We also state the division of credit models into structural and reduced models.
We study structural models that focus on the value of the firm's assets and assume that the *default* occurs when the value of the obligation to be settled reaches the value of the firm's assets.
A representative of the structural models is the Merton model based on the Black-Scholes-Merton model by which we determine the prices of financial assets.
As Merton's model has a simple structure, at the end of the thesis we have listed some extensions of Merton's model that were created in order to compensate for the shortcomings of Merton's model.

Životopis

Rođena sam 13. 04. 1996. u Splitu. Završila sam Osnovnu školu fra Pavla Vučkovića u Sinju, a potom i Opću gimnaziju Dinka Šimunovića u Sinju. Nakon srednjoškolskog obrazovanja odlučila sam svoje školovanje nastaviti u Zagrebu te sam 2014. godine upisala preddiplomski studij Matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu. Titulu sveučilišne pristupnice sam stekla 2019. godine kada sam i upisala diplomski studij Financijske i poslovne matematike.