C*-algebarski formalizam kvantne mehanike

Livaić, Matija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Matija Livaić

C^*-ALGEBARSKI FORMALIZAM KVANTNE MEHANIKE

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Matija Livaić

Diplomski rad

C^*-algebarski formalizam kvantne mehanike

Voditelji diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Ilja Gogić (PMF - Matematički odsjek) i izv. prof. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ________________________

2. ________________________

3. ________________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, 2021.

Veliko hvala mojim mentorima Ilji Gogiću i Ivici Smoliću što su pristali ući u nepoznate vode, što su bili voljni na interdisciplinarnu suradnju i što su omogućili ovaj diplomski rad. Hvala im na brojnim konstruktivnim komentarima i sugestijama te strpljenju. Hvala profesoru Tihomiru Vukelji i mojim prijateljima Filipu i Josipu na ugodnim i korisnim raspravama. Veliko hvala mojoj voljenoj djevojci Jeleni i mojim roditeljima na podršci.

Sažetak

U ovom radu ponuđeni su alternativni aksiomi kvantne mahanike za koje se smatra da imaju bolju fizikalnu osnovu. Svakom kvantnom sistemu pridružuje se separabilna unitalna C^*-algebra pri čemu su opservable reprezenetirane hermitskim elementima na toj algebri, a stanja su reprezentirana pozitivnim linearnim funkcionalima norme jedan. Prvo su analizirane nužne konceptualne promjene u razvoju kvantne mehanike koje leže u osnovi formalizma. Potom je operacionalnom definicijom opservabli i stanja izgrađen matematički fomalizam pogodan za opis općenitog fizikalnog sistema. Izloženi su osnovni pojmovi i rezultati teorije C^*-algebri. Pokazano je da unošenje dodatnih pretpostavki u formalizam - mogućnost simultanog i preciznog određivanja svih opservabli - vodi na formalizam klasične mehanike. Pokazano je kako se klasičini sistemi opisuju komutativnim C^*-algebrama. Potom su izloženi glavni rezultati teorije reprezentacije teorije C^*-algebri: GNS konstrukcija, Gelfand-Naimarkov teorem te veza između ireducibilnih reprezentacija i čistih stanja. Iz toga su izvedeni osnovni Dirac-von Neumannovi aksiomi. Naposljetku, proučavali smo dinamiku sistema. Pokazano je da se ona može opisati jednoparametarskim grupama $*$-automorfizama te je pomoću Stoneovog teorema izvedena Schrödingerova jednadžba.

Ključne riječi: aksiomi kvantne mehanike, C^*-algebre, opservable, stanja, ireducibilne reprezentacije C^*-algebri, čista stanja, Gelfand-Naimarkov teorem, jednoparametarske grupe $*$-automorfizama.

C^*-algebraic formalism of quantum mechanics

Abstract

In this paper we offer alternative axioms of quantum mechanics which we consider to have a better physical basis. To each quantum system a separable unital C^*-algebra is assigned, the observables are represented by hermitian elements of that algebra, while the states are represented as positive linear functionals of norm one. First we analyzed necessary conceptual changes in the development of quantum mechanics that lie in the roots of the formalism. By defining observables and states operationally, we build a formalism suitable for a description of a general physical system. We present the basic concepts and results from the theory of C^*-algebras. We show that by inserting additional assumptions - the possibility of a simultaneous and precise determination of all observables - leads to the formalism of classical mechanics. We show that classical systems are represented by commutative C^*-algebras. We then present the main results from the theory of representations of C^*-algebras: GNS construction, Gelfand-Naimark's theorem, and the connection between irreducible representations and pure states. From this we deduce the basic Dirac-von Neumann axioms. Finally, we studied the system's dynamics. It is shown that it can be described by one-parameter groups of $*$-automorphisms and with the aid of the Stone's theorem we derive the Schrödinger's equation.

Keywords: axioms of quantum mechanics, C^*-algebras, opservables, states, irreducible representations of C^*-algebras, pure states, Gelfand-Naimark theorem, one-parameter groups of $*$-automorphisms.

Sadržaj

1 Uvod

Svaka fizikalna teorija ima dvije nužne sastavnice: predviđanja rezultata eksperimenata (uspješno ili neuspješno) u točno određenoj domeni fizikalnog iskustva[1] i prirodnih pojava, odnosno materijalne stvarnosti, te apstraktni, matematički formalizam; skup simbola[2] i odnosa među njima koji čine alate pomoću kojih računamo ishode eksperimenata. Svaka fizikalna teorija ima i svoj *fizikalni sadržaj*: skup koncepata i pojmova koji se pridaju simbolima formalizma, a uz pomoć kojih se *opisuje* fizikalno iskustvo, i naposljetku, interpretiraju rezultati eksperimenata.

U većini fizikalnih teorija, i to su one koje spadaju u kategoriju klasične fizike, formalizam je nadahnut njenim sadržajem i gotovo je u potpunosti njime prožet; on je *jezik* kojim izražavamo svojstva elementarnih fizičkih entiteta i njihove odnose, a simboli formalizma su reprezentirani pojmovima koji su direktno izvedeni iz elementarnih, *klasičnih* pojmova, koji izražavaju naše *neposredno* iskustvo. U tom pogledu, kvantna mehanika (i njen nasljednik, teorija polja), zauzima posebno mjesto među fizikalnim teorijama. Dovoljno je naglasiti kontraste između tvrdnji ”stanje sistema reprezentirano je zrakom u Hilbertovom prostoru” i ”stanje sistema je određeno impulsima i položajima svih čestica”. Nesumnjivo, teško je očekivati da će formalizam teorije čija je domena fizikalnog iskustva daleko izvan dosega naših zornih predodžbi također biti moguće u potpunosti racionalizirati.

Proširivanje fizikalnog iskustva u prošlom stoljeću donijelo nam je dvije fundamentalne konstante: brzinu svjetlosti c, maksimalna brzina prostiranja signala, te Planckovu konstantu h, konstante koje su u temeljima teorije relativnosti i kvantne mehanike. Pa ipak, iako sadržaj obje teorije nadilazi mogućnosti našeg zornog predočavanja, formalizam teorije relativnosti je, za razliku od kvantne mehanike, gotovo poistovjećen sa sadržajem.

Nemoguće je govoriti o razlozima slabljenju veza između simbola formalizma kvantne mehanike i pojmova koji su nam na raspolaganju, bez da kritički razmotrimo kako je obilato fizikalno iskustvo kvantne teorije oblikovalo njen sadržaj. Sintetizirajući to iskustvo, Bohr je to sročio na jednostavan način:

”Značajka kvantne teorije je primanje k znanju načelne ograničenosti

[1]Razlikovat ćemo *iskustvo*, termin koji će najčešće značiti naše neposredno iskustvo, te *fizikalno iskustvo*, koje na prethodno nadodaje iskustvo prikupljeno pomoću instrumenata i mjernih uređaja.

[2]Simbol će u ovom kontekstu značiti element matematičke teorije koju prisvaja dani formalizam.

klasičnofizičkih predodžaba, u slučaju primjena na atomske pojave. Priznajući to, našli smo se u neobičnoj situaciji, budući da tumačenje iskustvene građe bitno počiva na klasičnim pojmovima. No izgleda da se unatoč teškoćama koje se zbog rečenog upliću u formiranje kvantne teorije, njezina bit može izraziti takozvanim kvantnim postulatom, koji svakomu kvantnomu procesu pripisuje bitnu prekidnost, ili, bolje rečeno, jednotnost, posve stranu klasičnim teorijama i simboliziranu Planckovim kvantom djelovanja." [19]

Koliko "kvantni postulat" čini atomske pojave neobuhvatljivima našim razumom veoma je dobro izraženo sljedećom formulom[3]:

$$h = \frac{E}{\nu} = p\lambda \tag{1.1}$$

Tu su stavljene u odnos dvije *ideje*: o prirodi svjetlosti, elektromagnetskom valu koji se prožima neograničeno u prostoru i vremenu, te o prirodi tvari, čestice koje su lokalizirane u prostoru i vremenu. Te ideje su apstrakcije, u prvom redu utoliko ukoliko imamo posla s beskonačno velikim ili beskonačno malim. U drugom redu, svojstva koja pridružujemo tim apstrakcijama (impuls, energiju i položaj čestice s jedne strane, te frekvenciju, valnu duljinu i brzinu prostiranja vala s druge strane) to radimo pod pretpostavkom da je moguće mjeriti ne utjecavši na predmet mjerenja. Budući da mjerenje uvijek podrazumijeva interakciju s posrednikom mjerenja, uslijed kvantnog postulata ta mogućnost nam je pak uskraćena. Klasična mehanika, teorija materijalnih čestica, je sa svim svojim sadržajem u tom smislu *idealizacija* čija se prikladnost u opisivanju prirodnih pojava smanjuje utoliko ukoliko se proširuje domena našeg fizikalnog iskustva, obuhvaćajući pojave u kojima kvant djelovanja, u vidu jednadžbe 1.1, prestaje biti zanemariv.

Situacija je, međutim, još nepogodnija. Ne samo da nas kvantni postulat sili na zaključak da su klasični pojmovi, koji određuju doseg našeg iskustva, idealizacije; on dovodi u pitanje i samu mogućnost njihovih *definicija*.

"S jedne strane, određenje stanja fizičkog sustava, kako se obično shvaća, zahtijeva uklanjanje svih vanjskih smetnji. No tada je, prema kvatnom postulatu, isključeno svako motrenje, a nadasve pojmovi prostora i vre-

[3] Analiza koja slijedi je uglavnom po uzoru na [19].

mena gube neposredni smisao. S druge strane, ako, želeći omogućiti motrenje, dopustimo stanovita međudjelovanja s prikladnim posrednicima mjerenja, tada naravno više nije moguće jednoznačno definirati stanje sustava, te nema govora o uzročnosti u običnom smislu te riječi[4]. Tako nas sama narav kvantne teorije sili da određenje prostornovremenskih koordinata i zahtjev uzročosti – ujedinjenost kojih karakterizira klasične teorije – smatramo komplementarnim, ali isključivim odlikama opisa, odlika koje karakteriziraju idealno motrenje, odnosno definiciju stanja." [19]

Kako gornja Bohrova jednostavna analiza pokazuje, kvantni postulat čini dva naša osnovna oblika shvaćanja fizikalne stvarnosti, pripisivanje materijalnim česticama prostornovremenske koordinate s jedne i kauzalnost s druge strane, međusobno isključivima. Napose, dovedeno je u pitanje i značenje pojma *stanja*, koje u našem običnom poimanju označava posjedovanje točno određenog skupa svojstava, uslijed principijalne nemogućnosti određivanja tih svojstava.

Gornja raščlamba utjecaja fizikalnog iskustva kvantne mehanike na naše predodžbene alate, iako predstavlja naizgled nepremostive prepreke, služi da nas pomiri s nemogućnosti formalizma da u potpunosti rasvijetliti sadržaj kvantne mehanike, ili obratno. Formalizam počiva na skupu aksioma izraženih i definiranih u terminima matematičke teorije. Kao takav, on je racionalan. S druge strane, kvantni postulat nužno unosi iracionalan element u teoriju.

Tema ovog diplomskog rada je formalizam kvantne mehanike. Razvit ćemo alternativne aksiome za opis fizikalnog sistema u jeziku C^*-algebri, te ćemo pomoću njih pokušati razjasniti elemente standardnog formalizma kvantne mehaike i, ponajviše, rasvjetliti način njegova nastanka.

1.1 *Važan korak u konceptualnom razvoju kvantne mehanike*

Na staru kvantnu mehaniku, teoriju atomskih pojava prije Heisenbergovog monumentalnog rada 1925. godine [2], valja gledati više kao na zbir različitih principa

[4]Budući da se uzročnost u klasičnoj mehanici reprezentira diferencijalnim jednadžbama, čije mogućnosti definiranja pretpostavljaju neprekidnost putanje čestice, vidimo da čak i u ovoj semiklasičnoj aproksimaciji, u kojoj je moguće govoriti o putanji, uvođenje prekidnosti, koju uslijed kvantnog postulata donosi mjerenje, ruši mogućnost zadržavanja uzročnosti. Nadalje, uzročnost se javlja kada su buduća stanja sistema jednoznačno određene s početnim stanjem. Ako je, kao što kaže Bohr, jednoznačno definiranje stanja sustava nemoguće, ne možemo smisleno govoriti o uzročnosti.

i heurističkih pravila nego kao na cjelovitu i logički konzistentnu fizikalnu teoriju[5]. Ipak, nakon što je Bohr predložio svoj model vodikovog atoma, postepeno se uspostavila usuglašena metodologija (recept) pristupa problemima. Za dani sistem prvo su, uz pomoć klasične mehanike, određene putanje gibanja. Zatim su od svih mogućih klasičnih putanja, putem određenih kvantnih uvjeta, odabrane dopuštene putanje. Prijelazi između dopuštenih gibanja određuju frekvenciju oslobođenog zračenja uz pomoć tzv. *Einstein-Bohrove formule (uvjeta)*

$$\nu(n \to n - \tau) = \frac{E_n - E_{n-\tau}}{h} \,. \tag{1.2}$$

Formirala su se dva principa koji su bili smatrani temeljem teorije: Ehrenfestov *adijabatski princip*, koji za periodične sustave s jednim stupjem slobode određuje dopuštene putanje putem jednadžbe[6]

$$\oint p_n \, dq_n = nh \,, \tag{1.3}$$

te Bohrov *princip korespondencije*. Potonji zaslužuje malo detaljniju elaboraciju, jer će biti ključan za razumijevanje Heisenbergovog rada.

Nesumnjivo, jedan od najvažnijih doprinosa razvoju teorije bio je Bohrov model vodikovog atoma. Glavna zadaća bila je objasniti spektar zračenja atoma, a posebno atoma vodika. U klasičnoj slici, elektron kruži oko protona po eliptičnoj putanji i frekvencija kruženja određena je s $\nu = \partial H / \partial J$, gdje je $J = \oint p \, dq$ varijabla akcije, odnosno djelovanja. Tada se putanja elektrona može predstaviti Fourierovim redom[7]:

$$q_n(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} q(n,\tau) e^{2\pi i \nu(n,\tau) t} \,, \tag{1.4}$$

gdje je $\nu(n,\tau) = \tau\nu$, frekvencija τ-tog harmonika. Dipolni moment atoma se stoga rastavlja na analogan način na superpoziciju elementarnih dipola $P(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} P(n,\tau) e^{2\pi i \nu(n,\tau) t}$ i stoga, prema predviđanjima klasične elektrodinamike,

[5] Primarni i sekundarni izvori za ovo potpoglavlje su [11] i [9].

[6] Ako se Hamiltonijan sistema izrazi pomoću varijable akcije J, odnosno djelovanja, definiranom s $J = \oint p \, dq$, period gibanja T izražen je s $\frac{1}{T} = \nu = \frac{\partial H}{\partial J}$. Ehrenfest je argumentirao da se dopuštene putanje periodičnog sistema koje se mogu adijabatski transformirati u sinusoidalni oscilator, za kojeg znamo da je $E_n = nh\nu$, mogu odrediti iz $J = nh$. Budući da je adijabatska invarijanta $\frac{E_n}{\nu}$ konstanta tijekom transformacije i jednaka J za običan oscilator, slijedi uvjet 1.3.

[7] Indeks n zasad reprezentira akciju, u supstituciji $n = J/h$.

atom zrači osnovnom frekvencijom ν i svim harmonicima frekvencija $\nu(n,\tau)$, dok su intenziteti tih harmonika proporcionalni s

$$|P(n,\tau)|^2\nu(n,\tau)^4\,. \tag{1.5}$$

Međutim, ovakva slika ne daje rezultate poduprijete eksperimentom. Analizirajući Rydberg-Ritzov princip kombinacije[8] Bohr postulira da su elektronu dopuštene samo one (klasične) orbite na kojima su energije određene s $E_n = -R/n^2$. Time bi frekvencija emitiranog zračenja[9] , pri prelasku elektrona iz n-tu u $(n-\tau)$-tu orbitu zadovoljavala Einstein-Bohrov uvjet. Da bi odredio konstantu R, Bohr je pretpostavio sljedeće: za velike brojeve n, i za male razlike $\Delta n = n-(n-\tau) = \tau$, energija postaje gotovo kontinuirana. U tom limesu, klasična mehanika postaje primjenjiva, pa kvantnomehanička frekvencija oslobođenog zračenja mora biti jednaka onoj dobivene klasičnomehaničkim računom: tretirajući n kao kao J/h, izražavajući Hamiltonijan kao funkciju od n i koristeći Einstein-Bohrov uvjet, u limesu gdje je $n \gg \tau, 1$ imamo

$$\nu(n \to n-\tau) = \frac{H(n)-H(n-\tau)}{h} = \frac{\tau}{h}\frac{\partial H}{\partial n} = \tau\nu = \nu(n,\tau)\,. \tag{1.6}$$

Izjednačavajući ove dvije veličine u tom limesu, Bohr je uspješno izračunao Rydbergovu konstantu.

Unatoč ovim uspjesima, stara kvantna mehanika nije mogla predvidjeti, primjerice, intenzitete spektralnih linija (određene s vjerojatnošću prijelaza), nije mogla objasniti anomalni Zeemanov efekt, niti adekvatno tretirati višeelektronske atome.

Pristupajući ovom problemu, Heisenberg je bio spreman prisvojiti potpuno drugačiji pristup. Stara kvantna mehanika se, kao što je gore opisana, može smatrati odstupanjem od klasične mehanike. Pritom, računajući energije (izmjerive indirektno uz pomoć Einstein-Bohrovog pravila) elektrona u određenim orbitama, odnosno stacionarnim stanjima, koristimo veličine koje nisu opazive/izmjerive. Ta činjenica, sama po sebi, možda ne predstavlja problem ako, kao što kaže Heisenberg, želimo zadržati nadu da će daljnji razvitak tehnike uspjeti učiniti te veličine dijelom fizikalnog iskustva. Međutim, tretirajući te veličine kao da su izmjerive, teorija dovodi do

[8](engl. *Rydberg-Ritz combination principle*) Princip kaže da su frekvencije koje atom zrači dane s $\nu = C(n_1^{-2} - n_2^{-2})$

[9]Bohr se poprilično dugo odupirao ideji svjetlosnih kvanata.

neslaganja s fizikalnim iskustvom.

Heisenberg je, stoga, razmotrio mogućnost formiranja *novog formalizma koji bi uspostavio odnose isključivo između izmjerivih veličina*.

> " (...) it seems sensible to discard all hope of observing hitherto unobservable quantities, such as the position and period of the electron, and concede that the partial agreement of the quantum rules with experience is more or less fortuitous. Instead, it seems more reasonable to try to establish a theoretical quantum mechanics, analogous to classical mechanics, but only in which relations between observable quantities occur. (...) In this paper we shall seek to establish some new quantum-mechanical relations and apply these to the detailed treatment of a few special problems. " [2][10]

Riječ "*analogno*" u gornjem citatu, u našoj interpretaciji, ima sljedeće značenje: kvantna mehanika se može smatrati analognom klasičnoj mehanici ako za svaku klasičnu veličinu možemo *definirati analognu kvantno-teorijsku veličinu*[11] takvu da kvantna teorija, izgrađena na tim veličinama, pri svakoj njenoj primjeni na prirodne pojave koje spadaju u domenu klasičnog iskustva reproducira isto fizikalno iskustvo i sadržaj kao i klasična mehanika. To je, naravno, Bohrov princip korespondencije, koji će, kao što ćemo vidjeti, biti ključan u nastavku.

Mjerenja koja uključuju atome uvijek uključuju ispitivanje njihovog spektra; frekvencija i intenziteta zračenja. Već smo vidjeli (jednadžba 1.6) da svakoj kvantno-teorijskoj frekvenciji $\nu(n \to n-\tau) = \nu_{n,n-\tau}$ korespondira, u klasičnoj slici, Fourierova komponenta $\nu(n,\tau)$ iz jednadžbe 1.4. Prema jednadžbi 1.5, intenzitet odgovarajućeg zračenja je u klasičnoj slici povezan s kvadratom amplitude veličine $P(n,\tau)$, odnosno $q(n,\tau)$. Analogno Bohrovoj korespondenciji $\nu(n,\tau) \longleftrightarrow \nu_{n,n-\tau}$, Heisenberg je pretpostavio da postoji kvantno-teorijska veličina $q(n \to n-\tau) = q_{n,n-\tau}$ koja bi korespondirala s Fourierovom amplitudom $q(n,\tau)$. Heisenberg je stoga zamijenio klasičnu veličinu $q_n(t)$, koja opisuje putanju elektrona oko jezgre, s nizom veličina

[10] Prevedeno s njemačkog jezika na engleski jezik.

[11] Svjesni smo da je pojam *veličina* u ovom trenutku pomalo maglovit. Naravno, ako postane jasno da imamo formalizam koji je sposoban reproducirati rezultate eksperimenata, te veličine postat će simbolima formalizma. Prije no što je prisutan formalizam, nema govora o simbolima.

$\{q_{n,n-\tau}e^{2\pi i\nu_{n,n-\tau}t}\}_\tau$ [12]:

$$q_n(t) \longleftrightarrow \boldsymbol{q}_n(t) = \{q_{n,n-\tau}e^{2\pi i\nu_{n,n-\tau}t}\}_\tau \,. \tag{1.7}$$

Ustanovivši ovu korespondenciju, Heisenberg je postavio pitanje: kakvi kvantno-teorijski objekti korespondiraju veličinama q_n^2 , q_n^3 ili $q_n s_n$, gdje je s_n neka proizvoljna veličina? Pomoću principa korespondencija i elementarnih pravila kombiniranja kvantno-teorijskih i klasičnih frekvencija, ustanovio je[13]

$$q_n(t)s_n(t) \longleftrightarrow \boldsymbol{q}_n(t)\boldsymbol{s}_n(t) = \left\{ \left(\sum_{\tau'} q_{n,n-\tau'} s_{n-\tau',n-\tau} \right) e^{2\pi i\nu_{n,n-\tau}t} \right\}_\tau \,. \tag{1.8}$$

Heisenberg je potom primijenio kvantni uvjet 1.3 (i time diskretizirao n) i na kraju članka primijenio dobivene relacije na par problema, ostvarivši rezultate koji su jako dobro potkrepljeni iskustvom. Ta ohrabrujuća činjenica je ipak, za Heisenberga, pala u drugi plan, zbog preplavljenosti apstraktnim veličinama i nemogućnosti sintetiziranja tih relacija u neki poznati matematički jezik.

Međutim, već tjedan dana nakon primitka Heisenbergovog rada, zaintrigirani Max Born uspio je u relaciji 1.8 prepoznati matrično množenje. Udruživši snage s Pascualom Jordanom, napisali su rad koji se može smatrati prvom formulacijom matrične mehanike, reprezentirajući, u skladu s Heisenbergovim idejama, klasičnu koordinatu q i impuls p s matricama $\boldsymbol{q} = [q_{nm}e^{2\pi i\nu_{nm}t}]$ i $\boldsymbol{p} = [p_{nm}e^{2\pi i\nu_{nm}t}]$. Tu se po prvi put javlja kanonska komutacijska relacija

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{p}\boldsymbol{q} = i\hbar 1 \,. \tag{1.9}$$

Daljnji razvoj kvantne mehanike je dobro poznat i kulminira, radom von Neumanna, s popisom matematički rigoroznih aksioma kvantne mehanike, koji čine *standardni formalizam kvantne mehanike.* Ti aksiomi zovu se *Dirac-von Neumannovi* aksiomi i dolje je pet aksioma koje ćemo *izvesti* iz C^*-algebarskog formalizma u petom poglavlju [14].

[12] Pišemo indeks n da nagovijestimo kvantizaciju. Međutim, u ovoj fazi razvoja, n je i dalje neprekidna veličina J/h .

[13] Vidjeti, primjerice, str. 201. u [11].

[14] U literaturi je mnogo sitnih varijacija u izričaju ili poredku aksioma. Preuzeli smo aksiome popisane u [22], u nešto skraćenoj formi.

DvN aksiom 1. *Svakom* kvantnom sistemu *pridružen je kompleksan separabilan Hilbertov prostor* $\mathcal{H}$ *.*

DvN aksiom 2. *Skup* opservabli $\mathcal{O}$ *kvantnog sistema s pridruženim mu Hilbertovim prostorom* $\mathcal{H}$ *je skup svih hermitskih (ne nužno ograničenih*[15]*) operatora na* $\mathcal{H}$ *.*

DvN aksiom 3. *Skup svih* stanja $\mathcal{S}$ *kvantnog sistema s pridruženim mu Hilbertovim prostorom* $\mathcal{H}$ *je skup svih pozitivnih nuklearnih*[16] *operatora traga 1.* Čista stanja *su jednodimenzionalni projektori. Ako je* P *projektor na* $\mathbb{C}x$ *, gdje je* $x \in \mathcal{H}$ *, označavat će se s* P_x *. Sva ostala stanja zovu se* miješana stanja.

DvN aksiom 4. *Ako se sistem nalazi u stanju* ρ*, vjerojatnost* $\mu_A(V)$ *da se rezultat mjerenja opservable* A *nađe u* $V \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *(vidjeti def. E.4) dana je s* $\mu_A(V) = \mathrm{Tr}(E^A(V)\rho)$ *, gdje je* E^A *spektralna mjera*[17] *pridružena operatoru* A *.*

DvN aksiom 5. *Konačan skup* $\{A_1 , \ldots , A_n\}$ *opservabli može se mjeriti istovremeno ako i samo ako sve međusobno komutiraju.*

Opservable *položaja* i *impulsa*, te jednakost 1.9 ostavljamo za kraj petog poglavlja, a o dinamici ćemo raspravljati u šestom poglavlju.

1.2 Kratka povijest algebarskog pristupa kvantnoj mehanici

U klasičnoj mehanici je svaka glatka funkcija (možemo i oslabiti uvjet i promatrati samo neprekidne funkcije) na faznom prostoru opservabla, čak i ako ne predstavlja ništa fizikalno, jer je funkcija položaja i impulsa čestica. Skup svih klasičnih opservabli stoga čini *komutativnu algebru*. U novooformljenom formalizmu kvantne mehanike, skup hermitskih matrica[18] je pak nužno *uložiti* u veći ambijentni prostor, matričnu algebru. Jordan je stoga pretpostavio da bi bilo plodonosno istražiti s kojim algebarskim operacijama može biti snabdjeven skup *opservabli*, odnosno hermitskih matrica [19]. Nadajući se da će istraživanjem intrinzičnih svojstava hermitskih matrica

[15] vidjeti dodatak D.4.

[16] definicija D.16

[17] definicija D.23 i teorem D.16

[18] Budući da su opservable u kvantnoj mehanici gusto definirani neograničeni hermitski operatori, ambijentni *skup*, skup svih neograničenih gusto definiranih operatora na Hilbertovom prostoru, nije čak ni vektorski prostor, zbog toga što domena zbroja dva operatora ne mora biti gusta (ne mora čak biti niti netrivijalna). Jordan se, stoga, ograničio na promatranje konačnodimenzionalnih matrica, držeći se svoje stručnosti.

[19] Ova analiza je po uzoru na [20], koji se referira na Jordanov rad [5].

moći oslikati *algebarsku srž* opservabli kvantne mehanike, zadržavajući samo *fizikalno smislene* operacije, te na koncu potencijalno istražiti druge sustave bazirane na aksiomima kompatibilnima s tim operacijama. Mi ćemo detaljno istražiti te operacije u poglavlju 2.2.

U suradnji s von Neumannom i Wignerom, 1934. godine izdan je članak pod nazivom "On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism" [6]. U njemu autori, nastavljajući se na Jordanove ideje [5], daju aksiome koji snabdjevaju skup opservabli kvantnog sistema s određenom algebarskom strukturom. Operacije među opservablama vodili su do algebarske strukture koja se danas, prikladno, zove *Jordanova algebra*. Jordanova algebra je realan vektorski prostor na kojem je definirano komutativno, distributivno i *neasocijativno* množenje. U članku autori uspijevaju klasificirati sve proste[20] *konačnodimenzionalne* algebre. Iako je ovaj rad bio od velike važnosti za budući razvoj ideja, ozbiljan nedostatak gornjeg pristupa je, pored zahtjeva konačnodimenzionalnosti, da stanja gotovo da nisu bila ni spomenuta.

Na ovom mjestu prikladno je spomenuti kako je von Neumannov rad na formulaciji kvantno-mehaničkog formalizma u jeziku Hilbertovih prostora i hermitskih operatora doprinjeo značajno razvitku teorije operatorskih algebri. Godine 1947., Irvin Segal je proučavao ireducibilne reprezentacije operatorskih algebri (zapravo C^*-algebri; u tom radu se prvi put pojavljuje taj termin) [7] i doveo ih u vezu s čistim stanjima, te pokazao da je skup čistih stanja potpun. Segal je bio upoznat s radom [6] i von Neumannovim daljnjim radom na tu temu i u tijeku svog istraživanja mu se ukazala ideja kako formulirati postulate kvantne mehanike, koji se odnose samo na pojmove *opservabli* i *stanja* [8]. Segalovi postulati su bili *algebarski* i *metrički*. Opservable su prema tim aksiomima sačinjavale realnu Banachovu algebru, a stanja su definirana kao pozitivni linearni funkcionali norme 1. Definirajući produkt dvije opservable po uzoru na [6], Segal je, primjerice uspio pokazati da skup opservabli koje međusobno "komutiraju" čini takozvani *klasičan* sistem, odnosno, sistem u kojem je sve opservable moguće mjeriti istovremeno. Uspio je pokazati još brojne odlike opservabli i stanja koje su nam poznate iz standardne formulacije bez ikakvog spomena Hilbertovog prostora. Tek je na kraju rada pokazao da se, malo matematički ojačavajući pretpostavke, opservable mogu reprezentirati na nekoj zatvorenoj algebri ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru, pokazavši matematičku ekvivalen-

[20] Algebra je prosta ako ne sadrži pravi ideal.

ciju dva pristupa.

C^*-algebre našle su veliku primjenu matematičkoj fizici i Segalov rad [8] može se s pravom smatrati začetkom te primjene. Iako mi obrađujemo aksiome nerelativističke kvantne mehanike, danas je *algebarska kvantna teorija polja* aktivno područje istraživanja, koje je otpočelo s radom Rudolfa Haaga i Daniela Kastlera, ”An Algebraic Approach to Quantum Field Theory” [10].

1.3 Cilj i pregled rada

Analizirajući ideje koje su prethodile nastanku matrične mehanike, vidjeli smo da su ključnu ulogu igrali dva principa:

1. *zahtjev da teorija bude izgrađena isključivo na odnosima među veličinama koje su izmjerive*

2. *princip korespondencije*.

Moglo bi se reći, u skladu raščlambe s početka poglavlja, da prvi princip spada pod okrilje formalizma i ishoda eksperimenata, a drugi da odgovara sadržaju.

Zadaća svake fizikalne teorije je, naposljetku, da ispravno predvidi rezultate eksperimenata, neovisno o sadržaju. Zato ćemo u drugom poglavlju pokušati konstruirati *općeniti formalizam koji opservablama pripisuje mjerne uređaje i skup vrijednosti koje on može poprimiti*. Probat ćemo precizno definirati *stanje sistema*, izbjegavajući što je više moguće unaprijed unositi sadržaj u formalizam. Odlike formalizma, naravno, moraju odražavati eksperimentalne metode kvantne mehanike. Argumentirat ćemo da je *prikladan matematički jezik za opis fizikalnog sistema jezik C^*-algebri.* U trećem poglavlju tada iznosimo osnove teorije C^*-algebri. Koliko je moguće, razmišljat ćemo o konceptima koje uvedemo u kontekstu primjene na fizikalnu teoriju. U četvrtom poglavlju pokazujemo koje dodatne pretpostavke donosi ograničeno fizikalno iskustvo klasične mehanike. U petom poglavlju detaljno analiziramo odnos opservabli i stanja i u konačnici izvodimo pet navedenih Dirac-von Neumannovih aksioma. U šestom poglavlju razmatramo dinamiku sistema.

2 Matematička struktura opisa fizikalnog sistema

Centralni pojmovi svakog formalizma su *opservable* i *stanja*. Kao što je bilo rečeno u uvodu, predstavit ćemo općeniti formalizam podoban za opis fizikalnog sistema u skladu sa zahtjevom da se u formalizam unose isključivo odnosi među izmjerivim veličinama. Zato će opservable biti asocirane s *mjernim uređajima*. S druge strane, u definiciji stanja će ključna biti njena *priprema*. Budući da smo uvijek suočeni ili s nesavršenošću mjernih uređaja ili s potrebom pribjegavanju statističkim razmatranjima danog sistema, fizikalno je rezultat mjerenja opservable defnirati putem *očekivanja*.

2.1 Temeljne postavke

Razvitak tehnike u prošlom stoljeću omogućio je ispitivanje svojstava atoma i elementarnih čestica na brojne načine. Pritom - i tu imamo bitan raskorak od klasične mehanike - nikad ne utječemo direktno na atome i čestice, već koristimo razna tehnička pomagala. Nakon što smo utjecali na atom ili česticu putem nekog jasno preciziranog postupka, želimo ispitati njeno stanje. Međutim, kao što je objašnjeno u uvodu, stanje općenito ne može imati isto značenje kao u klasičnoj fizici, kao skup obilježja čestice, budući da su ta obilježja naposljetku uvijek izražena u terminima klasične fizike. Ipak, uvijek je moguće znati točan postupak pripreme: koje smo instrumente koristili i kako smo ih upotrijebili. Primjerice, znamo snagu lasera i valnu duljinu svjetlosti koju proizvodi, znamo kako proizvesti hladne neutrone (korištene u ispitivanju interferencije) ili ubrzati elektrone. Stoga, čini se fizikalno smisleno značenju stanja pripisati upravo postupak pripreme sistema. Ovakvo značenje stanja primjenjivo je, iako ne nužno, i na klasičnu fiziku. Primjerice, iako je uvijek moguće pratiti putanju projektila, kod ispaljivanja projektila iz topa znamo količinu i vrstu eksploziva/baruta koju koristimo, duljinu cijevi, kut koji cijev zatvara s horizontalom, itd.

Pretpostavimo da imamo mjerni uređaj i da smo pripremili sistem u nekom stanju. Iskustvo nalaže da će, općenito, postojati raspodjela pojedinih rezultata mjerenja koja nije uvijek centrirana oko jedne vrijednosti. Jasno, uvijek će postojati odstupanja od idealne pripreme ili idealnog mjerenja koja potječu od greške eksperimentatora ili smetnji i tehničkih ograničenosti uređaja. Međutim, u nekim situacijama unaprijeđenje preciznosti ne dovodi do sužavanja raspodjele (npr. u eksperimentu s interferencijom elektrona). Budući da principijalno nismo u mogućnosti odrediti potječe li oblik raspodjele od intrinzičnih svojstava dijela prirode kojeg promatramo ili od njegovog načina interakcije s mjernim uređajem, smatramo da je fizikalno smisleno promatrati samo očekivanja tih raspodjela. Gornja razmatraja vode nas do sljedeće *operacionalne* definicije oćenitog fizikalnog sistema.

Definicija 2.1. *Fizikalni sistem Σ definiran je kao trojka $(\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\ ,\ \rangle)$, gdje je $\mathcal{O}$ skup* opservabli*, $\mathcal{S}$ skup* stanja *i $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{O} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja opservabli A i stanju ϕ pridružuje* očekivanje *$\langle A, \phi\rangle$ opservable A u stanju ϕ, što se smatra* rezultatom mjerenja *opservable A u stanju ϕ. Svaka opservabla A asocirana je s nekim mjernim uređajem s omeđenom skalom* $\mathrm{Sc}(A) \subset \mathbb{R}$.

Primijetimo dvije stvari. Prvo, pretpostavlja se da svi mjerni uređaji produciraju točno jedan realan broj pri mjerenju. Ovakva apstraktna definicija ne odgovara uvijek fizičkoj praksi. Međutim, čak i u ekstremnim slučajevima gdje je, primjerice, rezultat eksperimenta trag čestice u Wilsonovoj komori, možemo prevesti tu sliku u brojeve. Nadalje, skup svih mogućih rezultata mjerenja je omeđen. To slijedi iz neizbježne omeđenosti od $\mathrm{Sc}(A)$ i vidimo da je taj skup sadržan u $[\inf \mathrm{Sc}(A)\,,\, \sup \mathrm{Sc}(A)]$.

Idući aksiom izražava značenje stanja koje smo opisali u početnoj diskusiji, te omogućuje formalnu definiciju očekivanja koja će biti dana u nastavku.

Aksiom 1. *Svaki sistem $\Sigma = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\ ,\ \rangle)$ može se* pripremiti *u stanju $\phi \in \mathcal{S}$, odnosno, dovesti u stanje ϕ.*

Detalji postupka pripreme nam u ovom trenutku nisu potrebni, no bit će izneseni u šestom poglavlju. Važnost ovog aksioma je sljedeća: ako je $A \in \mathcal{O}$ i $\phi \in \mathcal{S}$, da bismo odredili $\langle A, \phi\rangle$ želimo izvršiti niz mjerenja uređajem asociranim s A (ukratko, niz mjerenja opservable A) i izračunati prosjek. Vrijednosti koje se iščitavaju nakon pojedinog mjerenja označavat ćemo s $m(A, \phi)$. Problem je, naravno, što smo nakon pojedinog mjerenja utjecali na sistem i time, i po definiji i u praksi, promijenili stanje sistema. Poznavajući postupak pripreme stanja ϕ, omogućeno nam je opetovano mjerenje.

Aksiom 2. *Neka je na sistem Σ u stanju ϕ izvršen niz mjerenja opservable A. Označimo dobivene vrijednosti s $\{m(A, \phi)_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(m(A, \phi)_1 + \ \ldots\ + m(A, \phi)_n)$$

postoji i ne ovisi o poretku niza.

Definicija 2.2. *Neka je na sistem Σ u stanju ϕ izvršen niz mjerenja opservable A, s vrijednostima $\{m(A,\phi)_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada je*

$$\langle A, \phi \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(m(A,\phi)_1 + \, ... \, + m(A,\phi)_n) \, .$$

U praksi, razumije se, vršimo konačan, ali dovoljno velik broj mjerenja. Sada kad smo operacionalizirali postupak mjerenja (dobivanje očekivanja), postuliramo jednu jednostavnu tvrdnju koja izražava dualnost između opservabli i stanja.

Aksiom 3. *Neka su $\phi, \psi \in \mathcal{S}$. Ako za sve $A \in \mathcal{O}$ vrijedi $\langle A, \phi \rangle = \langle A, \psi \rangle$, tada je $\phi = \psi$. Obratno, ako su $A, B \in \mathcal{O}$ i za sve $\phi \in \mathcal{S}$ vrijedi $\langle A, \phi \rangle = \langle B, \phi \rangle$, tada je $A = B$.*

Drugim riječima, ako nijedan eksperiment ne može razlučiti između dva stanja, ona moraju biti jednaka. S druge strane, ako dva eksperimentalna uređaja imaju ista predviđanja, oni su efektivno jednaki. Kažemo da opservable *separiraju* stanja, i obratno, da stanja *separiraju* opservable. Ovaj aksiom će se pokazati veoma koristan u nastavku.

Također, on nam omogućuje da opservablu A poistovjetimo s funkcijom $\phi \mapsto \langle A, \phi \rangle$, te stanje ϕ s funkcijom $A \mapsto \langle A, \phi \rangle$. U skladu s tim, umjesto $\langle A, \phi \rangle$, često ćemo pisati $\phi(A)$, a ponekad i $A(\phi)$.

2.2 Algebarska struktura opservabli i stanja

Sada kad smo postavili temelje, da bi ovaj formalizam imao mogućnosti primjene, potrebno je što više obogatiti strukturu. Krećemo s veoma prirodnom definicijom.

Definicija 2.3. *Neka je $\Sigma = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle \, , \, \rangle)$ fizikalni sistem. Označimo opservablu kojoj asocirani mjerni uređaj uvijek pokazuje vrijednost nula s $0_{\mathcal{O}}$. Opservablu kojoj asocirani mjerni uređaj uvijek pokazuje vrijednost jedan označimo s $1_{\mathcal{O}}$.*

Neka je $A \in \mathcal{O}$ i $n \in \mathbb{N}$. Definiramo s A^n opservablu čiji pridruženi mjerni uređaj ima mjernu skalu koja je n-ta potencija one od A. Drugim riječima, ako je $m(A,\phi)$ pojedino mjerenje opservable A, mjerni uređaj opservable A^n pokazuje $m(A^n,\phi) = m(A,\phi)^n$.

Ako je $\lambda \in \mathbb{R}$, definiramo s λA opservablu čiji pridruženi mjerni uređaj ima mjernu skalu koja je dobivena reskaliranjem one od A s λ. Drugim riječima, ako je $m(A,\phi)$

pojedino mjerenje opservable A, mjerni uređaj opservable λA pokazuje $m(\lambda A, \phi) = \lambda m(A, \phi)$.

Općenito, ako je je p polinom nad realnim poljem, označimo s $p(A)$ opservablu čiji asocirani mjerni uređaj producira $m(p(A), \phi) = p(m(A, \phi))$, kad je pojedino mjerenje od A u ϕ rezultiralo s $m(A, \phi)$.

Dakle, iz jedne opservable dobili smo realnu algebru generiranu s A. Efektivno, sve opservable iz te algebra asocirane su s jednim mjernim uređajem, budući da su sve dobivene is prvog jednostavnim manipulacijama nad mjernom skalom. Lako se provjeri da ako su p i q dva realna polinoma, tada je $(p \circ q)(A) = p(q(A))$.

S druge strane, ako želimo definirati zbroj opservabli $A, B \in \mathcal{O}$, ne možemo pristupiti na isti način, budući da relacija $m(A + B, \phi) = m(A, \phi) + m(B, \phi)$ nema smisla: ne možemo *a priori* zaključiti je li moguće istovremeno vršiti mjerenje A i B, niti znamo što bi bilo $m(A + B, \phi)$. No, moguće je izvršiti mjerenje A, s rezultatom $m(A, \phi)_1$, potom pripremiti sistem (aksiom 1) ponovno u stanju ϕ, izmjeriti B, s rezultatom $m(B, \phi)_1$, i tako naizmjenice, dok nismo ostvarili dva niza, $\{m(A, \phi)_n\}_n$ i $\{m(B, \phi)_n\}_n$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(m(A, \phi)_1 + m(B, \phi)_1 + \ \ldots \ + m(A, \phi)_n + m(B, \phi)_n) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(m(A, \phi)_1 + \ \ldots \ + m(A, \phi)_n) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(m(B, \phi)_1 + \ \ldots \ + m(B, \phi)_n)
\end{aligned}$$

Razumno je, stoga, imajući na umu diskusiju nakon aksioma 3, definirati zbroj dvije opservable pomoću očekivanja.

Definicija 2.4. *Neka su $A, B \in \mathcal{O}$ opservable sistema $\Sigma = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\,,\,\rangle)$. Definiramo funkciju $A + B : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ sljedećom formulom:*

$$(A + B)(\phi) = A(\phi) + B(\phi)$$

Primijetite da $A + B$ nije nužno opservabla, jer ne znamo postoji li mjerni instrument koji će mjerenjem nad sistemom u stanju ϕ dati očekivanje $\langle A, \phi\rangle + \langle B, \phi\rangle$. U slučaju da postoji $C \in \mathcal{O}$ takav da je $\langle C, \phi\rangle = \langle A, \phi\rangle + \langle B, \phi\rangle$, u skladu s aksiomom 3 možemo zaključiti da je $C = A+B$. No, iako takav C ne mora uvijek postojati, znamo iz kvantne teorije da u mnogo slučajeva zbroj opservabli odgovara nekoj trećoj, pa je poželjno zadržati ovu operaciju. Iz tog razloga proširujemo definiciju od $\mathcal{O}$ da uključuje i sve linearne kombinacije opservabli. Taj skup ćemo i dalje označavati s $\mathcal{O}$ i on time postaje vektorski prostor. Opservable iz skupa $\mathcal{O}$ prije proširenja ponekad ćemo zvati *pravim* opservablama.

Definicija 2.5. *Neka je $A \in \mathcal{O}$ opservabla sistema Σ. Kažemo da je A* pozitivna[21], *odnosno* pozitivan element *u $\mathcal{O}$, i pišemo $A \geq 0$, ako je $\langle A, \phi \rangle \geq 0$, za sva $\phi \in \mathcal{S}$. Ako su $A, B \in \mathcal{O}$ i $A - B \geq 0$, pišemo $A \geq B$ ili $B \leq A$.*

Napomena 2.1. U idućem poglavlju definirat ćemo pozitivan element C^*-algebre na uobičajen način, kao hermitski element čiji spektar leži u $[0, +\infty)$. Kako će se opservable pridruživati hermitskim elementima separabilne unitalne C^*-algebre, postavlja se pitanje je li definicija pozitivnog elementa kompatibilna (ekvivalentna) s definicijom 2.5? Odgovor je potvrdan. U potpoglavlju 5.4. pokazat ćemo da je hermitski element C^*-algebre pozitivan akko je njegova evaluacija, odnosno očekivanje, u svakom stanju nenegativna.

Iz definicija 2.2 i 2.3 jasno je da je $A \in \mathcal{O}$ pozitivna ako postoji $B \in \mathcal{O}$ takav da je $A = B^2$. U idućem poglavlju ćemo pokazati da, u okviru našeg formalizma, vrijedi i obrat: ako je A pozitivna, tada postoji $B \in \mathcal{O}$ takva da je $A = B^2$. U to se možemo lako uvjeriti ako je $\mathrm{Sc}(A) \subset [0, +\infty)$; opservabli B pridružimo isti mjerni uređaj i definiramo skalu od B kao korijen skale od A. Operacionalno objašnjenje može se naći i u općenitom slučaju[22], no ono nam neće trebati.

Sada možemo reći nešto više o svojstvima stanja. Neka je $\phi \in \mathcal{S}$. Podsjetimo se da je korisno i prirodno promatrati stanja kao funkcije na opservablama, putem $\phi(A) = \langle A, \phi \rangle$. Iz definicija 2.2, 2.3 i 2.4 odmah slijedi da

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathcal{O} \implies \phi(\lambda A + \mu B) = \phi(\lambda A) + \phi(\mu B) = \lambda \phi(A) + \mu \phi(B).$$

Također, iz definicije 2.2 slijedi da je $\phi(A) \geq 0$, kad god je $A \geq 0$. Kažemo da su stanja *pozitivna*. Nadalje, očigledno je $\phi(1_{\mathcal{O}}) = 1$, za sva $\phi \in \mathcal{S}$; kažemo da je ϕ *unitalno*. Ove rezultate možemo sabrati u sljedeći važan teorem:

[21] Iako bi dosljednije bilo zvati ovakve opservable *nenegativnim* opservablama, želimo da se naše definicije poklapaju s terminologijom u matematičkoj literaturi.

[22] ...koristeći tzv. *stanja bez disperzije* (engl. *disperion-free states*) kao u [12].

Teorem 2.1. *Stanja fizikalnog sistema su* unitalni pozitivni linearni funkcionali *na skupu opservabli.*

Sada kad imamo definiran zbroj opservabli, prirodno je pitanje može li se definirati produkt. Na žalost, za razliku od zbroja, produkt opservabli nije moguće definirati na operacionalan način, odnosno, da odražava eksperimentalni postupak, budući da očekivanje produkata pojedinih mjerenja općenito nije jednako produktu očekivanja.

Definicija 2.6. *Neka su $A, B \in \mathcal{O}$. Definiramo njihov* simetričan produkt*, odnosno* Jordanov produkt *s formulom*

$$A \circ B = \frac{1}{2}((A+B)^2 - A^2 - B^2)\,.$$

Primijetimo dvije stvari. U slučaju da su A i B prave opservable, A^2, B^2, $A+B$ i A^2+B^2 su dobro definirane opservable. Međutim, $(A+B)^2$ nije nužno dobro definiran (u smislu definicije 2.3), iz razloga što $A+B$ nije nužno prava opservabla, odnosno, ne postoji nužno mjerni uređaj asociran s opservablom C takva da je $C = A+B$ (vidjeti diskusiju nakon definicije 2.4). Da bismo zadržali ovu definiciju, nužno je načiniti neke ustupke: ili ćemo pretpostaviti da je zbroj dvije opservable uvijek prava opservabla, što iziskuje da donosimo *a priori* zaključke o prirodi, ili ćemo proširiti definiciju od $\mathcal{O}$ da osim potencija pravih opservabli sadrži i sve formalne potencije svih elemenata iz polaznog $\mathcal{O}$. Takvo proširenje trebalo bi biti kompatibilno sa svim svojstvima koja su prirodno zadovoljena kod potencija. Konkretno, ako su p i q dva realna polinoma, zahtijevamo da je $(p \circ q)(A) = p(q(A))$, za sve $A \in \mathcal{O}$. Biramo drugu opciju: ovakvo proširenje u svrhu matematičkog pojednostavljenja ne oduzima ništa od postojeće strukture, ali niti ne donosi dodatne pretpostavke[23]. Ovakvo proširenje ćemo i dalje označavati s $\mathcal{O}$.

Drugo, primijetimo, iako je Jordanov produkt komutativan, on nije nužno niti asocijativan niti distributivan. No kad bi $\mathcal{O}$ bio uložen u neku asocijativnu algebru, tada bi Jordanov produkt glasio:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)\,,$$

[23] Ove ustupke nije potrebno činiti ako se zbroj i potencije opservabli definiraju pomoću *stanja bez disperzije* (engl. *dispersion-free states*), kao što je to učinjeno u [12]. Iako je taj pristup elegantniji, pretpostavlja egzistenciju takvih stanja, što ne mora *a priori* vrijediti za svaku opservablu.

što nas snažno podsjeća na "korespondenciju" ab i $(AB+BA)/2$, gdje su a i b klasične opservable, a A i B pridruženi im hermitski operatori, kakvu susrećemo u praksi standardne kvantne mehanike. Iz tog razloga, a i iz razloga što je rad s asocijativnim i distributivnim algebrama prirodniji, postavlja se pitanje je li i ako jest kada je takvo ulaganje moguće. U potpoglavlju 1.4. ćemo razmotriti to pitanje.

Ispostavlja se da Jordanov produkt možemo učiniti distributivnim ako pretpostavimo sljedeće:

Aksiom 4. *Neka su* $A, B \in \mathcal{O}$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Tada je* $(\lambda A) \circ B = \lambda(A \circ B)$

Ova tvrdnja automatski vrijedi kad je $A = C^n$ i $B = C^m$, te štoviše, ako je $A = p(C)$ i $B = q(C)$, za neke realne polinome p i q. Isprva, podrijetlo ovog postulata nije očigledna[24], no možemo vidjeti što se događa u posebnom, idealiziranom slučaju kad je $\lambda A + B$ prava opservabla takva da je $\lambda A + B$, λA i B moguće mjeriti istovremeno. Provođenjem jednog mjerenja s jednim instrumentom, asociranim s $\lambda A + B$, dobivamo vrijednosti $m(\lambda A + B)$, $m(\lambda A, \phi)$ i $m(B, \phi)$, s vezom $m(\lambda A + B) = \lambda m(A, \phi) + m(B, \phi)$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} m((\lambda A + B)^2, \phi) &= m(\lambda A + B, \phi)^2 \\ &= (\lambda m(A, \phi) + m(B, \phi))^2 \\ &= \lambda^2 m(A, \phi)^2 + 2\lambda m(A, \phi) m(B, \phi) + m(B, \phi)^2 \,. \end{aligned}$$

Ako provedemo niz mjerenja, dobivamo

$$\phi((\lambda A) \circ B) = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda}{n} (m(A, \phi)_1 m(B, \phi)_1 + \ \dots \ + m(A, \phi)_n m(B, \phi)_n) \,.$$

S druge strane, kako množenje skalarom suštinski ne mijenja opservablu, mora vrijediti $m(A + B, \phi) = m(A, \phi) + m(B, \phi)$ i stoga je $\lambda\phi(A \circ B) = \phi(\lambda(A \circ B))$ jednako desnoj strani gornje jednakosti. Kako smo pretpostavili da ovo vrijedi za sve $\phi \in \mathcal{S}$, vrijedi

$$(\lambda A) \circ B = \lambda(A \circ B) \,.$$

Iz aksioma 4 slijedi:

[24] Možemo na ovo što slijedi gledati kao na svojevrsni *princip korespondencije*. Vidjet ćemo u četvrtom poglavlju kako će aksiomi biti primjenjeni na klasičnu mehaniku. Primjena ne bi bila moguća ni na klasičnu ni na kvantnu mehaniku bez ovog zahtjeva distributivnosti.

Teorem 2.2. *Neka su $A, B, C \in \mathcal{O}$. Tada je*

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C\,.$$

Dokaz teorema može se naći u [21], poglavlju 1.3.

Sljedeći jednostavan rezultat pomoći će ustvrditi još jedno svojstvo Jordanovog produkta.

Lema 2.1. (Formalna realnost) *Neka su $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{O}$. Tada*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^2 = 0 \implies A_1 = \dots = A_n = 0\,.$$

Dokaz. Neka je $\phi \in \mathcal{S}$ proizvoljno. Kako su A_i^2 pozitivni, $\phi(A_i^2) \geq 0$ i vrijedi

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} A_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \phi(A_i^2) = 0 \implies \phi(A_i^2) = 0\,, \quad i = 1, \dots, n\,.$$

Kako je ϕ bilo proizvoljno, iz aksioma 3 slijedi tvrdnja. □

Iz leme 2.1 i činjenice da je $A \circ A^{n-1} = A^n$, slijedi teorem:

Teorem 2.3. *Ako su $A, B \in \mathcal{O}$, vrijedi* Jordanov identitet*, odnosno*

$$A^2 \circ (B \circ A) = A \circ (B \circ A^2)\,.$$

Dokaz se može naći u [6]. Ova svojstva Jordanovog produkta mogu se sabrati u slijedeću definiciju:

Definicija 2.7. *Neka je V realan vektorski prostor i*

$$\circ : V \times V \longrightarrow V\,, \qquad (A, B) \mapsto A \circ B\,,$$

komutativno bilinearno preslikavanje koje je asocijativno s obzirom na potenciranje $A \mapsto A^n = A \circ A^{n-1}$, te koje zadovoljava Jordanov identitet*, odnosno*

$$A^2 \circ (B \circ A) = A \circ (B \circ A^2)\,.$$

Tada za $(V, \circ)$ kažemo da je realna Jordanova algebra.

Ako suma kvadrata elemenata iz V iščezava samo onda kad su svi elementi jednaki nuli, kažemo da je $(V, \circ)$ formalno realna.

Ako je $W \leq V$ vektorski potprostor koji je zatvoren na Jordanov produkt i koji je Jordanova algebra s obzirom na Jordanov produkt naslijeđen iz V, kažemo da je W Jordanova podalgebra *od V.*

Ako su V i W dvije Jordanove algebre, tada se linearno preslikavanje $\phi : V \longrightarrow W$ koje čuva Jordanov produkt, odnosno, za koje vrijedi

$$\phi(A \circ B) = \phi(A) \circ \phi(B)\,,$$

za sve $A, B \in \mathcal{V}$, zove Jordanov homomorfizam *Jordanovih algebri. Ako je ϕ bijekcija, kažemo da je ϕ* Jordanov izomorfizam.

Ako postoji element $1 \in V$ takav da je $1 \circ A = A \circ 1 = A$, za svaki $A \in V$, tada je 1 jedinica *za V, a V je* unitalna.

Teorem 2.4. *Neka je $\Sigma = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\,,\,\rangle)$ fizikalni sistem i $\circ : V \times V \longrightarrow V$ simetričan produkt iz definicije 2.6. Tada je $(\mathcal{O}, \circ)$ formalno realna unitalna Jordanova algebra.*

S ovim teoremom sabrali smo sva bitna algebarska svojstva fizikalnog sistema. Sad se okrećemo topološkoj strukturi.

2.3 Topološka struktura opservabli i stanja

Ograničenost vrijednosti $\sigma(A)$ opservable A omogućava nam da na prirodan način definiramo normu na $\mathcal{O}$.

Definicija 2.8. *Neka je $\Sigma = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\,,\,\rangle)$ fizikalni sistem. Definiramo funkciju $\|\cdot\| : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ s*

$$\|A\| = \sup\{|\phi(A)| \mid \phi \in \mathcal{S}\}\,.$$

Teorem 2.5. *$(\mathcal{O}, \|\cdot\|)$ je normiran prostor i stanja su ograničeni linearni funkcionali norme 1.*

Sva svojstva norme se lako dokažu koristeći teorem 2.1. Da je za svaki $\phi \in \mathcal{S}$ norma od ϕ jednaka jedan vidi se iz prethodne definicije i činjenice da je $\phi(1_{\mathcal{O}}) = 1$. Od sada na dalje, osim ako je naznačeno drugačije, $\mathcal{O}$ će biti snabdjeven s topologijom induciranom s normom.

Budući da je čovjek sposoban konstruirati maksimalno prebrojivo mnogo mjernih instrumenata, mora postojati najviše prebrojivo mnogo elemenata od $\mathcal{O}$ s kojim je moguće aproksimirati čitav $\mathcal{O}$. Zato postuliramo sljedeću tvrdnju:

Aksiom 5. $(\mathcal{O}, \|\cdot\|)$ *je separabilan topološki prostor.*

U sljedećem teoremu su popisana sva bitna svojstva norme na $\mathcal{O}$.

Teorem 2.6. *Neka su $A, B \in \mathcal{O}$ proizvoljni. Tada vrijedi*

a) $\|A^2\| = \|A\|^2$,

b) $\|A^2\| \leq \|A^2 + B^2\|$,

c) $\|A \circ B\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

Dokaz. Neka je $\phi \in \mathcal{S}$ proizvoljno.
a) Primijetimo prvo da je $\|A\|^2 \, 1_{\mathcal{O}} - A^2$ pozitivna opservabla. Naime, za svako pojedino mjerenje $m(A, \phi)$ opservable A u stanju ϕ imamo $m(A, \phi) \leq \|A\|$, pa je i $m(A, \phi)^2 = m(A^2, \phi) \leq \|A\|^2$. Stoga i za očekivanje vrijedi $\phi(A^2) \leq \|A\|^2$. Dakle,

$$\phi(\|A\|^2 \, 1_{\mathcal{O}} - A^2) = \|A\|^2 - \phi(A^2) \geq 0 \, .$$

Kako je ϕ bilo proizvoljno, vrijedi $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. S druge strane, pozitivnost od $(\|A\| \, 1_{\mathcal{O}} \pm A)^2$ povlači

$$2|\phi(A)| \, \|A\| \leq \|A\|^2 + \phi(A^2) \leq \|A\|^2 + \left\|A^2\right\| \, .$$

Uzimajući supremum po svim stanjima, dobivamo i obrnutu nejednakost $\|A\|^2 \leq \|A^2\|$.

b) Kako su A^2 i B^2 pozitivni, imamo

$$\phi(A^2) \leq \phi(A^2) + \phi(B^2) = \phi(A^2 + B^2) \leq \left\|A^2 + B^2\right\| \, .$$

Uzimajući supremum po ϕ, slijedi tvrdnja.

c) Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Budući da je $(A + \lambda B)^2 = (A + \lambda B) \circ (A + \lambda B)$, iz distributivnosti i homogenosti Jordanovog produkta imamo

$$0 \leq \phi((A + \lambda B)^2) = \phi(A^2) + \lambda^2 \phi(B^2) + 2\lambda \phi(A \circ B) \, .$$

Da bi ova nejednakost vrijedila za sve $\lambda \in \mathbb{R}$, diskriminanta gornjeg polinoma mora biti manja ili jednaka nuli, stoga

$$\phi(A \circ B)^2 \leq \phi(A^2)\phi(B^2) \leq \left\|A^2\right\| \left\|B^2\right\| = \|A\|^2 \|B\|^2 \ .$$

Uzimajući supremum po $\phi \in \mathcal{S}$ slijedi tvrdnja. $\square$

Prije no što nastavimo postulirat ćemo jednu tehničku tvrdnju koja minimalno utječe na sadržaj formalizma, ali znantno olakšava primjenu matematičke teorije[25].

Aksiom 6. $(\mathcal{O}, \|\cdot\|)$ *je Banachov prostor.*

Ove rezultate možemo sabrati u tvrdnji da je $(\mathcal{O}, \circ, \|\cdot\|)$ separabilna unitalna JB-algebra (formalna realnost je osigurana (a) i (b) dijelom prethodnog teorema).

Definicija 2.9. *Za realnu Jordanovu algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je* Jordan-Banachova *algebra ako je snabdjevena s normom takvom da je*

$$\|A \circ B\| \leq \|A\| \, \|B\| \ ,$$

za sve $A, B \in \mathcal{A}$, i s obzirom na koju je $\mathcal{A}$ Banachov prostor. Za Jordan-Banachovu algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je JB-algebra *ako su zadovoljeni dodatni uvjeti:*

a) $\|A^2\| = \|A\|^2$ *, za sve $A \in \mathcal{A}$,*

b) $\|A^2\| \leq \|A^2 + B^2\|$ *, za sve $A, B \in \mathcal{A}$.*

Ako je $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ Jordanova podalgebra od $\mathcal{A}$ i zatvoren potprostor, kažemo da je $\mathcal{B}$ JB-podalgebra *od $\mathcal{A}$.*

Teorem 2.7. *Neka je $\Sigma = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle \, , \, \rangle)$ fizikalni sistem. Tada je $(\mathcal{O}, \circ, \|\cdot\|)$ separabilna unitalna JB-algebra.*

2.4 C^*-algebarska struktura fizikalnog sistema

Sad smo pripremili temelje za glavni rezultat ovog poglavlja. Pokazat ćemo da se opservable mogu prikazati kao hermitski elementi neke C^*-algebre $\mathcal{A}$, a stanja kao

[25] Pretpostavke ove vrste nalik su na onu u klasičnoj mehanici da su opservable *glatke* funkcije na faznom prostoru. Svaki normiran prostor $\mathcal{X}$ može se uložiti u Banachov prostor (teorem C.3).

unitalni pozitivni linearni funkcionali na $\mathcal{A}$. Kao što je već bilo spomenuto, želja nam je uložiti opservable u asocijativnu algebru tako da simetrični produkt postane

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)\,.$$

Definicija 2.10. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $\mathbb{C}$. Definiramo preslikavanje $*: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ takvo da za sve $a, b \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi*

a) $(a+b)^* = a^* + b^*\,,$

b) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*\,,$

c) $(ab)^* = b^* a^*\,,$

d) $(a^*)^*\,.$

Preslikavanje $*: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ zove se involucija*, a algebra s involucijom zove se* $*$-algebra*.*

Ako je $a \in \mathcal{A}$ takav da je $a^* = a$, kažemo da je a hermitski*. Skup svih hermitskih elemenata od $\mathcal{A}$ označavamo s*[26] $\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$.

Definicija 2.11. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $\mathbb{C}$ na kojoj je zadana norma $\|\cdot\|$. Ako je norma* submultiplikativna*, odnosno, ako za sve $a, b \in \mathcal{A}$ vrijedi*

$$\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|\ ,$$

kažemo da je $\mathcal{A}$ normirana algebra*. Ako je s obzirom na tu normu $\mathcal{A}$ Banachov prostor, kažemo da je $\mathcal{A}$* Banachova algebra*.*

Definicija 2.12. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova $*$-algebra. Ako za svaki $a \in \mathcal{A}$ vrijedi tzv. C^*-identitet,*

$$\|a^* a\| = \|a\|^2\ ,$$

kažemo da je $\mathcal{A}$ C^*-algebra.

U idućem poglavlju ćemo detaljnije razviti teoriju C^*-algebri i pojmove koji će nam pomoći kako da razmišljamo o njima. Za sada, pokažimo najvažniji primjer C^*-algebre, čije je proučavanje i dovelo do razvoja teorije.

[26] engl. *self-adjoint*

Primjer 2.1. Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebra ograničenih operatora. Znamo da je $\mathcal{A}$ Banachova algebra, a uz adjungiranje, $\mathcal{A}$ postaje Banachova $*$-algebra. C^*-identitet slijedi iz teorema D.9. Hermitski elementi su stoga hermitski operatori, odakle i potječe taj termin.

Primijetimo da je $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$, arena za opservable u kvantnoj mehanici, *realan* vektorski prostor. Umnožak dva hermitska operatora nije hermitski, osim u slučaju kad oni komutiraju. No simetrizirani produkt

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$$

jest hermitski operator. Time $(\mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}, \circ)$ postaje Jordanova algebra (definicija 2.7), budući da je

$$A^2 \circ (B \circ A) = \frac{1}{4}(A^3 B + A^2 BA + ABA^2 + BA^3) = A \circ (B \circ A^2)\,.$$

Kako je $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, on je i Banachov prostor. Jasno je da za sve $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vrijedi $\|A \circ B\| \leq \|A\| \, \|B\|$ i $\|A^2\| = \|A\|^2$ (C^*-identitet). Neka je još $x \in \mathcal{H}$, $\|x\| = 1$. Prema propoziciji D.3

$$|\langle A^2 x,\, x\rangle| = \langle Ax,\, Ax\rangle \leq \langle Ax,\, Ax\rangle + \langle Bx,\, Bx\rangle = \langle (A^2 + B^2)x,\, x\rangle \leq \left\|A^2 + B^2\right\| \implies$$

$$\left\|A^2\right\| \leq \left\|A^2 + B^2\right\|\,.$$

Pokazali smo, dakle, da je $(\mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}, \circ)$ JB-algebra. Nakon razvitka odgovarajućih alata u idućem poglavlju, na sličan način bismo dokazali i idući teorem (vidjeti potpoglavlje 3.5.):

Teorem 2.8. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra. Definirajmo preslikavanje $\circ\, : \mathcal{A}_{\mathrm{sa}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ formulom*

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)\,.$$

Tada je $(\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}, \circ)$ JB-algebra.

Definicija 2.13. *Svaka JB-algebra koja je izometrično izomorfna s JB-podalgebrom JB-algebre hermitskih elemenata neke C^*-algebre zove se JC-*algebra. *JB-algebre koje dopuštaju takav izomorfizam zovu se* specijalne. *JB-algebra $\mathcal{A}$ je* iznimna *ako ne* *postoji nenul homomorfizam iz $\mathcal{A}$ u JB-podalgebru JB-algebre hermitskih elemenata neke C^*-algebre.*

Ispostavlja se da su JB-algebre koje su *iznimne* presiromašne strukture da budu primijenjive za opis fizikalnog sistema i dosad nije nađena njihova fizikalna primjena[27]. Nadalje, ne postoje iznimne *beskonačnodimenzionalne* algebre [14]. Budući da se ne želimo ograničavati na sisteme s konačnim stupnjevima slobode, postuliramo sljedeće:

Aksiom 7. *Neka je $\Sigma = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\ ,\ \rangle)$ fizikalni sistem. Tada je $(\mathcal{O}, \circ\, , \|\cdot\|)$ separabilna unitalna JC-algebra.*

Dakle, JB-algebru opservabli $\mathcal{O}$ fizikalnog sistema (vidjeti teorem 2.9) možemo poistovjetiti s JB-podalgebrom $(\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}\, , \circ)$, JB-algebre svih hermitskih elemenata neke C^*-algebre $\mathcal{A}$, pa Jordanov produkt opservabli postaje $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Vidjet ćemo u potpoglavlju 3.5. da je moguće odabrati $\mathcal{A}$ takvu da opservable *generiraju* $\mathcal{A}$. Nadodajući na to teoreme 2.1 i 2.5 imamo, konačno, sljedeći teorem:

Teorem 2.9. *Svakom fizikalnom sistemu pridružena je separabilna unitalna C^*-algebra $\mathcal{A}$.* Opservable *$\mathcal{O}$ sistema čine JB-podalgebru JB-algebre hermitskih elemenata $\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ koja generira $\mathcal{A}$, a* stanja *su pozitivni linearni funkcionali norme 1 na $\mathcal{A}$.*

Ovaj rezultat ćemo ponekad kratko zvati *C^*-algebarski aksiom*.

[27] Vidjeti teorem 7.2.3. u [13], te [12]. Strukture koje se pojavljuju u teoriji tih algebri su preopskurne za primjenu (kako i njhovo ime sugerira).

3 Osnove teorije C^*-algebri

U prošlom poglavlju smo definirali C^*-algebre i argumentirali da je ta struktura pogodna za opis fizikalnog sistema. U ovom poglavlju ćemo definirati osnovne pojmove, dati dva važna primjera C^*-algebri, te prezentirati alate koji će biti veoma korisni u daljnjem istraživanju teorije. Na kraju poglavlja ćemo se osvrnuti na teorem 2.9.

3.1 Osnovni pojmovi

Jedna od prvih stvari koje se definiraju kad se proučavaju neke matematičke strukture jesu preslikavanja koje "čuvaju strukturu". U jeziku kategorija, to su *morfizmi*. Za vektorske prostore to su linearna opreslikavanja, za topološke prostore to su neprekidne funkcije, i tako dalje. Isto tako je elementarno definirati one podskupove tih struktura koji "nasljeđuju strukturu". Počinjemo, dakle, sa sljedećom definicijom.

Definicija 3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ $*$-algebra i $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Ako je $\mathcal{B}$ zatvorena na involuciju i ako je $*$-algebra s obzirom na operacije naslijeđene iz $\mathcal{A}$, kažemo da je $\mathcal{B}$* $*$-podalgebra *od $\mathcal{A}$. Ako je $\mathcal{A}$ još i C^*-algebra, a $\mathcal{B}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{A}$, kažemo da je $\mathcal{B}$* C^*-podalgebra *od $\mathcal{A}$.*
Neka su sad $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ proizvoljne $*$-algebre. Ako je $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ linearna transformacija takva da je za sve $a, b \in \mathcal{A}$

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)\,, \quad i \quad \phi(a^*) = \phi(a)^*\,,$$

kažemo da je ϕ $*$-homomorfizam. *Ako je ϕ još bijekcija, kažemo da je ϕ* $*$-izomorfizam.

Jasno je da je C^*-podalgebra i sama C^*-algebra. U petom poglavlju će se pokazati da je svaka C^*-algebra izometrično $*$-izomorfna C^*-podalgebri C^*-algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru, iz čega će se prirodno izroditi prvih par Dirac-von Neumannovih aksioma. Pri proučavanju određenog operatora mnogo se može reći o njemu kad se znaju njegove *svojstvene vrijednosti*, a kao što znamo, one su ključan dio standardne kvantne mehanike. No, osim ako se radi o konačnodimenzionalnom slučaju, injektivnost operatora nije ekvivalentna njegovoj invertibilnosti (vidjeti definiciju $\sigma_p(A)$ (D.18)). S druge strane, invertibilnost je čisto algebarski pojam, stoga definiramo pojam koji ima smisla za sve algebre:

Definicija 3.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem $\mathbb{C}$, te $a \in \mathcal{A}$. Definiramo* spektar *elementa a kao skup*

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda 1 \notin \mathcal{A}^{\times}\}\,.$$

Ako treba naznačiti o kojoj se algebri radi, pisat ćemo $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$.

Primjer 3.1. Neka je $M_n(\mathbb{C})$ algebra $n \times n$ matrica s kompleksnim koordinatama. Tu algebru moguće je poistovjetiti s operatorima na Hilbertovom prostoru $\mathbb{C}^n$, gdje je kompozicija operatora umnožak matrica, a adjungiranje je transponiranje i kompleksno konjugiranje elemenata. Dakle, $M_n(\mathbb{C})$ je C^*-algebra, a spektar matrice je skup njenih svojstvenih vrijednosti.

Primjer 3.2. Neka je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, te $C_0(X)$ skup svih neprekidnih funkcija $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ koje "isčezavaju u beskonačnosti", odnosno, $f \in C_0(X)$ akko je za svaki $\varepsilon > 0$ skup $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ kompaktan. Lako je provjeriti da je $C_0(X)$ algebra. Definiramo normu na $C_0(X)$ s

$$\|f\| = \|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}\,.$$

Nadalje, može se lako pokazati da je $C_0(X)$ Banachov prostor s obzirom tu normu. Kako je očito $\|fg\| \leq \|f\|\,\|g\|$, $C_0(X)$ je Banachova algebra, a ako definiramo involuciju $f \mapsto f^* = \bar{f}$ koja svakoj funkciji pridružuje funkciju koja je kompleksno konjugirana po točkama, $C_0(X)$ postaje C^*-algebra.
Ako je X kompaktan i Hausdorffov, tada je $C_0(X) = C(X)$ i $1 \in C(X)$, odnosno $C(X)$ je unitalna. Ako je sad $\lambda \in \mathbb{C}$ i $f \in C(X)$, onda je $f - \lambda \in C(X)^{\times}$ akko $\lambda \notin f(X)$. Dakle, spektar $\sigma(f)$ funkcije f je upravo njena slika $f(X)$. Ovaj primjer nam pokazuje zašto smo odabrali $\sigma(A)$ da označava skup svih vrijednosti koje opservabla A može poprimiti.

U slijedećem potpoglavlju ćemo vidjeti da za svaku komutativnu unitalnu C^*-algebru $\mathcal{A}$ postoji kompaktan Hausdorffov prostor X takav da je $\mathcal{A}$ izometrično $*$-izomorfna s $C(X)$, a ako $\mathcal{A}$ nije unitalna, onda se može pokazati da je $\mathcal{A}$ izometrično $*$-izomorfna s $C_0(X)$. U tom smislu, $C(X)$ i $C_0(X)$ su jedine komutativne C^*-algebre. $C(X)$ je unitalna, dok $C_0(X)$ nije.

Primjeri 3.1 i 3.2 su od velike pomoći kada razmišljamo o spektru C^*-algebre. U nastavku ćemo predstaviti brojna svojstva spektra. Prije toga predstavljamo nekoliko elementarnih rezultata iz teorije Banachovih algebri (definicija 2.11). Rezultati koji nisu dokazani mogu se naći, na primjer, u [17].

Teorem 3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra. Tada vrijedi:*

a) Neka je $a \in \mathcal{A}$ takav da je $\|a\| < 1$. Tada je $1 - a \in \mathcal{A}^\times$ i

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \,.$$

b) Skup $\mathcal{A}^\times$ je otvoren skup u $\mathcal{A}$ i preslikavanje $a \mapsto a^{-1}$ iz $\mathcal{A}^\times$ u $\mathcal{A}^\times$ je neprekidno.

Prva tvrdnja je analogon razvoja funkcije $(1-x)^{-1}$ u Taylorov red na intervalu $(-1,1)$, a druga se dokazuje uz pomoć prve.

Kako je $\sigma(a)$ podskup kompleksne ravnine koja ima euklidsku topologiju, možemo ga opskrbiti relativnom topologijom. Idući teorem pokazuje da je u toj topologiji spektar kompaktan (teorem B.2).

Teorem 3.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra i $a \in \mathcal{A}$. Tada je $\sigma(a)$ zatvoren skup sadržan u zatvorenom disku s centrom u 0, radijusa $\|a\|$.*

Dokaz. Budući da je zbroj neprekidan, i prema prethodnom teoremu je invertiranje neprekidno, slijedi da je funkcija $\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}$, $\lambda \mapsto a - \lambda 1 \mapsto (a - \lambda 1)^{-1}$, neprekidna. Skup $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ je praslika po gornjoj funkciji otvorenog skupa $\mathcal{A}^\times$, dakle otvoren. Znači, $\sigma(a)$ je zatvoren.

Ako je $a = 0$, onda je $\sigma(a) = 0$, pa pretpostavimo da je $a \neq 0$. Ako je $\lambda > \|a\|$, tada je $\|\lambda^{-1}a\| < 1$. Prema prethodnom teoremu je $\lambda(1 - \lambda^{-1}a) = \lambda - a \in \mathcal{A}^\times$. □

Prisjetimo se da realna matrica ne mora imati realne svojstvene vrijednosti. No, matrice s kompleksnim koordinatama uvijek imaju kompleksnu svojstvenu vrijednost. Generalizacija tog rezultata je slijedeći teorem, jedan od fundamentalnih u spektralnoj teoriji Banachovih algebri.

Teorem 3.3. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra i $a \in \mathcal{A}$ njen proizvoljan element. Tada je njegov spektar $\sigma(a)$ neprazan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $\sigma(a) = \varnothing$. Tada je *rezolventa* od a, funkcija

$$R_a : \lambda \mapsto (a - \lambda 1)^{-1}$$

definirana na čitavom $\mathbb{C}$. Neka je $\phi \in \mathcal{A}^*$ proizvoljan ograničen funkcional. Pokazat ćemo da je $f = \phi \circ R_a$ analitička, odnosno cijela funkcija.

Prvo, lako se pokaže da vrijedi

$$R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\lambda - \mu) R_a(\lambda) R_a(\mu) \,,$$

za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Sada, jer su ϕ i R_a neprekidne, za proizvoljan $\mu \in \mathbb{C}$ imamo

$$\lim_{\lambda \to \mu} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = \phi \left(\lim_{\lambda \to \mu} \frac{R_a(\lambda) - R_a(\mu)}{\lambda - \mu} \right) = \phi \left((a - \mu 1)^{-2} \right) \,.$$

Dakle, $f'(\mu)$ postoji za sve $\mu \in \mathbb{C}$, pa je f cijela funkcija.

Sada ćemo pokazati da je f omeđena. Za $\|a\| < |\lambda|$, prema teoremu 3.1 imamo

$$|f(\lambda)| \leq \|\phi\| \, \|R_a(\lambda)\| = \|\phi\| \left\| \lambda^{-1} (1 - \lambda^{-1} a)^{-1} \right\| \leq \frac{\|\phi\|}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \|a\| / |\lambda|} = \frac{\|\phi\|}{|\lambda| - \|a\|} \,.$$

Stoga $f(\lambda) \to 0$ kad $|\lambda| \to \infty$. Kako je f neprekidna, ona je omeđena na svakom kompaktnom skupu oko ishodišta. Dakle, f je omeđena.

Prema Liouvillovom teoremu iz kompleksne analize sada slijedi da f mora biti konstanta, a kako ona teži u nulu kad $|\lambda| \to \infty$, zapravo je $f = 0$.

Ako je sad $\lambda \in \mathbb{C}$ proizvoljan, prema Hahn-Banachovom teoremu (C.2), mora postojati $\phi \in \mathcal{A}^*$ takav da je $\phi(R_a(\lambda)) = 1$. Međutim, prema gore pokazanom, mora biti $\phi(R_a(\lambda)) = 0$. Došli smo do kontradikcije. Dakle, $\sigma(a)$ ne može biti prazan. $\square$

Prethodna dva teorema osiguravaju da iduća definicija ima smisla.

Definicija 3.3. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalova Banachova algebra. Definiramo* spektralni radijus *$r(a)$ elementa $a \in \mathcal{A}$ formulom*

$$r(a) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\} \,.$$

Teorem 3.4. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra i $a \in \mathcal{A}$. Tada je*

$$r(a) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} .$$

Do sad smo rekli već mnogo toga o spektru, no ograničili smo se na slučaj unitalnih Banachovih algebri. Očekivano, ako obogatimo strukturu algebri, možemo izvući još informacija o spektru pojedinih elemenata. Postojanje involucije nam omogućava definiciju potpuno analognu onoj u teoriji operatora na Hilbertovim prostorima (vidjeti definiciju D.10 i propoziciju D.8).

Definicija 3.4. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $a \in \mathcal{A}$.*

a) Ako je $a^*a = aa^*$, kažemo da je a normalan *element.*

b) Ako je $a = a^*$, kažemo da je a hermitski *element.*

c) Ako je a hermitski i $a = a^2$, kažemo da je a projekcija.

d) Ako je $\mathcal{A}$ unitalna i $a^*a = aa^* = 1$, kažemo da je a unitaran *element.*

Primjetimo da su

$$\mathrm{Re}(a) = \frac{1}{2}(a + a^*) \quad i \quad \mathrm{Im}(a) = -\frac{i}{2}(a - a^*)$$

hermitski elementi, te $a = \mathrm{Re}(a) + i\mathrm{Im}(a)$. $\mathrm{Re}(a)$ i $\mathrm{Im}(a)$ zovemo *realnim* i *imaginarnim* dijelovima od a. Dakle, hermitski elementi generiraju cijelu C^*-algebru.

Definicija 3.5. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $S \subset \mathcal{A}$. Sa $C^*(S)$ označavamo najmanju C^*-podalgebru od $\mathcal{A}$ koja sadrži S. Ako je $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, pišemo $C^*(a_1, \dots, a_n)$.*

Stoga je $C^*(\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}) = \mathcal{A}$. Ako je $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ unitalni $*$-homomorfizam unitalnih C^*-algebri, tada on preslikava hermitske elemente u hermitske, normalne u normalne, unitarne u unitarne, te projekcije u projekcije.

Teorem 3.5. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $a \in \mathcal{A}$.*

a) Ako je a hermitski, onda je $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ i $r(a) = \|a\|$.

b) Ako je a unitaran, onda je $\sigma(a) \subset \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$.

c) Ako je a projekcija, onda je $\sigma(a) \subset \{0, 1\}$.

Kad razvijemo Gelfandov transformat u idućem potpoglavlju, moći ćemo dokazati idući teorem u svega nekoliko redaka. Ove tvrdnje se lako mogu provjeriti na primjerima 3.1 i 3.2. Pokažimo samo da je spektralni radijus hermitskog elementa jednak njegovoj normi. Kako je $a = a^*$, iz C^*-identiteta imamo $\|a^2\| = \|a\|^2$, pa indukcijom slijedi $\left\|a^{2^n}\right\| = \|a\|^{2^n}$. Iz teorema 3.4 slijedi

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\|a^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \|a\| \ .$$

Završimo ovo potpoglavlje s teoremom koji govori kako se spektar ponaša kod prelaska u drugu algebru ili podalgebru.

Teorem 3.6. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne algebra i $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ unitalni homomorfizam algebri, te $a \in \mathcal{A}$. Tada je*

$$\sigma_{\mathcal{B}}(\phi(a)) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a) \, .$$

Ako je ϕ izomorfizam, tada je

$$\sigma_{\mathcal{B}}(\phi(a)) = \sigma_{\mathcal{A}}(a) \, .$$

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ C^*-podalgebra koja sadrži jedinicu od $\mathcal{A}$. Tada je

$$\sigma_{\mathcal{B}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a) \, .$$

Dokaz. Pokažimo samo prve dvije tvrdnje.

$$\phi(a^{-1})\phi(a) = \phi(a^{-1}a) = \phi(1) = 1 \implies \phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1}) \, .$$

Dakle, $\phi(\mathcal{A}^\times) \subset \mathcal{B}^\times$. Stoga,

$$\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(\phi(a)) \implies \phi(a) - \lambda 1 = \phi(a - \lambda 1) \notin \mathcal{B}^\times \implies a - \lambda \notin \mathcal{A}^\times \implies \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a) \, .$$

Ako je ϕ izomorfizam, onda je $\phi(\mathcal{A}^\times) = \mathcal{B}^\times$, pa tvrdnja lako slijedi. Dokaz posljednje tvrdnje može se naći u [17]. □

Ovaj teorem nam omogućava da pokažemo jedan jednostavan rezultat: da su $*$-homomorfizmi C^*-algebri automatski neprekidni.

Teorem 3.7. *Neka su su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ C^*-algebre i $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ $*$-homomorfizam. Tada je $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$, za sve $a \in \mathcal{A}$. Dakle, $*$-homomorfizam ϕ je ograničen linearan funkcional i $\|\phi\| \leq 1$. Ako je su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne i ϕ unitalan $*$-homomorfizam, tada je $\|\phi\| = 1$.*

Dokaz. Koristeći C^*-identitet i teoreme 3.5 i 3.6, imamo

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a)^*\phi(a)\| = \|\phi(a^*a)\| = r(\phi(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2 .$$

Prema propoziciji C.1, ϕ je ograničen i $\|\phi\| \leq 1$. Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne, te ϕ unitalan, tada je $\phi(1) = 1$, pa je $\|\phi\| = 1$. □

3.2 Komutativne C^*-algebre

U ovom potpoglavlju dokazujemo da su sve komutativne unitalne C^*-algebre izometrično $*$-izomorfne algebri neprekidnih funkcija na kompaktom Hausdorffovom prostoru. Ne samo da ćemo time razviti veoma moćan matematički alat, u četvrtom poglavlju ćemo vidjeti da su komutativne C^*-algebre bitne za opis klasičnih sistema. Počinjemo s definicijom karaktera.

Definicija 3.6. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna algebra.* Karakter *na $\mathcal{A}$ je ne-nul homomorfizam $\tau : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$. Skup karaktera na $\mathcal{A}$ označavamo s $\Omega(\mathcal{A})$.*

Teorem 3.8. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra i $a \in \mathcal{A}$. Tada je*

$$\sigma(a) = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(\mathcal{A})\} .$$

Teorem 3.9. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna C^*-algebra i $\tau \in \Omega(\mathcal{A})$. Tada je τ $*$-homomorfizam.*

Teorem 3.10. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra i $\tau \in \Omega(\mathcal{A})$. Tada je $\|\tau\| = 1$.*

Dokaz. Neka je $a \in \mathcal{A}$. Prema teoremu 3.8 je $\tau(a) \in \sigma(a)$, pa prema teoremu 3.2 slijedi

$$|\tau(a)| \leq r(a) \leq \|a\| \implies \|\tau\| \leq 1 .$$

Kako je $\tau(1) = 1$, jednakost je postignuta. □

Opskrbimo $\Omega(\mathcal{A})$ kao potprostor od $\mathcal{A}^*$ s relativnom wk^*-topologijom.

Teorem 3.11. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra. Tada je $\Omega(\mathcal{A})$ kompaktan Hausdorffov prostor.*

Dokaz. Prema prethodnom teoremu, vidimo da je $\Omega(\mathcal{A}) \subset \mathrm{ball}\mathcal{A}^*$. Ako pokažemo da je $\Omega(\mathcal{A})$ wk^*-zatvoren, prema Banach-Alaogluovom teoremu (C.6) će slijediti da je $\Omega(\mathcal{A})$ wk^*-kompaktan kao zatvoren podskup kompaktnog skupa. Kako je wk^*-topologija Hausdorffova, $\Omega(\mathcal{A})$ je Hausdorffov.

Neka je $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \Omega(\mathcal{A})$ mreža koja konvergira k $\tau \in \mathcal{A}^*$. Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Tada

$$\tau(ab) = \lim_\lambda \tau_\lambda(ab) = \lim_\lambda \tau_\lambda(a)\tau_\lambda(b) = \tau(a)\tau(b)\,, \quad \text{te} \quad \tau(1) = \lim_\lambda \tau_\lambda(1) = 1\,,$$

pa je τ ne-nul homomorfizam, stoga $\tau \in \Omega(\mathcal{A})$. Prema teoremu B.9, $\Omega(\mathcal{A})$ je wk^*-zatvoren. $\square$

Sada smo u poziciji dokazati glavni teorem ovog potpoglavlja.

Teorem 3.12. (Gelfandova reprezentacija)

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra. Za svaki $a \in \mathcal{A}$ definiramo funkciju

$$\hat{a} : \Omega(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \qquad \hat{a}(\tau) = \tau(a)\,.$$

Tada je $\hat{a}$ neprekidna i funkcija

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow C(\Omega(\mathcal{A}))\,, \qquad \phi(a) = \hat{a}$$

je kontraktivni[28] homomorfizam, te $\|\phi(a)\| = \|\hat{a}\|_\infty = r(a)$.

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna C^*-algebra, tada je ϕ izometrički $*$-izomorfizam.

Funkcija $\hat{a}$ zove se *Gelfandov transformat*, a ϕ je *Gelfandova transformacija*.

Dokaz. Da pokažemo da je $\hat{a}$ neprekidna, koristimo teorem B.8. Neka je $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ mreža u $\Omega(\mathcal{A})$ i $\tau_\lambda \longrightarrow \tau$. Tada je prema teoremu C.3

$$\lim_\lambda \hat{a}(\tau_\lambda) = \lim_\lambda \tau_\lambda(a) = \tau(a) = \hat{a}(\tau)\,.$$

Dakle, $\hat{a}$ je neprekidna. Da je ϕ homomorfizam slijedi iz toga što su karakteri homomorfizmi, a da je $\|\phi(a)\| = r(a)$ slijedi iz definicije spektralnog radijusa i teorema

[28] Preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ između dva metrička prostora je kontrakcija ako je za sve $x, y \in X$ $d(f(x), f(y)) \le d(x, y)$.

3.8:

$$\|\phi(a)\| = \|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\tau\in\Omega(\mathcal{A})} |\hat{a}(\tau)| = \sup_{\tau\in\Omega(\mathcal{A})} |\tau(a)| = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| = r(a)\,.$$

Iz teorema 3.2 slijedi da je $r(a) \leq \|a\|$, pa je ϕ kontrakcija.

Neka je sad $\mathcal{A}$ unitalna komutativna C^*-algebra. Pokažimo prvo da je ϕ $*$-homomorfizam. Iz teorema 3.9 slijedi

$$\phi(a^*)(\tau) = \tau(a^*) = \overline{\tau(a)} = \tau(a)^* = \phi(a)^*(\tau)\,.$$

Jer je a^*a hermitski, prema teoremu 3.5 imamo

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a^*a)\| = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2\ ,$$

pa je ϕ izometrija. Posljedično, ϕ je i injekcija, te je $\phi(\mathcal{A})$ C^*-podalgebra od $C(\Omega(\mathcal{A}))$.

Kako bismo pokazali surjektivnost od ϕ , koristit ćemo Stone-Weierstrassov teorem (B.7). Neka su $\tau\,,\mu\in\Omega(\mathcal{A})\,,\ \tau\neq\mu$. Dakle, postoji $a\in\mathcal{A}$ takav da je $\tau(a)\neq\mu(a)$, odnosno $\hat{a}(\tau)\neq\hat{a}(\mu)$, pa $\phi(\mathcal{A})$ razdvaja točke. Dakle, ili je $\phi(\mathcal{A}) = C(\Omega(\mathcal{A}))$, ili je $\phi(\mathcal{A}) = \{\hat{a}\mid \hat{a}(\tau_0) = 0\,,\quad \text{za neki } \tau_0\in\Omega(\mathcal{A})\}$. Kada bi vrijedio drugi slučaj, bilo bi $\tau_0(\mathcal{A}) = 0$, što je kontradikcija. Dakle, vrijedi prva opcija, odnosno ϕ je surjekcija. Dakle, ϕ je izometrički $*$-izomorfizam. □

Za prvu primjenu Gelfandove reprezentacije imamo sljedeći važan teorem, koji će se koristiti u Gelfand-Naimarkovom teoremu.

Teorem 3.13. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne C^*-algebre i $\phi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ injektivan unitalan $*$-homomorfizam. Tada je ϕ izometrija.*

Dokaz. Kako je ϕ $*$-homomorfizam, dovoljno je pokazati da je $\|\phi(a^*a)\| = \|a^*a\|$, odnosno, da je $\|\phi(a)\| = \|a\|$ za sve $a\in\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$. Restringirajući $\mathcal{A}$ na $C^*(1,a)$ i $\mathcal{B}$ na $C^*(1,\phi(a))$, možemo pretpostaviti da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ komutativne.

Kako je Gelfandova reprezentacija unitalnih C^*-algebri izometrički $*$-izomorfizam, pokazat ćemo da je $\|\hat{a}\|_\infty = \left\|\widehat{\phi(a)}\right\|_\infty$ za sve $a\in\mathcal{A}$, iz čega će slijediti tvrdnja. Neka je $\tau\in\Omega(\mathcal{B})$. Tada je $\tau\circ\phi$ karakter na $\mathcal{A}$. Definiramo povlak:

$$\phi^*:\Omega(\mathcal{B})\longrightarrow\Omega(\mathcal{A})\,,\qquad \phi^*(\tau) = \tau\circ\phi\,.$$

Ako $\tau_i \to \tau$ u wk^* topologiji, tada prema propoziciji C.3 za svaki $b \in \mathcal{B}$ vrijedi

$$\phi^*(\tau_i)(b) = \tau_i(\phi(b)) \to \tau(\phi(b)) = \phi^*(\tau)(b) \implies \phi^*(\tau_i) \to \phi^*(\tau)\,.$$

Prema teoremu B.8, ϕ^* je neprekidan i prema teoremu B.3 je $\phi^*(\Omega(\mathcal{B})) \subset \Omega(\mathcal{A})$ kompaktan. Prema teoremu B.4, on je zatvoren. Pokažimo da je $\phi^*(\Omega(\mathcal{B})) = \Omega(\mathcal{A})$.

Pretpostavimo suprotno. Tada prema teoremu B.6 (uz $U = \Omega(\mathcal{A}) \setminus \phi^*(\Omega(\mathcal{B}))$ i $K = \{x\} \subset U$) postoji funkcija $f \in C(\Omega(\mathcal{A}), [0,1])$ takva da je $f = 0$ na $\phi^*(\Omega(\mathcal{B}))$ i različita je od nule. Kako je Gelfandova reprezentacija $*$-izomorfizam, postoji $a \in \mathcal{A}$ takav da je $f = \hat{a}$. No tada je

$$\|\phi(a)\| = \left\|\widehat{\phi(a)}\right\|_\infty = \sup_{\tau\in\Omega(\mathcal{B})} |\tau(\phi(a))| = \sup_{\tau\in\Omega(\mathcal{B})} |f(\phi^*(\tau)))| = \sup_{\tau\in\phi^*(\Omega(\mathcal{B}))} |f(\tau)| = 0\,.$$

Kako je ϕ injekcija, slijedi da je $a = 0$, što je kontradikcija. Dakle, $\phi^*(\Omega(\mathcal{B})) = \Omega(\mathcal{A})$. Ako je sad $a \in \mathcal{A}$ proizvoljan, slijedi

$$\|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\tau\in\Omega(\mathcal{A})} |\tau(a)| = \sup_{\tau\in\Omega(\mathcal{B})} |\phi^*(\tau)(a)| = \sup_{\tau\in\Omega(\mathcal{B})} |\tau(\phi(a))| = \left\|\widehat{\phi(a)}\right\|_\infty\,.$$

$\square$

Rasprava koja slijedi nam služi za motivaciju Borelovog funkcionalnog računa (definicija D.24) koji će nam trebati u šestom poglavlju.

Neka je $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ C^*-algebra svih linearnih operatora na $\mathbb{C}^n$ (dakle, $n \times n$ kompleksnih matrica). Neka je $A \in \mathcal{A}$ normalan. Tada je $C^*(I, A)$ komutativna unitalna C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$. Prema prethodnom teoremu ona mora biti izometrično $*$-izomorfna algebri neprekidnih funkcija na kompaktnom Hausdorffovom prostoru. Sada ćemo pobliže opisati njenu konstrukciju.

$C^*(I, A)$ se sastoji upravo od svih polinoma u I, A i A^*, te svih njihovih limesa. S druge strane, iz linearne algebre znamo da postoji baza $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ u kojoj je A dijagonalan. Neka su mu $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ (ne nužno različite) svojstvene vrijednosti, $Ae_i = \lambda_i e_i$. Ako je $p(x,y)$ polinom, tada je $p(A, A^*)$ operator koji je dijagonalan u E sa svojstvenim vrijednostima $p(\lambda_i, \lambda_i^*)$. Štoviše, $\|p(A, A^*)\| = \max_{i=1,\dots,n} p(\lambda_i, \lambda_i^*)$. Ako je $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ neprekidna, definiramo operator $f(A)$ takav da je $f(A)e_i = f(\lambda_i)e_i$. S druge strane, jer je $\sigma(A)$ konačan, f je na $\sigma(A)$ restrikcija polinoma. Dakle, $C^*(I, A)$ je izometrično $*$-izomorfna s $C(\sigma(A))$. Ovaj postupak se može poopćiti i imamo sljedeći fundamentalan rezultat.

Teorem 3.14. (Neprekidan funkcionalan račun) *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $a \in \mathcal{A}$ normalan. Tada postoji jedinstveni unitalan $*$-homomorfizam $\phi : C(\sigma(a)) \longrightarrow \mathcal{A}$ takav da je $\phi(z) = a$, gdje je $z : \sigma(a) \longrightarrow \mathbb{C}$ inkluzija. Štoviše, ϕ je izometrija i* $\mathrm{Im}\phi = C^*(1, a)$.

Budući da je ϕ $*$-homomorfizam, za sve polinome $p \in C(\sigma(a))$ vrijedi $\phi(p) = p(a)$. Stoga možemo bez zabune za proizvoljnu $f \in C(\sigma(a))$ umjesto $\phi(a)$ pisati $f(a)$.

3.3 Uređaj na C^*-algebrama

U drugom poglavlju smo pokazali da se stanja fizikalnog sistema mogu prikazati kao pozitivni linearni funkcionali norme 1 na C^*-algebri pridruženoj fizikalnom sistemu. Pritom su opservable bile definirane kao pozitivne ako im je rezultat mjerenja uvijek nenegativan broj. Krećemo stoga s definicijom.

Definicija 3.7. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $a \in \mathcal{A}$ hermitski element. Ako je $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$, kažemo da je a* pozitivan *element i pišemo $a \geq 0$. Skup svih pozitivnih elememenata od $\mathcal{A}$ označavamo $\mathcal{A}^+$. Ako su $a, b \in \mathcal{A}$ hermitski elementi takvi da je $a - b \geq 0$, onda pišemo $a \geq b$.*

Primjer 3.3. Neka je $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ C^*-algebra ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i $A \in \mathcal{A}$ hermitski. Tada je A pozitivan operator akko je $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, za sve $x \in \mathcal{H}$. (definicija D.11) *i to se poklapa s gornjom definicijom.*

Primjer 3.4.

Postoji još jedna karakterizacija pozitivnosti. Neka je $t \in [0, \infty)$. Ako je $f \geq 0$ i $\|f\| \leq t$, onda je $\|f - t\| \leq t$. S druge strane, ako je $\|f - t\| \leq t$, onda je $f \geq$ 0 .Neka je $\mathcal{A} = C(X)$ C^*-algebra kompleksnih neprekidnih funkcija na kompaktnom Hausdroffovom prostoru X i $f, g \in \mathcal{A}$. Kako je $\sigma(f) = f(X)$, $f \geq 0$ upravo kad je $f(x) \geq 0$, te $f \geq g$ akko je $f(x) \geq g(x)$, za sve $x \in X$. Nadalje $f \geq 0$ akko postoji (nužno jedinstvena) nenegativna funkcija $\sqrt{f} \in C(X)$ takva da je $f = (\sqrt{f})^2$, odnosno akko postoji $h \in C(X)$ takva da je $f = hh^*$.

Postoji još jedna karakterizacija pozitivnosti. Neka je $t \in [0, \infty)$. Ako je $f \geq 0$ i $\|f\| \leq t$, onda je $\|f - t\| \leq t$. S druge strane, ako je $\|f - t\| \leq t$, onda je $f \geq 0$.

Teorem 3.15. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $a \in \mathcal{A}$ hermitski element. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) $a \geq 0$,

b) Postoji jedinstven hermitski element $b \in \mathcal{A}$ takav da je $a = b^2$,

c) Postoji $c \in \mathcal{A}$ takav da je $a = c^* c$.

Za b takav da je $a = b^2$ pišemo $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, a za proizvoljan element c pišemo $|c| = (c^* c)^{\frac{1}{2}}$.

Dokaz. Dokazat ćemo ekvivalenciju (a) i (b) dijela. Neka je $a \geq 0$ i $\mathcal{B} = C^*(1, a)$. Kako je a hermitski, $\mathcal{B}$ je unitalna komutativna C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$. Neka je $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow C(\Omega(\mathcal{B}))$ Gelfandova reprezentacija. Prema teoremu 3.6, $\sigma_{\mathcal{B}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$, pa pišemo samo $\sigma(a)$. Prema tom istom teoremu je $\sigma(\psi(a)) = \sigma(a) \subset [0, +\infty)$. Dakle, $\psi(a)$ je pozitivna funkcija, pa postoji $f \in C(\Omega(\mathcal{B}))$ takva da je $f^2 = \psi(a)$. Stavimo $b = \psi^{-1}(f)$. Kako je i ψ^{-1} $*$-izomorfizam,

$$a = \psi^{-1}(\psi(a)) = \psi^{-1}(f^2) = \psi^{-1}(f)^2 = b^2 .$$

Neka je sad c neki drugi hermitski element takav da je $a = c^2$. Tada c komutira s a, pa stoga i s b, budući da se $\mathcal{B}$ sastoji od svih polinoma od a i njihovih limesa. Neka je $\mathcal{D} = C^*(1, b, c)$ i $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow C(\Omega(\mathcal{D}))$ Gelfandova transformacija. Tada su $\phi(b)$ i $\phi(c)$ korijeni funkcije $\phi(a)$, stoga su jednake, pa je $b = c$.

Obratno, ako je $a = b^2$, onda primijenimo ponovno Gelfandovu transformaciju na $C^*(1, b)$ i dobivamo da je $a \geq 0$. □

Napomena 3.1. Gornje tvrdnje vrijede i za neunitalne algebre, ako koristimo unitizaciju algebre. No, nas zanimaju samo unitalne algebre, pa smo htjeli izbjeći tehničke komplikacije.

Ovakva primjena Gelfdandove reprezentacije je standardna. Sličnim postupkom, te primjenom rezultata u primjeru 3.4, dobivamo slijedeću lemu:

Lema 3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra, $a \in \mathcal{A}$ hermitski i $t \in [0, +\infty)$. Ako je $\|a\| \leq t$ i $a \geq 0$, tada je $\|a - t\| \leq t$. Obratno, ako je $\|a - t\| \leq t$, tada je $a \geq 0$.*

Teorem 3.16. *Zbroj dva pozitivna elementa C^*-algebre $\mathcal{A}$ je pozitivan.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathcal{A}^+$. Tada je prema prethodnoj lemi $\|a - \|a\|\| \leq \|a\|$ i $\|b - \|b\|\| \leq \|b\|$. Imamo

$$\|a + b - \|a\| - \|b\|\| \leq \|a - \|a\|\| + \|b - \|b\|\| \leq \|a\| + \|b\| \ ,$$

pa, opet primjenjujući prethodnu lemu, vrijedi $a + b \geq 0$. □

Teorem 3.17. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $a, b \in \mathcal{A}$ hermitski elementi. Tada vrijedi sljedeće:*

a) Ako je $a \leq b$ i $c \in \mathcal{A}$, tada je $c^*ac \leq c^*bc$,

b) Ako je $0 \leq a \leq b$, tada je $\|a\| \leq \|b\|$,

c) Ako su a i b invertibilni i $0 \leq a \leq b$, tada je $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$,

d) Ako je $0 \leq a \leq b$, tada je $a^{\frac{1}{2}} \leq b^{\frac{1}{2}}$.

Sljedeći teorem nam govori da pozitivni elementi generiraju cijelu C^*-algebru.

Teorem 3.18. *Neka je $a \in \mathcal{A}$ hermitski element. Tada postoje jedinstveni pozitivni elementi a_+ i a_- takvi da je $a = a_+ - a_-$ i $a_+a_- = 0$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} = C^*(1, a)$ i $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow C(\Omega(\mathcal{B}))$ Gelfandova transformacija i neka je $\phi(a) = f$. Tada su

$$f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \qquad \text{i} \qquad f_- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

nenegativne funkcije takve da je $f = f_+ - f_-$ i produkt im je 0. Definirajmo

$$a_+ = \phi^{-1}(f_+) \quad \text{i}_- = \phi^{-1}(f_-) \, .$$

Kako je ϕ $*$-izomorfizam, to su pozitivni elementi, te imamo $a = a_+ - a_-$ i $a_+a_- = 0$. Budući da je odabir f_+ i f_- s danim svojstvima jedinstven, a_+ i a_- su jedinstveni. □

3.4 Stanja na C^*-algebrama

Definicija 3.8. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra. Za linearan funkcional $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ takav da je $\phi(a) \geq 0$, za svaki $a \in \mathcal{A}^+$, kažemo da je* pozitivan. *Ako su ϕ i ψ pozitivni linearni* *funkcionali takvi da je $\phi - \psi$ također pozitivan, pišemo $\psi \leq \phi$.* Stanja *su pozitivni linearni funkcionali norme 1. Skup svih stanja na $\mathcal{A}$ označavamo sa $S(\mathcal{A})$.*

Teorem 3.19. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i ϕ pozitivan linearan funkcional na $\mathcal{A}$. Tada je ϕ ograničen.*

Teorem 3.20. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i ϕ pozitivan linearan funkcional na $\mathcal{A}$. Definirajmo funkciju*

$$\sigma : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \qquad \sigma(a,b) = \phi(b^*a)\,.$$

Tada je σ pozitivna seskvilinearna forma (vidjeti definiciju D.1), te

$$\phi(b^*a) = \overline{\phi(a^*b)}\,, \quad i \quad |\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(b^*b)\,.$$

Dokaz. σ je linearna u prvoj i antilinearna u drugoj varijabli; dakle, σ je seskvilinearna forma. σ je pozitivna jer je $\sigma(a,a) = \phi(a^*a) \geq 0$. Ostale tvrdnje slijede iz teorema D.1. □

Teorem 3.21. *Neka je ϕ pozitivan linearan funkcional na unitalnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$. Tada je*

$$\phi(a^*) = \phi(a)^* \qquad i \qquad |\phi(a)|^2 \leq \|\phi\|\,\phi(a^*a)\,,$$

za sve $a \in \mathcal{A}$.

Dokaz. Prema prethodnom teoremu imamo $\phi(a^*) = \phi(a^*1) = \overline{\phi(a1^*)} = \phi(a)^*$, i prema istom teoremu je

$$|\phi(a)|^2 \leq \phi(1)\phi(a^*a) = |\phi(1)|\phi(a^*a) \leq \|\phi\|\,\phi(a^*a)\,.$$

□

Lema 3.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i ϕ pozitivan linearan funkcional. Tada je*

$$\phi(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\,\phi(b^*b)\,,$$

za sve $a, b \in \mathcal{A}$.

Dokaz. Primjena teorema 3.17. □

Teorem 3.22. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i ϕ ograničen linearan funkcional. Tada je ϕ pozitivan akko je $\phi(1) = \|\phi\|$. Posebno, ϕ je stanje akko je $\phi(1) = 1$.*

Dokaz. Neka je ϕ pozitivan. Tada je $\phi(1) \geq 0$. Ako je $\phi(1) = 0$, prema teoremu 3.20 je $\phi(a) \leq \sqrt{\phi(a^*a)}\sqrt{\phi(1)} = 0 \implies \phi = 0$. Pretpostavimo stoga da je $\phi(1) > 0$. Jasno je da je $\phi(1) \leq \|\phi\|$. Neka je $a \in \text{ball}\mathcal{A}$. Tada je $\|a^*a\| = \|a\|^2 \leq 1$. Prema teoremu 3.20 imamo

$$|\phi(a)|^2 = |\phi(1^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(1) \leq \|\phi\| \, \phi(1) \, .$$

Uzimajući supremum po $\text{ball}\mathcal{A}$, dobivamo $\|\phi\|^2 \leq \|\phi\| \, \phi(1) \implies \|\phi\| \leq \phi(1)$.

Obratno, neka je $\phi(1) = \|\phi\|$. Pokažimo prvo da je $\phi(a)$ realan ako je a hermitski. Možemo pretpostaviti da je $\|\phi\| = 1$ i $\|a\| \leq 1$. Neka je $\phi(a) = \alpha + i\beta$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $\beta \leq 0$ (u protivnom napravimo zamjenu $a \mapsto -a$). Sada je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\|a - in\|^2 = \|(a + in)(a - in)\| = \left\|a^2 + n^2\right\| \leq \|a\|^2 + n^2 \leq 1 + n^2 \implies$$

$$|\phi(a - in)|^2 \leq \|\phi\|^2 \, \|a - in\|^2 \leq 1 + n^2 \implies$$

$$\alpha^2 + (\beta - n)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta n + n^2 \leq 1 + n^2 \implies$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta n \leq 1 \, ,$$

što ne može biti ispunjeno, budući da je $\beta \leq 0$. Dakle, $\beta = 0$. Ako je sad $a \geq 0$ i $\|a\| \leq 1$, prema lemi 3.1 je $\|a - 1\| \leq 1$. Stoga, $\phi(1 - a) \in \mathbb{R}$ i $|\phi(1 - a)| \leq \|\phi\| \, \|1 - a\| \leq 1$. Dakle, $\phi(1 - a) = 1 - \phi(a) \leq 1 \implies \phi(a) \geq 0$. □

Korolar 3.1. *Neka su ϕ_1 i ϕ_2 pozitivni linearni funkcionali na unitalnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$. Tada je $\|\phi_1 + \phi_2\| = \|\phi_1\| + \|\phi_2\|$.*

Dokaz. Prema prethodnom teoremu je $\|\phi_1 + \phi_2\| = \phi_1(1) + \phi_2(1) = \|\phi_1\| + \|\phi_2\|$. □

Do sada smo popisali puno dobrih svojstava stanja. Naravno, valjalo bi pokazati njihovu egzistenciju.

Teorem 3.23. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $a \in \mathcal{A}$ normalan element. Tada postoji stanje ϕ na $\mathcal{A}$ takvo da je $|\phi(a)| = \|a\|$.*

Dokaz. Označimo s $\mathcal{B}$ komutativnu unitalnu C^*-algebru $C^*(1, a)$. Prema Gelfandovoj transformaciji imamo $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty$. Kako je $|\hat{a}|$ neprekidna funkcija na kompaktnom skupu, postoji $\tau \in \Omega(\mathcal{B})$ na kojem postiže maksimum $\|a\|$ (teorem B.3). Dakle, $|\tau(a)| = \|a\|$. Prema Hahn-Banachovom teoremu (C.2) postoji ograničen linearan funkcional ϕ na $\mathcal{A}$ koji proširuje τ, a kako je $\phi(1) = \tau(1) = 1$, prema teoremu 3.22 je ϕ stanje i $|\phi(a)| = |\tau(a)| = \|a\|$. □

Završimo ovo potpoglavlje s važnim primjerom.

Primjer 3.5. Neka je $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ C^*-algebra ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka je $T \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ *pozitivan* nuklearan operator (definicija D.16) traga 1 i definirajmo $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ formulom

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}(TA)\,.$$

Pokažimo da je ω stanje na $\mathcal{A}$. Pretpostavit ćemo da je $\mathcal{H}$ separabilan. Dakle, postoji prebrojiva baza $\{e_n\}_n$ za $\mathcal{H}$ (vidjet ćemo u petom poglavlju da nam općenit slučaj neće biti potreban).

1) ω *je linearan*: Teorem D.13.

2) ω *je ograničen*: Prema teoremu D.13, za svaki $A \in \mathcal{A}$ je

$$|\mathrm{Tr}(TA)| \leq \|A\| \, \|T\|_1 = \|A\| \ .$$

Dakle, ω je ograničen.

3) ω *je stanje*: Kako je T traga 1, vrijedi $\omega(I) = 1$. Tada je ω stanje prema teoremu 3.22. Pretpostavimo sad da je $T = P_x$, projektor na potprostor $\mathbb{C}x$, gdje je $\|x\| = 1$, i neka je E baza za $\mathcal{H}$ koja proširuje $\{x\}$. Tada ω poprima oblik

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}(P_x A) = \sum_{e \in E} \langle P_x A e\,,\, e\rangle = \sum_{e \in E} \langle Ae\,,\, P_x e\rangle = \langle Ax\,, x\rangle\,.$$

U standardnoj kvantnoj mehanici je očekivanje opservable A u stanju određenom s operatorom gustoće ρ je dano upravo s $\mathrm{Tr}(A\rho)$ (kombinirajući Dirac-von Neumannove aksiome 3 i 4). Pod identifikacijom $\rho \longleftrightarrow \omega_\rho \ : \ A \mapsto \mathrm{Tr}(A\rho)$, vidimo da su stanja u standardnom kvantnomehaničkom smislu također stanja i u C^*-algebarskom smislu.

3.5 *Daljnja rasprava o fizikalnim sistemima*

Sada kad smo razvili osnove teorije C^*-algebri, u stanju smo vratiti se na teoreme 2.8 i 2.9. Pokažimo prvo da, ako je $\mathcal{A}$ C^*-algebra, onda je $\mathcal{A}_{\text{sa}}$ JB-algebra s normom naslijeđenom od $\mathcal{A}$, te Jordanovim produktom danim s $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Prije svega, istim računom kojeg nalazimo nakon primjera 2.1 dobivamo da je $\mathcal{A}_{\text{sa}}$ realna Jordanova algebra ($\mathcal{A}$ je prije svega kompleksan vektorski prostor, no on je i realan vektorski prostor, i $\mathcal{A}_{\text{sa}}$ je njegov realan potprostor).

Pokažimo da je $\mathcal{A}_{\text{sa}}$ Banachov prostor. Neka je $\{a_n\}_n \subset \mathcal{A}_{\text{sa}}$ niz koji konvergira k $a \in \mathcal{A}$. Kako je $a_n - a_n^* = 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$, te kako su zbroj i involucija neprekidne funkcije, $0 = \lim_{n\to\infty}(a_n - a_n^*) = a - a^*$. Dakle, $\mathcal{A}_{\text{sa}}$ je zatvoren potprostor od $\mathcal{A}$, i stoga je Banachov.

Vrijedi
$$\|a \circ b\| = \frac{1}{2}\|ab + ba\| \leq \frac{1}{2}(\|ab\| + \|ba\|) \leq \|a\|\,\|b\| \ ,$$

za sve $a, b \in \mathcal{A}_{\text{sa}}$ pa je $\mathcal{A}_{\text{sa}}$ Jordan-Banachova algebra (definicija 2.9). Nadalje, jer vrijedi C^*-identitet i jer je a hermitski, vrijedi $\|a^2\| = \|a\|^2$. Prema teoremu 3.15 i 3.16, a^2, b^2 i $a^2 + b^2$ su pozitivni elementi, te kako je $a^2 \leq a^2 + b^2$, prema teoremu 3.17 je $\|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\|$. Dakle, ispunjeni su uvjeti definicije 2.9 i $\mathcal{A}_{\text{sa}}$ je JB-algebra. Time je teorem 2.8 dokazan.

Pojasnimo sada teorem 2.9. Aksiom 7 nam govori da ako je $\Sigma = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\,,\,\rangle)$ fizikalni sistem, postoji C^*-algebra $\mathcal{A}$ takva da je $\mathcal{O}$ JB-podalgebra od $\mathcal{A}_{\text{sa}}$. Podsjetimo se da hermitski elementi generiraju cijelu algebru, odnosno, $C^*(\mathcal{A}_{\text{sa}}) = \mathcal{A}$. Ovo nam sugerira da umjesto $\mathcal{A}$, za ambijentnu C^*-algebru možemo odabrati $\mathcal{B} = C^*(\mathcal{O}) \subset \mathcal{A}$. Kako je $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}_{\text{sa}} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{\text{sa}}$, i dalje je $\mathcal{O}$ JB-podalgebra JB-algebre hermitskih elemenata. Budući da je skup svih polinoma elemenata iz $\mathcal{O}$ s koeficijentima čiji su realni i imaginarni dijelovi racionalni gusti u $\mathcal{B}$, a $\mathcal{O}$ je separabilan, $\mathcal{B}$ je isto separabilna. U nastavku $\mathcal{B}$ izjednačavamo s $\mathcal{A}$.

Okrenimo se sada stanjima. Neka je $\phi \in \mathcal{S}$. Teoremi 2.1 i 2.5 nam govore da je ϕ pozitivan linearan funkcional norme 1 na $(\mathcal{O}, \|\cdot\|)$. Kako je $\mathcal{O}$ realan potprostor od $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, prema Hahn-Banachovom teoremu (vidjeti teorem C.2)) postoji $\mathbb{R}$-linearan funkcional $\phi' \in \mathcal{A}^*$ koji proširuje ϕ, takav da je $\|\phi'\| = \|\phi\| = 1$. Prema lemi C.1, postoji jedinstven $\mathbb{C}$-linearan funkcional Φ takav da je $\phi' = \text{Re}\Phi$, dan s

$\Phi(a) = \phi'(a) - i\phi'(ia)$. Prema toj istoj lemi je $\|\Phi\| = \|\phi'\| = 1$.

Još preostaje pokazati da je Φ pozitivan. No to je lako: kako je $1 \in \mathcal{O}$ jedinica za $\mathcal{A}$ (jer je $1 \circ a = 1a = a^0 \circ a = a$, po definiciji), vrijedi $\Phi(1) = \phi(1) = 1$, pa je prema teoremu 3.22 Φ stanje na $\mathcal{A}$.

Napomena 3.2. Proširenje Φ od ϕ u gornjoj argumentaciji općenito nije jedinstveno. No, to nam ne predstavlja problem, budući da nas zanima njihovo djelovanje upravo na opservablama. Sva stanja na $\mathcal{A}$ ubuduće označavamo malim grčkim slovima.

4 Osnovni aksiomi klasične mehanike

U drugom poglavlju cilj nam je bio naći matematički formalizam opisa fizikalnog sistema koji se bazira na postupku mjerenja i odnosu mjernih uređaja i stanja. Kao takav, on je veoma fleksibilan. Stoga, ako nanesemo dodatne pretpostavke, glavne odrednice klasične mehanike, očekujemo reproducirati standardni formalizam klasične mehanike.

4.1 *Temeljne postavke klasične mehanike*

U klasičnoj mehanici postoji znatno slabija distinkcija između stanja i opservabli: stanje sistema određeno je položajima i impulsima svih čestica u datom trenutku. Iako nije potrebno pribjegavati komplementarnim i isključivim opisima sistema (u Bohrovom smislu; vidjeti drugi citat u uvodu), zadržat ćemo operacionalnu definiciju opservabli i stanja. Time ćemo i dalje moći izraziti nesigurnosti u mjerenju koje su prisutne u termodinamičkim sistemima, ili koje su uzrokovane nesavršenošću instrumenata. Odlika klasične mehanike je ta da nema intrinzične ograničenosti u mogućnosti *simultanog* i *preciznog* mjerenja svake opservable. Ovakvu situaciju možemo sažeti u sljedeće tri definicije:

Definicija 4.1. *Neka je* $\Sigma = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\,,\,\rangle)$ *fizikalni sistem i* $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ *. Neka je* $\mathcal{F}$ *takav da za sve* $A, B \in \mathcal{O}$ *vrijedi*

$$\langle A, \psi\rangle \leq \langle B, \psi\rangle\,, \quad \text{za sve } \psi \in \mathcal{F} \implies A \leq B\,.$$

Tada za $\mathcal{F}$ *kažemo da je* potpun *skup stanja.*

Iz ove definicije slijedi da ako je $\langle A, \psi\rangle = \langle B, \psi\rangle$, za sve $\psi \in \mathcal{F}$, onda su $A - B$ i $B - A = -(A - B)$ oboje pozitivni, što može biti samo ako je $A - B = 0$, odnosno $A = B$.

Definicija 4.2. *Neka je* $\Sigma = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\,,\,\rangle)$ *fizikalni sistem,* $\phi \in \mathcal{S}$ *i* $A \in \mathcal{O}$ *. Tada veličinu*

$$\Delta_\phi A = \phi((A - \phi(A)1_{\mathcal{O}})^2)^{\frac{1}{2}} = \langle (A - \langle A, \phi\rangle 1_{\mathcal{O}})^2, \phi\rangle^{\frac{1}{2}}$$

zovemo disperzija *opservable* A *u stanju* ϕ *.*

Primijetimo da je $(A - \phi(A)1_{\mathcal{O}})^2$ pozitivna opservabla. Kako su stanja pozitivni linearni funkcionali, prethodna definicija ima smisla. Također primijetimo da je $\Delta_\psi A = 0$ akko je $\psi(A^2) = \psi(A)^2$.

Definicija 4.3. *Neka je $K = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\, ,\, \rangle)$ fizikalni sistem. Ako postoji potpun skup stanja $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ takav da je $\Delta_\psi A = 0$, za sve $\psi \in \mathcal{F}$ i sve $A \in \mathcal{O}$, te ako su sve $A \in \mathcal{O}$ prave opservable, tada za K kažemo da je* klasičan sistem.

Pojasnimo par stvari. Prvo, nije uvijek moguće precizno izmjeriti sve opservable ako je sistem velik. Uzmimo, primjerice, 1000 nenabijenih čestica zatvorenih u kvadratnoj kutiji. Opservable ovog sistema su $q_1, q_2, \ldots, q_{1000}, p_1, p_2, \ldots, p_{1000},$ itd. Ako pripremimo sistem tako da jedna čestica putuje od jedne stranice do druge, a sve ostale miruju na trećoj strani, moguće je izmjeriti sva svojstva svih čestica. Tisuću ovakvih stanja čine jedan primjer potpunog skupa stanja.

Drugo, prisjetimo se da smo kod konstrukcije $\mathcal{O}$ krenuli sa skupom opservabli asociranih s određenim mjernim uređajem, a kasnije matematički ekstrapolirali da $\mathcal{O}$ postane vektorski prostor, te da sadrži sve potencije svih svojih elemenata. Početni skup smo nazivali pravim stanjima. No, kao što smo rekli, u klasičnoj mehanici je spona između opservable i mjernog uređaja znatno oslabljena; mjerni instrumenti su tek pomagalo, čitač svojstava stanja sistema. Moguće je, u principu, izmjeriti proizvoljan broj opservabli istovremeno. Stoga nema potrebe razlikovati prave opservable od onih koje su dodane ekstrapolacijom $\mathcal{O}$ na način opisan u poglavlju 2.2. To će postati jasnije i iz analize koja slijedi.

Pogledajmo kako egzistencija potpunog skupa stanja bez disperzije utječe na algebarsku strukturu opservabli. Neka je K kao u definiciji 4.3, te neka su $\psi \in \mathcal{F}$ i $A, B \in \mathcal{O}$. Ako je izvršen niz mjerenja, $\{m(A,\psi)_n\}_n$ i $\{m(B,\psi)_n\}_n$ opservabli A i B , tada su svi $m(A,\psi)_n$ međusobno jednaki, te analogno, svi $m(B,\psi)_n$ su međusobno jednaki.

Naime, budući da je $\psi(A^2) = \psi(A)^2$, vrijedi

$$\begin{aligned}
\psi(A^2) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(m(A,\psi)_1^2 + \ldots m(A,\psi)_n^2) \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(m(A,\psi)_1 + \ldots m(A,\psi)_n) \right)^2 \\
&= \psi(A)^2 .
\end{aligned}$$

Stoga možemo pisati $m(A,\psi) = m(A,\psi)_n$ $(= \psi(A))$ i analogno $m(B,\psi) = m(B,\psi)_n$. Nadalje, kako je gore objašnjeno, izmjerena je i opservabla $A + B$, te $m(A + B,\psi) = m(A,\psi) + m(B,\psi)$. Izmjerena je i $(A + B)^2$, te $m((A + B)^2,\psi) = m(A + B,\psi)^2$.

Stoga imamo

$$(A \circ B)(\psi) = \frac{1}{2}((A + B)^2(\psi) - A^2(\psi) - B^2(\psi)) = A(\psi)B(\psi) .$$

Iz ovoga slijedi da je Jordanov produkt na $\mathcal{O}$ asocijativan. Naime, za svako $\psi \in \mathcal{F}$ je

$$(A \circ (B \circ C))(\psi) = A(\psi)B(\psi)C(\psi) = ((A \circ B) \circ C)(\psi) \implies A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C ,$$

jer je $\mathcal{F}$ potpun skup stanja. Dokazali smo slijedeći teorem:

Teorem 4.1. *Neka je $K = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\, ,\, \rangle)$ klasičan sistem. Tada je $(\mathcal{O}, \circ)$ realna komutativna unitalna (asocijativna) algebra.*

Kako ova ograničenja utječu na topološku strukturu? Prisjetimo se da smo definirali normu na $\mathcal{O}$ s

$$\|A\| = \sup_{\phi \in \mathcal{S}} |\phi(A)| .$$

Prirodno je pretpostaviti da će potpun skup stanja $\mathcal{F}$ "ispuniti" sve vrijednosti koje A može poprimiti, tako da se u gornjoj jednakosti $\mathcal{S}$ može zamijeniti sa $\mathcal{F}$.

Teorem 4.2. *Neka je $K = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\, ,\, \rangle)$ klasičan sistem, te neka je $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ kao u definiciji 4.3. Neka je $A \in \mathcal{O}$. Tada je*

$$\|A\| = \sup_{\psi \in \mathcal{F}} |\psi(A)| .$$

Dokaz. Označimo supremum na desnoj strani gornje jednakosti sa $s(A)$. Kako je $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$, vrijedi $s(A) \leq \|A\|$. Za obrat, pretpostavimo da je $s(A) < \|A\|$. Dakle, postoje $\phi \in \mathcal{S}$ i $\varepsilon > 0$ takvi da je $\pm\psi(A) \leq |\phi(A)| - \varepsilon$, za sve $\psi \in \mathcal{F}$. Tada za sve $\psi \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\langle A, \psi\rangle \leq \langle(|\phi(A)| - \varepsilon)1_{\mathcal{O}}, \psi\rangle \quad \text{i} \quad - \langle A, \psi\rangle = \langle(-A), \psi\rangle \leq \langle(|\phi(A)| - \varepsilon)1_{\mathcal{O}}, \psi\rangle .$$

Prema definiciji 4.1 slijedi

$$A \leq (|\phi(A)| - \varepsilon)1_{\mathcal{O}} \quad \text{i} \quad - A \leq (|\phi(A)| - \varepsilon)1_{\mathcal{O}} .$$

Stoga je $(|\phi(A)| - \varepsilon)1_{\mathcal{O}} \pm A \geq 0$, pa je, posebno,

$$\phi((|\phi(A)| - \varepsilon)1_{\mathcal{O}} \pm A) = |\phi(A)| - \varepsilon \pm \phi(A) \geq 0 \implies |\phi(A)| - \varepsilon \geq |\phi(A)|\,,$$

što je kontradikcija. Dakle, vrijedi $s(A) \geq \|A\|$, odnosno $\|A\| = \sup_{\psi \in \mathcal{F}} |\psi(A)|$. $\square$

U drugom poglavlju smo pokazali da je (teorem 2.9) $(\mathcal{O}, \circ, \|\cdot\|)$ izometrično izomorfna s JB-podalgebrom $(\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}, \circ)$, gdje je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. U potpoglavlju 3.5. smo još pokazali da je $C^*(\mathcal{O}) = \mathcal{A}$. No, asocijativnost Jordanovog produkta nam omogućava da direktno konstruiramo C^*-algebru iz $\mathcal{O}$ na sljedeći način:

Definirajmo realni vektorski prostor $\mathcal{A} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ i pišimo $(a, b) = a + ib$, te poistovjetimo $\mathcal{O}$ s $\mathcal{O} \oplus \{0\}$ (od sada nadalje elemente iz $\mathcal{O}$ označavamo malim slovima). Možemo pretvoriti $\mathcal{A}$ u kompleksan vektorski prostor (tzv. kompleksifikaciju) tako da definiramo množenje skalarom $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, na sljedeći način:

$$(\alpha + i\beta)(a + ib) = (\alpha a - \beta b) + i(\alpha b + \beta a)\,.$$

Definirajmo operaciju $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ s formulom

$$(a + ib) \circ (c + id) = (a \circ c - b \circ d) + i(a \circ d + b \circ c)\,.$$

Budući da je produkt $\circ$ komutativan na $\mathcal{O}$, on je komutativan i na $\mathcal{A}$. Kako je $\circ$ bilinearan na $\mathcal{O}$, on je bilinearan i na $\mathcal{A}$. Provjerimo prvo homogenost: neka je $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Tada je

$$\begin{aligned}
(a + ib) \circ (\lambda(c + id)) &= (a + ib) \circ ((\alpha c - \beta d) + i(\alpha d + \beta c)) \\
&= a \circ (\alpha c - \beta d) - b \circ (\alpha d + \beta c) + i(a \circ (\alpha d + \beta c) + b \circ (\alpha c - \beta d)) \\
&= \alpha(a \circ c - b \circ d) - \beta(a \circ d + b \circ c) + i(\alpha(a \circ d + b \circ c) + \beta(a \circ c - b \circ d)) \\
&= \lambda((a \circ c - b \circ d) + i(a \circ d + b \circ c)) \\
&= \lambda((a + ib) \circ (c + id))\,.
\end{aligned}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}(a+ib)\circ((c+id)+(e+if)) &= (a+ib)\circ((c+e)+i(d+f))\\ &= (a\circ(c+e)-b\circ(d+f))+i(a\circ(d+f)+b\circ(c+e))\\ &= (a+ib)\circ(c+id)+(a+ib)\circ(e+if)\,.\end{aligned}$$

Dakle, $\circ$ je linearan u drugoj varijabli, a kako je komutativan, linearan je i u prvoj. Lako se provjeri da je $\lambda(\mu(a+ib)) = \lambda\mu(a+ib)$, pa time $\mathcal{A}$ s množenjem danim s $\circ$ postaje (asocijativna) komutativna algebra nad poljem $\mathbb{C}$, s jedinicom $(1,0)=1$. U nastavku, stoga, pišemo $a\circ b = ab$, te $(a+ib)\circ(c+id) = (a+ib)(c+id)$.

Definirajmo sad funkciju $*: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ s

$$(a+ib)^* = a-ib\,.$$

Jasno je da je $((a+ib)+(c+id))^* = (ai+b)^* + (c+id)^*$. Ako je $\lambda = \alpha+i\beta \in \mathbb{C}$, tada je

$$\begin{aligned}(\lambda(a+ib))^* &= ((\alpha a-\beta b)+i(\alpha b+\beta a))^*\\ &= (\alpha a-\beta b)-i(\alpha b+\beta a)\\ &= (\alpha a-(-\beta)(-b)+i(\alpha(-b)-\beta a))\\ &= \lambda^*(a+ib)^*\,.\end{aligned}$$

Nadalje, očito je $((ai+b)^*)^* = a+ib$, a na sličan način kao gore pokazujemo i da je

$$((a+ib)(c+id))^* = (a+ib)^*(c+id)^* = (c+id)^*(a+ib)^*\,.$$

Dakle, $*$ je involucija i $\mathcal{A}$ time postaje $*$-algebra. Hermitski elementi od $\mathcal{A}$ su upravo $\mathcal{O}$.

Sada se postavlja pitanje proširivanja norme s $\mathcal{O}$ na $\mathcal{A}$. Po analogiji s apsolutnom vrijednošću kompleksnog broja, definiramo

$$\|a+ib\|_{\mathcal{A}} = \left\|(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\right\|\,.$$

Budući da su a^2, b^2 i a^2+b^2 pozitivni, ova definicija ima smisla, a budući da je

$\|a\|_{\mathcal{A}} = \|a\|$, u nastavku izostavljamo supskript $\mathcal{A}$. Sad ćemo pokazati da je $\|\cdot\|$ norma, no prije toga pojasnimo nekoliko stvari.

1. Prema teoremu 2.6, vrijedi $\|a+ib\|^2 = \|a^2+b^2\|$ za sve $a, b \in \mathcal{O}$. Dakle, $\|a+ib\| = \sqrt{\|a^2+b^2\|}$.
2. Prema istom teoremu, norma je sumbultiplikativna na $\mathcal{O}$.
3. U dokazu tog teorema smo pokazali da je $\phi(ab) \leq \sqrt{\phi(a^2)\phi(b^2)}$. Ako je $\psi \in \mathcal{F}$, tada su $\Delta_\psi a = \Delta_\psi b = 0$ i posljedično je $\psi(a^2) = \psi(a)^2$, te $\psi(b^2) = \psi(b)^2$. Za takva stanja je, stoga, $\psi(ab) \leq |\psi(a)\psi(b)|$.

Pokažimo da je $\|\cdot\|$ submultiplikativna norma. Neka su $a, b, c, d \in \mathcal{O}$ proizvoljne. Ako je $\|a+ib\|^2 = \|a^2+b^2\| = 0$, tada je $a^2+b^2=0$. Formalna realnost (definicija 2.7 i teorem 2.4) sada povlači $a=b=0$. Pokažimo nejednakost trokuta:

$$
\begin{aligned}
&\|(a+ib)+(c+id)\|^2 = \|a+c+i(b+d)\|^2 = \left\|(a+c)^2+(b+d)^2\right\| \\
&= \left\|a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2\right\| \\
&= \sup_{\psi\in\mathcal{F}} |\psi(a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2)| \\
&= \sup_{\psi\in\mathcal{F}} \psi(a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2) \\
&\quad \text{(gornja jednakost slijedi iz } (a+c)^2+(b+d)^2 \geq 0) \\
&= \sup_{\psi\in\mathcal{F}} (\psi(a^2+b^2)+\psi(c^2+d^2)+2\psi(ac)+2\psi(bd)) \\
&\leq \sup_{\psi\in\mathcal{F}} \big(\psi(a^2+b^2)+\psi(c^2+d^2)+2\left(|\psi(a)\psi(c)|+|\psi(b)\psi(d)|\right)\big) .
\end{aligned}
$$

Primijetimo sljedeće:

$$
(\psi(a)\psi(d) \pm \psi(b)\psi(c))^2 \geq 0 \implies 2|\psi(a)\psi(b)\psi(c)\psi(d)| \leq \psi(a)^2\psi(d^2)+\psi(b^2)\psi(c^2) .
$$

Zato je

$$
\begin{aligned}
&(|\psi(a)\psi(c)|+|\psi(b)\psi(d)|)^2 = \psi(a^2)\psi(c^2)+2|\psi(a)\psi(b)\psi(c)\psi(d)|+\psi(b^2)\psi(d^2) \\
&\leq \psi(a^2)\psi(c^2)+\psi(a)^2\psi(d^2)+\psi(b^2)\psi(c^2)+\psi(b^2)\psi(d^2) \\
&= (\psi(a^2)+\psi(b^2))(\psi(c^2)+\psi(d^2)) \\
&= \psi(a^2+b^2)\psi(c^2+d^2) .
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
&\|(a+ib)+(c+id)\|^2 \leq \\
&\quad \leq \sup_{\psi\in\mathcal{F}} \left(\psi(a^2+b^2)+\psi(c^2+d^2)+2\sqrt{\psi(a^2+b^2)\psi(c^2+d^2)}\right) \\
&\quad \leq \sup_{\psi\in\mathcal{F}} \psi(a^2+b^2)+\sup_{\psi\in\mathcal{F}} \psi(c^2+d^2)+2\sqrt{\sup_{\psi\in\mathcal{F}} \psi(a^2+b^2)}\sqrt{\sup_{\psi\in\mathcal{F}} \psi(c^2+d^2)} \\
&\quad = \left\|a^2+b^2\right\|+\left\|c^2+b^2\right\|+2\sqrt{\|a^2+b^2\|\ \|c^2+d^2\|} \\
&\quad = (\|a+ib\|+\|c+id\|)^2 .
\end{aligned}$$

Pokažimo sada da je $\|(a+ib)(c+id)\| \leq \|a+ib\|\,\|c+id)\|$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\|(a+ib)(c+id)\|^2 = \|(ac-bd)+i(ad+bc)\|^2 = \left\|(ac-bd)^2+(ad+bd)^2\right\| \\
&\quad = \left\|(a^2c^2-2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2+2abcd+b^2c^2)\right\| \\
&\quad = \left\|(a^2+b^2)(c^2+d^2)\right\| \\
&\quad \leq \left\|a^2+b^2\right\|\left\|c^2+d^2\right\| \\
&\quad = \|a+ib\|^2\,\|c+id\|^2 .
\end{aligned}$$

Ako umjesto $c+id$ stavimo $\lambda 1=(\alpha+i\beta)1$, istim računom kao gore dobivamo

$$\|\lambda(a+ib)\|^2 = \left\|(\alpha^2+\beta^2)(a^2+b^2)\right\| = |\lambda|^2\,\|a+ib\|^2 .$$

Dakle, $\|\cdot\|$ je submultiplikativna norma i time $\mathcal{A}$ s tom normom postaje normirana $*$-algebra.

Pokažimo da je $\mathcal{A}$ Banachova $*$-algebra. Neka je $\{a_n+ib_n\}\subset\mathcal{A}$ Cauchyjev niz. Tada je

$$\max\{\|a_n-a_m\|\ ,\ \|b_n-b_m\|\} \leq \|a_n+ib_n-(a_m+ib_m)\| ,$$

pa su $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ Cauchyjevi nizovi. Kako je $\mathcal{O}$ Banachov, postoje $a,b\in\mathcal{O}$ takvi da $a_n\to a$ i $b_n\to b$. Slijedi

$$\|a_n+ib_n-(a+ib)\| \leq \|a_n-a\|+\|b_n-b\| \to 0 \implies a_n+ib_n\to a+ib .$$

Dakle, $\mathcal{A}$ je Banachova $*$-algebra. Budući da je

$$\|(a+ib)^*(a+ib)\| = \left\|a^2+b^2\right\| = \|a+ib\|^2 \ ,$$

zadovoljen je i C^*-identitet i time $\mathcal{A}$ postaje C^*-algebra. Kako je $\mathcal{O}$ separabilan, lako je vidjeti da i $\mathcal{A}$ mora biti separabilna. Na isti način kao i u potpoglavlju 3.5., moguće je proširiti $\phi \in \mathcal{S}$ do stanja na $\mathcal{A}$. Došli smo do najvažnijeg rezultata ovog poglavlja:

Teorem 4.3. *Neka je $K = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\, ,\, \rangle)$ klasičan sistem. Tada postoji jedinstvena*[29] *komutativna separabilna unitalna C^*-algebra $\mathcal{A}$ takva da je $\mathcal{O}$ izometrično izomorfna s $\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$, a stanja čine pozitivni linearni funkcionali norme 1.*

Ostaje nam samo argumentirati jedinstvenost. Kako je $\mathcal{O} = \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$, vrijedi $C^*(\mathcal{O}) = \mathcal{A}$, i to je najmanja C^*-algebra koja sadrži $\mathcal{O}$.

4.2 Opservable i stanja u klasičnoj mehanici

Prethodni važan teorem nam omogućuje korištenje alata iz potpoglavlja 3.2. Teorem 3.12 nam govori da je komutativna unitalna C^*-algebra izometrično $*$-izomorfna algebri neprekidnih kompleksnih funkcija na kompaktnom Hausdorffovom prostoru. Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra pridružena klasičnom sistemu K. Tada je $\mathcal{A} \simeq C(X)$, gdje je $X = \Omega(\mathcal{A})$ skup karaktera na $\mathcal{A}$ (vidjeti definiciju 3.6 i teorem 3.11), i u nastavku izjednačavamo te dvije algebre. Hermitski elementi, odnosno, opservable te algebre su upravo *realne* funkcije. To odgovara standardnom formalizmu klasične mehanike u kojoj su opservable realne neprekidne funkcije na faznom prostoru.

Ipak, primijećujemo bitnu razliku između ovog rezultata i standardnog formalizma klasične mehanike: naš fazni prostor je kompaktan. Prisjetimo se da smo opservable definirali operacionalno, te da je skala svakog instrumenta bila *omeđena*. Kompaktnost faznog prostora stoga odražava realne eksperimentalne okolnosti: čestice su ograničene na kretanje u laboratoriju (koliko god on bio velik), te postoji gornja granica za brzine kojim se mogu kretati (koja ovisi ili o mjernim uređajima ili o količini energije koju smo sposobni uložiti u sustav).

Prostori koji su samo kompaktni i Hausdorffovi ipak su presiromašne strukture u usporedbi sa standardnim matematičkim strukturama koje opisuju fazne pros-

[29] do na izometrički $*$-izomorfizam

tore, glatkim mnogostrukostima. Ipak, separabilnost C^*-algebre fizikalnog sistema omogućuje nam definirati metriku na X .

Teorem 4.4. *Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor. Tada je $C(X)$ separabilan akko je X metrizabilan.*

Ovaj teorem nam govori da je fazni prostor pridružen svakom klasičnom sistemu kompaktan metrički prostor. Dokaz teorema može se naći u [16], poglavlje V.5.

Što je sa stanjima? Postoji fundamentalan rezultat koji reprezentira sva stanja s Radonovim vjerojatnosnim mjerama na $\Omega(\mathcal{A})$ i navodimo ga bez dokaza. Za sve potrebne definicije, molimo pogledati dodatak E.

Teorem 4.5. (Riesz-Markov-Kakutani)*Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor i ϕ pozitivan linearan funkcional na $C(X)$. Tada postoji jedinstvena Radonova mjera μ_ϕ na X takva da je $\phi(f) = \int f \, d\mu_\phi$, za sve $f \in C(X)$. Štoviše, $\|\phi\| = \mu_\phi(X)$.*

Kako stanja imaju normu 1, za Radonovu mjeru pridruženu stanju ϕ vrijedi $\mu_\phi(X) = 1$, dakle, μ_ϕ je vjerojatnosna mjera. Ove tvrdnje možemo sažeti u sljedećem teoremu:

Teorem 4.6. *Za svaki klasičan sistem K postoji C^*-algebra $C(X)$ neprekidnih funkcija na kompaktnom metričkom prostoru X . Opservable $\mathcal{O}$ sistema su realne neprekidne funkcije na X , a za svako stanje $\phi \in \mathcal{S}$ postoji jedinstvena vjerojatnosna Radonova mjera μ_ϕ na X takva da je*

$$\phi(f) = \int f \, d\mu_\phi \, .$$

Naravno, ako je μ vjerojatnosna Radonova mjera na X , onda je s $f \mapsto \int f \, d\mu$ definirano stanje na $C(X)$. Linearnost je očita, ograničenost slijedi iz

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu \leq \int \|f\| \; d\mu = \|f\| \; ,$$

a pozitivnost i normiranost slijedi iz $\int 1 \, d\mu = 1$ i teorema 3.22. Veza između stanja i vjerojatnosnih Radonovih mjera na X je stoga jedan-na-jedan. Vidimo da smo našom operacionalnom definicijom stanja (funkcija koja opservabli pridružuje *očekivanje*) prirodno pridružili koncept gustoće vjerojatnosti[30] $d\mu_\phi$, i to na *jedinstven* način. Time smo okarakterizirali stanja klasičnog sistema.

[30] Korištenjem Lebesgue-Radon-Nikodymovog teorema u slučaju kad je $X \subset \mathbb{R}^{2n}$, $d\mu_\phi$ se može izraziti kao $\rho \, dx = \frac{d\mu_\phi}{dx} dx$, gdje je dx Lebesgueova mjera. Time smo stanju ϕ pridružili *gustoću vjerojatnosti* ρ , centralan objekt u klasičnoj statističkoj fizici.

U definiciji klasičnog sistema $K = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\ ,\ \rangle)$ ključnu ulogu je igrao potpun skup stanja $\mathcal{F}$, pa je poželjno ispitati kakve su vjerojatnosne mjere, odnosno gustoće vjerojatnosti, pridružene takvim stanjima.

Teorem 4.7. *Neka je $K = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\ ,\ \rangle)$ klasičan sistem i $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ kao u definiciji 4.3, te X kao u teoremu 4.6. Tada za svako $\psi \in \mathcal{F}$ postoji jedinstven $x \in X$ takav da je $\mu_\psi = \delta_x$, gdje je δ_x Diracova mjera u x, definirana s*

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Posljedično, za svako $\psi \in \mathcal{F}$ postoji jedinstven $x \in X$ takav da je $\psi(f) = f(x)$.

Dokaz. Odmah primijetimo da Hausdorffovo svojstvo povlači jedinstvenost od x. Neka je $\psi \in \mathcal{F}$ i stavimo $\mu = \mu_\psi$. Pretpostavimo da postoje dvije različite točke $x, y \in X$ takve da je za sve $E \in \mathcal{B}_X$ $\mu(E) > 0$ kad god je $x \in E$ ili $y \in E$. Vrijedi

$$\psi(f^2) = \int f^2\, d\mu = \left(\int f\, d\mu \right)^2 = \psi(f)^2 ,$$

za sve $f \in C(X)$. Neka su U i V otvorene disjunktne okoline od x i y. Kako je μ unutarnje regularna (vidjeti definiciju E.8), postoji rastući niz $\{K_n\}$ kompaktnih skupova takvih da je $K_n \subset U$ i $\mu(K_n) \to \mu(U)$. Prema Urysohnovoj lemi (teorem B.6) postoji niz funkcija $\{f_n\} \subset C(X, [0,1])$ takav da je $f_n = 1$ na K_n, te $\operatorname{supp}(f_n) \subset U$. Dakle,

$$\mu(K_n) \le \int f_n\, d\mu \le \mu(U) \implies \int f_n\, d\mu \to \mu(U) .$$

No, za f_n^2 također vrijedi $f_n^2 = 1$ na K_n, te $\operatorname{supp}(f_n^2) \subset U$. Stoga se na isti način dobiva

$$\int f_n^2\, d\mu \to \mu(U) .$$

S druge strane je

$$\int f_n^2\, d\mu = \left(\int f_n\, d\mu \right)^2 \to \mu(U)^2 .$$

Dakle, $\mu(U)^2 = \mu(U)$, a kako je $x \in U$, prema pretpostavci je $\mu(U) > 0$, što daje $\mu(U) = 1$. Na identičan način se pokaže da je $\mu(V) = 1$. Budući da su U i V disjunktni, $\mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V) = 2 \le \mu(X) = 1$, što je kontradikcija.

Dakle, može postojati najviše jedan takav $x \in X$. Neka je sad E proizvoljan skup koji sadrži x . Prema upravo pokazanom, mora biti $\mu(X \setminus E) = 0$. Dakle,

$$\mu(E) = \mu(X) - \mu(X \setminus E) = 1 .$$

Stoga je $\mu = \delta_x$ i time je dokazana prva tvrdnja. Da pokažemo drugu tvrdnju, pretpostavimo da je $f \in C(X)$ pozitivna i neka je $0 \leq \phi \leq f$ jednostavna funkcija. Tada je $\int \phi \, d\delta_x = \phi(x) \leq f(x)$. Prema lemi E.1, možemo ϕ odabrati takvu da je $\phi(x)$ proizvoljno blizu $f(x)$, pa je $\int f \, d\delta_x = f(x)$. $\square$

Definicija 4.4. *Neka je $C(X)$ C^*-algebra neprekidnih funkcija na kompaktnom metričkom prostoru pridružena klasičnom sistemu K . Tada se stanja oblika $\psi_x : f \mapsto f(x)$, za $x \in X$, zovu* čista stanja *na $C(X)$ i označavamo ih s $PS(C(X))$.*

Dakle, $\mathcal{F} \subset PS(C(X))$. Jasno, za sve $\psi_x \in PS(C(X))$ je $\Delta\psi_x = 0$. Nadalje, budući da je $g \leq f$ akko $\psi_x(g) = g(x) \leq f(x) = \psi_x(f)$, $PS(C(X))$ je potpun skup stanja. Međutim, $PS(C(X))$ nije najmanji potpun skup stanja. Naime, ako je $g(x) \leq f(x)$ za sve $x \in U \subset X$, gdje je U gust podskup od X , slijedit će da je $g \leq f$, budući da su f i g neprekidne. Štoviše, kako je X kompaktan i metrički, on je separabilan prema teoremu B.5. Dakle, moguće je odabrati prebrojiv skup U s traženim svojstvima. Imamo sljedeći teorem:

Teorem 4.8. *Neka je $K = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\, , \rangle)$ klasičan sistem. Skup $\mathcal{F}$ u definiciji 4.3 se može odabrati da bude prebrojiv. U tom slučaju je $U \subset X$ takav da je $\mathcal{F} = \{\psi_x \mid x \in U\}$ gust u X .*

Ovaj rezultat smo mogli očekivati: mora biti moguće pripremiti najviše prebrojiv skup stanja da se razdvoje sve opservable, kojih je također najviše prebrojivo mnogo. Dakle, poistovjetili smo skup $\mathcal{F}$ s gustim podskupom faznog prostora, te pokazali da se fazni prostor može postovjetiti s čistim stanjima na $C(X)$.

5 Reprezentacije C^*-algebri: Osnovni aksiomi kvantne mehanike

5.1 GNS konstrukcija

Definicija 5.1. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra. Uređen par $(\mathcal{H}, \pi)$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $*$-homomorfizam, zove se* reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$. *Reprezentacija je*

a) vjerna*, ako je π injekcija,*

b) ciklička*, ako postoji $x \in \mathcal{H}$ takav da je $\mathrm{cl}(\pi(\mathcal{A})x) = \mathcal{H}$. U tom slučaju se x zove* ciklički vektor *reprezentacije $(\mathcal{H}, \pi)$.*

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna, π se smatra unitalnim.

U ovom potpoglavlju konstruirat ćemo cikličku reprezentaciju unitalne C^*-algebre.

U klasičnoj mehanici, kao što je bilo opisano u prošlom poglavlju, stanja se opisuju gustoćama vjerojatnosti ili točkama u faznom prostoru. S druge strane, iako u kvantnoj fizici opservable imaju skromniju ulogu, neka stanja je ipak moguće opisati određenim kvantim brojevima, koji odgovaraju opservablama *svojstvenim* tom stanju. Cilj nam je, stoga, istražiti u kojoj mjeri je moguće ili smisleno stanja okarakterizirati određenim skupom opservabli. Ispostavit će se da je, takoreći, jedan postupak sužavanja C^*-algebre na "relevantne" elemente, one čiju apsolutnu vrijednost stanje ne poništava, dovoljan za konstrukciju tražene reprezentacije C^*-algebre, i dovoljno skroman da se ne gube informacije o stanju, odnosno da ostaje moguće izračunati očekivanja svih opservabli.

Pogledajmo prvo klasičan slučaj: neka je X fazni prostor klasičnog sistema i ϕ stanje na $C(X)$, te $\mu = \mu_\phi$ pridružena joj vjerojatnosna Radonova mjera. Neka je U maksimalan otvoren skup u X takav da je $\mu(U) = 0$. Tada je $\phi(f) = 0$, za sve f koje iščezavaju izvan U. Može se reći da su takve opservable "nevidljive" za sistem u stanju ϕ.

Vidjet ćemo da je U jedinstveno određen s pozitivnim opservablama koje stanje poništava. Neka je $f \in C(X)^+$ takva da je $\phi(f) = \int f \, d\mu = 0$ i neka je $U_f = X \setminus$

$f^{-1}(0)$. Taj skup je otvoren i tvrdimo da mora biti $\mu(U_f) = 0$. Doista,

$$\phi(f) = \int_{U_f} f\, d\mu + \int_{f^{-1}(0)} f\, d\mu = \int_{U_f} f\, d\mu = 0\,.$$

No $f > 0$ na U_f , pa je nužno $\mu(U_f) = 0$. Definirajmo

$$U = \bigcup_{f \in C(X)^+ \cap \ker\phi} U_f\,.$$

Tvrdimo da je U maksimalan otvoren skup takav da je $\mu(U) = 0$. Pretpostavimo suprotno, da postoji otvoren $V \supset U$ takav da je $\mu(V) = 0$ i $U \neq V$, te neka je $x \in V \backslash U$. Prema propoziciji B.5 postoji kompaktan skup K sadržan u V koji sadrži x . Prema Urysohnovoj lemi, postoji $f \in C(X, [0,1])$ takva da je $f = 1$ na K i $\mathrm{supp}(f) \subset V$. No tada je $x \in U_f \subset U$, što je kontradikcija. Dakle, U je maksimalan otvoren skup za kojeg vrijedi $\mu(U) = 0$. Skup $\mathcal{P}$ svih *pozitivnih* opservabli koji je poništen od stanja ϕ poništava jednoznačno određuje U . Možemo reći da je $X \setminus U$ relevantan dio faznog prostora, odnosno, da se sistem nalazi u $X \setminus U$.

Može se dogoditi da je za neku opservablu $f \in C(X, \mathbb{R})$ $\phi(f) = 0$, no f ne iščezava izvan U . Takva opservabla se razlikuje od onih iz $\mathcal{P}$, jer se može rastaviti u linearnu kombinaciju pozitivnih opservabli, $f = f_+ - f_-$, koje ne iščezavaju izvan U . Mjereći $\phi(f_+)$ i $\phi(f_-)$ dobivamo $\phi(f)$. Stoga f nije "nevidljiva"; ona je jednostavno nula na[31] ϕ. To nam sugerira da proširimo "definiciju nevidljivih" opservabli: to su one $g \in C(X)$ za koje je $g^2 = |g|^2 = 0$ izvan U . Ekvivalentno, to su one za koje je $\phi(|g|^2) = 0$. U ovoj jednakosti nema spomena faznog prostora.

Sada možemo predvidjeti kako trebamo nastaviti u općenitom slučaju: neka je sistem određen s unitalnom (nekomutativnom) C^*-algebrom $\mathcal{A}$ koji se nalazi se u stanju ϕ . Nevidljiva opservabla a je ona za koju je $\phi(|a|^2) = \phi(a^*a) = 0$. Zbog istog razloga kao i u gornjem paragrafu, nije dovoljno zahtijevati samo $\phi(a) = 0$.

Takve opservable ne daju nikakve informacije o stanju ϕ . Želimo se, stoga, riješiti

[31]Pojasnimo malo koncept nevidljivih opservabli. Uzmimo, primjerice, da je $f = Q$ ukupan naboj nekog skupa čestica: ako su sve čestice neutralne, tada je Q nevidljiv. Ako imamo jednak broj negativnih i pozitivnih čestica, mjerenje Q je ekvivalentno mjerenju Q_+ i Q_- te oduizamnju dobivenih vrijednosti.

tih opservabli izjednačavajući ih s nulom. Definirajmo[32]

$$\mathcal{N}_\phi = \{a \in \mathcal{A} \mid \phi(a^*a) = 0\} .$$

Odmah primijetimo da je prema teoremu 3.21, $|\phi(a)|^2 \leq \phi(a^*a) = 0$, za sve $a \in \mathcal{N}_\phi$. Kako je $\mathcal{N}_\phi$ (zatvoren) vektorski potprostor od $\mathcal{A}$, prema propoziciji A.1 je i $A/\mathcal{N}_\phi$ vektorski prostor, te je, baš kao što smo htjeli, $\mathcal{N}_\phi(= 0 + \mathcal{N}_\phi)$ neutralan element u $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$. U interesu nam je, stoga, detaljnije istražiti ovaj objekt. Tvrdimo da je $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ moguće definirati adekvatan skalarni produkt.

Pokažimo da je $\mathcal{N}_\phi$ lijevi ideal u $\mathcal{A}$ (definicija A.2). Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $b \in \mathcal{N}_\phi$, tada je, prema lemi 3.2

$$\phi((ab)^*(ab)) = \phi(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| \, \phi(b^*b) = 0 ,$$

pa je $ab \in \mathcal{N}_\phi$. Ta činjenica nam omogućava da definiramo seskvilinearnu formu $\langle \, , \, \rangle : (\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi) \times (\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi) \longrightarrow \mathbb{C}$ na $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ s formulom

$$\langle a + \mathcal{N}_\phi \, , b + \mathcal{N}_\phi \rangle = \phi(b^*a) .$$

1. $\langle \, , \, \rangle$ je dobro definirana: Želimo pokazati da je $\phi(b^*a) = \phi(b_1^*a_1)$, kad god je $a + \mathcal{N}_\phi = a_1 + \mathcal{N}_\phi$ i $b + \mathcal{N}_\phi = b_1 + \mathcal{N}_\phi$, odnosno $a - a_1 \, , b - b_1 \in \mathcal{N}_\phi$. Imamo

   $$\phi(b^*a) = \phi(b_1^*a_1) + \phi((b - b_1)^*a) + \phi(b^*(a - a_1)) + \phi((b - b_1)^*(a - a_1)) .$$

   Treći i četvrti član s desne strane jednakosti su jednaki nula jer je $\mathcal{N}_\phi$ lijevi ideal. Drugi član je prema teoremu 3.21 jednak

   $$\phi((b - b_1)^*a) = \overline{\phi(a^*(b - b_1))} = 0 .$$

   Tvrdnja je dokazana.

2. $\langle \, , \, \rangle$ je pozitivna: $\langle a + \mathcal{N}_\phi \, , a + \mathcal{N}_\phi \rangle = \phi(a^*a) \geq 0$.

3. Ako je $\langle a + \mathcal{N}_\phi \, , a + \mathcal{N}_\phi \rangle = \phi(a^*a) = 0$, tada je $a \in \mathcal{N}_\phi$ po definiciji, pa je $a + \mathcal{N}_\phi = \mathcal{N}_\phi$.

[32]Elementi koji nisu hermitski nisu opservable, no njihova apsolutna vrijednost jest i smatramo ih nevidljivima ako na taj način induciraju nevidljive opservable.

Prema definiciji D.2, $\langle\, ,\, \rangle$ je skalarni produkt i time $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ postaje unitaran prostor. Ovaj prostor nije nužno potpun s obzirom na normu induciranu tim skalarnim produktom. Kao što smo radili uvijek do sad, promatrat ćemo Hilbertovo upotpunjenje od $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ (definicija D.4). Označimo ju s $\mathcal{H}_\phi$.

Sada ćemo elementima iz $\mathcal{A}$ pridružiti ograničene operatore na $\mathcal{H}_\phi$.

Neka je $a \in \mathcal{A}$. Definirajmo funkciju $M_a : \mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi \longrightarrow \mathcal{H}_\phi$ s formulom

$$M_a(b + \mathcal{N}_\phi) = ab + \mathcal{N}_\phi \,.$$

Ako je $b + \mathcal{N}_\phi = b' + \mathcal{N}_\phi$, onda je $ab - ab' = a(b - b') \in \mathcal{N}_\phi$, jer je $\mathcal{N}_\phi$ lijevi ideal, pa je M_a dobro definiran. Kako je prema lemi 3.2

$$\|M_a(b + \mathcal{N}_\phi)\|^2 = \langle ab + \mathcal{N}_\phi \,, ab + \mathcal{N}_\phi\rangle = \phi((ab)^*(ab) \leq \|a^*a\|\, \phi(b^*b) = \|a\|^2\, \|b + \mathcal{N}_\phi\|^2 \;,$$

M_a je ograničen i prema propoziciji C.1 je $\|M_a\| \leq \|a\|$. Prema teoremu C.4, postoji neprekidno proširenje operatora M_a na $\mathcal{H}_\phi$ takvo da je norma i dalje manja ili jednaka od $\|a\|$. Nazovimo taj operator s $\pi_\phi(a)$. Pokažimo da je $\pi_\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$ unitalan $*$-homomorfizam:

1. Neka je $c + \mathcal{N}_\phi \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ proizvoljan. Tada je

   $$\pi_\phi(ab)(c + \mathcal{N}_\phi) = abc + \mathcal{N} = \pi_\phi(a)(bc + \mathcal{N}_\phi) = \pi_\phi(a)\pi_\phi(b)(c + \mathcal{N}_\phi)\,.$$

   Kako je $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ gust u $\mathcal{H}_\phi$, a $\pi_\phi(ab) - \pi_\phi(a)\pi_\phi(b)$ je neprekidan, jednakost vrijedi na cijelom $\mathcal{H}_\phi$.

2. Neka su $b + \mathcal{N}_\phi \,, c + \mathcal{N}_\phi \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ proizvoljni. Tada je

   $$\begin{aligned}\langle \pi_\phi(a^*)(b + \mathcal{N}_\phi), c + \mathcal{N}_\phi\rangle &= \langle a^*b + \mathcal{N}_\phi \,, c + \mathcal{N}_\phi\rangle \\ &= \phi(c^*a^*b) = \phi((ac)^*b) \\ &= \langle b + \mathcal{N}_\phi \,, ac + \mathcal{N}_\phi\rangle \\ &= \langle b + \mathcal{N}_\phi \,, \pi_\phi(a)(c + \mathcal{N}_\phi)\rangle \\ &= \langle \pi_\phi(a)^*(b + \mathcal{N}_\phi), c + \mathcal{N}_\phi\rangle\end{aligned}$$

   Kako je $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ gust u $\mathcal{H}_\phi$, vrijedi $\langle \pi_\phi(a^*)x, y\rangle = \langle \pi_\phi(a)^*x, y\rangle$, za sve $x, y \in \mathcal{H}_\phi$, pa je $\pi_\phi(a^*) = \pi_\phi(a)^*$. Dakle, π_ϕ je $*$-homomorfizam. Očito je $\pi_\phi(1) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\phi}$, pa je π_ϕ unitalan.

Pokazali smo da je $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$ reprezentacija od $\mathcal{A}$.

Definicija 5.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra, ϕ stanje na $\mathcal{A}$, te $\mathcal{N}_\phi$ i $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$ kao gore. Zatvoreni lijevi ideal $\mathcal{N}_\phi$ zove se* lijeva jezgra[33] *od ϕ , a $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$ se zove* Gelfand-Naimark-Segalova reprezentacija od $\mathcal{A}$ pridružena stanju ϕ .

Teorem 5.1. (Gelfand-Naimark-Segalova konstrukcija) *Gelfand-Naimark-Segalova reprezentacija $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$ unitalne C^*-algebre $\mathcal{A}$ pridružena stanju ϕ je ciklička. Štoviše, postoji jedinični ciklički vektor x_ϕ za $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$ takav da je*

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)x_\phi \, , x_\phi \rangle \, ,$$

za sve $a \in \mathcal{A}$. Ako je $\mathcal{A}$ separabilna, tada je i $\mathcal{H}_\phi$ separabilan.

Dokaz. Definirajmo $x_\phi = 1 + \mathcal{N}_\phi$. Tada je $\pi_\phi(a)x_\phi = a + \mathcal{N}_\phi$, pa je $\pi_\phi(\mathcal{A})x_\phi = \mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$. Kako je $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ gust u $\mathcal{H}_\phi$, x_ϕ je ciklički vektor, te je

$$\|x_\phi\|^2 = \langle x_\phi \, , x_\phi \rangle = \langle \pi_\phi(1)x_\phi \, , x_\phi \rangle = \phi(1) = 1 \, .$$

Nadalje,

$$\phi(a) = \phi(1^*a) = \langle a + \mathcal{N}_\phi \, , 1 + \mathcal{N}_\phi \rangle = \langle \pi_\phi(a)x_\phi \, , x_\phi \rangle \, .$$

Pretpostavimo sad da je $\mathcal{A}$ separabilna. Kako je π_ϕ neprekidan, $\pi_\phi(\mathcal{A})$ je separabilan potprostor od $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$. Naime, ako je $\mathcal{A}_g$ prebrojiv gust podskup od $\mathcal{A}$, tada za svaki $a \in \mathcal{A}$ postoji niz $\{a_n\}_n \subset \mathcal{A}_g$ takav da $a_n \to a$, pa

$$\|\pi_\phi(a_n) - \pi_\phi(a)\| = \|\pi_\phi(a_n - a)\| \leq \|a_n - a\| \to 0 \implies \mathrm{cl}(\pi_\phi(\mathcal{A}_g)) = \pi_\phi(\mathcal{A}) \, ,$$

jer su $*$-homomorfizmi kontrakcije (teorem 3.7). Stoga je $\pi_\phi(\mathcal{A}_g)x_\phi = \mathcal{A}_g/\mathcal{N}_\phi$ gust u $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$, a kako je ovaj gust u $\mathcal{H}_\phi$, $\mathcal{A}_g/\mathcal{N}_\phi$ je gust u $\mathcal{H}_\phi$. Dakle, $\mathcal{H}_\phi$ je separabilan. $\square$

Napomena 5.1. Gornji teorem vrijedi i za neunitalne algebre. Postojanje jedinice olakšava dokaz i daje jednostavnu formulu za x_ϕ .

[33] *left kernel*

Umjesto Gelfand-Naimark-Segal pisat ćemo skraćeno GNS. GNS reprezentacije su glavni gradivni elementi Gelfand-Naimarkovog teorema, koji će dati vjernu reprezentaciju C^*-algebre. Istražimo sada jedinstvenost GNS reprezentacije.

Definicija 5.3. *Neka su* $(\mathcal{H}_1, \pi_1)$ *i* $(\mathcal{H}_2, \pi_2)$ *dvije reprezentacije* C^**-algebre* $\mathcal{A}$ *takve da postoji unitarno preslikavanje* $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *takvo da vrijedi* $\pi_2(a) = U\pi_1(a)U^*$, *za sve* $a \in \mathcal{A}$. *Tada se* U *zove* unitarna ekvivalencija *reprezentacija* $(\mathcal{H}_1, \pi_1)$ *i* $(\mathcal{H}_2, \pi_2)$ *i ako postoji takav* U, *kažemo da su te dvije reprezentacije* unitarno ekvivalentne.

Teorem 5.2. *Neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna* C^**-algebra i* $(\mathcal{H}_1, \pi_1)$, *te* $(\mathcal{H}_2, \pi_2)$ *dvije cikličke reprezentacije s cikličkim vektorima* x_1 *i* x_2. *Tada je* $\langle \pi_1(a)x_1 , x_1 \rangle = \langle \pi_2(a)x_2 , x_2 \rangle$ *za sve* $a \in \mathcal{A}$ *akko postoji unitarna ekvivalencija* $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *takva da je* $Ux_1 = x_2$.

Dokaz. Obratna inkluzija je očigledna. Definirajmo $u : \pi_1(\mathcal{A})x \longrightarrow \mathcal{H}_2$ formulom $u(\pi_1(a)x) = \pi_2(a)x$. Imamo

$$\|\pi_1(a)x_1\|^2 = \langle \pi_1(a^*a)x_1 , x_1 \rangle = \langle \pi_2(a^*a)x_2 , x_2 \rangle = \|\pi_2(a)x_2\|^2 \ ,$$

pa je u dobro definiran ($\pi_1(a - a')x = 0$ akko $\pi_2(a - a')x = 0$) i izometričan. Prema teoremu C.4, postoji izometričan linearan operator $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ koji proširuje u. U je očito surjekcija jer je

$$U(\mathcal{H}_1) = U(\mathrm{cl}(\pi_1(\mathcal{A})x_1) = \mathrm{cl}(U(\pi_1(\mathcal{A})x_1)) = \mathrm{cl}(\pi_2(\mathcal{A})x_1) = \mathcal{H}_2 \, ,$$

pa je i unitaran. Nadalje, vrijedi $U\pi_1(1)x_1 = Ux_1 = \pi_2(1)x_2 = x_2$.

Kako su π_1 i π_2 $*$-homomorfizmi, za sve $a, b \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$U\pi_1(a)(\pi_1(b)x_1) = U(\pi_1(ab)x_1) = \pi_2(ab)x_2 = \pi_2(a)\pi_2(b)x_2 = \pi_2(a)U(\pi_1(b)x_1) \, .$$

Ponovo, kako je $\pi_1(\mathcal{A})x_1$ gust u $\mathcal{H}_1$, vrijedi

$$U\pi_1(a) = \pi_2(a)U \, ,$$

za sve $a \in \mathcal{A}$, što je tražena relacija. □

Korolar 5.1. *Neka je* $(\mathcal{H}, \pi)$ *ciklička reprezentacija unitalne* C^**-algebre s jediničnim* *cikličkim vektorom x. Tada je $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ definirano s*

$$\phi(a) = \langle \pi(a)x \, , x \rangle$$

stanje na $\mathcal{A}$ i $(\mathcal{H}, \pi)$ je unitarno ekvivalentna s GNS reprezentacijom $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$ putem $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_\phi$ i $Ux = x_\phi$.

Dokaz. Očito je ϕ linearan, te je

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a^*a)\| = \langle \pi(a^*a)x \, , x \rangle = \|\pi(a)x\|^2 \leq \|\pi(a)\|^2 \leq \|a\|^2 \, ,$$

pa je ϕ ograničen. Kako je $\phi(1) = 1$, ono je stanje prema teoremu 3.22. Ostatak tvrdnje slijedi iz prethodnog teorema. □

Dakle, svaka ciklička reprezentacija unitalne C^*-algebre je unitarno ekvivalentna nekoj GNS reprezentaciji. Iskažimo jednu lemu koja će nam trebati u potpoglavlju 5.3.

Lema 5.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i ϕ stanje na $\mathcal{A}$. Ako je τ pozitivan linearan funckional takav da je $\tau \leq \phi$, tada postoji $V \in \pi_\phi(\mathcal{A})'$ (definicija D.12) takav da je $0 \leq V \leq \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\phi}$ i*

$$\tau(a) = \langle \pi_\phi(a)Vx_\phi \, , x_\phi \rangle \, .$$

Obratno, ako je $V \in \pi(\mathcal{A})'$ takav da je $0 \leq V \leq \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\phi}$ i $\tau(a) = \langle \pi_\phi(a)Vx_\phi \, , x_\phi \rangle$, tada je τ pozitivan linearan funkcional takav da je $\tau \leq \phi$.

5.2 Čista stanja

Prisjetimo se klasičnog sistema $K = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle \, , \, \rangle)$ i skupa $\mathcal{F}$ iz definicije 4.3. U prošlom poglavlju smo pokazali da je C^*-algebra pridružena sistemu K algebra neprekidnih funkcija $C(X)$ na faznom prostoru X, koji je kompaktan i Hausdorffov (štoviše, metrički). Pokazali smo da se svakom stanju pridružuje vjerojatnosna Radonova mjera, a da se skupu $\mathcal{F}$ pridružuje skup Diracovih mjera, što ga poistovjećuje s točkama faznog prostora. Ako je $\psi \in \mathcal{F}$, tada postoji jedinstven $x \in X$ takav da je $\psi(f) = \int f \, d\delta_x = f(x)$. Maksimalan otvoren skup mjere nule s obzirom na tu mjeru je $X \setminus \{x\}$. Kao što smo argumentirali u prošlom potpoglavlju, $\{x\}$ je jedini relevantan dio faznog prostora za stanje ψ. Može se reći da kad je sistem u stanju $\psi \in \mathcal{F}$ imamo maksimalno znanje o sistemu. Ovo se može izraziti na više načina.

Teorem 5.3. *Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor i $\mathcal{F} = \{\psi_x \in S(C(X)) \mid x \in X\}$ skup svih stanja na $C(X)$ takvih da je $\psi_x(f) = f(x)$. Tada vrijedi:*

a) $\mathcal{F} = \mathrm{ext}(S(C(X)))$[34]

b) $\psi \in \mathcal{F}$ akko ψ ima svojstvo da za svaki pozitivan linearan funkcional ϕ takav da je $\phi \leq \psi$ postoji $t \in [0,1]$ takav da je $\phi = t\psi$.

c) Lijeve jezgre N_ψ elemenata ψ iz $\mathcal{F}$ su maksimalni ideali u $C(X)$ i preslikavanje $\psi \mapsto N_\psi$ predstavlja bijekciju između $\mathcal{F}$ i skupa svih maksimalnih ideala u $C(X)$.

Dokaz je tehnički pa ga izostavljamo. U dokazu (c) dijela potrebno koristiti Urysohnovu lemu i on govori da su maksimalni ideali (u komutativnoj algebri su svi ideali obostrani) u $C(X)$ oblika $\{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}$, za neki $x \in X$. Ako poistovjetimo stanja s vjerojatnosnim Radonovim mjerama, možemo se uvjeriti i u tvrdnje (a) i (b). Pogledajmo tvrdnju (a) malo podrobnije: neka su ω, ϕ_1 i ϕ_2 stanja na unitalnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$ takva da je $\omega = t\phi_1 + (1-t)\phi_2$, gdje je $0 < t < 1$. Kažemo da je ω *mješavina* stanja ϕ_1 i ϕ_2. Neka su μ_1, μ_2 i ν vjerojatnosne Radonove mjere pridružene ϕ_1, ϕ_2 i ω. Ako su U_1 i U_2 maksimalni otvoreni skupovi takvi da je $\mu_i(U_i) = 0$, tada je maksimalan otvoren skup U takav da je $\nu(U) = 0$ jednak $U_1 \cap U_2$. Drugim riječima, "miješanjem" stanja proširujemo fazni prostor potreban za opis stanja. Stoga je lako vidjeti da su stanja koje nisu mješavine, odnosno ekstremne točke skupa stanja, upravo ona koja koja daju najviše znanja o sistemu. Njih zovemo *čistim* stanjima. Budući da je skup stanja konveksan za sve C^*-algebre, smisleno je definirati sljedeće:

Definicija 5.4. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra.* Čista stanja *na $\mathcal{A}$ su stanja na $\mathcal{A}$ koje su ekstremne točke skupa $S(\mathcal{A})$. Skup svih čistih stanja označavamo s $PS(\mathcal{A})$.*

Izraz "znanje o sistemu" u kvantnoj mehanici ima drukčije značenje nego u klasičnoj mehanici, pa nije odmah očito da čista stanja, ovako definirana, odgovaraju stanjima o kojima, kao i u klasičnoj mehanici, imamo maksimalno znanje (osim ako se pozivamo na standardni formalizam kvantne mehanike). U kvantnoj mehanici se

[34]definicija C.11

ne možemo oslanjati na koncept faznog prostora. Ipak, u prošlom potpoglavlju smo svakom stanju ϕ pridružili jedan objekt, lijevu jezgru $\mathcal{N}_\phi$, koji je predstavljao skup "nevidljivih" opservabli za to stanje. Što je $\mathcal{N}_\phi$ veći, to je manje vrsta mjerenja potrebno vršiti na stanju da ga se opiše, pa možemo na $\mathcal{N}_\phi$ gledati kao na jednu (vrlo skromnu) mjeru znanja o sistemu.

Istražimo stoga detaljnije preslikavanje $L : S(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A})$, $L(\phi) = \mathcal{N}_\phi$, gdje je $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ skup svih zatvorenih pravih lijevih ideala u unitalnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$. Pokažimo da je L injekcija. Pretpostavimo da su ϕ i ω dva stanja na $\mathcal{A}$ takva da je $\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N}_\omega$. Slijedi da je $x_\phi = x_\omega$ i $\mathcal{H}_\phi = \mathcal{H}_\omega$. Nadalje,

$$\pi_\phi(a)(b + \mathcal{N}_\phi) = ab + \mathcal{N}_\phi = ab + \mathcal{N}_\omega = \pi_\omega(a)(b + \mathcal{N}_\omega)\,,$$

pa je $\pi_\phi = \pi_\omega$. Stoga je

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)x_\phi\,, x_\phi \rangle = \langle \pi_\omega(a)x_\omega\,, x_\omega \rangle = \omega(a)\,,$$

za sve $a \in \mathcal{A}$. Dakle, L je injekcija. Fizikalno, za dano stanje sistema, nevidljive opservable su, baš kao i u klasičnom slučaju, jedinstveno određene.

Međutim, općenito, L nije surjekcija[35]. Ipak, imamo idući teorem, po analogiji sa tvrdnjom (c) teorema 5.3.

Teorem 5.4. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra. Tada je preslikavanje $\psi \mapsto \mathcal{N}_\psi$ bijekcija između čistih stanja i skupa svih maksimalnih lijevih ideala.*

Dokaz se može pronaći u teoremu 5.3.5. u [17]. U okviru naše interpretacije lijevih jezgara stanja kao mjere znanja o sistemu, ovaj teorem nam govori da čista stanja odgovaraju maksimalnom znanju.

Vrijedi i analogon tvrdnje (b) teorema 5.3, kojeg samo iskazujemo.

Lema 5.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra. Tada je $\psi \in PS(\mathcal{A})$ akko ψ ima svojstvo da za svaki pozitivan linearan funkcional τ takav da je $\tau \leq \psi$ postoji $t \in [0,1]$ takav da je $\tau = t\psi$.*

[35] Definiramo li $Q(\mathcal{A}) = \mathrm{ball}(\mathcal{A}^*)_+$, skup svih pozitivnih linearnih funkcionala norme manje ili jednake 1, može se pokazati (potpoglavlje 5.3.) da je $Q(\mathcal{A})$ wk^*-kompaktan i konveksan skup, te da za svaki pravi zatvoreni lijevi ideal $\mathcal{L}$ u $\mathcal{A}$ (teorem 3.10.7 u [27]) postoji jedinstvena stranica F (definicija C.11) od $Q(\mathcal{A})$ takva da je $\mathcal{L} = \{a \in \mathcal{A} \mid \phi(a^*a) = 0\,, \phi \in F\} = \bigcap_{\phi \in F} \mathcal{N}_\phi$.

Za dokaz vidjeti, na primjer, teorem 5.1.8. i korolar 5.1.10. u [17].

Naša prva zadaća je, stoga, osigurati egzistenciju takvih stanja. Po putu ćemo pokazati tvrdnje koje će nam koristiti kasnije.

Teorem 5.5. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra. Tada je $S(\mathcal{A})$ wk^*-kompaktan konveksan skup u $\mathcal{A}^*$.*

Dokaz. Ako pokažemo da je $S(\mathcal{A})$ wk^*-zatvoren, prema Banach-Alaogluovom teoremu (C.6) će slijediti da je wk^*-kompaktan, budući da je sadržani u wk^* kompaktnom skupu $\mathrm{ball}(\mathcal{A}^*)$.

Neka mreža $\{\tau_i\}_i \subset S(\mathcal{A})$ konvergira u $(\mathcal{A}^*, wk^*)$ k[36] τ. Kako je τ ograničen linearan funkcional, prema teoremu 3.22 dovoljno je pokazati da je $\tau(1) = 1$. No prema 3.22 je

$$\tau(1) = \lim_i \tau_i(1) = \lim_i 1 = 1\,.$$

Pokažimo sad konveksnost (ova činjenica, koja vrijedi za sve C^*-algebre, je bila korištena u definiciji 5.4). Neka su $\tau, \rho \in S(\mathcal{A})$ i $0 < t < 1$. Tada je $\omega = t\tau + (1-t)\rho$ ograničen linearan funkcional i prema teoremu 3.22 je

$$\omega(1) = t\tau(1) + (1-t)\rho(1) = t + (1-t) = 1\,.$$

Prema istom teoremu je $\omega \in S(\mathcal{A})$. Dakle, $S(\mathcal{A})$ je konveksan. □

Teorem 5.6. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra. Tada je $S(\mathcal{A})$ wk^*-zatvorena konveksna ljuska skupa $PS(\mathcal{A})$, odnosno $S(\mathcal{A}) = \overline{\mathrm{co}}(PS(\mathcal{A}))$.*

Dokaz. Prema prethodnom teoremu je $S(\mathcal{A})$ konveksan i wk^*-kompaktan skup u $\mathcal{A}^*$. Prema Krein-Milmanovom teoremu (C.8), skup ekstremnih točaka od $S(\mathcal{A})$ je neprazan i štoviše, vrijedi $S(\mathcal{A}) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}(S(\mathcal{A})))$. No, po definiciji je $\mathrm{ext}(S(\mathcal{A})) = PS(\mathcal{A})$. □

Vidimo, dakle, ne samo da je $PS(\mathcal{A})$ neprazan, nego je i izobilan. Štoviše, vrijedi sljedeće:

[36] Gledajući $\mathcal{A}^*$ kao na podskup od $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ svih funkcija sa $\mathcal{A}$ u $\mathbb{C}$, topologija wk^* se poklapa relativnom topologijom induciranom od topologije konvergencije po točkama, te se lako pokaže da je limes mreže ograničenih linearnih funkcionala također linearan i ograničen.

Teorem 5.7. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra. Tada za svaki pozitivan $a \in \mathcal{A}$ postoji $\psi \in PS(\mathcal{A})$ takvo da je $\psi(a) = \|a\|$.*

Dokaz. Definirajmo skup

$$F = \{\phi \in S(\mathcal{A}) \mid \phi(a) = \|a\|\} .$$

Prema teoremu 3.23, F je neprazan. Štoviše, vidimo da je on wk^*-zatvoren u $S(\mathcal{A})$, dakle wk^*-kompaktan prema teoremu 5.5, te da je on konveksan. Prema Krein-Milmanovom teoremu, postoji ekstremna točka ψ skupa F . Ako pokažemo da je F stranica od $S(\mathcal{A})$, slijedit će da je ψ čisto stanje, budući da su ekstremne točke stranica konveksnog skupa ekstremne točke i samog skupa.

Neka su $\tau, \rho \in S(\mathcal{A})$ i $0 < t < 1$ takvi da je $\psi = t\tau + (1-t)\rho$. Kako je $\|\tau\| = \|\rho\| = 1$, vrijedi $\tau(a) \leq \|a\|$ i $\rho(a) \leq \|a\|$. Pretpostavimo da je $\tau(a) < \|a\|$. Tada je

$$\|a\| = t\tau(a) + (1-t)\rho(a) < t\|a\| + (1-t)\|a\| = \|a\| ,$$

što je kontradikcija. Dakle, $\tau(a) = \|a\|$ i slično $\rho(a) = \|a\|$, odnosno $\tau, \rho \in F$. Stoga je F stranica od $S(\mathcal{A})$ i ψ je čisto stanje takvo da vrijedi $\psi(a) = \|a\|$. □

Za kraj ovog potpoglavlja pokažimo jednostavnu tvrdnju koja će nam biti od velike pomoći u Gelfand-Naimarkovom teoremu, no koja je od velike važnosti i sama po sebi.

Teorem 5.8. *Neka je $\mathcal{A}$ separabilna unitalna C^*-algebra. Tada su $S(\mathcal{A})$ i $PS(\mathcal{A})$ wk^*-metrizabilni, wk^*-separabilni i zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti.*

Dokaz. Prema teoremu C.9, $\mathrm{ball}\mathcal{A}^*$ je wk^*-metrizabilna, pa se može definirati metrika d na $\mathrm{ball}\mathcal{A}^*$ koja inducira wk^* topologiju. Neka je d_S restrikcija od d na $S(\mathcal{A}) \times S(\mathcal{A})$. Može se pokazati da se topologija na $S(\mathcal{A})$ inducirana s d_S poklapa s relativnom wk^* topologijom, pa je $S(\mathcal{A})$ također wk^*-metrizabilan. Na sličan način je i $PS(\mathcal{A}) \subset \mathrm{ball}\mathcal{A}^*$ wk^*-metrizabilan. Prema propoziciji B.3, oba prostora zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti.

Kako je prema teoremu 5.5 $S(\mathcal{A})$ još i wk^*-kompaktan, iz teorema B.5 slijedi da je $S(\mathcal{A})$ wk^*-separabilan. Prema teoremu B.1, $PS(\mathcal{A})$ je također wk^*-separabilan. □

Ovaj rezultat, koji je analogon teorema 4.8, smo mogli predvidjeti: postoji najviše prebrojivo mnogo stanja koja čovjek može pripremiti, pa se prostor $S(\mathcal{A})$ mora moći aproksimirati s prebrojivim skupom stanja.

5.3 Ireducibilne reprezentacije

Definicija 5.5. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $(\mathcal{H}, \pi)$ njena reprezentacija. Ako je $\mathcal{M}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$, kažemo da je on* invarijantan *za $\pi(\mathcal{A})$ ako je $\pi(a)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, za svaki $a \in \mathcal{A}$, i pišemo $\pi(\mathcal{A})\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Ako su jedini invarijantni potprostori za $\pi(\mathcal{A})$ nul-potprostor i cijeli $\mathcal{H}$, kažemo da je $(\mathcal{H}, \pi)$* ireducibilna *reprezentacija. U protivnom, ona je* reducibilna*.*

Ako je $\mathcal{M}$ invarijantan zatvoren potprostor za $\pi(\mathcal{A})$, možemo $(\mathcal{H}, \pi)$ *reducirati* na reprezentaciju na $\mathcal{M}$: definiramo

$$\pi^{\mathcal{M}}(a) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}\,, \qquad x \mapsto \pi(a)x\,.$$

Preslikavanje $\pi^{\mathcal{M}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{M})$ je $*$-homomorfizam.

S druge strane, ako je $\mathcal{M}$ invarijantan za $\pi(\mathcal{A})$, lako se provjeri da je i njegov ortogonalni komplement $\mathcal{M}^\perp$ također invarijantan za $\pi(\mathcal{A})$: ako su $x \in \mathcal{M}^\perp$ i $y \in \mathcal{M}$, tada je

$$\langle \pi(a)x\,, y\rangle = \langle x\,, \pi(a)^* y\rangle = \langle x\,, \pi(a^*)y\rangle = 0\,,$$

jer je $\pi(a^*)y \in \mathcal{M}$. Dakle, $\pi(a)x \in \mathcal{M}^\perp$ i $\mathcal{M}^\perp$ je invarijantan za $\pi(\mathcal{A})$. Stoga, sasvim analogno definiramo $(\mathcal{M}^\perp, \pi^{\mathcal{M}^\perp})$. Kako je prema teoremu D.3 $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ i $\pi(a)x = (\pi(a)^{\mathcal{M}} P_{\mathcal{M}} + \pi(a)^{\mathcal{M}^\perp} P_{\mathcal{M}^\perp})x$, rastavili smo $(\mathcal{H}, \pi)$ na "sumu" dvije reprezentacije (definirat ćemo direktnu sumu reprezentacija u idućem potpoglavlju).

Ireducibilne reprezentacije su elementarni gradivni elementi reprezentacija C^*-algebri. U Gelfand-Naimarkovom teoremu ćemo pokazati da se može konstruirati vjerna reprezentacija separabilne C^*-algebre uzimanjem direktne sume ireducibilnih reprezentacija. Ireducibilne reprezentacije imaju, k tome, mnogo lijepih svojstava. Pokazujemo jedno takvo svojstvo:

Teorem 5.9. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $(\mathcal{H}, \pi)$ nenul reprezentacija od $\mathcal{A}$. Tada je $(\mathcal{H}, \pi)$ ireducibilna akko je $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$, gdje je $I = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(\mathcal{H}, \pi)$ ireducibilna. Prema propoziciji D.4 je $\pi(\mathcal{A})'$ von Neumannova algebra (definicija D.13) i prema teoremu D.10, $\pi(\mathcal{A})'$ je zatvorena linearna ljuska svojih projekcija.

Neka je $P \in \pi(\mathcal{A})'$ proizvoljna projekcija različita od nule i neka je $a \in \mathcal{A}$ proizvoljan. Tada je $P\pi(a) = \pi(a)P$. Ako je $x \in \operatorname{ran}P$, ova jednakost nam govori da je $\pi(a)x \in \operatorname{ran}P$, pa je $\operatorname{ran}P$ invarijantan za $\pi(\mathcal{A})$. Kako je $(\mathcal{H}, \pi)$ ireducibilna, mora biti $\operatorname{ran}P = \mathcal{H}$. Dakle, $P = I$. Prema prethodnom paragrafu stoga mora biti $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$.

Obratno, neka je $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$ i pretpostavimo da je $\mathcal{M}$ ne-nul zatvoren potprostor invarijantan za $\pi(\mathcal{A})$. Tada je i $\mathcal{M}^\perp$ invarijantan za $\pi(\mathcal{A})$. Neka je P projekcija na $\mathcal{M}$. Ako je $x \in \mathcal{M}$, tada je $\pi(a)Px = P\pi(a)x$ za sve $a \in \mathcal{A}$, i analogno za $x \in \mathcal{M}^\perp$. Prema teoremu D.3, vrijedi $\pi(a)P = P\pi(a)$ na cijelom $\mathcal{H}$. Prema pretpostavci je $P = I$, pa mora biti $\mathcal{M} = \mathcal{H}$. Dakle, $(\mathcal{H}, \pi)$ je ireducibilna. □

Koristeći ovaj teorem pokazujemo čvrstu vezu između čistih stanja i ireducibilnih reprezentacija.

Teorem 5.10. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i ψ stanje na $\mathcal{A}$. Tada je ψ čisto stanje akko je pripadajuća GNS reprezentacija $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ ireducibilna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je ψ čisto stanje. Da pokažemo ireducibilnost reprezentacije $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ koristimo teorem 5.9. Neka je $V \in \pi_\psi(\mathcal{A})'$ i pokažimo da je V oblika αI, za neki skalar α. Budući da je $\pi_\psi(\mathcal{A})'$ C^*-algebra, ona je generirana pozitivnim elementima, pa možemo pretpostaviti da je $V \geq 0$. Dodatnim reskaliranjem možemo pretpostaviti da je $0 \leq V \leq I$. Definirajmo $\tau : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ s $\tau(a) = \langle \pi_\psi(a)Vx_\psi\, , x_\psi \rangle$. Prema lemi 5.1, τ je pozitivan linearan funkcional takav da je $\tau \leq \psi$. Prema lemi 5.2 postoji $t \in [0,1]$ takav da je $\tau = t\psi$. Neka su sad $a, b \in \mathcal{A}$ proizvoljni. Imamo

$$\begin{aligned}\tau(b^*a) &= \langle \pi(b^*)_\psi V \pi_\psi(a)x_\psi\, , x_\psi \rangle = \langle V(a + \mathcal{N}_\psi)\, , b + \mathcal{N}_\psi \rangle \\ &= t\psi(b^*a) = \langle t(a + \mathcal{N}_\psi)\, , b + \mathcal{N}_\psi \rangle\, .\end{aligned}$$

Kako je $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\psi$ gust u $\mathcal{H}_\psi$, ovo vrijedi za sve $x, y \in \mathcal{H}_\psi$, pa je $V = tI$. Dakle, $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ je ireducibilna.

Obratno, pretpostavimo da je $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ ireducibilna i neka je τ pozitivan linearan funkcional takav da je $\tau \leq \psi$. Prema lemi 5.1 postoji $V \in \pi_\psi(\mathcal{A})'$ takav da je $0 \leq V \leq I$ i da vrijedi $\tau(a) = \langle \pi_\psi(a)Vx_\psi\, , x_\psi \rangle$. No prema teoremu 5.9 je $V = \alpha \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\psi}$, za

$\alpha \in \mathbb{C}$. No, kako je $0 \leq V \leq I$, slijedi da je $\alpha \in [0,1]$, te $\tau = \alpha\psi$. Prema lemi 5.2 je ψ čisto stanje. □

Korolar 5.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $(\mathcal{H}, \pi)$ njena ne-nul ireducibilna reprezentacija. Tada postoji jedinični ciklički vektor $x \in \mathcal{H}$. Definirajmo $\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ s*

$$\psi(a) = \langle \pi(a)x \, , x \rangle \, .$$

Tada je ψ čisto stanje na $\mathcal{A}$ i $(\mathcal{H}, \pi)$ je unitarno ekvivalentna s GNS reprezentacijom $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$.

Dokaz. Kako je π različito od nule, postoje $a \in \mathcal{A}$ i $x \in \mathcal{H}$ norme jedan takvi da je $\pi(a)x \neq 0$. Kako je $\mathrm{cl}(\pi(\mathcal{A})x)$ invarijantan za $\pi(\mathcal{A})$, on mora bit jednak $\mathcal{H}$, pa je x ciklički vektor. Prema korolaru 5.1 je ψ stanje i $(\mathcal{H}, \pi)$ je unitarno ekvivalentna s GNS reprezentacijom $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$. Kako unitarna ekvivalencija čuva ireducibilnost, $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ je ireducibilna i prema prethodnom teoremu je ψ čisto stanje. □

5.4 Gelfand-Naimarkov teorem

U potpoglavlju 5.1. smo pokazali da proučavanjem djelovanja sistema na neko stanje možemo reprezentirati C^*-algebru sistema na algebri ograničenih operatora na separabilnom Hilbertovom prostoru. Kako bismo konstruirali vjernu reprezentaciju, moramo uzeti u obzir djelovanje na više stanja. To se postiže konstrukcijom direktne sume reprezentacija.

Propozicija 5.1. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $\{(\mathcal{H}_n, \pi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ prebrojiva familija reprezentacija od $\mathcal{A}$. Definiramo:*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n \qquad \pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \qquad \pi(a)(\{x_n\}_n) = \{\pi_n(a)x_n\}_n$$

Tada je $(\mathcal{H}, \pi)$ reprezentacija od $\mathcal{A}$.

Dokaz. Neka je $a \in \mathcal{A}$ i provjerimo da je $\pi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Prema propoziciji D.2 je

$$\|\pi(a)(\{x_n\})\|^2 = \|\{\pi_n(a)x_n\}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\pi_n(a)x_n\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 = \|\{x_n\}_n\|^2 \, .$$

Dakle, $\pi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Rutinski se pokaže da je π $*$-homomorfizam. □

Definicija 5.6. *Neka su $\mathcal{A}$ i $(\mathcal{H}, \pi)$ kao u prethodnoj propoziciji. $(\mathcal{H}, \pi)$ se zove* direktna suma reprezentacija $\{(\mathcal{H}_n, \pi_n)\}_n$ *i označavamo ju s*

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{H}_n, \pi_n)\,.$$

Podsjetimo se aksioma 3. Za očekivati je da se proučavanjem djelovanja $\mathcal{A}$ na sva stanja postiže vjerna reprezentacija. Konkretno, *univerzalna reprezentacija*

$$\bigoplus_{\phi\in S(\mathcal{A})}(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$$

je vjerna ($\ker\pi = \{0\}$ slijedi iz teorema 3.23). Međutim, analogno teoremu 4.8, pokazat ćemo da je dovoljno znati djelovanje sistema na prebrojivom gustom podskupu čistih stanja. Idući teorem je prvi od tri glavna teorema u ovom radu.

Teorem 5.11. (Gelfand-Naimark)
Neka je $\mathcal{A}$ separabilna unitalna C^*-algebra. Tada postoji vjerna reprezentacija $(\mathcal{H}, \pi)$ od $\mathcal{A}$ koja je direktna suma prebrojivo mnogo ireducibilnih reprezentacija od $\mathcal{A}$. Štoviše, $\mathcal{H}$ je separabilan i π je izometrija.

Dokaz. Dokaz provodimo u koracima.

1) *Konstrukcija* $(\mathcal{H}, \pi)$:
Prema teoremu 5.8 postoji prebrojiv wk^*-gust podskup $\mathcal{F}$ od $PS(\mathcal{A})$. Definirajmo

$$(\mathcal{H}, \pi) = \bigoplus_{\psi\in\mathcal{F}}(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)\,.$$

Prema teoremu 5.10 su sve reprezentacije $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ ireducibilne. Dakle, $(\mathcal{H}, \pi)$ je direktna suma prebrojivo mnogo ireducibilnih reprezentacija.

2) $(\mathcal{H}, \pi)$ *je vjerna*:
Želimo pokazati da je π injekcija, odnosno, da je $\ker\pi = \{0\}$. Pretpostavimo da je $a \in \mathcal{A}$ element različit od nule i pokažimo da je $\pi(a) \neq 0$.

Prema teoremu 5.7, postoji $\rho \in PS(\mathcal{A})$ takvo da je $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \rho(a^*a) > 0$. Kako je $\mathcal{F}$ gust u $PS(\mathcal{A})$, postoji niz stanja $\{\psi_n\}_n \subset \mathcal{F}$ koji konvergira k ρ u wk^*. Iz propozicije C.3 slijedi da $\psi_n(a^*a) \to \rho(a^*a)$. Dakle, postoji $\psi \in \mathcal{F}$ takvo da je

$\psi(a^*a) > 0$. Budući da je

$$\psi(a^*a) = \langle \pi_\psi(a^*a)x_\psi \, , x_\psi \rangle = \|\pi_\psi(a)x_\psi\|^2 \ ,$$

$\pi_\psi(a)x_\psi$ je različito od nule, odnosno, $\pi_\psi(a) \neq 0$. Dakle, $\pi(a) \neq 0$.

3) $\mathcal{H}$ *je separabilan*:

Prema teoremu 5.1 su $\mathcal{H}_\psi$ separabilni, za sve $\psi \in \mathcal{F}$. Odaberimo neku bijekciju između $\mathcal{F}$ i $\mathbb{N}$ i neka su H_n prebrojivi gusti podskupovi od $\mathcal{H}_n$. Tada je $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ prebrojiv podskup od $\mathcal{H}$. Neka su $x = \{x_n\}_n \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $h_n \in H_n$ takav da je $\|x_n - h_n\| < 2^{-n/2}\varepsilon$. Tada je

$$\|\{x_n\} - \{h_n\}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - h_n\|^2 < \varepsilon^2 .$$

Dakle, H je gust u $\mathcal{H}$.

4) π *je izometrija*:

Kako je π injektivan unitalan $*$-homomorfizam, on je izometrija prema teoremu 3.13. $\square$

Dobili smo da je svaka separabilna unitalna C^*-algebra izometrično $*$-izomorfna unitalnoj C^*-podalgebri C^*-algebre ograničenih operatora na separabilnom Hilbertovom prostoru.

Time smo svakom sistemu pridružili separabilan Hilbertov prostor, a opservable smo poistovjetili s hermitskim operatorima na tom prostoru i "izveli" Dirac-von Neumannove aksiome 1 i 2. Primijetimo, ipak, da su u standardnoj formulaciji operatori neograničeni. Razlog za ovo neslaganje bi trebao biti jasan: u našoj formulaciji opservable pripadaju mjernim uređajima, čije vrijednosti imaju gornju među. U standardnoj se formulaciji, pak, operatori pripisuju apstrakcijama, kao što je opisano u uvodu. Reći ćemo više o ovoj temi u potpoglavlju 5.6., kad ćemo razmatrati opservable položaja i impulsa.

Napomena 5.2. Prisjetimo se definicije 2.5. i napomene 2.1. Rekli smo da je opservabla A sistema $\mathcal{O}$ pozitivna ako je $\phi(A) \geq 0$ za sva $\phi \in \mathcal{S}$. S druge strane, za sistem kojem je pridružena C^*-algebra $\mathcal{A}$, definirali smo pozitivan element (opservablu) $a \in \mathcal{A}$ kao hermitski element čiji spektar leži u $[0, +\infty)$. Sada kad smo razvili dovoljno matematičkih alata, spremni smo pokazati ekvivalenciju ove dvije definicije: *Hermitski element a C^*-algebre $\mathcal{A}$ je pozitivan akko je $\phi(a) \geq 0$ za sva stanja $\phi \in S(\mathcal{A})$.*

Dokaz. Prvi smjer je jasan. Obratno, pretpostavimo da je $a \in \mathcal{A}_{\text{sa}}$ takav da je $\phi(a) \geq 0$ za sva $\phi \in S(\mathcal{A})$. Neka je $(\mathcal{H}, \pi)$ neka vjerna reprezentacija od $\mathcal{A}$ i neka je $x \in \mathcal{H}$ proizvoljan vektor norme jedan. Definirajmo funkcional $\tau : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ s

$$\tau(b) = \langle \pi(b)x \, , \, x \rangle \, .$$

Očito je da je τ ograničen, a kako je $\tau(1) = 1$, τ je stanje prema teoremu 3.22. Prema pretpostavci je $\tau(a) = \langle \pi(a)x \, , \, x \rangle \geq 0$. Ovaj postupak možemo ponoviti za proizvoljan jediničan vektor $x \in \mathcal{H}$. Dakle,

$$\langle \pi(a)x \, , \, x \rangle \geq 0 \, ,$$

za sve $x \in \mathcal{H}$. Prema definicij D.11, $\pi(a)$ je pozitivan operator. Kako je π injekcija, $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \pi(\mathcal{A})$ je izometrički $*$-izomorfizam. Dakle, a je pozitivan. □

5.5 Operatori gustoće

Cilj ovog potpoglavlja je izvesti Dirac-von Neumannov aksiom 3. Neka je $\mathcal{A}$ separabilna unitalna C^*-algebra i $(\mathcal{H}, \pi)$ vjerna reprezentacija konstruirana u Gelfand-Naimarkovom teoremu. Počnimo s čistim stanjima. Može se lako pokazati da su čista stanja u smislu tog aksioma, zvana još i vektorskim stanjima jer su očekivanja dana s formulom

$$\psi(a) = \mathrm{Tr}(\pi(a)P_x) = \langle \pi(a)x \, , \, x \rangle \, ,$$

za neki $x \in \mathcal{H}$, također čista i u C^*-algebarskom smislu. Međutim, obrat općenito ne vrijedi: postoje separabilne C^*-podalgebre od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ takve da nisu sva čista stanja na tim algebrama vektorska stanja. Iako $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ nije separabilna, iduća propozicija ilustrira probleme s kojima smo suočeni.

Propozicija 5.2. *Neka je $\mathcal{H}$ separabilan Hilbertov prostor. Tada postoji čisto stanje na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ koje nije vektorsko stanje.*

Dokaz. Neka je $\pi_0 : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{B}_0(\mathcal{H}) = \mathcal{C}(\mathcal{H})$ kvocijentno preslikavanje. Prema teoremima 5.7 i 5.10 postoji ireducibilna reprezentacija $\pi_1 : \mathcal{C}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$, gdje je Tada je $\pi_1 \circ \pi_0$ ireducibilna reprezentacija, pa postoji čisto stanje ψ na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ takvo da je $\pi_1 \circ \pi_0$ unitarno ekvivalentno s π_ψ. No ψ iščezava na kompaktnim operatorima. Kad bi postojao jedinični vektor $x \in \mathcal{H}$ takav da je $\psi(A) = \langle Ax\,,\, x\rangle$, imali bismo

$$0 = \psi(P_x) = \langle P_x x\,,\, x\rangle = \langle x\,,\, x\rangle = 1\,,$$

što je kontradikcija. Dakle, ψ nije vektorsko stanje. □

Srećom, postoji izlaz iz ovog problema, a sličan argument smo koristili već nekoliko puta: fizikalno, dovoljno je naći prebrojiv wk^*-gust podskup $\mathcal{V} \subset PS(\mathcal{A})$ koji inducira vektorska stanja na $\pi(\mathcal{A})$. Stavljajući $\mathcal{V} = \mathcal{F}$, za svako $\psi \in \mathcal{F}$ je[37]

$$\psi(a) = \langle \pi_\psi(a) x_\psi\,,\, x_\psi\rangle\,.$$

Prijeđimo sada na miješana stanja. U standardnom formalizmu, DvN aksiomu 3, miješana stanja reprezentirana su s operatorima gustoće.

Definicija 5.7. *Neka je $\mathcal{H}$ separabilan Hilbertov prostor.* Operator gustoće *na $\mathcal{H}$ je pozitivan nuklearan operator traga 1. Skup svih operatora gustoće na $\mathcal{H}$ označavamo s $\mathcal{D}(\mathcal{H})$.*

U primjeru 3.5 smo pokazali da su miješana stanja u smislu aksioma DvN 3 stanja u C^*-smislu. Naravno, zanima nas mogu li se sva stanja ϕ na $\mathcal{A}$ reprezentirati na $\mathcal{H}$ s nekim operatorom gustoće ρ s formulom $\phi(a) = \mathrm{Tr}(\pi(a)\rho)$. Kao i u slučaju čistih stanja, nažalost, odgovor je ne. Stanja takvog oblika zovu se *normalna* stanja, i postoje nužni i dovoljni uvjeti pod kojima je stanje normalno, međutim, formulirani su za von Neumannove algebre[38]. Nemamo osnova pretpostaviti da je $\pi(\mathcal{A})$ von Neumannova algebra za proizvoljan sistem.

Zato ćemo, kao i u slučaju čistih stanja, nametnuti dodatne fizikalne uvjete. Prvo ćemo istražiti svojstva operatora gustoće. Koristimo rezultatima iz dodatka D.3: prema spektralnom teoremu za normalne kompaktne operatore (D.14), svaki

[37] Vidjeti napomenu D.1
[38] Vidjeti [27]

$\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ ima najviše prebrojivo mnogo različitih svojstvenih vrijednosti λ_n i

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \,,$$

gdje je P_n projekcija na svojstveni potprostor $\ker(\rho - \lambda_n I)$. Štoviše, svojstveni potprostori su konačnodimenzionalni i međusobno ortogonalni. Neka je $\mathcal{E}'_n = \{e_n^1, \dots, e_n^{k_n}\}$ ortonormirana baza za $\ker(\rho - \lambda_n I)$ i stavimo $\mathcal{E}' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}'_n$. Tada je $\mathcal{E}'$ ortonormiran skup. Neka je $\mathcal{E}$ baza za $\mathcal{H}$ koja proširuje $\mathcal{E}'$. Koristeći propoziciju D.5, možemo pisati $P_n = \sum_{i=1}^{k_n} P_{\mathbb{C}e_n^i}$. Stavimo $\mathcal{E} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dakle, ako preimenujemo P_n da označava projektor na $\mathbb{C}e_n$ za $e_n \in \mathcal{E}$, možemo pisati

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n \,.$$

Ovdje neki α_n mogu biti jednaki ili jednaki nula. Kako je ρ pozitivan, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $\alpha_n = \langle \rho e_n, e_n \rangle \geq 0$. Nadalje, kako je ρ traga 1, imamo

$$\mathrm{Tr}(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \rho e_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \,.$$

Dakle, ρ je "beskonačna konveksna linearna kombinacija" jednodimenzionalnih projektora. Budući da red $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n$ konvergira u normi, označimo li s $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ skup svih jednodimenzionalnih projektora na $\mathcal{H}$, vrijedi $\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{V}(\mathcal{H}))$.

Želimo, kao i u slučaju čistih stanja, aproksimirati sva stanja s normalnim stanjima. Ovako ispitujemo mogućnost aproksimacije:

1. Aproksimacija $PS(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{F}$ inducira na $(\mathcal{H}, \pi)$ aproksimaciju $\mathcal{V}(\mathcal{H}) \longrightarrow \{P_{x_\psi}\}_{\psi \in \mathcal{F}}$.
2. Posljedično, u vidu korespondirajućih jednakosti $S(\mathcal{A}) = \overline{\mathrm{co}}(PS(\mathcal{A}))$ na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{V}(\mathcal{H}))$ na $(\mathcal{H}, \pi)$, kada bi vrijedila jednakost $S(\mathcal{A}) = \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{F})$, smatramo da bi bilo opravdano aproksimirati $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \longrightarrow \overline{\mathrm{co}}(\{P_{x_\psi}\}_{\psi \in \mathcal{F}})$.

Stoga, do kraja potpoglavlja dokazujemo jednakost $S(\mathcal{A}) = \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{F})$.

Lema 5.3. *Neka je $\mathcal{A}$ separabilna unitalna C^*-algebra i $\mathcal{F}$ wk^*-gust prebrojiv podskup od $PS(\mathcal{A})$. Neka je $a \in \mathcal{A}$ hermitski i neka je $\psi(a) \geq 0$, za sve $\psi \in \mathcal{F}$. Tada je $a \geq 0$.*

Dokaz. Pokažimo prvo da ako je $\phi(a) \geq 0$ za sva $\phi \in S(\mathcal{A})$, nužno slijedi da je a pozitivan. Neka je $(\mathcal{H}, \pi)$ neka vjerna reprezentacija od $\mathcal{A}$ i $x \in \mathcal{H}$ jedinični vektor. Tada je funkcija

$$\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad b \mapsto \langle \pi(b)x \, , x \rangle$$

stanje na $\mathcal{A}$, pa je $\omega(a) \geq 0$ po pretpostavci. Dakle, $\langle \pi(a)x \, , x \rangle \geq 0$ za proizvoljan jedinični vektor, pa posljedično ta ista nejednakost vrijedi za sve $x \in \mathcal{H}$. Tada je $\pi(a)$ pozitivan operator (definicija D.11). No π je $*$-izomorfizam na svoju sliku, pa je a pozitivan.

Trebamo, dakle, iz naše pretpostavke pokazati da slijedi da za proizvoljno $\phi \in S(\mathcal{A})$ vrijedi $\phi(a) \geq 0$. Pokažimo prvo da je $\psi(a) \geq 0$ za sva $\psi \in PS(\mathcal{A})$. Kako je $\mathcal{F}$ wk^*-gust u $PS(\mathcal{A})$, postoji $\{\psi_n\}_n \subset \mathcal{F}$ takav da $\psi_n \longrightarrow \psi$ u wk^*. Posebno, $\psi_n(a) \to \psi(a)$, pa je $\psi(a) \geq 0$.

Ako je sad $\phi \in S(\mathcal{A})$, prema teoremu 5.6 i propoziciji C.5 postoji niz $\phi_n \in \mathrm{co}(PS(\mathcal{A}))$ takav da $\phi_n \to \phi$ u wk^*. Kako je svaki ϕ_n konveksna linearna kombinacija čistih stanja, vrijedi $\phi_n(a) \geq 0$, pa je $\phi(a) \geq 0$. □

Teorem 5.12. *Neka je $\mathcal{A}$ separabilna unitalna C^*-algebra i $\mathcal{F}$ wk^*-gust prebrojiv podskup od $PS(\mathcal{A})$. Tada je $S(\mathcal{A}) = \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{F})$.*[39]

Dokaz. Kako je $\mathcal{F} \subset PS(\mathcal{A})$, iz teorema 5.6 očito slijedi $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{F}) \subset S(\mathcal{A})$. Za obratnu inkluziju, pretpostavimo da je $\omega \in S(\mathcal{A}) \setminus \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{F})$. Koristeći teorem C.7, uz $A = \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{F})$ i $B = \{\omega\}$ nalazimo neprekidan linearan funkcional $f : (\mathcal{A}^*, wk^*) \longrightarrow \mathbb{C}$, te $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ takve da je

$$\mathrm{Re} f(\phi) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon \leq \mathrm{Re} f(\omega) \, ,$$

za sve $\phi \in \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{F})$. Prema teoremu C.5 je pak f evaluacija, odnosno, postoji $a \in \mathcal{A}$ takav da je $f(\phi) = \phi(a)$. Kako je prema teoremu 3.21 $\phi(a^*) = \phi(a)^*$, možemo pretpostaviti da je a hermitski. Dakle, za sve $\phi \in \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{F})$ vrijedi

$$\phi(a) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon \leq \omega(a) \, .$$

Mijenjajući a za $\alpha 1 - a$ (što je i dalje hermitski prema Gelfandovoj transformaciji), dobivamo

$$\phi(a) > \omega(a) + \varepsilon \, ,$$

[39] Ovaj teorem je dokazan po uzoru na [26], poglavlje 4.3.

odnosno,

$$\phi(a - \omega(a) - \varepsilon) > 0\,,$$

za sve $\phi \in \overline{\text{co}}(\mathcal{F})$. Posebno je $\psi(a - \omega(a) - \varepsilon) > 0$, za sve $\psi \in \mathcal{F}$. Prema prethodnoj lemi je, stoga, $a - \omega(a) - \varepsilon \geq 0$. Kako je ω pozitivan, imamo

$$\omega(a - \omega(a) - \varepsilon) = \omega(a) - \omega(a) - \varepsilon = -\varepsilon \geq 0\,,$$

što je kontradikcija. Dakle, $S(\mathcal{A})$ mora biti sadržan u $\overline{\text{co}}(\mathcal{F})$. □

5.6 Komentari

U ovom potpoglavlju pokazujemo kako se u C^*-algebarskom formalizmu kvantne mehanike mogu reproducirati Dirac-von Neumannovi aksiomi 4 i 5 sa kraja potpoglavlja 1.1. Također ćemo se osvrnuti na nepotpuno slaganje naših rezultata s DvN aksiomom 2. Podsjetimo se da smo u Gelfand-Naimarkovom teoremu pokazali kako se opservable reprezentiraju s *ograničenim* hermitskim operatorima. Naravno, to je najbolje ilustrirati na primjeru operatora položaja i impulsa, te kanonske komutacijske relacije.

Neka je, kao i uvjek, $\mathcal{A}$ separabilna unitalna C^*-algebra koja reprezentira naš fizikalni sistem. Počnimo s četvrtim aksiomom. Navodimo ga još jednom:
Ako se sistem nalazi u stanju ρ, vjerojatnost $\mu_A(V)$ da se rezultat mjerenja opservable A nađe u $V \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dana je s $\mu_A(V) = \operatorname{Tr}(E^A(V)\rho)$, gdje je E^A spektralna mjera pridružena operatoru A.
U okviru našeg formalizma, moramo pretpostaviti da je A ograničen.

Prvo trebamo objasniti, u okviru našeg formalizma, kako bismo odredili $\mu_a(V)$, vjerojatnost da mjerenjem opservable a u stanju ϕ rezultat bude sadržan u $V \subset \sigma(a)$? Za to nam treba pojam *projekcije* (vidjeti definiciju 3.4). Prema teoremu 3.5, ako je $e \in \mathcal{A}$ projekcija, njen spektar je sadržan u $\{0, 1\}$. S druge strane, ako opservabla e ima spektar sadržan u $\{0, 1\}$, tada primjenom Gelfandovog transformata vidimo da e mora biti projekcija. Projekcije stoga odgovaraju tzv. "yes/no" eksperimentima. Očekujemo, dakle, postojanje projekcije e_V, opservable koja se može pridružiti istom mjernom uređaju koji određuje a, no daje samo rezultate 1 kada je rezultat pojedinog mjerenja unutar V i 0 inače. Vidimo, stoga, da mora biti

$$\mu_a(V) = \phi(e_V)\,.$$

U standardnom formalizmu, $\mathrm{Tr}(E^A(V)\rho)$ je upravo očekivanje opservable $E^A(V)$ u stanju ρ . Ako je $(\mathcal{H}, \pi) = \bigoplus_{\psi \in \mathcal{F}}(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ reprezentacija od $\mathcal{A}$ konstruirana u Gelfand-Naimarkovom teoremu, ako je $\pi(a) = A$ i ako je $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ operator gustoće koji je induciran stanjem ϕ (na način opisan u prošlom potpoglavlju), da bismo postigli slaganje s DvN aksiomom moramo pokazati da je

$$\pi(e_V) = E^A(V)\,.$$

Međutim, naizgled postoji problem. Kako $\pi(\mathcal{A})$ nije nužno von Neumannova algebra, $E^A(V)$ nije nužno sadržan u $\pi(\mathcal{A})$ (vidjeti teorem D.10), pa e_V ne mora postojati. To možemo vidjeti i na sljedeći način: neka je $C^*(1, a)$ *sistem generiran s opservablom* a (kojeg bismo dobili istom konstrukcijom kao i u drugom poglavlju, uz $\mathcal{O} = \{a\}$). Prema neprekidnom funkcionalnom računu (teorem 3.14), $\mathcal{B}$ je izometrično $*$-izomorfan s $C(\sigma(a))$. Jasno je da bi e_V , trebao odgovarati χ_V , koja je neprekidna akko je V unija komponenti povezanosti od $\sigma(A)$. Dakle, $e_V \in \mathcal{B}$ akko je V unija komponenti povezanosti od $\sigma(A)$. Fizikalno, nije moguće precizno pri mjerenju odrediti je li rezultat unutar V , osim ako V nije odvojen od ostatka spektra, kao što bi npr. bio u slučaju diskretne mjerne skale. Kako se svaka skala u praksi zapravo diskretizira određujući broj signifikantnih decimala (ili digitalizacijom), ovaj "problem" je *de facto* problem aproksimiranja realnih brojeva racionalnim brojevima.

Okrenimo se sada petom aksiomu: *Konačan skup* $\{A_1\,, \ldots, A_n\}$ *opservabli može se mjeriti istovremeno ako i samo ako sve međusobno komutiraju.* Promotrimo sistem generiran s opservablama $A_1\,, \ldots, A_n$: $\mathcal{B} = C^*(1,\, A_1\,, \ldots, A_n)$. Budući da sve A_j međusobno komutiraju, $\mathcal{B}$ je komutativna C^*-algebra. Dakle, sistem generiran s tim opservablama je klasičan sistem, i kao takav, nema problema koje inače susrećemo u kvantnoj mehanici. Kao i u poglavlju 4.2., za svako stanje $\phi \in S(A)$ prvo restringiramo na $\mathcal{B}$, a potom joj pridružimo vjerojatnosnu mjeru μ_ϕ , koja je ista za sve opservable.

Konačno, završimo ovo poglavlje s kratkim osvrtom na opservable položaja i impulsa. Pitamo se sljedeće: je li moguće *generirati* C^*-algebru s dvije opservable q i p koje zadovoljavaju kanonsku komutacijsku relaciju

$$[q, p] = i\hbar 1\,?$$

Pretpostavimo da je. Imamo

$$[q^2, p] = q^2 p - pq^2 = q[q, p] + [q, p]q = i\hbar q\,,$$

te, induktivno,

$$[q^n, p] = in\hbar q^{n-1}\,.$$

Prema toj jednakosti, zbog submultiplikativnosti norme i C^*-identiteta imamo

$$(2n+1)\hbar \left\|q^{2n}\right\| = (2n+1)\hbar \left\|q\right\|^{2n} = \left\|[q^{2n+1}n, p]\right\| \leq \left\|q^{2n+1}p\right\| + \left\|pq^{2n+1}\right\| \leq 2 \left\|q\right\|^{2n+1} \left\|p\right\|\,.$$

Iz toga slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$2 \left\|q\right\| \left\|p\right\| \geq (2n + 1)\hbar\,,$$

što je nemoguće ako su i $\|q\|$ i $\|p\|$ konačni.

Naš operacionalni pristup opservablama stavio je gornju granicu na njihove mjerne skale i time smo dobili normu opservable. S druge strane, q i p su dobiveni ”kvantizacijom” klasičnih veličina, koje su neograničene. Je li moguće pomiriti jednu moćnu fizičku idealizaciju koju nosi komutacijska relacija s formalnim C^*-algebarskim opisom fizikalnog sistema?

Da bismo reflektirali činjenicu da uvijek mjerimo konačne vrijednosti, možemo u našoj algebri zamijeniti q i p s nekim ograničenim funkcijama $F(q)$ i $G(p)$. Pritom želimo definiramo umnožak tih veličina tako da zadržavaju sadržaj komutacijske relacije. Jedno takvo formalno rješenje problema ponudio je Weyl, koji je definirao veličine

$$U(\alpha) = e^{i\alpha q} \quad \text{i} \quad V(\beta) = e^{i\beta p}\,,$$

gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^s$. Sljedeća pravila množenja, u vidu Baker-Hausdorffove formule

$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2}$, odražavaju kanonske komutacijske relacije:

$$U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha + \beta)$$
$$V(\alpha)V(\beta) = V(\alpha + \beta)$$
$$U(\alpha)V(\beta) = V(\beta)U(\alpha)e^{-i\alpha\beta}$$

Involucija se prirodno definira i odražava hermitičnost q i p:

$$U(\alpha)^* = U(-\alpha)$$
$$V(\beta)^* = V(-\beta)$$

Nadalje,

$$U(\alpha)^* U(\alpha) = U(\alpha)U(\alpha)^* = 1\,,$$

i analogno za $V(\beta)$. Polinomijalna algebra $\mathcal{A}_W$ generirana s tim veličinama i s navedenim operacijama zove se *Weylova $*$-algebra*. Da bismo postigli C^*-algebarski opis sistema, potrebno je definirati još i normu koja zadovoljava C^*-identitet, te po potrebi upotpuniti $\mathcal{A}_W$. Ispostavlja se da je to moguće (vidjeti teorem 14.38. u [25]), te da je dobivena algebra, *Weylova C^*-algebra*, pogodna za opis kvantne čestice. Označavamo ju i dalje s $\mathcal{A}_W$.

Sljedeći korak k validaciji ovog programa je, naravno, reproducirati standardni formalizam. To se postiže pronalaskom (kao što smo učinili za proizvoljan sistem) ireducibilnih reprezentacija $(\mathcal{H}, \pi)$ Weylove C^*-algebre $\mathcal{A}_W$ na separabilnom Hilbertovom prostoru. Od reprezentacija se još zahtijeva da su *regularne*, u smislu da su $\pi(U(\alpha))$ i $\pi(V(\beta))$ neprekidne u α i β u jakoj operatorskoj topologiji. *Von Neumannov teorem o jedinstvenosti*[40] nam osigurava da su sve ireducibilne regularne reprezentacije unitarno ekvivalentne. To je fantastičan rezultat: pronalaskom jedne reprezentacije smo *de facto* pronašli sve. Može se pokazati da reprezentacija

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^s) \qquad (U(\alpha)\psi)(x) = e^{i\alpha x}\psi(x) \qquad (V(\beta)\psi)(x) = \psi(\beta + x)$$

zadoljava sve tražene uvjete. Ovo nije ništa drugo doli *Schrödingerova valna mehanika*.

[40]vidjeti teorem 3.2.2 u [21]

6 Dinamika sistema

U ovom poglavlju ćemo proučiti koje promjene je nužno uvesti u naš formalizam da bismo omogućili promatranje ovisnosti očekivanja mjerenja s vremenom. Neka je $\Sigma = (\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle\ ,\ \rangle)$ fizikalni sistem. Htjeli bismo postaviti sljedeće pitanje: "Ako smo u trenutku $t = 0$ pripremili sistem u stanju $\phi \in \mathcal{S}$, kakvo je stanje sistema u trenutku t? Možemo li definirati $\phi(t)$ i kakvo mu značenje valja pridati?".

6.1 *Jednoparametarske grupe $*$-automorfizama*

Podsjetimo se aksioma 1. U našem formalizmu u definiciji stanja leži mogućnost njene pripreme. Da bismo rasvijetlili značenje gornjeg pitanja (ili njen manjak) i pokušali na njega odgovoriti, moramo prvo rasvijetliti značenje pripreme stanja.

Da bismo *pripremili sistem u stanju* ϕ, podrazumijevamo da razlikujemo, te da imamo na raspolaganju, dvije stvari:

1. *Predmet mjerenja*: Dio materijalne stvarnosti, povezan s unaprijed određenim dijelom prostora, u unaprijed određenom referentnom sustavu, na kojem vršimo mjerenje, odnosno, koji dolazi u odnos s mjernim uređajem.

2. *Postupak pripreme*: Sve naprave koje djeluju na prvo, skupa sa svom poviješću njihova djelovanja.

Razlog stavljanja naglaska na element prostora u prvoj stavci je taj što nećemo uvijek znati što je pravi materijalni sastav predmeta mjerenja. Upravo je priprema ono na što možemo utjecati, i utječe na materijalnu komponentu našeg predmeta mjerenja. Što se druge stavke tiče, aksiom 3 nam govori da je moguće da su dvije pripreme ekvivalentne, ako daju iste rezultate mjerenja. Aksiom 1 nam, pak, osigurava da nije moguće da identične pripreme na jednom te istom predmetu rezultiraju različitim stanjima.

Da bismo na dosljedan način mogli govoriti o mjerenju stanja nekog sustava, moramo, u skladu s gornjom razdiobom, osigurati da prilikom mjerenja jedino što djeluje na sustav jest sam mjerni uređaj. No, vidimo da imamo izbor koliko ćemo čekati od trenutka prestanka djelovanja naprava do trenutka mjerenja. To nam omogućava da pridamo značenje simbolu $\phi(t)$: ako je ϕ stanje sustava netom nakon što smo ga pripremili, onda je $\phi(t)$ stanje sustava nakon što je prošlo vrijeme t, bez da je došlo do djelovanja ikakvih naprava u tom vremenu. Primijetimo da ovdje nema kontradikcije s korištenjem riječi *stanje* u vidu nužne povezanosti te riječi s pripremom, budući da se izostanak bilo kakvog djelovanja na predmet mjerenja za to vrijeme bilježi u povijest svog djelovanja na njega.

Ipak, smisao $\phi(t)$ nije potpun dok ne definiramo promjenu očekivanja s mjerenjem. Neka je $A \in \mathcal{O}$ opservabla. Pretpostavimo da smo u trenutku t_1^p pripremili sistem u stanju ϕ i da smo u trenutku $t_1^k > t_1^p$ izvršili mjerenje, s rezultatom $m(A, \phi, t_1^p, t_1^k)$. Dakako, kao i u svim mjerenja, nije moguće savršeno precizno postići $t_1^k - t_1^p = t$. Ponavljajući ovaj postupak, dobivamo niz mjerenja $\{m(A, \phi, t_n^p, t_n^k)\}_n$, gdje je $t_n^k - t_n^p$ uvijek u blizini t.

Aksiom 8. *Neka su ϕ, A i $\{m(A, \phi, t_n^p, t_n^k)\}_n$ kao gore. Tada limesi*

$$t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (t_i^k - t_i^p) \qquad i \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m((A, \phi, t_i^p, t_i^k)$$

konvergiraju.

Definicija 6.1. *Neka su ϕ, A i $\{m(A, \phi, t_n^p, t_n^k)\}_n$ kao gore. Definiramo* očekivanje opservable A u stanju $\phi(t)$*:*

$$\langle A, \phi(t) \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m((A, \phi, t_i^p, t_i^k)$$

Prepoznajemo u gornjoj definiciji *Schrödingerovu sliku* vremenske evolucije. Znamo da postoji i dualna joj, *Heisenbergova slika*, u kojoj je vremenska evolucija opisana u terminima opservabli. Te dvije slike su, u kontekstu fizikalnog iskustva, ekvivalentne: iako u većini slučajeva znamo sa velikom sigurnošću da eksperimentalni uređaji ne mijenjaju svoja svojstva, i još bitnije, da ako mijenjaju onda su nam dobro poznata, ništa ne gubimo ako ne unosimo te dodatne pretpostavke.

Definicija 6.2. *Neka su ϕ, A i $\{m(A, \phi, t_n^p, t_n^k)\}_n$. Definiramo opservablu A_t kao opservablu pridruženu uređaju u trenutku t nakon pripreme stanja ϕ.*

Očekivanje opservable A_t u stanju ϕ jednako je očekivanju opservable A u stanju $\phi(t)$.

Prijeđimo sad na C^*-algebarski opis sistema (opservable će biti označavane malim slovima). Za svaki $t \geq 0$ sad definirajmo preslikavanje $\alpha_t : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ s

$$\alpha_t(a^*a) = (a^*a)_t \,.$$

Za nehermitske elemente $a = \mathrm{Re}(a) + i\mathrm{Im}(a)$, stavljamo $\alpha_t(a) = \alpha_t(\mathrm{Re}(a)) + i\alpha_t(\mathrm{Im}(a))$. Stoga je α_t $*$-homomorfizam.

Primijetimo da smo implicitno pretpostavili da opservabla ostaje dijelom sistema pri vremenskoj evoluciji. Ta pretpostavka je u skladu s (pomalo idealiziranom) pretpostavkom da su i predmet mjerenja i mjerni uređaj izolirani od trenutka pripreme do mjerenja. Sasvim je moguće da je uređaj trajno izmjenjen nakon pojedinog mjerenja, no pretpostavljamo da je dostupno dovoljno mnogo mjernih uređaja. Statističke fluktuacije u pripremi mjernih uređaja su na istoj osnovi kao i fluktuacije pri pripremi stanja: empirijski, one nisu razlučive.

U skladu s tim, pretpostavljamo da je α_t *bijekcija* za svaki t. Ovo nam omogućuje da definiramo i α_t za sve $t \in \mathbb{R}$ (iako pomalo umjetno):

$$\alpha_{-t} = \alpha_t^{-1} \,.$$

Jasno je da je

$$\alpha_{t_1+t_2} = \alpha_{t_1} \circ \alpha_{t_2} = \alpha_{t_2} \circ \alpha_{t_1} \,.$$

Nadalje, veoma je prirodno pretpostaviti da je funkcija $t \mapsto \phi(\alpha_t(a)) = \phi(a_t)$ neprekidna. Sva ova svojstva možemo sažeti u sljedećoj definiciji:

Definicija 6.3. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra.* $*$-automorfizam *na $\mathcal{A}$ je $*$-izomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$. Definiramo* grupu $*$-automorfizama *na $\mathcal{A}$ kao skup svih $*$-automorfizama na $\mathcal{A}$ snabdjeven s operacijom komponiranja, i označavamo ju s $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$.* Jednoparametarska grupa $*$-automorfizama *je homomorfizam grupa $\alpha : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, odnosno, preslikavanje $\alpha : t \mapsto \alpha_t$ takvo da vrijedi*

a) $\alpha_{t_1+t_2} = \alpha_{t_1} \circ \alpha_{t_2}$, *za sve* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

b) $\alpha_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$.

Kažemo da je α slabo neprekidna, *ako je funkcija $t \mapsto \phi(\alpha_t(a))$ neprekidna za svaki $a \in \mathcal{A}$ i za svako $\phi \in S(\mathcal{A})$.*

Aksiom 9. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra pridružena nekom fizikalnom sistemu. Vremenska evolucija opservabli sistema opisana je slabo neprekidnom, jednoparametarskom grupom $*$-automorfizama.*

6.2 Stoneov teorem

Sada kad smo ustanovili kako evoluira neki fizikalni sistem, trebamo istražiti kako se to odražava u određenoj reprezentaciji C^*-algebre pridružene tom sistemu. Neka je $\mathcal{A}$ separabilna unitalna C^*-algebra i $(\mathcal{H}, \pi) = \bigoplus_{\psi \in \mathcal{F}} (\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ vjerna reprezentacija iz Gelfand-Naimarkovog teorema. Neka je $\psi \in \mathcal{F}$ neko čisto stanje. Zanima nas kako u $\mathcal{H}$ evoluira odgovarajuće joj vektorsko stanje x_ψ.

Prisjetimo se kako smo interpretirali GNS reprezentaciju $\pi_\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\psi)$. Odbacili smo tzv. nevidljive opservable sadržane u lijevoj jezgri $\mathcal{N}_\psi = \{a \mid \psi(a^*a) = 0\}$ i izjednačili ih s nulom; $\mathcal{H}_\psi$ je tada upotpunjenje od $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\psi$. Opservable u $\mathcal{A} \setminus \mathcal{N}_\psi$ su, takoreći, jedina moguća fizička obilježja od ψ. Iz tog razloga pretpostavljamo da je $\mathcal{N}_\psi$ *invarijantan na vremenske translacije*[41] Zbog toga, argumentiramo da su π_ψ *i* $\pi_\psi \circ \alpha_t$ *unitarno ekvivalentne reprezentacije.*. Dakle, za svaki $t \in \mathbb{R}$ postoji unitaran operator $U(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je

$$\pi_\psi(\alpha_t(a)) = U(t)^* \pi_\psi(a) U(t) \,.$$

Kako je $t \mapsto \alpha_t$ homomorfizam, mora vrijediti, analogno, $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)$. Nadalje, kako je α slabo neprekidna, može se pokazati[42] da $t \mapsto U(t)$ mora biti neprekidna u jakoj operatorskoj topologiji. Došli smo do sljedećeg pojma:

Definicija 6.4. *Neka je $\mathcal{H}$ separabilan Hilbertov prostor.* Jednoparametarska unitarna grupa *na $\mathcal{H}$ je preslikavanje $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takvo da je $U(t)$ unitarno preslikavanje za sve $t \in \mathbb{R}$, te takvo da vrijedi*

a) $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)$, *za sve* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

b) $U(0) = \mathrm{Id}_\mathcal{H}$.

Kažemo da je U jako neprekidna *ako je funkcija $t \mapsto U(t)x$ neprekidna za svaki $x \in \mathcal{H}$.*

[41] Ne možemo očekivati, primjerice, da će nenabijena čestica odjednom steći električni naboj.
[42] Vidjeti primjer 3.2.35 u [15]

Rezultati koje smo dobili do sada mogu se sabrati u sljedećem teoremu:

Teorem 6.1. *Neka je sistem opisan s C^*-algebrom $\mathcal{A}$ čija je evolucija određena s jednoparametarskom grupom $*$-automorfizama α, te neka je $(\mathcal{H}, \pi) = \bigoplus_{\psi \in \mathcal{F}} (\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ Gelfand-Naimarkova reprezentacija. Evolucija sistema u GNS reprezentaciji $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ dana je s jako neprekidnom jednoparametarskom unitarnom grupom $U(t)$:*

$$\pi_\psi(\alpha_t(a)) = U(t)^* \pi_\psi(a) U(t) \,.$$

U ovom trenutku možemo predvidjeti daljnji razvoj argumentacije: $U(t)$ mora imati svoj infinitezimalni generator. U klasičnoj mehanici, generator vremenske evolucije je *Hamiltonijan* sistema. Na taj način moći ćemo interpretirati generator od $U(t)$ kao kvantni Hamiltonijan i reproducirati Schrödingerovu jednadžbu za ψ.

Definicija 6.5. *Neka je U jako neprekidna jednoparametarska unitarna grupa na $\mathcal{H}$. Definiramo operator G s domenom $D(G)$ koja sadrži sve vektore x takve da limes*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{i} \frac{U(t)x - x}{t}$$

postoji u topologiji induciranom s normom. Za takve x stavljamo

$$Gx = \lim_{t \to 0} \frac{1}{i} \frac{U(t)x - x}{t} \,.$$

Kažemo da je G infinitezimalan generator *od U.*

Teorem 6.2. (Stone) *Neka je U jako neprekidna jednoparametarska unitarna grupa na $\mathcal{H}$. Tada je infinitezimalan generator G od U gusto definiran i $U(t) = e^{itG}$, za sve $t \in \mathbb{R}$. Štoviše, ako je $x \in D(G)$ i stavimo li $x(t) = U(t)x$, tada je $x(t) \in D(G)$ za sve $t \in \mathbb{R}$, te vrijedi:*

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{U(h+t)x - U(t)x}{h} = iU(t)Gx = iGU(t)x = iGx(t) \,.$$

Napomena 6.1. Pretpostavljamo da je $x_\psi \in D(G)$, kao u Stoneovom teoremu. Stavimo $A = \pi_\psi(a)$ i $A(t) = \pi_\psi(\alpha_t(a)) = U(t)^* A U(t)$. Stanje $\psi(t)$ na reprezentaciji odgovara $x_\psi(t) = U(t)x_\psi$, što vidimo prelazeći iz Heisenbergove slike u Schrödingerovu sliku,

$$\langle \alpha_t(a)\,,\,\psi\rangle = \langle A(t)x_\psi\,,\,x_\psi\rangle = \langle AU(t)x_\psi\,,\,U(t)x_\psi\rangle = \langle Ax_\psi(t)\,,\,x_\psi(t)\rangle = \langle a\,,\,\psi(t)\rangle\,.$$

Stoneov teorem nam tada govori da je

$$x'_\psi(t) = iGx_\psi(t)\,.$$

Stavljajući $G = -H/\hbar$, dobili smo *Schrödingerovu jednadžbu*

$$i\hbar\frac{dx_\psi}{dt} = Hx_\psi\,.$$

7 Zaključak

Cilj ovog rada bio je argumentirati da se općeniti fizikalni sistem može reprezentirati unitalnom separabilnom C^*-algebrom $\mathcal{A}$. U tom formalizmu opservable se reprezentiraju hermitskim elementima C^*-algebre, a stanja se reprezentiraju, prikladno, stanjima u C^*-algebarskom smislu: pozitivnim linearnim funkcionalima norme jedan. Pokazali smo da klasični sistemi odgovaraju komutativnim C^*-algebrama, dok kvantni, ili općenitiji, nekomutativnim. Prikladnost ovakvog formalizma poduprijeta je prvo primjenom Gelfandove reprezentacije, čime se komutativne C^*-algebre poistovjećuju s neprekidnim funkcijama na kompaktnom metričkom prostoru, a potom primjenom teorije reprezentacije C^*-algebri, pomoću koje smo izveli sve Dirac-von Neumannove aksiome izuzev onih koji se tiču opservabli položaja i impulsa. Također, nije bilo spomena o problemu mjerenja, ili kolapsu valne funkcije.

Konkretno, pomoću Gelfand-Segal-Naimarkove konstrukcije, svakom stanju $\phi \in S(\mathcal{A})$ bilo je moguće pridružiti separabilan Hilbertov prostor $\mathcal{H}_\phi$ i $*$-homomorfizam $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$ pomoću kojih se očekivanje opservable a u stanju ϕ moglo prikazati u prepoznatljivom obliku: $\phi(a) = \langle \pi_\phi(a) x_\phi\, ,\, x_\phi \rangle$. Pritom, vjerujemo da smo upravo pomoću identifikacije C^*-algebre s fizikalnim sistemom našli moguću fizikalnu interpretaciju same GNS konstrukcije.

Pojam čistih stanja i miješanih stanja bilo je moguće definirati koristeći gore spomenutu fizikalnu interpretaciju (čista stanja su ona čije su lijeve jezgre maksimalni lijevi ideali C^*-algebre), te korespondenciju s klasičnom mehanikom, bez postuliranja *ad hoc* apstraktnog prostora stanja. Pokazali smo da čista stanja induciraju ireducibilne GNS reprezentacije, te pomoću direktne sume ireducibilnih reprezentacija smo izgradili vjernu reprezentaciju C^*-algebre na separabilnom Hilbertovom prostoru. Time smo uspijeli iz naših aksioma, pridružiti svakom sistemu separabilan Hilbertov prostor, a svakoj opservabli ograničen hermitski operator na tom prostoru. Nije bilo moguće svakom čistom stanju na $\mathcal{A}$ dati oblik vektorskog stanja na $\pi(\mathcal{A})$ kao u DvN aksiomu 3, već je to učinjeno za prebrojiv wk^*-gust podskup skupa čistih stanja. Argumentirali smo da je to fizikalno sasvim zadovoljavajuće. Putem te "aproksimacije", pokazali smo kako se fizikalno općenitim stanjima pridružuju operatori gustoće. U tome nam je pomogla geometrijska intuicija iz klasičnog Krein-Milmanovog teorema. Kratko smo komentirali kako u našem formalizmu odrediti vjerojatnost da rezultat eksperimenta bude u nekom skupu i usporedili ga s aksiomom standardnog formalizma, pokazali zašto su komutirajuće opservable kompatibilne, te skicirali postupak igradnje tzv. Weylove C^*-algebre, koja bi trebala reprezentirati kvantnu česticu.

Konačno, argumentirajući kako se dinamika sistema u našem formalizmu može opisati jednoparametarskom grupom $*$-automorfizama, koristeći Stoneov teorem smo uspjeli izvesti Schrödingerovu jednadžbu.

C^*-formalizam algebarske mehanike može naći svoje korijene već u Jordanovom radu [6], a njen pravi začetak nalazi se u radu Segala [8] iz 1947. godine. U tom pogledu, gotovo ništa u ovom radu nije novo. U uvodu smo, analizirajući ideje koje su prethodile razvitku matrične mehanike, našli slaganje u Heisenbergovim idejama s pristupom koji ovdje usvojen pri aksiomatizaciji matematičke strukture opisa fizikalnog sistema: formalizam teorije mora se izgraditi na vezama između izmjerljivih veličina. U tom smislu, operacionalna definicija opservabli i stanja, koja je u sukusu ovog formalizma, može se smatrati krajnjom apstraktnom formulacijom Heisenbergovih ideja. Zato nam se čini da su, u konačnici, te ideje vodile do gotovo istog formalizma. To bi moglo sugerirati da su specifičnosti kvantnog formalizma, Hilbertovi prostori, hermitski operatori itd., više posljedica eksperimentalnih okolnosti i metoda prilagođenih činjenici da se moramo osloniti na statistička razmatranja, nego što je on jezik specifičan za atomske pojave.

Strogo inzistiranje na operacionalnosti vodi, ipak, u prvom redu do zaprijeka koji otežavaju ulijevanju sadržaja u teoriju. To je ilustrirano na primjeru opservabli položaja i impulsa. U drugom redu, ono vodi do matematičkih metoda koje nisu standardne za fizičarsku edukaciju, što ih čini manje dostupnima, iako smatramo da C^*-algebarski formalizam može pomoći u konceptualnom shvaćanju kvantne mehanike. Također, formalizam kvantne mehanike je veoma uspješan sam po sebi pa se postavlja pitanje o potrebitosti ovog formalizma. Međutim, smatramo da ideje koje su ovdje primijenjene mogu poslužiti kao primjer potencijalno korisnog načina suočavanja s novim fizikalnim iskustvom. Također, algebarska kvantna teorija polja za mnoge je obećavajuć pristup kvantnoj teoriji polja općenito.

Dodaci

Dodatak A Algebra

U našem radu se bavimo samo algebrama nad poljem kompleksnih brojeva.

Definicija A.1. Algebra *je* $\mathcal{A}$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{C}$ *na kojem je zadana binarna operacija*

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\,, \qquad (a,b) \mapsto ab\,,$$

koja je bilinearna i asocijativna, odnosno za koju vrijedi

$$a(bc) = (ab)c\,,$$

za sve $a, b, c \in \mathcal{A}$.

Ako postoji element $1 \in \mathcal{A}$ *takav da je* $a = 1a = a1$, *za sve* $a \in \mathcal{A}$, *zovemo ga* jedinica *za* $\mathcal{A}$. *Ako postoji jedinica za algebru* $\mathcal{A}$, *kažemo da je* $\mathcal{A}$ unitalna *algebra.*

Neka je $\mathcal{A}$ *unitalna algebra i* $a \in \mathcal{A}$. *Ako postoji element* $a^{-1} \in \mathcal{A}$ *takav da je* $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, *kažemo da je* a invertibilan*, a element* a^{-1} *zovemo* inverz *od* a. *Skup svih invertibilnih elemenata od* $\mathcal{A}$ *označavamo s* $\mathcal{A}^{\times}$.

Ako jedinica postoji, ona je jedinstvena. Ako postoji inverz elementa, on je jedinstven. Podsjetimo se pojma kvocijentnog prostora.

Propozicija A.1. *Neka je* $\mathcal{X}$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *i* $\mathcal{M}$ *potprostor od* $\mathcal{X}$. *Za svaki* $x \in \mathcal{X}$ *definiramo skup* $x + \mathcal{M} = \{x + y \mid y \in \mathcal{M}\}$ *i familiju svih takvih skupova označimo s* $\mathcal{X}/\mathcal{M}$. *Tada je* $x + \mathcal{M} = y + \mathcal{M}$ *akko je* $x - y \in \mathcal{M}$. *Definiramo operacije:*

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}/\mathcal{M}) \times (\mathcal{X}/\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathcal{X}/\mathcal{M}\,, \qquad (x+\mathcal{M}) + (y+\mathcal{M}) = (x+y) + \mathcal{M}\,,\\ \mathbb{F} \times (\mathcal{X}/\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathcal{X}/\mathcal{M}\,, \qquad \lambda(x+\mathcal{M}) = \lambda x + \mathcal{M}\,.\end{aligned}$$

Ove operacije su dobro definirane i s njima $\mathcal{X}/\mathcal{M}$ *postaje vektorski prostor.* $y + \mathcal{M} = 0 + \mathcal{M} = \mathcal{M}$ *je neutralan element akko je* $y \in \mathcal{M}$. $\mathcal{X}/\mathcal{M}$ *se zove* kvocijentni vektorski prostor.

Definicija A.2. *Neka je* $\mathcal{A}$ *algebra i* $\mathcal{I}$ *vektorski potprostor od* $\mathcal{A}$. *Tada kažemo da je* $\mathcal{I}$

a) lijevi ideal *ako je* $\mathcal{A}\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$,

b) desni ideal *ako je* $\mathcal{I}\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$,

c) (obostrani) ideal *ako je* $\mathcal{I}$ *i lijevi i desni ideal.*

Lijevi i desni ideali se ponekad zovu jednostrani *ideali. Ideal je* trivijalan *ako je jednak* $\{0\}$ *ili* $\mathcal{A}$ *. Ideal je* pravi *ako nije trivijalan. Pravi ideal je* maksimalan *ako nije sadržan u nekom pravom idealu od* $\mathcal{A}$ *.*

Propozicija A.2. *Neka je* $\mathcal{A}$ *algebra i* $\mathcal{I}$ *ideal u* $\mathcal{A}$ *. Definiramo množenjem na kvocijentnom prostoru* $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ *na sljedeći način:*

$$(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \times (\mathcal{A}/\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}\,, \qquad (a+\mathcal{M})(b+\mathcal{M}) = ab + \mathcal{M}\,.$$

Tada je ova operacija dobro definirana i $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ *s množenjem kao gore postaje algebra.* $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ *se zove* kvocijentna algebra.

Dodatak B Topologija

B.1 Osnove

Definicija B.1. *Neka je* X *skup i* $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ *familija podskupova od* X *takva da vrijedi:*

a) $\varnothing\,,\, X \in \mathcal{T}$,

b) Ako su $U_1\,, \ldots\,, U_n \in \mathcal{T}$ *, tada je* $U_1 \cap \,\ldots.\, \cap U_n \in \mathcal{T}$,

c) Ako je $\{U_i\}_{i\in T} \subset \mathcal{T}$ *proizvoljna familija podskupova od* X *, tada je* $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ *.*

Tada kažemo da je $\mathcal{T}$ topologija *na* X *i da je* $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. *Elementi od* $\mathcal{T}$ *su* otvoreni *skupovi, a njihovi komplementi su* zatvoreni. *Ako je* $x \in X$ *i* $U \in \mathcal{T}$ *skup koji sadrži* x *, kažemo da je* U okolina *od* x *.*

Ako je $E \subset X$ *proizvoljan, najmanji zatvoren skup koji sadrži* E *zove se* zatvarač *od* E *i označavamo ga s* $\overline{E}$ *ili* $\mathrm{cl}E$ *.*

Ako je $E \subset X$ *proizvoljan, najveći otvoren skup koji je sadržan u* E *zove se* interior *od* E *i označavamo ga s* $\mathrm{Int}E$

Definicija B.2. *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \longrightarrow Y$ funkcija. Kažemo da je* f neprekidna *ako je za svaki $U \subset Y$ otvoren, $f^{-1}(U)$ također otvoren.*

Ako je $f : X \longrightarrow Y$ neprekidna bijekcija takva da joj je inverz također neprekidan, kažemo da je f homeomorfizam*, te da su u tom slučaju X i Y* homeomorfni *prostori.*

Homeomorfni prostori mogu se smatrati jednakima.

Propozicija B.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $Y \subset X$ podskup od X. Definiramo*

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Tada je $\mathcal{T}_Y$ topologija i zove se relativna topologija *na Y inducirana topologijom $\mathcal{T}$ na X, a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ je* topološki potprostor *od $(X, \mathcal{T})$.*

Definicija B.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ familija otvorenih okolina od x takva da svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in \mathcal{B} \subset \mathcal{U}$. $\mathcal{B}$ se zove* baza topologije *(ili baza za topologiju) $\mathcal{T}$.*

Neka je $x \in X$ i $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{T}$ familija otvorenih skupova takva da za svaku otvorenu okolinu U od x postoji $B \in \mathcal{B}_x$ takav da je $x \in B \subset U$. $\mathcal{B}_x$ se zove baza okolina *od x.*

Ako $(X, \mathcal{T})$ ima prebrojivu bazu okolina, kažemo da zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.

Ponekad je za dani skup X korisno krenuti sa familijom podskupova $\mathcal{B}$ i definirati topologiju $\mathcal{T}$ na X takvu da je $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{T}$.

Propozicija B.2. *Neka je X skup i $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ takva da vrijedi:*

a) $\bigcup \mathcal{B} = X$,

b) Za svaka dva $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ s nepreznim presjekom i za sve $x \in B_1 \cap B_2$ postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Tada je $\mathcal{T}$, familija svih unija elemenata iz $\mathcal{B}$, topologija i zove se topologija generirana *s $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ je baza za $\mathcal{T}$.*

Definicija B.4. *Neka je M skup i $d : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$ funkcija takva da vrijedi:*

a) $d(x, y) = 0$ *akko* $x = y$, *za sve* $x, y \in M$,

b) $d(x, y) = d(y, x)$, *za sve* $x, y \in M$, *c)* (Nejednakost trokuta) $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$, *za sve* $x, y, z \in M$.

d *se zove* metrika *na* M *i* (M,d) *se zove* metrički prostor. *Za* $x \in M$ *i* $r > 0$ *definiramo* otvorenu kuglu oko x radijusa r :

$$B(x,r) = \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$$

Topologija $\mathcal{T}$ *generirana sa familijom* $\mathcal{B}$ *svih otvorenih kugli u* M *zove se* metrička topologija*, ili* topologija inducirana metrikom. *Uvijek ćemo smatrati da je metrički prostor snabdjeven metričkom topologijom.*

Ako je $U \subset M$ *i ako postoji* $C > 0$ *takav da je* $d(x,y) \le C$, *za sve* $x, y \in U$, *kažemo da je* U ograničen.

Ako je $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor koji je homeomorfan nekom metričkom prostoru, kažemo da je on* metrizabilan.

Definicija B.5. *Neka je* X *metrički prostor i* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* X . *Ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $N \in \mathbb{N}$ *takav da za sve* $n, m > N$ *vrijedi* $d(x,y) < \varepsilon$, *kažemo da je* $\{x_n\}_n$ Cauchyjev niz.

Ako postoji $x_0 \in M$ *takav da za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $N \in \mathbb{N}$ *takav da je za sve* $n > N$ $d(x_n, x_0) < \varepsilon$, *kažemo da je* $\{x_n\}_n$ konvergentan *niz i da konvergira k* x_0 .

Ako svi Cauchyjevi nizovi u X *konvergiraju, kažemo da je* X potpun *metrički prostor.*

Ako je na $\mathbb{R}^n$ definirana funkcija $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$, tada je d metrika. Metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d)$, je jedan od glavnih izvora intuicije koju imamo o topološkim prostorima. $(\mathbb{R}^n, d)$, zovemo n-dimenzionalni euklidski prostor.

Definicija B.6. *Neka je* X *topološki prostor. Ako za podskup* $G \subset X$ *vrijedi* $\overline{G} = X$, *kažemo da je* G gust *u* X . *Ako postoji prebrojiv podskup koji je gust u* X , *kažemo da je* X separabilan.

Teorem B.1. *Neka je* X *metrički prostor i* Y *njegov potprostor. Ako je* X *separabilan, tada je i* Y *separabilan.*

Definicija B.7. *Neka je* X *topološki prostor. Ako za svake dvije različite točke* $x, y \in X$ *postoje otvorene okoline* U *od* x *i* V *od* y *takve da je* $U \cap V = \varnothing$, *kažemo da je* X Hausdorffov *prostor*

Propozicija B.3. *Metrički prostori su Hausdorffovi i zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti.*

Definicija B.8. *Neka je X topološki prostor i $\mathcal{U}$ neka familija otvorenih podskupova od X . Ako je V podskup od X takav da je $V \subset \bigcup \mathcal{U}$, kažemo da je $\mathcal{U}$* otvoren pokrivač *od V i da $\mathcal{U}$* pokriva *V . Ako je $\mathcal{U}'$ podfamilija od $\mathcal{U}$ koja i dalje pokriva V , kažemo da je $\mathcal{U}'$* potpokrivač *otvorenog pokrivača $\mathcal{U}$.*

Ako je $K \subset X$ sa svojstvom da svaki svaki otvoren pokrivač od K ima konačan potpokrivač, kažemo da je K kompaktan.

Sljedeći teorem karakterizira kompaktne skupove na euklidskom prostoru.

Teorem B.2. (Heine-Borel) *Podskup K euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ je kompaktan akko je ograničen i zatvoren.*

Teorem B.3. *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \longrightarrow Y$ neprekidna funkcija. Ako je $K \subset X$ kompaktan, tada je $f(K) \subset Y$ kompaktan. Posebno, ako je $Y \subset \mathbb{R}$, f postiže minimum i maksimum.*

Teorem B.4. *Neka je X kompaktan metrički prostor. Tada svaki niz u X ima konvergentan podniz.*

Teorem B.5. *Neka je X kompaktan metrički prostor. Tada je on separabilan.*

Propozicija B.4. *Neka je X topološki prostor.*

a) Ako je X kompaktan i $Z \subset X$ zatvoren, tada je i Z kompaktan.

b) Ako je X Hausdorffov i $K \subset X$ kompaktan, tada je K zatvoren.

Propozicija B.5. *Neka je X kompaktan i Hausdorffov prostor i neka je $U \subset X$ otvoren i $K \subset U$ kompaktan podskup. Tada postoji otvoren V takav da je $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Teorem B.6. (Urysohnova lema) *Neka je X kompaktan i Hausdorffov prostor, $U \subset X$ otvoren i $K \subset U$ kompaktan. Tada postoji neprekidna funkcija $f : X \longrightarrow [0, 1]$ takva da je $f = 1$ na K i $\operatorname{supp}(f) = \overline{X \setminus f^{-1}(\{0\})} \subset U$.*

Teorem B.7. (Stone-Weierstrass) *Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor i $\mathcal{A}$ zatvorena $*$-podalgebra od $C(X)$ koja* separira točke*: za svake dvije različite točke $x, y \in X$ postoji $f \in \mathcal{A}$ takva da je $f(x) \neq f(y)$. Tada postoje točno dvije mogućnosti: ili je $\mathcal{A} = C(X)$ ili postoji $x_0 \in X$ takav da je $\mathcal{A} = \{f \in C(X) \mid f(x_0) = 0\}$.*

B.2 Mreže

Definicija B.9. Usmjeren *skup je skup I snabdjeven s binarnom relacijom $\lesssim$ takvom da je*

a) $i \lesssim i$ *, za svaki* $i \in I$ *,*

b) Ako je $i \lesssim j$ *i* $j \lesssim k$ *, tada je* $i \lesssim k$ *,*

c) Ako su $i, j \in I$ *, tada postoji* $k \in I$ *takav da je* $i \lesssim k$ *i* $j \lesssim k$ *.*

Pišemo $j \gtrsim i$ akko je $i \lesssim j$. Ako je X topološki prostor, preslikavanje $i \mapsto x_i$ iz usmjerenog skupa I u X zove se mreža. *Mrežu obično označavamo s $\{x_i\}_{i \in I}$.*
Ako je $\{x_i\}_{i \in I}$ mreža na X i $x \in X$ takav da za svaku okolinu U od x postoji $i_0 \in I$ takav da je $x_i \in U$, za sve $i \gtrsim i_0$, tada kažemo da $\{x_i\}_{i \in I}$ konvergira *k x i pišemo $x_i \to x$ ili $\lim_i x_i = x$.*

Skup prirodnih brojeva je usmjeren skup i stoga su nizovi mreže. Mreže nam omogućuju poopćavanje nizovnih karakterizacija neprekidnosti, zatvorenosti i kompaktnosti na prostorima koji ne zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti.

Teorem B.8. *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \longrightarrow Y$ funkcija. Tada je f neprekidna akko $f(x_i) \to f(x)$ kad god mreža $\{x_i\}_{i \in I}$ konvergira k x . Ako X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, mrežu možemo zamijeniti s nizom.*

Teorem B.9. *Neka je X topološki prostor i $Z \subset X$. Tada je Z zatvoren akko je $x \in Z$ kad god je $\{x_i\}_{i \in I}$ mreža sadržana u Z koja konvergira k x . Ako X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, mrežu možemo zamijeniti s nizom.*

Dodatak C Normirani prostori

Preuzeto iz [16].

C.1 Osnove

Definicija C.1. *Neka je $\mathcal{X}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) i $\|\cdot\| : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ takva da za sve $x, y, z \in \mathcal{X}$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi:*

a) $\|x\| \geq 0$ *, s tim da je* $\|x\| = 0$ *akko je* $x = 0$

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

c) (Nejednakost trokuta) $\|x+y\| \leq \|x+z\| + \|z+y\|$.

Ova funkcija zove se norma *na* $\mathcal{X}$. *Uređen par* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *vektorskog prostora i norme na njemu zove se* normiran prostor. *Skup svih* $x \in \mathcal{X}$ *takvih da je* $\|x\| \leq 1$ *ćemo označavati s* $\mathrm{ball}\mathcal{X}$.

Na normiranom prostoru uvijek imamo definiranu metriku $d(x,y) = \|x-y\|$. Kažemo da je to metrika inducirana normom i normirani prostori će uvijek biti snabdijeveni s topologijom induciranom s tom metrikom.

Definicija C.2. *Ako je* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *normiran prostor koji je potpun s obzirom na metriku induciranu normom, kažemo da je on* Banachov prostor.

Definicija C.3. *Neka su* $\mathcal{X}$ *i* $\mathcal{Y}$ *normirani prostori nad poljem* $\mathbb{F}$, *te* $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ *funkcija takva da vrijedi* $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, *za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *i sve* $x, y \in \mathcal{X}$. *Kažemo da je* T linearan operator, *ili da je* $\mathbb{F}$*-linearan. Ponekad pišemo* $T(x) = Tx$. *Ako je* $\mathcal{Y} = \mathbb{F}$, *kažemo da je* T linearan funkcional *na* $\mathcal{X}$.
Ako postoji konstanta $M \geq 0$ *takva da za sve* $x \in \mathcal{X}$ *vrijedi* $\|Tx\| \leq M \, \|x\|$, *kažemo da je* T ograničen *i definiramo funkciju*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in \mathrm{ball}\mathcal{X}\} .$$

Skup svih ograničenih operatora iz $\mathcal{X}$ *u* $\mathcal{Y}$ *označavamo s* $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *i pišemo* $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \mathcal{B}(\mathcal{X})$. *Skup svih ograničenih linearnih funkcionala na* $\mathcal{X}$ *označavamo s* $\mathcal{X}^*$.

Propozicija C.1. *Neka su* $\mathcal{X}$ *i* $\mathcal{Y}$ *normirani prostori i* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. *Tada je*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| / \|x\| \mid x \in \mathcal{X} \, , \, x \neq 0\} \\ &= \inf\{M \geq 0 \mid \|Tx\| \leq M \, \|x\| \, , \text{ za sve } x \in \mathcal{X}\} , \end{aligned}$$

i ta funkcija je norma na $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. $\|\cdot\|$ *zovemo* operatorskom normom.

Propozicija C.2. *Neka su* $\mathcal{X}$ *i* $\mathcal{Y}$ *normirani prostori i* $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ *linearan operator. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) T je ograničen,

b) T je neprekidan,

c) T je neprekidan u 0.

Teorem C.1. *Neka je $\mathcal{X}$ normiran i $\mathcal{Y}$ Banachov prostor. Tada je $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ Banachov prostor. Posebno, $\mathcal{X}^*$ je uvijek Banachov prostor.*

Lema C.1. *Neka je $\mathcal{X}$ vektorski prostor nad $\mathbb{C}$.*

a) Ako je $\phi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linearan funkcional, tada je $\Phi(x) = \phi(x) - i\phi(ix)$ $\mathbb{C}$-linearan funkcional i $\phi = \mathrm{Re}\Phi$.

b) Ako je $\psi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linearan funkcional takav da je $\phi = \mathrm{Re}\psi$, tada je $\Phi = \psi$.

c) Ako je $\mathcal{X}$ normiran, tada je $\|\phi\| = \|\Phi\|$.

Teorem C.2. (Hahn-Banach) *Neka je $\mathcal{X}$ normiran prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $\mathcal{M}$ vektorski potprostor od $\mathcal{X}$ i $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{F}$ ograničen linearan funkcional. Tada postoji $\Phi \in \mathcal{X}^*$ koji proširuje ϕ i $\|\Phi\| = \|\phi\|$.*

Teorem C.3. *Neka je $\mathcal{X}$ normiran prostor. Tada postoji Banachov prostor $\widehat{\mathcal{X}}$ i linearna izometrija $U : \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}$ takva da je $U(\mathcal{X})$ gust u $\widehat{\mathcal{X}}$. $\widehat{\mathcal{X}}$ je jedinstven do na izometrički izomorfizam.*

Definicija C.4. *Neka su $\mathcal{X}$, $\widehat{\mathcal{X}}$ i U kao u prethodnom teoremu. $\widehat{\mathcal{X}}$ se zove* upotpunjenje *od X i $\mathcal{X}$ poistovjećujemo s $U(\mathcal{X})$, gustim podskupom od $\widehat{\mathcal{X}}$.*

Teorem C.4. *Neka je $\mathcal{X}$ Banachov prostor i $\mathcal{M}$ njegov gust potprostor. Ako je $T : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X}$ ograničen linearan operator, tada postoji jedinstveni $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ koji proširuje T i takav da je $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$.*

C.2 Slabe topologije

Rezultati ovog dodatka zaslužuju nešto više pojašnjenja. Ako operator između normiranih prostora konvergira po točkama, on ne mora konvergirati u normi. Poželjno je, stoga, smanjiti topologiju prostora operatora da bi limes operatora koji konvergiraju k nekom operatoru po točkama konvergirao u toj topologiji i ispitati njena svojstva.

Definicija C.5. *Ako je X neki skup, te $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dvije topologije na X takve da je $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, kažemo da je $\mathcal{T}_1$* slabija *od $\mathcal{T}_2$, te da je $\mathcal{T}_2$* jača *od $\mathcal{T}_1$.*

S druge strane, ako imamo familiju funkcija $\mathcal{F} = \{f_i : X \longrightarrow Y \mid i \in I\}$ s nekog skupa X u neki topološki prostor Y i zahtijevamo da topologija na X bude takva da su sve $f \in \mathcal{F}$ neprekidne, moramo osigurati da X ima dovoljno otvorenih skupova, stoga nije korisno proizvoljno smanjivati topologiju. Imamo sljedeću definiciju:

Definicija C.6. *Neka je $(Y, \mathcal{T})$ topološki prostor, X skup i $\mathcal{F} = \{f_i : X \longrightarrow Y \mid i \in I\}$ familija funkcija. Najslabija topologija na X takva da su sve funkcije f_i neprekidne zove se* slaba topologija *generirana s $\mathcal{F}$.*

Definicija C.7. *Neka je $\mathcal{X}$ normiran prostor. Slaba topologija na $\mathcal{X}$ generirana s $\mathcal{X}^*$ zove se jednostavno* slaba *topologija i označava se s wk.*

Za svaki $x \in \mathcal{X}$ definiramo $\hat{x} : \mathcal{X}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ s $\hat{x}(f) = f(x)$. Slaba topologija na $\mathcal{X}^*$ generirana s $\{\hat{x} \mid x \in \mathcal{X}\}$ zove se slaba-zvijezda *topologija i označava se s wk^*.*

Budući da je $\{\hat{x} \mid x \in \mathcal{X}\}$ obično strogo sadržan u $\mathcal{X}^{**}$, wk^* topologija na $\mathcal{X}^*$ je slabija od slabe topologije.

Definicija C.8. *Neka je $\mathcal{X}$ vektorski prostor. Skup $K \subset \mathcal{X}$ je* konveksan *ako je segment $[x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$ sadržan u K, za sve $x, y \in K$.*

Definicija C.9. *Neka je $\mathcal{X}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $\mathcal{T}$ topologija na $\mathcal{X}$ takva da je zbrajanje i množenje skalarima neprekidno. Tada se $\mathcal{X}$ zove* topološki vektorski prostor. *Ako $\mathcal{T}$ ima bazu konveksnih skupova, kažemo da je $\mathcal{X}$* lokalno konveksan prostor.

Prostori $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}^*$ s topologijom induciranom normom ili s wk i wk^* topologijama primjeri su lokalno konveksnih prostora. Posebno, bazu za wk^* topologiju čine konačni presjeci skupova

$$U_{fx\varepsilon} = \{g \in \mathcal{X}^* \mid |\hat{x}(g-f)| = |g(x) - f(x)| < \varepsilon\},$$

gdje su $f \in \mathcal{X}^*$, $x \in \mathcal{X}$ i $\varepsilon > 0$.

Propozicija C.3. *Neka je $\mathcal{X}$ normiran prostor. Tada mreža $(f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{X}^*$ konvergira k $f \in \mathcal{X}^*$ u wk^* akko $f_i(x) \to f(x)$, za svaki $x \in \mathcal{X}$.*

Teorem C.5. *Neka je $\mathcal{X}$ normiran prostor. Tada je $(\mathcal{X}^*, wk^*)^* = \mathcal{X}$, odnosno, neprekidni funkcionali na $(\mathcal{X}^*, wk^*)$ su upravo evaluacije, odnosno funkcionali oblika $f \mapsto f(x)$, za $x \in \mathcal{X}$.*

Definicija C.10. *Neka je $\mathcal{X}$ normiran prostor. Slaba topologija na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ generirana s funkcijama $T \mapsto Tx$, za sve $x \in \mathcal{X}$, zove se* jaka operatorska topologija[43] *i označava se sa SOT.*

$(\mathcal{B}(\mathcal{X}), SOT)$ je lokalno konveksan prostor s bazom koju čine konačni presjeci skupova

$$U_{Tx\varepsilon} = \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \mid \|Tx - Sx\| < \varepsilon\},$$

gdje su $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $x \in \mathcal{X}$ i $\varepsilon > 0$.

Propozicija C.4. *Neka je $\mathcal{X}$ normiran prostor. Tada mreža $(T_i)_{i \in I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ konvergira k $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ u SOT akko $T_i(x) \to T(x)$, za svaki $x \in \mathcal{X}$.*

Teorem C.6. (Banach-Alaoglu) *Neka je $\mathcal{X}$ normiran prostor. Tada je $\operatorname{ball}(\mathcal{X}^*)$ wk^*-kompaktan.*

Definicija C.11. *Neka je K konveksan podskup vektorskog prostora $\mathcal{X}$ i $x \in K$ takva da nije sadržana ni u jednom pravom segmentu koji je u potpunosti sadržan u K, odnosno*

$$x = ty + (1-t)z,\ y, z \in K,\ t \in (0,1) \implies x = y = z.$$

Tada za x kažemo da je ekstremna točka *od K. Skup svih ekstremnih točaka od K označavamo s $\operatorname{ext}(K)$.*

Neka je $F \subset K$ neprazan i konveksan. Ako F ima svojstvo da jedini segmenti u K koji sijeku F su oni koji su u potpunosti sadržani u F, odnosno

$$x = ty + (1-t)z \in F,\ y, z \in K,\ t \in (0,1) \implies y, z \in F$$

tada kažemo da je F stranica *od K.*

Definicija C.12. *Neka je $\mathcal{X}$ lokalno konveksan prostor i $S \subset \mathcal{X}$. Definiramo* konveksnu ljusku *od S, skup $\operatorname{co}(S)$, kao najmanji konveksni skup koji sadrži S. Definiramo*

[43] Jaka operatorska topologija je slabija od topologije inducirane normom, ali zove se jakom jer postoje još i slabije topologije koje se promatraju na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Oznaka SOT dolazi od engl. *strong operator topology*.

zatvorenu konveksnu ljusku *od* S *, skup* $\overline{\mathrm{co}}(S)$ *, kao najmanji zatvoreni konveksni skup koji sadrži* S *.*

Propozicija C.5. *Neka je* $\mathcal{X}$ *lokalno konveksan prostor i* $S \subset \mathcal{X}$ *. Tada je*

$$\mathrm{co}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \mid n \in \mathbb{N}\,,\, 0 \leq t_i \leq 1\,,\, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\,,\, x_i \in S \right\}\,,$$

te vrijedi $\overline{\mathrm{co}}(S) = \mathrm{cl}(\mathrm{co}(S))$ *.*

Teorem C.7. *Neka je* $\mathcal{X}$ *kompleksan lokalno konveksan prostor, te* A *i* B *dva disjunktna zatvorena konveksna skupa u* $\mathcal{X}$ *, takav da je* B *još kompaktan. Tada postoje neprekidan linearan funkcional* $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ *,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i* $\varepsilon > 0$ *takvi da je*

$$\mathrm{Re} f(a) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon \leq \mathrm{Re} f(b)\,,$$

za sve $a \in A$ *i* $b \in B$ *.*

Teorem C.8. (Krein-Milman) *Neka je* $\mathcal{X}$ *lokalno konveksan prostor i* $K \subset \mathcal{X}$ *neprazan, kompaktan i konveksan podskup od* $\mathcal{X}$ *. Tada je skup ektremnih točaka od* K *neprazan i vrijedi*

$$K = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}(K))$$

Teorem C.9. *Neka je* $\mathcal{X}$ *Banachov prostor. Tada je* $\mathrm{ball}\mathcal{X}^*$ wk^**-metrizabilna akko je* $\mathcal{X}$ *separabilan.*

Dodatak D Hilbertovi prostori i operatori na Hilbertovim prostorima

D.1 Hilbertovi prostori

Definicija D.1. *Neka je* $\mathcal{X}$ *vektorski prostor nad* $\mathbb{C}$ *i* $\sigma : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ *funkcija koja je linearna u prvom i antilinearna u drugom argumentu. Za* σ *kažemo da je* seskvilinearna forma*. Ako je* $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)^*$ *, za sve* $x, y \in \mathcal{X}$ *, kažemo da je* σ hermitska*, a ako je za sve* $x \in \mathcal{X}$ $\sigma(x,x) \geq 0$ *, kažemo da je* σ pozitivna*.*

Teorem D.1. *Neka je* $\mathcal{X}$ *vektorski prostor nad* $\mathbb{C}$ *i* σ *seskvilinearna forma na* $\mathcal{X}$ *. Tada vrijedi* *a)* *σ je hermitska akko je $\sigma(x,x) \in \mathbb{R}$ za sve $x \in \mathcal{X}$,*

b) (Schwarz-Cauchy-Bunjakowski) *Ako je σ pozitivna, za sve $x, y \in \mathcal{X}$ vrijedi*

$$|\sigma(x,y)|^2 \leq \sigma(x,x)\sigma(y,y)\,.$$

Definicija D.2. *Neka je $\mathcal{X}$ vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ i $\langle\,,\,\rangle$ pozitivna seskvilinearna forma takva da je $\langle x,x\rangle = 0$ samo kad je $x = 0$. Takva seskvilinearna forma zove se* skalarni produkt. *Vektorski prostor sa skalarnim produktom zove se* unitaran *prostor.*

Funkcija $x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$ definira normu na unitarnom prostoru. Kažemo da je ta norma inducirana skalarnim produktom.

Definicija D.3. *Ako je $\mathcal{H}$ unitaran prostor takav da s obzirom na normu induciranu skalarnim produktom Banachov prostor, $\mathcal{H}$ zovemo* Hilbertov *prostor.*

Teorem D.2. *Neka je $\mathcal{X}$ unitaran prostor sa skalarnim produktom $\langle\,,\,\rangle$ i $\mathcal{H}$ njegovo upotpunjenje (definicija C.4) s obzirom na normu induciranu skalarnim produktom. Tada postoji jedinstven skalarni produkt $\langle\,,\,\rangle_{\mathcal{H}}$ na $\mathcal{H}$ takav da je $\langle x,y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x,y\rangle$ za sve $x, y \in \mathcal{X}$ i norma na $\mathcal{H}$ je inducirana tim skalarnim produktom.*

Definicija D.4. *Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{H}$ kao u prethodnom teoremu. $\mathcal{H}$ se zove* Hilbertovo upotpunjenje *od $\mathcal{X}$.*

Definicija D.5. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $x, y \in \mathcal{H}$. Kažemo da su x i y* ortogonalni *ako je $\langle x\,,y\rangle = 0$. Ako su $U \subset \mathcal{H}$, definiramo njegov* ortogonalni komplement *$U^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x\,,y\rangle = 0\,,\text{ za sve } y \in U\}$. Ako je $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ takav da je norma svih elemenata iz $\mathcal{E}$ jednaka jedan i da su svi elementi međusobno ortogonalni, kažemo da je $\mathcal{E}$* ortonormiran *skup.*

Propozicija D.1. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $U \subset \mathcal{H}$. Tada je $U^{\perp}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$. Ako je $\mathcal{M}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$, tada je $(\mathcal{M}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{M}$.*

Teorem D.3. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{M}$ netrivijalan zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$. Za svaki $x \in \mathcal{M}$ postoje jedinstveni $x_1 \in \mathcal{M}$ i $x_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$ takvi da je $x = x_1 + x_2$. Operator $P_{\mathcal{M}} : x \mapsto x_1$ je linearan, ograničen s normom 1 i idempotentan, odnosno, $P_{\mathcal{M}}^2 = P_{\mathcal{M}}$. Nadalje, $\mathrm{ran} P_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$ i $\ker P_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}^{\perp}$.*

Definicija D.6. *Neka su $\mathcal{H}, \mathcal{M}$ i $P_{\mathcal{M}}$ kao u prethodnom teoremu. $P_{\mathcal{M}}$ se zove* ortogonalna projekcija *na $\mathcal{M}$, ili samo projekcija na $\mathcal{M}$.*

Definicija D.7. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Maksimalan ortonormiran skup $\mathcal{E}$ u $\mathcal{H}$ zove se* ortonormirana baza *(ili samo* baza*) za $\mathcal{H}$. Kardinalitet baze $\mathcal{E}$ je* dimenzija *prostora $\mathcal{H}$.*

Teorem D.4. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Tada postoji baza za $\mathcal{H}$ i sve baze za $\mathcal{H}$ imaju isti kardinalitet. $\mathcal{H}$ je separabilan akko ima prebrojivu bazu.*

Teorem D.5. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{M}$ njegov vektorski potprostor. Ako je $\mathcal{M}$ konačnodimenzionalan, tada je on zatvoren.*

Teorem D.6. *Neka je $\mathcal{H}$ separabilan Hilbertov prostor i $\mathcal{E} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ortonormiran skup u $\mathcal{H}$. Tada za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi Parsevalov identitet:*

$$\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x\,, e_n\rangle|^2 \,.$$

Nadalje, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

a) $\mathcal{E} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *je baza za $\mathcal{H}$,*

b) Za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x\,, e_n\rangle e_n$,

c) Za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x\,, e_n\rangle|^2$.

Propozicija D.2. *Neka je $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ prebrojiva familija Hilbertovih prostora. Označimo s $\mathcal{H}$ skup svih nizova $\{x_n\}_n$ u $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ takvih da je $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$. Za $x = \{x_n\}_n$ i $y = \{y_n\}_n$ u $\mathcal{H}$ definirajmo*

$$\langle x\,, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n\,, y_n\rangle \,.$$

Tada je $\langle\,,\,\rangle$ skalarni produkt na $\mathcal{H}$ i s njim je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Norma na $\mathcal{H}$ je dana s $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Definicija D.8. *Neka su $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathcal{H}$ kao u prethodnoj definiciji. Za $\mathcal{H}$ kažemo da je* direktna suma *Hilbertovih prostora $\mathcal{H}_n$ i označavamo ju s $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$*

Napomena D.1. Neka su $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$ Hilbertovi prostori i neka je $\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$. Putem identifikacije $\mathcal{H}_n \simeq \ ...0 \oplus 0 \oplus \mathcal{H}_n \oplus 0 \oplus 0...$ možemo smatrati $\mathcal{H}_n$ potprostorima od $\mathcal{H}$ i pisati x_n umjesto $(...,0,0,x_n,0,0,...)$, kad god ne može doći do zabune. Ako su $x_n \in \mathcal{H}_n$ i $x_m \in \mathcal{H}_m$, te $n \neq m$, tada je $x_n \perp x_m$. Stoga su $\mathcal{H}_n$ međusobno ortogonalni potprostori od $\mathcal{H}$.

D.2 Operatori na Hilbertovim prostorima

Teorem D.7. (Riesz) *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $f \in \mathcal{H}^*$. Tada postoji jedinstveni vektor $x_0 \in \mathcal{H}$ takav da je $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$.*

Rieszov teorem omogućuje sljedeću definiciju.

Definicija D.9. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i neka je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Jedinstveni operator $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je*

$$\langle Tx\,, y\rangle = \langle x\,, T^*y\rangle\,,$$

za sve $x, y \in \mathcal{H}$, zove se adjungirani operator *operatora T.*

Definicija D.10. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Kažemo da je T*

a) normalan *ako je $TT^* = T^*T$,*

b) hermitski *ako je $T^* = T$,*

c) unitaran *ako je $T^*T = TT^* = 1$,*

d) projektor *ako je hermitski i ako je $T^2 = T$.*

Propozicija D.3. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ hermitski. Tada je*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx\,,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\}\,.$$

Teorem D.8. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tada je T*

a) hermitski *akko je $\langle Tx\,, x\rangle \in \mathbb{R}$,*

b) unitaran *akko je T surjekcija i ako je $\langle Tx\,, Ty\rangle = \langle x\,, y\rangle$, za sve $x, y \in \mathcal{H}$, odnosno akko je T surjekcija i izometrija.*

c) projektor *akko je T ortogonalna projekcija na $\mathrm{ran}T$.*

Definicija D.11. *Neka je T hermitski operator na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Ako za sve $x \in \mathcal{H}$ vrijedi $\langle Tx\,, x\rangle \geq 0$, kažemo da je T* pozitivan *operator.*

Teorem D.9. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i neka su $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, te $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tada vrijedi*

a) $T^{**} = T$,

b) $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*$,

c) $\|T\| = \|T^*\|$,

d) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Definicija D.12. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Definiramo* komutant *od $\mathcal{U}$ kao skup*

$$\mathcal{U}' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid TU = UT \text{, za svaki } U \in \mathcal{U}\}$$

Definicija D.13. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{A}$ SOT-zatvorena unitalna $*$-podalgebra od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tada se $\mathcal{A}$ zove* von Neumannova algebra *na $\mathcal{H}$.*

Propozicija D.4. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $C \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tada je C' von Neumannova algebra.*

Teorem D.10. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na $\mathcal{H}$. Tada $\mathcal{A}$ sadrži projekcije na zatvarače slika svih svojih elemenata. Štoviše, $\mathcal{A}$ je zatvorena linearna ljuska svih svojih projekcija.*

D.3 Kompaktni operatori

Definicija D.14. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Kažemo da je T konačnog ranga ako je $\mathrm{ran}T$ konačnodimenzionalan potprostor od $\mathcal{H}$. Skup svih operatora konačnog ranga označavamo s $\mathcal{B}_{00}(\mathcal{H})$.*

Propozicija D.5. *Svaki operator konačnog ranga može se zapisati kao linearna kombinacija konačnog broja jednodimenzionalnih projekcija. Posebno, ako je P projektor na konačnodimenzonalan potprostor $\mathcal{M}$ i ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{M}$, tada je $P = \sum_{k=1}^{n} P_k$, gdje su P_k projekcije na $\mathbb{C}e_k$.*

Definicija D.15. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Kažemo da je T* kompaktan operator *na $\mathcal{H}$ ako je $\mathrm{cl}(T(\mathrm{ball}\mathcal{H}))$ kompaktan skup u $\mathcal{H}$. Skup svih kompaktnih operatora na $\mathcal{H}$ označavamo s $\mathcal{B}_0(\mathcal{H})$.*

Teorem D.11. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Tada je $\mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\mathcal{B}_{00}(\mathcal{H})$ je gust u operatorskoj normi u $\mathcal{B}_0(\mathcal{H})$.*

Definicija D.16. *Neka je $\mathcal{H}$ separabilan i $\mathcal{E} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ baza za $\mathcal{H}$. Definiramo funkciju $\|\cdot\|_1 : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow [0, +\infty)$ formulom*

$$\|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T| e_n \, , e_n \rangle \, ,$$

gdje je $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Ako je $\|T\|_1 < \infty$, kažemo da je T nuklearan *operator. Skup svih nuklearnih operatora na $\mathcal{H}$ označavamo s $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$.*

Teorem D.12. *Neka je $\mathcal{H}$ separabilan Hilbertov prostor. Tada vrijedi:*

a) *$\|\cdot\|_1$ je dobro definirana, odnosno, ne ovisi o odabiru baze i $\|T\|_1 \geq 0$, za sve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. $\|\cdot\|_1$ je norma na $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$,*

b) *$\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ je zatvoren obostran ideal u $\mathcal{B}(\mathcal{H})$,*

c) *Vrijede sljedeće inkluzije: $\mathcal{B}_{00}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$. Štoviše, $\mathcal{B}_{00}(\mathcal{H})$ je gust u $(\mathcal{B}_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$,*

d) *Ako je $T \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ i $\mathcal{E} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ baza za $\mathcal{H}$, tada je $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n \, , e_e \rangle| < \infty$ i suma $\sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n \, , e_n \rangle$ ne ovisi odabiru baze.*

Iz zadnje tvrdnje slijedi da sljedeća definicija ima smisla.

Definicija D.17. *Neka je $\mathcal{H}$ separabilan Hilbertov prostor i $\mathcal{E} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ baza za $\mathcal{H}$. Definirajmo funkciju $\mathrm{Tr} : \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$ formulom*

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n \, , e_n \rangle \, .$$

Za $\mathrm{Tr}(T)$ kažemo da je trag *od T .*

Teorem D.13. *Neka je $\mathcal{H}$ separabilan Hilbertov prostor. Tada je Tr pozitivan linearan funkcional na $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$. Nadalje, ako su $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $T \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ proizvoljni, tada vrijedi:*

a) $\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS)$

b) $|\mathrm{Tr}(ST)| \leq \|S\| \, \|T\|_1$

Definicija D.18. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ takva da operator $T - \lambda I$ nije injektivan, kažemo da je λ* svojstvena vrijednost *od T. Potprostor $\ker(T - \lambda I)$ se zove* svojstven potprostor *pridružen svojstvenoj vrijednosti λ, a elementi svojstvenog potprostora su* svojstveni vektori. *Skup svih svojstvenih vrijednosti označavamo s $\sigma_p(T)$.*

Vrijedi $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Teorem D.14. (Spektralni teorem za kompaktne normalne operatore)
Neka je $\mathcal{H}$ separabilan Hilbertov prostor i T kompaktan normalan operator na $\mathcal{H}$. Tada postoji najviše prebrojivo mnogo različitih svojstvenih vrijednosti $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ od T i svi svojstveni potprostori $\ker(T - \lambda_n I)$ su konačno dimenzionalni. Ako su P_n ortogonalne projekcije na $\ker(T - \lambda_n I)$, tada je $P_n P_m = P_m P_n = \delta_{nm} I$, te

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n .$$

Ovaj red konvergira u metrici induciranoj operatorskom normom.

D.4 Neograničeni operatori

Operatori u standardnoj kvantnoj mehanici najčešće nisu ograničeni. Zapravo, ne moramo očekivati niti da je ”formula” operatora dobro definirana na cijelom Hilbertovom prostoru.

Definicija D.19. Neograničen operator *A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je linearan operator $A : D(A) \longrightarrow \mathcal{H}$, gdje je $D(A)$ vektorski potprostor (ne nužno zatvoren) od $\mathcal{H}$, zvan* domena *od A. Ako je $D(A)$ gust u $\mathcal{H}$, kažemo da je A* gusto definiran.

Podrazumijevat ćemo da su svi neograničeni operatori gusto definirani.

Definicija D.20. *Neka je A neograničen operator na $\mathcal{H}$.* Spektar *operatora A, u oznaci $\sigma(A)$, je skup kompleksnih brojeva takav da za svaki $\lambda \notin \sigma(A)$ postoji $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da*

a) Za svaki $x \in \mathcal{H}$ je $Bx \in D(A)$ i $(A - \lambda I)Bx = x$,

b) Za sve $x \in D(A)$ je $B(A - \lambda I)x = x$.

Prisjetimo se, u slučaju ograničenog operatora $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, definiramo njegov adjungirani operator A^* na sljedeći način: za svaki $y \in \mathcal{H}$ definiramo linearan funkcional $f \in \mathcal{H}^*$ formulom

$$f(x) = \langle Ax\,,\, y \rangle\,.$$

Budući da je prema SCB nejednakosti (D.1)

$$|f(x)| \leq \|Ax\|\,\|y\| \leq \|x\|\,\|y\|\,\|A\|\ ,$$

f je ograničen, pa prema Rieszovom teoremu (D.7) postoji jedinstven $x_0 \in \mathcal{H}$ takav da je

$$\langle x\,,\, x_0 \rangle = \langle Ax\,,\, y \rangle\,,$$

za sve $x \in \mathcal{H}$. Tada se definira $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ s $A^*y = x_0$. U slučaju kad je A neograničen, dvije su oprijeke: f je definiran na $D(A)$, a ne na cijelom $\mathcal{H}$, te f ne mora biti ograničen za sve $y \in \mathcal{H}$. No, ako je f ograničen, budući da je $D(A)$ gust, prema teoremu C.4 postoji neprekidno proširenje $\widetilde{f}$ od f do neprekidnog funkcionala na $\mathcal{H}$, što dozvoljava primjenu Rieszovog teorema. To omogućava sljedeću definiciju:

Definicija D.21. *Neka je A neograničen operator na $\mathcal{H}$. Neka je D skup svih $y \in \mathcal{H}$ takvih da je funkcional*

$$f : D(A) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \qquad f(x) = \langle Ax\,,\, y \rangle$$

ograničen. Definiramo adjungirani operator *A^* operatora A s domenom $D(A^*) = D$. Za svaki $y \in D(A^*)$, A^*y je jedinstveni vektor takav da je*

$$\langle Ax\,,\, y \rangle = \langle x\,,\, A^*y \rangle\,,$$

za sve $x \in D(A)$.

Definicija D.22. *Neka je A neograničen operator na $\mathcal{H}$. Ako je $D(A) = D(A^*)$ i ako je za sve $x \in D(A)$ $Ax = A^*x$, kažemo da je A* hermitski *operator.*

Teorem D.15. *Neka je A neograničen hermitski operator na $\mathcal{H}$. Tada je $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Do kraja ovog odjeljka cilj nam je definirati funkcionalan račun za hermitske operatore, odnosno, odrediti kako uzimati funkcije hermitskih operatora. Na kraju odjeljka 3.2., motivirali smo neprekidan funkcionalan račun za normalan element C^*-algebre razmatrajući poseban slučaj operatora na konačnodimenzionalnom prostoru. Ako je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{V})$ hermitski i $\{e_1\,, \dots\,, e_n\}$ baza za V u kojoj je A dijagonalan, te P_i projektori na $\mathbb{C}e_i$, tada je, uz $\sigma(A) = \{\lambda_1\,, \dots\,, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$,

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\,.$$

Tada za $f : \sigma(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ definiramo

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) P_i\,.$$

Kako u beskonačnodimenzionalnom slučaju $\sigma(A)$ ne mora biti diskretan (što jest slučaj za kompaktne operatore), to nam sugerira da u ovom slučaju želimo definirati integral operatora. To je postignuto pomoću pojma spektralne mjere, koju sada definiramo. Koristimo pojmove i rezultate iz dodatka E.

Definicija D.23. *Neka je X neki skup, $\mathcal{B}_X$ Borelova sigma algebra na X, te $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.* Spektralna mjera *s obzirom na $(X, \mathcal{H})$ je funkcija $E : \mathcal{B}_X \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takva vrijedi:*

a) $E(S)$ *je projektor, za svaki* $S \in \mathcal{B}_X$,

b) $E(\varnothing) = 0$ *i* $E(X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$,

c) $E(S_1 \cap S_2) = E(S_1)E(S_2)$, *za sve* $S_1\,, S_2 \in \mathcal{B}_X$,

d) Funkcija $S \mapsto E_{x,y}(S) = \langle E(S)x\,, y\rangle$ *je kompleksna mjera za sve* $x, y \in \mathcal{H}$.

Propozicija D.6. *Neka je A neograničen hermitski operator na $\mathcal{H}$ i neka je E spektralna mjera s obzirom na $(X, \mathcal{H})$. Neka je $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{B}_X$ izmjeriva funkcija. Definiramo skup*

$$D_f = \left\{ x \in \mathcal{H} \mid \int |f|^2 \, dE_{x,x} < \infty \right\}.$$

Tada postoji jedinstveni neograničen operator A s domenom $D(A) = D_f$ takav da je

$$\langle Ax\,, x\rangle = \int f \, dE_{x,x}\,,$$

i označavamo ga s

$$\int f \, dE \, .$$

Ako je f realna, A je hermitski.

Teorem D.16. (Spektralni teorem za neograničene hermitske operatore) *Neka je A neograničen hermitski operator na $\mathcal{H}$. Tada postoji jedinstvena spektralna mjera E s obzirom na $(\sigma(A), \mathcal{H})$ takva da je*

$$A = \int z \, dE \, ,$$

gdje je $z : \sigma(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ inkluzija.

Konačno, koristeći propoziciju D.6, možemo definirati funkciju operatora.

Definicija D.24. *Neka je A neograničen hermitski operator i E kao u prethodnom teoremu. Za svaku $\mathcal{B}_{\sigma(A)}$-izmjerivu funkciju f definiramo operator*

$$f(A) = \int f \, dE \, .$$

Pridruživanje $f \mapsto f(A)$ zovemo Borelov funkcionalan račun.

Dodatak E Mjere i integrali

Preuzeto iz [18].

Definicija E.1. *Neka je X skup i $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Ako je $\mathcal{M}$ zatvorena s obzirom na uzimanje komplementa i prebrojivih unija, kažemo da je $\mathcal{M}$ σ-*algebra. *Uređen par $(X, \mathcal{M})$ je* izmjeriv *prostor, a elemente u $\mathcal{M}$ zovemo* izmjerivim *skupovima.*

Definicija E.2. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor.* Mjera *na $(X, \mathcal{M})$ je funkcija $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ takva da je*

a) $\mu(\varnothing) = 0$,

b) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, *za svaku disjunktnu familiju $\{E_n\}_n \subset \mathcal{M}$.*

Trojku $(X, \mathcal{M}, \mu)$ zovemo prostor mjere.

Definicija E.3. *Neka je* $(X,\mathcal{M})$ *izmjeriv prostor.* Kompleksna mjera *na* $(X,\mathcal{M})$ *je funkcija* $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ *takva da je*

a) $\mu(\varnothing) = 0$,

b) Za svaku disjunktnu familiju $\{E_n\}_n \subset \mathcal{M}$ *je*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) ,$$

gdje red konvergira apsolutno.

Definicija E.4. *Neka je* X *skup i* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *. Tada s* $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *označavamo najmanju* σ*-algebru koja sadrži* $\mathcal{A}$ *. Kažemo da* $\mathcal{A}$ generirira $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *. Ako je* X *topološki prostor i* $\mathcal{T}$ *familija svih otvorenih skupova, tada* $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ *označavamo s* $\mathcal{B}_X$ *i zovemo* Borelova σ-algebra *na* X *i njeni elementi zovu se* Borelovim *skupovima. Mjera čija je domena Borelova* σ*-algebra zove se* Borelova mjera.

Borelova σ-algebra sastoji se od otvorenih i zatvorenih skupova, njihovih prebrojivih unija i presjeka, i tako dalje.

Definicija E.5. *Neka su* $(X,\mathcal{M})$ *i* $(Y,\mathcal{N})$ *izmjerivi prostori i* $f : X \longrightarrow Y$ *. Kažemo da je* f izmjeriva*, odnosno* $(\mathcal{M},\mathcal{N})$*-izmjeriva, ako je* $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ *, za sve* $E \in \mathcal{N}$ *. Ako je* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *, kažemo da je* f *izmjeriva, odnosno* $\mathcal{M}$*-izmjeriva, ako je* $(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$*-izmjeriva.*

Definicija E.6. *Neka je* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *prostor mjere. Za* $E \in \mathcal{M}$ *definiramo* karakterističnu *funkciju* χ_E *formulom*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Konačna linearna kombinacija karakterističnih funkcija s kompleksnim koeficijentima je jednostavna *funkcija. Ako je* $\phi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}$ *jednostavna funkcija na* X *, definiramo njen* integral *formulom*

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E_k) .$$

Lema E.1. *Neka je* $(X,\mathcal{M})$ *izmjeriv prostor i* $f : \mathcal{M} \longrightarrow [0,+\infty)$ *izmjeriva funkcija. Tada postoji rastući niz* $\{\phi_n\}_n$ *pozitivnih funkcija takvih da je* $\phi_n \leq f$ *i da* $\phi_n \to f$ *po točkama.*

Definicija E.7. *Neka je* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *prostor mjere i* $f : X \longrightarrow [0, +\infty)$ *izmjeriva funkcija. Definiramo* integral *nenegativne funkcije* f *formulom*

$$\int f = \int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \phi \, d\mu \mid 0 \leq \phi \leq f \, , \, \phi \text{ jednostavna} \right\} .$$

Ako je $\int f \, d\mu < \infty$, *kažemo da je* f integrabilna.

Ako je $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *izmjeriva, kažemo da je* f *integrabilna ako je* $|f|$ *integrabilna, i u tom slučaju definiramo*

$$\int f = \int (\mathrm{Re} f)_+ - \int (\mathrm{Re} f)_- + i \int (\mathrm{Im} f)_+ - i \int (\mathrm{Im} f)_- \, .$$

Teorem E.1. *Neka je* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *prostor mjere i* $l^1(\mu)$ *skup svih integrabilnih funkcija na* X . *Tada je* $l^1(\mu)$ *vektorski prostor. Definiramo relaciju na* $l^1(\mu)$*: ako su* $f, g \in l^1(\mu)$ *i* $f = g$ *osim eventualno na skupu mjere nula, kažemo da su* f *i* g *jednake* gotovo svugdje *i pišemo*

$$f = g \quad \text{g.s.}$$

Ova relacija je relacija ekvivalencije. Skup svih klasa označavamo s $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ *ili s* $L^1(\mu)$, *ili samo s* L^1 , *ako je jasno o kojem se prostoru i mjeri radi. Definiramo zbrajanje i množenje skalarom:*

$$[f] + [g] = [f + g]$$
$$\alpha[f] = [\alpha f] \, .$$

Ove operacije su dobro definirane, te s njima $L^1(\mu)$ *postaje vektorski prostor. Pišemo* f *umjesto* $[f]$. *Definiramo funkciju* $\| \cdot \|_1 : L^1(\mu) \longrightarrow [0, +\infty)$

$$\|f\|_1 = \int |f| \, .$$

Tada je $\|f - g\|_1 = 0$ *akko je* $f = g$ *g.s.,* $\| \cdot \|_1$ *je dobro definirana i to je norma na* $L^1(\mu)$, *te s njom* $L^1(\mu)$ *postaje Banachov prostor.*

Teorem E.2. *Neka je* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *prostor mjere. Ako je* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *izmjeriva funkcija takva da je* $|f|^2 \in L^1(\mu)$, *kažemo da je* f kvadratno integrabilna. *Skup svih kvadratno integrabilnih funkcija označavmo s* $L^2(\mu)$ *i on je vektorski prostor. Definiramo funkciju*

$\langle\,,\,\rangle : L^2(\mu) \times L^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ *formulom*

$$\langle f\,,g\rangle = \int fg^*\,.$$

To je skalarni produkt i s njime $L^2(\mu)$ *postaje Hilbertov prostor. Normu na* $L^2(\mu)$ *označavamo s* $\|\cdot\|_2$.

Teorem E.3. *Neka je* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *prostor mjere. Tada je skup svih jednostavnih funkcija gust u* $L^1(\mu)$ *i* $L^2(\mu)$.

Definicija E.8. *Neka je* X *kompaktan i Hausdorffov prostor, te* μ *Borelova mjera na* X . *Neka je* $E \subset X$ *Borelov podskup. Kažemo da je* μ regularna izvana *na* E *ako je*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid U \supset E\,,\, U \textit{ otvoren}\}\,,$$

te da je μ regularna iznutra *na* E *ako je*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(K) \mid K \subset E\,,\, K \textit{ kompaktan}\}\,.$$

Konačna Borelova mjera na X *koja je regularna iznutra i izvana na svim Borelovim skupovima zove se* Radonova mjera.

Uz pomoć Urysohnove leme i teorema E.3 može se pokazati sljedeći teorem:

Teorem E.4. *Neka je* X *kompaktan i Hausdorffov prostor, te* μ *Radonova mjera na* X . *Tada je* $C(X)$ *gust u* $L^1(\mu)$ *i* $L^2(\mu)$.

Literatura

[1] M. Born: *Über Quantenmechanik*, Zeitschrift für Physik 31, 1925.

[2] W. Heisenberg: *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*, Zeitschrift für Physik 33, 1925.

[3] M. Born, P. Jordan: *Zur Quantenmechanik*, Zeitschrift für Physik 34, 1925.

[4] J. von Neumann: *Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932.

[5] P. Jordan: *Über Verallegemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik*, Göttinger Nachrichten 1933.

[6] P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner: *On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism*, Ann. Math. 35, 29-64., 1934.

[7] I. Segal: *Irreducible representations of Operator Algebras*, American Mathematical Society, Bull., 1947.

[8] I. Segal: *Postulates for General Mechanics*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 48, No. 4, 930-948., 1947.

[9] S. Tomonaga: *Quantum Mechanics, Volume I: Old Quantum theory*, North-Holland, Amsterdam, 1962.

[10] R. Haag, D. Kastler: *An Algebraic Approach to Quantum Field Theory*, Journal of Mathematical Physics, Vol. 5, Num. 7, 1964.

[11] M. Jammer: *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, New York: McGraw-Hill, 1966.

[12] G. Emch: *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, Wiley-Interscience, 1972.

[13] H. Hanche-Olsen, E. Størmer: *Jordan Operator Algebras*, Pitman, 1984.

[14] P. K. Townsend: *The Jordan formulation of Quantum Mechanics: a review*, “Supersymmetry, Supergravity and Related Topics”, proceedings of the XVth GIFT International Seminar on Theoretical Physics, Sant Feliu de Guixols, Girona,

Spain, 4-9 June 1984; eds. F. del Aguila, J.A. de Azcarraga and L.E. Ibanez, World Scientific 1985.

[15] O. Bratteli, D. Robinson: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, Vol. 1, 2nd. ed.*, Springer-Verlag, 1987.

[16] J. B. Conway: *A Course in Functional Analysis (Graduate Texts in Mathematics) 2nd ed.*, Springer, 1990.

[17] G. J. Murphy: *C^*-algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[18] G. B. Folland: *Real Analysis: Modern Techniques and Applications, 2nd ed.*, John Wiley Sons, 1999.

[19] N. Bohr: *Atomna teorija i opis prirode*, Artresor naklada, Zagreb, 2001.

[20] K. McCrimmon: *A taste of Jordan Algebras*, Springer, 2004.

[21] F. Strocchi: *An Introduction to Quantum Mechanics: A Short Course for Mathematicians*, Toh Tuck Link, Singapore: World Scientific Publishing Co., 2005.

[22] L. A. Takhtajan: *Quantum Mechanics for Mathematicians*, American Mathematical Society, 2008.

[23] B.C. Hall: *Quantum Theory for Mathematicians*, Springer, 2013.

[24] J.B. Conway: *A Course in Abstract Analysis*, American Mathematical Society, 2013.

[25] V. Moretti: *Spectral Theory and Quantum Mechanics, 2nd ed.*, Springer, 2017.

[26] K. Landsman: *Foundations of Quantum Theory: From Classical Concepts to Operator Algebras*, Springer Open, 2017.

[27] G. K. Pedersen (ured. S. Eilers, D. Olesen): *C^*-Algebras and Their Automorphism Groups, 2nd ed.*, Academic Press, 2018.