

Nastanak i analiza svojstava duge na modelu kapljice vode

Brčić, Filip

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:879459>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-03**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Filip Brčić

NASTANAK I ANALIZA SVOJSTAVA DUGE NA
MODELU KAPLJICE VODE

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA I INFORMATIKA; SMJER NASTAVNIČKI

Filip Brčić

Diplomski rad

**NASTANAK I ANALIZA SVOJSTAVA
DUGE NA MODELU KAPLJICE VODE**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Nikola Poljak

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2021.

Zahvaljujem se svom mentoru izv. prof. dr. sc. Nikoli Poljaku na ukazanoj prilici i podršci prilikom pisanja ovog diplomskog rada, kao i svojim prijateljima Blažu i Davidu koji su svih ovih godina bili uz mene i usmjeravali me pa tako i u izradi ovoga rada. Posebno se zahvaljujem obitelji i prijateljima na bezuvjetnoj potpori i ljubavi tijekom cijelog studija.

Sažetak

Duga kao prirodni fenomen rezultat je disperzije svjetlosti na kapima vode u oblacima. Još u 14. stoljeću utvrđeno je da za analizu formacije i svojstava duge je dovoljno promatrati jednu kap vode. Pri formaciji duge u prirodi najveći doprinos njezinim svojstvima imaju male kapljice kiše čiji je oblik približno sferan. Zato je u ovom radu za pojednostavljeni model korištena sferna tikvica napunjena nekom tekućinom, a kao izvor paralelne svjetlosti grafoskop. Prethodno je izložena teorija nastanka duge iz elementarnih zakona geometrijske optike na koju su primijenjeni efekti konačne debljine stijenka posude. Ti efekti zbog dodatnog raspršenja na stijenkama posude utječu na promjene položaja duge, kutne širine duge, kutne širine Aleksandrove tamne vrpce te dovodi do njezina udvostručavanja. Numeričkim simulacijama izvedena su teorijska predviđanja s kojima su uspoređene eksperimentalno dobivene vrijednosti. Tekućine na kojima su izvršena mjerenja su voda i etanol, a sama mjerenja izvršena su kamerom DCC1240C-HQ (THORLAB) i mobilnim uređajem Xiaomi Pocophone f1 M1805E10A. Analizom slika je pokazano da rezultati prate predviđene ovisnosti, ali su neprecizni. Unatoč velikoj nepreciznosti, zaključeno je da je eksperiment i dalje koristan u svrhu kvalitetnog promatranja i demonstracije formiranja duge u edukacijske svrhe.

Ključne riječi: optika, lom svjetlosti, duga, firentinska duga

Creation and analysis of rainbow properties on the water drop model

Abstract

Rainbow as a natural phenomenon is the result of the dispersion of light on water droplets in clouds. It was established in the 14th century that a single drop of water is enough to analyze the formation and the properties of the rainbow. The largest contribution to the properties of a rainbow formed in nature comes from small raindrops whose shape is approximately spherical. Therefore, in this paper, a spherical flask filled with some liquid was used as a simplified model of a raindrop and an overhead projector was used as a source of parallel light. The theory of rainbow formation was derived from elementary laws of geometrical optics with the inclusion of the vessel wall thickness effects. These effects due to the additional scattering on the walls of the vessel affect the changes in the position of the rainbow, the angular width of the rainbow, the angular width of Alexander's dark region and its splitting. Numerical simulations were used to make theoretical predictions with which the experimentally obtained values were compared. The liquids on which the measurements were made are water and ethanol, and the measurements themselves were performed with a DCC1240C-HQ camera (THORLAB) and a Xiaomi Pocophone f1 M1805E10A mobile device. Image analysis has shown that the results follow predicted dependencies but are inaccurate. Despite large inaccuracies, it was concluded that the experiment is still useful for the purpose of qualitative observation and the demonstration of rainbow formation for educational purposes.

Keywords: optics, refraction of light, rainbow, Florence rainbow

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Elektromagnetski valovi	3
2.1	Elektromagnetski valovi u vakuumu	3
2.2	Elektromagnetski valovi u sredstvu	4
2.3	Refleksija i transmisija elektromagnetskih valova	6
2.4	Disperzija	8
3	Duga	10
3.1	Teorija nastanka duge	10
3.2	Postav	14
3.3	Firentinska duga	16
3.4	Aleksandrova tamna vrpca	20
4	Mjerenja i rezultati	23
4.1	Mjerenja	23
4.2	Rezultati - Voda	24
4.3	Rezultati - Etanol	27
5	Zaključak	31
6	Metodički dio	32
6.1	Primjena tehnologije u školstvu u svrhu obrade i vizualizacije podatka	32
6.2	Nastavna priprema: Odbijanje svjetlosti i nastajanje slike u ravnom zrcalu	33
	Dodaci	39
A	Računanje kuta konusa duge	39
B	Snimanje duga	41
C	Računanje kutne širine duge	42
D	Analiza slika	44

E Numeričke simulacije	45
Literatura	46

1 Uvod

Razlaganje svjetlosti na nebu tokom kiše je od davnina interesiralo ljude. Već Aristotel je pokušao dati objašnjenje za nastanak ove pojave. On je pretpostavljao da se sunčeva svjetlost lomi na nebu pod određenim kutom. Ta se svjetlost nakon loma širi unutar konusa što uzrokuje kružni izgled duge. Pola stoljeća kasnije Aleksandar Afrodizijski prvi je koji je opisao pojas između dvije duge u kojem je nebo tamnije, a 1266 g. Roger Bacon računa prve vrijednosti kutova konusa duge prvog i drugog reda (42° , 50°). Početkom 14. st. njemački redovnik Theodoric of Freiberg predlaže hipotezu suprotnu onoj Aristotela. Njegova ideja je da svaka kapljica kiše u oblacima čini svoju vlastitu dugu. Hipotezu potvrđuje promatrajući difrakciju svjetla na sfernoj staklenoj boci. Riječ je o obasjanoj firentinskoj tikvici sa zaobljenim (sfernim) dnom koja je ispunjena vodom. Takva tikvica predstavlja model kapljice vode u kojoj se lomi svjetlost, a dobivenu dugu ponekad i nazivamo firentinska duga. Njegovi rezultati ostaju nezamijećeni naredna 3 stoljeća dok Descartes 1656. g. opet ne potvrđuje hipotezu njemačkog redovnika, ali ovaj puta na kapljici vode. Obojica su zaključili da se duga sastoji od dva luka (primarna i sekundarna duga). Ta dva luka razlikovala su se po broju refleksija karakterističnih zraka svjetlosti unutar modela kapljice te intenzitetu boja na zaslonu. Primarna duga nastaje prilikom jednostruke refleksije karakteristične zrake unutar kapljice, a sekundarna duga nastaje prilikom dvostruke refleksije zrake unutar kapljice koja potom izranja van. Promatrajući model kapljice iz različitih smjerova uočili su da svakom smjeru pripada samo jedna boja. Iz toga su zaključili da u prirodi boje duge do promatrača dolaze iz različitih kapljica kiše. Dugine boje prvi puta je objasnio Newton. Lomom bijele svjetlosti na prizmi Newton je uspio razložiti bijelu svjetlost na spektar boja. Razlaganje boja objašnjava preko indeksa loma svjetlosti koji ovisi o valnoj duljini elektromagnetskih valova. Kao edukativni demonstracijski eksperiment, firentinska duga, opisana je u literaturama već u 19. st. Zbog svojeg jednostavnog postava i danas se koristi kao jedan od glavnih načina za prikaz formiranja duge učenicima i studentima u nastavi [1–3].

Eksperimentom se može učenicima pokazati: nastanak duge, pod kojim kutom je duga vidljiva, prikaz duge prvog i drugog reda na zaslonu, postojanja duga viših redova te nastanak Aleksandrove tamne vrpce. Aleksandrova tamna vrpca posljedica je diskretnog skupa vrijednosti kutova raspršenja svjetlosti koje nameće indeks loma

materijala. S obzirom na to da se duge prvog i drugog reda formiraju oko svojih minimalnih vrijednosti kutova zaokretanja svjetlosti uz određen broj refleksija unutar kapljice, postoji interval “zabranjenih” vrijednosti za koji se zrake ne mogu otkloniti [4]. Iz tog razloga područje između dvije duge je tamnije. Iznad navedena svojstva opisuju ponašanje svjetlosti na granici dvaju sredstava te nam daju uvid u pojave kao što su lom, refleksija i interferencija svjetlosti [5].

Refleksija svjetlosti pojava je odbijanja zrake svjetlosti na granici dvaju sredstava. Kut pod kojim se svjetlost reflektira jednak je upadnom kutu zrake, a definirani su u odnosu na normalu u točki refleksije na granici sredstava. Zrake svjetlosti osim što se na granici sredstava mogu reflektirati mogu i prodirati u sredstvo. U trenutku kad zraka prodire iz jednog sredstva u drugo dolazi do zakretanja svjetlosti zbog različitih indeksa lomova sredstava. Lom zraka svjetlosti prilikom prelaska granice sredstava opisan je Snellovim zakonom. Snellov zakon nam daje vezu između indeksa lomova dvaju sredstava i sinusa upadnog i transmitiranog kuta zrake. Interferencija opisuje valnu prirodu svjetlosti. Valovi u prirodi interagiraju i na taj način povećavaju ili smanjuju amplitudu konačnog vala u različitim točkama prostora. Uzmemo li u obzir da je naš sustav sferna boca napunjena vodom, onda na granicama između zraka i stakla te stakla i vode dolazi do navedenih pojava. Obično se efekti konačne debljine stijenke posude zanemare prilikom demonstracije formiranja duge radi jednostavnosti, ali upravo ti efekti će biti glavna tema ovoga rada [6].

Kroz ovaj rad obratit ćemo pozornost na to kakav utjecaj ima debljina stijenke posude na raspršenje svjetlosti i prikaz duge na platnu u odnosu na običnu dugu. Zbog svoje kompleksnije geometrije problema (sustava) i dodatnog raspršenja svjetlosti na rubovima posude, postoji više mogućih putova kojima se svjetlost može gibati te dolazi do razdvajanja duge. Osim debljine stijenke posude u obzir ćemo uzeti i udaljenost posude od zaslona. Pokazat ćemo da samo za određene udaljenosti posude od zaslona možemo opaziti Aleksandrovu tamnu vrpцу, a to ujedno i ovisi o debljini stijenke posude [5]. S obzirom na to da je eksperiment demonstracijski, a nameću se problemi s konačnom debljinom stijenke posude, moja motivacija je skrenuti pozornost kolegama i učenicima na suptilnosti koje ona donosi radi prevencije mogućih zabluda vezanih uz pojave unutar samoga eksperimenta.

2 Elektromagnetski valovi

2.1 Elektromagnetski valovi u vakuumu

Maxwellove jednadžbe predstavljaju jedan od najelegantnijih i sažetijih načina iznošenja osnova elektromagnetizma. One predstavljaju set vezanih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvoga reda za električno polje \mathbf{E} i magnetsko polje \mathbf{B} te zajedno s Lorentzovom silom opisuju cijeli elektromagnetizam. One opisuju kako su \mathbf{E} i \mathbf{B} generirani nabojima, strujama te promjenama samih polja. Maxwellove jednadžbe za vakuum glase:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.1a) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1c) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.1d)$$

Želimo li ih “razvezati” moramo djelovati rotacijom na jednadžbe 2.1b i 2.1d:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

S obzirom da je $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ i $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, jednadžbe se svode na:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (2.2a) \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (2.2b)$$

Jednadžbe smo “razvezali” i dobili smo dvije jednadžbe drugoga reda za \mathbf{E} i \mathbf{B} u vakuumu. Objе jednadžbe zadovoljavaju 3D valnu jednadžbu:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (2.3)$$

i upućuju na to da je svjetlost elektromagnetski val. Usporedimo li izraze možemo izraziti brzinu elektromagnetskih valova u vakuumu:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s.}$$

Iz 2.1a i 2.1c jednadžbe proizlazi da su elektromagnetski valovi transverzalni po svojoj prirodi i okomiti na smjer propagacije:

$$(\tilde{E}_0)_z = (\tilde{B}_0)_z = 0, \quad (2.4)$$

dok Faradayev zakon daje vezu između amplituda \mathbf{E} i \mathbf{B} polja:

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega} (\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0). \quad (2.5)$$

Iz te veze vidljivo je da su polja u fazi i da su međusobno okomita. Rješenja Maxwellovih jednadžbi možemo zapisati u obliku ravnih valova:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.6a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad (2.6b)$$

pri čemu je \mathbf{k} valni vektor vala koji pokazuje u smjeru propagacije vala i iznosi $2\pi/\lambda$, a \mathbf{r} ukazuje na točku prostora u kojoj promatramo vrijednost polja [7].

2.2 Elektromagnetski valovi u sredstvu

Maxwellove jednadžbe za \mathbf{E} i \mathbf{B} u materijalu u području gdje nema slobodnih naboja niti struja poprimaju idući oblik:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.7a) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.7b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.7c) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.7d)$$

Ako je medij linearan i homogen onda polje pomaka \mathbf{D} i magnetizirajuće polje \mathbf{H} linearno ovise o pobudi, a ϵ i μ su konstantni kroz medij:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (2.8a) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}. \quad (2.8b)$$

Tada se Maxwellove jednađbe reduciraju na oblik:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.9a) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.9b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.9c) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.9d)$$

Usporedimo li ovaj set Maxwellovih jednađbi s onima u vakuumu uočavamo da se razlikuju samo za umnožak $\mu\epsilon$. Istim postupkom iz jednađbi dobili bi brzinu EM valova u linearnom homogenom mediju. Brzina valova u mediju reducirana je za faktor $1/n$, pri čemu n predstavlja indeks loma svjetlosti materijala:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}, \quad n \equiv \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}. \quad (2.10)$$

S obzirom na to da je μ približno jednak μ_0 indeks loma svjetlosti možemo aproksimirati kao:

$$n \cong \sqrt{\epsilon_r}, \quad (2.11)$$

pri čemu je u izrazu $\epsilon_r(\omega)$ dielektrična funkcija koja ovisi o frekvenciji elektromagnetskog vala. $\epsilon_r(\omega)$ je uvijek veći od 1 i zato val kroz sredstvo putuje manjom brzinom od c . U slučaju u kojem elektromagnetski val prelazi preko granice materijala, jednađbe za \mathbf{E} i \mathbf{B} moraju zadovoljavati određene rubne uvjete:

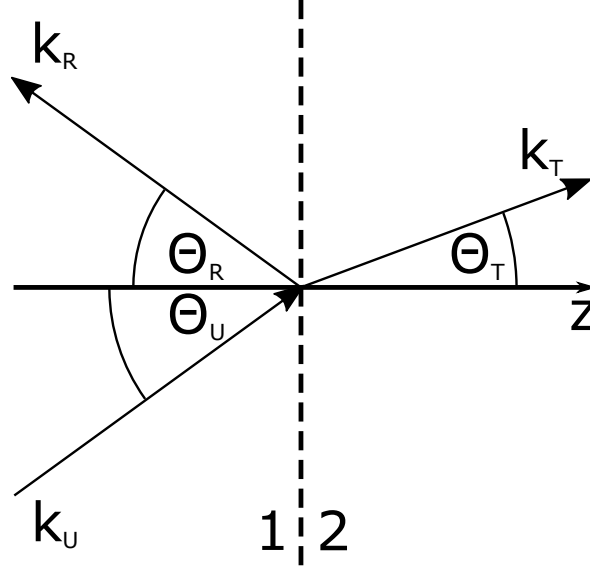
$$\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp, \quad (2.12a) \quad \mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel, \quad (2.12b)$$

$$B_1^\perp = B_2^\perp, \quad (2.12c) \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel. \quad (2.12d)$$

Ovi rubni uvjetni opisuju \mathbf{E} i \mathbf{B} prije i poslije ulaska vala u materijal [7].

2.3 Refleksija i transmisija elektromagnetskih valova

Pretpostavimo da na granicu dva materijala upada monokromatski ravni val pod nekim kutom Θ_U opisan jednađbama \mathbf{E} i \mathbf{B} . Granica se proteže xy ravninom, a val se propagira u nekom smjeru definiranim valnim vektorom.



Slika 2.1: Refleksija i transmisija monokromatskog vala na granici dvaju materijala.

Jednađbe koje opisuju upadni, reflektirani i transmitirani ravni val su oblika:

$$\tilde{\mathbf{E}}_U(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0U} e^{i(\mathbf{k}_U \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_U \times \tilde{\mathbf{E}}_U), \quad (2.13a)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_R \times \tilde{\mathbf{E}}_R), \quad (2.13b)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0T} e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} (\hat{\mathbf{k}}_T \times \tilde{\mathbf{E}}_T). \quad (2.13c)$$

S obzirom na to da je frekvencija ω valova jednaka i određuje ju izvor, iznosi valnih vektora su definirani kao:

$$k_U v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega \quad \Rightarrow \quad k_U = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T. \quad (2.14)$$

Uvrštavanjem jednađbi u rubne uvjete na granici materijala ($z = 0$) pridružujemo kombinirana polja $\tilde{\mathbf{E}}_U + \tilde{\mathbf{E}}_R$ i $\tilde{\mathbf{B}}_U + \tilde{\mathbf{B}}_R$ u sredstvu 1 s poljima $\tilde{\mathbf{E}}_T + \tilde{\mathbf{B}}_T$ u sredstvu 2.

$$(\dots) e^{i(\mathbf{k}_U \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + (\dots) e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = (\dots) e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \text{na } z = 0.$$

Zato što rubni uvjeti moraju vrijediti za sve točke u ravnini granice (xy ravnina)

i to u svakom trenutku t , eksponencijalni faktori moraju biti jednaki (sva tri vala promatramo u točki na granici materijala).

$$\mathbf{k}_U \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}, \quad \text{za } z = 0. \quad (2.15)$$

Eksplisitni zapis glasi:

$$x(k_U)_x + y(k_U)_y = x(k_R)_x + y(k_R)_y = x(k_T)_x + y(k_T)_y.$$

Gornji izraz mora biti zadovoljen za svaki x i y na granici. Gornja jednačba vrijedi samo ako su komponente istih smjerova jednake. Za $x = 0$ dobijemo da je:

$$(k_U)_y = (k_R)_y = (k_T)_y, \quad (2.16)$$

dok za $y = 0$ dobijemo da vrijedi:

$$(k_U)_x = (k_R)_x = (k_T)_x. \quad (2.17)$$

Orijentiramo li naše osi tako da \mathbf{k}_U leži u xz ravnini (tako da je $(k_U)_y = 0$); prema jednačbi 2.16 će \mathbf{k}_R i \mathbf{k}_T isto ležati u ravnini xz iz čega slijedi zaključak:

Prvi zakon: valni vektori upadne, reflektirane i transmitirane zrake čine ravninu (ravnina upada), koja uključuje normalu na površinu (u ovom slučaju to je z os). Jednačba 2.17 implicira da je:

$$k_U \sin(\Theta_U) = k_R \sin(\Theta_R) = k_T \sin(\Theta_T), \quad (2.18)$$

pri čemu je Θ_U upadni kut, Θ_R kut refleksije i Θ_T kut transmisije, kao što je prikazano na slici 2.1, a mjere se u odnosu na normalu granice sredstava. Promotrimo li iznose valnih vektora iz relacije 2.14 možemo izvesti zakon refleksije i loma.

Drugi zakon: upadni kut zrake jednak je kutu refleksije (zakon refleksije).

$$\Theta_U = \Theta_R. \quad (2.19)$$

Treći zakon: Snellov zakon ili zakon loma opisuje u kakvoj su vezi upadni kut i kut

transmisije. n_1 i n_2 su indeksi loma unutar sredstva 1 i sredstva 2.

$$\frac{\sin(\Theta_T)}{\sin(\Theta_U)} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (2.20)$$

Ovo su tri temeljna zakona geometrijske optike koja opisuju ponašanje elektromagnetskih valova na prelazu iz jednog sredstva u drugo [7].

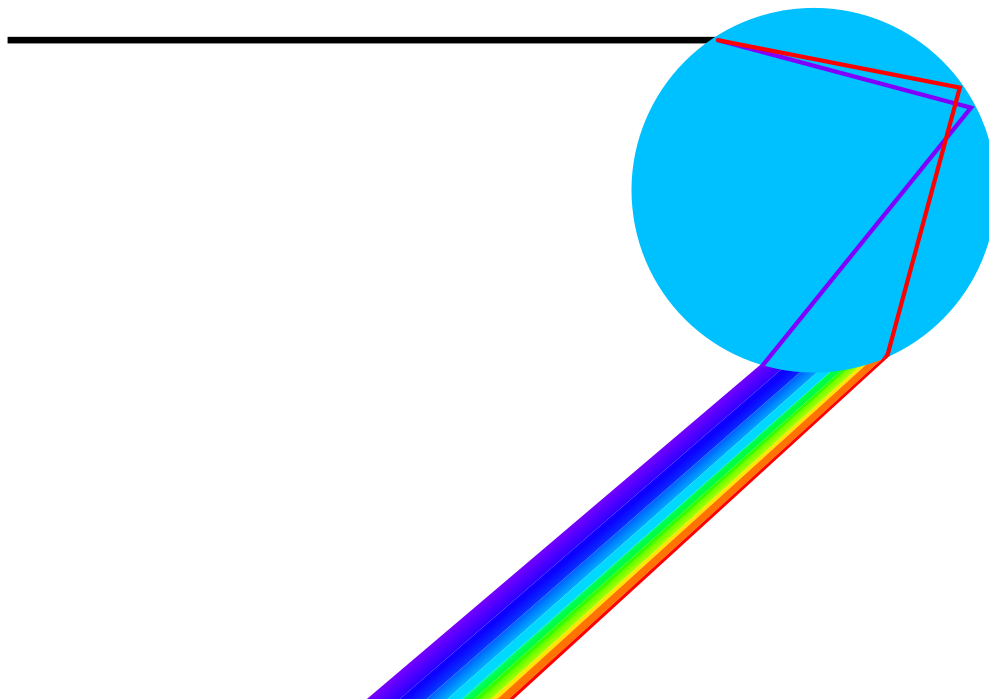
2.4 Disperzija

Općenito disperzijom nazivamo ovisnost brzine vala o valnoj duljini odnosno frekvenciji. Disperzijska relacija povezuje valni broj ili valnu duljinu vala s frekvencijom vala te je za elektromagnetske valove u vakuumu linearna funkcija oblika:

$$\omega = ck. \quad (2.21)$$

U slučaju kad val propagira medijem brzina svjetlosti više nije c već je manja, a disperzijska relacija poprima oblik:

$$\omega = vk, \quad \text{uz } v = \frac{c}{n}. \quad (2.22)$$



Slika 2.2: Disperzija svjetlosti na sfernoj kapi vode.

Princip možemo primijeniti na sve tipove valova. Najpoznatiji primjer disperzije je duga, a posljedica je promjene fazne brzine komponenti vala. Fazna brzina vala u homogenom mediju iznosi:

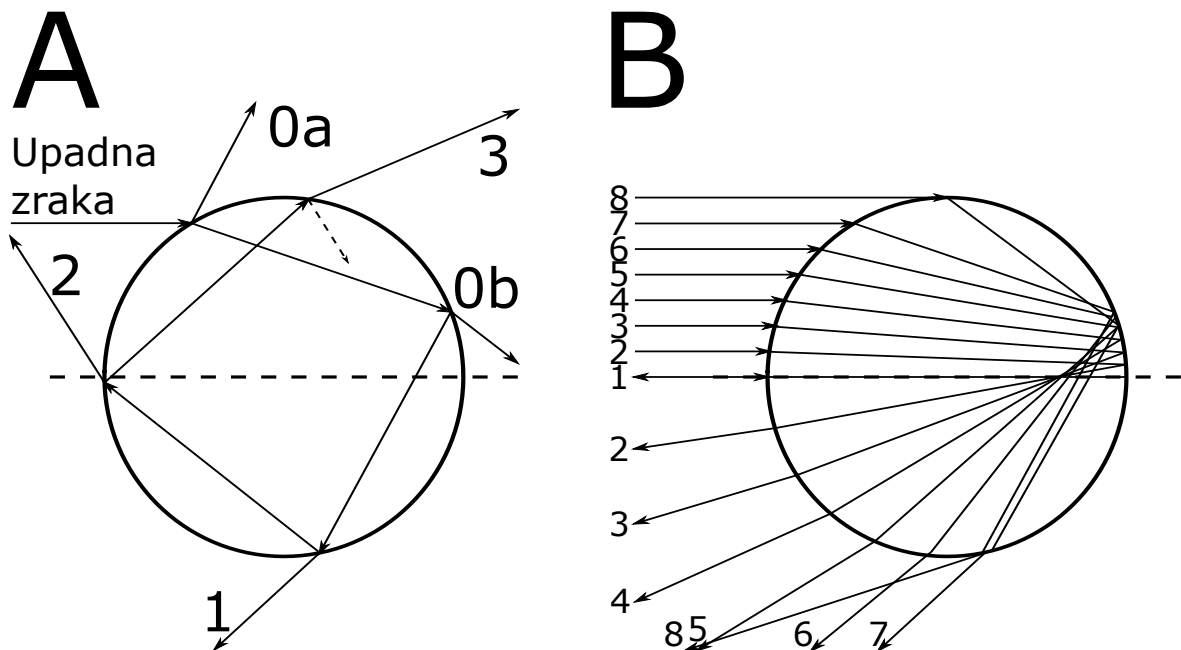
$$v = \frac{c}{n}. \quad (2.23)$$

Za indeks loma svjetlosti pokazali smo da je približno jednak korijenu dielektrične funkcije. Dielektrična funkcija $\epsilon_r(\omega)$ ovisi o frekvenciji vala pa je samim time indeks loma različit za sve komponente valova unutar materijala. Iz Snellova zakona možemo uočiti da će svaka komponenta vala opisana različitom frekvencijom biti otklonjena za različit kut jer joj pripada različita vrijednost indeksa loma. Samim time, ovisno o geometriji problema i indeksu loma svjetlosti materijala, razlaganje boja prolaskom kroz medij može biti jače ili slabije uočljivo [9].

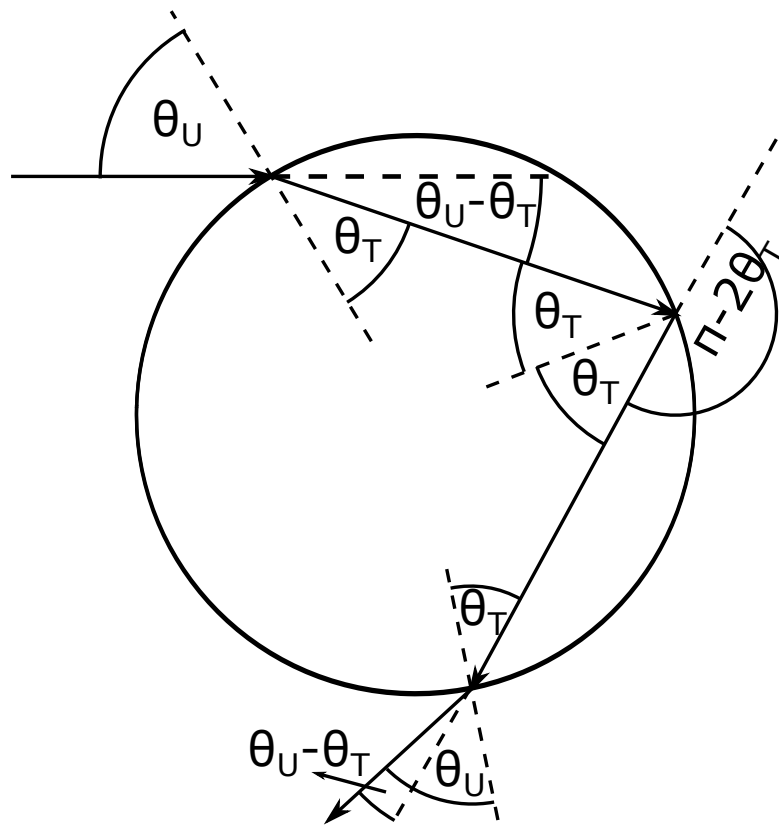
3 Duga

3.1 Teorija nastanka duge

Prije smo objasnili da je duga posljedica disperzije bijele svjetlosti na mediju čiji indeks loma ovisi o frekvenciji vala, a sada ćemo to i pokazati grafički pomoću geometrijske optike. Radi jednostavnosti, naš model kapljice opisat ćemo sferom. U prirodi kapi kiše nisu pravilne sfere već su spljoštene zato što na njih djeluje sila otpora zraka tokom pada. S obzirom na to da većina svojstava prirodne duge potječe od relativno malih kapljica vode koje svojim oblikom ne odstupaju previše od sfere, možemo uzeti za model kapljice da je sfernog oblika [2]. Svjetlost prilikom raspršenja na kapi vode djelomično se reflektira na površini, a djelomično transmitira. Transmitirana zraka na unutarnjem dijelu granice voda – zrak opet se djelomično reflektira, a djelomično transmitira van kapi vode. Procesi se ponavljaju, a raspršena svjetlost gubi intenzitet. Za sami početak od interesa će nam biti zrake koje dožive jednostruku refleksiju unutar kapi i zatim izlaze iz nje van. Te su zrake za određeni kut zakretanja svjetlosti izvor primarne duge. Prvo objašnjenje daje Descartes koji kaže da se duga formira pod kutom za koji se postiže najveća gustoća jednostruko reflektiranih zraka koje potom izranjaju van kapi [8]. Njegov zaključak je da se duga formira oko zrake koja se najmanje otklonila prilikom opisanih procesa refleksije i transmisije [2, 8]. Izračunavanjem kuta konusa duge u odnosu na početan smjer zraka svjetlosti, izračunali smo najmanji kut otklona zrake koja odgovara zraki 7 na slici 3.1 (A). S obzirom na simetriju problema uvodimo udarni parametar. Zato što je model kapi vode sfera, a zrake svjetlosti koje padaju na nju su paralelne i uniformno obasjavaju njezinu površinu, 3D problem možemo svesti na 2D tako što gledamo kako se mijenja kut otklona svjetlosti u odnosu na promjenu udarnog parametra. Udarni parametar je udaljenost b od upadne zrake do njoj paralelne osi koja prolazi kroz centar sfere, a vrijednosti su mu unutar intervala $[0, r]$ pri čemu je r radijus sfere. U intervalu gdje kut Θ , kut otklona, doživljava najmanju promjenu, imamo najveću gustoću otklonjenih zraka.



Slika 3.1: (A) Klasifikacija putova zraka kroz sfernu kap vode. Brojevi uz izlazne zrake opisuju kojem redu duge one doprinose. $0a$ i $0b$ ne sudjeluju u formiranju duge. (B) Dio zraka koje su doživjele jednostruku refleksiju unutar kapi vode. Zraka koja se najmanje otklonila u odnosu na početan smjer naziva se Kartezijeva zraka i prati put 7. To je zraka oko koje se formira primarna duga.



Slika 3.2: Računanje kutnog otklona jednostruko reflektirane zrake u ovisnosti o upadnom kutu.

Prilikom transmisije zrake u kap vode , dolazi do devijacije za kut jednak razlici kutova $\Theta_U - \Theta_T$. Refleksija unutar kapi uzrokuje otklon za $180^\circ - 2\Theta_T$, dok prilikom izlaska iz kapi dolazi do otklona za $\Theta_U - \Theta_T$. Prema tome ukupni otklon zrake koja se jednom reflektirala unutar sfere i izašla van računamo po formuli:

$$\Phi(\Theta_U) = 108^\circ + 2\Theta_U - 4\Theta_T. \quad (3.1)$$

Idući korak je izraziti upadni kut i kut transmisije preko relevantnih veličina. Za sferu radijusa r upadni kut možemo prikazati preko udarnog parametra ($\Theta_U = \arcsin(b/r)$). Upadni kut i kut transmisije povezani su Snellovim zakonom. Uzmemo li u obzir da zraka svjetlosti prelazi iz zraka u vodu te uvrstimo da je indeks loma svjetlosti za zrak $n_z = 1$, kut transmisije Θ_T iznosi $\arcsin(\sin(\Theta_U)/n_v)$. Kako bi pronašli najmanji kut devijacije funkcije $\Phi(\Theta_U)$, trebamo izračunati minimum te funkcije za kut upada. Provedbom računa dobije se rješenje oblika:

$$\cos(\Theta_U) = \sqrt{\frac{1}{3}(n_v^2 - 1)}, \quad (3.2)$$

pri čemu nam $n_v = 1.33$ predstavlja indeks loma svjetlosti za vodu. Izračunom upadnog kuta za koji se zraka najmanje otklonila prilikom jednostruke refleksije unutar kapi, možemo izračunati kut transmisije koristeći Snellov zakon. Uvrštavanjem vrijednosti u izraz 3.1, pronalazimo najmanji kut otklona zrake koja je odgovorna za formiranje duge. Pošto vrijednost kuta opisuje minimum funkcije to povlači da nijedna zraka reflektirana jednostruko unutar kapi ne može biti otklonjena za manji kut. Za zraku koja formira dugu dobili smo da kut upada iznosi približno 59° , a kut otklona je približno 138° . Opisana zraka naziva se i Kartezijeva zraka, a pripadni kut zakretanja Φ_c [8]. Iz dobivenog kuta upada možemo odrediti da je udarni parametar b približno $0.857r$. Povećanjem i smanjenjem udarnog parametra kut otklona se povećava te se zrake sve jače raspršuju. Promotrimo li formulu uočavamo da će za svaku valnu duljinu Φ_c biti pomalo drugačiji. To je posljedica različitih indeksa lomova svjetlosti pri različitim valnim duljinama elektromagnetskog zračenja. n za crvenu svjetlost u vodi iznosi oko 1.331, a za plavu svjetlost oko 1.343. Pripadni kut Φ_c za crvenu svjetlost je 137.63° , a za plavu svjetlost 139.35° . Duga stoga aproksimativno posjeduje kutnu širinu od 1.72° [8]. Generaliziramo li funkciju za k unutarnjih

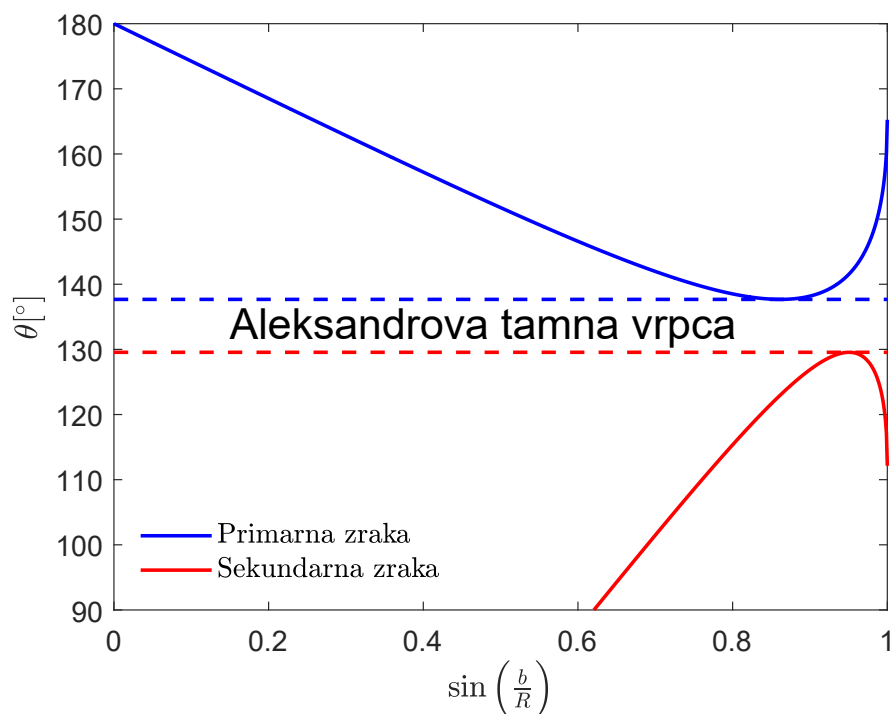
refleksija funkcija 3.1 poprima oblik:

$$\Phi(\Theta_U) = k \cdot 180^\circ + 2\Theta_U - 2\Theta_R(k + 1), \quad (3.3)$$

dok upadni kut koji odgovara minimalnom kutu otklona zrake za k refleksija iznosi

$$\cos(\Theta_{U_k}) = \sqrt{\frac{(n^2 - 1)}{k(k + 2)}}. \quad (3.4)$$

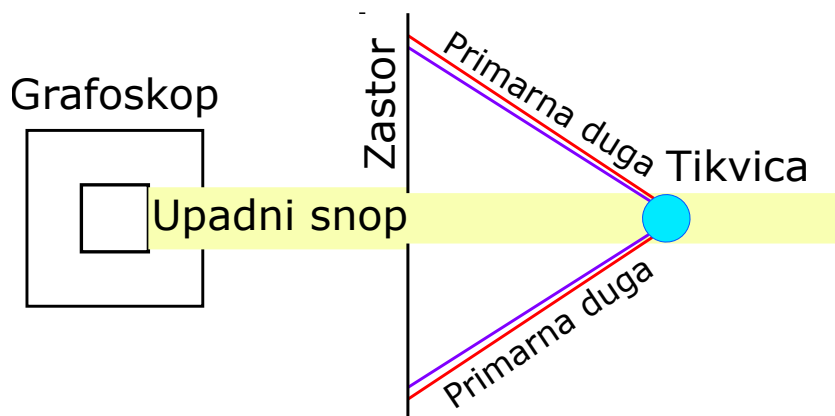
Računanjem pojedinih vrijednosti kutova možemo odrediti položaje duga viših redova. Uzmemo li da je $k = 2$ te tražimo položaj sekundarne duge, zadatak nam je pronaći Φ_c koji iznosi približno 232° . Stoga je duga drugog reda uočljiva pod kutom od 52° stupnjeva prema formuli 3.12. Upadni kut iznosi približno 72° , a pripadni udarni parametar b iznosi $0.951r$ [8]. Zbog svojih ekstremnih vrijednosti određenih minimumima funkcija otklona zrake za dani broj refleksija k , možemo iz grafa uočiti da postoji “zabranjeno” područje vrijednosti kuteva za koje se zrake ne mogu otkloniti te iz toga razloga između dvije duge uočavamo tamni pojas koji nazivamo Aleksandrova tamna vrpca. Analizom grafa 3.3 možemo odrediti širinu poiasa [4].



Slika 3.3: Prikaz minimuma i maksimuma izlaznog kuta primarne i sekundarne zrake.

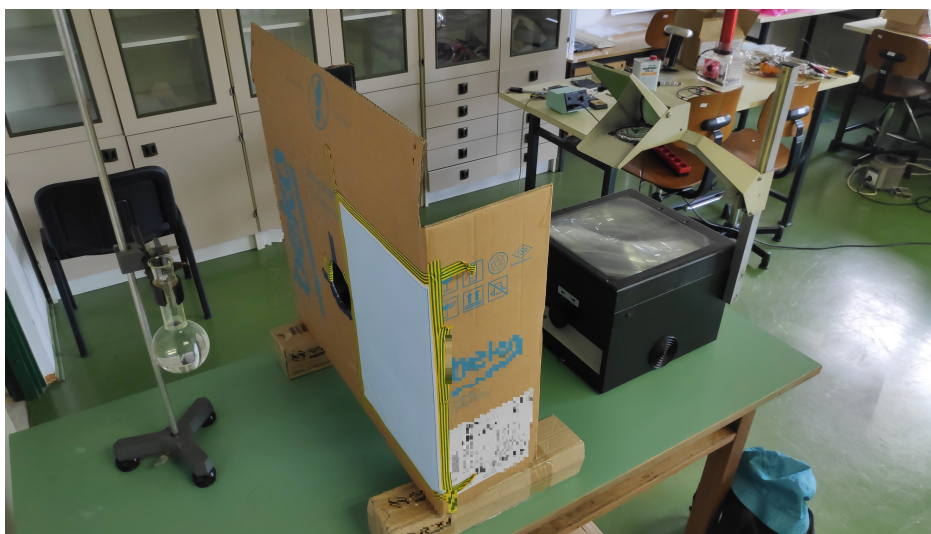
3.2 Postav

Firentinska duga demonstracijski je eksperiment čiji je cilj prikaz formiranja duge na modelu kapljice vode. Postav je jednostavan i sastoji se od tikvice sa zaobljenim dnom, punom vode, zaslona na kojem se formira duga te izvora paralelne bijele svjetlosti.



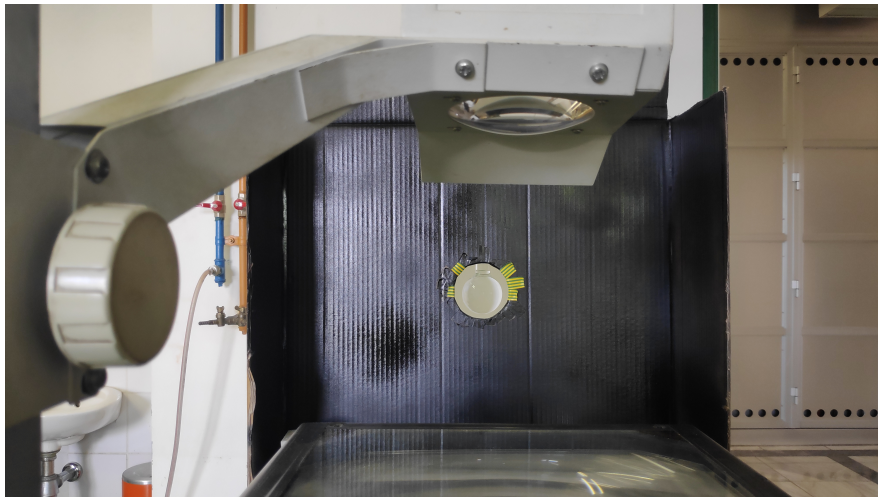
Slika 3.4: Shema eksperimentalnog postava.

S obzirom na kut zakretanja zraka svjetlosti, zaslon mora biti između modela kapljice i izvora svjetlosti. Zbog međusobnog položaja izvora svjetlosti i modela kapljice vode, na zaslonu je potrebno napraviti rupu tako da se tikvica u potpunosti može obasjati svjetlošću. Elementi postava zajedno moraju ležati na istom pravcu kako nastala duga ne bi bila izobličena. Zaslon mora biti orijentiran tako da pravac na kojem leži prolazi okomito kroz centar rupe. Radi boljeg prikaza duge poželjno je da je zaslon bijele boje [5].

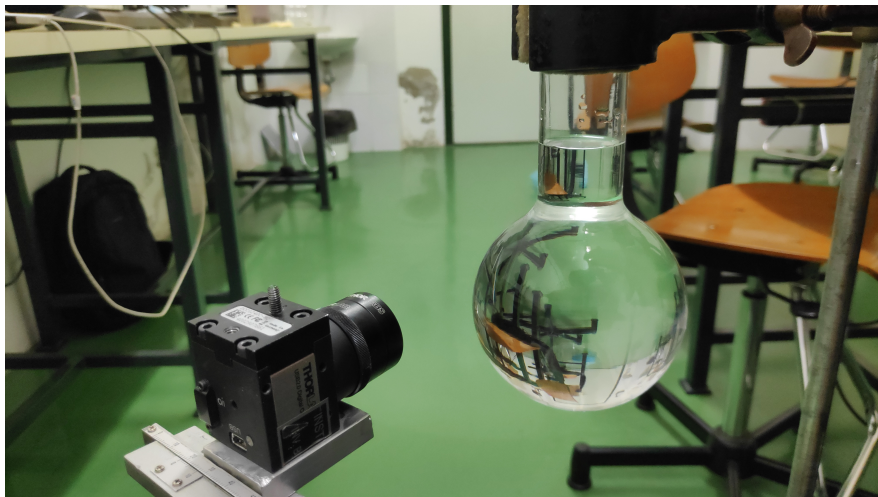


Slika 3.5: Prikaz eksperimentalnog postava na kojem su izvršena mjerenja.

Za izvor svjetlosti korišten je grafoskop. Postavljanjem grafoskopa relativno daleko od zaslona postignut je skoro paralelan izvor svjetlosti prolaskom zraka kroz rupu u zaslonu. Mjerenjem sjene na zidu udaljenom 5 m, određen je kut širenja zraka svjetlosti od približno 2.2° . Grafoskop stoga odgovara točkastom izvoru udaljenom 120 m od zaslona. Zaslon je napravljen od kartona na kojem je izrezana rupa u samom centru. Uz rupu je postavljen milimetarski papir radi mjerenja udaljenosti među dugama i širine pojedine duge. Drugi dio mjerenja izvršen je kamerom. Za model kapi vode korištena je sferna staklena tikvica. Mjerenja su obavljena s destiliranom vodom i etanolom. Prije početka mjerenja tikvica je dobro oprana kako bi se smanjio utjecaj nečistoća na mjerenje. Grafoskop je pokriven kartonom kako bi se smanjio utjecaj raspršene svjetlosti na samo mjerenje. Tikvica je postavljena u sredinu promatranjem njezine sjene na udaljenom zidu.



Slika 3.6: Crni zastor na strani grafoskopa radi smanjenja refleksija.



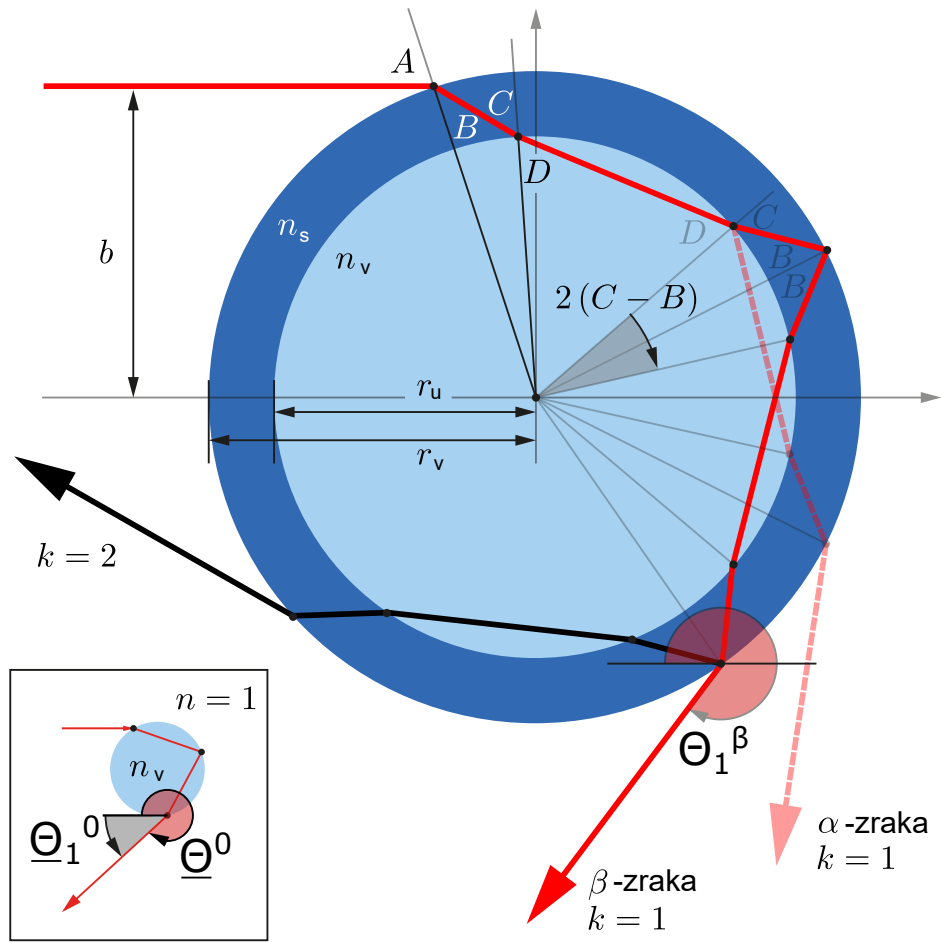
Slika 3.7: Postav za mjerenje širine duge kamerom.



Slika 3.8: Postav za mjerenje širine duge kamerom.

3.3 Firentinska duga

Usporedimo model kapljice u eksperimentu s onime u teoriji duge. U eksperimentu, vodu od zraka dijeli staklena posuda neke konačne debljine vanjskog radijusa r_v i unutarnjeg radijusa r_u . Iz tog razloga na stijenkama posude postoji dodatno raspršenje zraka svjetlosti koje utječe na promjenu kuta konusa duge, ali do izražaja dolaze i neki drugi efekti. Efekte koje možemo uočiti na zaslonu objasniti ćemo geometrijskom optikom, sličnim postupkom kao i u običnoj teoriji duge. Prvi korak je izraziti funkciju otklona zrake u ovisnosti o upadnom kutu, a upadni kut ćemo izraziti preko udarnog parametra b . U ovom slučaju, zbog kompleksnije geometrije problema, imamo veći broj mogućih putanja kojima se elektromagnetski valovi mogu kretati. Analizom slike 3.9 uočavamo da na granici zrak-staklo i staklo-voda imamo dodatna raspršenja koja moramo uključiti u naš račun. Tada funkcija otklona zrake u odnosu na početan smjer gibanja ima dodatne članove koji opisuju kutni otklon. Da bi stvar bila još složenija imamo dvije vrste zraka koje čine primarnu dugu.



Slika 3.9: Geometrija loma svjetlosti na stijenkama tikvice vanjskog radijusa r_v i unutrašnjeg radijusa r_u . Indeksi lomova stijenke tikvice, vode i zraka su n_s , n_v i $n_z = 1$. Umetak (lijevo dolje) pokazuje slučaj “gole” sferne kapi vode. β -zraka odgovara Kartezijevoj zraki za $k = 1$. Preuzeto iz [5].

Na slici je vidljivo da se zraka može jednostruko reflektirati na unutarnjem i vanjskom dijelu stijenke tikvice. Upravo to je uzrok udvostručavanja duge prilikom izvođenja eksperimenta. Zrake reflektirane na granici voda-staklo (unutarnji rub) nazvat ćemo α -zrake, a one reflektirane na granici staklo-zrak (vanjski rub) β -zrake. β -zrake odgovorne su za jasno vidljivu primarnu dugu koju ćemo promatrati u eksperimentu, a jedan od razloga tome je veća razlika u indeksima lomova na granici materijala. Drugi razlog je da α -zrake imaju dodatni faktor u intenzitetu zbog refleksije na granici voda-staklo koji je manji od 1, a ide kvadratno u formulu za intenzitet. α -zrake zato odgovaraju slabije vidljivoj primarnoj dugi koja leži uz jasnije vidljivu primarnu dugu. Na slici 3.9 uočavamo kutove za raspršenja na granicama materijala, a označeni su redom velikim tiskanim slovima. Prilikom ulaska elektromagnetskog vala na granici zrak-staklo, kut upada A iznosi $A = \arcsin(b/r_0)$. Zatim preko Snellova

zakona možemo izraziti kut loma B kao $B = \arcsin(\sin(A)/n_s)$. Zraka zatim nastavlja putovati kroz staklo i nailazi na granicu staklo-voda. Da bi izračunali upadni kut C na granici staklo-voda potrebno je iskoristiti dva puta kosinusev teorem na trokut sa slike 3.9 čije su stranice r_v , r_u i nepoznata udaljenost p koja opisuje duljinu puta unutar staklene barijere. Pripadni kutovi trokuta su B , $C - B$ i $2\pi - C$. Imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice p i C :

$$p^2 = r_v^2 + r_u^2 - 2r_v r_u \cos(C - B), \quad (3.5a)$$

$$r_v^2 = r_u^2 + p^2 - 2r_u p \cos(B). \quad (3.5b)$$

Iz 3.5a jednadžbe izrazimo čemu je jednak kut C :

$$C = B + \arcsin\left(\frac{r_v^2 + r_u^2 - p^2}{2r_v r_u}\right), \quad (3.6)$$

a iz 3.5b jednadžbe izrazimo čemu je jednaka dužina p koju zatim možemo uvrstiti u izraz 3.6:

$$p = r_v \cos(B) - \sqrt{r_v^2 \cos^2(B) - (r_v^2 - r_u^2)}. \quad (3.7)$$

Najteži dio izvoda je računanje upadnog kuta C na granici staklo-voda. U trenutku kada izračunamo vrijednost kuta C , Snellovim zakonom možemo povezati kut loma D s upadnim kutom C . Tako izraz za kut loma D glasi $D = \arcsin(n_s \sin(C)/n_v)$, a nakon njega postoji više različitih puteva kojima se zraka može kretati. Jedna mogućnost je refleksija na unutarnjem rubu staklene stijenke (α -zraka), a druga je na vanjskom rubu (β -zraka). Već smo napomenuli da je β -zraka odgovorna za formiranje primarne duge većeg intenziteta koja odgovara običnoj dugi [5]. Konačna funkcija otklona zrake u ovisnosti o upadnom kutu A za pojedini tip zrake:

$$\Phi_k^\beta(A) = 2(A - B) + 2(k + 1)(C - D) + k(\pi - 2B), \quad (3.8a)$$

$$\Phi_k^\alpha(A) = 2(A - B) + 2(C - D) + k(\pi - 2D), \quad (3.8b)$$

pri čemu indeks k označava broj refleksija unutar kapi vode, a gornji indeksi β i α označavaju da li se refleksija dogodila na granici staklo-voda (vanjski radijus posude)

ili voda-staklo (unutarnji radijus). Generalni oblik funkcije otklona zrake je:

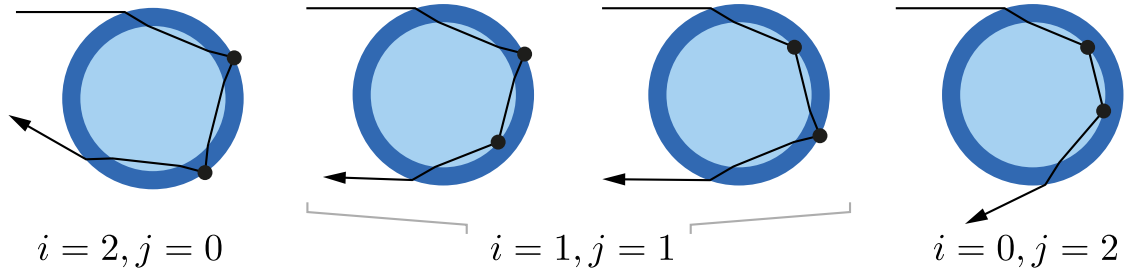
$$\Phi_k^{i,j}(A) = 2(A - B) + 2(C - D) + \begin{cases} i[2(C - D) + (\pi - 2B)] \\ j(\pi - 2D) \end{cases}, \quad (3.9)$$

pri čemu je i ukupan broj vanjskih, a j unutarnjih refleksija. S obzirom na to da ne postoji analitički izraz za kut minimalnog otklona zrake, rezultat možemo izračunati numerički. Zanima nas za koji upadni kut A (koji ovisi o udarnom parametru b) ćemo dobiti najmanju vrijednost funkcije $\Phi(\beta/\alpha, k)$. Izračunamo minimume funkcija Φ u ovisnosti o kutu A i zatim uvrstimo vrijednosti u gornje formule kako bi dobili kuteve minimalnih otklona zraka odgovornih za formiranje duga [5]. Drugi način je da funkciju otklona napišemo u obliku računa smetnje. U tom slučaju aproksimativni izraz će biti oblika $\Phi_k \approx \Phi_k^0 + \delta\Phi_k$, pri čemu je Φ_k^0 funkcija otklona zrake normalne duge, a $\delta\Phi_k$ je perturbacija koja opisuje kakva je kutna promjena originalne vrijednosti s obzirom na dimenzije staklene tikvice. Za α -zraku i β -zraku, kada je $k = 1$ (primarna duga), izrazi perturbacija su oblika:

$$\delta\Phi_1^\alpha = \frac{2\delta}{r_u} \left(\sqrt{\frac{4 - n_v^2}{n_v^2 + 3n_s^2 - 4}} - \sqrt{\frac{4 - n_v^2}{n_v^2 - 1}} \right), \quad (3.10a)$$

$$\delta\Phi_1^\beta = \frac{2\delta}{r_u} \left(2\sqrt{\frac{4 - n_v^2}{n_v^2 + 3n_s^2 - 4}} - \sqrt{\frac{4 - n_v^2}{n_v^2 - 1}} \right), \quad (3.10b)$$

pri čemu delta ispred zagrade označava debljinu stijenke tikvice ($r_v - r_u$), a r_u je unutrašnji radijus tikvice. Aproksimacije vrijede za male razlike među indeksima lomova na granici materijala i male debljine zidova. Bitno je za napomenuti da efekti interferencije koji se događaju prilikom malih debljina zidova nisu uzeti u obzir u geometrijskoj optici. U slučaju kad je $n_s > n_v$, iz jednadžbi 3.10a i 3.10b proizlazi da su perturbacije za α -zraku i β -zraku prvoga reda negativne. Usporedbom iznosa perturbacija tih zraka možemo objasniti udvostručavanje primarne duge. S obzirom na to da su iznosi perturbacija različiti $|\delta\Phi_k^\alpha| > |\delta\Phi_k^\beta|$ za svaki tip zrake dobit ćemo po jednu dugu koja se nalazi u blizini normalne duge Φ_1^0 [5]. U slučaju sekundarne duge moramo uzeti u obzir da se s povećanjem broja refleksija k povećava broj mogućih putova kojima se zraka može gibati. Za svaku unutarnju refleksiju, može doći do α -tipa unutarnje refleksije ili β -tipa vanjske refleksije, tako da postoji 2^k različitih putova.



Slika 3.10: Degeneracija puteva zraka svjetlosti. Preuzeto iz [5].

Analizom funkcije otklona zrake očito je da postoje degenerirani putevi koji se razlikuju po rasporedu refleksija unutar posude napunjene vodom, ali i ne ukupnom otklonu zraka. Perturbacija β -zrake drugog reda oblika je:

$$\delta\Phi_2^\beta = \frac{2\delta}{r_u} \left(3\sqrt{\frac{9 - n_v^2}{n_v^2 + 8n_s^2 - 9}} - \sqrt{\frac{9 - n_v^2}{n_v^2 - 1}} \right). \quad (3.11)$$

U slučaju kada je $n_s > n_v$, perturbacije svih redova su negativne, što je uzrok smanjenja kuta konusa duge svih redova.

3.4 Aleksandrova tamna vrpca

Uzmimo u obzir prijašnje dobivene rezultate za promjene vrijednosti kuta konusa pojedinih duga. Izrazi ovise linearno o δ/r_u , a predznak promjene određuju indeksi loma materijala. Ovisno o prirodi materijala koji čine sustav, možemo dobiti povećanje kutnog otklona Kartezijeve zrake ili smanjenje naspram obične duge. Koliko će efekt biti jako izražen ovisit će isto tako i o samim dimenzijama modela kapi vode. Razmotrimo opet slučaj $n_g > n_w$. Ograničimo se na apsolutne koordinate otklona Kartezijevih zraka. Uzmimo u obzir vrijednosti samo unutar intervala $0 - 180^\circ$ i zanemarimo višekratnike punih revolucija. Tada funkcija otklona pojedinih Kartezijevih zraka poprima oblik:

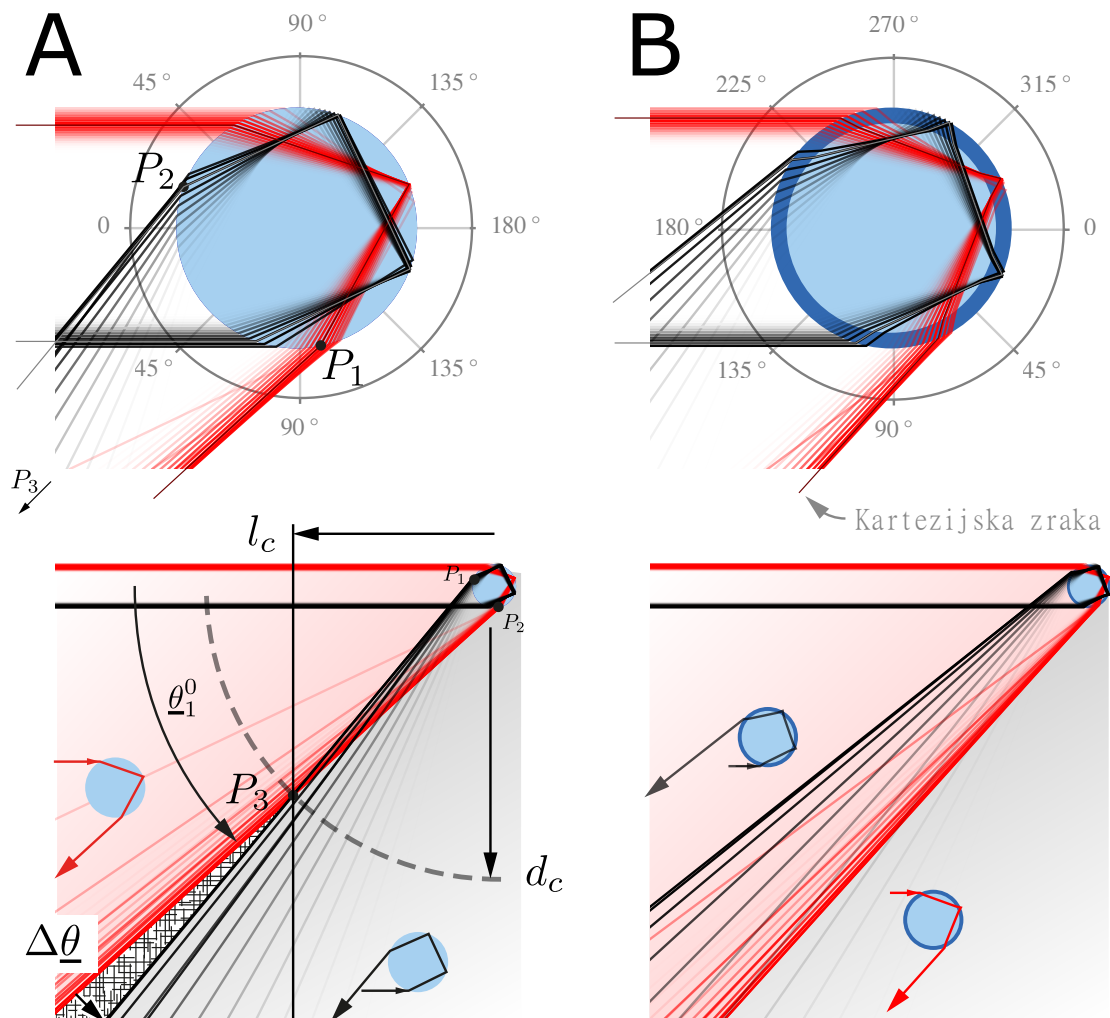
$$\phi = |\pi - (\Phi \bmod 2\pi)|. \quad (3.12)$$

To povlači da će iznosi pojedinih otklona biti $\phi_1 = \pi - \Phi_1$ za primarnu dugu, a $\phi_2 = \Phi_2 - \pi$ za sekundarnu dugu itd. Znamo li položaje duga, lagano možemo izračunati

širinu Aleksandrove tamne vrpce. Uzmimo u obzir samo β -tip zraka:

$$\Delta\phi^\beta = \phi_2^\beta - \phi_1^\beta \approx \Delta\phi^0 + (\delta\Phi_2^\beta + \delta\Phi_1^\beta), \quad (3.13)$$

gdje vidimo da se kutna širina Aleksandrove tamne vrpce smanjila za slučaj kada su perturbacije negativne. Od interesa nam je samo β tip zraka zato što se α tip zraka nalazi unutar područja tamne vrpce i intenzitetom su puno slabije od β tipa. Ovime smo objasnili i opisali kako ovisi kutna širina Aleksandrove vrpce o dimenzijama posude koja se koristi u eksperimentu i materijalima kroz koje elektromagnetski val putuje. Opišimo sada fenomen tako što pratimo propagaciju Kartezijevih zraka prvog i drugog reda.



Slika 3.11: (A) Slučaj u kojem Kartezijeve zrake konvergiraju i Aleksandrova tamna vrpca postoji. (B) Slučaj u kojem Kartezijeve zrake divergiraju i Aleksandrova tamna vrpca ne postoji. Preuzeto iz [5].

Na slici 3.11A vidimo slučaj obične duge, a 3.11B našeg eksperimentalnog postava. U oba slučaja sa suprotnih strana, međusobno paralelno, upadaju zrake reda $k = 1, 2$. Na slici 3.11A, nakon raspršenja, zrake se otklone tako da se sijeku međusobno u prostoru ispred kapljice vode. U području gdje se zrake sijeku, promatrač uočava visok intenzitet svjetlosti pod kutovima duge. Iza točke u kojoj se Kartezijeve zrake sijeku, za promatrača se otvara tamno područje omeđeno s dvije duge. S obzirom na to da su Kartezijeve zrake opisane ekstremima kutnog otklona, nakon te točke otvara se područje u kojem nema reflektiranih zraka. Zato promatrač da bi uočio tamnu vrpca među dugama mora biti na određenoj udaljenosti od same kapljice. Na slici je to područje označeno kriskros uzorkom i kutna širina je određena otklonom kartezijskih zraka (debeli crna i crvena). U slučaju na slici 3.11B, za dovoljno veliku debljinu zida, kartezijske zrake umjesto da se sijeku divergiraju te Aleksandrova tamna vrpca nestaje. Iskoristimo činjenicu da kartezijske zrake izranjaju iz kapi vode približno na suprotnim stranama u točkama P1 i P2 u slučaju kada Aleksandrova tamna vrpca postoji. Ako se zrake sijeku, zajedno s točkom P3 približno čine jednakostranični trokut. Katete predstavljaju kritičnu udaljenost reflektiranih zraka do promatrača, a baza iznosi približno $2r_v$ jer su točke izranjanja jedna nasuprot drugoj na sferi radijusa r_0 . Poznavajući bazu trokuta i kut među katetama, lako možemo izračunati aproksimativnu vrijednost kritične udaljenosti d_c (katete trokuta):

$$\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \approx \frac{r_v}{d_c} \Rightarrow d_c = \frac{r_v}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}. \quad (3.14)$$

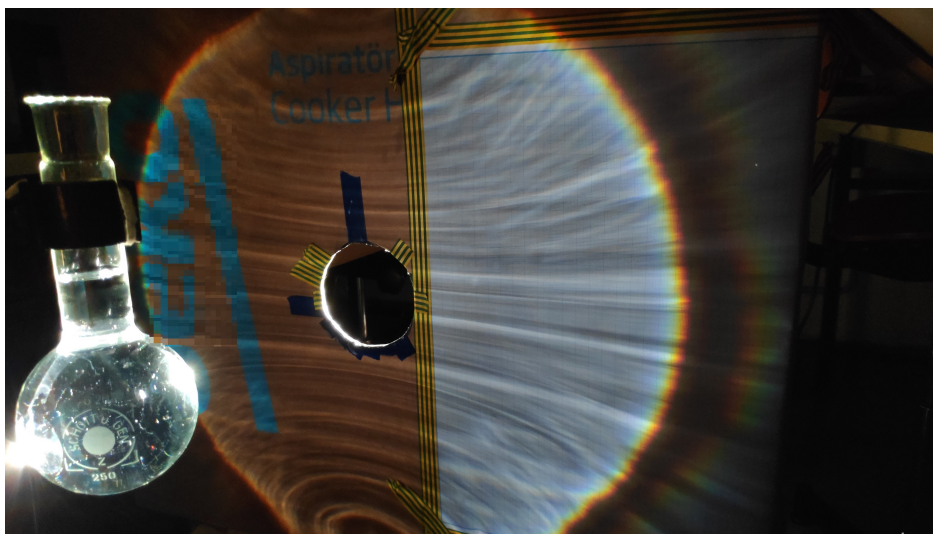
Ortogonalnu vrijednost kritične udaljenosti zaslona od tikvice l_c možemo dobiti uz poznavanje elementarne trigonometrije:

$$l_c \approx d_c \cos(\phi_1). \quad (3.15)$$

4 Mjerenja i rezultati

4.1 Mjerenja

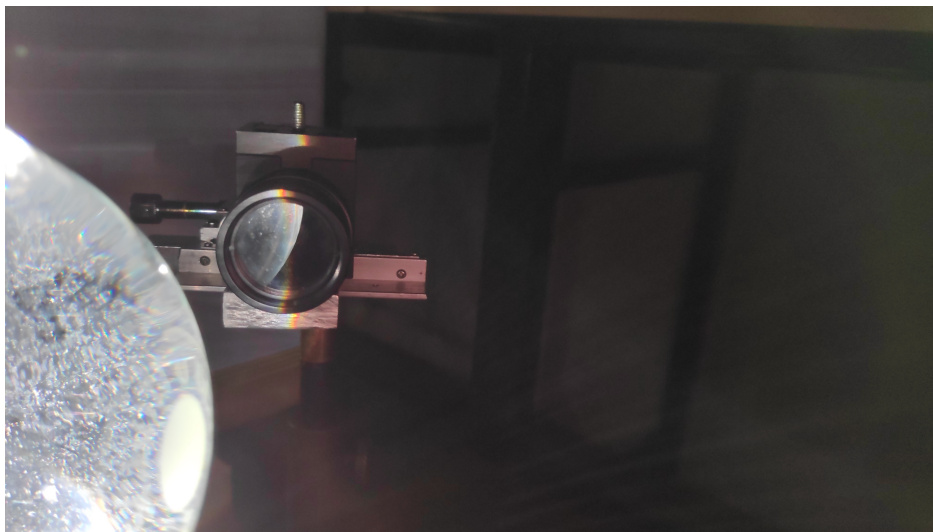
U ovom diplomskom radu, prilikom izvođenja eksperimenta, posvetili smo pažnju opisanim pojavama te izvršili mjerenja relevantnih fizikalnih veličina. Eksperiment smo ponovili za dvije različite tekućine i usporedili rezultate s teorijskim predviđanjima. Tekućine koje smo koristili su destilirana voda i etanol. Od kemijskog posuđa koristili smo sfernu tikvicu volumena 250 mL, promjera 8.5 cm (vanjski radijus 4.25 cm), debljine stijenke 3.4 mm. Središte tikvice mora ležati na pravcu koji prolazi kroz centar rupe na zaslonu. Zaslون je sačinjen od kartona kojem je na centru izrezana rupa promjera 9.1 cm. Odmah uz rupu na zaslon je zalijepljen milimetarski papir koji nam služi kao mjera. Mjerenja su izvršena za različite udaljenosti središta tikvice od zaslona, a fotoaparatom zabilježeni položaji duga na milimetarskom papiru. Fotografije



Slika 4.1: Prikaz izvedbe eksperimenta.

tako sadrže podatke kao što su radijus (udaljenost duge od centra zaslona) pojedine duge, razmak među dugama te širinu same duge na zaslonu. Uz pomoć osnovne trigonometrije određene su veličine kutova konusa duga, širina Aleksandrove tamne vrpce i kritična udaljenost tikvice od zaslona. Objašnjenje metode dobivanja kuta konusa duge iz rezultata mjerenja je u dodatku A. Širinu duge mjerili smo dodatno i kamerom. Uređaj je pozicioniran tako da duga obasjava senzor, a iz grafova i slika na računalu odredimo podatke potrebne za izračun kutne širine duge. Analiza slika i obrada pojedinih podataka se vršila u programskom jeziku MATLAB. Postupci pri-

mijene MATLAB-a unutar pojedine metode i račun kutne širine duge objašnjeni su u dodacima B, C, D i E.



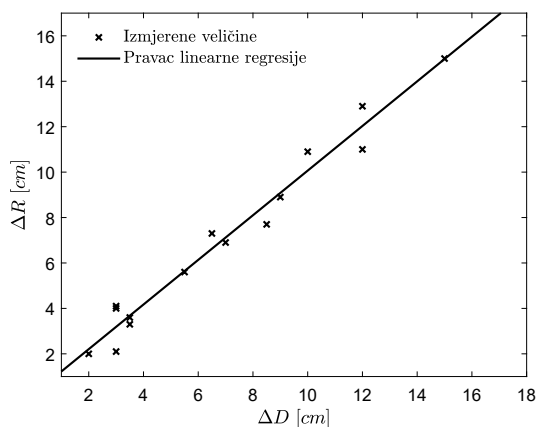
Slika 4.2: Prikaz prikupljanja podataka kamerom.

4.2 Rezultati - Voda

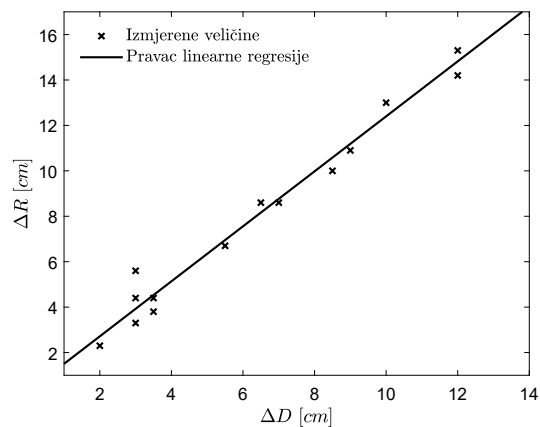
Prvi set mjerenja radili smo s destiliranom vodom i staklenom tikvicom volumena 250 mL. Tablični indeks loma stakla iznosi $n_s = 1.51$, a destilirane vode $n_v = 1.33$. Prirodna duga vode prvog reda vidljiva je pod kutom od 42° , a sekundarna pod kutom od 52° u odnosu na optičku os. Obrada podataka mjerenja dala je iduće rezultate:

- Kut konusa primarne duge: $(44 \pm 3)^\circ$
- Kut konusa sekundarne duge: $(50 \pm 3)^\circ$
- Kutna širina Aleksandrove tamne vrpce: $(6 \pm 4)^\circ$
- Kritična udaljenost zaslona od tikvice: (58.41 ± 39) cm
- Kutna širina intervala valnih duljina 615 nm – 630 nm: $(0.5 \pm 0.3)^\circ$
- Kutna širina duge: $(1.4 \pm 0.3)^\circ$

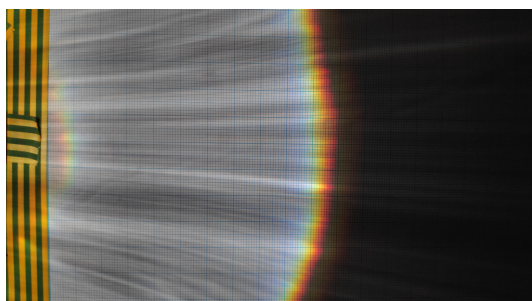
Usporedbom dobivenih rezultata mjerenja za slučaj $n_s > n_v$ s rezultatima obične duge, kut konusa primarne duge se povećao za 2.86° , a sekundarne duge smanjio za 1.11° u odnosu na prirodnu dugu vode. Zbog pomaka ekstremnih vrijednosti funkcije otklona svjetlosnih zraka dolazi do smanjenja kutne širine Aleksandrove tamne vrpce



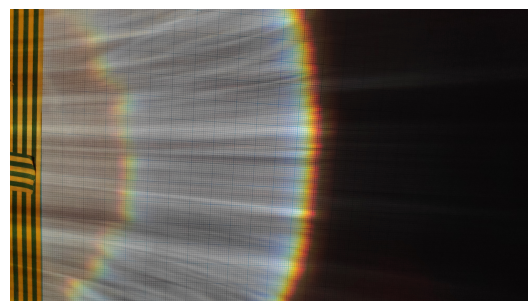
Slika 4.3: Graf promjene radijusa primarne duge vode u ovisnosti o promjeni udaljenosti tikvice od zastora.



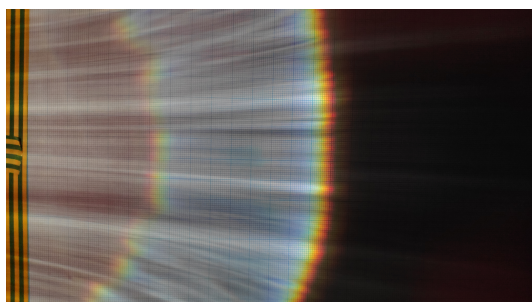
Slika 4.4: Graf promjene radijusa sekundarne duge vode u ovisnosti o promjeni udaljenosti tikvice od zastora.



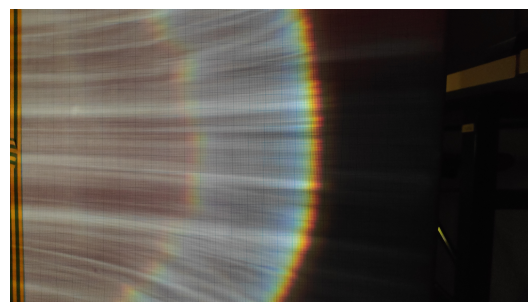
Slika 4.5: Prikaz duga ($D = 11.5$ cm).



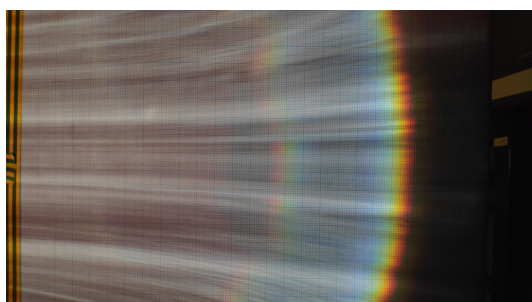
Slika 4.6: Prikaz duga ($D = 14.5$ cm).



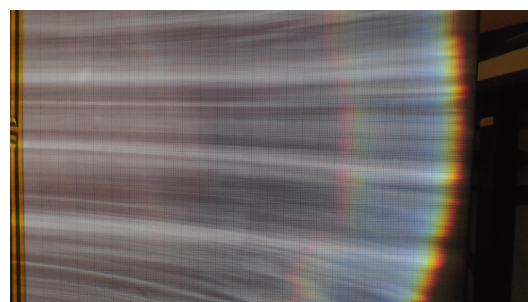
Slika 4.7: Prikaz duga ($D = 16.5$ cm).



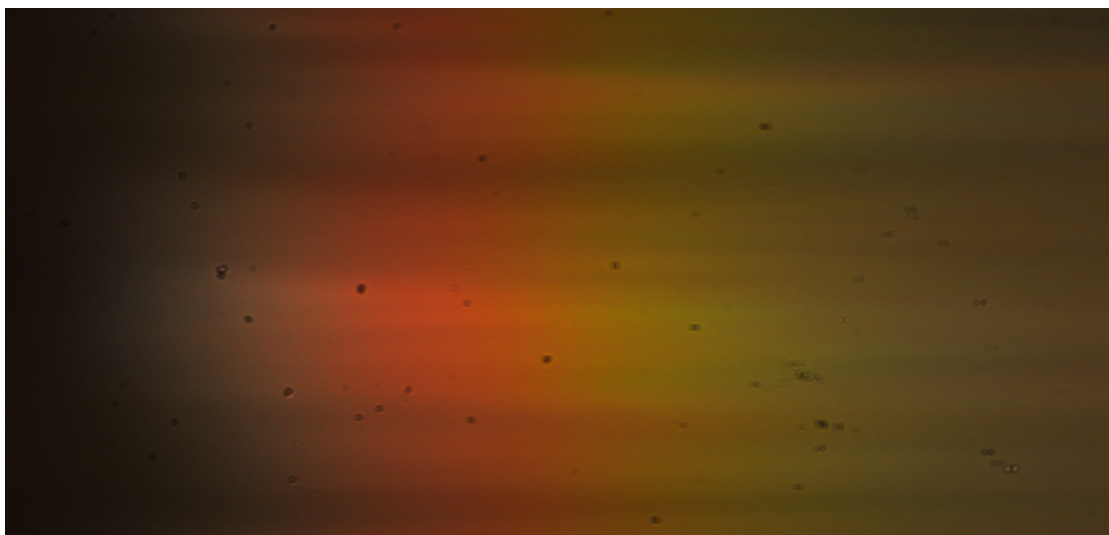
Slika 4.8: Prikaz duga ($D = 20$ cm).



Slika 4.9: Prikaz duga ($D = 23.5$ cm).



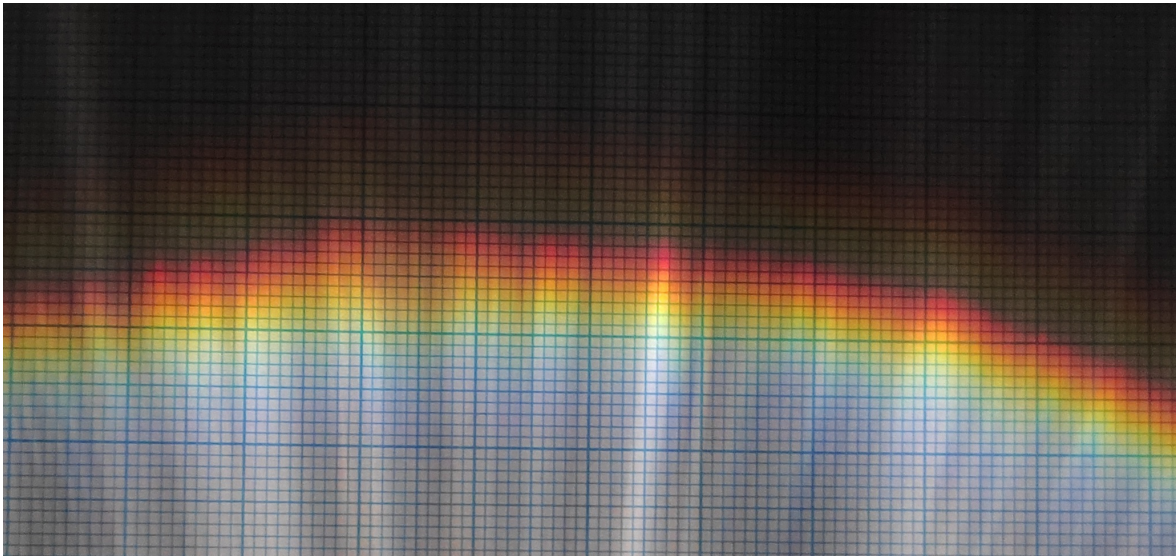
Slika 4.10: Prikaz duga ($D = 26.5$ cm).



Slika 4.11: Snimka duge kamerom ($D = 10$ cm).

za 4° . S obzirom na to da se kutna širina Aleksandrove tamne vrpce smanjila, kritična udaljenost zaslona od tikvice se morala povećati. Obradom podataka mjerenja vrijednost d_c se povećala za 32.43 cm, a l_c za 22.17 cm u odnosu na teorijska predviđanja. Razlog povećanja ortogonalne kritične udaljenosti je sporije konvergiranje zraka zbog slabijeg međusobnog kuta upada. Rezultati mjerenja potvrđuju očekivane promjene u relevantnim veličinama. Velika greška u dobivenoj vrijednosti kritične udaljenosti je posljedica velike greške u vrijednosti širine Aleksandrove tamne vrpce. Promotrimo li jednadžbu 3.14 možemo uočiti da mala promjena vrijednosti $\Delta\Phi$ vodi na veliku promjenu d_c pa tako i l_c . Greške mjerenja se pripisuju izvoru svjetlosti koji nije u potpunosti paralelan, nesavršenoj sfernoj tikvici kao i nepreciznosti pojedinih mjerenja. Na slikama dobivenim mobilnim uređajem može se uočiti deformacija i slab intenzitet duga zbog čega je teško odrediti njihove granice. Samim time što je zastor napravljen od kartona i lagan je, prilikom mjerenja udaljenosti tikvice od zastora dolazi do njegovog pomaka zbog dodira ravnalom. Pri udaljavanju tikvice od zastora, zbog deformacije duge, bilo je potrebno rotirati tikvicu kako bi dobili dobar uzorak za izvršiti mjerenja. Pomoću kamere je određena kutna širina intervala valnih dužina 615 nm – 630 nm na način opisan u dodatku D. Izgled duge snimljene kamerom prikazan je na slici 4.11. Njezina vrijednost iznosi 0.5° dok je greška relativno velika prvenstveno zbog nepreciznosti mjerenja udaljenosti kamere od točke izranjanja Kartezijevih zraka. Dobiveni rezultat uspoređen je s numeričkim simulacijama opisanim u dodatku E, koji iznosi 0.36° . Na slici 4.12 se nazire dvostruka duga kao posljedica raspršenja zraka svjetlosti na unutarnjem i vanjskom dijelu stijenke tikvice. Ujedno

izračunata je vrijednost kutne širine duge koja iznosi $(1.4 \pm 0.3)^\circ$. Teorijska vrijednost za kutnu širinu prirodne duge vode iznosi 1.72° . Za očekivati bi bilo da će utjecaj staklene tikvice dodatno razložiti svjetlost, ali rezultati to ne potvrđuju. Iako je rezultat u dobrom slaganju s očekivanom vrijednosti prirodne duge, zbog preciznosti mjerenja utjecaj staklene tikvice se ne može točno odrediti.

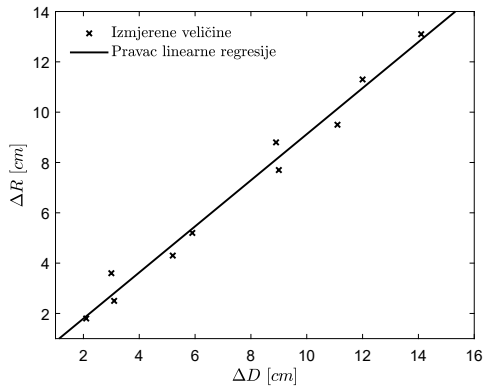


Slika 4.12: Udvostručavanje duga kao posljedica raspršenja α -zraka i β -zraka ($D = 11.5$ cm).

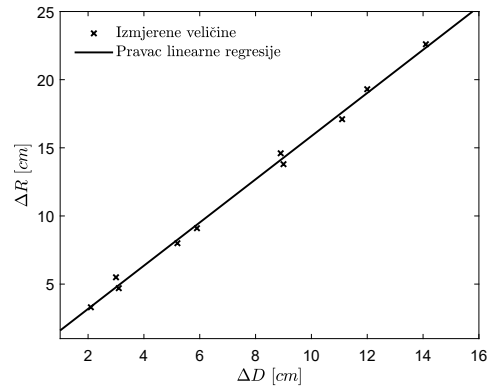
4.3 Rezultati - Etanol

Drugi set mjerenja radili smo s etanolom. Tablični indeks loma etanola iznosi $n_v = 1.36$. Prirodna duga etanola prvog reda vidljiva je pod kutom od 38.5° , a sekundarna pod kutom od 57.72° u odnosu na optičku os. Obrada podataka mjerenja dala je iduće rezultate:

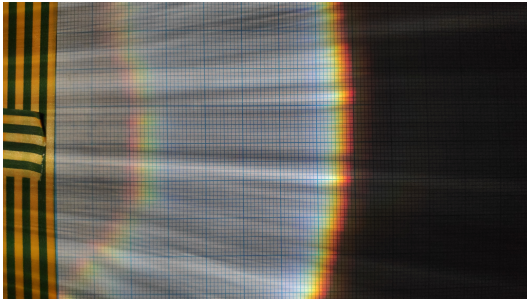
- Kut konusa primarne duge: $(42 \pm 2)^\circ$
- Kut konusa sekundarne duge: $(57 \pm 2)^\circ$
- Kutna širina Aleksandrove tamne vrpce: $(15 \pm 3)^\circ$
- Kritična udaljenost zaslona od tikvice: (25.48 ± 5) cm
- Kutna širina duge: $(1.7 \pm 0.8)^\circ$



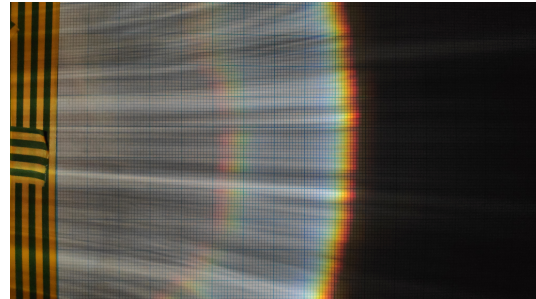
Slika 4.13: Graf promjene radijusa primarne duge etanola u ovisnosti o promjeni udaljenosti tikvice od zas-tora.



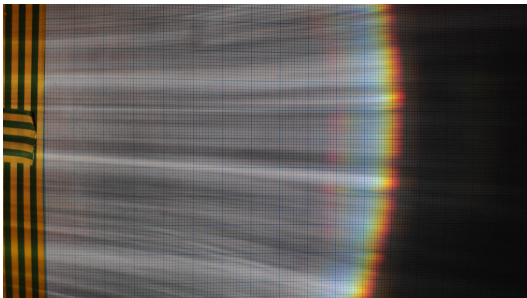
Slika 4.14: Graf promjene radijusa sekundarne duge etanola u ovisnosti o promjeni udaljenosti tikvice od zas-tora.



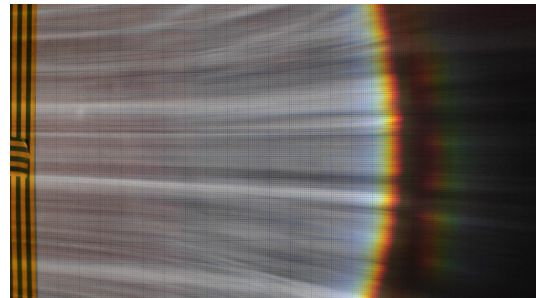
Slika 4.15: Prikaz duga ($D = 10.3$ cm).



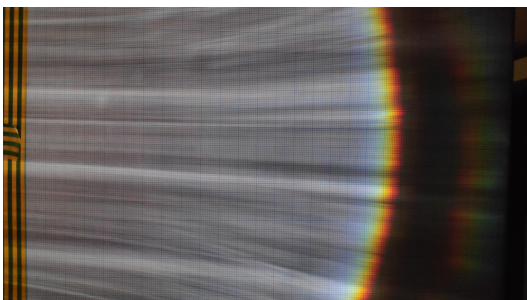
Slika 4.16: Prikaz duga ($D = 12.4$ cm).



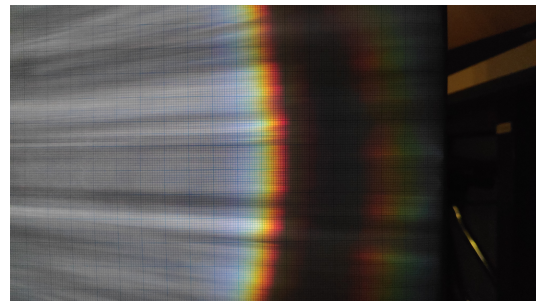
Slika 4.17: Prikaz duga ($D = 15.5$ cm).



Slika 4.18: Prikaz duga ($D = 21.4$ cm).

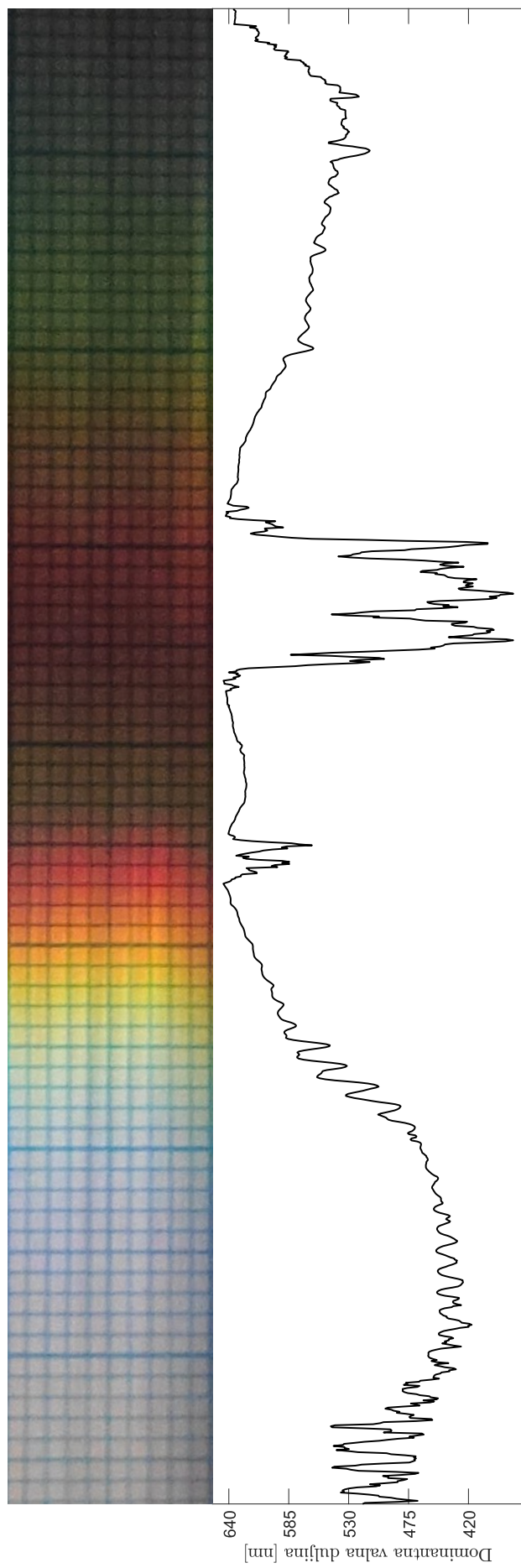


Slika 4.19: Prikaz duga ($D = 24.4$ cm).



Slika 4.20: Aleksandrova tamna vrpca ($D = 24.4$ cm).

Usporedbom dobivenih rezultata mjerenja za slučaj $n_s > n_e$ s rezultatima obične duge, kut konusa primarne duge se povećao za 3.5° , a sekundarne duge se smanjio za 0.72° u odnosu na prirodnu dugu etanola. Ovakvim pomakom ekstremnih vrijednosti kutnog odklona zraka svjetlosti došlo je do smanjenja kutne širine Aleksandrove tamne vrpce za 4.22° u odnosu na prirodnu dugu etanola. S obzirom na to da se kutna širina Aleksandrove tamne vrpce smanjila kritična udaljenost zaslona od tikvice se morala povećati. Obradom podataka mjerenja vrijednost d_c se povećala za 7.1 cm, a l_c za 5.56 cm u odnosu na teorijski predviđenu vrijednost. Razlog povećanja ortogonalne kritične udaljenosti je sporije konvergiranje zraka zbog slabijeg međusobnog kuta upada. Rezultati mjerenja potvrđuju očekivane promjene u relevantnim veličinama dok je uzrok ovih grešaka isti kao u slučaju s vodom. Na slici 4.21 prikazan je graf dominantnih valnih duljina u odnosu na udaljenost od centra zastora. S obzirom na to da je mjerenje izvršeno na plavom milimetarskom papiru koji posjeduje plave linije, vidljive su oscilacije u vrijednostima grafa. Unatoč tome na grafu se mogu odrediti ekstremne vrijednosti dominantnih valnih duljina i time odrediti širina duge na papiru kao i širina Aleksandrove tamne vrpce. Iz grafa je još vidljivo da duga drugog reda ima obrnuti redoslijed boja od duge prvog reda. Obradom rezultata mjerenja dobivena je kutna širina duge etanola koja iznosi $(1.7 \pm 0.8)^\circ$. Zbog neodređene vrijednosti indeksa loma etanola za valne duljine manje od 475 nm nije bilo moguće odrediti očekivanu prirodnu širinu duge. Rezultat u usporedbi s rezultatom dobivenim za vodu je veći, ali zbog nedostatka podataka nije moguće donositi dodatne zaključke.



Slika 4.21: Graf dominantnih valnih duljina (dolje) i pripadna fotografija duge na milimetarskom papiru (gore). Svaka točka na grafu odgovara prosjeku dominantnih valnih duljina stupca piksela na fotografiji. ($D = 21.4\text{cm}$).

5 Zaključak

U ovom diplomskom radu izložena je teorija nastanka duga na koju su primijenjeni efekti konačne debljine stijenka posude u kojoj se nalazi neka tekućina. Pokazano je kako se iz elementarnih zakona geometrijske optike mogu odrediti utjecaji debljine stijenke te kako se oni mogu izmjeriti.

Uočeni efekti su udvostručavanje duge, promjena kuta konusa duga, promjena širine Aleksandrove tamne vrpce kao i kritične udaljenosti za koju je ta vrpca vidljiva. Sve izmjerene promjene unatoč slaboj preciznosti odgovaraju teorijskim predviđanjima. U radu je također pokazano kako promjene vrijednosti ovise o dimenzijama tikvice i indeksima lomova sredstava. Za nadogradnju ovog eksperimenta potrebno je upotrijebiti izvor svjetlosti koji daje paralelniji snop većeg intenziteta od onog korištenog u radu. Također bi bilo korisno odabrati optimalnu tikvicu i postav bolje prilagoditi za mjerenje udaljenosti tikvice i zastora. Ovaj rad opisuje nastanak i svojstva duge na modelu kapljice kroz relativno jednostavan i zanimljiv eksperiment koji bi mogao biti od interesa profesorima fizike i znanstvenicima koji se bave popularizacijom znanosti.

6 Metodički dio

6.1 *Primjena tehnologije u školstvu u svrhu obrade i vizualizacije podatka*

Prilikom mjerenja fizikalnih veličina i obrade podataka mjerenja, oslanjalo se dobar dio vremena na tehnologiju. S obzirom na mogućnosti koje pružaju današnji mobiteli, računala i razni gadgeti, otvara se pitanje na koji način se takve metode mogu uključiti u svakodnevnu nastavu fizike i informatike u školama.

Zbog interaktivnog načina pristupanja problemu i rješavanja istog, razvijaju se vještine koje su tražene na modernom tržištu rada. Jedna od tih vještina gotovo sigurno je programiranje. Samim time što bi se učenicima dopustilo da problem riješe na svoj način, da odaberu svoju metodu prikupljanja i obrade podataka, dobili bi osjećaj za primjenu svojeg školskog znanja kroz praksu. S obzirom na poteškoće koje učenici imaju prilikom vizualizacije i interpretacije podataka vezanih uz gradivo matematike i fizike, ovo bi bila odlična prilika da se na interesantan način to učenicima približi. Uzmimo za primjer temu ovog diplomskog rada. Radi provjere rezultata i usporedbe eksperimentalnih vrijednosti s teorijom, funkcije su isprogramirane i nacrtane u MATLAB programskom jeziku. Jednom kada su funkcije isprogramirane jednostavno se mogu dobiti vrijednosti u slučaju kada se mijenjaju određene varijable unutar postava. Ako se traže nove teorijske vrijednosti istog postava s tekućinom drugog indeksa loma ili možda kakve promjene su se dogodile zbog tikvice debljeg stakla, promjenom ulaznih parametara izračunat će se nove vrijednosti. Tako prije samog izvedenog pokusa su dostupne sve izračunate teorijske vrijednosti: širina duge, radijus kružnice na zastoru za pojedinu valnu duljinu u odnosu na udaljenost tikvice od zastora, vizualizacija duge na zastoru za pojedine slučajeve itd. Tako je unaprijed moguće planiranje dimenzija zaslona potrebnog za izvedbu eksperimenta i za koje udaljenosti je optimalno izvršiti mjerenja. Samim time osoba prilikom mjerenja zna koje rezultate očekuje. Ovakvim pristupom neki od mukotrpnih postupaka raspisivanja na papiru i računanja na kalkulatoru se može zaobići s par linija koda. Da bi se napisalo tih par linija koda potrebno je potpuno razumijevanje informacija i podataka u problemu. Zato je kroz lagane primjere i zadatke učenicima moguće olakšati shvaćanje problema oko sebe, identifikaciju relevantnih veličina za dani problem, vi-

zualizaciju podataka i na kraju rješavanje samog problema. Ovakav tip nastave nije uvijek praktičan u školama, zato što zahtjeva određene uvjete koje ta škola možda ne ispunjava. Osim toga takav tip nastave vremenski je zahtjevan i ne stigne se napraviti puno u okvirima par školskih sati tjedno. Zato bi ova ideja mogla biti fakultativna aktivnost za učenike koje interesira spoj prirodnih znanosti i tehnologije. Ovim putem potiču se mladi profesori da u svojoj nastavi primjenjuju veći broj interaktivnih metoda prilikom izvođenja svojih satova kako zbog popularizacije znanosti tako i zbog aktivnosti same djece na satu.

6.2 Nastavna priprema: Odbijanje svjetlosti i nastajanje slike u ravnom zrcalu

ŠKOLA: Osnovna škola

RAZRED: 8. razred

NASTAVNA JEDINICA: Odbijanje svjetlosti i nastajanje slike u ravnom zrcalu

PREDVIĐENI BROJ SATI: 1

PREDMETNI ISHODI :

FIZ OŠ C.8.8. i FIZ D.8.8. – Analizira rasprostiranje i odbijanje svjetlosti te nastanak slike u zrcalu

- Razlikuje i definira kut upadne i reflektirane zrake.
- Analizira odnose kutova reflektirane i upadne zrake.
- Razlikuje raspršenje svjetlosti na glatkoj i hrapavoj površini.
- Konstruira i opisuje sliku nastalu odbijanjem svjetlosti od ravnog zrcala.

FIZ OŠ C.8.10. i FIZ OŠ D.8.10. – Istražuje fizičke pojave

FIZ OŠ C.8.11. i FIZ OŠ D.8.11. – Rješava fizičke probleme

MEĐUPREDMETNI ISHODI:

osr B.3.4 . – Suradnički uči i radi u timu

osr B.3.2. – Razvija komunikacijske kompetencije i uvažavajuće odnose s drugima

VRSTA NASTAVE: Istraživački usmjerena nastava

NASTAVNE METODE:

- Demonstracija pokusa

- Učeničko izvođenje pokusa /mjerjenja u skupinama
- Metoda razgovora – razredna rasprava
- Kooperativno rješavanje zadataka u skupinama
- Metoda pisanja /crtanja

OBLICI RADA:

- Frontalni
- Individualni
- Rad u skupinama

KORELACIJA S DRUGIM PREDMETIMA: Matematika

NASTAVNA POMAGALA I SREDSTVA: Izvor usmjerenog snopa svjetlosti, zrcalo, aluminijaska folija, prezentacija, ploča

LITERATURA: Literatura korištena za izradu pripreme navedena je u bibliografiji [10–12].

TIJEK NASTAVNOG SATA

Uvodni dio

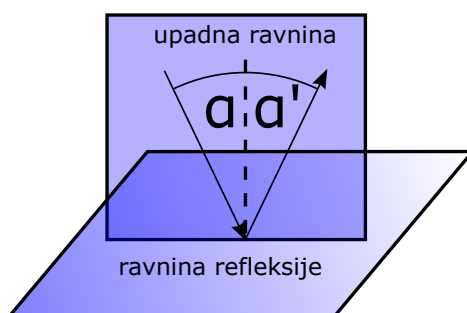
Uvodna rasprava: *putujemo neosvijetljenom cestom, ali ipak vidimo prometne znakove i rub ceste. Zašto? Kako to da gledajući jezero vidimo vlastiti odraz i prirodu što ga okružuje? Kako znamo samostalno urediti frizuru kada se ustanemo ujutro iz kreveta?* Učenici raspravljaju te iznose svoje pretpostavke i iskustva, a prethodnim pitanjima navodimo ih na nekoliko zaključaka: Svjetlost se reflektira o površinu predmeta oko nas. Refleksija zraka svjetlosti omogućuje nam da vidimo predmete oko nas. Ravno zrcalo nam daje jasni odraz predmeta koji su pozicionirani nasuprot njega. Zapisujemo na ploču naslov nastavne jedinice čije ćemo pravilnosti istražiti tijekom sata: Odbijanje svjetlosti i ravna zrcala

Središnji dio

Na istraživačka pitanja u središnjem dijelu sata učenici odgovaraju kroz niz pokusa. S obzirom na to da pokusi nisu zahtjevni, ako škola posjeduje adekvatnu opremu, mogu se izvoditi u grupama od 4-5 učenika . Poželjno je da učenici sami izvede pokuse kako bi ostali aktivni i zainteresirani. Prilikom izvođenja pokusa grupe treba obilaziti, kontrolirati i ispitivati.

1IP: Kako se reflektiraju zrake na ravnoj i glatkoj površini?

Svaka grupa dobije uređaj za usmjereni snop svjetlosti, kutomjer isprintan na papiru i zrcalo. Učenici crtaju postav i zapisuju svoja predviđanja. *U koju točku moramo uperiti snop svjetlosti želimo li izmjeriti kutove upada i refleksije? Naspram čega se definira upadni kut? Naspram čega se definira kut refleksije? Što se događa s kutom refleksije prilikom promjene upadnog kuta? Uočavate li kakve pravilnosti? Razrednom raspravom učenike se navodi na zaključak da se kut upadne i reflektirane zrake računa u odnosu na normalu površine u točki refleksije. Kut reflektirane zrake mijenja se za jednaki iznos promjene upadnog kuta zrake. Upadni kut i kut refleksije su uvijek jednaki:*

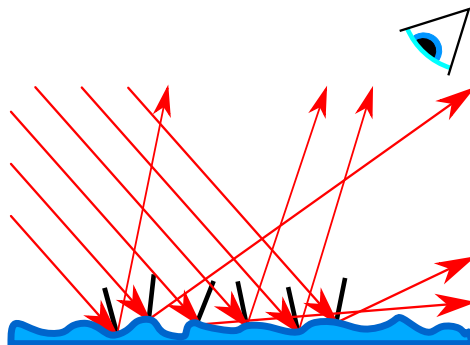


Slika 6.1: Zakon refleksije: $\alpha = \alpha'$

2IP: Kako se reflektiraju zrake svjetlosti na neravnoj površini?

Učenici zapisuju svoja predviđanja i crtaju postav pokusa. Zatim učenici ponavljaju eksperiment s usmjerenim snopom svjetlosti, ali ovaj put umjesto zrcala imamo zgužvanu aluminijsku foliju. Od učenika tražimo da nam pokušaju dati objašnjenje što su to uočili. *Kako se svjetlost odbija o neravnu površinu? Kakav je kut refleksije za različite točke na aluminijskoj foliji? Vrijedili li zakon refleksije za neravne površine? Razrednom raspravom želimo uvesti pojam difuzne svjetlosti te pojasniti*

učenicima da zakon refleksije vrijedi i za neravne površine samo što se za svaku točku na zgužvanoj foliji zrake svjetlosti odbijaju u drugom smjeru. U tom slučaju neravnu površinu možemo zamisliti kao puno malih ogledala koja su orijentirana u svim smjerovima. Prilikom upada zraka na takvu površinu svjetlost se reflektira od svakog ogledala drugačije ovisno o upadnom kutu za dano ogledalo.

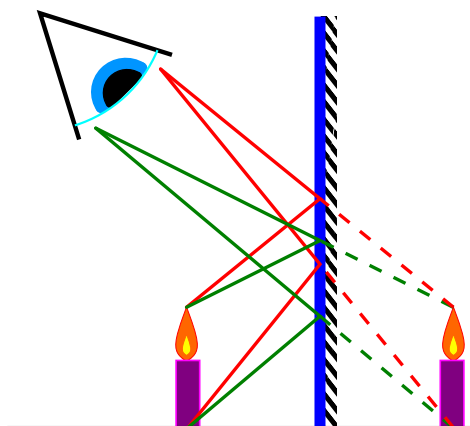


Slika 6.2: Refleksija zraka o neravnu površinu.

Demonstracijski pokus: odnosi se na nastajanje slike u ravnom zrcalu. Uzmemo dvije svijeće i između njih na jednaku udaljenost stavimo staklo. Zapalimo jednu svijeću, a drugu ne. Što uočavate gledajući nezapaljenu svijeću kroz staklo? Objasnite zašto svijeća izgleda kao da gori.

IP3: Kako nastaje slika u ravnom zrcalu?

Na postavu demonstracijskog pokusa sa svijećom, nacrtajte zrake koje se reflektiraju od stakla u promatračevo oko. U kojoj točki se sijeku njihovi produžeci? Nacrtajte i objasnite. Bitno je paziti na odnos kutova prilikom crtanja upadnih i reflektiranih zraka ($\alpha = \alpha'$), dok produžeci tih zraka na drugoj strani konstruiraju sliku u točki u kojoj se sijeku. Zbog refleksije zraka o ravno zrcalo imamo privid kao da su zrake došle s druge strane zrcala. Slika se formira na jednakoj udaljenosti kao što je predmet od zrcala. S obzirom da se zrake ne sijeku iza zrcala, onda iza zrcala ne postoji stvarna slika. Takva slika naziva se prividna ili virtualna jer se stvara u oku promatrača.



Slika 6.3: Konstrukcija slike u ravnom zrcalu.

Završni dio

Završni dio sata sastoji se od konceptualnih pitanja i pitanja za raspravu:

1. *Hoće li ugašena svijeća iz demonstracijskog pokusa izgledati kao da gori u slučaju da svijeće nisu na jednakoj udaljenosti od stakla? Objasni!*

Neće. Razlog je nastajanje slike na jednakoj udaljenosti ravne glatke površine od predmeta.

2. *Ako na prozirnu foliju napišete neku riječ, kako je možete čitati u zrcalu?*

Tako što strana na kojoj je napisana riječ mora biti postavljena prema nama, da je možemo čitati. Tada ćemo je moći čitati i u zrcalu.

3. *Postavite sada riječ na foliji da stoji kao natpis na majici. Možete li sada jednostavno pročitati riječ u zrcalu?*

Ne. S obzirom na to da smo zarotirali natpis skupa s folijom, vidimo zrcalnu sliku i u ogledalu i na foliji.

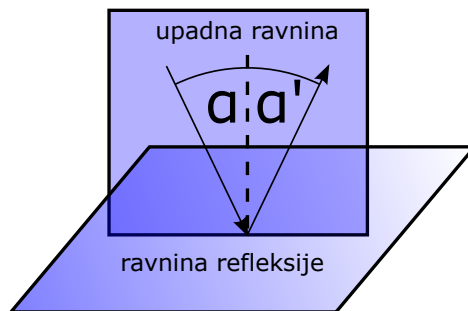
4. *Pogledajte se u zrcalo i mahnite lijevom rukom. Zamjenjuje li zrcalo lijevu i desnu stranu?*

Ne. Zato što kada mahnete lijevom rukom u ogledalu vidite uistinu odraz lijeve ruke. Dotaknete li zrcalo lijevom rukom i slika lijeve ruke će dotaknuti vas.

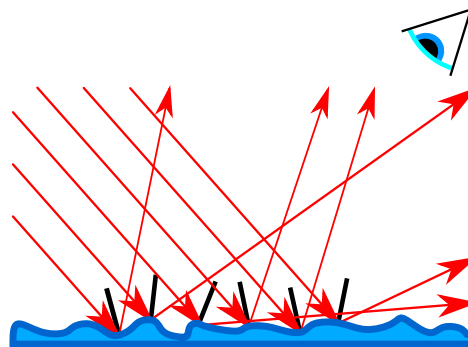
5. *Koje strane zrcalo zamjenjuje? Objasni!*

Naprijed i nazad (smjer okomit na površinu zrcala). Kada pogledamo odraz planine u jezeru vidimo ga naopačke.

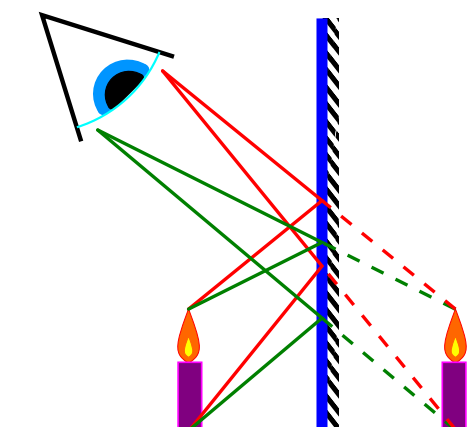
PLAN PLOČE



Zakon refleksije na ravnoj glatkoj površini. Upadni kut i kut refleksije su uvijek jednaki $\alpha = \alpha'$.



Raspršenje svjetlosti na neravnoj površini.



Konstrukcija slike u ravnom zrcalu.

Dodaci

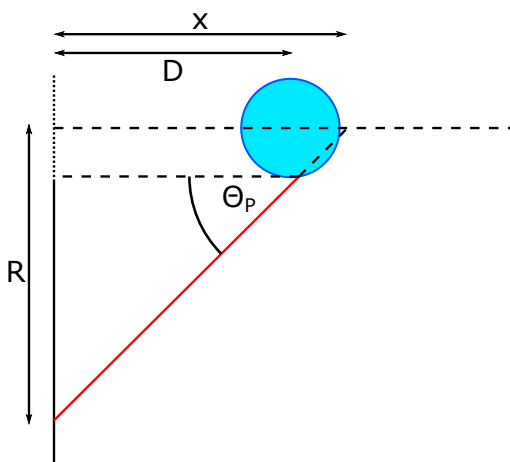
Dodatak A Računanje kuta konusa duge

Da bi izračunali kut konusa primarne i sekundarne duge, potrebno je na crtežu postava (A.1, A.2) identificirati relevantne veličine. Veličine koje smo izmjerili prilikom izvedenog eksperimenta su udaljenost D od centra tikvice do zaslona i radijus duge R , a X je nepoznata udaljenost točke izranjanja Kartezijevih zraka od zaslona. Kut koji tražimo je kut između optičke osi i Kartezijeve zrake (Θ_P, Θ_S). Iz slika A.1, A.2 se vidi da prilikom promjene položaja tikvice ΔX iznosom odgovara ΔD . Promjenu udaljenosti tikvice od zaslona ΔD i promjenu radijusa duge ΔR između pojedinih mjerenja možemo zapisati u obliku tangensa kuta koji tražimo. Prilagodбом pravca na točke mjerenja i metodom najmanjih kvadrata izračunata je vrijednost kuta i pogreška.

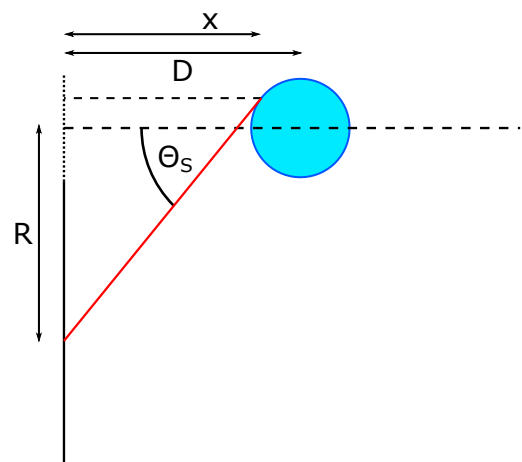
$$\tan(\Theta) = \frac{\Delta R}{\Delta D}. \quad (\text{A.1})$$

Na slici A.3 vidimo skicu formiranja duge prvog i drugog reda koje zatvaraju kut α koji opisuje kutnu širinu Aleksandrove tamne vrpce, a iznosom je jednaka razlici kuteva:

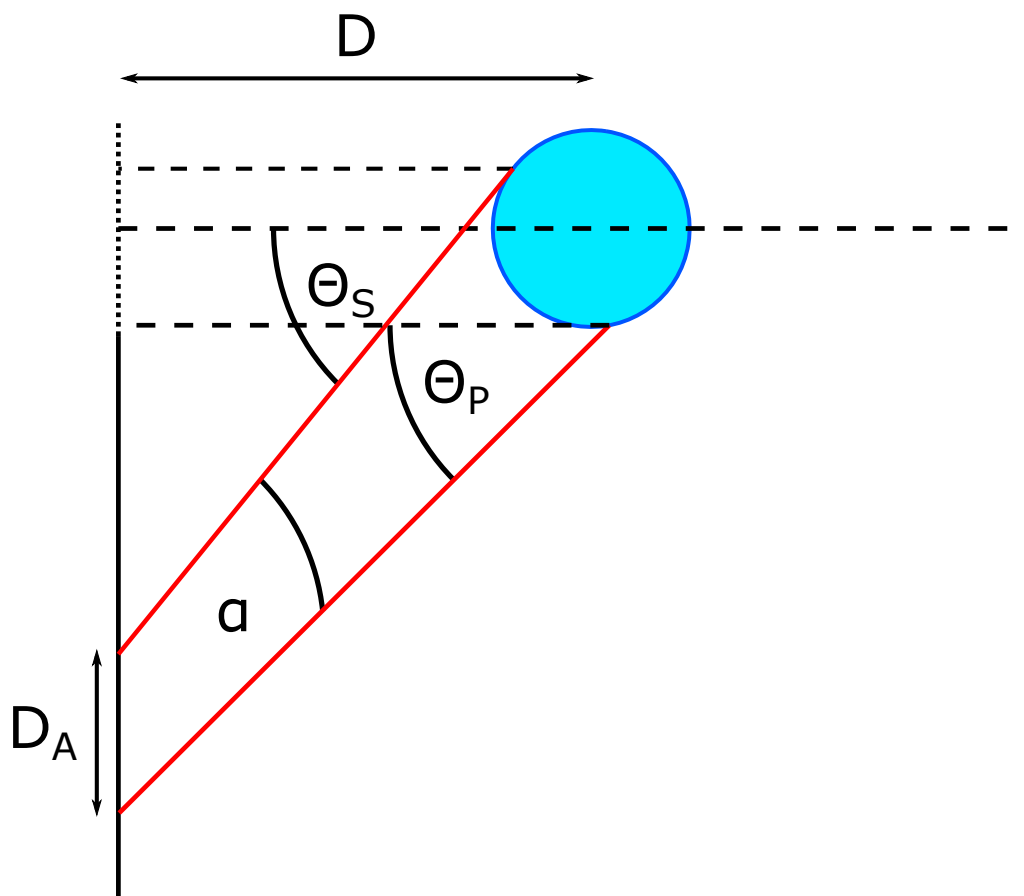
$$\alpha = \Theta_S - \Theta_P. \quad (\text{A.2})$$



Slika A.1: Slučaj formiranja primarne duge.



Slika A.2: Slučaj formiranja sekundarne duge.



Slika A.3: Skica odnosa kutova duge prvog i drugog reda na zaslonu.

Dodatak B Snimanje duga

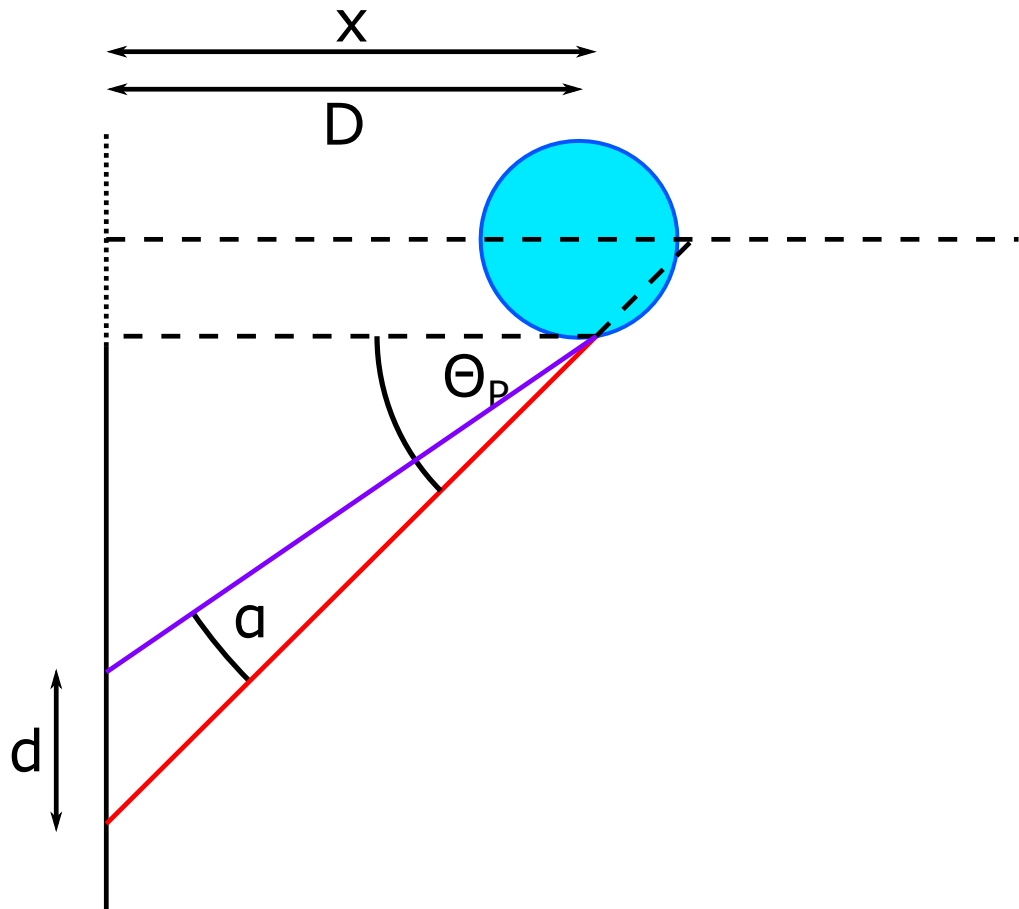
Za potrebe ovog diplomskog rada izvršeno je snimanje slika duge s dva različita uređaja. Slike 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 slikane su mobilnim uređajem Xiaomi Pocophone f1 M1805E10A sa udaljenosti otprilike 30 cm. Slika 4.11 slikana je kamerom DCC1240C-HQ (THORLAB). Snimljene slike učitane su u program za matematičku analizu MATLAB. Iz slika su dobivene RGB vrijednosti pojedinog piksela. Te vrijednosti pretvorene su u HSV format iz kojeg je formulom:

$$\lambda = 650 - \frac{250}{270}H, \quad (\text{B.1})$$

dobivena dominantna valna duljina L u nm. Oznaka H označuje nijansu (hue) koja je jedna od tri vrijednosti s kojom se opisuje boja u HSV formatu.

Dodatak C Računanje kutne širine duge

Za računanje kutne širine duge korištena je skica sa slike C.1. Izmjerena je udaljenost



Slika C.1: Skica širine duge na zaslonu

D tikvice od zastora i širina duge na zastoru d , a kut Θ_P izračunat je postupkom opisanim u dodatku A. Iz geometrije problema određena je ovisnost udaljenosti x , zastora od izranjanja Kartezijeve zrake, o kutu širenja α , kutu Θ_P i širini d duge na zastoru:

$$x = \frac{d \cos(\Theta_P - \alpha) \cos(\Theta_P - 2\alpha)}{2 \sin(\alpha)}. \quad (\text{C.1})$$

U aproksimaciji malog kuta α , vrijedi $\cos(\Theta_P - \alpha) \approx \cos(\Theta_P)$ te $\cos(\Theta_P - 2\alpha) \approx \cos(\Theta_P)$ čime se jednadžba C.1 svodi na oblik:

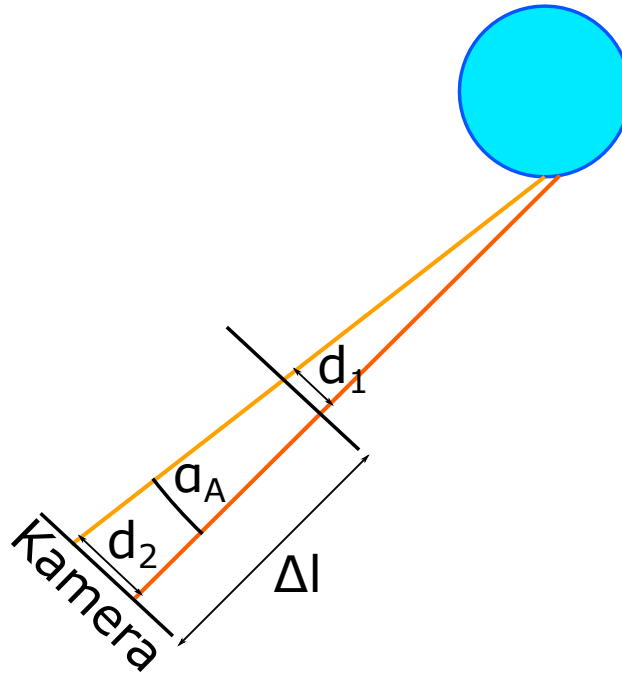
$$x = \frac{d \cos^2(\Theta_P)}{2 \sin(\alpha)}. \quad (\text{C.2})$$

Iz slike C.1 se vidi da prilikom promjene položaja tikvice, ΔD iznosom odgovara Δx . Zapišemo li jednadžbu C.2 u obliku razlike dvaju mjerenja, možemo odrediti kut α

koji opisuje kutnu širinu duge:

$$\alpha = \frac{\Delta d \cos^2(\Theta_P)}{2\Delta D}. \quad (\text{C.3})$$

Dodatak D Analiza slika



Slika D.1: Snimanje kamerom.

Iz slika dobivenih kamerom izračunat je razmak u pikselima između dominantnih valnih duljina 615 nm i 630 nm. Ta je vrijednost pomnožena s veličinom piksela $5.3 \mu\text{m}$ kako bi odredili širinu intervala u mjernim jedinicama duljine. Dobivena duljina d aproksimirana je kružnim lukom te je prema formuli:

$$\alpha_A = \frac{d}{l}, \quad (\text{D.1})$$

određen kut α_A sa slike D.1 koji opisuje kutnu širinu intervala valnih duljina 615 nm i 630 nm.

Dodatak E Numeričke simulacije

Kako bi smo mogli usporediti kut između valnih duljina 615 nm i 630 nm, izmjeren kamerom, s teorijom izvršene su numeričke simulacije. Korištena je funkcija kutnog otklona zraka 3.8a. Za udarni parametar uzeta je vrijednost minimuma funkcije 3.8a za $k = 1$:

$$b = 0.86171 \cdot r_v.$$

Za unutarnji i vanjski radijus tikvice uvrštene su vrijednosti $r_v = 4.25$ cm i $r_u = 3.91$ cm. Ovisnost indeksa loma o pojedinoj valnoj duljini simulirana je izrazima:

$$n_s = 1.5220 + \frac{4.59}{\lambda^2}, \quad (\text{E.1a})$$

$$n_v = 1.3199 + \frac{6878}{\lambda^2} - \frac{1.132 \cdot 10^9}{\lambda^4} + \frac{1.11 \cdot 10^{14}}{\lambda^6}. \quad (\text{E.1b})$$

Literatura

- [1] Corradi, Massimo. "A short history of the rainbow." *Lettera Matematica* 4.1 (2016): 49-57.
- [2] Haußmann, Alexander. "Rainbows in nature: recent advances in observation and theory." *European Journal of Physics* 37.6 (2016): 063001.
- [3] The history of rainbow, <http://datalyse.dk/Rainbow/history.htm>
- [4] Jackson, J. D. "From alexander of aphrodisias to young and airy." *Physics reports* 320.1-6 (1999): 27-36.
- [5] Selmke, Markus, and Sarah Selmke. "Revisiting the round bottom flask rainbow experiment." *American Journal of Physics* 86.1 (2018): 14-21.
- [6] Young, Hugh D., et al. *University physics*. Vol. 9. Reading, MA: Addison-Wesley, 1996.
- [7] Griffiths, David J. "Introduction to electrodynamics." (2005): 574-574.
- [8] Walker, Jearl D. "Multiple rainbows from single drops of water and other liquids." *American Journal of Physics* 44.5 (1976): 421-433.
- [9] Dispersion, from <https://phys.libretexts.org/@go/page/4489> (2020, November 5). Retrieved September 23, 2021,
- [10] Šindler, Gustav, Mikuličić, Branka: *Fizika, udžbenik za 8. razred osnovne škole / Valić, Branimira (ur.); Zagreb: Školska knjiga, 1999*
- [11] Vladimir Paar, Sanja Martinko: *Fizika 8, udžbenik za 8. razred osnovne škole, Zagreb: Školska knjiga, 2012*
- [12] Zumbulka Beštek Kadić, Nada Brković, Planinka Pećina: *Fizika 8, udžbenik za 8. razred osnovne škole, Zagreb: Alfa, 2009*