

# Hopfove algebre u fizici

---

**Herceg, Nikola**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:879182>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-23**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Nikola Herceg

HOPFOVE ALGEBRE U FIZICI

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Nikola Herceg**

Diplomski rad

**Hopfove algebre u fizici**

dr. sc. Tajron Jurić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, upisati godinu izrade.



## Sažetak

Uvodimo Hopfove algebre i primjenjujemo ih u teoriji polja na nekomutativnom prostoru, višečestičnom anyonskom sustavu, renormalizaciji Feynmanovih dijagrama te pokazujemo *bicrossproduct* strukturu  $\kappa$ -Poincareove algebre. Ilustriramo neke fenomene koji se pojavljuju u teoriji polja na nekomutativnom prostoru poput UV/IR miješanja i neplanarnih dijagrama, dajemo vezu između kvazitriangularne strukture i čestične statistike te izvodimo Yang-Baxterovu jednadžbu. Feynmanove dijagrame opisujemo pomoću Hopfove algebre ukorijenjenih stabala slijedeći pristup Connesa i Kreimera. Na kraju faktoriziramo  $\kappa$ -Poincare algebru analogno semidirektnom produktu Poincareove algebre.

Ključne riječi: Hopf, algebra, koalgebra, bialgebra, kvazitriangularna, statistika, nekomutativnost, renormalizacija, BPHZ, kvantna grupa

# Hopf algebras in physics

## Abstract

We introduce Hopf algebras and apply them to non-commutative field theory, multiparticle anyonic system, renormalization of Feynman diagrams and bicrossproduct structure of the  $\kappa$ -Poincare Hopf algebra. Several phenomena arising from the spacetime non-commutativity are illustrated, such as UV/IR mixing and non-planar diagrams. The connection between the quasitriangular structure and particle statistics is demonstrated via derivation of the Yang-Baxter equation. Feynman diagrams are renormalized using the Connes-Kreimer technique of rooted trees. In the end we show how  $\kappa$ -Poincare algebra factorises in the way analogous to the semidirect structure of the Poincare group.

Keywords: Hopf, algebra, coalgebra, bialgebra, quasitriangular, statistics, non-commutativity, renormalization, BPHZ, bicrossproduct, quantum group

# Sadržaj

Uvod i motivacija	1
<b>1 Hopfova algebra</b>	<b>4</b>
1.1 Osnovne definicije . . . . .	4
1.2 Koalgebra i bialgebra . . . . .	9
1.3 Hopfova algebra . . . . .	12
1.4 Primjeri . . . . .	16
<b>2 Čestična statistika i operator zakretanja</b>	<b>21</b>
2.1 Kvazitriangularne Hopfove algebre . . . . .	21
2.2 Anyoni . . . . .	25
2.3 Drinfeldovo zakretanje . . . . .	28
2.4 Nekomutativna teorija polja . . . . .	32
2.5 Posljedice nekomutativnosti . . . . .	39
<b>3 Renormalizacija u teoriji polja</b>	<b>45</b>
3.1 Algebra ukorijenjenih stabala . . . . .	45
3.2 Renormalizacija i BPHZ procedura . . . . .	49
3.3 Zimmermanova formula . . . . .	56
3.4 Feynmanovi dijagrami . . . . .	59
<b>4 Fizika na Planckovoj skali</b>	<b>61</b>
4.1 Dualnost i kodjelovanje . . . . .	62
4.2 Bicrossproduct . . . . .	65
4.3 $\kappa$ -Poincare i $\kappa$ -Minkowski . . . . .	69
<b>Zaključak</b>	<b>77</b>
<b>Dodaci</b>	<b>78</b>
<b>A Simetrična grupa i grupa pletenica</b>	<b>78</b>
<b>Literatura</b>	<b>80</b>

# Uvod i motivacija

Hopfove algebre dobile su ime prema njemačkom matematičaru Heinzu Hopfu. Počele su se intenzivno koristiti u Hopfovom radu 1940-ih godina u području algebarske topologije, a istovremeno se teorija oko njih razvijala i u algebarskoj geometriji [1]. U fizici se koriste u mnogim područjima, npr. fizici čvrstog stanja, teoriji polja, teoriji struna i fizici elementarnih čestica. Kako su usko povezane s grupama, pojavljuju se u opisu simetrija raznih teorija. U tom kontekstu posebno se ističu kontinuirane, tj. Liejeve grupe koje se u praksi često promatraju na razini pripadne Liejeve algebre. Hopfove algebre pojavljuju se kao određena proširenja pojmova grupe i algebre, npr. svaka Liejeva algebra ima pripadnu omotačku Liejevu algebru koja je Hopfova algebra, a funkcije na kompaktnoj ili konačnoj grupi također tvore Hopfov algebru.

Dvije stvari najviše razlikuju Hopfov algebru u odnosu na običnu algebru: osim produkta ima i koprodukt koji je u suštini produkt u obrnutom smjeru<sup>1</sup> te ima antipod koji igra ulogu sličnu inverzu. Produkt i koprodukt nisu proizvoljni odnosno nezavisni, već moraju biti kompatibilni, što ćemo precizirati u prvom poglavlju. Algebru s kompatibilnim produktom i koproduktom zovemo bialgebra, a uz antipod ona postaje Hopfova algebra. Ove ideje uz osnovne matematičke definicije uvodimo u prvom poglavlju koje je ujedno i baza za cijeli rad. Ostala poglavlja mogu se čitati relativno nezavisno nakon prvog. Poglavlja 2, 3 i 4 na početku sadrže matematički uvod koji je nužan za to poglavlje i fiziku koja na kraju proizlazi. U prvom poglavlju uvodimo osnovne pojmove iz algebre poput grupe, polja, prstena, direktne sume i tenzorskog produkta. Zatim dajemo definiciju algebre i koalgebre, bialgebre te Hopfove algebre. Usput kroz primjere i komutativne dijagrame razvijamo intuiciju. Najčešće primjene Hopfovih algebri u fizici možemo ugrubo podijeliti u tri skupine:

**1. Nekomutativna teorija polja** i njena konstrukcija pomoću operatora zakretanja (*twist*). Ovo je tema poglavlja 2 u kojem ćemo prvo uvesti matematičku teoriju kvazitriangularnih Hopfovih algebri i R-matrice, a zatim ćemo obraditi dvije fizikalne primjene.

Prva primjena je u području fizike anyona, gdje ćemo vidjeti kako se višestruki sustavi anyona prirodno opisuju unutar formalizma Hopfovih algebri. To je prvi dodir između čestične statistike i Hopfovih algebri, što je još jedna od čestih primjena u literaturi [2]. Anyoni sami po sebi nemaju puno veze s nekomutativnom teorijom polja, no višestruki sustavi imaju. Matematika koja ih opisuje im je zajednička pa će nam fizika anyona poslužiti kao stepenica za razumijevanje statistike na nekomutativnom

---

<sup>1</sup>Produkt možemo "programerski" gledati kao operaciju koja na ulazu prima dva elementa algebre te na izlazu daje neki element algebre. Koprodukt u toj slici odgovara zamjeni ulaza i izlaza, tj. reverznom procesu.



prostoru.

Druga fizikalna primjena je realizacija najjednostavnije moguće nekomutativne teorije polja i Moyalovog prostora na kojem ona djeluje. Ideja je dobiti fizikalno konzistentnu (kovarijantnu) teoriju koja ima komutacijske relacije između koordinata oblika  $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}$ . Kad prostorne koordinate ne komutiraju, za prostor kažemo da je nekomutativan. Inspiracija za ovaj oblik nekomutativnosti osim zbog jednostavnosti dolazi i iz niskoenergetskog limesa određenih teorija struna [3]. U zaključku ćemo na primjeru Moyalovog prostora analizirati neke fenomene koje nekomutativnost prostora donosi u teoriju polja: modifikacije lagranžijana/Feynmanovih pravila i miješanje UV/IR divergencija.

**2. Renormalizacija u teoriji polja** tema je trećeg poglavlja. Ovdje je ideja Feynmanov dijagram promatrati kao kombinaturnu strukturu, Hopfovu algebru ukorijenjenih stabala. Razmotrit ćemo nekoliko praktičnih integrala korisnih za upoznavanje Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmerman (BPHZ) renormalizacijske procedure i povezivanje s ovim kombinaturnim pristupom. Na kraju poglavlja uzet ćemo neke jednostavne Feynmanove dijagrame iz  $\phi^3$  teorije te dati recept za njihovu renormalizaciju. Pritom nećemo računati konkretne amplitude nego ćemo se primarno baviti problematikom preklopnih i ugnježenih divergencija koje se pojavljuju kod dijagrama s više petlji te kako ih rastaviti na jednostavnije dijagrame s pripadnim kontračlanovima. Strukturu Hopfove algebre u Feynmanovim dijagramima prvi su uočili Connes i Kreimer krajem 90ih godina [4], [5]. Njihovi radovi glavni su izvor za ovo poglavlje.

**3. Fizika na Planckovoj skali** tema je četvrtog poglavlja. Ovo je vjerojatno glavna primjena Hopfovih algebra u modernoj fizici, gdje se pojavljuju u okviru tzv. kvantnih grupa. Promatrat ćemo posebnu klasu kvantnih grupa, *bicrossproduct* model i kako proizlazi iz teorije Hopfovih algebra. Među primjerima ističe se  $\kappa$ -Poincare grupa koja djeluje kovarijantno na  $\kappa$ -Poincare prostoru. Ovaj primjer je posebno zanimljiv jer predviđa varijabilnu brzinu svjetlosti [6]. Ukratko ćemo opisati ideju tog eksperimenta.

Još jedno područje primjene Hopfovih algebra je u analitičkim svojstvima i klasifikaciji funkcija koje tvore amplitudu u Feynmanovim dijagramima [7] [8]. Pristup se temelji na rastavu integrala na polilogaritme te ističe njihovu vezu sa zeta funkcijom. Hopfova algebra ovdje se pojavljuje u obliku tzv. *shuffle* algebra [9] koja enkodira produkt dva polilogaritma. Hopfove algebrae pojavljuju se i u području integrabilnih sustava [10] [11].

Nekomutativnost prostorvremena možemo fizikalno tumačiti pojavom mikroskopskih crnih rupa na visokim energijama i malim udaljenostima [12] [13]. U ovim radovima pokazano je kako relacije neodređenosti između koordinata proizlaze iz Heisenbergovog principa neodređenosti i opće teorije relativnosti; ideju ćemo ukratko ilustrirati u drugom poglavlju.

Kako se radi o temi iz područja matematičke fizike, podjednako su zastupljeni matematički aspekti teorije. Prvo poglavlje i prva potpoglavlja u ostalim poglavljima uglavnom su iz Majidove knjige [14] te sadrže svu bitnu matematiku. Neke dokaze iz te knjige smo nadopunili/dodatno raspisali ili pojasnili, a neke izostavili i referirali se na literaturu u kojoj se mogu pronaći pa stoga rad može biti od interesa isključivo matematički naklonjenim čitateljima kao praktični uvod u područje Hopfovih algebri.

# 1 Hopfova algebra

U ovom poglavlju prezentiramo nužne matematičke alate koji su potrebni za baratanje Hopfovih algebra. Cilj nam je upoznati čitatelja s definicijom Hopfovih algebra i razumjeti pojedine elemente definicije.

Materijal je uglavnom uzet iz prvog poglavlja [14] i [15] te zadnjeg iz [2] i ponešto iz [9]. Hopfove algebre u matematiku je 1941. godine uveo Heinz Hopf kako bi jednim jezikom opisao zajedničke aspekte grupa i algebra [16].

## 1.1 Osnovne definicije

**Grupa**  $(G, \cdot)$  je skup na kojem je definiran asocijativni produkt. Sadrži jedinični element  $e \in G$  te za svaki  $g \in G$  postoji inverzni element  $g^{-1} \in G$  za koji vrijedi  $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$ . Ako izostavimo zahtjev invertibilnosti, imamo (unitalnu) **polugrupu**. Za Abelovu (komutativnu) grupu operaciju grupnog množenja obično pišemo aditivno, dakle  $(G, +)$  dok jedinični element označavamo s 0. U suprotnom pišemo  $(G, \cdot)$  i jedinicu označavamo s 1 te znak produkta često izostavljamo.

**Homomorfizam**  $f : G \rightarrow H$  grupa  $G$  i  $H$  je preslikavanje za koje vrijedi  $f(uv) = f(u)f(v)$ ,  $\forall u, v \in G$ . Množenje na lijevoj strani je u grupi  $G$ , dok je na desnoj u  $H$ . Formalno bi dakle pisali  $f(u \cdot_G v) = f(u) \cdot_H f(v)$ . Ako je  $H \subset GL(n; \mathbb{C})$  podskup  $n \times n$  kvadratnih matrica, tada  $f$  konvencionalno označavamo s  $D$  i zovemo ga reprezentacija. Homomorfizam čuva grupnu strukturu, tj. nije bitno množimo li prvo unutar  $G$  pa se onda prebacimo u  $H$  ili se prvo prebacimo u  $H$  pa zatim tamo množimo, rezultat mora biti isti. Ovakve izjave korisno je vizualizirati preko komutativnih dijagrama. Dijagram za svojstvo homomorfizma je

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\cdot_G} & G \\ f \times f \downarrow & & \downarrow f \\ H \times H & \xrightarrow{\cdot_H} & H \end{array}$$

Polazne i konačne točke dijagrama su domene i kodomene preslikavanja naznačenih na strelicama koje ih povezuju. Za proizvoljni element početne domene (gore lijevo), rezultat dobiven primjenjujući funkcije na putanji desno pa dolje mora biti isti element konačne kodomene (dolje desno) kojeg bi dobili primjenom funkcija na drugoj mogućoj putanji (dolje pa desno).

**Polje**  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  je skup  $\mathbb{K}$  za koji su  $(\mathbb{K}, +)$  i  $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot)$  kompatibilne Ablove grupe, tj. vrijedi distributivnost,  $a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in \mathbb{K}$ . Uglavnom ćemo uzimati  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Ukoliko je  $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot)$  polugrupa i to ne nužno Abelova, imamo **prsten**. Poznati primjer je prsten polinoma u jednoj varijabli gdje je množenje komutativna

polugrupa, a nekomutativna bi bila kad bi koeficijenti bili npr. kvadratne matrice. Grupa može djelovati na druge objekte pa kažemo da grupa  $G$  djeluje na skup<sup>2</sup>  $M$  ako za svaki  $g \in G$  postoji preslikavanje  $M \rightarrow M$ , npr.  $m \mapsto g \triangleright m$  koje poštuje strukturu grupe, tj.  $g \triangleright (h \triangleright m) = (gh) \triangleright m, \forall g, h \in G, m \in M$ . Ovo zovemo lijeva akcija, a desnu pišemo kao  $m \mapsto m \triangleleft g$  i pravilo glasi  $(m \triangleleft h) \triangleleft g = m \triangleleft (hg)$ . Prethodno definiranu reprezentaciju u ovom kontekstu možemo gledati kao lijevo/desno djelovanje, jer ako je  $M$  vektorski prostor dimenzije  $n$ , tada su za svaki  $g$  preslikavanja  $M \rightarrow M$  dana s  $g \mapsto D(g) \in GL(n, \mathbb{C})$  i vrijedi  $D(g)D(h) = D(gh)$  (djelovanje).

**Vektorski prostor**  $(V, +; \mathbb{K})$  nad poljem  $\mathbb{K}$  je Abelova grupa  $(V, +)$  i djelovanje multiplikativne grupe  $\mathbb{K} - \{0\}$  na  $V$  zvano množenje skalarom. Ove operacije su kompatibilne:  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$  i  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$  za sve  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  i  $v, w \in V$ . Za dva vektorska prostora  $(V, +; \mathbb{K})$  i  $(W, +; \mathbb{K})$  postoji vektorski prostor  $(V \oplus W, +; \mathbb{K})$ , **direktna suma**. Sastoji se od uređenih parova  $(v, w) \in V \times W$ . Djelovanje skalara iz  $\mathbb{K}$  dano je s  $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$ , a operacija zbrajanja je  $(v, w) + (x, y) = (v + x, w + y)$ . Elemente oblika  $(v, 0)$ ,  $(0, w)$  i  $(v, w)$  pišemo kao  $v$ ,  $w$  i  $v + w$  kad radimo unutar  $V + W$ . Još jedan vektorski prostor kojeg možemo napraviti od dva vektorska prostora je **tenzorski produkt**  $(V \otimes W; \mathbb{K})$ . Nećemo ga konstruirati već ćemo samo navesti bitna svojstva:

$$\begin{aligned} v \otimes w + x \otimes y &= x \otimes y + v \otimes w, & \lambda(v \otimes w) &= \lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w \\ (v + x) \otimes w &= v \otimes w + x \otimes w, & v \otimes (w + y) &= v \otimes w + v \otimes y. \end{aligned}$$

Ključna razlika u odnosu na direktnu sumu je drugo svojstvo, množenje skalarom koje interpretiramo kao multilinearnost tenzorskog produkta. Za konačnodimenzionalne  $V$  i  $W$  dimenzija  $\dim V$  i  $\dim W$  vrijedi  $\dim V \oplus W = \dim V + \dim W$  te  $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$ . **Transpoziciju** ili zamjenu  $\tau$  definiramo kao  $\tau : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ ,  $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$ .

**Lema 1.1.** *Polje  $\mathbb{K}$  možemo gledati kao jednodimenzionalni vektorski prostor. Tada postoji kanonski izomorfizam između  $\mathbb{K} \otimes V \cong V \otimes \mathbb{K} \cong V$ .*

*Dokaz:* Preslikavanje  $\mathbb{K} \otimes V \rightarrow V$  dano je s  $\lambda \otimes v \mapsto \lambda v$ , a inverzno preslikavanje  $V \rightarrow \mathbb{K} \otimes V$  s  $v \mapsto 1 \otimes v$ . Ovaj rezultat ne iznenađuje pošto je  $\dim V \otimes \mathbb{K} = \dim V \cdot \dim \mathbb{K} = \dim V$ . □

Za svaki vektorski prostor  $(V, +; \mathbb{K})$  postoji **dualni** vektorski prostor  $V^*$   $\mathbb{K}$ -linearnih preslikavanja iz  $V$  u  $\mathbb{K}$ . Dakle, za  $\phi \in V^*$  vrijedi  $\phi(\lambda v + \mu w) = \lambda \phi(v) + \mu \phi(w)$ . Zbroj

---

<sup>2</sup>Ovakav skup zovemo modul. Za reprezentaciju grupe operatorima na  $n$ -dimenzionalnom vektorskom prostoru, modul je isti vektorski prostor. Kasnije ćemo definirati istoimeni pojam modula za algebru.

je dan s  $(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v)$ , a množenje skalarom s  $(\lambda\phi)(v) = \phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$ . Za konačnodimenzionalne  $V$  i  $W$  vrijedi  $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$  (inače je lijeva strana podskup desne).

**Algebra**  $(A, \cdot, +; \mathbb{K})$  nad poljem  $\mathbb{K}$  je prsten  $(A, \cdot; \mathbb{K})$  i djelovanje polja  $\mathbb{K}$  na  $A$  (množenje skalarom) koje je kompatibilno s produktom i zbrojem. Stoga je  $(A, \cdot, +)$  prsten te je  $(A, +; \mathbb{K})$  vektorski prostor i vrijedi  $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$  za sve  $a, b \in A$  i  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Ekvivalentno, algebra nad  $\mathbb{K}$  je vektorski prostor  $(A, +; \mathbb{K})$  za koji postoji kompatibilan produkt (između pojedinih vektora, ne samo skalara i vektora). Poznati primjer je algebra  $GL(n; \mathbb{C})$  kompleksnih  $n \times n$  matrica. Ako zaboravimo na matrični produkt, imamo vektorski prostor čije operacije su poznati zbroj matrica i množenje matrice skalarom. Ako dodatno uvedemo matrični produkt, imamo algebru. Ako pak zaboravimo na množenje skalarom i ostavimo samo matrični produkt te zbroj matrica, imamo prsten.

Kompatibilnost produkta sa zbrojem i množenjem skalarom sugerira da ga definiramo kao linearno preslikavanje  $\cdot : A \otimes A \rightarrow A$ . Zahtijevamo da je asocijativan i da postoji jedinica  $1_A$ . Jedinicu možemo apstraktnije definirati preko preslikavanja  $\eta : \mathbb{K} \rightarrow A, \eta(\lambda) = \lambda 1_A$ . Ukratko, algebra je vektorski prostor  $A$  s produktom i jedinicom tako da sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes A \otimes A & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & id \otimes \cdot & & \cdot \otimes id & \\
 A \otimes A & & & & A \otimes A \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & A & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes A & & \\
 \eta \otimes id \uparrow & \searrow \cdot & \\
 \mathbb{K} \otimes A & \xrightarrow{\cong} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes A & & \\
 id \otimes \eta \uparrow & \searrow \cdot & \\
 A \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{K}
 \end{array}
 \tag{1.1}$$

Prvi dijagram čitamo kao  $\cdot(id \otimes \cdot) = \cdot(\cdot \otimes id)$  ili za odabir proizvoljnog elemenata domene  $a \otimes b \otimes c$  kao  $a(bc) = (ab)c$ . Za algebre  $A$  i  $B$  možemo definirati algebru  $A \otimes B$ . Kao vektorski prostor,  $A \otimes B$  je vektorski prostor dan tenzorskim produktom vektorskih prostora  $A$  i  $B$ , a algebarski produkt je  $(a \otimes c)(b \otimes d) := (ab \otimes cd)$  za  $a, b \in A$  i  $c, d \in B$ . Ovo preko transpozicije možemo zapisati kao  $\cdot_{A \otimes B} = (\cdot_A \otimes \cdot_B)(id \otimes \tau \otimes id)$ . Homomorfizam algeabri se definira analogno homomorfizmu grupa.

**Primjer 1.2.** Za vektorski prostor  $V$  možemo definirati nekomutativnu **tenzorsku algebru**  $(T(V), +, \cdot; \mathbb{K})$  generiranu jedinicom i elementima iz  $V$ . Definirana je na vektorskom prostoru  $T(V) = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \cdots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$  koji se sastoji od linearnih kombinacija konačnih tenzorskih produkata elemenata iz  $V$ .

*Dokaz:* Algebarski produkt na  $T(V)$  definiran tenzorskim produktom asocijativnost i linearnost nasljeđuje iz svojstava tenzorskog produkta za elemente tipa  $V^{\otimes n}$  i  $V^{\otimes m}$ . Asocijativnost i linearnost za općenite elemente slijedi iz linearnosti direktne sume. Množenje skalarom i zbrajanje je također dobro definirano jer se zbog linearnosti može distribuirati kao množenje i zbrajanje po homogenim prostorima  $V^{\otimes n}$ .  $\square$

Tenzorska algebra primjer je **graduirane algebre** pošto svakom homogenom prostoru  $V^{\otimes n}$  možemo pridružiti indeks  $n$  koji se zbraja pri množenju, tj.  $V^{\otimes n}V^{\otimes m} = V^{\otimes(n+m)}$ .<sup>3</sup> Lijevi **ideal**  $I$  u algebri  $A$  je potprostor koji je ujedno podgrupa  $(I, +)$  aditivne grupe  $(A, +)$  te je zatvoren s obzirom na množenje elemenata iz  $A$  s lijeva, tj. vrijedi  $a \cdot i \in I, \forall a \in A, i \in I$ . Analogno definiramo desni ideal, a obostrani ideal je i lijevi i desni.

**Lema 1.3.** *Za dvostrani ideal skup  $A/I$  tvori algebru koju zovemo **kvocijentna algebra**.*

*Dokaz:* Neka je relacija ekvivalencije  $\sim$  na  $A$  definirana kao  $a \sim b \iff a - b \in I$ . Refleksivnost i simetričnost su očiti, tranzitivnost slijedi jer  $a - b = i_1$  i  $b - c = i_2 \implies a - c = i_1 + i_2 \in I$  zbog toga što je  $I$  aditivna podgrupa. Klase ekvivalencije dane su kao  $[a] = a + I := \{a + i \mid i \in I\}$ , a skup svih klasa označavamo  $A/I$ . Zbroj i produkt elemenata tog skupa možemo definirati kao

$$\begin{aligned}(a + I) + (b + I) &= (a + b) + I, \\ (a + I)(b + I) &= ab + aI + Ib + II = ab + I,\end{aligned}$$

čime on postaje algebra.  $\square$

**Primjer 1.4.** *Simetričnu algebru dobivamo kvocijantiranjem tenzorske algebre s idealom generiranim elementima tipa  $a \otimes b - b \otimes a, \forall a, b \in V$ . Slično, antisimetričnu (Grassmanovu) algebru dobivamo kvocijantiranjem  $T(V)$  s idealom generiranim elementima tipa  $a \otimes a$ .*

*Dokaz:* Ideal generiran elementima nekog skupa je najmanji ideal koji sadrži taj skup. U slučaju  $\mathbb{Z}$ -graduirane algebre kao što je  $T(V)$ , elemente ideala možemo iterativno generirati po indeksu homogenih prostora namećući uvjet lijevog odnosno desnog ideala. Uzmimo za primjer homogeni prostor  $V^{\otimes 3}$ :

Neka su  $a, b, c \in V$  proizvoljni. Element  $a \otimes b - b \otimes a := ab - ba \in I$  po definiciji

---

<sup>3</sup>Općenito indeksi homogenih prostora ne moraju pripadati grupi  $\mathbb{Z}$  ( $\mathbb{Z}$ -graduirana algebra), nego mogu biti proizvoljna (diskretna) Abelova grupa. U fizici je npr. česta  $\mathbb{Z}_2$ -graduirana Liejeva algebra koju zovemo superalgebra.

pripada idealu. Pošto  $I$  mora biti lijevi ideal zahtijevamo

$$a(bc - cb) \in I,$$

$$b(ca - ac) \in I,$$

$$c(ab - ba) \in I.$$

Kako elementi ideala tvore aditivnu podgrupu, njihov zbroj je također element ideala. Zbroj je

$$abc + bca + cab - acb - bac - cba,$$

što je totalno antisimetričan element  $V^{\otimes 3}$ . Kvocijentiranjem s  $I$  vidimo da prethodne 3 jednakosti eliminiraju elemente iz  $V^{\otimes 3}$  koji su antisimetrični u neka dva "indeksa"<sup>4</sup>, a zadnja jednakost posljedično one koje su antisimetrični u sva 3 indeksa. Nije teško vidjeti da ponavljanjem ove procedure uz ove nove elemente ideala za svaki  $n$  preostaju samo totalno simetrične kombinacije produkta elemenata u  $V^{\otimes n}$ .

Za Grassmanovu algebru postupak je analogan ako zamijenimo sve minuse s plusovima što smijemo jer je

$$ab + ba = (a + b)(a + b) - aa - bb \in I,$$

gdje je desna strana zbroj tri elemenata tipa  $x \otimes x \in I$ . Kvocijentiranjem preostaju samo totalno antisimetrični produkti.  $\square$

Slično kao i za algebru, vektorski prostor dobiven direktnom sumom vektorskih potprostora zovemo graduirani vektorski prostor. Vektor je **homogen** ako leži u točno jednom od tih potprostora.

**Primjer 1.5.** Za Hilbertov prostor  $H$  definiramo **Fockov prostor** kao

$$F_{\pm} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_{\nu} H^{\otimes n},$$

gdje  $\nu = +1$  odgovara simetriziranom tenzorskom produktu (bozoni), a  $\nu = -1$  antisimetriziranom (fermioni). Napomenimo još da je formalno potrebno uzeti upotpunjenje ovog prostora.<sup>5</sup>

U ovom slučaju homogeni elementi odgovaraju stanjima dobro definiranog broja čestica.

<sup>4</sup>Ako prvom elementu pridružimo indeks 1, drugom 2, itd...

<sup>5</sup>Ugrubo, za metrički prostor  $M$ , upotpunjenje  $\bar{M}$  je prostor koji sadrži  $M$  kao gusti potprostor.

## 1.2 Koalgebra i bialgebra

Okrenemo li smjer strelica na prethodnom dijagramu za algebru, dobivamo nešto što se zove koalgebra<sup>6</sup>. To znači da "produkt" (zovemo ga koprodukt) ide u obrnutom smjeru. Umjesto da iz dva objekta dobijemo jedan novi, iz jednog objekta dobivamo dva.

**Koalgebra**  $(C, +, \Delta; \mathbb{K})$  nad  $\mathbb{K}$  je vektorski prostor  $(C, +; \mathbb{K})$  skupa s linearnim **koproduktom**  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  koji je koasocijativan i za kojeg postoji linearno preslikavanje zvano kojedinica  $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{K}$  tako da sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{array}{ccc}
 & C \otimes C \otimes C & \\
 \Delta \otimes id \nearrow & & \nwarrow id \otimes \Delta \\
 C \otimes C & & C \otimes C \\
 \Delta \nwarrow & & \nearrow \Delta \\
 & C & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 C \otimes C & & C \\
 \epsilon \otimes id \downarrow & \Delta \swarrow & \\
 \mathbb{K} \otimes C & \xleftarrow{\cong} & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 C \otimes C & & \\
 id \otimes \epsilon \downarrow & \Delta \swarrow & \\
 C \otimes \mathbb{K} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{K}
 \end{array}
 \tag{1.2}$$

Prvi dijagram, koasocijativnost, u prijevodu je  $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$ . Dijagrami za kojedinicu impliciraju  $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta(c) = c = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta(c)$  za sve  $c \in C$ . U praksi se za koprodukt često koristi Sweedlerova notacija [17]:

$$\Delta(c) \equiv \sum_i c_{i(1)} \otimes c_{i(2)} =: \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} =: c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Koasocijativnost je u ovoj notaciji izražena kao

$$c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} = c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} =: c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}, \tag{1.3}$$

a aksiomi za kojedinicu su

$$h_{(1)}\epsilon(h_{(2)}) = \epsilon(h_{(1)})h_{(2)} = h. \tag{1.4}$$

Koasocijativnost se induktivno može proširiti na proizvoljan broj djelovanja koprodukta pa ima smisla pisati  $\Delta^n c$ . Promotrimo  $\Delta^3 c := (\Delta \otimes id \otimes id)\Delta^2 c$  u Sweedlerovoj

<sup>6</sup>Točan postupak dobivanja jednog dijagrama iz drugog opisan je u propoziciji 4.1.



notaciji:

$$\begin{aligned}
\Delta^3 c &\stackrel{(1.3)}{=} (\Delta \otimes id \otimes id) \circ (c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}) = c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} = \\
&= (id \otimes \Delta \otimes id) \circ (c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}) = c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} \otimes c_{(3)} = \\
&= (id \otimes id \otimes \Delta) \circ (c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}) = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)(1)} \otimes c_{(3)(2)} = \\
&=: c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} \otimes c_{(4)}. \tag{1.5}
\end{aligned}$$

Ovakvo numeriranje analogno se poopćuje na više potencije.

**Primjer 1.6.** Algebra polinoma u varijabli  $x$  nad poljem  $\mathbb{K}$  je koalgebra s koproduktom i kojedinicom

$$\Delta(x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \otimes x^{n-k}, \quad \epsilon(x^n) = \delta_{n,0}.$$

*Dokaz:* Za kojedinicu imamo

$$(\epsilon \otimes id)\Delta x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \delta_{0,k} x^{n-k} \equiv x^n.$$

Koristili smo izomorfizam iz leme 1.1 i definiciju kojedinice. Koprodukt možemo interpretirati kao raspis binomne formule za  $\Delta x^n \approx (x + x)^n$  u kojem je množenje zamjenjeno tenzorskim produktom. Koasocijativnost sad vrijedi jer  $(\Delta \otimes id)\Delta x^n \approx ((x + x) + x)^n = (x + (x + x))^n = (id \otimes \Delta)\Delta x^n$ .  $\square$

**Propozicija 1.7.** Neka je  $C$  koalgebra i  $A$  algebra. Tada je vektorski prostor  $\mathcal{L}(C, A)$  svih  $\mathbb{K}$ -linearnih preslikavanja iz  $C$  u  $A$  algebra s produktom

$$(f * g)(c) := (m_A \circ (f \otimes g)\Delta_C)(c) \equiv f(c_{(1)})g(c_{(2)}), \quad c \in C, \quad f, g \in \mathcal{L}(C, A),$$

kojeg zovemo **konvolucija**. Jedinica je  $\eta_A \circ \epsilon_C$ .

*Dokaz:* Iz asocijativnosti produkta u  $A$  i koasocijativnosti koprodukta u  $C$  slijedi

$$((f * g) * h)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)})h(c_{(3)}) = (f * (g * h))(c).$$

Nadalje,

$$((\eta_A \circ \epsilon_C) * f)(c) = \epsilon_C(c_{(1)})f(c_{(2)}) = f(\epsilon_C(c_{(1)})c_{(2)}) = f(c).$$

Analogno se potvrdi i množenje s desna.  $\square$

**Propozicija 1.8.** Koalgebra  $C$  definira algebru na dualnom prostoru  $C^* : C \rightarrow \mathbb{K}$ .

Definiramo produkt  $\cdot : C^* \otimes C^* \rightarrow C^*$  i jedinicu kao

$$(\phi \cdot \psi)(c) = \phi(c_{(1)}) \psi(c_{(2)}), \quad \eta(\lambda)(c) = \lambda \epsilon(c),$$

za sve  $\phi, \psi \in C^*$  i  $c \in C$ . Obrnuto, konačnodimenzionalna algebra  $A$  definira koalgebru na  $A^*$ .

*Dokaz:* Ovo je poseban slučaj prethodne propozicije za  $A = \mathbb{K}$ . Aksiomi za koalgebru su točno oni koji pretvaraju ovako definirane  $(C^*, \cdot, \eta; \mathbb{K})$  u algebru, što se vidi i iz sličnosti komutativnih dijagrama za algebru i koalgebru. Obrnuta tvrdnja slijedi analogno koristeći  $(A \otimes A)^* \cong A^* \otimes A^*$ .  $\square$

Koalgebre  $C, D$  također imaju tenzorski produkt na vektorskom prostoru  $C \otimes D$ . Koproduct je definiran kao  $\Delta(c \otimes d) = c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}$ . Homomorfizam koalgebri je preslikavanje elemenata jedne koalgebri u drugu koje čuva strukturu koalgebri, tj.  $(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta \circ f$  i  $\epsilon \circ f = \epsilon$ .

**Bialgebra**  $(H, +, \cdot, \eta, \Delta, \epsilon; \mathbb{K})$  nad  $\mathbb{K}$  je vektorski prostor  $(H, +; \mathbb{K})$  koji je ujedno algebra i koalgebra. Te dvije strukture ne smiju biti proizvoljne, već zahtijevamo njihovu kompatibilnost u smislu

$$\Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(g), \quad \Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \epsilon(hg) = \epsilon(h)\epsilon(g), \quad \epsilon(1) = 1, \quad (1.6)$$

za sve  $h, g \in H$ . Ova definicija ima jednostavnu interpretaciju. Za početak primijetimo da se u prvoj jednakosti produkt na desnoj strani odvija u prostoru  $H \otimes H$ . Algebra nad  $H$  inducira algebru na  $H \otimes H$  prema ranijoj definiciji. Tada prva jednakost govori da je  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$  homomorfizam algebri, a treća da je  $\epsilon : H \rightarrow \mathbb{K}$  skalarna reprezentacija algebri na  $H$ . S druge strane, gledano iz perspektive koalgebri,  $\cdot : H \otimes H \rightarrow H$  je homomorfizam koalgebri  $H \otimes H$  i  $H$ , gdje  $H \otimes H$  ima koalgebru induciranu tenzorskim produktom.

**Primjer 1.9.** Koalgebra polinoma iz primjera 1.6 je bialgebra.

*Dokaz:* Vrijedi

$$\Delta(x^n \cdot x^m) \equiv \Delta x^{n+m} \approx (x + x)^{n+m} = (x + x)^n (x + x)^m \approx \Delta x^n \Delta x^m,$$

a preostali aksiomi su jednako očiti.  $\square$

### 1.3 Hopfova algebra

**Hopfova algebra**  $(H, +, \cdot, \eta, \Delta, \epsilon, S; \mathbb{K})$  nad poljem<sup>7</sup>  $\mathbb{K}$  je bialgebra za koju je definirano linearno preslikavanje  $S : H \rightarrow H$ , **antipod**, za koje vrijedi

$$\cdot(S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \cdot(\text{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon. \quad (1.7)$$

Antipod je nešto slično inverzu, no ne zahtijevamo  $S^2 = \text{id}$  niti da ima inverz (iako ga uvijek ima u konačnodimenzionalnom slučaju). Aksiomi za bialgebru dani su sljedećim dijagramima:

$$\begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{\cdot} & H & \xrightarrow{\Delta} & H \otimes H & & H & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{K} & \xrightarrow{\eta} & H \\ & & \downarrow \Delta \otimes \Delta & & \uparrow \cdot \otimes & & \uparrow \cdot & \nearrow \epsilon \otimes \epsilon & & \searrow \eta \otimes \eta & \downarrow \Delta \\ H \otimes H \otimes H \otimes H & \xrightarrow{\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}} & H \otimes H \otimes H \otimes H & & H \otimes H & & H \otimes H & & & & H \otimes H \end{array}$$

Dijagram za antipod je

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{K} & \xrightarrow{\eta} & H \\ \downarrow \Delta & & & & \uparrow \cdot \\ H \otimes H & \xrightarrow{\text{id} \otimes S, S \otimes \text{id}} & H \otimes H & & \end{array}$$

Jednadžbu (1.7) možemo pisati kao

$$S(h_{(1)})h_{(2)} = h_{(1)}S(h_{(2)}) = \eta(\epsilon(h)) = 1_H \epsilon(h). \quad (1.8)$$

Definicija antipoda na prvi pogled izgleda dosta proizvoljno, no možemo je promatrati u kontekstu propozicije 1.7. Ako u nju uvrstimo  $A = C = H$  za bialgebru  $H$ , vidimo da je antipod inverz linearnog preslikavanja  $f_e \in \mathcal{L}(H, H)$  koji odgovara identiteti, tj.  $f_e(h) = h, \forall h \in H$ . Konkretno, uvrštavanjem u definiciju konvolucijskog produkta dobivamo

$$(f_e * S)(h) \equiv f_e(h_{(1)})S(h_{(2)}) = h_{(1)}S(h_{(2)}) \stackrel{(1.8)}{=} \eta \circ \epsilon(h), \quad (1.9)$$

gdje je  $\eta \circ \epsilon$  ujedno inverz iz propozicije. Pogledajmo sad još neka svojstva antipoda.

**Propozicija 1.10.** *Za danu Hopfovu algebru antipod je jedinstven i zadovoljava  $S(hg) = S(g)S(h)$  (antihomomorfizam algebri) te  $\tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta h = \Delta \circ Sh, \epsilon(Sh) = \epsilon h$  (anti-*

<sup>7</sup>Bialgebre i Hopfove algebre često se proučavaju nad komutativnim prstenom, stoga  $\mathbb{K}$  općenito ne mora biti polje. Za detalje vidi potpoglavlje 4.3.

homomorfizam koalgebri).

*Dokaz:* Pretpostavimo da su  $S$  i  $S'$  dva antipoda. Vrijedi

$$\begin{aligned} S'h &\stackrel{(1.4)}{=} (S'h_{(1)}) \epsilon(h_{(2)}) \stackrel{(1.8)}{=} (S'h_{(1)}) h_{(2)(1)} Sh_{(2)(2)} \stackrel{(1.3)}{=} (S'h_{(1)}) h_{(2)} Sh_{(3)} = \\ &\stackrel{(1.3)}{=} (S'h_{(1)(1)}) h_{(1)(2)} Sh_{(2)} \stackrel{(1.8)}{=} \epsilon(h_{(1)}) Sh_{(2)} \stackrel{(1.4)}{=} Sh, \end{aligned}$$

čime je pokazana jedinstvenost antipoda. Za antihomomorfizam algebri prvo koristimo

$$(S(h_{(1)}g_{(1)})) h_{(2)}g_{(2)} = \epsilon(hg) = \epsilon(h)\epsilon(g).$$

Sad umjesto  $g$  primijenimo to na  $g_{(1)}$  i tenzorski množimo s  $g_{(2)}$ :

$$(S(h_{(1)}g_{(1)(1)})) h_{(2)}g_{(1)(2)} \otimes g_{(2)} = \epsilon(h)\epsilon(g_{(1)}) \otimes g_{(2)} \stackrel{(1.4)}{=} \epsilon(h) \otimes g,$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili linearnost tenzorskog produkta za skalar  $\epsilon(g_{(1)})$ . Preimenovanjem  $g$  faktora u skladu s (1.3) i djelovanjem sa  $S$  te množeci imamo

$$(S(h_{(1)}g_{(1)})) h_{(2)}g_{(2)} Sg_{(3)} = \epsilon(h) Sg.$$

Sada primijenimo svojstvo antipoda (1.8) na  $g_{(2)}S(g_{(3)})$  pa imamo

$$(S(h_{(1)}g)) h_{(2)} = \epsilon(h) Sg.$$

Umjesto na  $h$ , dobiveni rezultat sada primijenimo na  $h_{(1)}$  pa zadnja jednadžba tenzorski pomnožena s  $h_{(2)}$  postaje

$$(S(h_{(1)(1)}g)) h_{(1)(2)} \otimes h_{(2)} = \epsilon(h_{(1)}) Sg \otimes h_{(2)} = Sg \otimes h.$$

Preimenujemo u skladu s (1.3) i primijenimo  $S$  na drugi faktor pa dobivamo

$$(S(h_{(1)}g)) h_{(2)} Sh_{(3)} = S(g)S(h).$$

Korištenjem svojstava antipoda lijeva strana postaje

$$S(h_{(1)}g)\epsilon(h_{(2)}) = S(h_{(1)}\epsilon(h_{(2)})g) \stackrel{(1.4)}{=} S(hg), \quad (1.10)$$

gdje je u prvoj jednakosti iskorištena linearnost antipoda. Time je dokazana druga tvrdnja. Preostaje pokazati antihomomorfizam koalgebri. Za početak vrijedi

$$\tau \circ (S \otimes S)\Delta h = S(h_2) \otimes S(h_1).$$

Zatim,

$$\begin{aligned}
S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}) &= S(h_{(2)}\varepsilon(h_{(3)})) \otimes S(h_{(1)}) \\
&= (S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})) (\varepsilon(h_{(3)}) 1 \otimes 1) \\
&= (S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})) (\Delta(h_{(3)}S(h_{(4)})) \\
&= (S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})) (h_{(3)} \otimes h_{(4)}) \Delta(S(h_{(5)})) \\
&= (S(h_{(2)}) h_{(3)} \otimes S(h_{(1)}) h_{(4)}) (\Delta(S(h_{(5)}))) \\
&= (\varepsilon(h_{(2)}) 1 \otimes S(h_{(1)}) h_{(3)}) (\Delta(S(h_{(4)})) \\
&= (1 \otimes S(h_{(1)}) h_{(2)}) (\Delta(S(h_{(3)})) \\
&= (1 \otimes \varepsilon(h_{(1)}) 1) (\Delta(S(h_{(2)})) = \Delta(S(h))),
\end{aligned}$$

gdje je osim tehnika u prethodnom dokazu na više mjesta korištena koasocijativnost u smislu (1.5). Konačno,

$$\varepsilon(Sh) \stackrel{(1.4)}{=} \varepsilon(Sh_{(1)}) \varepsilon(h_{(2)}) = \varepsilon((Sh_{(1)}) h_{(2)}) = \varepsilon(1)\varepsilon(h) = \varepsilon(h),$$

gdje je u 2. i 3. jednakosti korišteno 3. svojstvo iz (1.6). □

**Primjer 1.11.** *Bialgebra polinoma iz primjera 1.9 je Hopfova algebra uz antipod  $x \rightarrow -x$ :*

$$S(x^n) = (-x)^n.$$

*Dokaz:* Vrijedi

$$m(S \otimes id) \Delta x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m(S(x^k) \otimes x^{n-k}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k x^{n-k} = ((-x) + x)^n = \eta \circ \varepsilon(x^n).$$

Analogno se dobije i  $(x + (-x))^n = 0$ . □

Slično kao za djelovanje grupe, možemo definirati **djelovanje algebre**. Lijeva akcija (ili reprezentacija) algebre  $H$  je par  $(\alpha, V)$ , gdje je  $V$  vektorski prostor, a  $\alpha$  linearno preslikavanje  $H \otimes V \rightarrow V$  čije djelovanje možemo pisati kao  $\alpha(h \otimes v) = \alpha_h(v)$ . Za to preslikavanje mora vrijediti  $\alpha_{hg}(v) = \alpha_h(\alpha_g(v))$ ,  $\alpha(1 \otimes v) = v$ . Umjesto da stalno pišemo  $\alpha$ , možemo koristiti simbol  $\triangleright$  tako da vrijedi

$$h \triangleright v \in V, \quad (hg) \triangleright v = h \triangleright (g \triangleright v), \quad 1 \triangleright v = v.$$

Ovi aksiomi prikazani su na sljedećem dijagramu.

$$\begin{array}{ccc}
 & H \otimes H \otimes V & \\
 \cdot \otimes id \swarrow & & \searrow id \otimes \alpha \\
 H \otimes V & & H \otimes V \\
 \alpha \searrow & & \swarrow \alpha \\
 & V &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & H \otimes V & \\
 \eta \otimes id \uparrow & & \searrow \alpha \\
 \mathbb{K} \otimes V & \xrightarrow{\cong} & V
 \end{array}
 \quad (1.11)$$

Ako usporedimo ovo s dijagramom (1.1), vidimo da su dijagrami isti<sup>8</sup> uz zamjenu nekih množenja s  $\alpha$ . Za svaki  $h \in H$  možemo pisati i  $\rho(h) = h \triangleright ( ) = \alpha(h \otimes ( ))$ , gdje je  $\rho \in L(V, V)$  linearno preslikavanje iz  $V$  u  $V$ . Pošto  $L(V, V) := L(V)$  tvori algebru u kojoj je produkt kompozicija, aksiomi za  $\alpha$  zapravo govore da je preslikavanje  $\rho : H \rightarrow L(V, V)$  homomorfizam algeabri. Ovo je način razmišljanja na koji smo navikli iz teorije reprezentacije grupa. U definiciji djelovanja grupe ulogu preslikavanja  $\rho$  ima homomorfizam  $D$ .<sup>9</sup> Ako želimo naglasiti prostor na koji algebra djeluje, kažemo da je  $V$  **lijevi H-modul**. Analogno možemo definirati i desni H-modul. Izostavljanjem riječi lijevi/desni, mislimo na lijevi.

**Propozicija 1.12.** *Neka su  $(\alpha_V, V)$  i  $(\alpha_W, W)$  lijevi H-moduli na prostorima  $V$  i  $W$  koje možemo gledati kao  $\rho_V \in L(V), \rho_W \in L(W)$ . Tada postoji reprezentacija  $\rho_{V \otimes W}$  na prostoru  $V \otimes W$  dana kao*

$$\rho_{V \otimes W} = ((\rho_V \otimes \rho_W) \circ \Delta)(h) = \sum \rho_V(h_{(1)}) \otimes \rho_W(h_{(2)}), \quad h \in H,$$

što također možemo pisati kao  $h \triangleright (v \otimes w) = h_{(1)} \triangleright v \otimes h_{(2)} \triangleright w$ .

*Dokaz:* Gornja formula daje dobru reprezentaciju  $H$  jer imamo

$$\begin{aligned}
 \rho_{V \otimes W}(1_H) &= (\rho_V \otimes \rho_W)(1 \otimes 1) = 1_V \otimes 1_W = 1_{V \otimes W}, \\
 \rho_{V \otimes W}(ab) &= \sum \rho_V((ab)_{(1)}) \rho_W((ab)_{(2)}) = \\
 &= \sum \rho_V(a_{(1)}) \rho_V(b_{(1)}) \otimes \rho_W(a_{(2)}) \rho_W(b_{(2)}) = \rho_{V \otimes W}(a) \rho_{V \otimes W}(b),
 \end{aligned}$$

što potvrđuje dijagrame (1.11). □

Osim djelovanja na vektorski prostor, Hopfove algebre i bialgebre mogu djelovati na druge strukture poput algebra, koalgebra ili Hopfovih algebra. U svakom slučaju prirodno je zahtijevati da djelovanje poštuje algebarsku strukturu objekta na koji djelujemo.

<sup>8</sup>Kažemo da je djelovanje polarizacija algebarskog produkta.

<sup>9</sup>Kodomena preslikavanja  $D$  je  $GL(n, \mathbb{C}) \subset L(V, V)$ , gdje je  $V$   $n$ -dimenzionalni vektorski prostor. Ova restrikcija na potprostor je posljedica toga što za grupu zahtijevamo postojanje inverza za razliku od algebre.

**Definicija 1.13.** Algebra  $A$  je  $H$ -modul algebra ako je  $A$  lijevi  $H$ -modul i vrijedi

$$h \triangleright (ab) = \sum (h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b), \quad h \triangleright 1 = \epsilon(h)1.$$

gdje je  $H$  bialgebra ili Hopfova algebra.

Ovaj zahtjev ilustriran je na sljedećem dijagramu.

$$\begin{array}{ccccc}
 H \otimes A \otimes A & \xrightarrow{id \otimes \cdot} & H \otimes A & \xrightarrow{\alpha} & A & \longleftarrow & A \otimes A & & H & \xrightarrow{\epsilon} & \epsilon & \xrightarrow{\eta} & A \\
 \downarrow \Delta \otimes id \otimes id & & & & & & \uparrow \alpha \otimes \alpha & & \downarrow \eta & & & \nearrow \alpha & \\
 H \otimes H \otimes A \otimes A & \xrightarrow{id \otimes \tau \otimes id} & H \otimes A \otimes H \otimes A & & & & & & H \otimes A & & & & 
 \end{array}$$

Ta konstrukcija bit će nam bitna u poglavlju 2 gdje će Poincareova algebra djelovati na algebru glatkih funkcija.

## 1.4 Primjeri

Promotrimo neke standardne primjere Hopfovih algebri:

**Primjer 1.14.** Neka je  $G$  konačna grupa s identitetom  $e$  i neka je  $\mathbb{K}(G)$  skup funkcija na  $G$  s vrijednostima u polju  $\mathbb{K}$ . Struktura vektorskog prostora dana je zbrajanjem po točkama, tj.  $(\phi + \psi)(g) := \phi(g) + \psi(g)$ , a množenje skalarom kao  $(c\phi)(g) := c\phi(g)$ ,  $\forall \phi, \psi \in \mathbb{K}(G), g \in G, c \in \mathbb{K}$ . Algebarski produkt i jedinica su

$$(\phi\psi)(g) = \phi(g)\psi(g), \quad \eta(\lambda)(g) = \lambda.$$

Koprodukt, kojedinica i antipod su

$$(\Delta\phi)(u, v) = \phi(uv), \quad \epsilon\phi = \phi(e), \quad (S\phi)(u) = \phi(u^{-1}).$$

*Dokaz:* U definiciji koprodukta identificirali smo  $\mathbb{K}(G) \otimes \mathbb{K}(G) = \mathbb{K}(G \times G)$  s funkcijama dva elementa grupe. Koasocijativnost slijedi iz asocijativnosti grupnog množenja:

$$\begin{aligned}
 ((\Delta \otimes id)\Delta\phi)(u, v, w) &= (\Delta\phi)(uv, w) = \phi((uv)w) = \\
 \phi(u(vw)) &= (\Delta\phi)(u, vw) = ((id \otimes \Delta)\Delta\phi)(u, v, w).
 \end{aligned}$$

Prvi red u ovoj jednakosti je neintuitivan pošto izgleda kao da evaluaciju radimo u krivom smjeru. U tu svrhu promotrimo komutativne dijagrame kako bi vidjeli što se

zapravo dešava. Dijagram za koprodukt funkcionala možemo zapisati kao lijevi od ova dva dijagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 G & & G \otimes G \\
 \downarrow \phi & \xrightarrow{\Delta} & \downarrow \Delta\phi \\
 \mathbb{K} & & \mathbb{K}
 \end{array}
 \cong
 \begin{array}{ccc}
 G & \xleftarrow{m_G} & G \otimes G \\
 \downarrow \phi & & \\
 \mathbb{K} & & 
 \end{array}$$

Znamo da je funkcional po definiciji zadan svojim djelovanjem na elemente domene zadano pravilom  $(\Delta\phi)(u \otimes v) = \phi(m_G(u \otimes v))$ . Ta evaluacija prikazana je na desnom dijagramu kojeg možemo smatrati ekvivalentnim lijevom. Slično tako,  $(\Delta \otimes id)\Delta\phi$  možemo pisati kao

$$\begin{array}{ccc}
 G \otimes G & & G \otimes G \otimes G \\
 \downarrow \Delta\phi & \xrightarrow{\Delta \otimes id} & \downarrow (\Delta \otimes id)\Delta\phi \\
 \mathbb{K} & & \mathbb{K}
 \end{array}
 \cong
 \begin{array}{ccc}
 G \otimes G & \xleftarrow{m_G \otimes id} & G \otimes G \otimes G \\
 \downarrow \Delta\phi & & \\
 \mathbb{K} & & 
 \end{array}$$

Sveukupno imamo

$$\begin{array}{cccc}
 G & & G \otimes G & & G \otimes G \otimes G & & G & \xleftarrow{m_G} & G \otimes G & \xleftarrow{m_G \otimes id} & G \otimes G \otimes G \\
 \downarrow \phi & \xrightarrow{\Delta} & \downarrow \Delta\phi & \xrightarrow{\Delta \otimes id} & \downarrow (\Delta \otimes id)\Delta\phi & \cong & \downarrow \phi & & & & \\
 \mathbb{K} & & \mathbb{K} & & \mathbb{K} & & \mathbb{K} & & & & 
 \end{array}$$

Zaključak je da evaluacija općenitih operacija i kompozicija funkcionala ide u smjeru obrnutom od onog na koji smo navikli, tj. s lijeva na desno. Imajući na umu ovu suprotnu evaluaciju, nastavljamo dalje. Koristeći definiciju kojedinice slijedi,

$$((\epsilon \otimes id)\Delta\phi)(u) = (\Delta\phi)(e, u) = \phi(eu) = \phi(u).$$

Za antipod imamo

$$\begin{aligned}
 ((S\phi_{(1)})\phi_{(2)})(u) &= (S\phi_{(1)})(u)\phi_{(2)}(u) = \\
 &= \phi_{(1)}(u^{-1})\phi_{(2)}(u) = \phi(u^{-1}u) = \phi(e) = \epsilon(\phi).
 \end{aligned}$$

Dokaz za primjenu antipoda na član  $\phi_{(2)}$  je analogan. □

**Primjer 1.15.** Neka je  $G$  konačna grupa i  $\mathbb{K}G$  vektorski prostor s bazom  $G$ . Tada



proizvoljni element  $a = \sum_{u \in G} a(u)e_u$  možemo zapisati preko baze  $\{e_u\}$ ,  $u \in G$ , gdje su  $a(u)$  koeficijenti iz  $\mathbb{K}$ . Da pojednostavimo notaciju za vektore baze pišemo  $u$  umjesto  $e_u$  pa je  $a = \sum a(u)u$ . Ovakva notacija sugerira da je produkt vektora zadan produktom na grupi  $G$ , dakle

$$ab = \left( \sum_{u \in G} a(u)u \right) \left( \sum_{v \in G} b(v)v \right) = \sum_{u,v \in G} a(u)b(v)(uv).$$

Jedinični element algebre je očito  $e := e_G$ . Koproduct, kojedinica i antipod su

$$\Delta u = u \otimes u, \quad \epsilon u = 1, \quad Su = u^{-1},$$

gdje je  $u \in G \subset \mathbb{K}G$  pa ove relacije definirane na bazi po linearnosti lako proširimo na proizvoljne elemente  $\mathbb{K}G$ . Ovu algebru zovemo **grupovna (Hopfova) algebra**.

*Dokaz:* Množenje je asocijativno zbog asocijativnosti grupnog množenja. Koproduct je koasocijativan jer je koasocijativan na elementima baze i jer je tenzorski produkt asocijativan. Struktura bialgebre, tj. kompatibilnost produkta i koprodukta vrijedi jer

$$\Delta(uv) = uv \otimes uv = (u \otimes u)(v \otimes v) = (\Delta u)(\Delta v).$$

Za antipod i kojedinicu na elementu baze imamo

$$\begin{aligned} u_{(1)}S(u_2) &= uu^{-1} = 1, \\ (\epsilon \otimes id)\Delta u &= 1 \otimes u \equiv u, \end{aligned}$$

gdje je u zadnjoj jednakosti korišten kanonski izomorfizam iz leme 1.1. □

**Primjer 1.16.** Za Liejevu algebru  $\mathfrak{g}$  nad  $\mathbb{K}$  definiramo univerzalnu omotačku Hopfovu algebru  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  koja je (za razliku od Liejeve algebre) asocijativna unitalna algebra. Konstruiramo ju kao kvocijent tenzorske algebre  $T(\mathfrak{g})$  s obostranim idealom  $I$  generiranim elementima tipa  $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ , gdje su  $x, y \in \mathfrak{g}$ . Dakle,  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  je slobodna algebra<sup>10</sup> modulo relacije  $[x, y] = xy - yx, \forall x, y \in \mathfrak{g}$ . Koproduct, kojedinica i antipod su

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \epsilon(x) = 0 \text{ (osim } \epsilon(1) = 1), \quad S(x) = -x, \quad x \in \mathfrak{g}.$$

gdje je produkt i antipod proširen na sve elemente  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  homomorfizmom generatora.

<sup>10</sup>Ako generatore slobodne algebre predočimo slovima, proizvoljni element je konkatencija tih slova, tj. riječ. Kvocijentanje idealom nam daje pravila pomoću kojih određena dva slova možemo zamijeniti jednim i tako iterativno reducirati riječ na najkraću moguću.

*Dokaz:* Za strukturu bialgebre treba pokazati  $\Delta[x, y] = [\Delta x, \Delta y]$ . Vrijedi

$$\begin{aligned} [\Delta x, \Delta y] &= [x \otimes 1 + 1 \otimes x, y \otimes 1 + 1 \otimes y] = \\ &= [x \otimes 1, y \otimes 1] + [1 \otimes x, 1 \otimes y] + [x \otimes 1, 1 \otimes y] + [1 \otimes x, y \otimes 1] = \\ &= [x, y] \otimes 1 + 1 \otimes [x, y] + (x \otimes y - x \otimes y) + (y \otimes x - y \otimes x) = \\ &= [x, y] \otimes 1 + 1 \otimes [x, y] = \Delta[x, y] \end{aligned}$$

Ovime smo potvrdili da je koprodukt kompatibilan s produktom (koji je Liejeva zagrada na  $T(\mathfrak{g}) \otimes T(\mathfrak{g}) \rightarrow T(\mathfrak{g})$ , za razliku od zagrade na  $\mathfrak{g}$  koja je  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ).  $\square$

Sljedeći korolar je posljedica Poincare–Birkhoff–Wittovog teorema<sup>11</sup> i dajemo ga bez dokaza.

**Korolar 1.17.** *Pretpostavimo da je  $\mathcal{A}$   $\mathfrak{g}$ -modul algebra, tj. reprezentacija  $\mathfrak{g}$ . Neka je homomorfizam dan s  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{A}$  i neka je  $h : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  kanonsko ulaganje. Pošto je  $\rho$  homomorfizam, vrijedi  $\rho([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)$ ,  $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ . Tada postoji jedinstveni homomorfizam algebre  $\hat{\rho} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}$  takav da je  $\rho = \hat{\rho} \circ h$ . Ovaj korolar implicira da se svaka reprezentacija  $\mathfrak{g}$  može jedinstveno proširiti na reprezentaciju  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .*

Postoji još mnogo primjera Hopfovih algebre. U sljedećem poglavlju vidjet ćemo kako se iz jedne Hopfove algebre mogu izgraditi nove pomoću Drinfel'dovog zakretanja. Hopfove algebre možemo svrstati u četiri kategorije ovisno o komutativnosti i kokomutativnosti. Komutativna algebra  $A$  je ona za koju vrijedi  $m(a \otimes b) = m(b \otimes a) = m \circ \tau(a \otimes b)$ ,  $\forall a, b \in A$ . Analogno možemo definirati **kokomutativnu** koalgebru  $C$  kao onu za koju vrijedi  $\tau\Delta a = \Delta a$ ,  $\forall a \in C$  ili u Sweedlerovoj notaciji  $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)} = a_{(2)} \otimes a_{(1)}$ . Četiri kategorije Hopfovih algebre su:

- **komutativne i kokomutativne** - grupovna algebra (primjer 1.15) komutativne grupe
- **Nekomutativne i kokomutativne** - grupovna algebra nekomutativne grupe, univerzalna omotačka algebra
- **Komutativne i ne-kokomutativne** - algebra ukorijenjenih stabla, vidjet ćemo ih u poglavlju 3
- **Nekomutativne i ne-kokomutativne** - općenito ih zovemo **kvantne grupe**, to su npr.  $q$ -deformirane algebre i *bicrossproduct* algebre koje ćemo upoznati u poglavlju 4

---

<sup>11</sup>Ovaj teorem govori da kanonsko ulaganje  $h : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  možemo proširiti na sve elemente omotačke algebre i time generirati njenu bazu na način  $h(x_1, \dots, x_n) = h(x_1) \cdots h(x_n)$ . Za injektivnost ovako proširenog  $h$  potrebno je uvesti uređaj na bazi  $\mathfrak{g}$  te nametnuti uvjet  $x_1 \leq \cdots \leq x_n$  na domeni.

Postoje i ne-kokomutativne Hopfove algebre koje su kokomutativne do na element  $R \in H \otimes H$ , njih ćemo upoznati u idućem poglavlju.

## 2 Čestična statistika i operator zakretanja

Mnoge moderne teorije fizike u svom temelju sadrže princip simetrije, tj. grupe simetrija. Dobar primjer je baždarna grupa standardnog modela kod kojeg komplicirana interakcija proizlazi iz jednostavnog temeljnog principa baždarne simetrije.

U teoriji polja Hilbertov prostor  $H$  jedne čestice potrebno je poopćiti na višečestični Fockov prostor iz primjera 1.5. To znači da moramo definirati djelovanje elementa grupe na elemente tipa  $H \otimes H$  i općenito  $H^{\otimes n}$ . U prethodnom poglavlju vidjeli smo da je koprodukt operacija koja obavlja ovo "potenciranje". Na prvu bi rekli da su potencije elementa  $g$  grupe  $G$  uvijek oblika  $g^{\otimes n}$  kao u primjeru 1.15, no to je samo jedan od mogućih koprodukata. U ovom poglavlju vidjet ćemo kako možemo deformirati koprodukt i time dobiti novu klasu koprodukata. Jedna motivacija za njegovo uvođenje je nametanje komutacijskih relacija koordinata prostorstvremena tipa

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}.$$

U četvrtom potpoglavlju ukratko prezentiramo fizikalnu motivaciju za komutacijske relacije ovog tipa. Druga motivacija za nestandardni koprodukt dolazi iz fizike anyona<sup>12</sup> i topoloških kvantnih računanja<sup>13</sup>. Za početak definiramo matematičke pojmove relevantne za ovu konstrukciju, ponovno iz [14].

### 2.1 Kvazitriangularne Hopfove algebre

U ovom potpoglavlju dajemo osnovne definicije i algebarska svojstva kvazitriangularnih Hopfovih algebra, za čiji razvoj je uvelike zaslužan V.G. Drinfeld [18].

**Definicija 2.1.** *Kvazitriangularna bialgebra ili Hopfova algebra je par  $(H, R)$ , gdje je  $H$  Hopfova algebra ili bialgebra, a  $R \in H \otimes H$  invertibilan i zadovoljava*

$$(\Delta \otimes \text{id})R = R_{13}R_{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}, \quad (2.1)$$

$$\tau \circ \Delta h = R(\Delta h)R^{-1}, \quad \forall h \in H. \quad (2.2)$$

Pišemo  $R = \sum R^{(1)} \otimes R^{(2)} = R_{12}$  te koristimo notaciju

$$R_{ij} = \sum 1 \otimes \cdots \otimes R^{(1)} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes R^{(2)} \otimes \cdots \otimes 1,$$

gdje je  $R_{ij} \in H \otimes H \otimes \dots \otimes H$  (broj faktora bit će jasan iz konteksta) i  $R^{(1)}$  je na  $i$ -tom

<sup>12</sup>Čestice koje se uglavnom pojavljuju u dvije dimenzije i čija valna funkcija ne dobiva nužno fazu +1 (bozoni) odnosno -1 (fermioni) pri zamjeni čestica, nego npr.  $e^{i\phi}$  u slučaju Abellovih anyona.

<sup>13</sup>U takvim računalima stanja sustava nisu intrinzični stupnjevi slobode poput spina, već su predstavljena topološkom konfiguracijom čestica.

faktoru, a  $R^{(2)}$  na  $j$ -tom.

Prisjetimo se da su kokomutativne koalgebre one za koje vrijedi  $\tau \circ (\Delta h) = \Delta h$ . Relacija (2.2) relaksira taj uvjet do na  $R$ -matricu. Motivacija relacije (2.1) bit će jasnija nakon teorema 2.4.

**Primjer 2.2.** Neka je  $\mathbb{Z}/n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ciklička grupa reda  $n$  i  $\mathbb{C}\mathbb{Z}/n$  njena grupovna algebra (vidi primjer 1.15) nad poljem  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Generirana je elementima  $1, g$  i relacijom  $g^n = 1$  te ima koprodukt, kojedinicu i antipod  $\Delta g = g \otimes g, \epsilon g = 1, Sg = g^{-1}$ , redom. Osim trivijalne  $R$ -matrice, tj. kvazitriangularne strukture  $1 \otimes 1$ , imamo i

$$R = \frac{1}{n} \sum_{a,b=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i ab}{n}} g^a \otimes g^b.$$

Za  $\mathbb{C}\mathbb{Z}/n$  s ovom kvazitriangularnom strukturom pišemo  $\mathbb{C}\mathbb{Z}'/n$ .

*Dokaz:* Očito svaka kokomutativna Hopfova algebra ima trivijalnu  $R = 1 \otimes 1$ . Slijedi dokazati netrivialnu  $R$ -matricu. Primijetimo prvo da za  $a \neq 0$  vrijedi<sup>14</sup>

$$n^{-1} \sum_{b=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i ab}{n}} = n^{-1} \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi i a}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2\pi i a}{n}}} = n^{-1} \frac{1 - e^{2\pi i a}}{1 - e^{\frac{2\pi i a}{n}}} = 0,$$

dok za  $a = 0$  gornja suma iznosi 1 jer je svaki član u sumi 1. Stoga možemo pisati  $n^{-1} \sum_{b=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i ab}{n}} = \delta_{a,0}$ . Vrijedi

$$\begin{aligned} R_{13}R_{23} &= R^{(1)} \otimes R^{(1)} \otimes R^{(2)}R^{(2)} = n^{-2} \sum e^{-\frac{2\pi i(ab+cd)}{n}} g^a \otimes g^c \otimes g^{b+d} = \\ &= n^{-2} \sum e^{-\frac{2\pi i b(a-c)}{n}} e^{-\frac{2\pi i cb'}{n}} g^a \otimes g^c \otimes g^{b'} = n^{-1} \sum \delta_{a-c,0} e^{-\frac{2\pi i cb'}{n}} g^a \otimes g^c \otimes g^{b'} = \\ &= n^{-1} \sum e^{-\frac{2\pi i ab'}{n}} g^a \otimes g^a \otimes g^{b'}, \end{aligned}$$

gdje je u drugom retku napravljena zamjena varijabli  $b' := b + d$  (suma i dalje ide po  $b$ ). Dobiveni izraz očito je jednak  $(\Delta \otimes id)R$ . Time smo dokazali prvi od aksioma (2.1), a drugi se pokaže analogno. Aksiom (2.2) vrijedi jer je Hopfova algebra komutativna i kokomutativna:

$$\tau \circ \Delta h = \Delta h = RR^{-1}\Delta h = R(\Delta h)R^{-1}.$$

□

**Lema 2.3.** Neka je  $(H, R)$  kvazitriangularna bialgebra. Tada (2.2) i drugi dio (2.1) impliciraju

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12},$$

<sup>14</sup>Formula za sumu geometrijskog niza  $\sum_{a=0}^n q^a$  vrijedi za  $q \neq 1$ , što je usko povezano s činjenicom da radijus konvergencije geometrijskog reda iznosi 1.

kvantnu Yang-Baxterovu jednadžbu.

*Dokaz:* Računamo  $(id \otimes \tau \circ \Delta)R$  na dva načina. Prvo koristimo drugi od aksioma (2.1), zatim aksiom (2.2) pa ponovno drugi iz (2.1):

$$\begin{aligned} (id \otimes \tau \circ \Delta)R &= (id \otimes \tau)(id \otimes \Delta)R \stackrel{(2.1)}{=} (id \otimes \tau)R_{13}R_{12} = \\ &= (id \otimes \tau)((R^{(1)} \otimes id \otimes R^{(2)})(R^{(1)} \otimes R^{(2)} \otimes id)) = \\ &= (id \otimes \tau)(R^{(1)}R^{(1)} \otimes R^{(2)} \otimes R^{(2)}) = \\ &= R^{(1)}R^{(1)} \otimes R^{(2)} \otimes R^{(2)} = R_{12}R_{13}. \end{aligned}$$

S druge strane vrijedi

$$\begin{aligned} (id \otimes \tau \circ \Delta)(R^{(1)} \otimes R^{(2)}) &= R^{(1)} \otimes \tau \circ \Delta(R^{(2)}) \stackrel{(2.2)}{=} R^{(1)} \otimes R\Delta(R^{(2)})R^{-1} = \\ &= (R^{(1)} \otimes id \otimes id)R_{23}(id \otimes \Delta(R^{(2)}))R_{23}^{-1} = R_{23}(R^{(1)} \otimes \Delta(R^{(2)}))R_{23}^{-1} = \\ &= R_{23}((id \otimes \Delta)R)R_{23}^{-1} \stackrel{(2.1)}{=} R_{23}R_{13}R_{12}R_{23}^{-1}. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem ova dva rezultata i množenjem s  $R_{23}$  s desna dobivamo traženu jednadžbu.  $\square$

**Teorem 2.4.** Za kvazitriangularnu strukturu  $R$ , matrica  $\hat{R} = \tau \circ R$  zadovoljava klasičnu Yang-Baxterovu jednadžbu.

*Dokaz:* Vrijedi

$$\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} = (\tau_{13}\tau_{23}\hat{R}_{23}\tau_{13}\tau_{12})(\tau_{12}\hat{R}_{13}\tau_{12})\hat{R}_{12} = \tau_{13}R_{23}R_{13}R_{12},$$

gdje je  $\tau_{13}(v \otimes w \otimes x) = x \otimes w \otimes v$ , a  $\tau_{12} = \tau \otimes id$ . Također,

$$\hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23} = (\tau_{13}\tau_{12}\hat{R}_{12}\tau_{13}\tau_{23})(\tau_{23}\hat{R}_{13}\tau_{23})\hat{R}_{23} = \tau_{13}R_{12}R_{13}R_{23},$$

Iz prethodne leme i činjenice da je  $\tau^2 = id$ , dobivamo

$$\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}.$$

Ovo je identično pravilu (A.1) u dodatku A. Pravilo (A.3) je također zadovoljeno.  $\square$

Teorem 2.4 govori nam da matrica  $\hat{R}$  zamjenjuje  $\tau$  u ulozu zamjene dva objekta u slučaju bialgebre s kvazitriangularnom strukturom pa omogućuje općenitiju statistiku od one koju pruža  $\tau$ .

Bez dokaza<sup>15</sup> dajemo iskaz teorema 9.2.4 iz [14]:

<sup>15</sup>Za formalan dokaz potrebno je ući u teoriju kategorija. U ovom radu smo se zbog primjenjivosti u fizikalnom kontekstu i literature odlučili za praktičniji pristup, tj. klasični tretman koji ne zalazi u teoriju kategorija.

**Teorem 2.5.** Za kvazitriangularnu bialgebru ili Hopfovnu algebru  $H$ , kategorija<sup>16</sup> svih  $H$ -modula prepletena je djelovanjem  $\hat{R}$ . Eksplicitno,

$$\Psi_{V,W}(v \otimes w) = \hat{R}(\triangleright \otimes \triangleright)(v \otimes w) = \sum R^{(2)} \triangleright w \otimes R^{(1)} \triangleright v,$$

gdje su  $V$  i  $W$  neki lijevi  $H$ -moduli i  $\Psi := (\rho \otimes \rho) \circ \hat{R}$ .

**Lema 2.6.** Neka je  $G$  konačna grupa i  $V$   $\mathbb{C}G$ -modul. Tada postoje jednostavni  $\mathbb{C}G$  moduli  $U_1, \dots, U_r$  takvi da je

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r.$$

Drugim riječima,  $\mathbb{C}G$ -moduli su polujednostavni.

*Dokaz:* Ovo proizlazi iz Maschkeovog teorema, za detalje vidi [19]. Jednostavni modul je onaj koji nema netrivialnih pravih podmodula (analogno jednostavnoj grupi). Može se pokazati da su jednostavni  $\mathbb{C}G$ -moduli u korespondenciji s ireducibilnim reprezentacijama grupe  $G$ . Ova lema govori nam da modul grupovne algebre na neki način sadrži sve ireducibilne reprezentacije grupe.  $\square$

**Primjer 2.7.** Neka je  $\mathbb{C}\mathbb{Z}'_n$  kvazitriangularna Hopfova algebra iz primjera 2.2. Njena kategorija reprezentacija (lijevih  $\mathbb{C}\mathbb{Z}'_n$ -modula) sastoji se od  $\mathbb{Z}'_n$ -graduuiranih vektorskih prostora  $V = \bigoplus_{a=0}^{n-1} V_a$  nad kojima je stupanj tenzorskog produkta definiran zbrajanjem modulo  $n$  i koji je isprepleten s

$$\Psi(v \otimes w) = e^{\frac{2\pi i |v||w|}{n}} w \otimes v,$$

gdje su  $v \in V_{|v|}$  i  $w \in V_{|w|}$  homogeni elementi stupnja  $|v|$  i  $|w|$ . Zovemo ju još i kategorija anyonskih vektorskih prostora.

*Dokaz:* Hopfova algebra  $\mathbb{C}\mathbb{Z}'_n$  generirana je elementom  $g$  uz  $g^n = 1$ . Slijedeći lemu 2.6 općenitu reprezentaciju te algebre možemo pisati kao  $V = \bigoplus_{a=0}^{n-1} V_a$ , gdje su  $V_a$  jednodimenzionalni<sup>17</sup> vektorski prostori nad kojima je djelovanje elementa  $g \in \mathbb{Z}'_n$  na  $v \in V_a$  definirano s

$$g \triangleright v = e^{\frac{2\pi i a}{n}} v, \quad \forall v \in V_a.$$

Graduiranje je dano s  $a \in \{0, \dots, n-1\}$  te za  $v \in V_a$  kažemo da ima stupanj  $a$ . Koproduct je  $\Delta g = g \otimes g$  pa je stupanj<sup>18</sup>  $(\Delta g) \triangleright (v \otimes w)$  jednak zbroju  $a$  i  $b$  modulo  $n$  za  $v \in V_a, w \in V_b$ . Ovo je po definiciji  $\mathbb{Z}'_n$ -graduuirana algebra.

<sup>16</sup>Za naše potrebe to je skup svih reprezentacija, dakle parova  $(\alpha, V)$  za koji je tenzorski produkt reprezentacija.

<sup>17</sup>Ireducibilne reprezentacije komutativnih grupa su jednodimenzionalne.

<sup>18</sup>Vidi propoziciju 1.12.

Koristeći teorem 2.5,

$$\Psi(v \otimes w) = \sum R^{(2)} \triangleright w \otimes R^{(1)} \triangleright v,$$

gdje je

$$R = \sum R^{(1)} \otimes R^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{a,b=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i ab}{n}} g^a \otimes g^b. \quad (2.3)$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \Psi(v \otimes w) &= n^{-1} \sum_{x,y=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i xy}{n}} g^x \triangleright w \otimes g^y \triangleright v = \\ &\equiv n^{-1} \sum_{x,y} e^{-\frac{2\pi i xy}{n}} e^{\frac{2\pi i bx}{n}} w \otimes e^{\frac{2\pi i ay}{n}} v = \\ &= \sum_{x,y} e^{\frac{2\pi i}{n}(bx+ay-xy)} w \otimes v = \\ &= \sum_x e^{\frac{2\pi i}{n}bx} n^{-1} \sum_y e^{\frac{2\pi i}{n}y(a-x)} w \otimes v = \\ &= \sum_x e^{\frac{2\pi i}{n}bx} \delta_{a,x} w \otimes v = \\ &= e^{\frac{2\pi i ab}{n}} w \otimes v \equiv e^{\frac{2\pi i |v||w|}{n}} w \otimes v, \end{aligned}$$

gdje su  $v$  i  $w$  ponovno homogeni stupnja  $a$  i  $b$ . □

Ovaj primjer poslužit će nam u idućem potpoglavlju gdje ćemo ga primijeniti na anyone, a u četvrtom potpoglavlju koristimo  $R$ -matricu u kontekstu nekomutativnih prostora.

## 2.2 Anyoni

U kvantnoj fizici u tri prostorne dimenzije imamo dva tipa čestica s obzirom na zamjenu: fermione i bozone. Fermionske amplitude i valne funkcije pri zamjeni dvije čestice poprimaju fazu  $-1$ , a bozonski  $1$ . Valne funkcije višečestičnih fermionskih/bozonskih sustava stoga su totalno anti/simetrične na zamjenu dvije čestice. Može se pokazati [20] da je višečestična valna funkcija skalarna unitarna reprezentacija fundamentalne grupe konfiguracijskog prostora. Za  $n$  identičnih čestica u tri dimenzije to je simetrična grupa  $S_n$  opisana u dodatku A. Ona ima dvije skalarne (jednodimenzionalne) unitarne reprezentacije koje odgovaraju bozonima i fermionima. Za  $n$  čestica u dvije dimenzije to je grupa pletenica  $B_n$  iz istog dodatka. Njene jednodimenzionalne reprezentacije dane su kao  $D(\sigma_j) = e^{2\pi i \theta}$ ,  $\theta \in [0, 1/2)$ . To znači da dvije identične čestice pri zamjeni mogu dobiti proizvoljnu (*any*) fazu, stoga ih zovemo anyoni. Posebno, za  $\theta = 0$  imamo bozone, a za  $\theta = 1/2$  fermione. Generatori



$\sigma_i$  grupe  $B_n$  djeluje na valnu funkciju kao

$$\sigma_i \triangleright \psi(v \otimes w) = e^{2\pi i \theta} \psi(w \otimes v). \quad (2.4)$$

Zaključak je da su u dvije prostorne dimenzije [21] moguće višečestične valne funkcije koje pri zamjeni dvije čestice dobivaju proizvoljnu skalarnu fazu. Ove čestice zovemo Abelovi anyoni jer je reprezentacija grupe pletenica koju koristimo jednodimenzionalna pa je komutativna (Abelova). Postoje i još kompleksniji, ne-Abelovi anyoni u kojima je reprezentacija grupe pletenica nekomutativna (višedimenzionalna). Jedna od fizikalnih realizacija anyona je frakcionalni kvantni Hallov efekt. On je nedavno i eksperimentalno potvrđen [22].

U klasičnom kvantnom računalu bit (diskretno stanje 0 ili 1) zamijenjen je prostorno lokaliziranim qubitom koji je najjednostavnije modelirati jednočestičnim spin- $\frac{1}{2}$  stanjem

$$\psi = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad a, b \in \mathbb{C}. \quad (2.5)$$

Ideja klasičnog kvantnog računa je pripremiti isprepletenu<sup>19</sup> i superponirana višečesti-

čna stanja, evoluirati ih u vremenu te na kraju izmjeriti konačno stanje pa to ponoviti što više puta za precizniji rezultat. Način na koji prepletemo i evoluiramo stanje reflektira algoritam koji želimo evaluirati. Jedan od velikih problema s kvantnim računalima je dekoherencija kod koje dolazi do nepoželjne, ali u praksi neizbježne interakcije s okolinom. Tada koeficijenti  $a$  i  $b$  iz (2.5) postaju drugačiji od onih koje teorija predviđa i to dovodi do pogreške. U jeziku matrice gustoće (Dirac-von Neumannov formalizam), čista stanja s vremenom postaju miješana [23].

Alternativna realizacija kvantnog računa je preko topološkog kvantnog računala, gdje nam stanja nisu više lokalizirano svojstvo neke čestice (poput spina), već su predstavljena relativnim položajem (i njihovom povijesti) kvazičestica (ekscitacije sustava) u dvije dimenzije.

Time informaciju enkodiramo u topologiju sustava i on postaje puno otporniji na dekoherenciju od klasičnog kvantnog računala [23]. Promjena stanja sustava može se odvijati na više načina: fuzijom tj. spajanjem dvaju anyona (ovo je zapravo mjerenje, neunitarna evolucija), unitarnom evolucijom određenom hamiltonijanom te zamjenom dviju čestica. Kombinacijom ovih mehanizama u teoriji možemo implementirati određene kvantne algoritme. Mi ćemo promatrati sustav Abelovih anyona.

Reprezentacija je fiksirana odabirom parametra  $\theta = 1/n$ . Generator grupe predstavlja najmanji, elementarni tok (kvant, slično prvom stanju iznad vakuuma u harmoničkom oscilatoru) i pišemo ga s  $|1\rangle$ . Valna funkcija dva takva stanja pri zamjeni

<sup>19</sup>Ovdje mislimo na kvantnu prepletenost (entanglement), a ne na grupu pletenica.

čestica poprima fazu (2.4). Postoje i ekscitacije sustava koje su sastavljene od više elementarnih tokova. Promotrimo ponašanje valne funkcije dviju takvih čestica pri zamjeni. Neka je prva sastavljena od  $a$  elementarnih tokova, a druga od  $b$ . Vrijedi

$$\sigma \triangleright \psi(v \otimes w) = e^{\frac{2\pi i ab}{n}} \psi(w \otimes v), \quad (2.6)$$

zato što svaki par elementarnih tokova pri zamjeni dobiva fazu  $e^{2\pi i \theta} \equiv e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , a takvih parova je  $ab$ . Primijetimo da zamjena elementarnog toka i čestice sastavljene od  $n$  istih daje fazu 1. Pošto je eksponencijalna funkcija  $2\pi i$  periodična, topološki gledano imamo  $n$  mogućih tipova čestica gdje je svaka sastavljena od  $\{0, \dots, n-1\}$  elementarnih tokova. Ortonormiranu bazu jednočestičnog Hilbertovog prostora  $H_1$  tada razapinje skup stanja  $\{|0\rangle, \dots, |n-1\rangle\}$ , gdje je  $|0\rangle$  vakuum. Prostor je  $n$ -dimenzionalan i općenito jednočestično stanje je linearna kombinacija (superpozicija) s kompleksnim koeficijentima:  $|v\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} c_i |i\rangle$ , gdje su  $c_i$  kompleksne amplitude. Višečestični Hilbertov prostor je, kao u primjeru 1.5, direktna suma svih mogućih višečestičnih stanja:

$$H = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_1^{\otimes m}. \quad (2.7)$$

Bitan element topološkog kvantnog računa je fuzija anyona. Kad se dva anyona nađu u neposrednoj blizini, mogu se spojiti, tj. postaju stabilno vezano stanje i njihovi tokovi pritom se zbrajaju. Fuziju možemo zamišljati kao raspad čestica unazad u vremenu. Ono što su tamo kanali raspada ovdje su fuzijski kanali koji opisuju novostvorene čestice. Kao što širina raspada (ili vrijeme poluživota) određuje relativne vjerojatnosti, tako fuzijski koeficijenti zadaju cjelobrojni multiplicitet pojedinih novostvorenih čestica. Jednadžbu fuzije za čestice  $a$  i  $b$  pišemo kao

$$a \times b = \sum_c N_{ab}^c c.$$

Ovdje fuzijski koeficijent  $N_{ab}^c \in \mathbb{Z}$  govori koliko je različitih kvantnih stanja kroz koje čestica tipa  $c$  nastaje u fuziji čestica  $a$  i  $b$ . Svaka čestica ima i antičesticu s kojom se fuzionira u vakuum. U slučaju Abelovih anyona, za svaki  $a, b$  točno je jedan  $c = (a + b) \bmod n$  za koji vrijedi  $N_{ab}^c = 1$ , a svi ostali  $N_{ab}^c$  iščezavaju što sugerira da fuziju predstavimo algebarskim produktom dva stanja u Hilbertovom prostoru.

Sada primjećujemo da su stanja Hilbertovog prostora  $H_1$  u bijekciji s elementima grupovne algebre  $\mathbb{C}\mathbb{Z}'_n$  preko izomorfizma  $\sum_{i=0}^{n-1} c_i |i\rangle \leftrightarrow \sum_{g \in \mathbb{Z}_n} c(g)g$  pošto  $\mathbb{C}\mathbb{Z}_n$  ima točno  $n$  elemenata. Homogeni elementi<sup>20</sup> stupnja  $i$  odgovaraju stanju  $|i\rangle$ , a nehomogeni elementi su stanja u superpoziciji. Fuzija odgovara algebarskom pro-

<sup>20</sup>Oni odgovaraju elementima algebre koji su oblika  $cg$  za neki  $g \in \mathbb{Z}_n$ . Stupanj produkta je očito zbroj stupnjeva modulo  $n$ .

duktu dva jednočestična stanja  $m : H_1 \otimes H_1 \rightarrow H_1$ . Promotrimo produkt dva stanja:  $|\alpha\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$ ,  $|\beta\rangle = \beta_1 |1\rangle + \beta_2 |2\rangle$  za neki  $n = 3$  sustav.

$$m(\alpha \otimes \beta) = \alpha_1 \beta_2 |0\rangle + \alpha_0 \beta_1 |1\rangle + (\alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1) |2\rangle.$$

Dobivene koeficijente interpretiramo kao zbroj amplitudi mogućih procesa. Na primjer, koeficijent ispred  $|2\rangle$  odgovara amplitudi fuzije u konačnu česticu  $|2\rangle$ : jedan je doprinos s amplitudom  $\alpha_0 \beta_2$  koji odgovara fuziji čestica s  $|0\rangle$  i  $|2\rangle$ , a drugi doprinos je fuzije čestica  $|1\rangle$  i  $|1\rangle$  s amplitudom  $\alpha_1 \beta_1$ . Na ovom primjeru lako vidimo da proces fuzije nije unitaran ukoliko uzmemo  $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Iako su početna stanja normirana, konačno nije. To znači da je fuzija zapravo mjerenje sustava koje u ovom slučaju ima lijepu algebarsku strukturu. Drugim riječima, Hilbertov prostor s fuzijom je jedna od reprezentacija algebre  $\mathbb{C}\mathbb{Z}'_n$ .

Kad smo već iskoristili produkt na  $\mathbb{C}\mathbb{Z}'_n$ , pogledajmo što nam daje koprodukt. Prema propoziciji 1.12, on omogućava višečestičnu reprezentaciju na proizvoljnom  $H_1^{\otimes m}$  pa stoga i na  $H$  iz (2.7). Nadalje, odabirom kvazitriangularne strukture (2.3) prema teoremu 2.5 možemo ugraditi dobro ponašanje s obzirom na zamjenu čestica. Graducija je tim teoremom smisleno proširena na višečestične sustave jer znamo da npr. višečestično stanje  $|1\rangle \otimes |2\rangle \otimes |3\rangle$  pri zamjeni prve dvije čestice s trećom dobiva isto fazu kao zamjena čestice toka 3 s česticom toka 3. Time gornje stanje prelazi u  $|3\rangle \otimes |1\rangle \otimes |2\rangle$ . Ovo je formalno dokazano u primjeru 2.7 iz kojeg možemo zaključiti da je fizika višečestičnog sustava Abelovih anyona u potpunosti opisana Hopfovom algebrom uz odgovarajuću kvazitriangularnu strukturu.

Postavlja se pitanje je li nužno uvoditi teoriju kategorija, reprezentacija algebri i ostalo za opis anyona? Za fiksni broj čestica  $n$ , grupa pletenica  $B_n$  u potpunosti opisuje njihova topološka svojstva, ali nama su potrebne reprezentacije  $B_n$  za sve  $n$  koje su ujedno i kompatibilne međusobno i kompatibilne s fuzijom [23]. Hopfova algebra, odnosno bialgebra (nigdje nismo koristili antipod<sup>21</sup>) je stoga nužna za baratanje ovakvim sustavima.

### 2.3 Drinfeldovo zakretanje

U ovom potpoglavlju dajemo kratki pregled konstrukcije Drinfeldovog zakretanja koje nam omogućuje dobivanje novih kvazitriangularnih Hopfovih algebra iz starih uvođenjem 2-kociklusa, tj. deformiranjem. Definicija n-kociklusa dana je na početku potpoglavlja 2.3 [14]. Iz te definicije proizlaze definicije 1-kociklusa i 2-kociklusa:

**Definicija 2.8.** *Neka je  $H$  Hopfova algebra ili bialgebra. Tada je 1-kociklus invertibilan*

<sup>21</sup>Antipod interpretiramo kao česticu koja za zadanu česticu fuzioniranjem daje vakuum.

element  $\chi \in H$  za koji vrijedi

$$\Delta\chi = \chi \otimes \chi \quad \text{tj. } \chi \text{ je grupnog tipa.}$$

Invertibilan element  $\chi \in H \otimes H$  je 2-kociklus ako vrijedi

$$(1 \otimes \chi)(id \otimes \Delta)\chi = (\chi \otimes 1)(\Delta \otimes id)\chi.$$

Za 1-kociklus kažemo da je kounitalan ako vrijedi  $\epsilon(\chi) = 1$ , što automatski vrijedi za sve elemente grupnog tipa, a 2-kociklus je kounitalan ako vrijedi  $(\epsilon \otimes id)\chi = (id \otimes \epsilon)\chi = 1$ .

Dalje koristimo samo kounitalni 2-kociklus i zovemo ga zakretanje (*twist*), kako je uobičajeno u fizičarskoj literaturi. Slično kao i za  $R$ -matricu, pišemo  $\chi = \chi_{12} = \chi^{(1)} \otimes \chi^{(2)}$ . Uvjet kocikličnosti tada možemo pisati kao

$$\chi_{23}(id \otimes \Delta)\chi = \chi_{12}(\Delta \otimes id)\chi \quad (2.8)$$

$$((id \otimes \Delta)\chi^{-1})\chi_{23}^{-1} = ((\Delta \otimes id)\chi^{-1})\chi_{12}^{-1}, \quad (2.9)$$

gdje je druga jednadžba inverz prve.

**Teorem 2.9.** *Neka je  $(H, R)$  kvazitriangularna Hopfova algebra i  $\chi$  zakretanje. Tada postoji nova kvazitriangularna Hopfova algebra  $(H_\chi, R_\chi)$  definirana istom algebrom i kojedinicom uz novi koprodukt,  $R$ -matricu i antipod:*

$$\Delta_\chi h = \chi(\Delta h)\chi^{-1}, \quad R_\chi = \chi_{21}R\chi^{-1}, \quad S_\chi h = U(S h)U^{-1}, \quad \forall h \in H_\chi.$$

Ovdje je  $U = \sum \chi^{(1)}(S\chi^{(2)})$  invertibilan.

*Dokaz:* Prvo provjeravamo koasocijativnost  $\Delta_\chi$ :

$$\begin{aligned} (\Delta_\chi \otimes id) \Delta_\chi h &= \chi_{12} ((\Delta \otimes id) (\chi(\Delta h)\chi^{-1})) \chi_{12}^{-1} \\ &= \chi_{12} ((\Delta \otimes id)\chi) ((\Delta \otimes id)\Delta h) ((\Delta \otimes id)\chi^{-1}) \chi_{12}^{-1}, \\ (id \otimes \Delta_\chi) \Delta_\chi h &= \chi_{23} (id \otimes \Delta) (\chi(\Delta h)\chi^{-1}) \chi_{23}^{-1} \\ &= \chi_{23} ((id \otimes \Delta)\chi) ((id \otimes \Delta)\Delta h) ((id \otimes \Delta)\chi^{-1}) \chi_{23}^{-1}. \end{aligned}$$

U drugom i četvrtom retku smo koprodukt produkta zapisali kao produkt koprodukata. Srednji dijelovi konačnih izraza jednaki su u obje jednadžbe zbog koasocijativnosti koprodukta. Lijevi dijelovi su jednaki zbog (2.8), a desni zbog (2.9). Pošto je konjugacija zakretanjem  $\chi$  automorfizam algebre, očito je da je  $\Delta_\chi$  homomorfizam algebri, tj. vrijedi  $\Delta_\chi(a)\Delta_\chi(b) = \chi\Delta(a)\chi^{-1}\chi\Delta(b)\chi^{-1} = \chi\Delta(ab)\chi^{-1} = \Delta_\chi(ab)$ .

Sad pokazujemo da je  $R_\chi$  kvazitriangularna struktura za bialgebru  $H_\chi$ , dakle treba dokazati aksiome iz definicije 2.1. Kako su  $\chi$  i  $R$  invertibilni, tako je i  $R_\chi$ . Nadalje,

imamo

$$\begin{aligned}
(\Delta_\chi \otimes \text{id}) R_\chi &= \chi_{12} ((\Delta \otimes \text{id}) (\tau(\chi) R \chi^{-1})) \chi_{12}^{-1} \\
&= \chi_{12} ((\Delta \otimes \text{id}) \tau(\chi)) ((\Delta \otimes \text{id}) R) ((\Delta \otimes \text{id}) \chi^{-1}) \chi_{12}^{-1} \\
&= \chi_{12} ((\Delta \otimes \text{id}) \tau(\chi)) R_{13} R_{23} ((\text{id} \otimes \Delta) \chi^{-1}) \chi_{23}^{-1} \\
&= \chi_{12} ((\Delta \otimes \text{id}) \tau(\chi)) R_{13} ((\text{id} \otimes \tau \circ \Delta) \chi^{-1}) R_{23} \chi_{23}^{-1} \\
&= \chi_{31} (\chi^{(1)}_{(2)} \otimes \chi^{(2)} \otimes \chi^{(1)}_{(1)}) R_{13} ((\text{id} \otimes \tau \circ \Delta) \chi^{-1}) R_{23} \chi_{23}^{-1} \\
&= \chi_{31} R_{13} (\chi^{(1)}_{(1)} \otimes \chi^{(2)} \otimes \chi^{(1)}_{(2)}) ((\text{id} \otimes \tau \circ \Delta) \chi^{-1}) R_{23} \chi_{23}^{-1} \\
&= \chi_{31} R_{13} \chi_{13}^{-1} \chi_{32} ((\text{id} \otimes \tau \circ \Delta) \chi) ((\text{id} \otimes \tau \circ \Delta) \chi^{-1}) R_{23} \chi_{23}^{-1} \\
&= \chi_{31} R_{13} \chi_{13}^{-1} \chi_{32} R_{23} \chi_{23}^{-1} = (R_\chi)_{13} (R_\chi)_{23}.
\end{aligned}$$

U prvom retku smo raspisali  $\Delta_\chi$  i  $R_\chi$  prema definiciji. U drugom smo iskoristili da je koprodukt homomorfizam algebr. U trećem koristimo svojstvo (2.1) i (2.9) na kraju reda. U četvrtom smo primijenili (2.2). U petom retku smo koristili (2.8) s tim da smo ciklički permutirali faktore u  $H \otimes H \otimes H$  za jedno mjesto ulijevo kako bi dobili  $\chi_{12}(\Delta \otimes \text{id})\tau(\chi) = \chi_{31}(\chi^{(1)}_{(2)} \otimes \chi^{(2)} \otimes \chi^{(1)}_{(1)})$ . U šestom retku ponovno smo primijenili (2.2) na prvo i treće mjesto u  $H \otimes H \otimes H$ . U sedmom smo iz prethodno permutiranih faktora dodatno zamijenili drugo i treće mjesto u  $H \otimes H \otimes H$ , tj. djelovali s  $\text{id} \otimes \tau$ . Time smo dobili  $\chi^{(1)}_{(1)} \otimes \chi^{(2)} \otimes \chi^{(1)}_{(2)} = \chi_{13}^{-1} \chi_{32} (\chi^{(1)} \otimes \chi^{(2)}_{(2)} \otimes \chi^{(2)}_{(1)})$  pa množeći s  $\chi_{13}$  dobivamo  $\chi_{32}(\text{id} \otimes \tau \circ \Delta)\chi = \chi_{13}(\chi^{(1)}_{(1)} \otimes \chi^{(2)} \otimes \chi^{(1)}_{(2)})$ . U osmom retku smo pokratali inverzne faktore  $(\text{id} \otimes \tau \circ \Delta)\chi$  i  $(\text{id} \otimes \tau \circ \Delta)\chi^{-1}$  te primijenili definiciju  $R_\chi$ . Drugi dio aksioma (2.1) dokazuje se analogno.

Aksiom (2.2) slijedi iz

$$\begin{aligned}
\tau \circ \Delta_\chi h &= \tau \circ (\chi(\Delta h) \chi^{-1}) = \chi_{21} (\tau \circ \Delta h) \chi_{21}^{-1} = \\
&= \chi_{21} R(\Delta h) R^{-1} \chi_{21}^{-1} = R_\chi \chi(\Delta h) \chi^{-1} R_\chi^{-1} = R_\chi (\Delta_\chi h) R_\chi^{-1}.
\end{aligned}$$

Na kraju treba provjeriti svojstvo antipoda. Prvo provjeravamo da je  $U$  invertibilan pa definiramo  $U^{-1} := \sum (S\chi^{-(1)})\chi^{--(2)}$ , gdje je  $\chi^{-1} = \sum \chi^{--(1)} \otimes \chi^{--(2)}$ . Vrijedi

$$\begin{aligned}
UU^{-1} &= \chi^{(1)} (S\chi^{(2)}) (S\chi^{-(1)}) \chi^{--(2)} \\
&= \chi'^{-(1)} \chi^{(1)} (S(\chi'^{-(2)}_{(1)} \chi^{-(1)} \chi^{(2)})) \chi'^{-(2)}_{(2)} \chi^{--(2)} \\
&= \chi^{--(1)}_{(1)} (S\chi^{--(1)}_{(2)}) \chi^{--(2)} = 1.
\end{aligned}$$

U drugom retku ubacili smo  $\chi'$ , kopiju  $\chi$  koja se kolabira u jedinicu prema svojstvima antipoda i  $(\text{id} \otimes \epsilon)\chi^{-1} = 1$ . U trećem smo primijenili uvjet kociklusa (zakretanja) u

obliku

$$(\Delta \otimes id)\chi^{-1} = (id \otimes \Delta)\chi^{-1}\chi_{23}^{-1}\chi_{12}$$

$$\chi^{-1(1)}_{(1)} \otimes \chi^{-1(1)}_{(2)} \otimes \chi^{-1(2)} = \chi^{-1(1)}\chi^{(1)} \otimes \chi^{-1(2)}_{(1)}\chi^{(2)} \otimes \chi^{-1(2)}_{(2)}\chi^{(2)}.$$

Slično se dobiva i  $U^{-1}U = 1$ . Sada možemo izračunati

$$\begin{aligned} \cdot (S_\chi \otimes id) \Delta_\chi h &= U (S (\chi^{(1)} h_{(1)} \chi^{-1(1)})) U^{-1} \chi^{(2)} h_{(2)} \chi^{-1(2)} \\ &= U (S \chi^{-1(1)}) (S h_{(1)}) (S \chi^{(1)}) (S \chi'^{-1(1)}) \chi'^{-1(2)} \chi^{(2)} h_{(2)} \chi^{-1(2)} \\ &= U (S \chi^{-1(1)}) (S h_{(1)}) h_{(2)} \chi^{-1(2)} = \epsilon(h) U U^{-1} = \epsilon(h) \\ \cdot (id \otimes S_\chi) \Delta_\chi h &= \chi^{(1)} h_{(1)} \chi^{-1(1)} U (S (\chi^{(2)} h_{(2)} \chi^{-1(2)})) U^{-1} \\ &= \chi^{(1)} h_{(1)} \chi^{-1(1)} (\chi'^{(1)} S \chi'^{(2)}) (S \chi^{-1(2)}) (S h_{(2)}) (S \chi^{(2)}) U^{-1} \\ &= \chi^{(1)} h_{(1)} (S h_{(2)}) (S \chi^{(2)}) U^{-1} = U U^{-1} \epsilon(h) = \epsilon(h), \end{aligned}$$

gdje smo u drugom retku koristili činjenicu da je  $S$  antihomomorfizam i definiciju  $U^{-1}$ , a u trećem  $S(\chi^{(1)})S(\chi^{-1(1)})\chi^{-1(2)}\chi^{(2)} = S(\chi^{-1(1)}\chi^{(1)})\chi^{-1(2)}\chi^{(2)} = \cdot (S \otimes id)((\chi^{-1(1)} \otimes \chi^{-1(2)})(\chi^{(1)} \otimes \chi^{(2)})) = \cdot (S \otimes id)(\chi^{-1}\chi) = id$ , zatim svojstvo antipoda za  $(S h_{(1)})h_{(2)}$  i definiciju  $U^{-1}$ .  $\square$

**Propozicija 2.10.** *Neka je  $\chi$  zakretanje za kvazitriangularnu bialgebru ili Hopfov algebru  $H$ . Ako je  $(\mathcal{A}, \cdot, +; \mathbb{K})$  unitalna algebra na koju  $H$  djeluje kovarijantno ( $\mathcal{A}$  je  $H$ -modul algebra, definicija 1.13), onda*

$$b \cdot_\chi c := \cdot (\chi^{-1}(\triangleright \otimes \triangleright)(b \otimes c)), \quad \forall b, c, \in \mathcal{A}$$

definira novu asocijativnu unitalnu algebru  $\mathcal{A}_\chi$  koja je  $H_\chi$ -modul algebra, gdje je  $H_\chi$  kvazitriangularna Hopfova algebra iz prethodnog teorema. Produkt  $\cdot_\chi$  se često u literaturi piše  $\star$  (čitamo star-produkt) pa za algebru s ovim produktom pišemo  $\mathcal{A}_\star$ .

*Dokaz:* Adaptiramo dokaz iz [24]. Prvo računamo

$$\begin{aligned} \chi^{-1}(\triangleright \otimes \triangleright)(m \otimes id)(g \otimes h \otimes k) &= \chi^{-1(1)}(gh) \otimes \chi^{-1(2)}(k) \\ &= \chi^{-1(1)}_{(1)} g \chi^{-1(1)}_{(2)} h \chi^{-1(2)} k = (m \otimes id) \circ ((\Delta \otimes id)\chi^{-1(1)})(g \otimes h \otimes k), \end{aligned} \quad (2.10)$$

gdje je  $m := \cdot_{\mathcal{A}}$ . U drugoj jednakosti koristili smo da je  $\mathcal{A}$   $H$ -modul algebra. Zatim,

$$\begin{aligned}
(g \star h) \star k &= m \circ \chi^{-1}(g \star h \otimes k) \\
&= m \circ \chi^{-1}((m \circ \chi^{-1}(g \otimes h)) \otimes k) \\
&= m \circ \chi^{-1} \circ ((m \circ \chi^{-1}) \otimes id)(g \otimes h \otimes k) \\
&= m \circ \chi^{-1} \circ (m \otimes id) \circ (\chi^{-1} \otimes id)(g \otimes h \otimes k) \\
&= m \circ (m \otimes id) \circ (\Delta \otimes id) \chi^{-1} \circ (\chi^{-1} \otimes id)(g \otimes h \otimes k) \\
&= m \circ (m \otimes id) \circ (((\Delta \otimes id) \chi^{-1}) \chi_{12}^{-1})(g \otimes h \otimes k).
\end{aligned}$$

Analogno slijedi

$$\begin{aligned}
g \star (h \star k) &= m \circ \chi^{-1}(g \otimes (h \star k)) \\
&= m \circ \chi^{-1}(g \otimes (m \circ \chi^{-1}(h \otimes k))) \\
&= m \circ \chi^{-1} \circ (id \otimes m) \circ (id \otimes \chi^{-1})(g \otimes h \otimes k) \\
&= m \circ (id \otimes m) \circ ((id \otimes \Delta) \chi^{-1}) \chi_{23}^{-1}(g \otimes h \otimes k).
\end{aligned}$$

Pošto vrijedi 2.9, dobiveni izrazi su jednaki pa je algebra  $\mathcal{A}_\star$  asocijativna. Promotrimo djelovanje  $h \in H_\chi$  na produkt  $a \star b$ :

$$\begin{aligned}
h \triangleright (a \star b) &= h \triangleright m \circ (\chi^{-1}(\triangleright \otimes \triangleright))(a \otimes b) = m \circ ((\Delta h) \chi^{-1}(\triangleright \otimes \triangleright))(a \otimes b) \\
&= m \circ \chi^{-1}(\triangleright \otimes \triangleright)((\Delta_\chi h)(\triangleright \otimes \triangleright))(a \otimes b) \equiv \star(\Delta_\chi h)(\triangleright \otimes \triangleright)(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Ako  $\mathcal{A}$  ima jedinični element 1, tada je on jedinični element za  $\mathcal{A}_\star$ :

$$\begin{aligned}
1 \star a &= m \circ (\chi^{-1}(\triangleright \otimes \triangleright)(1 \otimes a)) = m \circ (\chi^{-1(1)} \triangleright 1 \otimes \chi^{-1(2)} \triangleright a) \\
&= m \circ (\epsilon(\chi^{-1(1)}) 1 \otimes \chi^{-1(2)} \triangleright a) = m \circ (1 \otimes (\epsilon \otimes id) \chi^{-1} \triangleright a) = a.
\end{aligned}$$

U trećoj jednakosti koristili smo da je  $\mathcal{A}$   $H$ -modul algebra, a u četvrtoj svojstvo kounitalnosti zakretanja. Analogno se pokaže i  $a \star 1 = a$ . Za kraj treba pokazati  $h \triangleright 1 = \epsilon(h)1$ , no ovo vrijedi automatski pošto je kojedinica za  $H$  identična onoj za  $H_\chi$  i jedinica u  $\mathcal{A}$  identična onoj u  $\mathcal{A}_\star$ .  $\square$

## 2.4 Nekomutativna teorija polja

U ovom potpoglavlju vidjet ćemo kako pomoću Hopfove algebre možemo baratati koordinatama, poljima i ostalim strukturama u nekomutativnom prostorvremenu. Glavne reference su [25] i [2].

Opće je poznato da u kvantnoj fizici operator impulsa  $\hat{p}$  i položaja  $\hat{x}$  ne komutiraju, tj. vrijedi  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ . Posljedica te komutacijske relacije je nemogućnost istovremenog

mjerenja položaja i impulsa koja je matematički dana Heisenbergovim principom neodređenosti

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.11)$$

Također, sve 3 prostorne koordinate međusobno komutiraju što u teoriji implicira beskonačnu preciznost mjerenja položaja pa svaku točku u prostoru možemo definirati pomoću tri realne koordinate što prostor čini (pod)mnostrukošću.

U bitnom radu iz 1994. godine Doplicher, Fredenhagen i Roberts [12] pokazuju kako fizikalna teorija u kojoj vrijede Einsteinova opća teorija relativnosti i kvantna mehanika nužno vodi na neiščezavajuće komutatore samih koordinata. Ukratko ćemo skicirati argument: iz (2.11) znamo da za ispitivanje prostovremenske točke na skali Planckove duljine

$$L_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \simeq 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm}, \quad (2.12)$$

trebamo česticu mase  $M$  takve da joj je Comptonova valna duljina manja od Planckove,

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{Mc} \leq L_P \quad \Rightarrow \quad M \geq \frac{\hbar}{L_{PC}} \simeq 10^{19} \text{ GeV},$$

gdje je korišteno  $p = Mc$ . S druge strane, opća teorija relativnosti nam govori da Schwarzschildov radijus pridružen toj masi iznosi

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \geq 2L_P, \quad (2.13)$$

što je dvostruko veće od prostorne regije koju želimo ispitati. Stoga je ispitivanje prostorvremena na Planckovoj skali paradoksalno jer se tijekom procesa stvaraju zarobljene plohe<sup>22</sup> (crne rupe) koje kauzalno izoliraju prostovremensku regiju u koju smo zainteresirani.

Kako bi spriječili kolaps te regije moramo pretpostaviti da nije moguće istovremeno mjeriti sve četiri prostorvremenske koordinate što možemo nametnuti nekomutativnošću koordinata. Jedan jednostavni izbor je

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}. \quad (2.14)$$

Ovdje su  $\theta_{\mu\nu}$  konstante, a  $\hat{x}_\mu$  nekomutativni operatori položaja. U limesu  $\theta_{\mu\nu} \rightarrow 0$  svode se na koordinatne funkcije s komutativnim produktom.

Jedna od mogućih fizikalnih realizacija ovakvog sustava je  $m \rightarrow 0$  limes Landauovog sustava [3], tj. gibanje bezmasene nabijene čestice u jakom homogenom

<sup>22</sup>Plohe iz koje svi budući svjetlosni geodezici i oni vremenskog tipa završavaju u singularitetu (nepotpuni su). Nalaze se npr. unutar horizonta Schwarzschildove crne rupe.



magnetskom polju u dvije dimenzije.

Podsjetimo se, izometrije<sup>23</sup> prostorvremena Minkowskog dane su Poincareovom grupom  $\mathcal{P}$  koja je Liejeva grupa. Možemo ju pisati kao semidirektni produkt prave ortokrone Lorentzove grupe  $\mathcal{L} := SO_{\uparrow}^+(1, 3)$  i grupe translacija  $\mathcal{T} \cong (\mathbb{R}^4, +)$ , koja je normalna podgrupa  $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} \ltimes \mathcal{T}. \quad (2.15)$$

Generatori  $\mathcal{T}$  su impulsi  $P_{\mu}$ , a  $\mathcal{L}$  Lorentzovi generatori  $M_{\mu\nu}$  pa za  $\mathfrak{p}$  (Liejevu algebru grupe  $\mathcal{P}$ ) imamo sljedeće komutacijske relacije:

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] &= -i(\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda}), \\ [M_{\mu\nu}, P_{\lambda}] &= -i(\eta_{\nu\lambda}P_{\mu} - \eta_{\mu\lambda}P_{\nu}). \end{aligned}$$

Algebra  $\mathfrak{p}$  je 10-dimenzionalna s 4 generatora translacija  $P^{\mu}$  i 6 generatora rotacija/potisaka  $M_{\mu\nu}$  (antisimetrični indeksi). Jedna od beskonačnodimenzionalnih reprezentacija Poincareove algebre je na prostoru glatkih funkcija u 4 dimenzije  $C^{\infty}(\mathbb{R}^4)$ . Prostor  $C^{\infty}(\mathbb{R}^4)$  je vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{C}$  uz množenje skalarom i zbrajanje definirano po točkama. Nadalje, umnožak dvije glatke funkcije i dalje je glatka funkcija pa je vektorski prostor zatvoren s obzirom na ovako definirano množenje. Sveukupno imamo algebru  $(\mathcal{A}, \cdot, +; \mathbb{C})$ , gdje je  $\mathcal{A} := C^{\infty}(\mathbb{R}^4)$ . Djelovanje  $\triangleright : \mathfrak{p} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  generatora  $\mathfrak{p}$  na  $f \in \mathcal{A}$  definiramo kao

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} \triangleright f &= -i \left( x_{\mu} \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}} - x_{\nu} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} \right) \implies \rho(M_{\mu\nu}) := -i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}) \\ P_{\mu} \triangleright f &= -i \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} \implies \rho(P_{\mu}) := -i\partial_{\mu}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ovdje smo uveli reprezentaciju  $\rho$  pridruženu gornjem djelovanju. Za  $\mathfrak{p}$  prema primjeru 1.16 možemo definirati univerzalnu omotačku algebru  $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$  pa gornju reprezentaciju  $\mathfrak{p}$  prema korolaru 1.17 možemo proširiti na reprezentaciju  $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$ . Djelovanje generatora  $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$  je identično pa ga ne pišemo ponovo. Uvođenjem zakretanja<sup>24</sup>  $F$  prema teoremu 2.9 dobivamo novu kvazitriangularnu Hopfov algebru  $\mathcal{U}^F(\mathfrak{p})$ . Propozicija 2.10 tada nam omogućuje da komutativnu algebru  $(\mathcal{A}, \cdot, +; \mathbb{C})$  deformiramo u nekomutativnu asocijativnu algebru  $(\mathcal{A}_{\star}, \star, +; \mathbb{C})$ , gdje je

$$a \star b := a \cdot_F b = \cdot(F^{-1}(\triangleright \otimes \triangleright)(a \otimes b)), \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

<sup>23</sup>Promatramo komponentu povezanu s jedinicom, paritet i vremenska inverzija ovdje nas ne zanimaju.

<sup>24</sup>Zakretanje umjesto s  $\chi$  koji je zastupljeniji u matematičkoj literaturi u fizikalnoj označavamo s  $F$ .

Kao vektorski prostori,  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{A}_*$  su izomorfni pa im se algebre razlikuju jedino po produktu. Algebra  $\mathcal{A}_*$  kovarijantna je s obzirom na Hopfovu algebru  $\mathcal{U}^F(\mathfrak{p})$ , no kako je općenito  $F \neq \tau \circ F$ , algebra više nije komutativna i time prostor nad kojim algebra  $\mathcal{U}^F(\mathfrak{p})$  djeluje (za  $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$  to je bio  $\mathbb{R}^4$ ) zovemo nekomutativnim prostorom. Kad bi taj prostor bio neka mnogostrukost  $\mathcal{M}$ , imao bi komutativnu algebru glatkih funkcija  $C^\infty(\mathcal{M})$  pa on ne može biti mnogostrukost nego neka bogatija struktura koja se u limesu  $F \rightarrow 1 \otimes 1$  svodi na mnogostrukost.

Uzmimo za primjer

$$F = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}P_\mu \otimes P_\nu\right).$$

Deformirani koprodukt iz teorema 2.9 je

$$\Delta^F(h) = F(\Delta h)F^{-1} = e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}P_\alpha \otimes P_\beta} \Delta(h) e^{-\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}P_\alpha \otimes P_\beta}, \quad \forall h \in \mathcal{U}^F(\mathfrak{p}).$$

Pošto generatori translacija komutiraju, imamo

$$\Delta^F(P_\alpha) = \Delta(P_\alpha) = P_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes P_\alpha.$$

Za generatore Lorentzove grupe korištenjem BCH formule u obliku

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots + \frac{1}{n!} \overbrace{A, [A, \dots [A, B] \dots]}^{n \text{ faktora } A} + \dots$$

dobivamo

$$\Delta^F(M_{\mu\nu}) = M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}((\eta_{\alpha\mu}P_\nu - \eta_{\alpha\nu}P_\mu) \otimes P_\beta + P_\alpha \otimes (\eta_{\beta\mu}P_\nu - \eta_{\beta\nu}P_\mu)).$$

Zbog komutacijskih relacija Lorentzove algebre  $n \geq 2$  sumandi u BCH formuli iščezavaju.

Komutativni produkt na  $C^\infty(\mathbb{R}^4)$  deformira se u *star*-produkt:

$$(f \star g)(x) \equiv m \circ e^{-\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\rho(P_\alpha) \otimes \rho(P_\beta)}(f(x) \otimes g(x)) \stackrel{(2.16)}{=} m \circ e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta}(f(x) \otimes g(x)). \quad (2.17)$$

Pomoću formule (2.16) možemo izračunati djelovanje Lorentzovih generatora na koordinatne funkcije  $f(x^\mu) = x^\mu$ :

$$P_\mu \triangleright x_\rho = i\eta_{\mu\rho}, \quad M_{\mu\nu} \triangleright x_\rho = i(x_\mu\eta_{\nu\rho} - x_\nu\eta_{\mu\rho}). \quad (2.18)$$

Ovaj rezultat omogućuje nam da izračunamo

$$\begin{aligned}
x_\mu \star x_\nu &= m \circ e^{-\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}P_\alpha \otimes P_\beta} (\triangleright \otimes \triangleright) (x_\mu \otimes x_\nu) \\
&= m \circ \left( x_\mu \otimes x_\nu + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\mu} \otimes \eta_{\beta\nu} \right) \\
&= x_\mu x_\nu + \frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}, \\
x_\nu \star x_\mu &= x_\nu x_\mu + \frac{i}{2}\theta_{\nu\mu}.
\end{aligned}$$

Odatle slijedi

$$[x_\mu, x_\nu]_\star := x_\mu \star x_\nu - x_\nu \star x_\mu = i\theta_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

što je jednako (2.14). Ilustrativan primjer kovarijantnosti [26]<sup>25</sup> s obzirom na  $\mathcal{U}^F(\mathfrak{p})$  je funkcija oblika  $f_{\rho\sigma}(x) = x_\rho x_\sigma$ . U nedeformiranom slučaju djelovanje  $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$  dano je s

$$M_{\mu\nu} \triangleright f_{\rho\sigma} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) f_{\rho\sigma} = i(f_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - f_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho} + f_{\rho\mu} \eta_{\nu\sigma} - f_{\rho\nu} \eta_{\mu\sigma}).$$

U računu smo koristili Leibnizovo pravilo za derivaciju produkta. Derivacija<sup>26</sup> se u algebri definira kao linearni operator  $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  koji zadovoljava Leibnizovo pravilo

$$D(ab) = D(a)b + aD(b). \quad (2.20)$$

Funkciju  $f_{\rho\sigma}$  možemo pisati kao<sup>27</sup>  $f_{\rho\sigma} = m(x_\rho \otimes x_\sigma)$ . Sada koristeći činjenicu da je  $\mathcal{A}$   $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$ -modul algebra slijedi

$$M_{\mu\nu} \triangleright f_{\rho\sigma} = M_{\mu\nu} \triangleright m(x_\rho \otimes x_\sigma) = m(M_{\mu\nu(1)} \triangleright x_\rho \otimes M_{\mu\nu(2)} \triangleright x_\sigma). \quad (2.21)$$

Kako je nedeformirani koprodukt  $\Delta M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}$  (vidi primjer 1.16), rezultat je

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu} \triangleright f_{\rho\sigma} &= \mu(M_{\mu\nu} \triangleright x_\rho \otimes 1 \triangleright x_\sigma + 1 \triangleright x_\rho \otimes M_{\mu\nu} \triangleright x_\sigma) \\
&\stackrel{(2.18)}{=} i(f_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - f_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho} + f_{\rho\mu} \eta_{\nu\sigma} - f_{\rho\nu} \eta_{\mu\sigma}).
\end{aligned}$$

Možemo zaključiti da koprodukt ugrađuje Leibnizovo pravilo. Pošto tangentna vektorska polja na mnogostrukosti također zadovoljavaju Leibnizovo pravilo, ne iznenađuje rezultat da su derivacije u algebri glatkih funkcija (svi linearni operatori koji zadovoljavaju 2.20) na mnogostrukosti u korespondenciji s vektorskim poljima na istoj mnogostrukosti [28]. Koprodukt u ovom kontekstu diktira geometriju pa deformirani

<sup>25</sup>U ovom radu su jednađbe (3.17) i (3.19) pogrešne, ovdje je prikazana ispravljena verzija.

<sup>26</sup>Postoji i linearni operator analogan integralu, u algebri je poznat kao Rota-Baxterov operator [27].

<sup>27</sup>Produkt  $m$  je u zapravo kanonski izomorfizam iz leme 1.1 po točkama,  $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K}$ .

koprodukt stoga deformira Leibnizovo pravilo za tangentna polja na nekomutativnoj mnogostrukosti [29].

Funkcija  $f_{\rho\sigma} = x_\rho \star x_\sigma$  zbog relacija (2.14) neće se transformirati kao tenzor s obzirom na djelovanje deformiranog  $M_{\mu\nu}$ . Potrebno je simetrizirati indekse pa za  $\hat{f}_{\rho\sigma} := x_{(\rho} \star x_{\sigma)}$  dobivamo

$$M_{\mu\nu} \triangleright \hat{f}_{\rho\sigma} = \star(\Delta^F M_{\mu\nu})(\triangleright \otimes \triangleright)(x_{(\rho} \otimes x_{\sigma)}) = i \left( \hat{f}_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \hat{f}_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho} + \hat{f}_{\rho\mu} \eta_{\nu\sigma} - \hat{f}_{\rho\nu} \eta_{\mu\sigma} \right).$$

Ovaj rezultat potvrđuje kovarijantnost s obzirom na  $\mathcal{U}^F(\mathfrak{p})$ . Argument se može proširiti na proizvoljne simetrizirane tenzore koordinata. Na primjer, djelovanje na  $x_\mu \star x^\mu$  dobivamo kontrahiranjem gornjeg izraza s  $\eta^{\rho\sigma}$ . Vidimo da ovo djelovanje iščezava što znači da *star*-prostorvremenski interval ostaje invarijanta, ali samo na djelovanje deformirane  $\mathcal{U}^F(\mathfrak{p})$ .

Izračunajmo radi konzistentnosti djelovanje  $M_{\mu\nu}$  na  $[x_\rho, x_\sigma]_\star := x_\rho \star x_\sigma - x_\sigma \star x_\rho$ ,

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} \triangleright [x_\rho, x_\sigma]_\star &= ([x_\mu, x_\sigma]_\star - i\theta_{\mu\sigma}) \eta_{\nu\rho} - ([x_\nu, x_\sigma]_\star - i\theta_{\nu\sigma}) \eta_{\mu\rho} \\ &\quad - ([x_\mu, x_\rho]_\star - i\theta_{\mu\rho}) \eta_{\nu\sigma} + ([x_\nu, x_\rho]_\star - i\theta_{\nu\rho}) \eta_{\mu\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Kako je gornji komutator jednak  $i\theta_{\rho\sigma}$ , zaključujemo da je antisimetrični  $\theta_{\rho\sigma}$  invarijantni tenzor na deformirane Lorentzove transformacije. Lagranžijan u kojem su svi produkti između polja zamijenjeni simetriziranim *star*-produktom nije više kovarijantan s obzirom na Lorentzovu (pa time i Poincareovu) algebru, ali zato jest za deformiranu Lorentzovu algebru.

$R$ -matrica je prema teoremu 2.9

$$R = F_{21} F^{-1} \implies \hat{R} \equiv \tau \circ R = F F_{21}^{-1} \tau. \quad (2.22)$$

Zamjenom  $\mu \leftrightarrow \nu$  i korištenjem antisimetričnosti  $\theta^{\mu\nu}$  vidimo da vrijedi  $F_{21}^{-1} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} P_\nu \otimes P_\mu} = F$  pa je matrica  $\hat{R}$  iz teorema 2.4

$$\hat{R} = F^2 \tau = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} P_\mu \otimes P_\nu} e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} P_\mu \otimes P_\nu} \tau = e^{i\theta^{\mu\nu} P_\mu \otimes P_\nu} \tau,$$

gdje je korištena BCH formula u obliku

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= e^Z, \\ Z &= X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots \end{aligned}$$

Primijenimo sad teorem 2.5 za  $V = W = C^\infty(\mathbb{R}^4)$  (gledano kao vektorski prostor,

neovisno o algebarskoj strukturi):

$$\begin{aligned}\Psi(x_\nu \otimes x_\mu) &= e^{i\theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta} (\triangleright \otimes \triangleright)(x_\mu \otimes x_\nu) = \sum \frac{(i\theta^{\alpha\beta})^n}{n!} (P_\alpha \otimes P_\beta)^n (\triangleright \otimes \triangleright)(x_\mu \otimes x_\nu) \\ &= x_\mu \otimes x_\nu - i\theta_{\mu\nu} \implies x_\mu \otimes x_\nu - \Psi(x_\nu \otimes x_\mu) = i\theta_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

U drugom retku samo prva dva člana u Taylorovom razvoju ne iščezavaju. Ovo je potvrda relacije (2.19) na razini Hopfove algebre  $\mathcal{U}^F(\mathfrak{p})$  (nigdje nije korišten *star*-produkt) pa zaključujemo da je svojstvo nekomutativnosti *star*-produkta posljedica netrivialne kvazitriangularne strukture pripadne kovarijantne algebre. Primijetimo kako u  $\theta_{\mu\nu} \rightarrow 0$  limesu  $\Psi, \hat{R} \rightarrow \tau$  pa algebra funkcija postaje komutativna.

**Propozicija 2.11.** *Simetrizirani i antisimetrizirani produkt i dalje je dobro definiran uz zamjenu  $\tau \rightarrow \hat{R}$ :*

$$a \otimes_{S,A} b = \frac{1 \pm \hat{R}}{2} (\triangleright \otimes \triangleright) a \otimes b, \quad (2.23)$$

gdje su  $a, b$  elementi proizvoljnog  $\mathcal{U}^F(\mathfrak{p})$ -modula.

*Dokaz:* Potrebno je dokazati da ovako definirana anti/simetrizacija komutira s koproduktima generatora  $\mathcal{U}^F(\mathfrak{p})$ , jer koprodukti djeluju na višečestična stanja. Dakle, treba pokazati

$$\frac{1 \pm \hat{R}}{2} (\Delta^F h) = (\Delta^F h) \frac{1 \pm \hat{R}}{2} \iff \hat{R}(\Delta^F h) = (\Delta^F h)\hat{R}. \quad (2.24)$$

Uvrštavamo definiciju  $\hat{R} = F^2\tau$  i  $\Delta^F h = F(\Delta h)F^{-1}$  i preuređujemo obje strane:

$$\begin{aligned}F^2\tau F(\Delta h)F^{-1} &= F(\Delta h)F^{-1}F^2\tau \\ F^2(\tau F)(\tau \Delta h)(\tau F^{-1})\tau &= F(\Delta h)F^{-1}F^2\tau \\ F^2F^{-1}(\Delta h)F\tau &= F(\Delta h)F\tau \\ F(\Delta h)F\tau &= F(\Delta h)F\tau.\end{aligned}$$

U trećem retku koristili smo  $\tau F = F^{-1}$  i  $\tau F^{-1} = F$  te kokomutativnost nedeformiranog koprodukta. Da smo koristili nedeformirani  $\hat{R} = \tau$  dobili bi  $F^{-1}(\Delta h)F\tau \neq F(\Delta h)F^{-1}\tau$ .  $\square$

U potpoglavlju 2.2 vidjeli smo da faza drugačija od  $\pm 1$  pri zamjeni čestica vodi na anyonsku statistiku, no ovdje to nije tako jer vrijedi  $\hat{R}^2 = (F^2\tau)(F^2\tau) = F^2F^{-2}\tau^2 = id \otimes id$  pa dvostruka zamjena ipak vodi na identitetu.

Posljedično je zadovoljen uvjet (A.2) iz dodatka A i  $\hat{R}$  stoga djeluje kao simetrična grupa (a ne grupa pletenica). Za takvu kvazitriangularnu strukturu kažemo da je triangularna. U radu [30] napisan je rezultat koji se dobiva pri zamjeni dva ravna

vala  $e_p(x) = e^{-ipx}$ :

$$e_p \otimes_{S,A} e_q = \pm e^{-ip_\mu \theta^{\mu\nu} q_\nu} e_q \otimes_{S,A} e_p. \quad (2.25)$$

Faza koja se dobiva dvostrukom zamjenom je  $e^{-i\theta^{\mu\nu}(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu)}$  pa se zbog antisimetričnosti  $\theta^{\mu\nu}$  ona svodi na jedinicu kao što smo i očekivali.

Općenito se komutacijske relacije koordinata poput one u 2.19 dijele u tri klase [31]:

- **Liejevog tipa**  $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\hat{x}_\alpha C_{\mu\nu}^\alpha, \quad C_{\mu\nu}^\alpha \in \mathbb{R}$
- **Moyalovog tipa**  $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \quad \theta_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$
- **Snyderovog tipa**  $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = isM_{\mu\nu}, \quad s \in \mathbb{R},$

gdje je  $M_{\mu\nu}$  generator Lorentzovih transformacija. Od prostora Liejevog tipa najpoznatiji je  $\kappa$ -Minkowski prvi put uveden u [32] koji je kovarijantan s obzirom na  $\kappa$ -Poincare algebru. Njime ćemo se pozabaviti u četvrtom poglavlju.

## 2.5 Posljedice nekomutativnosti

Teorija polja na nekomutativnom prostoru donosi neke nove fenomene u odnosu na komutativnu teoriju. Oni na koje ćemo se ovdje fokusirati su modifikacija interakcije, planarni odnosno neplanarni dijagrami i miješanje UV/IR divergencija. Glavni izvor je 3. poglavlje iz [3].

Pogledajmo skalarnu  $\phi^4$  teoriju u  $D$  dimenzija. Lagranžijan na komutativnom prostoru je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_i \phi(x))^2 + \frac{m^2}{2}\phi(x)^2 + \frac{g^2}{4!}\phi(x)^4. \quad (2.26)$$

Ovaj lagranžijan kovarijantan je na standardnu Poincareovu algebru. Deformacijom te algebre u skladu s prethodnim potpoglavljem komutativne produkte polja<sup>28</sup> moramo zamijeniti kovarijantnim *star*-produktima prema formuli (2.17). Potreban nam je *star*-produkt dvije i četiri funkcije. Verzija formule (2.17) koja se često pojavljuje u literaturi je

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j\right) g(x) \\ &= f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(x)) (\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g(x)), \end{aligned}$$

gdje je  $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ . *Star*-produkt je asocijativan pa ga možemo poopćiti na više faktora:

<sup>28</sup>Polja sada gledamo kao elemente algebre  $\mathcal{A}_\star$ .

$$f_1(x_1) \star \cdots \star f_n(x_n) = \prod_{a < b} \exp\left(\frac{i}{2} \theta^{ij} \frac{\partial}{\partial x_a^i} \frac{\partial}{\partial x_b^j}\right) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n). \quad (2.27)$$

Parcijalnom integracijom može se pokazati da za Schwartzove funkcije<sup>29</sup> vrijedi

$$\int d^D x f(x) \star g(x) = \int d^D x f(x) g(x). \quad (2.28)$$

Zamjenom običnih produkata sa  $\star$  u (2.26) te integracijom za nekomutativnu  $\phi^4$  akciju dobivamo

$$S[\phi] = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\partial_i \phi(x))^2 + \frac{m^2}{2} \phi(x)^2 + \frac{g^2}{4!} \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \right],$$

gdje smo upotrijebili (2.28). Kinetički i maseni član su nepromijenjeni u odnosu na (2.26) pa goli propagator ostaje isti.<sup>30</sup> Do promjene dolazi u interakciji koja prebacivanjem u impulsni prostor postaje

$$\int d^D x \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) = \prod_{a=1}^4 \int \frac{d^D k_a}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k_a) (2\pi)^D \delta^D\left(\sum_{a=1}^4 k_a\right) V(k_1, k_2, k_3, k_4),$$

gdje je  $V$  interakcijski vrh u impulsnom prostoru,

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) = \prod_{a < b} e^{-\frac{i}{2} k_a \wedge k_b}. \quad (2.29)$$

Ovdje smo uveli 2-formu

$$k_a \wedge k_b = (k_a)_i \theta^{ij} (k_b)_j = -k_b \wedge k_a.$$

Ovakav izgled vrha posljedica je formule (2.27) za 4 polja. Perturbativan račun i dalje ostaje valjan pošto funkcija  $V$  doprinosi fazom koja ne može narušiti svojstva konvergencije. Zanimljivo je da vrh sadrži fazu ovisnu o impulsima što implicira nelokalnu interakciju. Neka je  $\|\theta\|$  karakteristična vrijednost<sup>31</sup> tenzora  $\theta^{ij}$ . Preciznije, ako su  $f$  i  $g$  polja s nosačem (zatvarač skupa na kojem funkcija ne iščezava) unutar regije veličine  $\delta \ll \|\theta\|$ , tada je nosač  $f \star g$  veličine  $\|\theta\|/\delta$  [34]. Visokoenergetski impulsi usko lokalizirani u koordinatnom prostoru stoga mogu imati dalekosežne

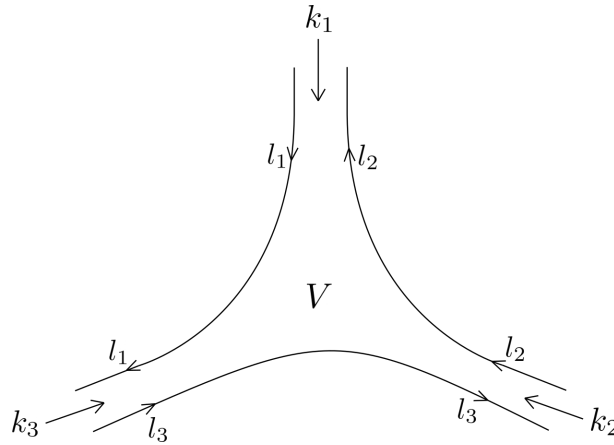
<sup>29</sup>Funkcije koje u koordinatnom i impulsnom prostoru u beskonačnosti trnu brže od proizvoljne potencije.

<sup>30</sup>Slobodna teorija i dalje mora biti kovarijantna. Odabir deformirane, odnosno nedeformirane simetrije (i koprodukta) vodi na drukčiji tenzor energije i impulsa [33]. Konstrukcija Fockovog prostora naročito ovisi o koproduktu kao što je to bio slučaj u potpoglavlju 2.2 pa i kvantizacija slobodne teorije ovisi o simetriji.

<sup>31</sup>Preciznije, operatorska norma.

posljedice. Zbog ovakve nelokalnosti, nametanjem UV *cutoffa*  $\Lambda$  efektivno u teoriju ugrađujemo IR *cutoff* na skali  $\frac{1}{\|\theta\|\Lambda}$ . Još jedan heuristički argument za miješanje UV i IR skala je činjenica da za jednu usko lokaliziranu  $x$ -koordinatu (visoka energija) zbog komutacijskih relacija između koordinata postoji još barem jedna  $x$  koordinata koja mora biti disperzirana (niska energija).

Faza vrha (2.29) invarijantna je samo na cikličke permutacije impulsa u vrhu pa moramo paziti na njihov relativni poredak. Kada bi vrh bio točka u trodimenzionalnom prostoru a impulsi polupravci koji izlaze iz nje, ne bismo mogli konzistentno pratiti poredak impulsa. S druge strane, kada bi se sve odvijalo u ravnini, impulsi bi npr. smjerom kazaljke na satu iz vrha imali dobro definiran ciklički poredak. Umjesto da mijenjamo dimenziju ambijentalnog prostora, možemo istu stvar implementirati tako da propagatore zamišljamo kao vrpce (*ribbon graph*) koje se spajaju u vrhu koji je dvodimenzionalan. Vrh s tri impulsa izgleda kao na slici 2.1. Impulse smo pridi-



Slika 2.1: Vrpčasta struktura vrha u nekomutativnoj teoriji.

jelili rubovima vrpce umjesto propagatorima, što automatski implementira očuvanje impulsa u vrhovima. Impulsi propagatora mogu se izraziti preko njih kao

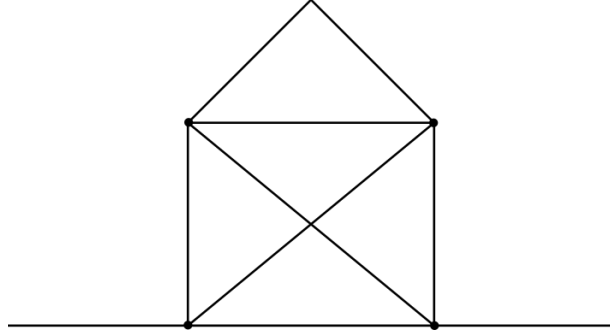
$$k_1 = l_1 - l_2, \quad k_2 = l_2 - l_3, \quad k_3 = l_3 - l_1.$$

Za fazu vrha prema (2.29) vrijedi

$$\begin{aligned} k_1 \wedge k_2 + k_1 \wedge k_3 + k_2 \wedge k_3 &= (l_1 - l_2) \wedge (l_2 - l_3) + (l_1 - l_2) \wedge (l_3 - l_1) + (l_2 - l_3) \wedge (l_3 - l_1) \\ &= l_1 \wedge l_2 + l_2 \wedge l_3 + l_3 \wedge l_1. \end{aligned}$$

Općenito, faza vrha u kojeg ulaze  $n$  propagatora u cikličkom poretku  $k_1, \dots, k_n$  i u kojem su impulsi na vrpci numerirani tako da je  $k_i = l_i - l_{i+1}$  ( $l_{n+1}$  označava  $l_1$ )





Slika 2.2: Neplanarni dijagram u nekomutativnoj  $\phi^4$  teoriji.

vrijedi

$$\sum_{a < b} k_a \wedge k_b = \sum_i l_i \wedge l_{i+1}. \quad (2.30)$$

Za dijagram koji se može smjestiti na Riemannovu plohu određenog genusa bez presijecanja linija kažemo da je planarni. Nadalje, za planarni Feynmanov dijagram s proizvoljnim brojem unutarnjih propagatora i  $n$  vanjskih impulsa, ukupna faza koja množi amplitudu dana je formulom (2.30) izvrijednjenom na vanjskim impulsima. Doprinosi vrpca unutarnjih propagatora se pokrate analogno Stokesovom teoremu u tri dimenzije, što se može vidjeti i crtanjem par jednostavnih primjera.

Zaključujemo da doprinos planarnih dijagrama u nekomutativnom perturbativnom računu smetnje odgovara komutativnom slučaju pomnoženom s faznim faktorom

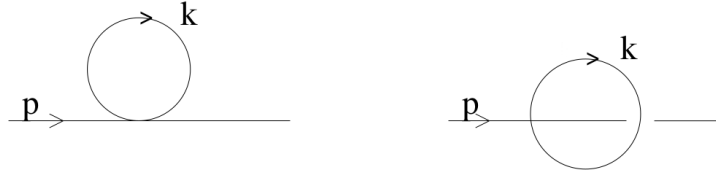
$$V_p(p_1, \dots, p_n) = \prod_{a < b} e^{-\frac{i}{2} p_a \wedge p_b},$$

gdje su  $p_1, \dots, p_n$  ciklički orijentirani vanjski impulsi. Na razini planarnih dijagrama nekomutativna teorija je stoga renormalizabilna ako i samo ako je odgovarajuća komutativna teorija renormalizabilna [34].

Zahtjev da impulsi u određenom poretku ulaze u vrh ekvivalentan je lokalnoj vrpčastoj strukturi u vrhu i ne garantira da ćemo sve propagatore, tj. njihove vrpce moći uroniti u orijentabilnu plohu bez ruba. Problemi takve vrste nastaju kada propagatori prelaze jedan preko drugog ili preko vanjskih linija i pritom se ne mogu otpetljati u planarni graf. Primjer je dijagram na slici 2.2 u  $\phi^4$  teoriji. U tom slučaju, faza koja množi neplanarni dijagram je

$$V_{np}(p_1, \dots, p_n) = V_p(p_1, \dots, p_n) \prod_{a,b} e^{-\frac{i}{2} \cap_{ab} k_a \wedge k_b}, \quad (2.31)$$

gdje je  $\cap_{ab}$  matrica presijecanja koja broji koliko je puta linija  $a$  prešla preko linije  $b$  (s negativnim predznakom ako je ispod) i u suštini je jedinstvena. Zbog ovih dodat-



Slika 2.3: Dijagrami na razini jedne petlje.

nih oscilatornih faktora ovisnim o unutarnjim impulsima očekujemo da će ublažiti UV divergencije koje se pojavljuju u komutativnim teorijama. Presijecanjem linija u komutativno divergentnom dijagramu, faza u gornjoj relaciji daje efektivni UV *cutoff* reda veličine  $||\theta||^{-1/2}$  i amplituda dijagrama često postaje konačna.

Pokušajmo sada izvrijediti jednočestično ireducibilnu korelacijsku funkciju dva polja na razini jedne petlje. Za goli propagator, tj. nulti red, već smo potvrdili da je identičan onom u komutativnoj teoriji. Na razini jedne petlje topološki postoje dva dijagrama koji doprinose amplitudi, jedan planarni i jedan neplanarni. Oni su prikazani na slici 2.3. Njihove amplitude su

$$\begin{aligned}\Pi_p^{(1)}(p) &= \frac{1}{3} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m^2}, \\ \Pi_{np}^{(1)}(p) &= \frac{1}{6} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik \wedge p}}{k^2 + m^2}.\end{aligned}$$

Planarni dijagram je kvadratično UV divergentan, dok je neplanarni uglavnom konvergentan zbog brzih oscilacija u fazi pri visokim impulsima  $k$ . Iznimka je slučaj  $p = 0$  jer faza tada iznosi nula i divergencije se ponovno manifestiraju u obliku

$$\Pi_p^{(1)} = 2\Pi_{np}^{(1)}(p = 0). \quad (2.32)$$

Efektivni UV *cutoff* u impulsnom prostoru je  $1/\sqrt{|p \bullet p|}$ , gdje smo uveli pozitivno definitni<sup>32</sup> produkt

$$p \bullet q = -p_i (\theta^2)^{ij} q_j = q \bullet p.$$

Dakle, UV divergencija pojavljuje se pri niskim (IR) vanjskim impulsima. Ovakvo miješanje UV i IR divergencija karakteristično je za nekomutativne teorije polja. Uvođenjem regulatora  $\Lambda$  za amplitudu neplanarnog dijagrama može se pokazati da vrijedi [3]

$$\Pi_{np}^{(1)}(p) = \frac{1}{96\pi^2} \left( \Lambda_{\text{eff}}^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda_{\text{eff}}^2}{m^2} \right) + O(1),$$

<sup>32</sup>Kvadrat antisimetrične matrice je simetrična matrica koja je realna pa je i hermitska.

gdje je  $\Lambda_{eff}$  efektivni UV-*cutoff*

$$\Lambda_{eff}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\Lambda^2} + p \bullet p}.$$

Kao što smo očekivali, u limesu  $\Lambda \rightarrow \infty$  neplanarni dijagram ostaje konačan jer je efektivno reguliran nekomutativnošću prostora,  $\Lambda_{eff}^2 \rightarrow \frac{1}{p \bullet p}$ . Divergencija se vraća ili nekomutativnošću  $\theta \rightarrow 0$  ili u infracrvenom limesu  $p \rightarrow 0$  u kojem vrijedi  $\Lambda_{eff} \rightarrow \Lambda$ .

## 3 Renormalizacija u teoriji polja

Tema ovog poglavlja je renormalizacija u perturbacijskoj teoriji polja. Na uvodnim kolegijima iz teorije polja obično se radi renormalizacija na nivou jedne petlje, no želimo li dobiti preciznije amplitude i analizirati kompleksnije interakcije potrebno je uključiti dijagrame više petlji i provesti renormalizaciju u višim redovima računa smetnje. Petlje u takvim dijagramima mogu biti u različitim odnosima (preklapati se, ugniježdene, disjunktne) pa procedura nije tako očigledna kao kod renormalizacije s jednom petljom.

Problem su razriješili Bogoliubov, Parasiuk, Hepp i Zimmermann (BPHZ) uvodeći kontračlanove koji kompenziraju beskonačnosti kao nova Feynmanova pravila. Dirk Kreimer je primijetio da se unutar ove renormalizacijske procedure pojavljuje struktura Hopfove algebre [4] što je kulminiralo teoremom Connesa i Kreimera [5]. U prvom potpoglavlju uvodimo Hopfov algebru ukorijenjenih stabala, u drugom kratki pregled BPHZ renormalizacije, a u trećem primjenjujemo algebru stabala na renormalizaciju.

### 3.1 Algebra ukorijenjenih stabala

Osim algebarskom konteksta u kojem smo ih do sada spominjali, Hopfove algebre pojavljuju se i u kombinatorici. Dobar pregled je u petom poglavlju [14]. U ovom potpoglavlju dajemo kratak pregled algebre ukorijenjenih stabala, uglavnom iz [35] (svi grafovi stabala u ovom potpoglavlju su iz tog rada) i nešto malo iz [36].

Teorija grafova je grana matematike koja se bavi objektima i vezama među njima na kombinatornoj razini. Graf je skup vrhova/čvorova (*vertices*)  $V$  i bridova  $E$  (*edges*) koji povezuju vrhove. Bridovi općenito mogu i ne moraju biti orijentirani, imati boju, duljinu,... Uzmimo za primjer graf gradova i cesta između njih. Ako nas samo zanima koji su gradovi i postoji li cesta između njih, imamo najjednostavniji mogući graf. Ako dodamo jednosmjerne ceste, onda svakom bridu moramo dati smjer (usmjeren graf). Zatim možemo svakoj cesti pridijeliti duljinu (težinski graf). Boja može označavati npr. tip ceste. Feynmanov dijagram možemo također gledati kao usmjeren (fermionski tok, vremenska orijentacija), obojan<sup>33</sup> graf. Mreža otpornika je još jedan primjer.

Nas će ovdje zanimati posebna skupina grafova koji se zovu stabla (*trees*). To su povezani grafovi koji ne sadrže cikluse. Ciklus je niz bridova kojima se iz jednog čvora može doći u isti, a povezani znači da se iz svakog čvora može doći u ostale

---

<sup>33</sup>Ovdje ne govorimo o QCD bojama. Različite tipove propagatora standardno označavamo drukčijim tipovima linije (vijugavo, iscrtkano, puno,...), ali u teoriji grafova je standardna praksa za različite tipove bridova (ili vrhova) uvesti boju.

nekim bridovima. Pošto nema ciklusa, put između svaka dva čvora je jedinstven. Ukorijenjeno stablo je ono u kojem je posebno istaknut jedan čvor, korijen. Penjanjem uz korijen možemo orijentirati stablo prema gore pa možemo reći da odabir korijena inducira orijentaciju stabla kao grafa pa su stoga svi putevi u stablu prema gore. Težina stabla  $n$  je broj čvorova u stablu, a broj bridova je uvijek  $n - 1$ . Skup ukorijenjenih stabala težine  $n$  označavamo s  $\mathbf{T}(n)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(1) &= \{ \cdot \}, \\ \mathbf{T}(2) &= \{ \uparrow \}, \\ \mathbf{T}(3) &= \left\{ \begin{array}{c} \vee \\ \uparrow \end{array}, \uparrow \uparrow \right\}, \\ \mathbf{T}(4) &= \left\{ \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \uparrow \end{array}, \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \vee \\ \uparrow \end{array}, \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \uparrow \end{array}, \uparrow \uparrow \uparrow \right\}, \\ \mathbf{T}(5) &= \left\{ \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \vee \\ \vee \\ \uparrow \end{array}, \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \vee \\ \uparrow \end{array}, \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \vee \\ \vee \\ \uparrow \end{array}, \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \vee \\ \vee \\ \uparrow \end{array}, \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \vee \\ \uparrow \end{array}, \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \uparrow \end{array}, \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \uparrow \end{array}, \begin{array}{c} \vee \\ \uparrow \end{array}, \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \right\}. \end{aligned}$$

Neki autori umjesto dijagrama koriste slova i zagrade pa su stabla iz  $\mathbf{T}(2)$  u toj notaciji  $(a(aa)), (a(a(a)))$ , gdje slovo  $a$  predstavlja čvor. Relativni poredak slova/zagrada unutar jedne zagrade je nebitan pa je  $(a(aa)) = ((aa)a)$ . Connes i Kreimer su 1998. uveli algebru ukorijenjenih stabala  $H$  [37]. To je komutativna algebra generirana stablima  $\mathbf{T}(n), \forall n$  nad jednim od polja  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (nebitno je u praksi). Umnožak dva stabla možemo realizirati disjunktnom unijom grafova, što je graf dobiven disjunktnom unijom bridova i čvorova tih stabala. Tako dobiven produkt zovemo šuma, one tvore bazu vektorskog prostora algebre. Proizvoljni element tog prostora možemo zapisati kao  $v = \sum_i t_1 \cdots t_{m_i}$ , gdje su sumandi šume faktorizirane na stabla. Težina šume je zbroj težine stabala na koje se faktorizira. Skup svih šuma (*forrest*) označavamo sa  $\mathbf{F}$ , a skup šuma težine  $n$  sa  $\mathbf{F}(n)$ ; ovo su šume za  $n \leq 4$ :

$$1, \cdot, \cdot, \cdot, \uparrow, \cdot, \cdot, \cdot, \uparrow \cdot, \vee, \uparrow, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \uparrow \uparrow, \vee \cdot, \uparrow \cdot, \vee, \vee, \vee, \uparrow.$$

Neutralni element je prazan graf (skupovi bridova i vrhova su prazni skupovi), oznaka je 1 i on nije isto što i 0 koja anihilira grafove. Kako bi definirali bialgebru, tj. zadali kompatibilan koprodukt, potrebno je uvesti pojam reza stabla. Rez stabla je šuma dobivena micanjem proizvoljnog podskupa bridova stabla. Šumu dobivenu rezom  $c$  stabla  $t$  označavamo s  $W^c(t)$ , a za rez kažemo da je dobar ako je na svakom putu od korijena stabla  $t$  prema gore najviše jedan rez. Za takav rez, stablo u šumi  $W^c(t)$  koje sadrži originalni korijen (*root*) označavamo s  $R^c(t)$ . Graf  $P^c(t) := W^c \setminus R^c$

je produkt svih stabala dobivenih rezom osim  $R^c$ . Dodatno su definirana dva posebna reza, prazni i totalni. Prazni je onaj u kojem je  $R^c(t) = t$  i  $P^c(t) = \emptyset = 1$ , a totalni je rez iznad korijena,  $R^c(t) = \emptyset$  i  $P^c(t) = t$ . Skup svih dobrih rezova označavamo s  $D_*(t)$  te on sadrži prazni i totalni rez. Micanjem ta dva reza dobivamom  $D(t) := D_*(t) \setminus \{\text{prazni, totalni}\}$ . Uzmimo za primjer stablo  $t = \begin{array}{c} \cdot \\ | \\ \vee \end{array}$ . Njegovi rezovi ilustrirani su na tablici 3.1.

rez c									totalni rez
dobar?	da	da	da	da	ne	da	da	ne	da
$W^c(t)$		$\vdots \vdots$	$\cdot \vee$	$\vdots \cdot$	$\dots \vdots$	$\vdots \dots$	$\vdots \dots$	$\dots \dots$	
$R^c(t)$		$\vdots$	$\vee$	$\vdots$	$\times$	$\cdot$	$\vdots$	$\times$	1
$P^c(t)$	1	$\vdots$	$\cdot$	$\cdot$	$\times$	$\vdots \cdot$	$\dots \cdot$	$\times$	

Tablica 3.1: Primjeri rezova za stablo  $t$ . [35]

Koprodukt za stablo  $t$  definiramo kao

$$\Delta(t) = \sum_{c \in D_*(t)} P^c(t) \otimes R^c(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \sum_{c \in D(t)} P^c(t) \otimes R^c(t).$$

Kako su stabla generatori, po homomorfizmu se koprodukt proširuje na sve šume  $\mathbf{F}$ . Iz prethodne tablice možemo iščitati koprodukt  $\Delta t$ :

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \\ \vee \end{array}\right) = \begin{array}{c} \cdot \\ | \\ \vee \end{array} \otimes 1 + 1 \otimes \begin{array}{c} \cdot \\ | \\ \vee \end{array} + \vdots \otimes \vdots + \cdot \otimes \vee + \cdot \otimes \vdots + \vdots \otimes \cdot + \dots \otimes \vdots.$$

**Teorem 3.1.** *Uz ovako definiran koprodukt  $H$  postaje bialgebra. Kojedinicica je dana s*

$$\epsilon(f) = \delta_{1,f}, \quad \forall f \in H.$$

*Dokaz:* Potrebno je pokazati kompatibilnost produkta i koprodukta, tj.  $\Delta(ab) = \Delta a \Delta b$ , svojstvo kojedinicice i koasocijativnost. Kako je produkt disjunktna unija, rezove možemo promatrati nezavisno pa su produkt i koprodukt po definiciji kompatibilni. Za  $t \in \mathbf{T}$  vrijedi

$$(\epsilon \otimes id)\Delta t = \epsilon(t)1 + \epsilon(1)t + \sum_{c \in D(t)} \epsilon(P^c(t))R^c(t) = t,$$

jer je  $P^c(t) \neq 1$  za sve  $c \in D(t)$ . Slično tako i  $R^c(t) \neq 1$  pa je i  $(id \otimes \epsilon)\Delta t = t$ . Pošto je unija praznih grafova prazan graf,  $\epsilon$  je homomorfizam, tj.  $\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b)$  pa se

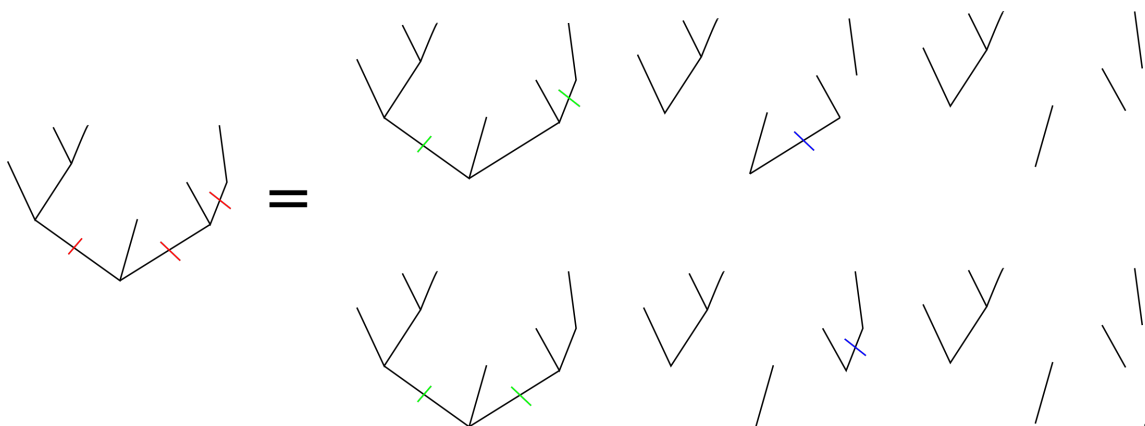
gornja formula može proširiti na sve šume iz  $\mathbf{F}$ .

Koasocijativnost pokazujemo grafički, za algebarski dokaz vidi [35]. Za početak imamo

$$(id \otimes \Delta)\Delta t = \sum_{c \in D_*(t)} P^c(t) \otimes \Delta R^c(t),$$

$$(\Delta \otimes id)\Delta t = \sum_{c \in D_*(t)} \Delta P^c(t) \otimes R^c(t).$$

U svakom slučaju radimo dva dobra reza na početnom stablu  $t$ . Na sljedećem primjeru lako se uvjerimo da svaki dvostruki dobri rez ima jedinstvene rezove u svakom od gornjih izraza:



Zeleni rezovi nose indeks  $c$ . Zbog totalnih rezova moguće je da se dva reza poklope, no to ne mijenja dobiveni rezultat.  $\square$

Algebra  $H$  ima graduaciju danu težinom šuma,  $H = \sum_{n=0}^{\infty} H_n$ . Za šumu  $h$  težine  $|h| = n$  očito vrijedi  $\Delta h = \sum_{|a|+|b|=n} a \otimes b$ . Prazan graf ima težinu, a time i stupanj nula pa pripada polju  $\mathbb{K}$ . Za takve algebre kojima je jedinica u  $\mathbb{K}$  kažemo da su povezane i na njima se antipod može definirati induktivno.

**Teorem 3.2.** *Neka je  $H$  graduirana i povezana bialgebra. Tada je  $H$  Hopfova algebra, tj. postoji antipod  $S$ .*

*Dokaz:* Prvo pokazujemo da je  $\epsilon$  nula na  $H_n$  za  $n \geq 1$ . Pretpostavimo suprotno, da postoji najmanji  $n \geq 1$  za koji je  $x \in H_n$  t.d.  $\epsilon(x) \neq 0$ . Kako je  $H$  povezana,

$$\begin{cases} \Delta(x) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2 + \sum x' \otimes x'' \\ \sum x' \otimes x'' \in \sum_{i=1}^{n-1} H_i \otimes H_{n-i}. \end{cases}$$

Pošto je  $n$  minimalan,  $H_i$  i  $H_{n-i}$  su u  $\text{Ker } \epsilon$  za  $1 \leq i \leq n-1$ . Stoga je  $(id \otimes \epsilon)\Delta(x) = x_1 + 1\epsilon(x_2) = x$ . Kako je  $x$  homogen stupnja  $n$ , sumandi na desnoj strani moraju biti stupnja  $n$ , a pošto je  $|1| = 0$  mora biti  $\epsilon(x_2) = 0$  i  $x_1 = x$ . Analogno dobivamo  $x_2 = x$

i  $\epsilon(x_1) = 0$ , no ovo je kontradikcija s  $x = x_1$  pa zaključujemo  $\text{Ker } \epsilon = \bigoplus_{n \geq 1} H_n$ .

Sada definiramo

$$S_g : \begin{cases} H \rightarrow H \\ 1 \mapsto 1 \\ x \in H_n \mapsto -x - \sum S_g(x')x'' \end{cases}$$

Kako je  $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum x' \otimes x''$ , slijedi

$$m \circ (S_g \otimes id) \circ \Delta x = S(x) \cdot 1 + 1 \cdot x + \sum S_g(x')x'' \equiv -x - \sum S_g(x')x'' + x + \sum S_g(x')x'' = \epsilon(x)$$

pa je  $S_g$  lijevi antipod. Djelovanjem na  $x''$  umjesto  $x'$  analogno definiramo desni antipod  $S_d$ . Prema jednadžbi 1.9  $S_g$  je lijevi inverz identite, a  $S_d$  desni pa imamo

$$(S_g * id) * S_d = S_g * (id * S_d) = S_g,$$

gdje je korištena asocijativnost konvolucijskog produkta (vidi propoziciju 1.7). Zaključujemo da su antipodi jednaki, kao što smo i očekivali zbog propozicije 1.10 (jedinственost antipoda).  $\square$

### 3.2 Renormalizacija i BPHZ procedura

Jednom kada imamo Feynmanov dijagram možemo pomoću Feynmanovih pravila svakom propagatoru i vrhu pridijeliti određen faktor te izračunati amplitudu procesa kojeg opisuje zadani dijagram u impulsnom prostoru. U slučaju da je dijagram stablo, tj. ne sadrži petlje, svi impulsi su određeni pravilom očuvanja impulsa u svakom vrhu. Problem nastaje kad dijagram sadrži petlje jer se tada osim vanjskih impulsa koji predstavljaju čestice koje ulaze i izlaze iz interakcije pojavljuju i unutarnji ne-definirani impulsi. Pošto je svaki od tih impulsa moguć, princip superpozicije nalaže da je potrebno integrirati doprinose amplituda svih impulsa. Amplituda stoga sadrži toliko  $D$ -dimenzionalnih integrala koliko je nezavisnih petlja u dijagramu, gdje je  $D$  dimenzija prostorvremena. U prirodnom sustavu jedinica sve relevantne fizikalne veličine mogu se izraziti u dimenzijama energije što omogućuje izračunavanje prividne divergencija koja nam služi za kvantifikaciju divergencije<sup>34</sup>. Renormalizabilne teorije su one koje imaju konačno divergentnih tipova dijagrama (ne nužno samih dijagrama) i njima ćemo se baviti u nastavku. Standardna referenca za renormalizaciju je Collinsova knjiga [38]. U njoj je za primjer uzeta  $\phi^3$  teorija u  $D = 6$  dimenzija kao prototip koji jednostavno ilustrira sve bitne fenomene pa ćemo se i ovdje poslužiti

<sup>34</sup>Prividna divergencija 0 u principu znači logaritamsku divergenciju, 1 linearnu, 2 kvadratnu, itd... Prividna divergencija ne mora biti prava divergencija jer se pravi stupanj divergencije korigira simetrijama teorije, kao npr. kod prve korekcije fotonskog propagatora u QED-u.



istom. Kompletna analiza ove teorije na razini jedne petlje dana je u [39], poglavlja 14-17, a na razini dvije petlje u [38].

Divergencije dijelimo u dvije skupine: ultraljubičaste (UV) i infracrvene (IR). Ultraljubičaste su posljedica već spomenute neograničenosti unutarnjih impulsa u integralima, tj. proizvoljno visokih energija, a infracrvene proizvoljno malih impulsa. Infracrvene divergencije pojavljuju se u bezmasenim teorijama i uglavnom se rješavaju uvođenjem mase za bezmasene čestice te uzimanjem u obzir konačnosti rezolucije mjernog uređaja [40]. Ovdje ćemo promatrati samo UV divergencije; one se uglavnom uklanjaju u dva koraka: prvo je potrebno regularizirati izraze, tj. kvantificirati divergenciju (uvođenjem novih parametara), a zatim je potrebno oduzeti divergentni doprinos (renormalizirati) tako da konačan rezultat ne ovisi o parametrima i renormalizacijskoj preskripciji. Od svih preskripcija najviše se primjenjuje dimenzionalna regularizacija u kojoj se dimenzija prostora uzima kao  $D - \epsilon$ , gdje je  $0 \leq \epsilon \in \mathbb{R}$  parametar kojim variramo dimenziju pa regularizirana amplituda postaje analitička kontinuacija oko fizikalne dimenzije. Najveća prednost dimenzionalne regularizacije je to što čuva simetrije teorije pa je time i baždarno invarijantna procedura. Druga često korištena preskripcija je *cutoff* regularizacija u kojoj se integrira do neke konačne gornje vrijednosti impulsa  $\Lambda$  (*UV cutoff*), no ona je u praksi kompliciranija od dimenzionalne regularizacije pa se rjeđe koristi. Treća metoda je BPHZ procedura koju ćemo prvo prikazati na jednostavnim matematičkim integralima, a zatim dati fizikalnu definiciju. Postoje i druge metode poput Pauli-Villars ili Epstein-Glaser regularizacije.

Uzmimo za ilustraciju dimenzionalne regularizacije divergentni izraz proporcionalan amplitudi *self-energy* dijagrama u  $\phi^3$  teoriji:

$$I = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \rightarrow \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2},$$

koji smo odmah pripremili za regularizaciju zamjenjujući dimenziju 4 s  $D := 4 - \epsilon$ . Napomenimo da je integral već u Euklidskom prostoru, u praksi je potrebno prije integracije napraviti Wickovu rotaciju. Pošto se uvijek integrira po svim mogućim vrijednostima impulsa, tako će se u Euklidskom prostoru integrirati po cijelom prostoru i podintegralne funkcije neće biti ovisne o kutu. To znači da integral možemo separirati na kutni i radijalni dio:

$$\int d^D p f(p^2) = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^\infty dp p^{D-1} f(p^2),$$

gdje je korištena formula za volumen jedinične kugle u  $D$  dimenzija. Sada uvrštavamo

$D = 4 - \epsilon$ :

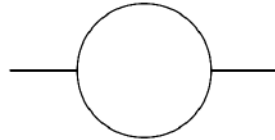
$$I = \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{2\pi^{(4-\epsilon)/2}}{\Gamma\left(\frac{4-\epsilon}{2}\right)} \frac{p^{3-\epsilon}}{(p^2 + m^2)^2} = \frac{2^{\epsilon-4} \pi^{\frac{\epsilon}{2}-1}}{\sin\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)} m^{-\epsilon}$$

$$= \frac{1}{8\pi^2\epsilon} - \frac{1}{16\pi^2} \left( \ln \frac{m^2}{4\pi} + \gamma \right) + \mathcal{O}(\epsilon),$$

gdje je  $\gamma \approx 0.577$  Euler-Mascheronijeva konstanta. Ono što na kraju dobivamo je Laurentov red u varijabli  $\epsilon$ . U kompliciranijim dijagramima imali bi više propagatora i trebalo bi ih Feynmanovom parametrizacijom svesti na jedan nazivnik. Vidimo da izraz ima jednostavan pol u fizikalnoj dimenziji. Općenito će dijagrami imati polove višeg (ali konačnog) stupnja pa je postupak regularizacije zapravo slanje početne divergente amplitude u prostor  $[\epsilon^{-1}, \epsilon]$  Laurentovih polinoma<sup>35</sup>. Napomenimo da ne možemo samo maknuti sve  $\epsilon^{-1}$  doprinose već se oni miču renormalizacijskim uvjetima iz kojih dobivamo eksplicitne vrijednosti kontračlanova. Regulator  $\epsilon$  pojavit će se u izrazima za kontračlanove i divergentnim amplitudama pa će se u sumi pokratiti.

Ako divergentni dijagram nema divergentnih poddijagrama, kažemo da sadrži lokalnu divergenciju - to su divergencije koje su polinomi u impulsima petlji. Nelokalne divergencije pojavljuju se u obliku proizvoljne nepolinomijalne funkcije impulsa koji pripada divergentnom poddijagramu.

Jednočestično ireducibilni (*one particle irreducible* - 1PI) dijagrami su oni koje ne možemo micanjem nekog propagatora (vanjske linije ne računamo) rastaviti na dvije povezane komponente. Najjednostavniji takav dijagram u  $\phi^3$  teoriji je na slici 3.1.



Slika 3.1: *Self-energy* dijagram u  $\phi^3$  teoriji.

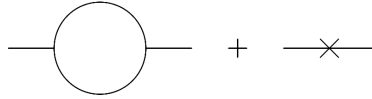
Ovo je tzv. *self-energy*<sup>36</sup> dijagram i opisuje prvu korekciju višeg reda na propagator. Shematski graf renormaliziramo tako da mu dodamo pripadni kontračlan<sup>37</sup>. U kontračlanovima su apsorbirane sve neopservabilne (i beskonačne) razlike između golih i fizikalnih parametara teorije. Dakle, uzimamo konvenciju da gornji dijagram nema dobro definiranu (konačnu) amplitudu, ali zbroj na slici 3.2 ima.

U kontračlanu su sadržani fizikalni renormalizacijski uvjeti. Ovaj 1PI dijagram

<sup>35</sup>Zapravo se radi o redu potencija (*formal power series*) koji je za razliku od polinoma beskonačnog stupnja u  $\epsilon$  i konačnog u  $\epsilon^{-1}$  (zato jedna uglasta zagrada). Svojstva se mogu vidjeti na [https://en.wikipedia.org/wiki/Formal\\_power\\_series#Formal\\_Laurent\\_series](https://en.wikipedia.org/wiki/Formal_power_series#Formal_Laurent_series)

<sup>36</sup>Ime dolazi iz činjenice da se sumiranjem ovakvih dijagrama pomiče položaj pola propagatora koji interpretiramo kao fizikalnu masu (energiju mirovanja).

<sup>37</sup>Zapravo ništa ne dodajemo, već separiramo polazni lagranžijan na gole i fizikalne parametre.



Slika 3.2: Polazni dijagram zbrojen s kontračlanom daje konačnu amplitudu.

ovisi samo o vanjskom impulsu. Ideja BPHZ renormalizacije je iskoristiti ovu ovisnost i renormalizirati integrand prije integracije po unutarnjoj petlji. Time se može izbjeći uvođenje regulatora. Prije no što damo točnu definiciju BPHZ renormalizacije, pogledajmo neke isključivo matematičke primjere motivirane [41]. Slična analiza dana je u [37], ali u kontekstu dimenzionalne regularizacije.

Neka je funkcija  $f$  definirana kao

$$f(x) := \int_1^\infty \frac{dy}{x+y}. \quad (3.1)$$

Formalno se integral izvrijeđnjuje u  $\log(\infty) - \frac{1}{1+x}$  što nije dobro definirano. Funkciji  $f$  pridružujemo prividni stupanj divergencije  $[f]$  koji dobivamo računajući dimenziju integranda, gdje je dimenzija  $[x] = [y] = [dx] := 1$ . Ovdje je  $[f] = 0$  pa je funkcija logaritamski divergentna za svaki  $x$  (integrand teži u  $1/y$  za veliki  $y$ ). Varijable  $x$  i  $y$  igraju ulogu impulsa pa integrand možemo promatrati kao propagatore petlje duž koje ide impuls  $y$  parametriziranu vanjskim impulsom koji ulazi u petlju  $x$ . Kako bi izvukli neki smisao iz funkcije  $f$ , promotrimo  $f(x)$  u odnosu na njenu vrijednost u  $x = 0$ :

$$f_R(x) := f(x) - f(0) := \int dy \left( \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y} \right) = -x \int \frac{dy}{y(x+y)}.$$

Druga jednakost je očito kriva jer su  $f(x)$  i  $f(0)$  divergentne; ona bi vrijedila kad bi integrali bili apsolutno konvergentni pa stoga razliku  $f(x) - f(0)$  ne treba shvaćati doslovno, već samo kao oznaku da se ta razlika zapravo radi unutar integranda. Do kraja poglavlja svaki zbroj i razliku prvo radimo unutar integranda ako on postoji ili drugim riječima integriramo tek na kraju. Dobiveni izraz je konačan pa kažemo da je integral renormaliziran. Promotrimo sada nešto drukčiju funkciju:

$$h(x) = \int_1^\infty \frac{y dy}{x+y}, \quad (3.2)$$

za koju je  $[h] = 1$ . Pokušajmo ju renormalizirati istom metodom:

$$\begin{aligned}
 h(x) - h(0) &= \int y dy [1/(x+y) - 1/y] \\
 &= -x \int y dy / y(x+y) \\
 &= -x \int dy / (x+y) \\
 &= -x f(x).
 \end{aligned}$$

Dobivena vrijednost je divergentna, što je posljedica divergencije prvog stupnja. Ipak, pomoću prethodne renormalizacije  $f(x)$  možemo renormalizirati i  $h(x)$ :

$$\begin{aligned}
 h(x) - h(0) &= -x f(x) = -x(f_R(x) + f(0)) \implies \\
 h(x) - (h(0) - x f(0)) &= -x f_R(x) \\
 h(x) - (h(0) + x \frac{dh}{dx}(0)) &=: h_R(x),
 \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem retku primijetili da je  $-x f(0) = (dh/dx)(0)$ . Divergenciju je u ovom slučaju bilo potrebno ukloniti u nultom i prvom redu u vanjskom impulsu  $x$ . Općenito, za  $[f] = n$  renormaliziranu amplitudu  $f_R$  dobivamo oduzimanjem od  $f$  prvih  $n$  članova Taylorovog razvoja vanjskog impulsa u integrandu, gdje su derivacije evaluirane za vrijednost vanjskog impulsa 0 (kasnije ćemo generalizirati na više vanjskih impulsa). Posljedica je da za renormaliziranu amplitudu prvih  $n$  derivacija s obzirom na vanjski impuls iščezava, a prednost je to što nije potrebno uvoditi regulatore. Ovu metodu zovemo BPHZ (Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmerman) renormalizacija.

Ovako definirana BPHZ procedura adekvatna je za baratanje 1PI grafovima bez ugniježđenih divergencija/poddivergencija. Kako bi poopćili metodu na ugniježdene divergencije pogledajmo funkciju

$$g(x) := \int_1^\infty \frac{dz}{x+z} f(z) = \iint_1^\infty \frac{dz dy}{(x+z)(y+z)}, \quad (3.3)$$

gdje je  $f$  iz (3.1). Pošto je  $[f] = 0$ , slijedi  $[g] = 0$ . Pokušajmo renormalizirati funkciju kao  $g(x) - g(0)$ :

$$\begin{aligned}
 g(x) - g(0) &= \iint dz dy \left( \frac{1}{(x+z)(y+z)} - \frac{1}{z(y+z)} \right) \\
 &= \iint \frac{dy dz}{y+z} \left( \frac{1}{x+z} - \frac{1}{z} \right) = -x \iint \frac{dy dz}{(x+z)(y+z)z}.
 \end{aligned}$$

Integral po  $y$  impulsu je logaritamski divergentan pa nismo uspjeli ukloniti divergenciju. Razlog je to što kod ugniježđenih divergencija divergentna amplituda nije polinomijalna u vanjskom impulsu već može biti proizvoljna funkcija impulsa. Srećom,  $f$  nema poddivergencija pa možemo definirati  $g$  bez poddivergencija  $\bar{g}$  tako da prvo renormaliziramo poddivergenciju  $f$ :

$$\bar{g}(x) := \int \frac{dz}{x+z} f_R(z).$$

Dobivena funkcija više nema poddivergencija pa je ukupna divergencija polinomijalna u vanjskom impulsu i sad ju možemo standardno renormalizirati kao

$$g_R(x) := \bar{g}(x) - \bar{g}(0).$$

Eksplisitnim računom možemo se uvjeriti u konačnost dobivenog izraza:

$$\begin{aligned} g_R(x) &\equiv \int \frac{dz}{x+z} \bar{f}(z) - \int \frac{dz}{z} \bar{f}(z) \\ &= \int \left( \frac{1}{x+z} - \frac{1}{z} \right) \bar{f}(z) = \int \frac{-x}{z(x+z)} \bar{f}(z) \\ &= -x \int \frac{dz}{z(x+z)} (-z) \int \frac{dy}{y(z+y)} = -x \int \int_1^\infty \frac{dz dy}{(x+z)(y+z)y} \\ &= -x \int_1^\infty \frac{\log(z+1)}{z(x+z)} dz. \end{aligned}$$

Pošto za dovoljno veliki  $z$  logaritam raste sporije od proizvoljne potencije<sup>38</sup>, gornji integral je konvergentan. Usporedite predzadnji integrand s onim dobivenim u propalom pokušaju. U oba slučaja imamo isti stupanj prividne divergencije, ali varijable u nazivnicima nisu ravnomjerno raspoređene, tj. integrand nije invarijantan<sup>39</sup> na zamjenu  $y$  i  $z$  pa jedna od njih divergira u naivnom pokušaju.

Radi potpunosti promotrit ćemo još dva primjera, prvi odgovara amplitudi grafa koji nije 1PI, a drugi amplitudi koja ovisi o više vanjskih impulsa. Promotrimo funkciju definiranu kao

$$f^2(x) = f(x)f(x). \quad (3.4)$$

Vrijedi  $[f^2] = 0$  pa možemo pokušati oduzeti vrijednost u nuli:

$$\begin{aligned} f^2(x) - f^2(0) &= f(x)f(x) - f(0)f(0) = \int \int dy dz \left( \frac{1}{(x+y)(x+z)} - \frac{1}{yz} \right) \\ &= \int dy \left( \frac{1}{x+y} \int \frac{dz}{x+z} - \frac{1}{y} \int \frac{dz}{z} \right). \end{aligned}$$

<sup>38</sup>Ovo vidimo primjenom L'Hopitalovog pravila na funkciju  $\log x/x^n$  ili supstitucijom  $x \rightarrow e^x$ .

<sup>39</sup>A trebao bi biti jer su to slijepi impulsi i možemo ih imenovati kako želimo.

Oba integrala po  $z$  su divergentna pa pokušaj propada. Razlog je to što ovakva amplituda ne može predstavljati 1PI graf. Amplituda takvog grafa se uvijek može napisati kao produkt amplituda 1PI grafova i potrebno je renormalizirati svaku od njih zasebno pa za takve slučajeve renormaliziranu vrijednost definiramo kao

$$f_R^2(x) := f_R(x)f_R(x).$$

Uzmimo za kraj modifikaciju funkcije  $h(x)$  iz (3.2):

$$h(x, y) := \int_1^\infty \frac{z}{x + y + z} dz. \quad (3.5)$$

Ako pokušamo renormalizirati funkciju po jednom vanjskom impulsu, npr.  $x$  dobivamo

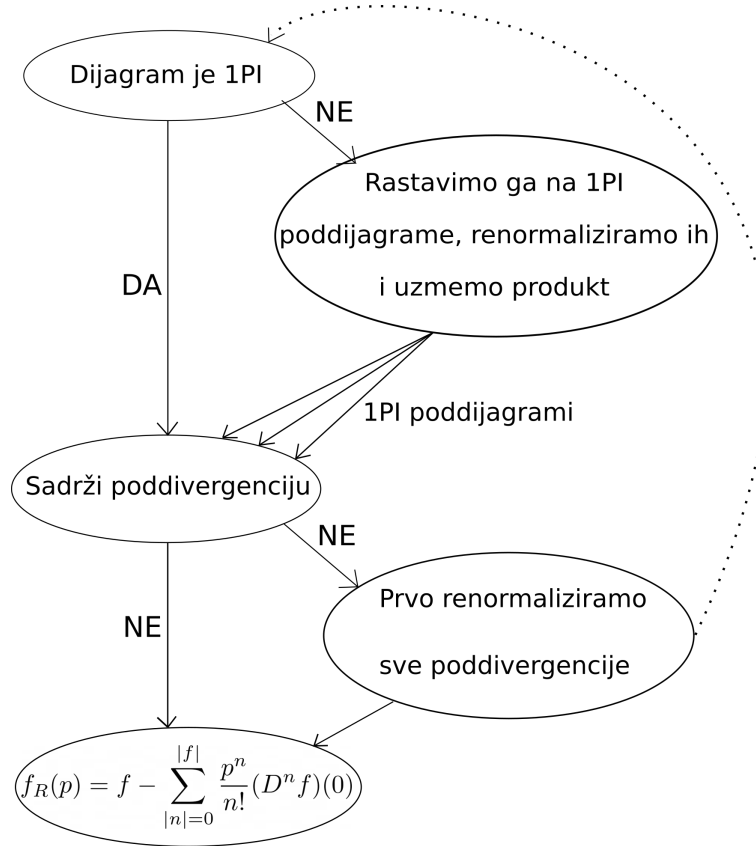
$$h(x, y) - h(0, y) - x \frac{dh}{dx}(0, y) = \int \left( \frac{xz}{(y+z)^2} - \frac{x+y}{x+y+z} \right).$$

Ova funkcija ima dva problema, nije simetrična na zamjenu  $x \leftrightarrow y$  kao što je početna funkcija i logaritamski je divergentna. Ispravan način za renormalizaciju je

$$\begin{aligned} h_R(x, y) &:= h(x, y) - h(0, 0) - x \frac{dh}{dx}(0, y) - y \frac{dh}{dy}(x, 0) \\ &= \int dz \left[ \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} - \frac{x+y}{x+y+z} - xy \left( \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dobiveni izraz je simetričan na zamjenu  $x \leftrightarrow y$  i konvergentan jer se svođenjem prva tri člana u integrandu najveća potencija  $z$  u brojniku pokrači pa je funkcija uspješno renormalizirana. Funkcije (3.1)-(3.5) ilustriraju sve bitne fenomene koji se pojavljuju u BPHZ renormalizaciji. Sada možemo dati donekle definiranu definiciju BPHZ renormalizacije:

**Definicija 3.3.** Za dijagram s amplitudom  $f$  BPHZ renormalizacija može se rekurzivno definirati algoritmom na slici 3.3.



Slika 3.3: Algoritamski prikaz BPHZ procedure.

Ovdje je  $p = (p_1, \dots, p_m)$  multi-indeks i  $D^n$  je

$$D^n = \frac{\partial^{n_1 + \dots + n_k}}{\partial p_1^{n_1} \dots \partial p_k^{n_k}}, \quad |n| = n_1 + \dots + n_k.$$

Za dva impulsa i  $[f] = 1$  ova formula svodi se na (3.6).

Ono što nismo još specificirali je iscrtkana linija u gornjem dijagramu jer može postojati više načina na koji dijagram možemo rastaviti na divergentne poddijagrame. Ovim problemom pozabavit ćemo se u sljedeća dva potpoglavlja.

### 3.3 Zimmermanova formula

Za početak uvodimo operaciju<sup>40</sup>  $R$  koja izolira divergentni doprinos, tj. definira kontračlan za 1PI dijagram bez poddivergencija. Ona ovisi o renormalizacijskoj preskripciji i za BPHZ renormalizaciju jednaka je izoliranju prvih  $[f]$  članova u Taylorovom

<sup>40</sup>Ona nema veze s indeksom  $R$  kojeg smo pridijelili renormaliziranim funkcijama.

razvoju vanjskih impulsa oko nule. Za funkciju  $f$  iz (3.1) imamo

$$R[f] = f(0) \implies f_R(x) = f(x) - R[f(x)].$$

Operacija  $R$  ne smije biti proizvoljna, već mora zadovoljavati Rota-Baxter [27] jednadžbu težine nula:

$$R[ab] + R[a]R[b] = R[aR[b]] + R[R[a]b]. \quad (3.7)$$

Ovaj tehnički zahtjev nužan je kako bi Hopfova algebra ostala dobro definirana [42]. U dimenzionalnoj regularizaciji regularizirana amplituda je Laurentov red u  $\epsilon$ ,  $f \mapsto f(\epsilon) = \sum_{i=-n}^{\infty} \epsilon^i c_i$  pa je operacija  $R$  definirana kao

$$R\left[\sum_{i=-n}^{\infty} \epsilon^i c_i\right] = \sum_{i=-n}^{-1} \epsilon^i c_i. \quad (3.8)$$

Nije teško vidjeti da je Rota-Baxter jednadžba zadovoljena. Uz malo kombinatorike može se vidjeti da je zadovoljena i za BPHZ preskripciju gdje je  $R$  definiran kao

$$R[f](p) = \sum_{|n|=0}^{|f|} \frac{p^n}{n!} (D^n f)(0) \quad (3.9)$$

uz već spomenutu notaciju.

U prethodnom potpoglavlju upoznali smo BPHZ proceduru na nekoliko jednostavnih primjera u kojima smo morali "ručno" prepoznati 1PI dijagrame i ugniježdene divergencije. Ovdje ćemo vidjeti da enkodiranjem Feynmanovog dijagrama, tj. pripadnih amplituda<sup>41</sup> u ukorijenjeno stablo reproduciramo rekurziju iz definicije 3.3. Fizikalna pozadina ove konstrukcije potječe iz Zimmermanovog rada [43] u vidu tzv. Zimmermanove *Forrest formule*, a vezu s Hopfovima algebra i algebarsku Birkhoffovu dekompoziciju uočili su Kreimer i Connes [5], [37]. Ideje i primjeri iz ovog potpoglavlja dolaze iz [4], gdje se mogu naći i neki ne toliko bitni tehnički detalji koje ovdje izostavljamo. Tamo je dokazano da Hopfova algebra ukorijenjenih stabala reproducira *forrest formulu*. Ovdje ju nećemo dokazati već ćemo se u njenu valjanost uvjeriti "na prste" vidjevši da reproducira renormalizirane funkcije (3.1)-(3.5).

Prevedimo prvo ove funkcije u stabla imajući na umu da svaki čvor u stablu mora predstavljati amplitudu 1PI dijagrama. U prvom potpoglavlju smo na vrhove stabla stavljali točke zbog jednostavnosti. Sada oni dobivaju nazive koji predstavljaju 1PI

<sup>41</sup>U ovom potpoglavlju dijagrami su funkcije (3.1)-(3.5).



funkcije. Funkcije (3.1) – (3.5) prevedene u stabla/šume su:

$$f \mapsto f, \quad h \mapsto h, \quad g \mapsto \frac{g}{f}, \quad f^2 \mapsto ff. \quad (3.10)$$

Funkcija  $f$  postaje stablo od jednog čvora,  $f^2$  šuma s dva stabla od jednog čvora, a  $g$  stablo u kojem je ugniježđena divergencija  $f$  povezana jedinim bridom s korijenom (korijen je u ovom potpoglavlju na vrhu). Ove šume sada shvaćamo kao dio Hopfove algebre ukorijenjenih stabala  $H$  u kojima čvorovi predstavljaju 1PI dijagrame/amplitude. Ugniježđenost dvije petlje predstavljena je bridom koji ide od jedne do druge petlje prema dolje. Nakon što smo funkcije preveli u stabla, potrebno je implementirati operaciju  $R$  u antipod. To radimo tako da antipod redefiniramo kao

$$S_R(t) := -R \left[ t + \sum_{c \in D(t)} S_R(P^c(t)) R^c(t) \right], \quad S_R(1) = 1, \quad S_R(ab) = S_R(a) S_R(b). \quad (3.11)$$

Ova definicija proizlazi iz teorema 3.2 i ona je dobra uz  $R$  koji zadovoljava (3.8). Prisjetimo se formule za koprodukt iz prvog potpoglavlja:

$$\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \sum_{c \in D(t)} P^c(t) \otimes R^c(t). \quad (3.12)$$

Za dijagram  $h$  renormaliziranu amplitudu tada dobivamo kao

$$h_R := m(S_R \otimes id) \Delta h. \quad (3.13)$$

Ovo je neočekivano jer iz aksioma Hopfove algebre na desnoj strani očekujemo  $\eta \circ \epsilon(h)$ , što za sve neprazne šume daje nulu. Ključ je u tome što u ovom kontekstu nula znači konačno<sup>42</sup>, tj. nešto što je invarijantno na djelovanje  $R$ , vidi [4]. Ova formula reproducira Zimmermannovu *forrest formulu* [43] i najbitnija je u ovom poglavlju (dokaz u [44]). Zimmermannova formula daje algoritam za BPHZ renormalizaciju proizvoljnog Feynmanovog dijagrama uzimajući u obzir divergentne poddijagrame i time definira iscrtkanu strelicu u definiciji 3.3.

Primijenimo ovu formulu na stablo  $f$ :

$$\begin{aligned} f_R &= m(S_R \otimes id) \Delta f = m(S_R \otimes id)(f \otimes 1 + 1 \otimes f) \\ &= m(S_R(f) \otimes 1 + S_R(1) \otimes f) \\ &= m(-R[f] + 1 \otimes f) = f - R[f] \stackrel{(3.9)}{\equiv} f(x) - f(0), \end{aligned}$$

<sup>42</sup>Formalno je potrebno uvesti preslikavanje iz algebre ukorijenjenih stabala u amplitude, poput  $\phi$  iz poglavlja 3.1 u [37].

što se podudara s postupkom ispod (3.1). U prvom redu koristili smo gornju formulu za koprodukt (nema dobrih rezova jer nema bridova). Primjena na stablo  $h$  rezultiralo bi istom formulom, samo što je operacija  $R$  za tu funkciju drukčija pošto je  $[h] = 1$ . Sljedeće na redu je stablo  $ff$ :

$$\begin{aligned}
(ff)_R &= m(S_R \otimes id)\Delta(ff) = m(S_R \otimes id)\Delta(f)\Delta(f) \\
&= m(S_R \otimes id)(f \otimes 1 + 1 \otimes f)(f \otimes 1 + 1 \otimes f) \\
&= m(S_R(f) \otimes 1 + S_R(1) \otimes f)(S_R(f) \otimes 1 + S_R(1) \otimes f) \\
&= m(-R[f] \otimes 1 + 1 \otimes f)(-R[f] \otimes 1 + 1 \otimes f) \\
&= (f - R[f])(f - R[f]) = f_R(x)f_R(x),
\end{aligned}$$

u skladu s rezultatom ispod (3.4). Preostalo je stablo  $\begin{smallmatrix} g \\ | \\ f \end{smallmatrix}$  koje ima jedan dobar rez:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} g \\ | \\ f \end{smallmatrix}\right)_R &= m(S_R \otimes id)\Delta\begin{smallmatrix} g \\ | \\ f \end{smallmatrix} = m(S_R \otimes id)\left(\begin{smallmatrix} g \\ | \\ f \end{smallmatrix} \otimes 1 + 1 \otimes \begin{smallmatrix} g \\ | \\ f \end{smallmatrix} + f \otimes g\right) \\
&= S_R\left(\begin{smallmatrix} g \\ | \\ f \end{smallmatrix}\right) + \begin{smallmatrix} g \\ | \\ f \end{smallmatrix} + S_R(f)g = -R\left[\begin{smallmatrix} g \\ | \\ f \end{smallmatrix} + S_R(f)g\right] + \begin{smallmatrix} g \\ | \\ f \end{smallmatrix} - R[f]g \\
&= \left(\begin{smallmatrix} g \\ | \\ f \end{smallmatrix} - R[f]g\right) - R\left[\left(\begin{smallmatrix} g \\ | \\ f \end{smallmatrix} - R[f]g\right)\right].
\end{aligned}$$

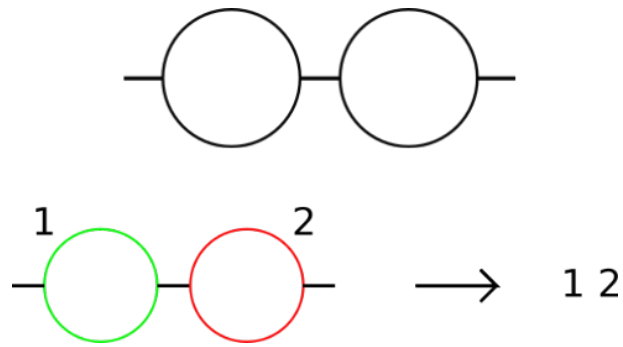
Izraz u obliku zagradama odgovara funkciji  $\bar{g}(x)$  ispod (3.3) pa je dobiveni rezultat identičan.

### 3.4 Feynmanovi dijagrami

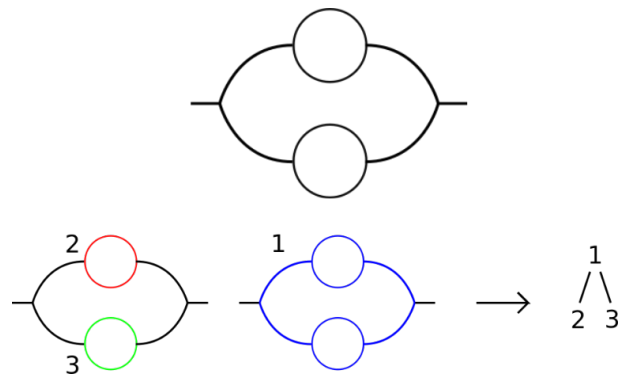
Sada ćemo vidjeti kako se primjeri nalik onima iz prethodnih poglavlja javljaju iz nekih jednostavnih Feynmanovih dijagrama u  $\phi^3$  teoriji u 6 dimenzija. Prividni stupanj divergencije je

$$D = 6L - 2P, \quad (3.14)$$

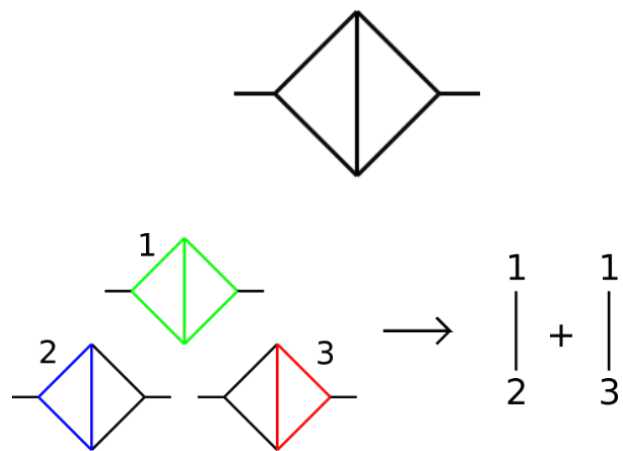
gdje je  $L$  broj nezavisnih petlji u (pod)dijagramu, a  $P$  broj propagatora. Prvi dijagram koji ćemo promotriti je na slici 3.4. Prisjetimo se da su čvorovi u stablu divergentni poddijagrami, a u ovom dijagramu su dva takva i ne preklapaju se. Stoga je rezultatno stablo produkt dva divergentna čvora sa stupnjem divergencije 2. Sljedeći na redu je dijagram sa slike 3.5. On sadrži tri divergentna poddijagrama što vidimo primjenom formule (3.14). Poddijagrami 2 i 3 saržani su u dijagramu 1 pa zato stavljamo brid između njih u stablu. Primijetimo da je dijagram koji je unija 2 i 3 također prividno divergentan, no nije 1PI pa ne može biti samostalan čvor u stablu. Pogledajmo sada dijagram na slici 3.6.



Slika 3.4: Dijagram i njegov rastav na stabla.



Slika 3.5: Dijagram s divergentnim poddijagramima.

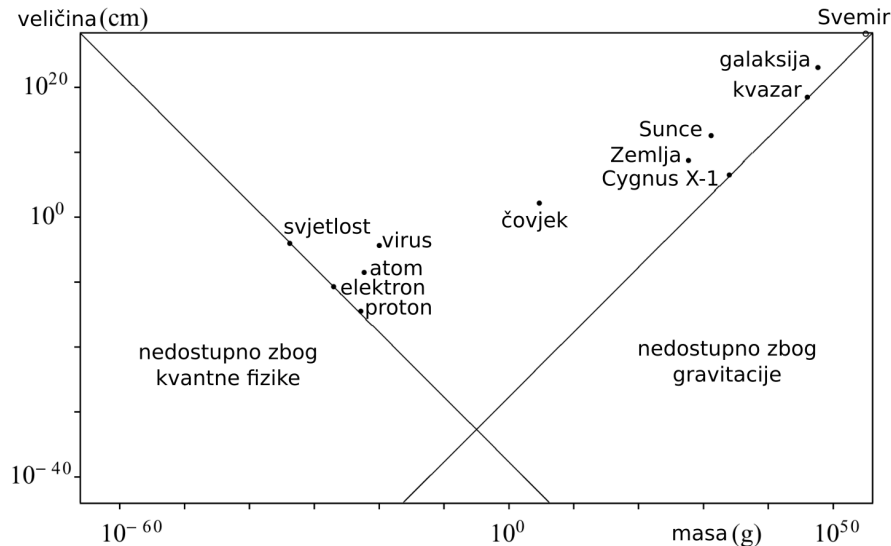


Slika 3.6: Dijagram s preklopnim poddivergencijama.

Dijagrami 2 i 3 su poddijagrami 1, no nisu disjunktni što ukazuje na preklopnu divergenciju. U tom slučaju potrebno je rastaviti stablo na dva sumanda kako bi se reproducirala odgovarajuća *forrest* formula [44]. Primjenom formule (3.13) na bilo koje od gornjih stabala lako se uvjerimo u ispravnost kontračlanova i renormalizirane amplitude. Primjeri s više petlji postaju znatno kompliciraniji i potrebno je uzeti u obzir neke detalje koje smo ovdje zanemarili. Mogu se pronaći u [44].

## 4 Fizika na Planckovoj skali

Fizika standardnog modela i kvantna teorija danas dobro opisuju fenomene na maloj odnosno velikoj skali. Planckovu skalu definiramo kao onu na kojoj su jednako dominantni kvantni i gravitacijski efekti. Na slici 4.1 možemo vidjeti odnos veličina i masa od najmanjih pa sve do najvećih objekata u svemiru. Prema Heisenbergovom



Slika 4.1: Veličina i masa raznih objekata u svemiru. Planckova skala je na sjecištu dva pravca. [45]

principu neodređenosti vrijedi  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ . Ako za  $\Delta x$  uzmemo veličinu objekta, a za  $\Delta p \sim mc$  kao mjerilo mase, dobivamo pravac negativnog nagiba na logaritamskom grafu slike 4.1 kao granicu na kojoj vrijedi jednakost u relaciji neodređenosti. Dio ravnine ispod tog pravca zabranjen je relacijom neodređenosti.

Desni pravac pozitivnog nagiba predstavlja regiju u kojoj je gravitacijska energija prostorvremena oko objekta usporediva s energijom mase mirovanja istog objekta,  $\frac{Gmm}{\Delta x} \sim mc^2$ , gdje je  $G$  gravitacijska konstanta. Ako energija postane previše koncentrirana u malom području, dolazi do formiranja crne rupe pa jednakost u ovoj jednadžbi zamjenjujemo s  $\leq$  kako bi uračunali ovaj fenomen, time samo regija iznad pravca preostaje dostupna.

Objekti u blizini lijevog pravca tretiraju se uglavnom kvantnom fizikom, a desnog općom teorijom relativnosti. U sjecištu ovih pravaca potrebne su obje teorije, odnosno njihovo ujedinjenje i to područje zovemo Planckova skala, a koordinate te točke zovemo Planckova masa i duljina:

$$m_P = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{\frac{1}{2}} = 2.177 \times 10^{-5} \text{ g}, \quad x_P = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.616 \times 10^{-33} \text{ cm}.$$

Iz slike vidimo da je sjecište daleko od objekata na trenutno mjerljivim skalama što

ukazuje na teškoću direktnog mjerenja na Planckovoj skali.

U potpoglavlju 2.4 već smo se susreli s problematikom mjerenja na ovoj skali, tj. stvaranjem mikroskopskih crnih rupa koje motiviraju nekomutativni prostor. Tamo smo vidjeli da nekokomutativan koprodukt vodi na nekomutativan prostor, tj. prostoru vrijeme prestaje biti mnogostrukost. Uočili smo i vezu između koprodukta i geometrije, konkretno Leibnizovog svojstva ključnog za definiranje diferencijalno geometrijskih struktura. Nadalje, posljedično se komutativni produkt deformira u nekomutativni *star*-produkt koji je kovarijantan s obzirom na novi koprodukt.

U ovom poglavlju produkt i koprodukt tretirat ćemo ravnopravno. Zahtijevat ćemo njihovu kompatibilnost (ne samo bialgebarsku) kako bi smisljeno opisivali kvantnu fiziku (algebra) i gravitaciju (koalgebra), tj. geometriju. Posebno je zanimljiva klasa samodualnih (*self-dual*) rješenja koja se pojavljuju u okviru tzv. *bicrossproduct* modela. Kao i u prethodnim poglavljima, započinjemo s matematičkim uvodom. Glavni izvori su [14] i [46], a formule za antipode  $\kappa$ -Poincare algebre preuzete su iz [47].

## 4.1 Dualnost i kodjelovanje

Materijal u ovom potpoglavlju svojevrsno upotpunjava prvo poglavlje i u udžbenicima se obično izlaže na početku ([14], [15], [48]) s obzirom na to da se nadovezuje na matematičke temelje teorije. Slično kao što vektorski prostor  $V$  ima sebi dualan prostor  $V^*$ , tako za Hopfovu algebru  $H$  možemo definirati njoj dualnu Hopfovu algebru  $H^*$ . Ona na razini vektorskog prostora odgovara funkcionalima nad  $H$ , no kako Hopfove algebre imaju dodatnu strukturu, zahtijevamo da je ona na neki način očuvana.

U drugom potpoglavlju eksplicitno ćemo konstruirati klasu Hopfovih algebri koje su same sebi dualne (samodualne), tj.  $H = H^*$ , a u zadnjem ćemo pomoću dualnosti definirati prostor kovarijantan s obzirom na  $\kappa$ -Poincare algebru. U sličnom tonu, dualno konceptu djelovanja (modula) je kodjelovanje (komodul). Ono će nam biti potrebno u idućem potpoglavlju za konstrukciju *bicrossproduct* Hopfove algebre.

Prisjetimo se za početak propozicije 1.8 iz prvog poglavlja koja nam govori da koalgebra definira algebru na dualnom prostoru. Slično tako, u konačnodimenzionalnom slučaju algebra definira koalgebru na dualnom prostoru. Te dvije činjenice otvaraju mogućnost da je konačnodimenzionalna bialgebra samodualna. U dokazu ispod primjera 1.14 vidjeli smo da produkt odgovara koproduktu uz zamjene smjera strelica. Sljedeću propoziciju možemo interpretirati kao mogućnost postojanja samodualne Hopfove algebre na razini aksioma.

**Propozicija 4.1.** *Aksiomi za Hopfovu algebru dani dijagramima na stranicama 6, 9 i 12 su samodualni u smislu da okretanjem smjera strelica, zamjenom  $\Delta, \epsilon, s, \cdot, \eta$  dobivamo*

identične dijagrame.

*Dokaz:* Dijagrami za algebru i koalgebru zamjenjuju uloge. Za dijagram na stranici 12 potrebno je zrcaliti oko vertikalne osi kako bi se dobio početni dijagram.  $\square$

Iz ove propozicije zaključujemo da za svaku konačnodimenzionalnu Hopfov algebru postoji dualna Hopfova algebra  $H^*$ . Pošto je u tom slučaju  $H^{**} = H$ , tj. bidual je kanonski izomorfan polaznom prostoru, trebali bi o  $H$  i  $H^*$  razmišljati simetrično pa evaluaciju umjesto  $\phi(h)$  pišemo kao  $\langle \phi, h \rangle, \forall \phi \in H^*, h \in H$ .

**Propozicija 4.2.** *Eksplisitne formule koje određuju strukturu Hopfove algebre na  $H^*$  su sljedeće: za strukturu bialgebre imamo*

$$\begin{aligned} \langle \phi\psi, h \rangle &= \langle \phi \otimes \psi, \Delta h \rangle, & \langle 1, h \rangle &= \epsilon(h) \\ \langle \Delta\phi, h \otimes g \rangle &= \langle \phi, hg \rangle, & \epsilon(\phi) &= \langle \phi, 1 \rangle, \end{aligned} \quad (4.1)$$

za sve  $\phi, \psi \in H^*$  i  $h, g \in H$ , a u slučaju Hopfove algebre dodatno vrijedi i

$$\langle S\phi, h \rangle = \langle \phi, Sh \rangle. \quad (4.2)$$

*Dokaz:* Iz prethodne propozicije vidimo da asocijativnost algebre garantira koasocijativnost koalgebre i obrnuto. Sljedeći aksiome (4.1) imamo

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\phi\psi), h \otimes g \rangle &= \langle \phi\psi, hg \rangle = \langle \phi \otimes \psi, \Delta(hg) \rangle = \langle \phi \otimes \psi, (\Delta h)(\Delta g) \rangle \\ &= \langle \phi_{(1)} \otimes \psi_{(1)} \otimes \phi_{(2)} \otimes \psi_{(2)}, \Delta h \otimes \Delta g \rangle = \langle (\Delta\phi)(\Delta\psi), h \otimes g \rangle, \end{aligned}$$

što potvrđuje strukturu bialgebre. Za antipod vrijedi

$$\begin{aligned} \langle S(\phi_{(1)})\phi_{(2)}, h \rangle &= \langle S\phi_{(1)} \otimes \phi_{(2)}, h_{(1)} \otimes h_{(2)} \rangle = \langle \phi_{(1)} \otimes \phi_{(2)}, Sh_{(1)} \otimes h_{(2)} \rangle \\ &= \langle \phi, (Sh_{(1)}) h_{(2)} \rangle = \langle \phi, 1 \rangle \epsilon(h) = \epsilon(\phi) \epsilon(h) = \langle 1\epsilon(\phi), h \rangle. \end{aligned}$$

Djelovanje antipoda na drugi faktor dokazuje se analogno. Za dokaz (4.2) vidi [15], str. 17, propozicija 9.  $\square$

**Definicija 4.3.** *Dvije bialgebre ili Hopfove algebre  $A, H$  su uparene (dual pairing) ako postoji bilinearano preslikavanje  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \otimes A \rightarrow \mathbb{K}$  koje poštuje jednadžbe iz prethodne propozicije za sve  $\phi, \psi \in A$  i  $h, g \in H$ . Kažemo da je uparivanje strogo ako nema netrivialnih nul-elemenata<sup>43</sup>.*

<sup>43</sup>Nul-element je onaj čije uparivanje sa svakim elementom druge algebre daje nulu, dakle strogo uparivanje je nedegenerirano.

Ako su konačnodimenzionalne  $A$  i  $H$  uparene, ne mora nužno biti  $A = H^*$  iz prethodne propozicije (vidi [15], str. 17). Naprimjer, za sve Hopfove algebre  $A, H$  postoji trivijalno uparivanje  $\langle a, h \rangle = \epsilon_A(a)\epsilon_H(h)$ ,  $\forall a \in A, h \in H$  koje očitno nije strogo.

**Primjer 4.4.** Hopfove algebre  $\mathbb{K}(G)$  (funkcije na grupi) i  $\mathbb{K}G$  (grupovna algebra) iz potpoglavlja 1.4 su strogo dualne. Sada definiramo uparivanje za  $\phi \in \mathbb{K}(G)$ : prvo ga linearno proširimo na funkciju nad  $\mathbb{K}G$  te zatim definiramo

$$\langle \phi, h \rangle = \phi \left( \sum_u h(u)u \right) = \sum_u h(u)\phi(u), \quad \forall h \in \mathbb{K}G. \quad (4.3)$$

*Dokaz:* Pokazujemo (4.1) na generatorima:  $\langle \phi \otimes \psi, \Delta u \rangle = \langle \phi \otimes \psi, u \otimes u \rangle = \phi(u)\psi(u) \equiv (\phi\psi)(u) = \langle \phi\psi, u \rangle$ , zatim  $\langle \Delta\phi, u \otimes v \rangle \equiv \phi(uv) = \langle \phi, uv \rangle$ . Jednadžba (4.2) također slijedi direktno iz definicije. Nedegeneriranost je očita iz oblika uparivanja, druga suma u (4.3) analogna je skalarnom produktu na  $\mathbb{R}^n$ , gdje je  $n$  red grupe).  $\square$

Analogna tvrdnja za Liejevu grupu i pripadnu algebru je sljedeća [15] [48]:

**Propozicija 4.5.** Neka je  $\mathfrak{g}$  Liejeva algebra grupe  $G$  i  $U(\mathfrak{g}) \ni a = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ ,  $x_i \in \mathfrak{g}$ . Djelovanje<sup>44</sup>  $a$  na  $f \in \mathbb{C}(G)$  je

$$(a \triangleright f)(g) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \Big|_{t_1=\dots=t_n=0} f(g \exp(t_1 x_1) \cdots \exp(t_n x_n)).$$

Strogo dualno uparivanje  $U(\mathfrak{g})$  i  $\mathbb{C}(G)$  dano je s

$$\langle a, f \rangle := (a \triangleright f)(e),$$

gdje je  $a \in U(\mathfrak{g})$ ,  $a \in \mathbb{C}(G)$ . Omotačka algebra Liejeve algebre dualna je funkcijama na pripadnoj Liejevoj grupi. Za dokaz vidi primjer 1.4.7. u [48].

Sljedeći alat koji će nam biti potreban je kodjelovanje. Ono je dualna verzija djelovanja definiranog u (1.11). Kao što je djelovanje polarizacija produkta, tako je kodjelovanje polarizacija koprodukta i definirano je za koalgebru. Desno kodjelovanje (koreprezentacija) koalgebre  $H$  je par  $(\beta, V)$  gdje je  $V$  vektorski prostor, a  $\beta$  linearno preslikavanje  $V \rightarrow V \otimes H$  takvo da vrijedi  $(\beta \otimes \text{id}) \circ \beta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \beta$  te

<sup>44</sup>Formalno se ne radi o kontinuiranim funkcijama na  $G$  već o reprezentativnim funkcijama  $\text{Rep}(G)$ . One su u slučaju kompaktne  $G$  guste u  $\mathbb{C}(G)$ , a u nekompaktnom su dovoljno dobra aproksimacija uz određena ograničenja na  $\mathbb{C}(G)$  poput kompaktnog nosača ili Schwartzovih funkcija.

$id = (id \otimes \epsilon) \circ \beta$ . Ovi uvjeti predstavljeni su sljedećim komutativnim dijagramima:

$$\begin{array}{ccc}
 & V \otimes H \otimes H & \\
 \beta \otimes id \nearrow & & \nwarrow id \otimes \Delta \\
 V \otimes H & & V \otimes H \\
 \beta \nwarrow & & \nearrow \beta \\
 & V &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & V \otimes H & \\
 id \otimes \epsilon \uparrow & & \nwarrow \beta \\
 V \otimes K & \xleftarrow{\cong} & V
 \end{array}$$

Isti aksiomi mogu se dobiti iz dijagrama (1.11) okretanjem strelica, zamjenom  $\Delta, \epsilon, \alpha$  s  $\cdot, \eta, \beta$  i reflektiranjem oko vertikalne osi. Stoga su u vidu propozicije 4.1 međusobno dualni. Zgodan zapis za preslikavanje  $\beta$  je  $\beta(v) = \sum v^{(\bar{1})} \otimes v^{(\bar{2})}$ . Aksiomi za desni komodul postaju

$$\begin{aligned}
 \sum v^{(\bar{1})(\bar{1})} \otimes v^{(\bar{1})(\bar{2})} \otimes v^{(\bar{2})} &= \sum v^{(\bar{1})} \otimes v^{(\bar{2})_{(1)}} \otimes v^{(\bar{2})_{(2)}}, \\
 \sum v^{(\bar{1})} \epsilon(v^{(\bar{2})}) &= v.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dualno definiciji  $H$ -modul algebre, za koalgebru  $C$  kažemo da je desna  $H$ -komodul koalgebra ako vrijedi

$$\begin{aligned}
 \sum c^{(\bar{1})_{(1)}} \otimes c^{(\bar{1})_{(2)}} \otimes c^{(\bar{2})} &= \sum c_{(1)}^{(\bar{1})} \otimes c_{(2)}^{(\bar{1})} \otimes c_{(1)}^{(\bar{2})} c_{(2)}^{(\bar{2})}, \\
 \sum \epsilon(c^{(\bar{1})}) c^{(\bar{2})} &= \epsilon(c).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

## 4.2 Bicrossproduct

U jednadžbi (2.15) Poincareovu grupu zapisali smo kao semidirektni produkt. Sljedeća definicija generalizira takve konstrukcije.

**Definicija 4.6.** *Neka je  $H$  bialgebra ili Hopfova algebra i  $A$  lijeva  $H$ -modul algebra. Definiramo lijevu cross-product algebru  $A \bowtie H$  na  $A \otimes H$  s produktom*

$$(a \otimes h)(b \otimes g) = \sum a (h_{(1)} \triangleright b) \otimes h_{(2)}g, \quad a, b \in A, \quad h, g \in H.$$

*Dokaz:* Produkt je očito zatvoren, pokažimo asocijativnost:

$$\begin{aligned}
 (a \otimes h)((b \otimes g)(c \otimes f)) &= (a \otimes h)b (g_{(1)} \triangleright c) \otimes g_{(2)}f \\
 &= a (h_{(1)} \triangleright (b (g_{(1)} \triangleright c))) \otimes h_{(2)}g_{(2)}f \\
 &= a (h_{(1)} \triangleright b) ((h_{(2)}g_{(1)}) \triangleright c) \otimes h_{(3)}g_{(2)}f \\
 &= (a (h_{(1)} \triangleright b) \otimes h_{(2)}g) (c \otimes f) \\
 &= ((a \otimes h)(b \otimes g))(c \otimes f).
 \end{aligned}$$

U trećem retku iskoristili smo činjenicu da je  $A$   $H$ -modul algebra i koasocijativnost



(podsjetnik na (1.3))  $H$ , a u preostalima definiciju *cross*-produkta uz koasocijativnost po potrebi. Primijetimo da su  $A \otimes 1$  i  $1 \otimes H$  sadržane kao podalgebre s unakrsnim produktom

$$\begin{aligned} ha &\equiv (1 \otimes h)(a \otimes 1) = h_{(1)} \triangleright a \otimes h_{(2)} \\ &= (h_{(1)} \triangleright a \otimes 1) (1 \otimes h_{(2)}) \equiv (h_{(1)} \triangleright a) h_{(2)}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

gdje smo uveli pokratu  $h := 1 \otimes h$  i  $a := a \otimes 1$ .  $\square$

Promotrimo slučaj Poincareove grupe. Poznato je da Lorentzova grupa  $\mathcal{L}$  djeluje na grupu translacija  $\mathcal{T}$  konjugacijom: za Lorentzovu transformaciju  $\Lambda$  imamo

$$(\Lambda \triangleright x) = \Lambda x \Lambda^{-1}. \quad (4.7)$$

Po linearnosti imamo i djelovanje  $\mathbb{C}\mathcal{L}$  na  $\mathbb{C}\mathcal{T}$ . Dodatno,  $\mathbb{C}(\mathcal{T})$  je  $\mathbb{C}\mathcal{L}$ -modul algebra jer vrijedi

$$\Lambda \triangleright (ab) = (\Lambda_{(1)} \triangleright a)(\Lambda_{(2)} \triangleright b) = (\Lambda \triangleright a)(\Lambda \triangleright b), \quad (4.8)$$

što postaje očito u aditivnoj notaciji na koju smo navikli kod translacija. Kako ove algebre zadovoljavaju uvijete za *cross-product* algebru na  $\mathbb{C}\mathcal{T} \otimes \mathbb{C}\mathcal{L}$ , za produkt imamo

$$(x^1 \otimes \Lambda^1)(x^2 \otimes \Lambda^2) = x^1(\Lambda_{(1)}^1 \triangleright x^2) \otimes \Lambda_{(2)}^1 \Lambda^2 = x^1(\Lambda^1 x^2 (\Lambda^1)^{-1}) \otimes \Lambda^1 \Lambda^2.$$

U notaciji na koju smo navikli za Poincareovu grupu ova tvrdnja glasi  $(\Lambda^1, x_1)(\Lambda^2, x_2) = (\Lambda^1 \Lambda^2, x_1 + \Lambda^1 x_2 (\Lambda^1)^{-1})$ , što nam je dobro poznato<sup>45</sup>. Za grupovnu algebru stoga možemo zaključiti  $\mathbb{C}\mathcal{P} = \mathbb{C}\mathcal{L} \rtimes \mathbb{C}\mathcal{T}$ , što je verzija relacije (2.15) na razini grupovne algebre. Slična stvar se može pokazati na razini omotačke algebre, gdje (4.7) postaje

$$h \triangleright t = h_{(1)} t S(h_{(2)}), \quad t \in U(\mathcal{T}) \subset U(\mathcal{P}), \quad h \in U(\mathfrak{so}(1, 3)) \subset U(\mathcal{P}). \quad (4.9)$$

Ova formula se za grupovni antipod reducira na (4.7). Poincareova algebra djeluje dakle na algebru translacija i za omotačku algebru imamo

$$U(\mathcal{P}) \cong U(\mathcal{T}) \rtimes U(\mathfrak{so}(1, 3)). \quad (4.10)$$

U navedenim *cross-product* algebrama imamo samo algebarsku strukturu bez koprodukta i antipoda. Kako smo u domeni Hopfovih algebri, prirodno je postaviti pitanje kada će *cross-product*-algebra imati koprodukt, odnosno biti bialgebra ili Hopfova algebra? Prvi korak je konstruirati *cross-coproduct* koalgebru:

<sup>45</sup>Ponekad nađemo na nešto drukčiju verziju:  $(\Lambda^1, x^1)(\Lambda^2, x^2) = (\Lambda^1 \Lambda^2, x^1 + \Lambda^2 x^2)$ , no ovo vrijedi u četverovektorskoj reprezentaciji u kojoj su elementi Poincareove grupe i matrice (Lorentzova grupa, jesu operatori) i vektori (grupa translacija, nisu operatori) pa strogo govoreći ovo nije ni reprezentacija.

**Definicija 4.7.** Neka je  $H$  bialgebra ili Hopfova algebra, a  $C$  desna  $H$ -komodul koalgebra. Definiramo desnu cross-coproduct koalgebru  $H \blacktriangleright C$  na  $H \otimes C$  s koproduktom

$$\Delta(h \otimes c) = \sum h_{(1)} \otimes c_{(1)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(2)} c_{(1)}^{(\bar{2})} \otimes c_{(2)}, \quad \epsilon(h \otimes c) = \epsilon(h)\epsilon(c).$$

*Dokaz:* Provjerimo koasocijativnost:

$$\begin{aligned} & (\text{id} \otimes \Delta)\Delta(h \otimes c) \\ 1 &= (\text{id} \otimes \Delta)(h_{(1)} \otimes c_{(1)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(2)} c_{(1)}^{(\bar{2})} \otimes c_{(2)}) \\ 2 &= h_{(1)} \otimes c_{(1)}^{(\bar{1})} \otimes \left( h_{(2)} c_{(1)}^{(\bar{2})} \right)_{(1)} \otimes c_{(2)(1)}^{(\bar{1})} \otimes \left( h_{(2)} c_{(1)}^{(\bar{2})} \right)_{(2)} c_{(2)(1)}^{(\bar{2})} \otimes c_{(2)(2)} \\ 3 &= h_{(1)} \otimes c_{(1)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(2)} c_{(1)}^{(\bar{2})} \otimes c_{(2)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(3)} c_{(1)}^{(\bar{2})} c_{(2)}^{(\bar{2})} \otimes c_{(3)} \\ 4 &= h_{(1)} \otimes c_{(1)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(2)} c_{(1)}^{(\bar{2})} \otimes c_{(2)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(3)} c_{(1)}^{(\bar{2})} c_{(2)}^{(\bar{2})} \otimes c_{(3)} \\ 5 &= h_{(1)} \otimes c_{(1)(1)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(2)} c_{(1)(1)}^{(\bar{2})} \otimes c_{(1)(2)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(3)} c_{(1)(1)}^{(\bar{2})} c_{(1)(2)}^{(\bar{2})} \otimes c_{(2)} \\ 6 &= h_{(1)(1)} \otimes c_{(1)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(1)(2)} c_{(1)}^{(\bar{2})} \otimes c_{(1)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(2)} c_{(1)}^{(\bar{2})} \otimes c_{(2)} \\ 7 &= (\Delta \otimes \text{id})\Delta(h \otimes c). \end{aligned}$$

U prva dva retka smo raspisali koprodukte po definiciji. U trećem smo prvo iskoristili kompatibilnost produkta i koprodukta u  $H$  imajući na umu da elementi sa superskriptom  $(\bar{1})$  leže u  $C$ , a  $(\bar{2})$  u  $H$ , a zatim smo iskoristili koasocijativnost  $H$  i  $C$  te u skladu s time preimenovali indekse. U četvrtom smo iskoristili (4.4), a u petom smo preimenovali subskripte prema koasocijativnosti u  $C$ . U šestom smo primijenili svojstvo komodul koalgre (4.5), a zadnju jednakost lako dobivamo raspisivanjem. Dokaz za kojedinicu je trivijalan.  $\square$

Sada smo u poziciji da *cross-product* algebru nadogradimo u bialgebru odnosno Hopfovu algebru.

**Teorem 4.8.** Neka su  $A, H$  bialgre, gdje je  $A$  lijeva  $H$ -modul algebra te je  $H$  desna  $A$ -komodul koalgebra. Ovi uvjeti dani su preslikavanjima

$$\alpha : H \otimes A \rightarrow A, \quad \alpha(h \otimes a) = h \triangleright a, \quad \beta : H \rightarrow H \otimes A, \quad \beta(h) = \sum h^{(\bar{1})} \otimes h^{(\bar{2})}.$$

Ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$\begin{aligned} \epsilon(h \triangleright a) &= \epsilon(h)\epsilon(a), \quad \Delta(h \triangleright a) = \sum h_{(1)}^{(\bar{1})} \triangleright a_{(1)} \otimes h_{(1)}^{(\bar{2})} (h_{(2)} \triangleright a_{(2)}), \\ \beta(1) &= 1 \otimes 1, \quad \beta(gh) = \sum g_{(1)}^{(\bar{1})} h^{(\bar{1})} \otimes g_{(1)}^{(\bar{2})} (g_{(2)} \triangleright h^{(\bar{2})}), \\ \sum h_{(2)}^{(\bar{1})} \otimes (h_{(1)} \triangleright a) h_{(2)}^{(\bar{2})} &= \sum h_{(1)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(1)}^{(\bar{2})} (h_{(2)} \triangleright a) \end{aligned} \tag{4.11}$$

za sve  $a, b \in A$  te  $h, g \in H$ , tada  $A \bowtie H$  te  $A \blacktriangleright H$  tvore bialgebru koju zovemo lijeva-desna bicrossproduct algebra pridružena kompatibilnim (ko)djelovanjima i označavamo

ju s  $A \blacktriangleright H$ . Ako su  $A, H$  Hopfove algebre, tada je to i  $A \blacktriangleright H$  s antipodom

$$S(a \otimes h) = \sum \left( 1 \otimes Sh^{(\bar{1})} \right) \left( S \left( ah^{(\bar{2})} \right) \otimes 1 \right). \quad (4.12)$$

*Dokaz:* Asocijativnost i koasocijativnost slijede iz prethodne dvije definicije, redom. Pokažimo prvo kompatibilnost produkta i koprodukta:

$$\begin{aligned} \Delta((a \otimes h)(b \otimes g)) &= \Delta(a(h_{(1)} \triangleright b) \otimes h_{(2)}g) \\ 1 &= a_{(1)}(h_{(1)} \triangleright b)_{(1)} \otimes (h_{(2)}g)_{(1)}^{(\bar{1})} \otimes a_{(2)}(h_{(1)} \triangleright b)_{(2)}(h_{(2)}g)_{(1)}^{(\bar{2})} \otimes (h_{(2)}g)_{(2)} \\ 2 &= a_{(1)}\left(h_{(1)}^{(\bar{1})} \triangleright b_{(1)}\right) \otimes (h_{(3)}g_{(1)})^{(\bar{1})} \\ &\quad \otimes a_{(2)}h_{(1)}^{(\bar{2})}(h_{(2)} \triangleright b_{(2)})(h_{(3)}g_{(1)})^{(\bar{2})} \otimes h_{(4)}g_{(2)} \\ 3 &= a_{(1)}\left(h_{(1)}^{(\bar{1})} \triangleright b_{(1)}\right) \otimes h_{(3)(1)}^{(\bar{1})}g_{(1)}^{(\bar{1})} \\ &\quad \otimes a_{(2)}h_{(1)}^{(\bar{2})}(h_{(2)} \triangleright b_{(2)})h_{(3)(1)}^{(\bar{2})}\left(h_{(3)(2)} \triangleright g_{(1)}^{(\bar{2})}\right) \otimes h_{(4)}g_{(2)} \\ 4 &= a_{(1)}\left(h_{(2)}^{(\bar{1})} \triangleright b_{(1)}\right) \otimes h_{(3)}^{(\bar{1})}g_{(1)}^{(\bar{1})} \\ &\quad \otimes a_{(2)}(h_{(1)} \triangleright b_{(2)})h_{(2)}^{(\bar{2})}h_{(3)}^{(\bar{2})}\left(h_{(4)} \triangleright g_{(1)}^{(\bar{2})}\right) \otimes h_{(5)}g_{(2)} \\ 5 &= a_{(1)}\left(h_{(2)}^{(\bar{1})}_{(1)} \triangleright b_{(1)}\right) \otimes h_{(2)}^{(\bar{1})}_{(2)}g_{(1)}^{(\bar{1})} \\ &\quad \otimes a_{(2)}(h_{(1)} \triangleright b_{(2)})h_{(2)}^{(\bar{2})}\left(h_{(3)} \triangleright g_{(1)}^{(\bar{2})}\right) \otimes h_{(4)}g_{(2)} \\ 6 &= a_{(1)}\left(h_{(1)}^{(\bar{1})}_{(1)} \triangleright b_{(1)}\right) \otimes h_{(1)}^{(\bar{1})}_{(2)}g_{(1)}^{(\bar{1})} \\ &\quad \otimes a_{(2)}h_{(1)}^{(\bar{2})}(h_{(2)} \triangleright b_{(2)})\left(h_{(3)} \triangleright g_{(1)}^{(\bar{2})}\right) \otimes h_{(4)}g_{(2)} \\ 7 &= a_{(1)}\left(h_{(1)}^{(\bar{1})}_{(1)} \triangleright b_{(1)}\right) \otimes h_{(1)}^{(\bar{1})}_{(2)}g_{(1)}^{(\bar{1})} \\ &\quad \otimes a_{(2)}h_{(1)}^{(\bar{2})}\left(h_{(2)} \triangleright \left(b_{(2)}g_{(1)}^{(\bar{2})}\right)\right) \otimes h_{(3)}g_{(2)} \\ 8 &= \left(\left(a_{(1)} \otimes h_{(1)}^{(\bar{1})}\right) \otimes \left(a_{(2)}h_{(1)}^{(\bar{2})} \otimes h_{(2)}\right)\right) \left(\left(b_{(1)} \otimes g_{(1)}^{(\bar{1})}\right) \otimes \left(b_{(2)}g_{(1)}^{(\bar{2})} \otimes g_{(2)}\right)\right) \\ 9 &= (\Delta(a \otimes h))(\Delta(b \otimes g)). \end{aligned}$$

U nultom retku smo raspisali produkt prema definiciji 4.6, a u prvom koproduktu prema 4.7 te smo primijenili kompatibilnost produkta i koprodukta u prvom i trećem faktoru. U drugom retku smo primijenili prvi od uvjeta (4.11) na prvi i treći faktor te renumerirali  $h$  članove po koasocijativnosti. U trećem retku primijenili smo drugi od uvjeta (4.11) na drugi i treći faktor, a u četvrtom treći uvjet na prvi i treći faktor. U petom retku iskoristili smo svojstvo komodul koalgebre (4.5) za  $H$  u prva tri faktora te renumerirali. U šestom smo ponovno primijenili treći uvjet iz (4.11) na prvi i treći faktor. Sedmi redak je primjena uvjeta  $H$ -modul algebre iz definicije (1.13) na treći faktor. U osmom retku prepoznali smo produkt na  $(A \blacktriangleright H) \otimes (A \blacktriangleright H)$ , a u devetom ponovno primijenili definiciju koprodukta iz 4.7. U slučaju da su  $A, H$

Hopfove algebre, za antipod vrijedi

$$\begin{aligned}
\cdot(\text{id} \otimes S)\Delta(a \otimes h) &= \left(a_{(1)} \otimes h_{(1)}^{(\bar{1})}\right) S\left(a_{(2)}h_{(1)}^{(\bar{2})} \otimes h_{(2)}\right) \\
&= \left(a_{(2)} \otimes h_{(1)}^{(\bar{1})}\right) \left(1 \otimes Sh_{(2)}^{(\bar{1})}\right) \left(S\left(a_{(2)}h_{(1)}^{(\bar{2})}h_{(2)}^{(\bar{2})}\right) \otimes 1\right) \\
&= \left(a_{(2)} \otimes h_{(1)}^{(\bar{1})}Sh_{(2)}^{(\bar{1})}\right) \left(S\left(a_{(2)}h_{(1)}^{(\bar{2})}h_{(2)}^{(\bar{2})}\right) \otimes 1\right) \\
&= \left(a_{(2)} \otimes h_{(1)}^{(\bar{1})}Sh_{(2)}^{(\bar{1})}\right) \left(S\left(a_{(2)}h^{(\bar{2})}\right) \otimes 1\right) = \left(a_{(2)} \otimes 1\epsilon(h^{(\bar{1})})\right) \left(S\left(a_{(2)}h^{(\bar{2})}\right) \otimes 1\right) \\
&= \left(a_{(2)} \otimes 1\right) \left(S\left(a_{(2)}\epsilon(h^{(\bar{1})})h^{(\bar{2})}\right) \otimes 1\right) \\
&= \left(a_{(2)} \otimes 1\right) \left(Sa_{(2)} \otimes 1\right) \epsilon(h) = \epsilon(a)\epsilon(h).
\end{aligned}$$

U prva dva retka smo raspisali koprodukt i antipod po definiciji, a u trećem iskoristili asocijativnost u  $A \bowtie H$ . U četvrtom retku koristili smo svojstvo komodul koalgebre (4.5) te svojstvo antipoda za  $h^{(\bar{1})}$ . U petom retku smo  $\epsilon(h^{(\bar{1})})$  pomaknuli u desni antipod pa u šestom primijenili (4.5) te svojstvo antipoda za  $A$ .  $\square$

Sada znamo kako možemo ranije izvedenu Poincareovu *cross-product* algebru pretvoriti u Hopfov algebru. Potrebno je specificirati desno kodjelovanje algebre translacija na Lorentzovu algebru. Uvijek je dostupan trivijalni izbor,

$$\beta(l) = 1 \otimes l, \quad \forall l \in U(\mathfrak{so}(1, 3)), \quad 1 \in U(T). \quad (4.13)$$

Pošto su svi elementi primitivni, tj. koprodukt im je oblika  $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ , raspisivanjem uvjeta (4.11) lako se uvjerimo da su oni ispunjeni. Algebre  $U(T)$  i  $U(\mathfrak{so}(1, 3))$  su Hopfove pa je i njihov *bicrossproduct* Hopfova algebra prema prethodnom teoremu i možemo pisati

$$U(P) \cong U(T) \blacktriangleright U(\mathfrak{so}(1, 3)). \quad (4.14)$$

### 4.3 $\kappa$ -Poincare i $\kappa$ -Minkowski

Trivijalno kodjelovanje algebre translacija u prethodnom potpoglavlju kompatibilno je u smislu *bicrossproducta* s djelovanjem Lorentzove algebre na translacije. Nameće se pitanje postoje li netrivialno kodjelovanje kompatibilno s nekim novim djelovanjem takvo da se dobiveni *bicrossproduct* u limesu svodi na Poincareovu algebru?

Najpoznatiji primjer takve algebre je  $\kappa$ -Poincare algebra za koju je Shahn Majid 1994. godine pokazao da ima strukturu *bicrossproducta* dajući djelovanje i kodjelovanje iz kojih se može rekonstruirati [46].  $\kappa$ -Poincare algebra bila je poznata već od 1991. godine iz rada Lukierskog i suradnika [32]. Cilj ovog potpoglavlja je prikazati djelovanje i kodjelovanje koje vodi na  $\kappa$ -Poincare algebru, a izvor kojim ćemo se poslužiti je [46]. Nećemo dokazivati uvjete (4.11) niti raspisivati relacije iz ovog rada, nego ćemo samo navesti najbitnije korake i relacije.

Prije nego napišemo definiciju  $\kappa$ -Poincare algebre potrebno je uvesti pojam prstena formalnog reda potencija i Hopfove algebre nad njim. To će nam omogućiti generalizaciju Liejeve algebre u kojoj komutator više ne mora biti linearna kombinacija elemenata, već može biti nelinearan<sup>46</sup> u obliku reda potencija elemenata u nekoj varijabli  $h$ . Varijabla  $h$  služi kao pomoćni alat i pomaže nam da formule shvaćamo "red po red" u  $h$ , a kasnije ćemo ju identificirati s Planckovom skalom.

**Definicija 4.9.** *Komutativni prsten kompleksnog formalnog<sup>47</sup> reda potencija definiran je kao skup [49]*

$$\mathbb{C}[[h]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n : c_n \in \mathbb{C} \right\}$$

s množenjem i zbrajanjem sličnim onima za polinome:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n h^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) h^n \\ \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} d_n h^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n c_k d_{n-k} \right) h^n. \end{aligned}$$

Analogno pojmu vektorskog prostora nad poljem definiramo  $R$ -modul nad prstenom  $R$ . Aksiomi su identični onima za vektorski prostor uz zamjenu polja s prstenom.

**Primjer 4.10.** *Neka je  $V$  vektorski prostor nad  $\mathbb{C}$ . Definiramo  $V[[h]]$  kao  $\mathbb{C}[[h]]$ -modul koji se sastoji svih redova u  $h$  s koeficijentima iz  $V$ :*

$$V[[h]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} v_n h^n : v_n \in V \right\}$$

sa zbrajanjem i množenjem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} v_n h^n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n h^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (v_n + w_n) h^n \\ \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_n h^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n c_k v_{n-k} \right) h^n, \end{aligned} \tag{4.15}$$

gdje su  $v_n, w_n \in \mathbb{C}$ .

Ovaj primjer nam omogućuje da omotačku algebru (koja je prije svega kompleksni vektorski prostor) promoviramo u  $\mathbb{C}[[h]]$ -modul. Koproducti u nedeformiranoj omotačkoj algebri su primitivni pa je sljedeća propozicija vrlo korisna u praksi:

**Propozicija 4.11.** *Neka je  $N$  element Hopfove algebre  $H$  nad  $\mathbb{C}[[h]]$ . Ako je  $\Delta N = N \otimes 1 + 1 \otimes N$ , onda je  $\Delta e^{hN} = e^{hN} \otimes e^{hN}$ .*

<sup>46</sup>Zapravo je i dalje linearan, ali u kontekstu  $\mathbb{C}[[h]]$ -modula.

<sup>47</sup>Riječ formalno se koristi jer ovaj red ne mora biti nužno konvergentan.

Dokaz: Vrijedi

$$\Delta e^{hN} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Delta(hN)^r}{r!} = \sum \frac{(hN \otimes 1 + 1 \otimes hN)^r}{r!} = e^{hN \otimes 1 + 1 \otimes hN} = e^{hN \otimes 1} \otimes e^{1 \otimes hN}$$

u algebi tenzorskog produkta  $T(H)[[h]]$  iz primjera 1.2 ( $T(H)$  je sada  $\mathbb{C}[[h]]$ -modul). Koristili smo da je  $\Delta$  homomorfizam algebr i da  $hN \otimes 1$  i  $1 \otimes hN$  komutiraju u algebi tenzorskog produkta. Iz BCH formule proizlazi

$$e^{hN \otimes 1} e^{1 \otimes hN} = (e^{hN} \otimes 1) (1 \otimes e^{hN}) = e^{hN} \otimes e^{hN}.$$

Slično kao što element Liejeve grupe dobivamo eksponenciranjem elementa Liejeve algebre, tako koprodukt u omotačkoj algebi daje koprodukt grupovne algebre pri eksponenciranju.  $\square$

Sada dajemo definiciju  $\kappa$ -Poincare algebre  $P_\kappa$ :

**Definicija 4.12.**  $\kappa$ -Poincare je Hopfova algebra nad  $\mathbb{C}[[\frac{1}{\kappa}]]$ . Algebra translacija  $P_\mu$  i rotacija  $M_i$  ostaje ista kao i u Poincareovoj algebi, no (u ovoj bazi) mijenjaju se potisci  $\bar{N}_i$ :

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, & [M_i, M_j] &= \epsilon_{ijk} M_k, \\ [M_i, P_j] &= \epsilon_{ijk} P_k, & [M_i, P_0] &= 0 \\ [M_i, \bar{N}_j] &= \epsilon_{ijk} \bar{N}_k \\ [\bar{N}_i, P_0] &= P_i, & [\bar{N}_i, P_j] &= \delta_{ij} \kappa \sinh \frac{P_0}{\kappa}, \\ [\bar{N}_i, \bar{N}_j] &= -\epsilon_{ijk} \left( M_k \cosh \frac{P_0}{\kappa} - \frac{1}{4\kappa^2} P_k \vec{P} \vec{M} \right). \end{aligned}$$

Ovdje je  $\kappa$  konstanta dimenzije mase za koju se očekuje da je reda veličine Planckove mase. Vidimo da se u limesu  $\kappa \rightarrow \infty$  (ekvivalentno evaluiranju u nultom redu u  $\frac{1}{\kappa}$ ) algebra svodi na Poincareovu. Koprodukt je

$$\begin{aligned} \Delta P_0 &= P_0 \otimes 1 + 1 \otimes P_0, & \Delta M_i &= M_i \otimes 1 + 1 \otimes M_i \\ \Delta P_i &= P_i \otimes e^{\frac{P_0}{2\kappa}} + e^{-\frac{P_0}{2\kappa}} \otimes P_i \\ \Delta \bar{N}_i &= \bar{N}_i \otimes e^{\frac{P_0}{2\kappa}} + e^{-\frac{P_0}{2\kappa}} \otimes \bar{N}_i + \frac{\epsilon_{ijk}}{2\kappa} \left( P_j \otimes M_k e^{\frac{P_0}{2\kappa}} + e^{-\frac{P_0}{2\kappa}} M_j \otimes P_k \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Antipod je

$$S(P_0) = -P_0, \quad S(P_i) = -P_i, \quad S(M_i) = -M_i, \quad S(\bar{N}_i) = -\bar{N}_i + \frac{3i}{2\kappa} P_i.$$

Primjećujemo da translacije tvore Hopfovu podalgebru  $U(T)_\kappa$  u koproduktu deformiranu članom  $e^{\frac{P_0}{2\kappa}}$  u odnosu na standardnu omotačku algebru algebre translacija  $U(T)$ . Analogno faktorizaciji Poincareove algebre na bicrossproduct iz prethodnog poglavlja, očekujemo da Lorentzova algebra  $U(so(1, 3))$  djeluje na  $U(T)_\kappa$  te da  $U(T)_\kappa$

kodjeluje na Lorentzovu algebru.

Ove operacije najprirodnije je zadati u *bicrossproduct* bazi:

$$P_i \rightarrow \mathcal{P}_i := P_i e^{-\frac{P_0}{2\kappa}}, \quad \bar{N}_i \rightarrow \mathcal{N}_i := \bar{N}_i e^{-\frac{P_0}{2\kappa}} - \frac{\epsilon_{ijk}}{2\kappa} M_j P_k e^{-\frac{P_0}{2\kappa}},$$

a preostali generatori ostaju isti. Desno djelovanje  $U(so(1,3))$  na  $U(T)_\kappa$  je

$$\begin{aligned} P_0 \triangleleft M_i &= 0, & P_0 \triangleleft N_i &= -\mathcal{P}_i, \\ \mathcal{P}_i \triangleleft M_j &= \epsilon_{ijk} \mathcal{P}_k, & \mathcal{P}_i \triangleleft N_j &= -\delta_{ij} \left( \frac{\kappa}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2P_0}{\kappa}} \right) + \frac{1}{2\kappa} \vec{\mathcal{P}}^2 \right) + \frac{1}{\kappa} \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Lijevo kodjelovanje  $U(T)_\kappa$  na  $U(so(1,3))$  je

$$\beta(M_i) = 1 \otimes M_i, \quad \beta(N_i) = e^{-\frac{P_0}{\kappa}} \otimes N_i + \frac{\epsilon_{ijk}}{\kappa} \mathcal{P}_j \otimes M_k. \quad (4.18)$$

Konvencija za lijevo/desno suprotna je od one u prethodnim teoremima.

**Teorem 4.13.** *Djelovanje i kodjelovanje definirano jednadžbama (4.17) i (4.18) zadovoljavaju uvjete (4.11). Dobivena bicrossproduct algebra  $U(so(1,3)) \bowtie U(T)_\kappa$  je  $\kappa$ -Poincare algebra u bicrossproduct bazi. Eksplicitno,*

$$\begin{aligned} [P_0, \mathcal{P}_i] &= 0, & [M_i, M_j] &= \epsilon_{ijk} M_k, & [\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j] &= -\epsilon_{ijk} M_k, \\ [P_0, M_i] &= 0, & [\mathcal{P}_i, M_j] &= \epsilon_{ijk} \mathcal{P}_k, \\ [P_0, \mathcal{N}_i] &= -\mathcal{P}_i, & [\mathcal{P}_i, \mathcal{N}_j] &= -\delta_{ij} \left( \frac{\kappa}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2P_0}{\kappa}} \right) + \frac{1}{2\kappa} \vec{\mathcal{P}}^2 \right) + \frac{1}{\kappa} \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j. \end{aligned}$$

Koproduct je

$$\begin{aligned} \Delta P_0 &= P_0 \otimes 1 + 1 \otimes P_0, & \Delta \mathcal{P}_i &= \mathcal{P}_i \otimes 1 + e^{-\frac{P_0}{\kappa}} \otimes \mathcal{P}_i, \\ \Delta \mathcal{N}_i &= \mathcal{N}_i \otimes 1 + e^{-\frac{P_0}{\kappa}} \otimes \mathcal{N}_i + \frac{\epsilon_{ijk}}{\kappa} \mathcal{P}_j \otimes M_k, & \Delta M_i &= M_i \otimes 1 + 1 \otimes M_i. \end{aligned}$$

Antipod je

$$\begin{aligned} S(P_0) &= -P_0, & S(\mathcal{P}_i) &= -e^{\frac{P_0}{\kappa}} \mathcal{P}_i, \\ S(M_i) &= -M_i, & S(\mathcal{N}_i) &= -e^{\frac{P_0}{\kappa}} \mathcal{N}_i + \frac{1}{\kappa} \epsilon_{ijk} \mathcal{P}_j M_k. \end{aligned}$$

*Dokaz: Treba pokazati da vrijede (4.11) što možemo dobiti direktnim uvrštavanjem. Pritom se koriste BCH formula i propozicija 4.11.  $\square$*

Prostor na koji  $P_\kappa$  djeluje kovarijantno prirodno je definirati kao dual omotačke algebre translacija,  $U(T)_\kappa^*$ . U to se možemo uvjeriti korištenjem propozicije 4.5 za ne-deformiranu algebru translacija. Odgovarajuća Liejeva grupa za tu algebru je  $(\mathbb{R}^4, +)$ , a funkcije nad njom su upravo funkcije na standardnom Minkowski prostoru. Struk-

tura  $U(T)_\kappa^*$  određena je u potpunosti dualnim uparivanjem<sup>48</sup> iz propozicije 4.5:

$$\langle f(\mathcal{P}_i, P_0), : \psi(x_i, x_0) : \rangle = f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_0}\right) \psi(0, 0), \quad (4.19)$$

gdje  $: f :$  označava normalno uređenje sa svim faktorima  $x_0$  na lijevoj strani. Normalno uređenje posljedica je Poincare-Birkhoff-Wittovog teorema iz fusnote 11.

**Teorem 4.14.**  $\kappa$ -Minkowski prostor definiramo kao dual deformirane Hopfove algebre translacija i označavamo ga s  $U(T)_\kappa^*$ . To je nekomutativni prostor koji zadovoljava

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [x_0, x_i] = -\frac{x_i}{\kappa}. \quad (4.20)$$

Nadalje,  $U(T)_\kappa^*$  je Hopfova algebra uz

$$\Delta x_\mu = x_\mu \otimes 1 + 1 \otimes x_\mu, \quad S(x_\mu) = -x_\mu.$$

*Dokaz:* Prvo dokazujemo koprodukte. Prema propoziciji 4.2 koprodukt dobivamo kao

$$\langle \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu, x_\rho \rangle = \langle P_\mu, (x_\rho)_{(1)} \rangle \langle \mathcal{P}_\nu, (x_\rho)_{(2)} \rangle.$$

Lijeva strana je simetrična na zamjenu  $\mu \leftrightarrow \nu$  (algebra translacija je komutativna) pa koprodukt  $\Delta x_\rho$  mora biti kokomutativan. Ova jednadžba se prema (4.19) prevodi kao

$$\frac{\partial^2}{x_\mu x_\nu} x_\rho = \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} (x_\rho)_{(1)} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_\nu} (x_\rho)_{(2)} \right).$$

Iz kokomutativnosti, strukture indeksa i činjenice da je lijeva strana dobivene jednadžbe nula slijedi

$$\Delta x_\mu = x_\mu \otimes 1 + 1 \otimes x_\mu.$$

Antipod i kojedinica slijede trivijalno.

Za algebru pokazujemo samo valjanost  $[x_0, x_i]$ . Iz propozicije 4.2 za  $t \in U(T)_\kappa$  vrijedi

$$\langle t, x_0 x_i \rangle = \langle t_{(1)}, x_0 \rangle \langle t_{(2)}, x_i \rangle$$

pa imamo

$$\langle t, [x_0, x_i] \rangle = \langle t_{(1)}, x_0 \rangle \langle t_{(2)}, x_i \rangle - \langle t_{(1)}, x_i \rangle \langle t_{(2)}, x_0 \rangle.$$

Koprodukt elementa  $t = P_0$  je prema prethodnom teoremu kokomutativan pa za

<sup>48</sup>Hopfova algebra  $U(T)_\kappa$  nije omotačka algebra neke Liejeve algebre pošto nije kokomutativna, ali ispada da isti recept funkcioniira [46].



njega desna strana iščezava. Promotrimo što dobivamo za  $t = \mathcal{P}_j$ :

$$\langle \mathcal{P}_j, [x_0, x_i] \rangle = \langle (\mathcal{P}_j)_{(1)}, x_0 \rangle \langle (\mathcal{P}_j)_{(2)}, x_i \rangle - \langle (\mathcal{P}_j)_{(1)}, x_i \rangle \langle (\mathcal{P}_j)_{(2)}, x_0 \rangle.$$

Pošto je  $\Delta \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j \otimes 1 + e^{\frac{P_0}{\kappa}} \otimes \mathcal{P}_j$ , imamo

$$\langle \mathcal{P}_j, [x_0, x_i] \rangle = \langle \mathcal{P}_j, x_0 \rangle \langle 1, x_i \rangle - \langle \mathcal{P}_j, x_i \rangle \langle 1, x_0 \rangle + \langle e^{-\frac{P_0}{\kappa}}, x_0 \rangle \langle \mathcal{P}_j, x_i \rangle - \langle e^{-\frac{P_0}{\kappa}}, x_i \rangle \langle \mathcal{P}_j, x_0 \rangle.$$

Prema propoziciji 4.2 faktori  $\langle 1, x_\mu \rangle$  su  $\epsilon(x_\mu) = 0$  pa prva dva člana iščezavaju. Zadnji član također iščezava jer je prema (4.19)

$$\langle \mathcal{P}_j, x_0 \rangle \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} x_0 = 0.$$

Preostaje treći član s faktorom  $\langle e^{-\frac{P_0}{\kappa}}, x_0 \rangle$  čiji je razvoj u formalni red potencija

$$\langle e^{-\frac{P_0}{\kappa}}, x_0 \rangle = \langle 1, x_0 \rangle + \langle -\frac{P_0}{\kappa}, x_0 \rangle + \langle \frac{P_0^2}{2\kappa^2}, x_0 \rangle + \dots$$

Prvi član je  $\epsilon(x_0)$  pa iščezava, a za treći vrijedi  $\langle P_0^2, x_0 \rangle \equiv \frac{\partial}{\partial x_0^2} x_0 = 0$ . Preostaje dakle samo drugi član koji se evaluira u  $-\frac{1}{\kappa}$ ,

$$\langle \mathcal{P}_j, [x_0, x_i] \rangle = -\frac{1}{\kappa} \langle \mathcal{P}_j, x_i \rangle.$$

Desna strana iščezava za  $j = 0$  kako i treba pa sveukupno imamo

$$\langle \mathcal{P}_\mu, [x_0, x_i] \rangle = -\frac{1}{\kappa} \langle \mathcal{P}_\mu, x_i \rangle.$$

Pošto  $\mathcal{P}_\mu$  tvore bazu algebre translacija, možemo pisati

$$[x_0, x_i] = -\frac{x_i}{\kappa}.$$

□

Općenito, za Hopfov algebru  $H$  i njoj dualnu  $H^*$  kanonsko djelovanje  $H$  na  $H^*$  definiramo s  $h \triangleright \phi = \langle h, \phi_{(1)} \rangle \phi_{(2)}$ , gdje su  $h \in H, \phi \in H^*$ . U slučaju algebre translacija vrijedi dakle

$$t \triangleright x = \langle t, x_{(1)} \rangle x_{(2)}, \quad x \in U(T)_\kappa^*, \quad t \in U(T)_\kappa.$$

Iz (4.19) eksplicitno slijedi

$$\mathcal{P}_i \triangleright : \psi(x_i, x_0) := \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x_i, x_0) :, \quad P_0 \triangleright : \psi(x_i, x_0) := \frac{\partial}{\partial x_0} \psi(x_i, x_0) : \quad . \quad (4.21)$$

Zanemarimo li normalno uređenje, ovo je do na fazu identično klasičnom djelovanju iz (2.16).

Prema jednadžbi (4.9)  $U(so(1,3))$  djeluje na  $U(T)_\kappa$  s desna. Prisjetimo se da smo zamijenili lijevo/desno u odnosu na (4.9) i da nismo deformirali djelovanje u  $\kappa$ -Poincare konstrukciji. Ovo desno djelovanje dualizira se kao lijevo djelovanje  $U(so(1,3))$  na  $U(T)_\kappa^*$  prema definiciji

$$\langle t, h \triangleright x \rangle := \langle t \triangleleft h, x \rangle, \quad t \in U(T)_\kappa, \quad h \in U(so(1,3)), \quad x \in U(T)_\kappa^*.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$M_i \triangleright x_j = \epsilon_{ijk} x_k, \quad M_i \triangleright x_0 = 0, \quad \mathcal{N}_i \triangleright x_0 = -x_i, \quad \mathcal{N}_i \triangleright x_j = -\delta_{ij} x_0.$$

Prisjetimo se da je  $U(T)_\kappa$  prema pretpostavci teorema 4.8 desna  $U(so(1,3))$ -modul algebra pa je  $U(T)_\kappa^*$  lijeva  $U(so(1,3))$ -modul algebra. To znači da vrijedi  $t \triangleright x_\mu x_\nu = (t_{(1)} \triangleright x_\mu)(t_{(2)} \triangleright x_\nu)$  pa koristeći koprodukte iz prethodnog teorema i djelovanja iz (4.21) možemo izračunati i djelovanja  $U(so(1,3)) \subset P_\kappa$  na produkte koordinata:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_i \triangleright (x_j x_0) &= -\delta_{ij} x_0^2 - x_j x_i, \\ \mathcal{N}_i \triangleright (x_0 x_j) &= -\delta_{ij} x_0^2 - x_i x_j + \frac{1}{\kappa} \delta_{ij} x_0, \\ \mathcal{N}_i \triangleright (x_j x_k) &= -\delta_{ij} x_0 x_k - \delta_{ik} x_j x_0 + \frac{1}{\kappa} (\delta_{ik} x_j - \delta_{jk} x_i), \\ \mathcal{N}_i \triangleright (x_0^2) &= -x_i x_0 - x_0 x_i + \frac{1}{\kappa} x_i. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u ova djelovanja lako se uvjerimo da je Lorentz invarijantna metrika za ovaj prostor

$$x_0^2 - \vec{x}^2 + \frac{3}{\kappa} x_0.$$

Ovo je Lorentz invarijantna metrika u smislu funkcije koja ostaje nepromijenjena djelovanjem operatora  $\mathcal{N}_i, M_i$ . Valja napomenuti da promjenom koordinata  $x \mapsto \mathcal{N}_i \triangleright x$  funkcija poprima drukčiji oblik. Razlog leži u tome što je lijeva strana (4.20) antisimetrični 2-tenzor, a desna nije jer nosi samo jedan indeks. Tenzorski zapis komutacijskih relacija bio bi  $[x_\mu, x_\nu] = (a_\mu x_\nu - a_\nu x_\mu)$  slično kao u [50]. Koordinatno neovisni zapis metrike stoga mora biti određena kontrakcija s  $a_\mu$ .

Jedna od posljedica ovakve metrike je promjena disperzijske relacije za svjetlost. Može se pokazati [6] da dvije zrake frekvencija različitih za  $\delta\omega$  stižu do izvora vremenski razmaknute za

$$|\delta t| \sim \delta\omega \frac{L}{\kappa c},$$

gdje je  $L$  udaljenost do izvora, a  $c$  brzina svjetlosti. Ovo kašnjenje može se detektirati ukoliko su  $\delta\omega$  i  $L$  veliki, a vremenska skala na kojoj signal mijenja strukturu mala.

$\kappa$ -Minkowski dobro je istražen u okviru nekomutativne geometrije, teorije polja, baždarnih teorija i primjene na fiziku crnih rupa [51] [52] [53] [54] [55] [56] [57] [58] [59] [60].

## Zaključak

Kroz prethodna tri poglavlja vidjeli smo kako Hopfove algebre imaju širok spektar uporabe u raznim fizikalnim teorijama.

U drugom poglavlju primijenili smo ih na višečestični sustav anyona i Moyalov nekomutativni prostor. Tamo je u prvom dijelu ključnu ulogu igrala R-matrica koja poopćava čestičnu statistiku na sustave koji nisu fermionski/bozonski, već imaju kompleksnije ponašanje s obzirom na zamjenu čestica. Moyalov prostor je također imao netrivialnu R-matricu koja u sebi sadrži operator impulsa. Ova kvazitriangularna struktura se u teoriji polja na Moyalovom prostoru pojavljuje u obliku faza ovisnih o impulsu kao dodatnih faktora u vrhovima Feynmanovih dijagrama i odgovorna je za UV/IR miješanje. Bitan alat koji nam je omogućio da dođemo do Moyalovog prostora je Drinfeldovo zakretanje i *star*-produkt koji iz njega proizlazi.

U obliku ukorijenjenih stabala, Hopfove algebre kriju se i u kombinatornoj strukturi renormalizacije Feynmanovih dijagrama. Upoznali smo i BPHZ proceduru koja se često koristi neovisno o Hopfovima algebrama.

U četvrtom poglavlju ponovno se vraćamo na nekomutativni prostor,  $\kappa$ -Minkowski. On je kovarijantan s obzirom na  $\kappa$ -Poincare algebru za koju smo pokazali da je *bicross-product* deformirane algebre translacija i Lorentzove algebre. Ovo je Hopf-algebarska verzija semidirektnog produkta koji standardnu Poincareovu algebru rastavlja na algebru translacija i Lorentzovu algebru.

Možemo zaključiti da su Hopfove algebre fundamentalni alat u teorijama na nekomutativnim prostorima. Oni danas čine aktivno istraživačko područje fizike na Planckovoj skali i korak su prema razumijevanju kvantne gravitacije.

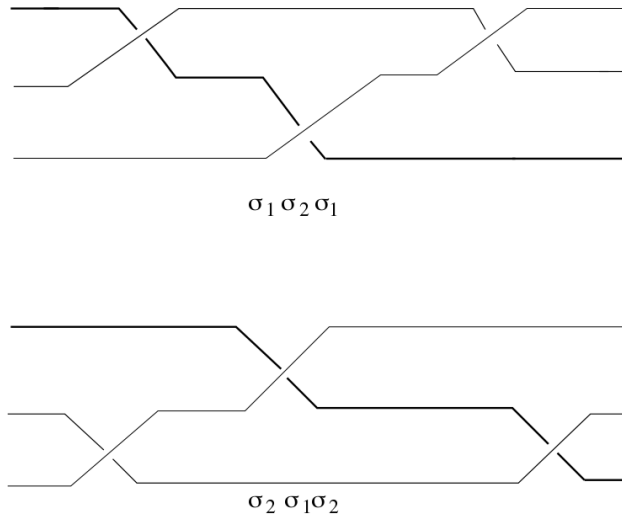
# Dodaci

## Dodatak A Simetrična grupa i grupa pletenica

Dajemo kratki pregled simetrične grupe, uglavnom iz [61]. Simetrična grupa  $n$ -tog reda  $S_n$  je grupa svih permutacija  $n$  objekata. Tako  $S_2$  ima dva,  $S_3$  šest, a općenito  $S_n$  ima  $n!$  elemenata.

Grupu  $S_n$  možemo apstraktno predstaviti pomoću  $n - 1$  generatora  $\sigma_i$  i identitete  $e$ . Element  $\sigma_i$  permutira  $i$ -tu i  $i + 1$ . objekt. Generatori zadovoljavaju relaciju

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \quad (\text{A.1})$$



Slika A.1: Vizualizacija relacije  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ . Obje operacije reduciraju se na zamjenu prvog i trećeg objekta. [62]

Grafički prikaz ove tvrdnje je na slici A.1. Dvostruka zamjena dva ista elementa je identiteta:

$$\sigma_i^2 = e. \quad (\text{A.2})$$

Zamjena prvog i drugog elementa pa zatim trećeg i četvrtog ( $\sigma_3 \sigma_1$ ) je identična zamjeni trećeg i četvrtog pa zatim prvog i drugog elementa ( $\sigma_1 \sigma_3$ ). Općenito,

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2. \quad (\text{A.3})$$

Jednadžbe (A.1), (A.2) i (A.3) su pravila za generatore simetrične grupe. Skalarna unitarna reprezentacija grupe  $S_n$  generatoru  $\sigma_j$  pridružuje broj  $e^{i\theta_j}$ .

Pravilo (A.3) tada je trivijalno zadovoljeno. Pravilo (A.2) vodi na

$$\theta_j = \theta.$$

Pravilo (A.2) implicira

$$\theta = 0 \text{ ili } \pi \text{ mod } 2\pi.$$

Neka je  $\alpha \in S_n$ . Postoje samo dvije skalarne unitarne reprezentacije:

$$D^1(\alpha) = +1 \text{ za sve } \alpha,$$

$$D^2(\alpha) = \text{sgn}(\alpha),$$

gdje je  $\text{sgn}(\alpha)$  parnost permutacije koja je dana homomorfizmom  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{1, -1\}$ . Neparne permutacije su one koje imaju neparan broj generatora kad se faktoriziraju na najmanji mogući produkt  $\sigma_i$ .

Izostavljanjem zahtjeva (A.2) dobivamo grupu pletenica (eng. braid group). Njene skalarne unitarne reprezentacije su dane s

$$D(\sigma_j) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Grupnu pletenica koja permutira  $n$  objekata označavamo s  $B_n$ . Izostavljanjem (A.2) dopuštamo da dvostruka zamjena neka dva objekta ne bude nužno identiteta što vodi na drugačija svojstva u odnosu na  $S_n$ .

## Literatura

- [1] Andruskiewitsch, N.; Santos, W. F. The beginnings of the theory of Hopf algebras. // *Acta applicandae mathematicae*. Vol. 108, 1 (2009), str. 3–17.
- [2] Balachandran, A. P.; Jo, S.-G.; Marmo, G. *Group Theory and Hopf Algebras: Lectures for Physicists*. World Scientific, 2010.
- [3] Szabo, R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces. // *Physics Reports*. Vol. 378, 4 (2003), str. 207–299.
- [4] Kreimer, D. On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories. // arXiv preprint q-alg/9707029.
- [5] Connes, A.; Kreimer, D. Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem i: The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem. // *Communications in Mathematical Physics*. Vol. 210, 1 (2000), str. 249–273.
- [6] Amelino-Camelia, G.; Majid, S. Waves on noncommutative space-time and gamma-ray bursts. // *International Journal of Modern Physics A*. Vol. 15, 27 (2000), str. 4301–4323.
- [7] Duhr, C. Mathematical aspects of scattering amplitudes. *Journeys Through the Precision Frontier: Amplitudes for Colliders: TASI 2014 Proceedings of the 2014 Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics* World Scientific str. 419–476.
- [8] Duhr, C. Hopf algebras, coproducts and symbols: an application to Higgs boson amplitudes. // *Journal of High Energy Physics*. Vol. 2012, 8 (2012), str. 1–46.
- [9] Weinzierl, S. Hopf algebra structures in particle physics. // *The European Physical Journal C-Particles and Fields*. Vol. 33, 1 (2004), str. s871–s875.
- [10] Ballestreros, A.; Corsetti, M.; Ragnisco, O. N-dimensional classical integrable systems from Hopf algebras. // *Czechoslovak Journal of Physics*. Vol. 46, 12 (1996), str. 1153–1163.
- [11] Jimbo, M. *Yang-Baxter equation in integrable systems*. Vol. 10. World Scientific, 1990.
- [12] Doplicher, S.; Fredenhagen, K.; Roberts, J. E. Spacetime quantization induced by classical gravity. // *Physics Letters B*. Vol. 331, 1-2 (1994), str. 39–44.

- [13] Doplicher, S.; Fredenhagen, K.; Roberts, J. E. The quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields. // *Communications in Mathematical Physics*. Vol. 172, 1 (1995), str. 187–220.
- [14] Majid, S. *Foundations of quantum group theory*. Cambridge university press, 2000.
- [15] Klimyk, A.; Schmüdgen, K. *Quantum groups and their representations*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] Hopf, H. Über die topologie der gruppen-mannigfaltigkeiten und ihrer verallgemeinerungen. *Selecta Heinz Hopf Springer* str. 119–151.
- [17] Chase, S. U.; Sweedler, M. E. *Hopf algebras and galois theory*. Hopf Algebras and Galois Theory Springer str. 52–83.
- [18] Drinfeld, V. G. Quantum groups. // *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*. Vol. 155 (1986), str. 18–49.
- [19] Yafaev, A. *Group algebras*, 2021.
- [20] Laidlaw, M. G.; DeWitt, C. M. Feynman functional integrals for systems of indistinguishable particles. // *Physical Review D*. Vol. 3, 6 (1971), str. 1375.
- [21] Wilczek, F. Quantum mechanics of fractional-spin particles. // *Physical review letters*. Vol. 49, 14 (1982), str. 957.
- [22] Nakamura, J.; Liang, S.; Gardner, G. C. et al. Direct observation of anyonic braiding statistics. // *Nature Physics*. Vol. 16, 9 (2020), str. 931–936.
- [23] Nayak, C.; Simon, S. H.; Stern, A. et al. Non-abelian anyons and topological quantum computation. // *Reviews of Modern Physics*. Vol. 80, 3 (2008), str. 1083.
- [24] Aschieri, P.; Dimitrijević, M.; Meyer, F. et al. Noncommutative geometry and gravity. // *Classical and Quantum Gravity*. Vol. 23, 6 (2006), str. 1883.
- [25] Balachandran, A. P.; Ibrort, A.; Marmo, G. et al. Quantum fields on noncommutative spacetimes: theory and phenomenology. // *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*. Vol. 6 (2010), str. 052.
- [26] Chaichian, M.; Kulish, P. P.; Nishijima, K. et al. On a Lorentz-invariant interpretation of noncommutative space–time and its implications on noncommutative qft. // *Physics Letters B*. Vol. 604, 1-2 (2004), str. 98–102.



- [27] Guo, L. What is a Rota-Baxter algebra. // Notices of the AMS. Vol. 56, 11.
- [28] Derivations of smooth functions are vector fields, <https://ncatlab.org/nlab/show/derivations+of+smooth+functions+are+vector+fields>, .
- [29] Meljanac, S. Leibniz rules for enveloping algebras. Citeseer, 2007.
- [30] Balachandran, A.; Govindarajan, T.; Mangano, G. et al. Statistics and uv-ir mixing with twisted Poincaré invariance. // Physical Review D. Vol. 75, 4 (2007), str. 045009.
- [31] Meljanac, S.; Meljanac, D.; Mercati, F. et al. Noncommutative spaces and Poincaré symmetry. // Physics Letters B. Vol. 766 (2017), str. 181–185.
- [32] Lukierski, J.; Ruegg, H.; Nowicki, A. et al. q-deformation of Poincaré algebra. // Physics Letters B. Vol. 264, 3-4 (1991), str. 331–338.
- [33] Pinzul, A. UV/IR mixing as a twisted Poincaré anomaly. // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. Vol. 45, 7 (2012), str. 075401.
- [34] Minwalla, S.; Van Raamsdonk, M.; Seiberg, N. Noncommutative perturbative dynamics. // Journal of High Energy Physics. Vol. 2000, 02 (2000), str. 020.
- [35] Foissy, L. An introduction to Hopf algebras of trees. // preprint.
- [36] Ratsimbarison, H. Feynman diagrams, Hopf algebras and renormalization. // arXiv preprint math-ph/0512012.
- [37] Connes, A.; Kreimer, D. Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry. Quantum field theory: perspective and prospective Springer str. 59–109.
- [38] Collins, J. C. Renormalization, 1987.
- [39] Srednicki, M. Quantum field theory. Cambridge University Press, 2007.
- [40] Ilakovac, A. Skripta iz teorije polja, 2021.
- [41] Brown, L. M. Renormalization: from Lorentz to Landau (and beyond). Springer Science & Business Media, 2012.
- [42] Ebrahimi-Fard, K.; Guo, L. Rota-baxter algebras in renormalization of perturbative quantum field theory. // arXiv preprint hep-th/0604116.
- [43] Zimmermann, W. Convergence of Bogoliubov's method of renormalization in momentum space. // Communications in Mathematical Physics. Vol. 210.

- [44] Kreimer, D. On overlapping divergences. // arXiv preprint hep-th/9810022.
- [45] Majid, S.; Heller, M.; Penrose, R. et al. On space and time. // On Space and Time.
- [46] Majid, S.; Ruegg, H. Bicrossproduct structure of  $\kappa$ -Poincaré group and non-commutative geometry. // Physics Letters B. Vol. 334, 3-4 (1994), str. 348–354.
- [47] Nowicki, A. Kappa-deformed phase space and uncertainty relations. // arXiv preprint math/9803064.
- [48] Timmermann, T. An invitation to quantum groups and duality: From Hopf algebras to multiplicative unitaries and beyond. Vol. 5. European Mathematical Society, 2008.
- [49] Heefer, S.; Gubitosi, G. Advancements on the Covariance of the  $\kappa$ -Poincaré Model and Relative Locality, 2018.
- [50] Kovačević, D.; Meljanac, S. Kappa-Minkowski spacetime, kappa-Poincaré Hopf algebra and realizations. // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. Vol. 45, 13 (2012), str. 135208.
- [51] Kupriyanov, V. G.; Kurkov, M.; Vitale, P.  $\kappa$ -Minkowski-deformation of u(1) gauge theory. // Journal of High Energy Physics. Vol. 2021, 1.
- [52] Lizzi, F.; Manfredonia, M.; Mercati, F. The momentum spaces of  $\kappa$ -Minkowski noncommutative spacetime. // Nuclear Physics B. Vol. 958 (2020), str. 115117.
- [53] The Majid-Ruegg model and the Planck scales Beggs, E.; Makki, R., , 1306.4518.
- [54] Mercati, F. Quantum  $\kappa$ -deformed differential geometry and field theory. // International Journal of Modern Physics D. Vol. 25, 05 (2016), str. 1650053.
- [55] Harikumar, E.; Jurić, T.; Meljanac, S. Electrodynamics on  $\kappa$ -Minkowski spacetime. // Physical Review D. Vol. 84, 8.
- [56] Jurić, T.; Poulain, T.; Wallet, J.-C. Vacuum energy and the cosmological constant problem in  $\kappa$ -Poincaré invariant field theories. // Physical Review D. Vol. 99, 4.
- [57] Gupta, K. S.; Harikumar, E.; Jurić, T. et al. Effects of noncommutativity on the black hole entropy. // Advances in High Energy Physics. Vol. 2014 (2014), str. 1–10.

- [58] Algebraic structures in  $\kappa$ -Poincaré invariant gauge theories Hersent, K.; Mathieu, P.; Wallet, J.-C., , 2110.10763.
- [59] Kosiński, P.; Lukierski, J.; Maślanka, P. Local d=4 field theory on  $\kappa$ -deformed Minkowski space. // Physical Review D. Vol. 62, 2.
- [60] Sitarz, A. Noncommutative differential calculus on the  $\kappa$ -Minkowski space. // Physics Letters B. Vol. 349, 1-2 (1995), str. 42–48.
- [61] Morandi, G. The role of topology in classical and quantum physics. Vol. 7. Springer Science & Business Media, 1992.
- [62] Wilczek, F. New kinds of quantum statistics. The Spin, Springer2009 str. 61–69.