

# Transportna svojstva tankog filma sa spinski diskriminiranim kvantnim točkama

---

**Biluš, Lovel**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:577446>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-13**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Lovel Biluš

Transportna svojstva tankog filma sa spinski  
diskriminiranim kvantnim točkama

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Lovel Biluš**

Diplomski rad

**Transportna svojstva tankog filma sa  
spinski diskriminiranim kvantnim  
točkama**

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Danko Radić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2021.

Očevoj mašti i maminoj snazi.

Jedan veliki beskrajni "hvala!" upućujem mom mentoru Danku Radiću na strpljenju, razumijevanju, podršci, te fizikalnoj i duhovnoj pomoći koja mi je trebala da napravim ovaj rad.

Izrada ovog rada poduprta je projektima HRZZ IP-2016-06-2289 i ZCI QuantiXLie - projekt KK.01.1.1.01.0004.

## Sažetak

U okviru ovog rada proučavat ćemo tunelirajući električni i termalni transport između spinski polariziranih elektroda među kojima se nalazi tanki film s distribucijom kvantnih točaka. Jednoelektronska stanja u kvantnoj točki spinski su diskriminirana te se njima odvija odgovarajući spinski polarizirani transport tuneliranjem elektrona među elektrodama pod utjecajem narinutog prednapona i/ili razlike temperatura. Problem transporta bit će formuliran u formalizmu tzv. "master equation" iz koje će biti izvedene kinetičke jednačbe za populaciju kvantne točke elektronom ovisno o učestalostima tuneliranja određenim zadanim parametrima sustava.

Ključne riječi: termo-električni prijenos, kvantna točka, tanki film, spintronika

# Transport properties of thin film with spin-discriminated quantum dots

## Abstract

In this thesis we study electronic and thermal transport between two metallic leads (one is spin-polarized) through a thin layer of quantum dots in an external magnetic field. Spin-polarized transport of electrons occurs via sequential tunneling through spin-discriminated quantum dots with the control of bias voltage and/or temperature difference between the leads. We model the problem in the formalism of "master equation", from which we derive kinetic equations for the dynamic population of the quantum dot with the electron. With the stationary solution, we obtain the current in the system, from which we analyse electronic and thermal transport, depending on the bias voltage and temperatures of the leads. We find the conditions under which we have spin-polarized and thermal transport, as well as the conditions under which we have transfer of energy from the colder to the hotter lead, that is, further cooling of the colder lead.

Keywords: thermoelectric transport, quantum dot, thin film, spintronics

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kvantne točke</b>	<b>3</b>
2.1	Sinteza, vrste i strukture kvantnih točaka . . . . .	3
2.2	Svojstva kvantnih točaka . . . . .	5
2.3	Tanki filmovi . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Elektronski transport kroz tanki film kvantnih točaka</b>	<b>7</b>
3.1	Model . . . . .	7
3.2	Elektronski transport u sustavu . . . . .	9
3.3	Analiza elektronskog transporta u sustavu . . . . .	13
3.3.1	Granični slučajevi . . . . .	13
3.3.2	Ovisnost struje o razlici temperatura - $I(\Delta T)$ . . . . .	17
3.3.3	Ovisnost struje o prednaponu - $I(V_b)$ . . . . .	19
3.3.4	Ovisnost struje o razlici temperatura i prednaponu - $I(\Delta T, V_b)$ . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Zaključak</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Metodički dio</b>	<b>24</b>
5.1	Milq pristup . . . . .	25
5.2	Alati zaključivanja i njihova primjena u pokusu prolaska elektrona kroz dvije pukotine . . . . .	26
5.2.1	Pravilo 1: Statističko ponašanje . . . . .	27
5.2.2	Pravilo 2: Interferencija i superpozicija pojedinačnih kvantnih stanja . . . . .	27
5.2.3	Pravilo 3: Postulat o mjerenju . . . . .	28
5.2.4	Pravilo 4: Komplementarnost . . . . .	29
5.3	Milq kurikulum . . . . .	29
5.3.1	Fotoni . . . . .	30
5.3.2	Elektroni . . . . .	35
5.3.3	Uvod u kvantno-mehanički formalizam . . . . .	39
5.4	Uspješnost Milq pristupa . . . . .	41



5.5	Milq pristup u hrvatskom kurikulumu . . . . .	44
	<b>Literatura</b>	<b>48</b>

# 1 Uvod

Čovječanstvo se iz davnih plemena praljudi razvilo u današnju modernu civilizaciju na temelju jednog principa prirode: pretvorbe energije. Gotovo sva najvažnija otkrića i izumi kroz povijest temelje se na tom principu, počevši od otkrića vatre, preko otkrića elektromagnetske indukcije, sve do današnjih mezoskopskih termoelektričnih uređaja kojih se dotičemo u ovom diplomskom radu. Štoviše, čak se i nastanak života iz nežive materije pripisuje upravo što efikasnijoj pretvorbi energije iz okoline, kroz organizam, u disipativnu energiju u obliku topline, po vodećoj hipotezi u abiogenezi [1].

U današnjem energetske gladnom svijetu, puno energije se pretvara u neiskoristive oblike, i to svakodnevno ravno "pred našim nosima", kao npr. konstantna toplina proizvedena od elektroničkih komponenti. Termoelektrični uređaji su korisni jer mogu dio te topline pretvoriti nazad u električnu energiju. Također, i samo hlađenje tih elektroničkih komponenti danas se u većini slučajeva odvija pasivno preko kontaktnog prijenosa topline na hladnjak, što ima svoje nedostatke. Takvi hladnjaci su puno veći od elektroničkih komponenti koje hlade i limitirani su količinom hlađenja koje mogu obaviti. Termoelektrični uređaji mogu biti puno manji i bolji hladnjaci od ovih tradicionalnih. Kroz ovo stoljeće, brojna teorijska i eksperimentalna istraživanja kvantnih točaka omogućila su velik napredak u primjeni i efikasnosti mezoskopskih termoelektričnih uređaja [2]. Primjena kvantnih točaka dovela je do dodatne kontrole elektronskog prijenosa u mezoskopskim uređajima pri sobnim temperaturama, prije svega zbog omogućenog kvantno-mehaničkog efekta kulonske blokade, čime je moguć istovremeni transport jednog po jednog elektrona između dvije elektrode. Nadalje, predviđeno je da su kvantne točke jako efikasni termoelektrični pretvarači zbog njihove mogućnosti da selektivno transportiraju samo termalno pobuđene elektrone u elektrodi [3]. To je (uz efekt spinske blokade) dovelo do razvoja i unaprijeđenja mnogih termoelektričnih i spintronskih uređaja, poput jednoelektronskog tranzistora, spinskog ventila, spinskog filtera, spinskih dioda i mnogih drugih [4–7]. Ako za elektrode koristimo feromagnetske metale, možemo dobiti dodatnu kontrolu elektronskog transporta u sustavu. Posloženi spinovi u feromagnetskom metalu utječu na transport elektrona između elektrode i kvantne točke, što rezultira i u akumulaciji spina na kvantnoj točki, osim samog naboja. Time, uz pomoć prednapona

na vodičima možemo kontrolirati spinsku polarizaciju struje [8, 9]. U ovakvim se uređajima najčešće ne koristi samo jedna kvantna točka, već se koristi tanki film sa puno kvantnih točaka poslaganih u dvodimenzionalnu strukturu, što ima praktičnu prednost (na kontakt je lakše nanijeti tanki film nego jednu pojedinu kvantnu točku) i daje veću moć termoelektričnim uređajima, zbog samog broja kvantnih točaka na kojima se može obavljati električni i termalni transport [10].

Cilj ovog rada je proučiti tunelirajući električni i termalni transport između spinski polariziranih elektroda među kojima se nalazi tanki film s distribucijom kvantnih točaka u vanjskom magnetskom polju. Problem ćemo formulirati u formalizmu tzv. "master equation" iz koje će biti izvedene kinetičke jednadžbe za populaciju kvantne točke elektronom ovisno o učestalostima tuneliranja određenim vanjskim prednaponom i razlici temperatura na elektrodama. Potom ćemo pronaći uvjete pod kojima imamo električni i termalni transport te uvjete pod kojima imamo hlađenje hladnijeg spremnika (elektrode).

## 2 Kvantne točke

Kvantne točke su otkrivene 1981. proučavajući rast i svojstva poluvodičkih mikrokristala u staklu [11]. Vidjelo se da se te nanometarske čestice po svojoj prirodi ne ponašaju kao dosadašnje čestice i molekule tih veličina, već su poprimale neka kvantno-mehanička svojstva koja su bila uočena samo kod puno manjih čestica i temperatura. Ipak, te su čestice bile dovoljno male i pod elektronskim mikroskopom izgledaju kao točke, iz čega je nastalo ime "kvantne točke". Dakle, kvantne točke su nanometarske poluvodičke ili metalne čestice koje imaju različita elektronska i optička svojstva od ostalih čestica i molekula tih veličina, prije svega one posjeduju kvantna svojstva, pa se zato nekad nazivaju "umjetnim atomima". Kvantne točke imaju određena, diskretna elektronska stanja baš kao i atomi, što je omogućilo primjenu i nova otkrića u gotovo svim prirodnim znanostima, najviše u fizici, kemiji, biologiji i medicini.

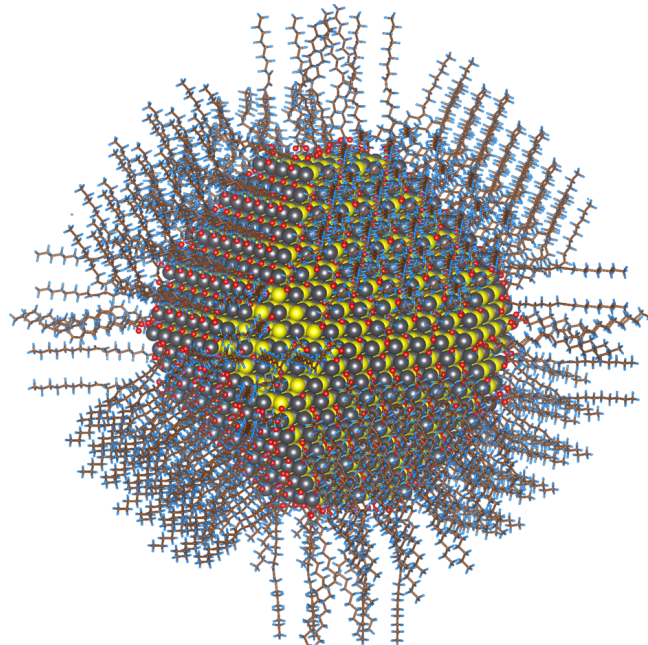
### 2.1 *Sinteza, vrste i strukture kvantnih točaka*

Danas postoje razne metode sintetiziranja kvantnih točaka poput tzv. "liquid-phase" metode, "vapor-phase epitaxial growth", "self-assembly", "electrical gating" i mnogih drugih [12]. "Vapor-phase" metode uglavnom uključuju sintezu kvantnih točaka pomoću plazme, gdje se pripremljeno otapalo gađa plazmom, pa se kemijskim reakcijama sintetiziraju kvantne točke [13]. Kvantne točke dobivene ovom metodom su uglavnom u obliku praška, nakon čega se mogu staviti u organsko otapalo ili vodu što dovodi do sjajne disperzije kvantnih točaka u sredstvu [14]. Današnje najčešće i najupotrebljenije metode stvaranja kvantnih točaka su "liquid-phase" metode radi njihovih relativno jednostavnih, jeftinih i često bezopasnih načina priprema, kao i jednostavnosti produkcije kvantnih točaka raznih željenih karakteristika [12].

Najčešća "liquid-phase" metoda za sintezu kvantnih točaka je razvijena još 1991. [15], a ona se bazira na injektiranju prekursora (pripremljenih u otopini) u prethodno zagrijanu organsku otopinu. Daljnim zagrijavanjem, ta mješavina se tada ne stvrdne u krutinu niti ostane skroz otopljena, već se u tekućini stvore koloidalni poluvodički nanokristali, što i jesu kvantne točke, te se zato ova metoda naziva "koloidalna sinteza". Na početku reakcije, prekursori se "raspadnu" i odvoje od svojih

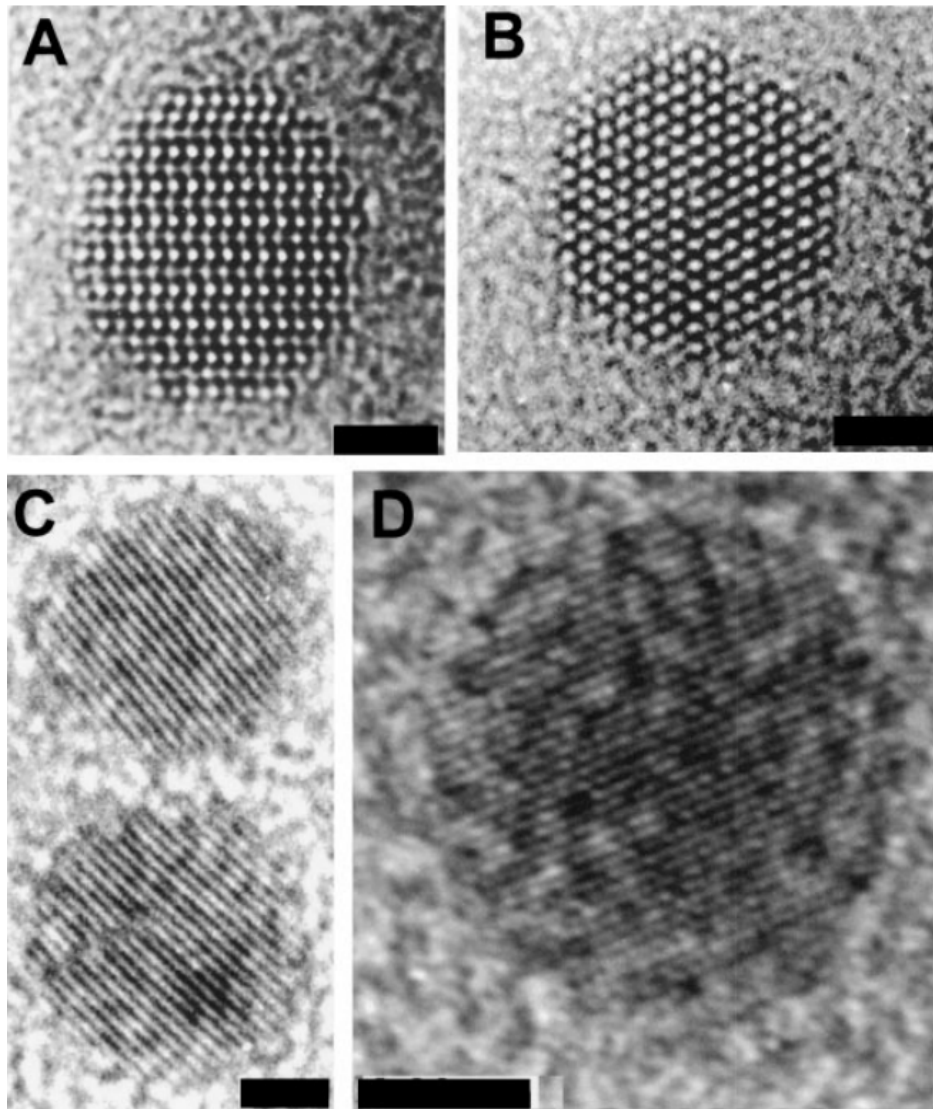
prvotnih otopina, nakon čega se stvore monomeri koji potom nukleiraju u kvantne točke [16]. Najčešće korišteni prekursori su Cd (kadmij), Se (selen), S (sumpor), Te (telur), Pb (olovo), In (indij), As (arsen) i P (fosfor), iz kojih se mogu dobiti CdSe, CdTe, PbS, PbSe, InP i InAs kvantne točke, kao i mnoge druge [12]. Otopine koje se obično koriste su razne mješavine akillfosfina ( $R_3P$ ), akillfosfin oksida ( $R_3PO$ ) i trioktilfosfin oksida (TOPO) jer one, između ostalog, imaju vrlo visoke točke vrelišta. Kontrolom korištenih tvari u sintezi, kao i njihovom koncentracijom, duljinom i temperaturom ( $\sim 100-300^\circ\text{C}$ ) zagrijavanja, možemo vrlo precizno utjecati na sastav i veličinu ( $\sim 1-10\text{nm}$ ) kvantnih točaka, što nam daje mogućnost da vrlo fino podesimo svojstva kvantnih točaka za razne potrebe [12, 16].

Kvantne točke su obično okruglog, loptastog oblika, te se sastoje od 100 do 100,000



Slika 2.1: Izračunata atomska struktura nanokristala (kvantne točke) promjera 5nm pasiviziranog oleatnim i hidroksilnim ligandima. Slika preuzeta iz [17]

atoma, ovisno o veličini, koja varira  $\sim 1-10\text{nm}$ . Strukturalno, najčešće ima centralnu jezgru koja može imati različite sastave (CdSe, CdTe, PbS, PbSe, InP,...), vanjsku ljusku (CdS, ZnS, CdSe, MgO, HgS...), te na površini uglavnom ima organske (npr. oleatne i hidroksilne) ligande, koji služe da pasiviziraju kvantnu točku, tj. da je stabiliziraju i neutraliziraju od ostalih kemijskih reakcija i očuvaju njenu strukturu [17]. Takva struktura se može vidjeti na slici (2.1), dok se na slici (2.2) mogu vidjeti TEM (Transmission electron microscop) slike nanokristalnih materijala.



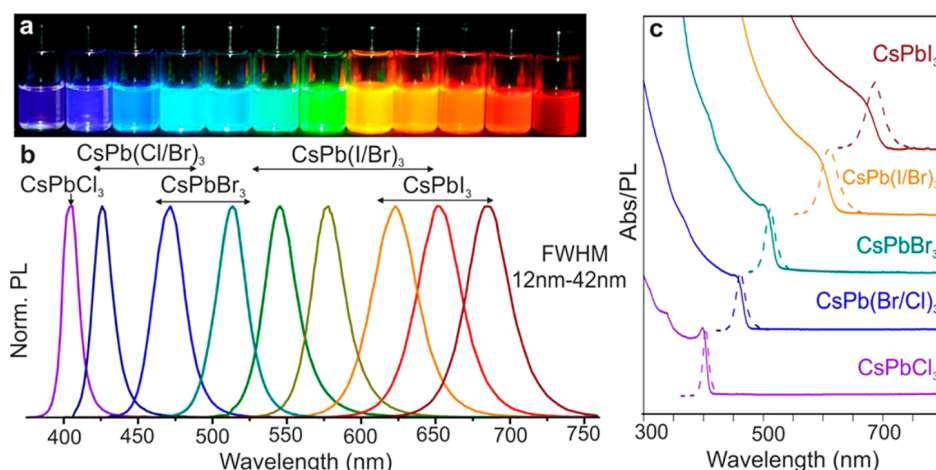
Slika 2.2: Kolekcija TEM slika visokih rezolucija nanokristalnih materijala. (A)  $\langle 100 \rangle$ -orijentirani CdSe (skala = 1,5 nm), (B)  $\langle 001 \rangle$ -orijentirani CdSe (skala = 1,5 nm), (C) CdTe (skala = 2 nm) i (D) Co (skala = 2,5 nm). Slike preuzete iz [16]

## 2.2 Svojstva kvantnih točkaka

Istraživanja su pokazala da valne funkcije elektrona u kvantnim točkama nalikuju valnim funkcijama elektrona u atomima što im i daje mnoga slična optička i električna svojstva [18], kao i mogućnosti za raznorazne nove interesantne efekte, poput npr. hibridizacije na sobnoj temperaturi, koja se postigla spajanjem više kvantnih točkaka u "umjetnu molekulu" [19]. S druge strane, pošto su kvantne točke načinjene od poluvodičkih nanočestica, one također poprimaju neka poluvodička svojstva, te kao takve pokazuju svojstva između tradicionalnih atoma (i molekula) i klasičnih poluvodiča [20]. Kvantne točke, kao i poluvodiči, imaju vodljivu i valentnu elektronsku vrpcu, te energijski procijep između njih, ali zbog malih nanometarskih dimenzija

i efekta kvantnog zarobljavanja, te vrpce nemaju kontinuum energijskih nivoa (kao kod klasičnih poluvodiča), nego imaju diskretne kvantizirane energijske nivoe (kao kod atoma i molekula).

Ako elektron iz valentne vrpce apsorbira foton dovoljno velike energije, on se pobudi u vodljivu vrpcu te iza sebe ostavi šupljinu s kojom može stvoriti eksiton. Ako se taj eksiton rekombinira (tj. elektron se vrati u osnovno stanje u valentnoj vrpici), oslobođena energija se može otpustiti u obliku fotona (fluorescencija). Tokom sinteze, veličina kvantne točke može se jako precizno kontrolirati, što utječe na veličinu energijskog procijepa, što pak utječe na energiju fotona dobivenih fluorescencijom i na električna svojstva kvantne točke. Manje kvantne točke (2-3 nm) emitiraju manje valne duljine (u spektru plave-zelene boje), dok veće kvantne točke (5-6 nm) emitiraju veće valne duljine (u spektru žute-crvene boje) [16]. Raznim veličinama i sastavima kvantnih točaka se može pokriti cijeli spektar od UV do infracrvene svjetlosti (slika 2.3).



Slika 2.3: Kvantne točke od koloidalnog perovskita  $\text{CsPbX}_3$  ( $X = \text{Cl}, \text{Br}, \text{I}$ ) pokazuju ovisnost energijskog procijepa o veličini i sastavu, pokrivajući cijeli vidljivi spektar uskom i intenzivnom emisijom: (a) koloidalne otopine kvantnih točaka u toluenu pod UV lampom ( $\lambda = 365 \text{ nm}$ ); (b) reprezentativni fluorescentni spektar ( $\lambda_{exc} = 400 \text{ nm}$  za sve osim  $\text{CsPbCl}_3$  uzorka gdje je  $\lambda_{exc} = 350 \text{ nm}$ ); (c) tipični apsorpcijski i fluorescentni spektar. Slike preuzete iz [12]

## 2.3 Tanki filmovi

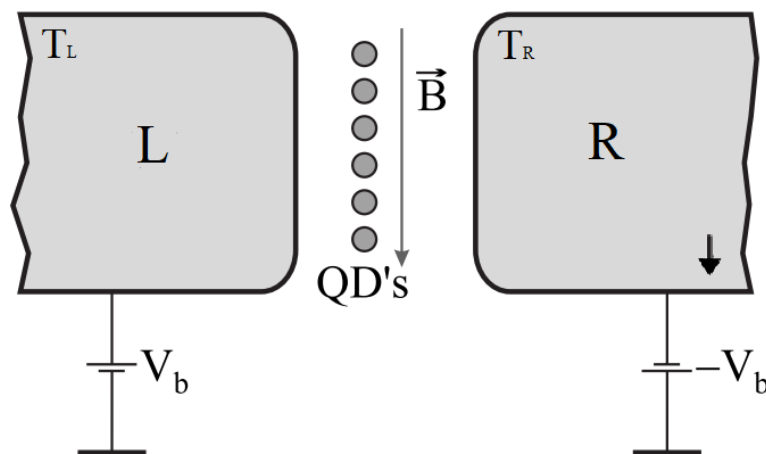
Tanki filmovi načinjeni od kvantnih točaka su učinili veliki napredak u termoelektričnim materijalima i uređajima tijekom ovog stoljeća i oni su danas predmet sve brojnijih istraživanja. Za razliku od klasičnih, velikih i krutih 3D termoelektričnih

materijala, tanki filmovi su dvodimenzionalnih struktura te jako malih (nanometarskih) dimenzija i dosta su lagani, što omogućuje primjenu u mikro-uređajima: mikro-hladnjaci, mikro-generatori struje, mikro-senzori,... Sa fleksibilnim podlogama možemo imati nosive uređaje i savitljive ekrane, dok prozirne tanke filmove, poput ZnO, možemo koristiti na staklu ili ekranu za pretvaranje otpadne toplinske energije u električnu [10]. Nadalje, tanki filmovi se mogu slagati jedan na drugi, sloj po sloj, i tako sa različitim materijalima postići još bolju termoelektričnu efikasnost. Takva struktura čini super-rešetku, i ona se može napraviti kao npr. tanki sloj kvantnih točaka stavljen u sendvič između druga dva sloja različitog sastava koji služe kao potencijalne barijere, tako da elektroni ne mogu proći kroz njih osim tuneliranjem, kao što je na primjer EuTe/PbTe super-rešetka [21, 22]. Mi ćemo teorijski razmatrati termoelektrični prijenos elektrona kroz jednu super-rešetku takve vrste.

### 3 Elektronski transport kroz tanki film kvantnih točaka

#### 3.1 Model

Razmatramo sustav načinjen od dvije metalne elektrode (L (left) i R (right)) između kojih je tanki sloj identičnih kvantnih točaka sa dva spinska stanja (slika 3.1). Lijeva



Slika 3.1: Skica promatranog sustava. Tanki sloj kvantnih točaka je postavljen između dvije metalne elektrode (L (left) i R (right)), od kojih je desna feromagnetni metal magnetiziran prema dolje (u smjeru vanjskog magnetskog polja  $\vec{B}$ ). Lijeva elektroda je na temperaturi  $T_L$ , dok je desna elektroda na temperaturi  $T_R$ . Na sustav je doveden prednapon  $2V_b$ . Slika je adaptirana iz [23].

elektroda je na temperaturi  $T_L$ , dok je desna na temperaturi  $T_R$ . Desna elektroda



je razmatrana kao feromagnetski metal, sa smjerom magnetizacije prema dolje. Na sustav je doveden prednapon  $2V_b$  i vanjsko magnetsko polje  $\vec{B}$  koje je u paralelnom smjeru magnetizacije feromagneta, tj. prema dolje. Pretpostavljamo da su sve kvantne točke jednako udaljene od elektroda te da je u tom prostoru potencijalna barijera, tako da elektroni koji prelaze između elektroda i kvantnih točaka mogu to učiniti samo tuneliranjem. Takav sustav je opisan hamiltonijanom

$$H = \sum_{i=L,R} H_i^{lead} + H^{QD} + \sum_{i=L,R} H_i^{tunnel}, \quad (3.1)$$

gdje djelomični hamiltonijani

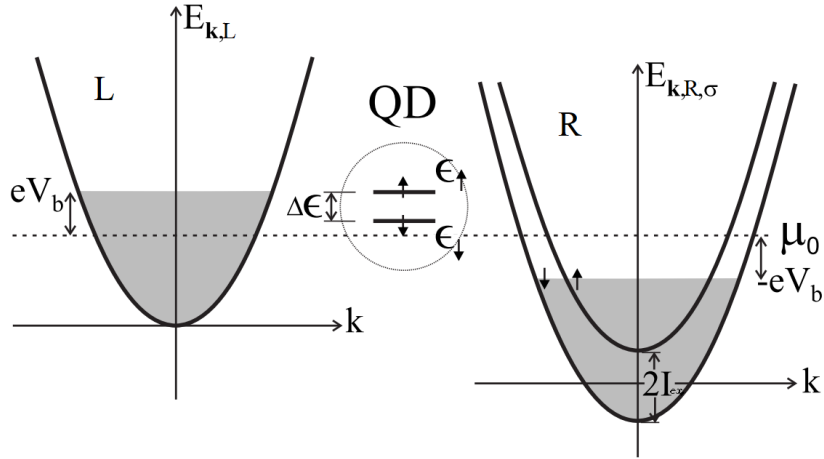
$$H_i^{lead} = \sum_{\vec{k},\sigma} E_{\vec{k},\sigma,i} a_{\vec{k},\sigma,i}^\dagger a_{\vec{k},\sigma,i}, \quad (3.2)$$

$$H^{QD} = \sum_{\sigma,n} \epsilon_\sigma c_{\sigma,n}^\dagger c_{\sigma,n} + U c_{\uparrow,n}^\dagger c_{\uparrow,n} c_{\downarrow,n}^\dagger c_{\downarrow,n}, \quad (3.3)$$

$$H_i^{tunnel} = \tau_i \sum_{\vec{k},\sigma} [a_{\vec{k},\sigma,i}^\dagger c_{\sigma,i} + H.c.] \quad (3.4)$$

opisuju elektrone u elektrodama ( $H_i^{lead}$ ), kvantnim točkama ( $H^{QD}$ ) i tunelirajuće vezanje između kvantnih točaka i elektroda ( $H_i^{tunnel}$ ). Ovdje je  $a_{\vec{k},\sigma,i}^\dagger$  operator stvaranja elektrona s valnim vektorom  $\vec{k}$  i spinom  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  u odgovarajućim elektrodama  $i = L, R$ .  $E_{\vec{k},\sigma,L} = \varepsilon(k)$  i  $E_{\vec{k},\sigma,R} = \varepsilon(k) - I_\sigma$ , gdje je  $\varepsilon(k)$  kinetička energija elektrona i  $I_\downarrow = -I_\uparrow \equiv I_{ex}$  je feromagnetska energija izmjene.  $c_{\sigma,n}^\dagger$  je operator stvaranja elektrona sa spinom  $\sigma$  i energijom  $\epsilon_\sigma$  u  $n$ -tnoj kvantnoj točki ( $n = 1, 2, \dots, N$ ).  $U$  je kulonska interakcijska energija koja dolazi od dvostrukog zauzeća energetskog nivoa kvantne točke od elektrona sa različitim spinovima [23].

Ovdje razmatramo samo slučaj kada su kvantne točke dovoljno udaljene jedna od druge tako da možemo zanemariti njihovu međusobnu kulonsku interakciju. Kemijski potencijal  $\mu_0$  ćemo postaviti kao "ishodište", tj. referentnu energiju prema kojoj mjerimo sve ostale energije (vidi sliku 3.2). Energije elektronskih stanja u kvantnoj točki su zeemanski rascijepljene na  $\epsilon_\uparrow$  "spin-up" i  $\epsilon_\downarrow$  "spin-down" stanje, a njihova razlika  $\Delta\epsilon = \epsilon_\uparrow - \epsilon_\downarrow$  se može kontrolirati vanjskim magnetskim poljem  $\vec{B}$  ( $\Delta\epsilon \approx 10^{-2} - 10^{-1}$  meV u magnetskim poljima jačine 0.1 – 1 T [24]). Pretpostavit ćemo da je  $\Delta\epsilon \gg k_B T$  ( $k_B$  je Boltzmanova konstanta), tj. da je magnituda rascijeplje-



Slika 3.2: Skica elektronskih energija u sustavu pokazuje nemagnetsku vrpcu lijeve elektrode (L) i vrpce za magnetiziranu desnu elektrodu (R) gdje  $\uparrow$  predstavlja "spin-up", a  $\downarrow$  "spin-down" vrpcu, koje su razdvojene za  $2I_{ex}$ . Mi razmatramo samo slučaj kada nema elektrona u  $\uparrow$  vrpci, tj. kada imamo 100% magnetizirani feromagnet. Dovedeni prednapon  $2V_b$  pomiče energiju elektrona u elektrodama za  $\pm eV_b$  od kemijskog potencijala  $\mu_0$ . "QD" predstavlja kvantnu točku sa dva spinski ovisna energijska nivoa,  $\epsilon_{\uparrow}$  i  $\epsilon_{\downarrow}$ , a  $\Delta\epsilon$  predstavlja razliku tih dviju energija. Slika je adaptirana iz [23].

nja puno veća od termalne razmazanosti Fermijeve plohe, kako bi imali kontroliranu, dovoljno veliku razmaknutost spinskih stanja. Vanjsko magnetsko polje  $\vec{B}$  je paralelno magnetizaciji u desnoj elektrodi tako da možemo zanemariti efekte precesije spina. Dodatnu kontrolu elektronskog prijenosa postizemo s prednaponom  $2V_b$  koji pomiče energiju elektrona, tj. njihov kemijski potencijal u elektrodama za  $\pm eV_b$  od kemijskog potencijala  $\mu_0$  ( $e$  je naboj elektrona).

### 3.2 Elektronski transport u sustavu

Za analizu elektronskog transporta u ovom sustavu koristit ćemo formalizam tzv. "master equation", iz kojeg ćemo izvesti kinetičke jednadžbe za populaciju kvantne točke elektronom uz pomoć tzv. "rate equations". Elektronski transport se u ovakvom sustavu obavlja preko tuneliranja elektrona između elektroda i kvantne točke, a frekvencija tog tuneliranja dana je s

$$\Gamma_i^\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} |\tau_i^2| g_i^\sigma, \quad (3.5)$$

gdje je  $\tau_i$  usrednjeni matrični element tunelirajućeg hamiltonijana (3.4) između elektrode indeksa  $i$  i kvantne točke, a  $g_i^\sigma$  je gustoća elektronskih stanja spina  $\sigma$  u elektrodi  $i$  na energiji  $\epsilon$ . Tada je frekvencija tuneliranja elektrona između lijeve elektrode i

kvantne točke označena s  $\Gamma_L$ , a frekvencija tuneliranja elektrona između desne elektrode i kvantne točke s  $\Gamma_R$ . Mi ćemo razmatrati simetričan slučaj gdje su kvantne točke jednako udaljene od lijeve i desne elektrode, tako da je  $\Gamma_L = \Gamma_R$ , dok su tipične frekvencije reda veličine 1 Ghz [23].

Dvostruko zauzeće kvantne točke nije moguće zbog efekta kulonske blokade, pa time imamo uvjet za populaciju kvantne točke:

$$P_0 + P_\uparrow + P_\downarrow = 1, \quad (3.6)$$

gdje je  $P_0$  vjerojatnost da je kvantna točka prazna,  $P_\uparrow$  je vjerojatnost da je na kvantnoj točki elektron spina  $\uparrow$ , a  $P_\downarrow$  je vjerojatnost da je na kvantnoj točki elektron spina  $\downarrow$ . Ovaj uvjet nam kaže da je kvantna točka u svakom trenutku ili prazna, ili ima jedan elektron u jednom od dva spinska stanja.

Pošto su elektrode na temperaturama  $T_L$  i  $T_R$ , kako bi saznali s kolikom vjerojatnošću imamo elektron na energiji kojom može tunelirati na kvantnu točku, koristimo Fermijevu funkciju raspodjele,

$$f_{i,\sigma}(\epsilon_\sigma - eV_b) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\epsilon_\sigma - eV_b}{k_B T_i}}}, \quad (3.7)$$

gdje je  $\epsilon_\sigma$  energija elektronskog stanja spina  $\sigma$  u kvantnoj točki, a  $T_i$  temperatura odgovarajućeg spremnika ( $i = L, R$ ). Npr.  $f_{L\uparrow}$  označava vjerojatnost da u lijevoj elektrodi imamo elektron energije  $\epsilon_\uparrow - eV_b$ , koji onda može tunelirati na kvantnu točku.

Sada možemo izgraditi dinamičke jednadžbe evolucije populacije  $P_\uparrow$  i  $P_\downarrow$  stanja u vremenu, tj.  $dP_{\uparrow,\downarrow}/dt$ . U stanje  $P_\uparrow$  mogu doći samo elektroni iz lijeve elektrode jer je desna elektroda 100% polarizirani feromagnet koji nema elektrona u spin  $\uparrow$  stanju. Taj će se proces odvijati učestalošću tuneliranja  $\Gamma_L$  i on je moguć samo ako imamo elektron na toj energiji ( $f_{L\uparrow}$ ) i ako je kvantna točka prazna ( $P_0$ ), stoga je taj proces opisan produktom  $\Gamma_L f_{L\uparrow} P_0$ . Proces vraćanja elektrona iz  $P_\uparrow$  stanja na lijevu elektrodu je moguć samo ako imamo slobodno mjesto te energije u elektrodi ( $1 - f_{L\uparrow}$ ) i ako imamo elektron u tom stanju na kvantnoj točki ( $P_\uparrow$ ), stoga je taj proces opisan s  $\Gamma_L (1 - f_{L\uparrow}) P_\uparrow$ . Tuneliranje elektrona spina  $\uparrow$  na desnu elektrodu isključujemo jer tamo nema dostupnih stanja, ona su previsoko u energiji. Jednadžba evolucije populacije

$P_{\uparrow}$  u vremenu onda glasi:

$$\frac{dP_{\uparrow}}{dt} = \Gamma_L f_{L\uparrow} P_0 - \Gamma_L (1 - f_{L\uparrow}) P_{\uparrow}. \quad (3.8)$$

Na isti način gradimo jednadžbu za  $dP_{\downarrow}/dt$ , samo što sada uključujemo i izmjenu elektrona sa desnim spremnikom jer tamo imamo elektrone u spin  $\downarrow$  stanju, kao i dostupna stanja,

$$\frac{dP_{\downarrow}}{dt} = \Gamma_L f_{L\downarrow} P_0 - \Gamma_L (1 - f_{L\downarrow}) P_{\downarrow} - \Gamma_R (1 - f_{R\downarrow}) P_{\downarrow} + \Gamma_R f_{R\downarrow} P_0. \quad (3.9)$$

Nakon uvrštavanja uvjeta iz jednadžbe (3.6) imamo

$$\frac{dP_{\uparrow}}{dt} = \Gamma_L f_{L\uparrow} (1 - P_{\uparrow} - P_{\downarrow}) - \Gamma_L (1 - f_{L\uparrow}) P_{\uparrow} \quad (3.10)$$

$$\frac{dP_{\downarrow}}{dt} = \Gamma_L f_{L\downarrow} (1 - P_{\uparrow} - P_{\downarrow}) - \Gamma_L (1 - f_{L\downarrow}) P_{\downarrow} - \Gamma_R (1 - f_{R\downarrow}) P_{\downarrow} + \Gamma_R f_{R\downarrow} (1 - P_{\uparrow} - P_{\downarrow}), \quad (3.11)$$

što nakon sređivanja daje

$$\frac{dP_{\uparrow}}{dt} = \Gamma_L f_{L\uparrow} (1 - P_{\downarrow}) - \Gamma_L P_{\uparrow} \quad (3.12)$$

$$\frac{dP_{\downarrow}}{dt} = \Gamma_L f_{L\downarrow} + \Gamma_R f_{R\downarrow} - (\Gamma_L f_{L\downarrow} + \Gamma_R f_{R\downarrow}) P_{\uparrow} - (\Gamma_L + \Gamma_R) P_{\downarrow}. \quad (3.13)$$

Za stacionarno rješenje trebamo primijeniti uvjet  $\dot{P}_{\uparrow,\downarrow} = 0$ , koji uz prethodne jednadžbe daje sustav jednadžbi

$$P_{\uparrow} + f_{L\uparrow} P_{\downarrow} = f_{L\uparrow} \quad (3.14)$$

$$(\Gamma_L f_{L\downarrow} + \Gamma_R f_{R\downarrow}) P_{\uparrow} + (\Gamma_L + \Gamma_R) P_{\downarrow} = \Gamma_L f_{L\downarrow} + \Gamma_R f_{R\downarrow}. \quad (3.15)$$

Ako jednadžbu (3.14) pomnožimo s  $(\Gamma_L + \Gamma_R)$ , a jednadžbu (3.15) pomnožimo s  $f_{L\uparrow}$  i oduzmemo ih, dobijemo

$$(\Gamma_L f_{L\uparrow} f_{L\downarrow} + \Gamma_R f_{L\uparrow} f_{R\downarrow} - \Gamma_L - \Gamma_R) P_{\uparrow} = \Gamma_L f_{L\uparrow} f_{L\downarrow} + \Gamma_R f_{L\uparrow} f_{R\downarrow} - \Gamma_L f_{L\uparrow} - \Gamma_R f_{L\uparrow}, \quad (3.16)$$

iz čega nakon sređivanja i uz pomoć jednadžbi (3.14 i 3.15) dobijemo stacionarna rješenja za populaciju stanja kvantne točke elektronom ( $P_{\uparrow,\downarrow}^{(stac)}$ ), koja su dana s

$$P_{\uparrow}^{(stac)} = f_{L\uparrow} \frac{\Gamma_L(1 - f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{R\downarrow})}{\Gamma_L(1 - f_{L\uparrow}f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{L\uparrow}f_{R\downarrow})} \quad (3.17)$$

$$P_{\downarrow}^{(stac)} = (1 - f_{L\uparrow}) \frac{\Gamma_L f_{L\downarrow} + \Gamma_R f_{R\downarrow}}{\Gamma_L(1 - f_{L\uparrow}f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{L\uparrow}f_{R\downarrow})}. \quad (3.18)$$

Ukupna struja kroz sustav je dana s izrazom

$$I_{UK} = q\dot{P}, \quad (3.19)$$

gdje je  $q$  naboj. Ukupna struja se sastoji od lijeve ( $I_L = q\dot{P}_L$ ) i desne ( $I_R = q\dot{P}_R$ ) struje. Dakle, da bi saznali struje sa obadvije strane, moramo postaviti "rate equations" za prijenos elektrona na lijevoj i desnoj strani sustava, koje pomnožene s nabojem daju struju:

$$I_L = q\Gamma_L[P_0 f_{L\uparrow} - P_{\uparrow}(1 - f_{L\uparrow}) + P_0 f_{L\downarrow} - P_{\downarrow}(1 - f_{L\downarrow})] \quad (3.20)$$

$$I_R = q\Gamma_R[P_{\downarrow}(1 - f_{R\downarrow}) - P_0 f_{R\downarrow}]. \quad (3.21)$$

Primjenom uvjeta  $P_{\uparrow} + P_{\downarrow} + P_0 = 1$  iz jednadžbe (3.6), izrazi se svedu na

$$I_L = q\Gamma_L[f_{L\uparrow} + f_{L\downarrow} - P_{\uparrow}(1 + f_{L\downarrow}) - P_{\downarrow}(1 + f_{L\uparrow})] \quad (3.22)$$

$$I_R = q\Gamma_R[P_{\downarrow} - f_{R\downarrow}(1 - P_{\uparrow})]. \quad (3.23)$$

Da bi dobili stacionarnu struju  $I_{L,R}^{(stac)}$ , trebamo koristiti stacionarna rješenja  $P_{\uparrow}^{(stac)}$  i  $P_{\downarrow}^{(stac)}$  iz jednadžba (3.17 i 3.17) koje ubacimo u gornje jednadžbe:

$$I_L^{(stac)} = q\Gamma_L[f_{L\uparrow} + f_{L\downarrow} - f_{L\uparrow}(1 + f_{L\downarrow}) \frac{\Gamma_L(1 - f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{R\downarrow})}{\Gamma_L(1 - f_{L\uparrow}f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{L\uparrow}f_{R\downarrow})} - (1 + f_{L\uparrow})(1 - f_{L\uparrow}) \frac{\Gamma_L f_{L\downarrow} + \Gamma_R f_{R\downarrow}}{\Gamma_L(1 - f_{L\uparrow}f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{L\uparrow}f_{R\downarrow})}] \quad (3.24)$$

$$I_R^{(stac)} = q\Gamma_R[(1 - f_{L\uparrow}) \frac{\Gamma_L f_{L\downarrow} + \Gamma_R f_{R\downarrow}}{\Gamma_L(1 - f_{L\uparrow}f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{L\uparrow}f_{R\downarrow})} - f_{R\downarrow}(1 - (f_{L\uparrow} \frac{\Gamma_L(1 - f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{R\downarrow})}{\Gamma_L(1 - f_{L\uparrow}f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{L\uparrow}f_{R\downarrow})})]), \quad (3.25)$$

što nakon sređivanja dovede do

$$I_L^{(stac)} = q\Gamma_L\Gamma_R \frac{(1 - f_{L\uparrow})(f_{L\downarrow} - f_{R\downarrow})}{\Gamma_L(1 - f_{L\uparrow}f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{L\uparrow}f_{R\downarrow})} \quad (3.26)$$

$$I_R^{(stac)} = q\Gamma_L\Gamma_R \frac{(1 - f_{L\uparrow})(f_{L\downarrow} - f_{R\downarrow})}{\Gamma_L(1 - f_{L\uparrow}f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{L\uparrow}f_{R\downarrow})}. \quad (3.27)$$

Uočimo da smo dobili jednaku lijevu i desnu stacionarnu struju što i nije tako čudno ako se sjetimo da postoji zakon očuvanja količine naboja. Ukupna stacionarna struja kroz sustav je dana s  $I^{(stac)} = \frac{1}{2}I_L^{(stac)} + \frac{1}{2}I_R^{(stac)}$ , a nju ćemo radi jednostavnosti označavati samo sa  $I$ . Sada imamo konačan izraz za ukupnu stacionarnu struju kroz sustav:

$$I = q\Gamma_L\Gamma_R \frac{(1 - f_{L\uparrow})(f_{L\downarrow} - f_{R\downarrow})}{\Gamma_L(1 - f_{L\uparrow}f_{L\downarrow}) + \Gamma_R(1 - f_{L\uparrow}f_{R\downarrow})}. \quad (3.28)$$

### 3.3 Analiza elektronskog transporta u sustavu

Sada kada imamo izraz za struju u sustavu, možemo nešto reći o termoelektričnom prijenosu između elektroda, tj. kako i pod kojim uvjetima će se odvijati električni i termalni prijenos, ovisno o razlici temperatura elektroda  $\Delta T = T_L - T_R$  i vanjskom prednaponu  $V_b$ . Koristit ćemo Fermijevu raspodjelu (jednadžba (3.7)) koja nam daje vjerojatnost da u elektrodi imamo elektron energije  $\epsilon_\sigma - eV_b$  koji može tunelirati na odgovarajuće stanje u kvantnoj točki, što nam onda skupa sa jednadžbom (3.28) daje struju koju imamo u sustavu, pri određenoj temperaturi  $T_0$  i razlici temperatura elektroda  $\Delta T$ .

Ako elektron tunelira iz jedne elektrode na kvantnu točku, te potom sa kvantne točke tunelira na drugu elektrodu, dešava se elektronski prijenos i imamo neku struju, kao i prijenos termalne energije. Ako je pak taj elektron došao iz hladnije u topliju elektrodu, u tom trenutku imamo zagrijavanje toplije elektrode (kao i hlađenje hladnije elektrode), tj. prijenos energije iz hladnije u topliju elektrodu. Kako bi otkrili kada se to događa, moramo pomno razmotriti ovisnost struje o razlici temperatura  $\Delta T$  i prednaponu  $V_b$ .

#### 3.3.1 Granični slučajevi

Da bi dobili jasniji uvid u ponašanje sustava pri raznim uvjetima, prvo ćemo razmotriti kakva je struja u graničnim slučajevima.

$$1) T_L = T_R, (V_b = 0)$$

Ako imamo jednake temperature elektroda, Fermijeva raspodjela je jednaka za lijevu i desnu elektrodu, što znači da je  $f_{L\downarrow} = f_{R\downarrow}$ . Tada je član  $(f_{L\downarrow} - f_{R\downarrow})$  u jednadžbi (3.28) jednak nuli i imamo  $I = 0$ , što nam kaže da tada nemamo struju u sustavu.

$$2) T_L > T_R, (V_b = 0)$$

Ako je temperatura lijeve elektrode veća nego temperatura desne elektrode, onda je  $f_{L\downarrow} > f_{R\downarrow}$  jer se energija  $\epsilon_{\downarrow}$  nalazi iznad Fermijeve energije. Tada je  $(f_{L\downarrow} - f_{R\downarrow}) > 0$ , dok su svi ostali članovi u jednadžbi (3.28) također pozitivni jer su vrijednosti Fermijevih funkcija izračunatih u  $f_{i,\sigma}$  uvijek u intervalu  $0 < f_{i,\sigma} < 1$  za temperature iznad apsolutne nule. Ako gledamo struju elektrona (što ćemo raditi i u svim ostalim graničnim slučajevima), u jednadžbi (3.28) možemo uzeti apsolutnu vrijednost faktora  $q$ , te tada imamo da je  $I > 0$ , što nam kaže da elektroni idu iz lijeve toplije elektrode u desnu hladniju elektrodu.

$$3) T_L < T_R, (V_b = 0)$$

U suprotnoj situaciji gdje je temperatura lijeve elektrode manja nego temperatura desne elektrode, imamo  $f_{L\downarrow} < f_{R\downarrow}$ . Tada je  $(f_{L\downarrow} - f_{R\downarrow}) < 0$ , što nam daje  $I < 0$ . Elektroni idu iz desne toplije elektrode u lijevu hladniju elektrodu. Iznos struje je isti kao i u prethodnom slučaju, samo je smjer suprotan.

$$4) T_L \neq 0, T_R = 0, (V_b = 0)$$

U ovom slučaju imamo  $f_{L\downarrow}, f_{L\uparrow} \neq 0$  i  $f_{R\downarrow}, f_{R\uparrow} = 0$ . Tada se jednadžba (3.28) svede na

$$I = q\Gamma_L\Gamma_R \frac{f_{L\downarrow}(1 - f_{L\uparrow})}{\Gamma_L(1 - f_{L\uparrow}f_{L\downarrow}) + \Gamma_R}, \quad (3.29)$$

gdje su svi članovi pozitivni i imamo  $I > 0$ , što je sličan rezultat kao i u drugom slučaju.

$$5) T_L = 0, T_R \neq 0, (V_b = 0)$$

U ovom slučaju imamo  $f_{L\downarrow}, f_{L\uparrow} = 0$  i  $f_{R\downarrow}, f_{R\uparrow} \neq 0$ . Tada se jednadžba (3.28) svede na

$$I = -f_{R\downarrow}q \frac{\Gamma_L\Gamma_R}{\Gamma_L + \Gamma_R}, \quad (3.30)$$

što znači da ćemo imati  $I < 0$ , kao i u trećem slučaju. Za simetričan slučaj dok imamo  $\Gamma_L = \Gamma_R$ , ova jednadžba se može pojednostaviti:

$$I = -f_{R\downarrow}q \frac{\Gamma_L \Gamma_L}{\Gamma_L + \Gamma_L} = -\frac{1}{2}\Gamma_L q f_{R\downarrow}. \quad (3.31)$$

6)  $V_{b,L} \gg 0, V_{b,R} = 0$

U ovom slučaju dovedemo veliki prednapon na lijevu elektrodu, dok desna elektroda ostaje na prednaponu  $V_{b,R} = 0$ . Sada je  $f_{L\downarrow}, f_{L\uparrow} = 1$ , što znači da je član  $(1 - f_{L\uparrow})$  u jednadžbi (3.28) jednak nuli, te u ovom slučaju nemamo struju u sustavu, tj.  $I = 0$ .

7)  $V_{b,L} \ll 0, V_{b,R} = 0$

U ovom slučaju dovedemo veliki negativni prednapon na lijevu elektrodu, dok desna elektroda ostaje na prednaponu  $V_{b,R} = 0$ . Sada je  $f_{L\downarrow}, f_{L\uparrow} = 0$ , što je isto kao i u petom graničnom slučaju. Struja se svede na jednadžbu (3.30) i u ovom slučaju ćemo imati  $I < 0$ .

8)  $V_b \gg 0$

U ovom slučaju dovodimo veliki prednapon tako da podižemo energiju elektrona u lijevoj elektrodi, a u desnoj elektrodi puno spuštamo energiju elektrona. Tada imamo  $f_{L\downarrow}, f_{L\uparrow} = 1$  i  $f_{R\downarrow}, f_{R\uparrow} \neq 0$ , što znači da je član  $(1 - f_{L\uparrow})$  u jednadžbi (3.28) jednak nuli, te u ovom slučaju nemamo struju u sustavu, tj.  $I = 0$ .

9)  $V_b \ll 0$

U ovom slučaju dovodimo veliki negativni prednapon tako da podižemo energiju elektrona u desnoj elektrodi, a u lijevoj elektrodi puno spuštamo energiju elektrona. Tada imamo  $f_{L\downarrow}, f_{L\uparrow} \neq 0$  i  $f_{R\downarrow}, f_{R\uparrow} = 1$ , te se jednadžba (3.28) svodi na:

$$I = -q \frac{\Gamma_L \Gamma_R}{\Gamma_L + \Gamma_R}. \quad (3.32)$$

Ako imamo simetričan slučaj gdje je  $\Gamma_L = \Gamma_R$ , ova jednadžba postaje:

$$I = -q \frac{\Gamma_L \Gamma_L}{\Gamma_L + \Gamma_L} = -\frac{1}{2}\Gamma_L q, \quad (3.33)$$



gdje vidimo da će struja biti negativna ( $I < 0$ ) s konstantnim iznosom neovisno o temperaturama elektroda.

$$10) \mathbf{0} < \mathbf{V}_b < \epsilon_{\downarrow}/e, (T_{L,R} = 0)$$

Sada promatramo područje gdje je prednapon takav da dovede Fermijevu energiju lijeve elektrode u područje između kemijskog potencijala  $\mu_0$  i energije spin  $\downarrow$  stanja u kvantnoj točki,  $\epsilon_{\downarrow}$ . U ovom slučaju su  $f_{L\downarrow}, f_{L\uparrow}, f_{R\downarrow}, f_{R\uparrow} = 0$ , te član  $(f_{L\downarrow} - f_{R\downarrow})$  u jednadžbi (3.28) izčezava, što nam daje struju  $I = 0$ .

$$11) \epsilon_{\downarrow}/e < \mathbf{V}_b < \epsilon_{\uparrow}/e, (T_{L,R} = 0)$$

U ovom slučaju dovodimo prednapon tako da Fermijeva energija lijeve elektrode bude između energije dva stanja u kvantnoj točki,  $\epsilon_{\downarrow}$  i  $\epsilon_{\uparrow}$ . Za ovaj slučaj imamo  $f_{L\uparrow}, f_{R\downarrow}, f_{R\uparrow} = 0$  i  $f_{L\downarrow} = 1$ , te koristimo jednadžbu (3.28) kako bi dobili struju u sustavu (uz simetričan slučaj  $\Gamma_L = \Gamma_R$ ):

$$I = \frac{1}{2}\Gamma_L q. \quad (3.34)$$

$$12) -\epsilon_{\downarrow}/e < \mathbf{V}_b < \mathbf{0}, (T_{L,R} = 0)$$

Sada gledamo suprotan slučaj; promatramo područje gdje je prednapon takav da dovede Fermijevu energiju desne elektrode u područje između kemijskog potencijala  $\mu_0$  i energije spin  $\downarrow$  stanja u kvantnoj točki,  $\epsilon_{\downarrow}$ . U ovom slučaju ponovno imamo  $f_{L\downarrow}, f_{L\uparrow}, f_{R\downarrow}, f_{R\uparrow} = 0$ , te član  $(f_{L\downarrow} - f_{R\downarrow})$  u jednadžbi (3.28) izčezava, što nam daje struju  $I = 0$ .

$$13) -\epsilon_{\uparrow}/e < \mathbf{V}_b < -\epsilon_{\downarrow}/e, (T_{L,R} = 0)$$

U ovom slučaju dovodimo prednapon tako da Fermijeva energija desne elektrode bude između energije dva stanja u kvantnoj točki,  $\epsilon_{\downarrow}$  i  $\epsilon_{\uparrow}$ . Za ovaj slučaj imamo  $f_{L\downarrow}, f_{L\uparrow}, f_{R\uparrow} = 0$  i  $f_{R\downarrow} = 1$ , te koristimo jednadžbu (3.28) čime dobivamo struju (za simetričan slučaj  $\Gamma_L = \Gamma_R$ ):

$$I = -\frac{1}{2}\Gamma_L q. \quad (3.35)$$

### 3.3.2 Ovisnost struje o razlici temperatura - $I(\Delta T)$

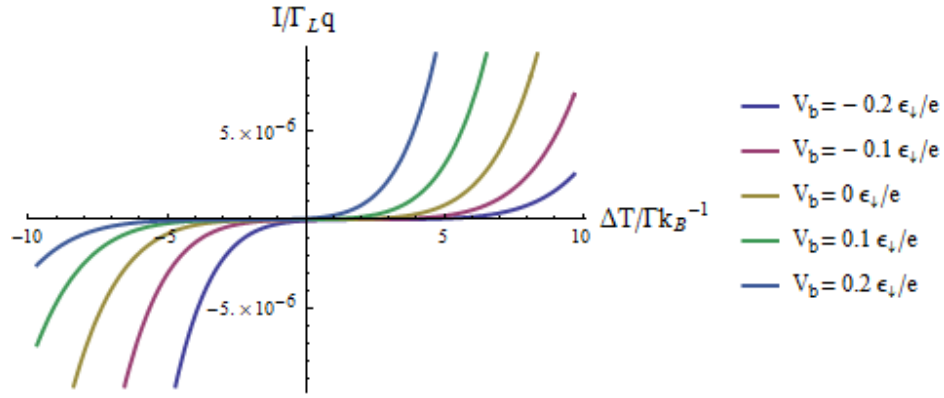
Za detaljniju analizu sustava, u našem modelu koristimo  $\epsilon_{\uparrow} = 2\epsilon_{\downarrow}$ , tako da je  $\Delta\epsilon = \epsilon_{\uparrow} - \epsilon_{\downarrow} = \epsilon_{\downarrow}$ . Također, uzimamo  $k_B T_0 / \Delta\epsilon = 0.05$ , tako da je temperatura dovoljno mala da imamo značajnu distinkciju elektronskih stanja u kvantnoj točki. Radi lakšeg razumijevanja, opet ćemo promatrati struju elektrona, tako da npr. pozitivna struja znači da elektroni idu iz lijeve u desnu elektrodu. Za sve numeričke izračune i grafove koristimo računalni program *Mathematica*.

Promotrimo prvo kako sustav reagira na različite temperature elektroda. Da bi vidjeli kako temperatura utječe na struju, moramo prednapon držati konstantnim dok mijenjamo razliku temperatura  $\Delta T = T_L - T_R$ . Radi jednostavnosti, uzimamo simetričan slučaj gdje je  $T_L = T_0 + \frac{\Delta T}{2}$  i  $T_R = T_0 - \frac{\Delta T}{2}$ . Ta ovisnost je prikazana na slici (3.3), za razne konstantne prednapone. Dok nema prednapona, tj. dok je  $V_b = 0$ , vidimo da se sustav ponaša relativno očekivano. Ako su elektrode na istoj temperaturi ( $\Delta T = 0$ ), nema struje i sustav miruje.

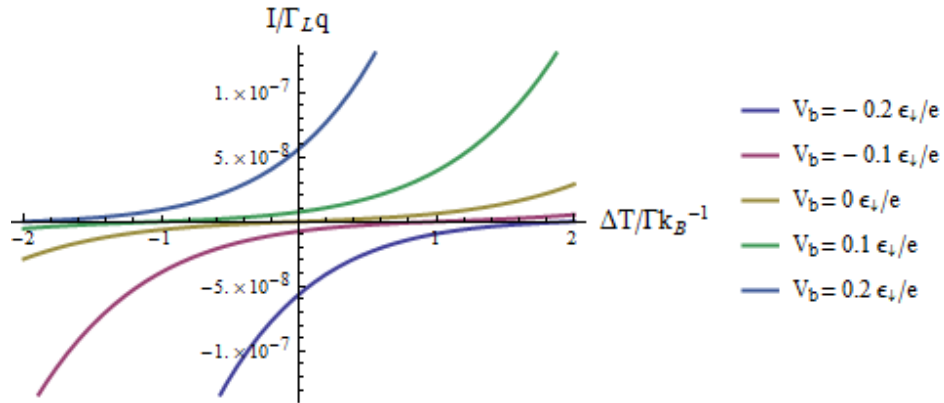
Za dovoljno male prednapone ( $V_b < \epsilon_{\downarrow}/e$ ) koji Fermijevu energiju lijeve elektrode podignu između kemijskog potencijala  $\mu_0$  i energije stanja spina  $\downarrow$  u kvantnoj točki  $\epsilon_{\downarrow}$ , vidimo da kako se lijeva elektroda zagrijava, struja raste, i obratno. Pozitivna struja u ovom sustavu znači da imamo tok elektrona iz lijeve u desnu elektrodu. To nam govori da ako prednapon držimo konstantnim, zagrijavanjem jedne elektrode ćemo stvoriti elektronski transport iz toplije prema hladnijoj elektrodi. Ovaj efekt se događa zato što u toplijoj elektrodi imamo više elektrona na energiji  $\epsilon_{\downarrow} - eV_b$  koji mogu tunelirati na kvantnu točku nego u hladnijoj elektrodi, što diktira Fermijeva funkcija raspodjele (jednadžba (3.7)).  $I(\Delta T)$  karakteristika je dosta slična za ostale prednapone;  $V_b$  samo "pomaže" ili "odmaže" već postojećoj struji koja je tu zbog razlika temperatura te je povećava ili smanjuje. Vidimo da npr. za mali pozitivni prednapon pri  $\Delta T$  imamo pozitivnu struju, dok za negativni prednapon imamo negativnu struju, slično kao i u normalnim strujnim krugovima.

Interesantna pojava se javlja dok imamo  $V_b = \epsilon_{\downarrow}/e$ . Tada Fermijeva energija lijeve elektrode taman leži na energiji  $\epsilon_{\downarrow}$ , tako da imamo  $f_{L\downarrow} = 1/2$ , te vidimo da u tom slučaju imamo konstantnu struju, neovisno o razlici temperatura, što nije tako lako vidjeti ako samo promatramo jednadžbu (3.28).

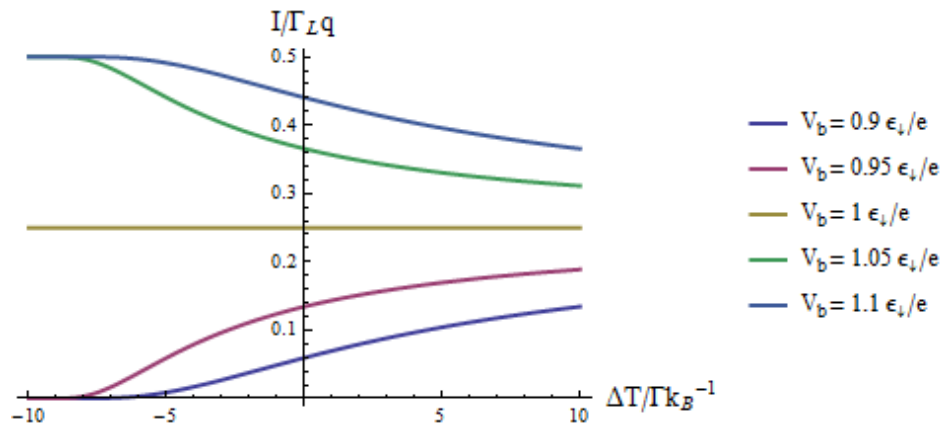
Nadalje, vidimo da se  $I(\Delta T)$  karakteristika mijenja ako pređemo napon  $V_b = \epsilon_{\downarrow}/e$ .



(a)



(b)



(c)

Slika 3.3:

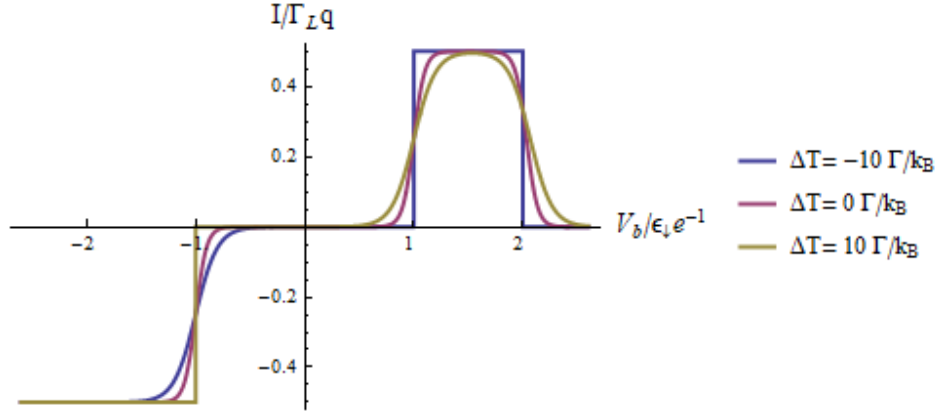
$$I(\Delta T); V_b = \text{const.}$$

Ovisnost struje  $I$  o razlici temperatura elektroda  $\Delta T = T_L - T_R$  pri raznim konstantnim prednaponima  $V_b$ , za  $T_0 = 5 \Gamma k_B^{-1}$  ( $\approx 38$  mK) i  $\Delta\epsilon = 100 \Gamma$  ( $\approx 6.6 \cdot 10^{-2}$  meV). Temperatura je izražena u  $\Gamma/k_B$ , struja u  $\Gamma_L q$  i prednapon u  $\epsilon_{\downarrow}/e$  jedinicama.  $\Gamma$  je skala energije i dana je s  $\Gamma = \Gamma_L \hbar$ .

Tada struja pada kako razlika temperatura raste jer je Fermijeva energija lijeve elektrode prešla energiju  $\epsilon_{\downarrow}$ , pa populacija elektrona na energiji  $\epsilon_{\downarrow}$  ima suprotnu ovisnost s porastom temperature. Isto ponašanje smo uočili i sa konstantnim negativnim prednaponima, samo je sve obrnuto; imamo negativnu struju i događa se elektronski

transport iz desne u lijevu elektrodu.

### 3.3.3 Ovisnost struje o prednaponu - $I(V_b)$



Slika 3.4:

$$I(V_b); \Delta T = \text{const.}$$

Ovisnost struje  $I$  o prednaponu  $V_b$  pri različitim konstantnim razlikama temperatura elektroda  $\Delta T$  (ostali parametri su isti kao i u slučaju sa slike (3.3)). Prednapon  $V_b$  je skaliran s  $\epsilon_{\downarrow}/e$  tako da se izražava u jedinicama energije elektronskih stanja u kvantnoj točki. Uzeli smo da je  $\epsilon_{\uparrow} = 2\epsilon_{\downarrow}$ .

Promotrimo sada kako sustav reagira sa promjenom prednapona na elektrodama. Da bi vidjeli kako prednapon utječe na struju, moramo razliku temperatura držati konstantnom dok mijenjamo prednapon. Ta ovisnost je prikazana na slici (3.4), za par konstantnih temperatura. Pošto koristimo  $T_0 = 5 \Gamma/k_B$  kao "ishodište" temperatura,  $\Delta T = -10 \Gamma/k_B$  nam predstavlja graničan slučaj gdje je desna elektroda na temperaturi  $T_R = 0$ . Prednapon je skaliran sa  $\epsilon_{\downarrow}/e$  tako da se jasno vidi odakle potječe izgled grafa.  $V_b = 1 \epsilon_{\downarrow}/e$  predstavlja potreban napon da se Fermijeva energija lijeve elektrode dovede na energiju  $\epsilon_{\downarrow}$ , dok  $V_b = 2 \epsilon_{\downarrow}/e$  predstavlja potreban napon da se Fermijeva energija lijeve elektrode dovede na energiju  $\epsilon_{\uparrow}$ , te  $V_b = -1 \epsilon_{\downarrow}/e$  predstavlja potreban napon da se Fermijeva energija desne elektrode dovede na energiju  $\epsilon_{\downarrow}$ .

Promotrimo prvo interval  $-\epsilon_{\downarrow}/e < V_b < \epsilon_{\downarrow}/e$ . Dok je  $\Delta T = 0$ , rastom prednapona imamo rast struje, i obratno. Razlog tomu je taj što npr. podizanjem prednapona podižemo i energiju svih elektrona u lijevoj elektrodi zbog čega se javlja veća učestalost tuneliranja na kvantnu točku. Ako je lijeva elektroda na  $T_L = 0$  ( $\Delta T = -10 \Gamma/k_B$ ), vidimo da u tom intervalu nemamo struje jer tada Fermijeva funkcija ima oblik stepenice i nećemo imati dostupnih elektrona koji mogu tunelirati na kvantnu točku, što se i pokazalo u 10. graničnom slučaju.

Međutim, ako nastavimo dizati prednapon, Fermijeva energija lijeve elektrode (na  $T_L = 0$ ) će u trenutku dok je  $V_b = \epsilon_{\downarrow}/e$  doseći energiju  $\epsilon_{\downarrow}$ , gdje je  $f_{L\downarrow} = 1$ , što znači da sigurno imamo dostupnih elektrona koji mogu tunelirati na kvantnu točku i događa se nagli skok u porastu struje. Sa grafa na slici (3.4) i iz 11. graničnog slučaja (jednadžba (3.34)) možemo vidjeti da je iznos te struje  $I = \frac{1}{2}\Gamma_L q$ , što je otprilike  $I \approx 80$  pA.

Ako pak nastavimo dalje podizati prednapon, Fermijeva energija lijeve elektrode (na  $T_L = 0$ ) će u trenutku dok je  $V_b = 2\epsilon_{\downarrow}/e$  doseći energiju  $2\epsilon_{\downarrow} = \epsilon_{\uparrow}$ , gdje i dalje imamo  $f_{L\downarrow} = 1$ , ali sada struja naglo izčezava, što teži 8. graničnom slučaju. Sada smo podigli energiju lijeve elektrode tako da je i  $f_{L\uparrow} = 1$ , što znači da uvijek sigurno imamo elektron koji može tunelirati u stanje  $\epsilon_{\uparrow}$ . Kada se to desi, elektron na kvantnoj točki u stanju  $\epsilon_{\uparrow}$  ne može dalje tunelirati na drugu elektrodu jer je ona 100% spinski polarizirana. Ovo su loše vijesti za struju u sustavu jer se tada na kvantnoj točki stvori kulonska blokada zbog koje elektroni ne mogu tunelirati u stanje  $\epsilon_{\downarrow}$ , pa se samim time blokira i struja u sustavu ( $I = 0$ ).

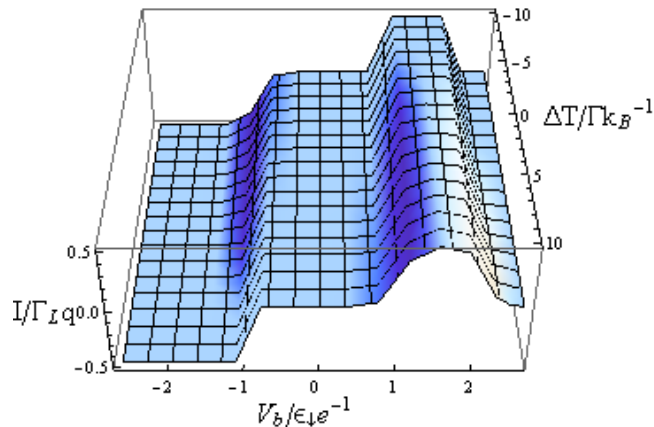
Ako promatramo slučaj kada je pak desna elektroda na  $T_R = 0$  ( $\Delta T = 10 \Gamma/k_B$ ), vidimo slično ponašanje kao što smo sad opisivali, samo u drugu stranu. Jedina razlika je ta što sada spuštanjem prednapona neće doći do kulonske blokade jer desna elektroda nema spin  $\uparrow$  elektrona koji mogu tunelirati u stanje  $\epsilon_{\uparrow}$  na kvantnoj točki, pa struja neće naglo pasti nego će se približavati 13. graničnom slučaju, gdje je  $I = -\frac{1}{2}\Gamma_L q$ .

Na slici (3.4) također vidimo što se događa u sustavu kada imamo konačne temperature elektroda ( $T_{L,R} > 0$ ). Ponašanje je slično kako smo dosad opisivali, samo sada više nemamo nagle skokove u rastu i padu struje. Vidimo da su ti nagli skokovi "ublaženi" sporijim rastom i padom struje, što proizlazi iz toga što je Fermijeva funkcija na sve višim temperaturama također "blaža", tj. brzina promjene vrijednosti Fermijeve funkcije oko Fermijeve energije je puno sporija (u odnosu na step-funkciju Fermijeve raspodjele pri  $T = 0$ ). Interesantno je kako se višestruko puta vidi "otisak" Fermijeve raspodjele direktno na grafovima na slici (3.4).

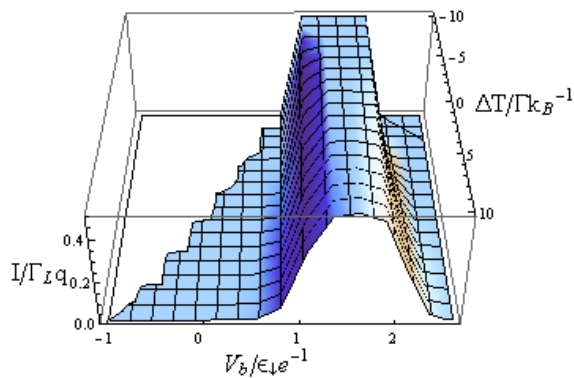
### 3.3.4 Ovisnost struje o razlici temperatura i prednaponu - $I(\Delta T, V_b)$

Do sada smo malo pomnije istražili elektronski transport u sustavu, no kako iz gornjih grafova i jednadžbi iščitati uvjete kada imamo termalni transport i hlađenje hladnije

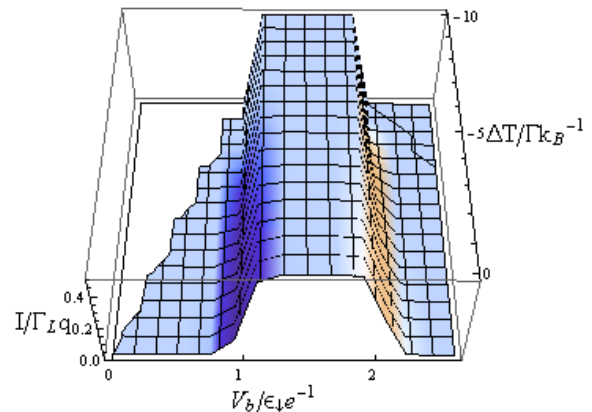
elektrode, tj. mikro-hladnjak? Termalni prijenos energije zapravo imamo uvijek kada elektron prijeđe iz jedne elektrode u drugu. Elektron na energiji  $\epsilon_{\downarrow} - eV_b$  tunelira iz jedne elektrode na kvantnu točku, te potom na drugu elektrodu gdje prenese svoju energiju. Elektron u drugoj elektrodi najčešće naleti na neku nečistoću nakon relaksacijskog vremena, te se neelastičnim sudarima relaksira i prenese energiju; elektron se termalizira. Ako nas zanima kada se događa prijenos energije iz hladnije u topliju elektrodu, trebamo vidjeti  $I(\Delta T, V_b)$  karakteristiku i uočiti pod kojim uvjetima je to ispunjeno.



(a)  $I(\Delta T, V_b)$



(b)  $I(\Delta T, V_b) > 0$



(c)  $I(\Delta T, V_b) > 0; \Delta T < 0$

Slika 3.5: 3D grafički prikaz ovisnosti struje o razlici temperatura elektroda  $\Delta T$  i dovedenom prednaponu  $V_b$  za razne poželjne uvjete. Pod (a) imamo "čisti" prikaz  $I(\Delta T, V_b)$  karakteristike, pod (b) imamo prikaz pozitivne struje, tj. plohu na kojoj imamo elektronski i termalni transport iz lijeve u desnu elektrodu, pod (c) imamo prikaz pozitivne struje i negativnih razlika temperatura elektroda, tj. plohu na kojoj imamo transport energije iz hladnije lijeve u topliju desnu elektrodu. Svi ostali parametri su isti kao i u prethodnim razmatranjima.

Na slici (3.5a) je prikazan 3D graf  $I(\Delta T, V_b)$  karakteristike, dakle ovisnost struje o dvije varijable, razlici temperatura i prednaponu. Iz ovog grafa također možemo

vidjeti što smo već prije zaključili; ako se npr. zadržimo na nekoj konstantnoj razlici temperatura i "šecemo" po grafu paralelno s  $V_b$  osi, dobit ćemo iste  $I(V_b); \Delta T = const.$  karakteristike kakve imamo na grafovima na slici (3.4). Sukladno tomu, isto tako možemo vidjeti odakle dolaze grafovi sa slike (3.3).

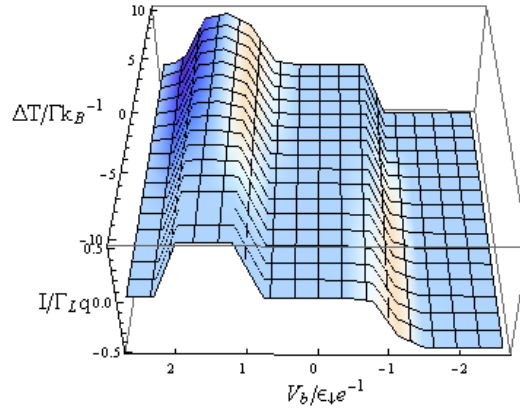
Ako nas zanima pod kojim uvjetima imamo elektronski transport iz lijeve u desnu elektrodu, trebamo se ograničiti samo na pozitivne struje ( $I(\Delta T, V_b) > 0$ ), što je prikazano na slici (3.5b), gdje vidimo plohu na kojoj je taj uvjet ispunjen. Vidimo da možemo dobiti vrlo male struje čak i ako ne koristimo nikakav prednapon, no značajnu razliku čini uključenje prednapona.

Nadalje, ako nas još dodatno interesira da se taj elektronski transport odvija iz hladnije u topliju elektrodu, na prethodne uvjete trebamo nadodati uvjet  $\Delta T < 0$ , što je prikazano na slici (3.5c). Dakle, na toj plohi imamo uvjete pod kojima elektroni prenose termalnu energiju iz hladnije lijeve elektrode u topliju desnu elektrodu. Ovo na prvi pogled izgleda kao kršenje drugog zakona termodinamike, no moramo uočiti da se ovaj proces ne događa spontano. Kao prvo, mi ulažemo energiju u sustav prednaponom, mi tjeramo elektrone da idu tamo kuda nama paše, u ovom slučaju iz hladnije u topliju elektrodu. Nadalje, u eksperimentalnom razmatranju ovakvih sustava, žice kojima se dovodi prednapon na elektrode se također moraju hladiti kako se ne bi zbog samog toka struje zagrijao sustav. Također, žice trebaju biti dovoljno hladne kako bi mogle "opskrbiti" elektrode "hladnim" elektronima niže energije, tako da za samo hlađenje tih žica moramo uložiti još energije.

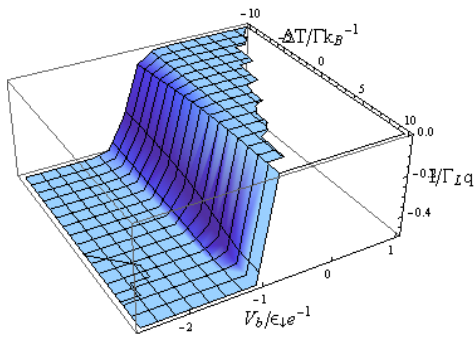
Slična razmatranja možemo primijeniti i na drugu stranu. Ako promatramo elektronski i termalni transport iz desne u lijevu elektrodu, doći ćemo do istih zaključaka kao i gore, samo u obrnutoj situaciji. Na slici (3.6c) je prikazana ploha koja nam određuje uvjete gdje imamo prijenos energije iz hladnije desne elektrode u topliju lijevu elektrodu.

## 4 Zaključak

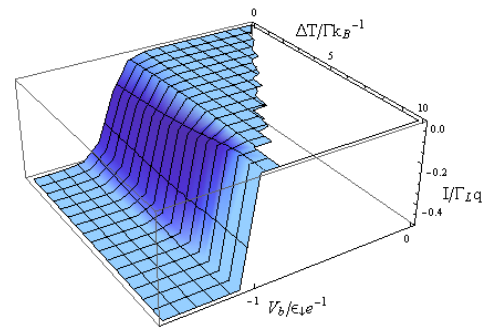
Proučavali smo električni spinski polarizirani i termalni transport elektrona između normalne i spinski polarizirane elektrode koji se odvija sekvencijalnim tuneliranjem preko tankog filma s distribucijom spinski diskriminiranih kvantnih točaka u vanjskom magnetskom polju. Sustav smo formulirali u formalizmu tzv. "master equation"



(a)  $I(\Delta T, V_b)$



(b)  $I(\Delta T, V_b) < 0$



(c)  $I(\Delta T, V_b) < 0; \Delta T > 0$

Slika 3.6: 3D grafički prikaz ovisnosti struje o razlici temperatura elektroda  $\Delta T$  i dovedenom prednaponu  $V_b$  za razne poželjne uvjete. Pod (a) imamo "čisti" prikaz  $I(\Delta T, V_b)$  karakteristike, pod (b) imamo prikaz negativne struje, tj. plohu na kojoj imamo elektronski i termalni transport iz desne u lijevu elektrodu, pod (c) imamo prikaz negativne struje i pozitivnih razlika temperatura elektroda, tj. plohu na kojoj imamo transport energije iz hladnije desne u topliju lijevu elektrodu. Svi ostali parametri su isti kao i u prethodnim razmatranjima.

iz čega smo izveli kinetičke jednadžbe za dinamičku populaciju kvantne točke elektronom. Stacionarnim rješenjem smo izračunali struju elektrona u sustavu koja ovisi o temperaturama elektroda i narinutom prednaponu. Analizirali smo kako prednapon i razlike u temperaturama utječu na struju, te smo došli do uvjeta pod kojima se događa električni i termalni prijenos, te uvjeta pod kojima imamo prijenos energije iz hladnije u topliju elektrodu, odnosno hlađenje hladnije elektrode.



## 5 Metodički dio

Njenim otkrićem početkom 20. stoljeća, kvantna fizika je kompletno promijenila doživljaj svijeta fizičara, kao i mnogih ljudi koji nisu stručno povezani s fizikom. Kvantna fizika je u samu srž prirode uvela indeterminizam, vjerojatnost i nelokalnost, što drastično odstupa od klasične fizike i svakodnevnih iskustva u našim životima. Samim time, razvile su se mnoge miskoncepcije i krive interpretacije kvantne fizike i toga što ona ima za reći o svijetu oko nas. Štoviše, čak i sama riječ "kvantna" danas kod većine ljudi uglavnom predstavlja neki "misterij" i označava nešto nepoznato, što se nažalost često zlorablja u pseudoznanosti [25]. Konceptualne poteškoće i nerazumijevanje kvantne fizike dijelom dolazi zbog same neintuitivne prirode kvantne mehanike (svakodnevni objekti koje vidimo se ne ponašaju kao i kvantni objekti), a dijelom zbog neadekvatnog obrazovanja o temeljnim aspektima kvantne fizike u srednjim školama i gimnazijama. Čak i učenici koji imaju veliki interes za fiziku, te upišu studij fizike, na početku studija pokazuju da su prenijeli mnogo miskoncepcija o kvantnoj fizici iz srednjih škola i gimnazija na fakultet [26, 27].

Gledajući sa strane nastavnika, kvantna fizika je jedan od najtežih dijelova fizike za poučavanje u srednjim školama i gimnazijama. Uz same konceptualne poteškoće koje se javljaju kod učenika dok se prvi put susretnu s kvantnom fizikom, eksperimenti koji pokazuju osnovna svojstva kvantne fizike često nisu dostupni nastavnicima u srednjim školama i gimnazijama, poput npr. pokusa prolaska elektrona kroz dvije pukotine. Nadalje, pri poučavanju kvantne fizike na fakultetu, koriste se matematički alati koji nisu dostupni učenicima u gimnazijama. Npr. osnovna jednačba kvantne fizike (Schrödingerova jednačba) je linearna parcijalna diferencijalna jednačba, nešto što je daleko izvan opsega učenikog znanja. Međutim, istraživanja iz edukacijske fizike su pokazala da se ti problemi mogu izbjeći, a da se kod učenika i dalje stvori konceptualno jasna formulacija kvantne fizike s minimalno matematike i formula. Jedan od takvih pristupa je "Milq" pristup (Munich Internet Project for teacher's training on quantum mechanics), kojem ćemo se posvetiti u ovom radu, kao i njegovoj mogućoj implementaciji u našim srednjim školama i gimnazijama [26, 27].

## 5.1 *Milq pristup*

Milq pristup se usredotočuje na ključna konceptualna pitanja kvantne fizike i daje učenicima jasniji i precizniji pogled na svijet moderne fizike od uobičajenih nastavnih pristupa. Uobičajeni pristup poučavanju kvantne fizike u srednjim školama i gimnazijama se uglavnom temelji na razvoju kvantne fizike kroz povijest; učenici uče o saznanjima i teorijama kvantne fizike kako su se ona kronološki razvijala kroz povijest, te se samim time kvantna fizika pokušava "nadovezati" i "uklopiti" u klasičnu fiziku. Ovakav pristup nije baš najbolji; kod učenika se stvaraju mnoge konceptualne poteškoće i nerazumijevanja upravo zato što se kvantna fizika drastično razlikuje od klasične fizike. Kako bi poboljšali poučavanje kvantne fizike, znanstvenici u Milq pristupu su uzeli inspiraciju iz uspješnijeg poučavanja elektromagnetizma u srednjim školama i gimnazijama. Kronološko učenje elektromagnetizma bi zasigurno izazvalo mnogo konceptualnih problema (npr. razni elektromagnetski efekti su otkriveni prije Ohmovog zakona). Osnove i sama srž elektromagnetizma zapisane su u Maxwellovim jednadžbama, koje su matematički puno kompleksnije od Schrödingrove jednadžbe, no uspješan školski kurikulum elektromagnetizma se uspio napraviti bez kronološkog razvitka i bez uključivanja Maxwellovih jednadžbi. Razvijanjem osnovnih ideja i opažanjima u pokusima, učenici su polako kroz gradivo upoznati s ključnim konceptima elektromagnetizma poput naboja, struje i napona, strujnim krugovima, magnetskim efektima, magnetskom indukcijom i elektromagnetskim valovima. Takvi ključni koncepti u školskom kurikulumu kvantne fizike koji su potrebni za kvalitetno razumijevanje nisu dobro razvijeni ni definirani. Cilj Milq pristupa je razviti i razjasniti te koncepte.

Milq pristup izbjegava kronološko učenje kvantne fizike i nadovezivanje na klasičnu fiziku. Štoviše, baš su razlike i odstupanja kvantne od klasične fizike izražajno naglašeni i puno raspravljani. Učenici su u Milq pristupu npr. upoznati s Bornovom interpretacijom vjerojatnosti koja odstupa od klasičnog determinizma, te s neobičnim pojavama dok su kvantni objekti u stanju superpozicije gdje nemaju klasično dobro određena svojstva poput položaja, putanje i energije.

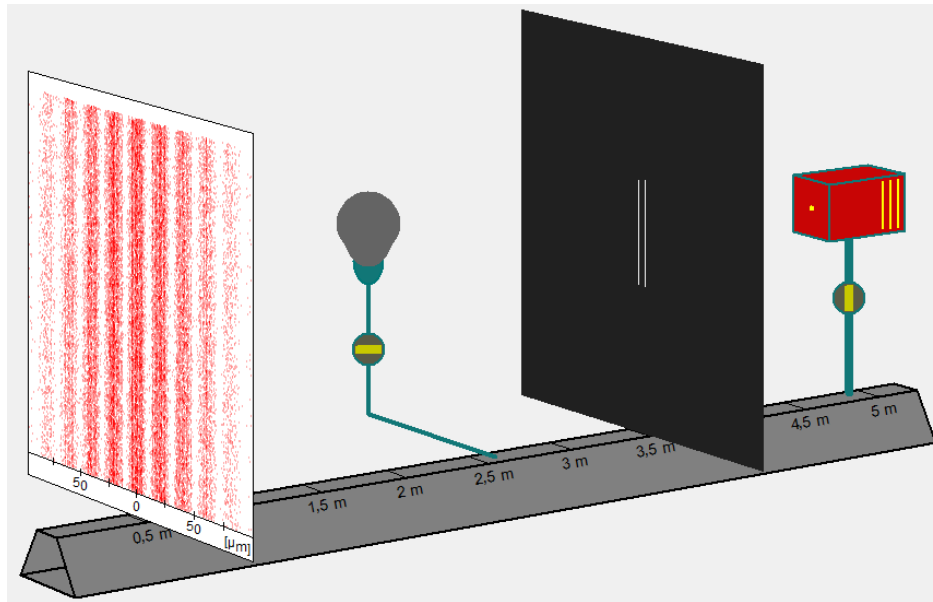
Kvantna fizika je izražena kroz matematiku; dok fizičari međusobno razgovaraju i raspravljaju, koriste svakakve izraze i riječi te njihov jezik može biti slobodniji jer se uvijek referiraju na matematiku, no to predstavlja problem nastavnicima zbog nedo-

voljnog matematičkog predznanja učenika. Iz tog razloga za konceptualno poučavanje kvantne fizike u srednjim školama i gimnazijama trebamo biti iznimno pažljivi s jezikom i riječima koje koristimo kako bi se što bolje izbjegla zabuna ili kriva shvaćanja kod učenika. Milq je razvio takav jezik i odgovarajuće termine i pojmove na engleskom jeziku ([milq.info/en/](http://milq.info/en/)). Jedan od takvih pojmova je pojam "pripreme stanja" (eng. "state preparation"), koji opisuje stanje kvantnog objekta u operativnim i kvalitativnim terminima. Ovaj pojam je ekvivalentan valnoj funkciji u matematičkom formalizmu, ona matematički opisuje kvantni objekt koji je na neki način "pripremljen".

## ***5.2 Alati zaključivanja i njihova primjena u pokusu prolaska elektrona kroz dvije pukotine***

Za potrebe poučavanja i rasprave kvantne fizike u razredu, u Milq pristupu su razvijena četiri kvalitativna pravila koja se zovu "alati zaključivanja" (eng. "reasoning tools"). Ona sadrže osnovna svojstva kvantne fizike i omogućuju učenicima lakše razumijevanje i predviđanje određenih eksperimenata. Učenicima su polako kroz gradivo i eksperimente prezentirana pravila tako da i sami vide odakle dolaze i da vide značajnost tih pravila u kvantnoj fizici. Također, važno je napomenuti epistemološki značaj tih pravila; ona su točna bez obzira na to koliko naprednu kvantnu fiziku gledamo (barem koliko zasada znamo), tako da ako učenici žele dalje proučavati kvantnu fiziku, neće morati nešto odučiti i naučiti novo, sve ostaje u okvirima tih pravila. Sa sadašnjih kurikulumom npr. znamo jedan problematičan slučaj; dok razmišljaju o atomu, učenicima i studentima je teško izbaciti sliku Bohrovog modela atoma [26,27].

Sada ćemo navesti i obrazložiti pravila te vidjeti njihovu primjenu na primjeru pokusa prolaska elektrona kroz dvije pukotine te kako ona prirodno proizlaze iz pažljivog promatranja pokusa. Pokus je prikazan na slikama (5.1), (5.2) i on se sastoji od izbacivača elektrona, dvije tanke pukotine, lampe koju palimo/gasimo i zaslona koji registrira elektrone nakon prolaska kroz pukotinu. Pokus je kompjuterska simulacija preuzeta s [28].



Slika 5.1: Prikaz pokusa prolaska elektrona kroz dvije pukotine dok je lampa isključena. Kompjuterska simulacija je preuzeta sa [28].

### 5.2.1 Pravilo 1: Statističko ponašanje

Pojedinačni događaji nisu predvidivi, oni su nasumični. U kvantnoj fizici su moguća samo statistička predviđanja (za puno ponavljanja identičnog eksperimenta).

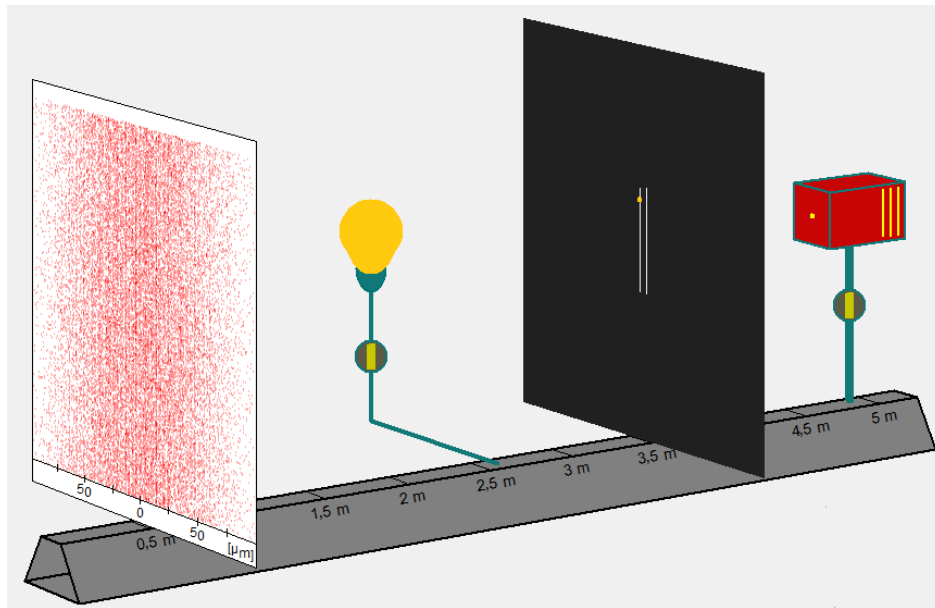
Ovdje se radi o Bornovoj interpretaciji vjerojatnosti u kvalitativnom obliku. Učenici su kroz pokus prolaska elektrona kroz dvije pukotine (slika 5.1) upoznati s razlikom kvantne i klasične fizike. Klasična fizika je deterministička, dok kvantna nije. "Pucamo" elektron po elektron i gledamo gdje oni završe na zaslonu te vidimo da uz iste početne uvjete mi ne možemo predvidjeti gdje će idući elektron udariti zaslon. Međutim, to ne znači da je kvantna fizika bez zakona, mi ipak možemo nešto reći o tome kakva će biti raspodjela elektrona na zaslonu nakon puno ponavljanja istog pokusa, tako da su zakoni kvantne fizike po svojoj prirodi statistički.

### 5.2.2 Pravilo 2: Interferencija i superpozicija pojedinačnih kvantnih stanja

Interferencija se događa kada postoje dva ili više "puta" koji vode do istog događaja. Čak i ako su ti mogući putevi međusobno isključivi u klasičnoj fizici, nijedan neće biti "ostvaren" u klasičnom smislu.

U pokusu prolaska elektrona kroz dvije pukotine možemo jasno vidjeti ovo pravilo. Ako ne znamo kroz koju pukotinu pojedinačni elektroni prolaze, na zaslonu vidimo sliku interferencije, no ako stavimo nekakav uređaj s kojim možemo odrediti kroz

koju pukotinu prolaze elektroni (slika 5.2), interferencijska slika nestaje, tako da u tom slučaju nemamo dva različita "puta" kojim pojedinačni elektroni prolaze. Dok imamo interferenciju, nijedan put nije "ostvaren" u klasičnom smislu; elektroni su u kvantnom stanju superpozicije i ne možemo im pripisati svojstvo "položaja", kao ni reći da su oni prošli ili kroz lijevu ili kroz desnu pukotinu. Ova saznanja su bitna za koncept atoma gdje su elektroni delokalizirani objekti.



Slika 5.2: Prikaz pokusa prolaska elektrona kroz dvije pukotine dok je lampa upaljena. Kompjuterska simulacija je preuzeta s [28].

### 5.2.3 Pravilo 3: Postulat o mjerenju

Čak i ako kvantni objekti u stanju superpozicije nemaju određenu vrijednost mjerene observable, pri mjerenju ćemo naći jedinstveni rezultat. Rezultat mjerenja je uvijek jedno od svojstvenih stanja mjerene observable.

Jedan od načina da saznamo kroz koju pukotinu elektron prolazi u pokusu s dvjema pukotinama je predložio Feynman [30]. Ako stavimo lampu kao izvor svjetla između pukotina i zastora, elektroni koji prođu kroz jednu od pukotina će raspršiti svjetlo i mi možemo vidjeti raspršeno svjetlo kao bljesak na jednoj od pukotina i time odrediti kroz koju pukotinu je prošao elektron (slika 5.2). Mi smo tim rezultatom mjerenja odredili položaj elektrona, makar je on prethodno bio u stanju superpozicije i nije imao definirani položaj. Slično mjerenje se odvija i na samom zaslonu; elektroni su prije zaslona delokalizirani objekti, no lokaliziraju se čim udare o zaslon.

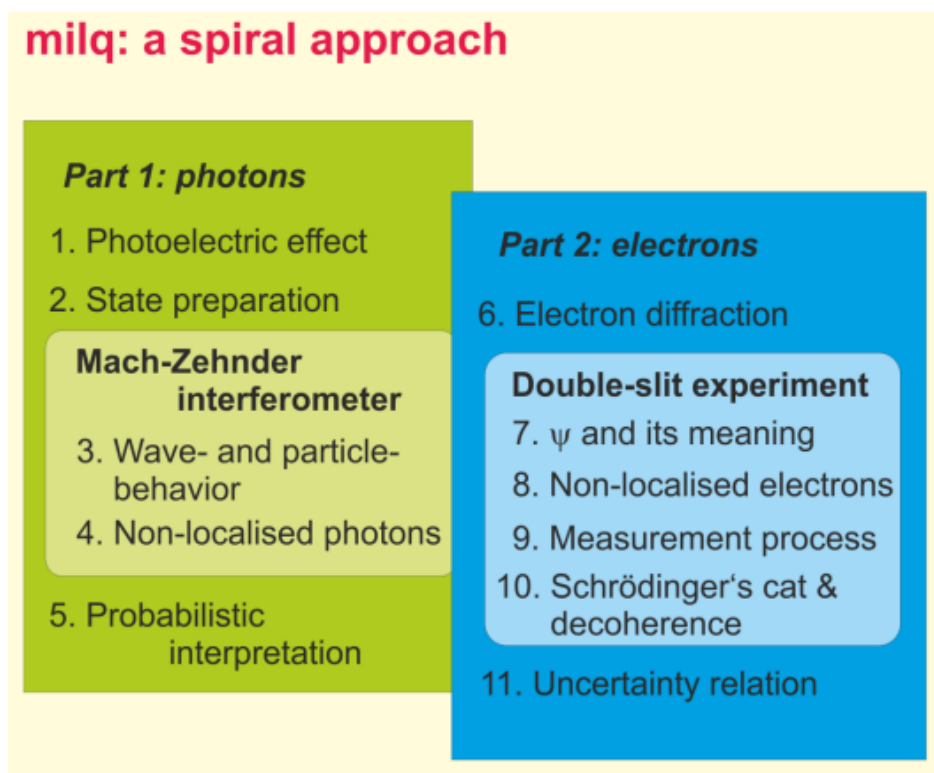
### 5.2.4 Pravilo 4: Komplementarnost

Princip komplementarnosti tvrdi da kvantni objekti imaju određeni par komplementarnih svojstva koja se ne mogu istovremeno uočiti ili izmjeriti.

Feynmanova lampa također može pokazati ovo pravilo. Ako želimo saznati kroz koju pukotinu prolaze elektroni, moramo uključiti lampu da bismo vidjeli bljesak na jednoj od pukotina. Međutim, sada vidimo da je interferencijska slika nestala sa zaslona (slika 5.2), tj. sada imamo distribuciju bez neke unutarnje strukture. Ne možemo istovremeno znati kroz koju pukotinu su prošli elektroni i imati sliku interferencije; ta dva svojstva su komplementarna. Ovaj primjer postavlja vrlo dobru bazu za poučavanje Heisenbergovog načela neodređenosti, gdje su dvije komplementarne veličine položaj i količina gibanja.

### 5.3 Milq kurikulum

Osnovni Milq kurikulum se sastoji od dva glavna dijela gdje se proučavaju svojstva fotona u prvom dijelu i svojstva elektrona u drugom dijelu. Ta dva dijela zajedno čine tzv. "spiralni kurikulum", koji je prikazan na slici (5.3).



Slika 5.3: Osnovni Milq kurikulum. Slika je preuzeta s [28].

Osnovni kurikulum je baziran na dva ključna pokusa koja pokazuju glavna i os-

novna svojstva kvantne fizike, te demonstriraju sva prethodno navedena pravila. U prvom dijelu kurikuluma razmatraju se fotoni i njihova svojstva u Mach-Zehnder interferometru te se uvode alati zaključivanja i pravila kroz razmatranje pokusa, slično kao što smo gore razmatrali za elektrone u pokusu s dvije pukotine. Tu se pokazuju valna i čestična svojstva fotona u istom pokusu i vidimo da nam treba "nešto novo" za objašnjenje opaženih pojava jer dosadašnja naučena klasična fizika ne nudi adekvatne odgovore te se uvodi Bornova interpretacija vjerojatnosti. U drugom dijelu kurikuluma posvećujemo se elektronima, uglavnom u pokusu s dvije pukotine. Slična razmatranja se provode kao i prethodno s fotonima, samo sada s elektronima gdje se još dodatno uz interpretaciju vjerojatnosti konceptualno uvodi i valna funkcija. Nakon toga se raspravlja o mjerenju u kvantnoj fizici, o paradoksu Schrödingerove mačke i o Heisenbergovoj relaciji neodređenosti.

Za naprednije studente i škole koje mogu izdvojiti više vremena za kvantnu fiziku, postoji i napredni kurikulum koji slijedi nakon osnovnog. U naprednom kurikulumu se uvodi formalizam kvantne fizike i njegova primjena na matematički osnovnom nivou gdje se razmatraju valne funkcije i operatori, jednačba svojstvenih stanja, Schrödingerova jednačba te atomi, gdje se kulonski potencijal aproksimira beskonačnom potencijalnom jamom s prikladno odabranim parametrima, iz čega se dobiju energijski nivoi vodikovog atoma s ovisnošću  $-1/n^2$ . Sada ćemo malo detaljnije opisati sadržaj Milq pristupa.

### **5.3.1 Fotoni**

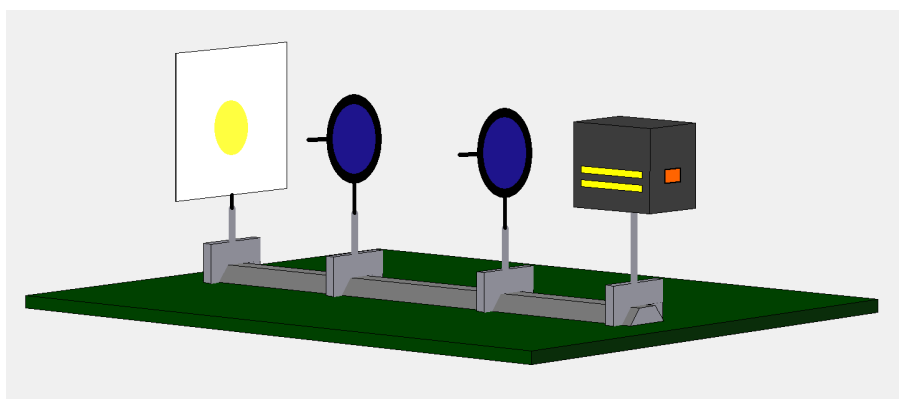
U prvom dijelu razmatraju se svojstva fotona i učenici su kroz fotone upoznati s konceptualnim razlikama kvantne i klasične fizike.

#### **5.3.1.1 Fotoelektrični efekt**

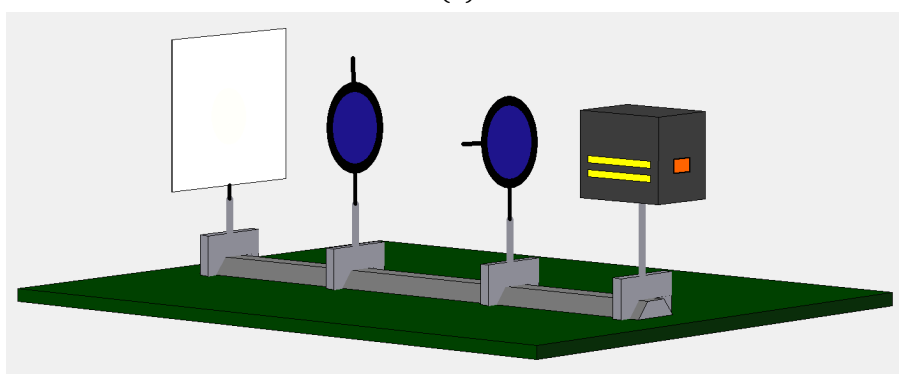
Milq pristup započinje razmatranjem fotoelektričnog efekta gdje je pojava izbijanja elektrona iz metala objašnjena pomoću fotona s čestičnim svojstvima te se određuje Planckova konstanta. Ova tema je standardna i ne razlikuje se mnogo od tradicionalnog pristupa.

### 5.3.1.2 Priprema dinamičkih svojstva

Važan koncept za razumijevanje kvantne fizike jest pojava da kvantni objekti ne mogu istovremeno imati svojstvo položaja i količine gibanja. Da bi se to razjasnilo, u Milq pristupu se uvodi koncept "pripreme", koji se prvo prezentira kroz horizontalni hitac u klasičnoj fizici. Priprema je proces u kojem su objekti u fizikalnom sustavu dovedeni u određena stanja sa određenim svojstvima. Npr. kod horizontalnog hitca, projektil je pripremljen postavom eksperimenta; projektil ima svojstvo početnog položaja i svojstvo početne brzine. Svojstva koja su dobivena pripremom nisu konstantna, mi ih eksperimentalnim postavom možemo mijenjati te se zato ona nazivaju dinamičkim svojstvima.



(a)



(b)

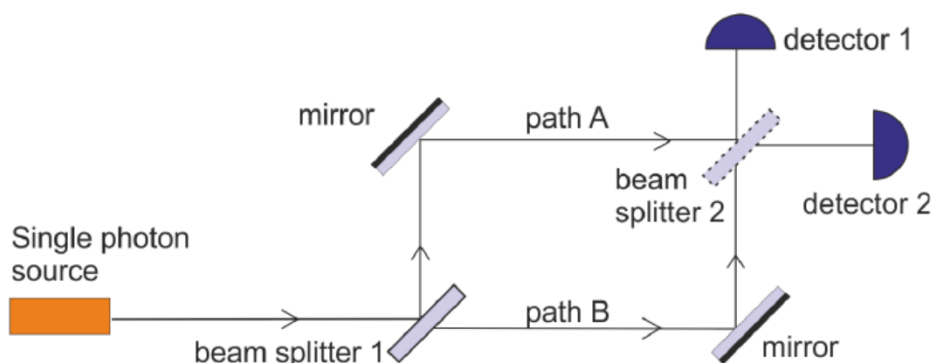
Slika 5.4: Prikaz pokusa testiranja horizontalne polarizacije svjetla. Prvi polarizator je horizontalno orijentiran, dok je pod (a) drugi polarizator horizontalno orijentiran, a pod (b) je drugi polarizator vertikalno orijentiran. Kompjuterska simulacija je preuzeta s [28].

Sličan pristup se primjenjuje i na kvantnu fiziku kroz pripremu polariziranog svjetla. Prolaskom kroz horizontalno orijentirani polarizator, dobiva se svjetlo sa svoj-



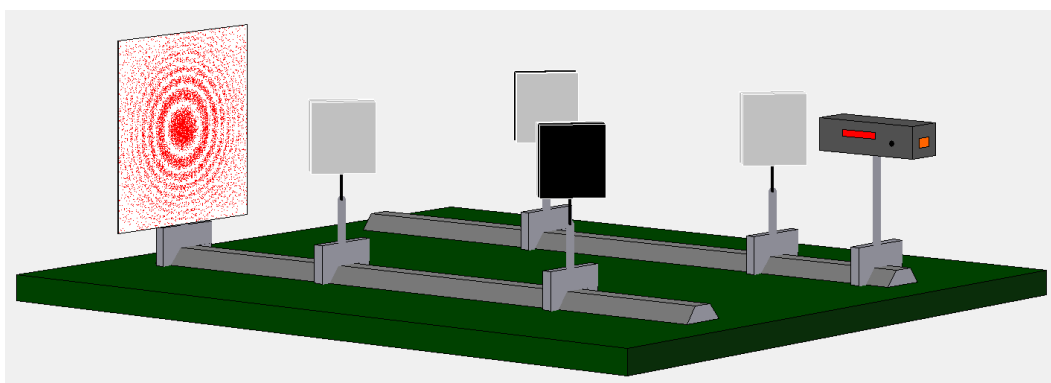
stvom "horizontalne polarizacije". Kako bismo ispitali ovo svojstvo, stavljamo drugi horizontalno orijentirani polarizator iza prvog (slika 5.4a). Ako vidimo da je skoro sve svjetlo prošlo i kroz drugi polarizator, možemo reći da svjetlo ima svojstvo "horizontalne polarizacije". Također, ako drugi polarizator orijentiramo okomito u odnosu na prvi (slika 5.4b) te vidimo da nije prošlo skoro ništa svjetla, možemo doći do istog zaključka.

### 5.3.1.3 Valno i čestično ponašanje u Mach-Zehnderovom interferometru



Slika 5.5: Skica Mach-Zehnderovog interferometra. Slika je preuzeta s [27].

Za razmatranje kvantnih svojstva fotona koristi se Mach-Zehnderov interferometar, koji je skiciran na slici (5.5). U Milq pristupu je razvijena kompjuterska simulacija laboratorija u kojem se nalazi Mach-Zahnderov interferometar sa dodatnim polarizatorima, te osim u svrhu razredne rasprave, učenici i sami mogu koristiti simulaciju za sve potrebne pokuse u Milq kurikulumu [28].

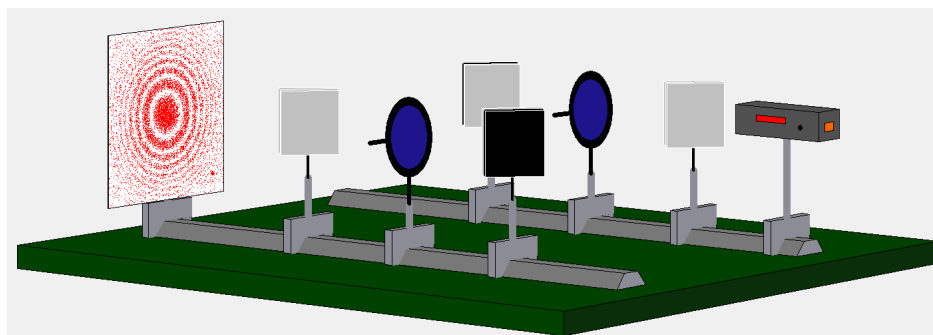


Slika 5.6: Prikaz pokusa Mach-Zehnderovog interferometra s laserskom svjetlošću. Kompjuterska simulacija je preuzeta s [28].

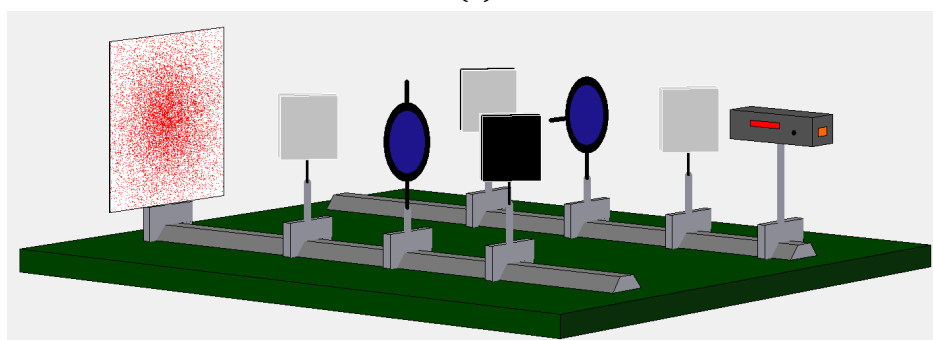
Virtualni pokus (slika 5.6) sastoji se od izvora svjetla (laser ili pojedinačni fotoni),

dva razdjelnika zraka, dva zrcala i zaslona. U pokusu prvo pustimo lasersku svjetlost koja zbog malo različitih duljina puteva svjetlosti na zaslonu stvori kružnu interferencijsku sliku. Učenici su već upoznati s interferencijom svjetlosti koja se događa zbog njene valne prirode, te zato u sljedećem koraku pokusa koristimo pojedinačne fotone, tj. sada fotoni imaju jasno određeno svojstvo čestice. Vidimo da iz izvora svjetla izlazi jedan po jedan foton i udara u zaslon na neko određeno mjesto. Kako ponavljamo isti pokus mnogo puta, na zaslonu se skuplja sve više i više fotona, te se opet stvara cirkularna interferencijska slika, kao što je prikazano na slici (5.6). Ovaj pokus je značajan za konceptualno razumijevanje kvantne fizike jer sada učenici prvi put vide i valnu i čestičnu prirodu svjetlosti u istom pokusu. Dolazimo do zaključka da se ova eksperimentalna opažanja ne mogu objasniti ni valnim ni čestičnim modelom svjetlosti, te nam treba neki novi pristup.

Foton je detekcijom na zaslonu jasno lokaliziran, te se postavlja logično pitanje o tome da li je on lokaliziran na svom putu do zaslona unutar interferometra, tj. da li foton unutar interferometra ima svojstvo položaja?



(a)



(b)

Slika 5.7: Prikaz pokusa Mach-Zehnderovog interferometra s pojedinačnim fotonima. Pod (a) polarizatori su u paralelnoj orijentaciji dok su pod (b) polarizatori u međusobno okomitoj orijentaciji. Kompjuterska simulacija je preuzeta s [28].

Da bismo odgovorili na to pitanje, postavljamo polarizatore na oba puta svjetlosti.

Ako su oba polarizatora međusobno orijentirana paralelno, interferencijska slika na zaslonu se polako opet pojavi kao i u prethodnom pokusu, što je prikazano na slici (5.7a). No međutim ako polarizatore orijentiramo međusobno okomito, na zaslonu se javlja distribucija bez strukture, više nemamo interferencijsku sliku i sada nalazimo fotone i na mjestima gdje su prethodno bili minimumi interferencijske slike (slika 5.7b). Ovaj zanimljivi rezultat predstavlja nešto neobično za fotone. Zamislimo da je foton normalni klasično lokalizirani objekt na svom putu do zaslona. Foton tada mora proći kroz jedan polarizator, ali da bi kasnije vidio da li ima "pravo" udariti o zaslon na mjesto minimuma, on treba "znati" i orijentaciju drugog polarizatora. Ako prihvatimo pretpostavku da foton tokom puta kroz jedan polarizator ne može znati i orijentaciju drugog polarizatora, moramo odbaciti sliku fotona kao lokalizirani objekt unutar interferometra, on tamo nema svojstvo položaja.

Naravno, učenici bi mogli argumentirati da se foton nekako "razdijeli" na dva dijela i onda se na kraju opet ujedini, te bi tako jedan foton mogao imati informaciju o orijentaciji oba polarizatora. Za ispitivanje ove ideje, u istoj simulaciji možemo staviti detektore fotona umjesto polarizatora. Uočavamo da detektori nikad ne registriraju fotone istovremeno, što znači da se foton nikad ne razdijeli na dva dijela. Također, učenici ovdje mogu vidjeti kako proces mjerenja lokalizira foton, dok prethodno nije bio lokaliziran, tj. nije mu se moglo pripisati svojstvo položaja.

Sve skupa, ovi eksperimenti ukazuju na čudnovatu prirodu fotona koja se ne može opisati dosadašnjim klasičnim modelima te nam je jasno da je potreban neki novi pristup u kvantnoj fizici.

#### **5.3.1.4 Interpretacija vjerojatnosti**

Kako smo vidjeli u prethodnim pokusima, pojedinačni fotoni udaraju u zaslon jedan po jedan, ali se ipak na kraju stvori interferencijska slika. Postavlja se pitanje da li možemo predvidjeti gdje će na zaslonu udariti pojedini foton ako dovoljno dobro znamo početne uvjete. U dosadašnjoj klasičnoj fizici smo uvijek mogli predvidjeti rezultate mjerenja ako smo znali početne uvjete, no sada učenici vide da u kvantnoj fizici to više nije moguće. Mi ne možemo predvidjeti pojedinačne događaje, ali možemo precizno predvidjeti statističku distribuciju fotona na zaslonu i vjerojatnost s kojom će foton udariti o zaslon. Ovdje se dotičemo statističkog ponašanja u kvantnoj fizici, što se kasnije još detaljnije razmotri u proučavanju elektrona.

### 5.3.2 Elektroni

U drugom dijelu razmatraju se svojstva elektrona gdje su saznanja iz razmatranja fotona konceptualno produbljena i proširena.

#### 5.3.2.1 Difrakcija elektrona

Difrakcija elektrona se pokazuje tradicionalnim načinom s pokusom pomoću difrakcijske cijevi. Difrakcijska cijev se sastoji od staklene vakuumirane cijevi u kojoj je katoda koju zagrijavamo vanjskim naponom kako bi termičkom emisijom izbacivala elektrone. Ti elektroni su dalje fokusirani i ubrzani anodom, nakon čega naletavaju na kristalnu rešetku gdje se događa ogib elektrona. Iza kristalne rešetke, elektroni udaraju o fluorescentni zaslon koji zasvijetli na mjestu udara elektrona. Na zaslonu se javlja ogibna slika elektrona što pokazuje valna svojstva elektrona. Učenici (analogno relaciji za fotone) dođu do de Broglijeve relacije između valne duljine elektrona i količine gibanja, te eksperimentalno potvrde relaciju s pokusom pomoću difrakcijske cijevi.

#### 5.3.2.2 Pokus prolaska elektrona kroz dvije pukotine i interpretacija vjerojatnosti

Glavni eksperiment s kojim proučavamo svojstva elektrona je pokus prolaska elektrona kroz dvije pukotine, koji je već prethodno objašnjen te je prikazan na slici (5.1). Pokus je interaktivna simulacija kojoj i sami učenici mogu pristupiti i sami provoditi eksperimente. Analogno fotonima, učenici prvo uočavaju valno-čestičnu prirodu elektrona. Elektroni jedan po jedan udaraju o zaslon (čestična priroda) te se nakon nekog vremena na zaslonu javlja interferencijska slika (valna priroda), što upućuje na drugo pravilo zaključivanja koje se radi o interferenciji i superpoziciji pojedinačnih kvantnih stanja. Iz interferencijske slike zaključujemo da su moguća samo statistička predviđanja, kao što je i bio slučaj s fotonima.

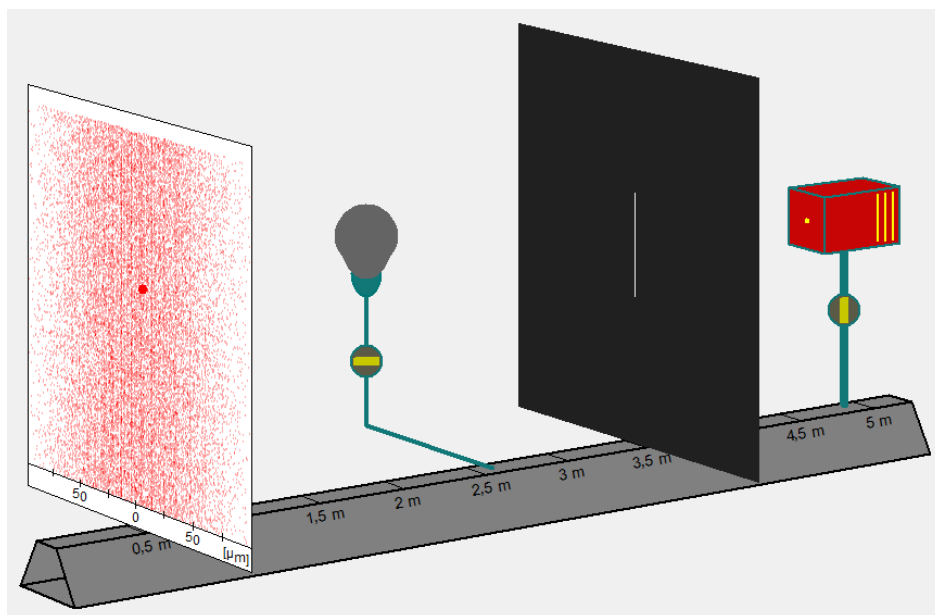
Nadalje, da bi opisali stanje elektrona, kvalitativno se uvodi valna funkcija elektrona, analogno valovima na vodi ili zvučnim valovima. Možemo vizualizirati valnu funkciju nakon dvije pukotine kao superpoziciju dva cilindrična vala koji izlaze iz pukotina:  $\psi = (\psi_A + \psi_B)/\sqrt{2}$ , gdje  $A$  i  $B$  označavaju pukotine.

Postavlja se pitanje koliko daleko možemo povlačiti analogiju s klasičnim valovima

te se pitamo da li onda jednostavno amplituda valne funkcije odgovara vjerojatnosti pronalaska elektrona? Uočavamo da to nije tako te da zapravo moramo gledati Bornovu interpretaciju, tj. da  $|\psi(x)|^2$  odgovara gustoći vjerojatnosti pronalaženja elektrona na položaju  $x$  tokom mjerenja. Uočavamo da interferencija dolazi u miješanom članu kod kvadriranja  $(\psi_A + \psi_B)$ . Statistička distribucija elektrona na zaslonu se može izračunati ako znamo valnu funkciju. Valna funkcija je valne prirode, ali dok elektron udari o zaslon (napravimo mjerenje), on bude lokaliziran na određenom položaju, što ukazuje na čestičnu prirodu elektrona. Ovakvom interpretacijom zahvatili smo i valnu i čestičnu prirodu elektrona u jednu sliku.

### 5.3.2.3 Svojstvo položaja elektrona

Analogno fotonima u prethodnom pokusu, pitamo se gdje je točno elektron na svom putu do zaslona i što možemo reći o lokaliziranosti i položaju elektrona. Znamo da je studentima teško prihvatiti ideju o nelokaliziranim fotonima, te se zato sada i ovdje provodi isto pitanje za elektrone i odgovarajući analogni pokus. Provedemo isti pokus kao i prije (slika 5.1), samo sada prvo zatvorimo jednu pukotinu na neko vrijeme  $t$ , te zatim otvorimo tu pukotinu dok zatvorimo drugu na neko vrijeme  $t$ .



Slika 5.8: Prikaz pokusa prolaska elektrona kroz dvije pukotine dok je prvo otvorena samo jedna pukotina, te zatim samo druga pukotina. Kompjuterska simulacija je preuzeta s [28].

Pokus je prikazan na slici (5.8) i vidimo da se slika na zaslonu razlikuje od interferencijske slike dok su obadvije pukotine otvorene (slika 5.1), sada su neki elektroni

udarili o zaslon na mjesta gdje su bili interferencijski minimumi dok smo imali dvije otvorene pukotine. Razmislimo što to znači za lokaliziranost elektrona. Recimo da elektron jest klasično lokalizirana čestica. Tada, dok elektron putuje kroz jednu pukotinu, on mora znati informaciju o otvorenosti druge pukotine da bi odredio ima li ima pravo doći na mjesto minimuma (u interferencijskoj slici). Znamo da klasično lokalizirani objekti ne mogu nekako znati informaciju o drugoj pukotini, pa prema tome zaključujemo da se elektron ne ponaša kao lokalizirani objekt te da nema svojstvo položaja.

#### 5.3.2.4 Proces mjerenja, redukcija stanja i komplementarnost

Nakon što smo ustanovili da elektron nema svojstvo položaja, javlja se logično pitanje: ako elektron nema svojstvo položaja, što se događa kada idemo mjeriti položaj elektrona? Da bismo odgovorili na ovo pitanje, koristimo eksperiment prikazan na slici (5.2). Opet koristimo identičan postav kao i u prethodnim pokusima, samo sada sa strane imamo svjetiljku koja služi kao instrument za mjerenje položaja elektrona. Tijekom izvođenja pokusa, vidimo bljesak svjetla u jednoj od pukotina što znači da se elektron lokalizirao u jednoj od pukotina i raspršio svjetlo od svjetiljke prema nama. Rezultat mjerenja je da nalazimo elektron u jednoj od pukotina, te nikad ne vidimo dva bljeska istovremeno, što znači da se (analogno razmatranju fotona) elektron nije nekako razdijelio na dva dijela i prošao kroz obje pukotine istovremeno. Ovaj rezultat upućuje na treće pravilo zaključivanja i na postulat mjerenja u kvantnoj fizici, vidimo da elektroni nemaju svojstvo položaja sve dok ne obavimo mjerenje, pri čemu nalazimo jedinstvenu određenu vrijednost položaja. Uočavamo da postoji razlika između "imati svojstvo" i "izmjeriti svojstvo"; makar smo pri mjerenju odredili položaj elektrona, ne možemo reći da je elektron tik prije samog mjerenja imao svojstvo položaja. Ovim pokusima objašnjava se fenomenološki pristup koji opisuje utjecaj mjerenja na stanje mjenog objekta, koji se naziva redukcija stanja. U našim pokusima, redukcija stanja se odvija nakon što svjetiljkom izvršimo mjerenje položaja elektrona, zbog čega gubimo interferencijsku sliku na zaslonu i dobivamo jednostavniju sliku poput raspodjele prikazane na slici (5.2).

Kao što smo već prije razmatrali, ovdje se dotičemo četvrtog pravila zaključivanja, komplementarnosti. Ne možemo istovremeno imati interferencijsku sliku na zaslonu i informaciju o tome kroz koju pukotinu je prošao svaki elektron. Ako pak smanjimo

intenzitet svjetiljke, tako da neki elektroni prođu kroz pukotine bez naše detekcije, na zaslonu se počinje javljati interferencijska slika, ali ne tako izražena kao u slučaju dok je svjetiljka isključena. Individualni elektroni koji nisu detektirani svjetiljkom, ostaju u stanju superpozicije sve do samog udara o zaslon zbog čega se počinje javljati interferencija.

### 5.3.2.5 Schrödingerova mačka i dekoherencija

Ova saznanja nam mogu poslužiti i kod rasprave paradoksa Schrödingerove mačke. Pitanje je objašnjava li kvantna fizika kako od mikroskopskog svijeta i superpozicije stanja dolazimo do makroskopskog svijeta i klasičnih sustava u kojima ne opažamo kvantne efekte, poput mačke.

Dekoherencija objašnjava zašto superpoziciju stanja ne vidimo u makroskopskom svijetu. Makroskopska tijela se ne mogu gledati sama za sebe, tj. da su u potpunoj izolaciji od okoline, ona su uvijek u interakciji s okolinom (otvoreni sustavi). Npr. mačka je uvijek u nekoj okolini, ona stalno interagira s molekulama zraka oko nje (raspršuje svjetlost, termalno zrači,...). Interakcijom s okolinom, praktički se rade "mjerenja" i mačka postaje klasični objekt. Ona je ili živa ili mrtva, mi ne možemo uočiti superpoziciju stanja ili interferenciju zbog njene interakcije s okolinom.

### 5.3.2.6 Heisenbergova relacija neodređenosti

Znamo da se tradicionalnim poučavanjem kvantne fizike javlja mnogo miskoncepcija oko značenja Heisenbergove relacije neodređenosti. Zato je ovdje dana nešto drugačija formulacija od uobičajene, kao izjava o pripremljenosti kvantnih objekata. Heisenbergova relacija neodređenosti ograničava mogućnost istovremene pripreme određenih parova opservabli u ansamblu kvantnih objekata. Ovaj efekt se pokazuje na primjeru prolaska laserske svjetlosti kroz tanku pukotinu. Položaj fotona (mjeren na pukotini) možemo pripremiti veličinom pukotine  $d$ , tako da je raspodjela položaja fotona  $\Delta x = d$ . Međutim, znamo da zbog efekta difrakcije dolazi do širenja snopa svjetlosti, što nam govori da imamo i neku raspodjelu u količini gibanja fotona u  $x$  smjeru,  $\Delta p_x$ . Zbog difrakcije, vidimo da što je  $\Delta x$  manji, to je  $\Delta p_x$  veći, i obratno. Ne možemo istovremeno pripremiti fotone sa svojstvom određenog položaja i sa svojstvom određene količine gibanja. Dolazimo do zaključka da nam

relacija neodređenosti kaže da nije moguće pripremiti ansambl kvantnih objekata tako da je produkt  $\Delta x$  i  $\Delta p_x$  manji od  $\hbar/2$ . Ovakvom formulacijom je jasno da Heisenbergova relacija neodređenosti nije izjava o istodobnom mjerenju opservabli ili međusobnom utjecaju mjerenja.

### 5.3.3 Uvod u kvantno-mehanički formalizam

Dosadašnji sadržaj je osnovni dio Milq kurikulumu namijenjen gimnazijama i učenicima koji vjerojatno neće dalje studirati fiziku na fakultetu. Idući dio je napredni Milq kurikulum, koji se nastavlja na osnovni, te je namijenjen gimnazijama s posebnim programima koji mogu izdvojiti više vremena za fiziku i učenicima koji kasnije žele studirati fiziku na studiju. Daje se kratki uvod u kvantno-mehanički matematički formalizam i njegova primjena na osnovnoj razini, gdje se nadalje razvijaju glavne ideje iz osnovnog dijela.

#### 5.3.3.1 Valna funkcija i operatori

Valna funkcija je već prethodno bila uvedena da bismo opisali ponašanje elektrona u pokusu s dvije pukotine, ali samo kvalitativno. Sada se i matematički uvodi valna funkcija slobodnih elektrona  $\Psi_{E_{kin}}$  koja označava ansambl elektrona koji su pripremljeni da imaju određenu vrijednost svojstva "kinetička energija".

Nadalje, uvodi se novi koncept operatora na način da tražimo nešto što "djeluje" na valnu funkciju i van izvuče određenu vrijednost nekog svojstva. Dakle, u našem slučaju tražimo operator kinetičke energije, tj. tražimo neku matematičku operaciju koja iz valne funkcije elektrona izvuče van vrijednost kinetičke energije. Učenici metodom pokušaja i pogreške dolaze do zaključka da ako primijenimo matematičku operaciju

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \quad (5.1)$$

na valnu funkciju slobodnih elektrona, dobivamo vrijednost kinetičke energije  $E_{kin}$  pomnoženu s nepromijenjenom valnom funkcijom  $\Psi_{E_{kin}}$ .

#### 5.3.3.2 Jednadžba svojstvenih stanja

Nadalje, pitamo se suprotno pitanje: ako imamo neku valnu funkciju  $\psi$ , kako ćemo znati da li ona opisuje ansambl elektrona sa svojstvom kinetičke energije? Pošto sada



imamo operator kinetičke energije, to možemo lako odgovoriti. Ako primijenimo operator na valnu funkciju, te pritom valna funkcija ostane nepromijenjena:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi = E_{kin} \psi \quad (5.2)$$

znamo da valna funkcija ima određeno svojstvo kinetičke energije, te konstanta  $E_{kin}$  koja se pojavi izvan valne funkcije predstavlja vrijednost kinetičke energije. Ova valna funkcija je svojstvena funkcija kinetičke energije, a  $E_{kin}$  je svojstvena vrijednost. To znači da ako radimo mjerenja kinetičke energije na odgovarajućim elektronima ove valne funkcije, uvijek ćemo izmjeriti vrijednost  $E_{kin}$ . Međutim, ako valna funkcija ne zadovoljava gornju jednadžbu, pri mjerenju kinetičke energije odgovarajućih elektrona imat ćemo distribuciju vrijednosti.

### 5.3.3.3 Schrödingerova jednadžba

Sva ova razmatranja bi trebala učenike dobro pripremiti za razumijevanje stacionarne Schrödingerove jednadžbe, koja je također jednadžba svojstvenih stanja, samo za ukupnu energiju, umjesto samo kinetičke energije kako smo imali u gornjim razmatranjima. Rješavanje Schrödingerove jednadžbe znači da tražimo stanja sa svojstvom "ukupna energija". Dobivena stanja se nazivaju stacionarna stanja, za njih se funkcija gustoće vjerojatnosti  $|\psi(x)|^2$  ne mijenja tokom vremena. Ta stanja su iznimno bitna jer ona ne izmjenjuju energiju s okolinom, što nam je bitno da bismo mogli pronaći stacionarna stanja elektrona u atomu.

Schrödingerova jednadžba je osnovna jednadžba kvantne fizike i možemo ju riješiti za neke jednostavnije slučajeve u prirodi, poput elektrona u vodikovom atomu, gdje se iz matematike javlja kvantizacija energije (za razliku od Bohrovog postulata kvantizacije) te se uvodi ideja orbitala.

### 5.3.3.4 Atomi

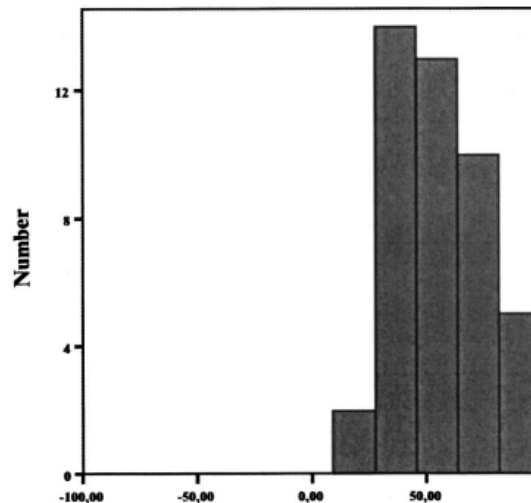
Milq kurikulum završava razmatranjem atoma. Kao i po tradicionalnom pristupu, učenici promatraju linijske spektre atoma nakon čega uočavaju kvantizaciju energije u Franck-Hertzovom pokusu. Potom se raspravlja o Bohrovom modelu atoma, ali s vrlo kritičkim pogledom i razmišljanjem, gdje se ističu razlike i odstupanja od kvantne fizike, poput nezadovoljene Heisenbergove relacije neodređenosti.

Nakon Bohrovog modela, vodikov atom se razmatra na detaljniji način upotrebom Schrödingerove jednadžbe. Pošto je prava Schrödingerova jednadžba za vodikov atom matematički prekompleksna za učenike, kulonski potencijal u modelu atoma se aproksimira beskonačnom potencijalnom jamom s odabranim parametrima, te se rješavanjem Schrödingerove jednadžbe dobije  $-1/n^2$  karakteristika energijskih stanja elektrona u vodikovom atomu.

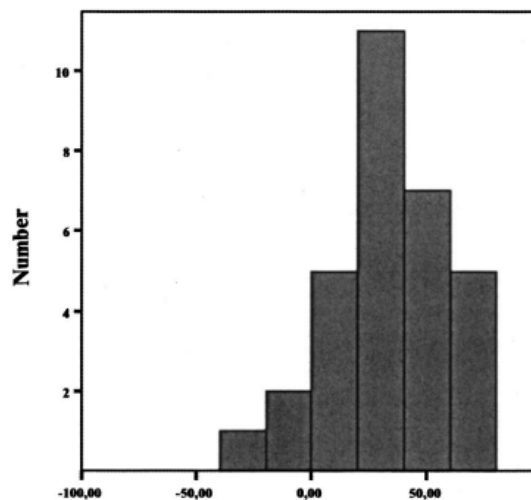
#### 5.4 Uspješnost Milq pristupa

Dakako, najvažnija stavka svakog novog nastavnog programa jest njegov utjecaj i uspješnost na stečeno znanje učenika, kao i njihova novonastala radoznalost, želja i mogućnost za daljnjim efikasnim i uspješnim poučavanjem. Milq pristup je evaluiran u pet njemačkih gimnazija, gdje su neke radile po osnovnom kurikulumu (škole sa 3 sata fizike tjedno), a neke po naprednom kurikulumu (škole sa 5 sati fizike tjedno) [26], te ćemo neke od rezultata prikazati ovdje. Evaluacija se sastojala od konceptualnih pitanja, učeničkih intervjua gdje su se detaljno ispitivala učenička konceptualna razmišljanja te pitanja o učeničkim interesima o fizici valova i kvantnoj mehanici. Konceptualna pitanja su se sastojala od dvije vrste pitanja. U prvom dijelu učenicima su dane 44 izjave na koje su odgovarali sa skalom 1-5, koja označava koliko se učenik slaže s izjavom (1-”potpuno se slažem”, 5-”ne slažem se”). U drugom dijelu postavljena su pitanja otvorenog tipa gdje se npr. trebalo objasniti Heisenbergovo načelo neodređenosti ili se trebala nacrtati slika atoma. Za usporedbu učeničkih rezultata, ista pitanja su dana kontrolnoj grupi koja se sastoji od 35 studenata prve godine fizike sa njemačkog sveučilišta, koji su bili poučavani tradicionalnim kurikulumom kvantne fizike u gimnaziji.

Da bi se uspješnost Milq pristupa izrazila brojem, izračunat je statistički indeks  $C$  iz 29 konceptualnih pitanja, gdje  $C = +100$  predstavlja potpune kvantno-mehaničke koncepte, a  $C = -100$  predstavlja koncepte koji su u suprotnosti s kvantno-mehaničkim konceptima. Na slici (5.9) vidimo distribuciju indeksa vrijednosti  $C$  za (a) učenike koji su poučavani po Milq pristupu (dva razreda su radila po osnovnom, a 3 razreda po naprednom Milq kurikulumu), te za (b) kontrolnu grupu studenata koji su poučavani po tradicionalnom kurikulumu. Učenički prosjek je  $C = +55.8$  ( $\sigma = 19.5$ ),



(a) **Conception index experimental group**

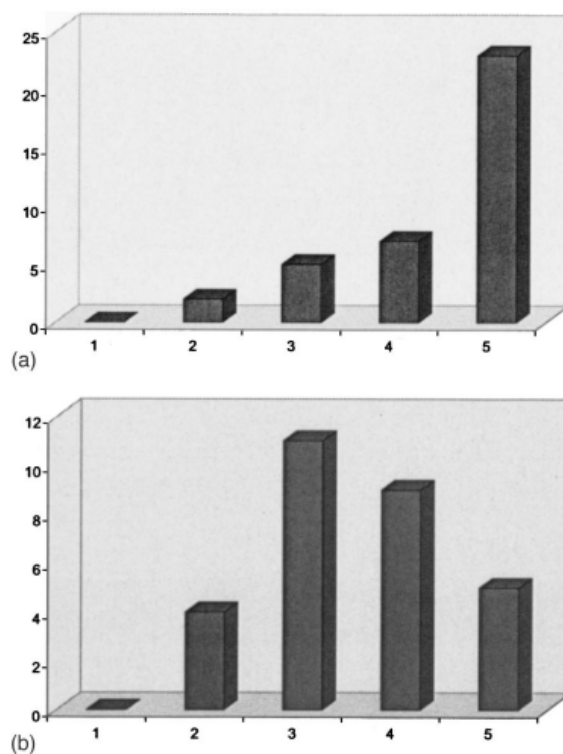


(b) **Conception index control group**

Slika 5.9: Distribucija indeksa koncepcije  $C$ ; (a) učenici koji su učeni po Milq pristupu, (b) studenti prve godine fizike koji su učeni po tradicionalnom kurikulumu. Slika je preuzeta iz [26].

dok je prosjek studenata  $C = +35.2$  ( $\sigma = 23.7$ ). Vidimo da su učenici razvili bolje konceptualno razumijevanje kvantne fizike od studenata prve godine fizike. Ovakvi se rezultati protežu i kroz ostale dijelove evaluacije (intervjui i crteži) gdje učenici pokazuju superiorno razumijevanje koncepta kvantne fizike.

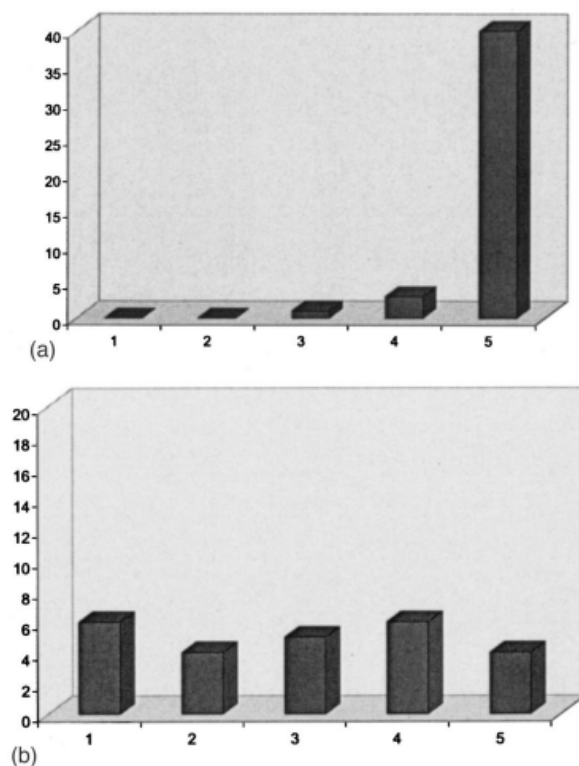
Na slici (5.10) se vide rezultati slaganja s izjavom "Atom ima sličnu strukturu kao i Sunčev sustav (planeti koji kruže oko Sunca)". Učenička grupa je ostvarila prosjek  $+4.38$  što ukazuje na to da se ne slažu s tom izjavom i da im je jasno da Bohrov model atoma ne daje ispravnu sliku, dok je studentska grupa bila malo manje kritična prema toj izjavi, s prosjekom  $+3.52$ .



Slika 5.10: Odgovori na izjavu "Atom ima sličnu strukturu kao i Sunčev sustav (planeti koji kruže oko Sunca)" (1="potpuno se slažem", 5="ne slažem se"); (a) učenici koji su učeni po Milq pristupu, (b) studenti prve godine fizike koji su učeni po tradicionalnom kurikulumu. Slika je preuzeta iz [26].

Na slici (5.11) se vide rezultati slaganja s izjavom "U principu, kvantni objekti mogu istovremeno posjedovati položaj i količinu gibanja". Opet, i ovdje vidimo da učenici imaju drastično bolje shvaćanje osnovnih koncepta kvantne fizike. Prosjek učenika +4.89 pokazuje da se oni uopće ne slažu s tom izjavom, dok prosjek studenata +2.92 pokazuje da i dalje dosta studenata o kvantnoj fizici razmišlja na "klasičan način". U svim ispitanim konceptima razlika konceptualnog znanja je vrlo značajna između učenika i studenata.

Ovi rezultati ukazuju na veliki uspjeh Milq pristupa. Čak i najteži koncepti kvantne fizike su uspješno razvijeni i učenici pokazuju mnogo veće razumijevanje kvantne fizike nego čak i početni studenti fizike koji su pokazali interes, ali su bili počavani tradicionalnim kurikulumom. Mnoge poznate miskoncepcije su izbjegnute.



Slika 5.11: Odgovori na izjavu "U principu, kvantni objekti mogu istovremeno posjedovati položaj i količinu gibanja" (1="potpuno se slažem", 5="ne slažem se"); (a) učenici koji su učeni po Milq pristupu, (b) studenti prve godine fizike koji su učeni po tradicionalnom kurikulumu. Slika je preuzeta iz [26].

## 5.5 Milq pristup u hrvatskom kurikulumu

Da bismo znali koji i kakav sadržaj bi nastavnici trebali podučavati u gimnazijama iz područja kvantne fizike, trebamo se pitati koji nam je točno cilj u učeničkom znanju i razumijevanju te kako ćemo ga ostvariti. "Kurikulum za nastavni predmet Fizika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj" nam daje neke ciljeve u obliku odgojno-obrazovnih ishoda [29]. Navode se dva glavna ishoda gdje učenik analizira valno-čestičnu prirodu svjetlosti i tvari, te analizira modele atoma i energijske spektre.

Slažemo se da su to važni ishodi, pa je bitno da ih kvalitetno odradimo. Već smo vidjeli iz gornje spomenutih istraživanja da tradicionalni oblik poučavanja kvantne fizike ostavlja učenike s mnogo pogrešnih konceptata i nejasnoća. Na svu sreću, baš tu nastupa Milq pristup koji nešto kvalitetnije pristupa poučavanju kvantne fizike i relativno uspješno uklanja spomenute miskoncepcije i poteškoće.

Gledajući hrvatski kurikulum, trebali bismo procijeniti koliko vremena (nastavnih sati) nam ostaje za kvantnu fiziku jer vidimo da Milq pristup zbog svoje opsežnosti i

detaljnosti sadržaja zahtijeva podosta vremena, te se postavlja pitanje koji dio Milq kurikulumu je moguće primijeniti za hrvatske gimnazije. Po našoj procjeni, za nastavni model 4x2 (70 nastavnih sati godišnje) preostaje 9 nastavnih sati za postizanje odgojno-obrazovnog ishoda "Analizira valno-čestičnu prirodu svjetlosti i tvari", dok za nastavni model 4x3 (105 nastavnih sati godišnje) preostaje 13 nastavnih sati. Kao razrada tog ishoda, navodi se: "Matematički opisuje i analizira fotoelektrični učinak", "Opisuje valno-čestični model elektromagnetskog zračenja", "Opisuje de Broglievu hipotezu i difrakciju elektrona. Interpretira valnu funkciju" i kao izborna tema: "Primjenjuje Heisenbergovo načelo neodređenosti". Vidimo da su svi ti ishodi usko povezani s Milq kurikulumom; to je točno sadržaj osnovnog Milq kurikulumu.

Probajmo sada procijeniti koliko bismo nastavnih sati trebali uzeti za odrađivanje pojedinih tema u Milq kurikulumu kako bismo mogli vidjeti koliko toga možemo primijeniti u hrvatskim gimnazijama. Po našoj procjeni: Fotoelektrični efekt - 2 sata, Priprema dinamičkih svojstva - 1 sat, Valno i čestično ponašanje u Mach-Zehnderovom interferometru - 2 do 3 sata, Interpretacija vjerojatnosti - 1 sat. Teme bi se odrađivale po istraživački usmjerenoj nastavi, gdje učenici istražuju i dolaze do saznanja uz pomoć pokusa (simulacija). Ovakvom raspodjelom vremena, cijeli prvi dio osnovnog Milq kurikulumu koji se bavi proučavanjem fotona bi trajao 6 do 7 nastavnih sati. Uočimo da time nismo zahvatili ishod "Opisuje de Broglievu hipotezu i difrakciju elektrona. Interpretira valnu funkciju" (kao ni izbornu temu Heisenbergove relacije neodređenosti). U 4x2 modelu, recimo da taj ishod odradimo tradicionalnim pristupom (bez Milq-a) u 3 nastavna sata. Tada nam ostaje 6 sati za prva dva ishoda, "Matematički opisuje i analizira fotoelektrični učinak" i "Opisuje valno-čestični model elektromagnetskog zračenja", što je taman u okviru prvog dijela Milq kurikulumu koji se bavi fotonima, a traje 6 do 7 sati. Dakle, u 4x2 modelu, Milq kurikulum bi se mogao iskoristiti za analizu fotona, dok bi se drugi dio (analiza elektrona i tvari) učio po tradicionalnom pristupu, uz napatke i povezivanje s naučenim konceptima o fotonima. Također, za zainteresirane učenike bi se na dodatnoj nastavi fizike moglo raspravljati o Heisenbergovoj relaciji neodređenosti u kontekstu fotona, koje su učenici prethodno detaljno proučavali, te povezati i prenijeti koncepte o fotonima na elektrone i povezati sve u jednu sliku.

Drugi dio osnovnog Milq kurikulumu (analiza elektrona), po našoj procjeni, traje nešto dulje: Difrakcija elektrona - 1 do 2 sata, Pokus prolaska elektrona kroz dvije

pukotine i interpretacija vjerojatnosti - 2 do 3 sata, Svojstvo položaja elektrona - 1 sat, Proces mjerenja, redukcija stanja i komplementarnost - 2 sata, Schrödingerova mačka i dekoherencija - 1 sat, Heisenbergova relacija neodređenosti - 2 sata. Ovakvom raspodjelom vremena, cijeli drugi dio osnovnog Milq kurikulumu koji se bavi proučavanjem elektrona bi trajao 9 do 11 nastavnih sati, no ako isključimo teme iz Milq pristupa koje nisu obavezne u hrvatskom kurikulumu (Schrödingerova mačka i Heisenbergova relacija neodređenosti), trajao bi 6 do 8 sati. Ostale teme bi se odrađivale po istraživački usmjerenom nastavi, gdje učenici istražuju i dolaze do saznanja uz pomoć pokusa (simulacija). Tada bi cijeli osnovni Milq kurikulum (bez Schrödingerove mačke, dekoherencije i Heisenbergove relacije neodređenosti) trajao 12 do 15 sati. Dakle, u 4x3 modelu (u kojem imamo 13 sati za analizu valno-čestične prirode svjetlosti i tvari) možemo iskoristiti osnovni Milq kurikulum (bez Schrödingerove mačke, dekoherencije i Heisenbergove relacije neodređenosti) koji bi trajao 12-15 sati. Za zainteresirane učenike bi se na dodatnoj nastavi fizike mogle odraditi teme Schrödingerove mačke, dekoherencije i Heisenbergove relacije neodređenosti kroz 3 sata.

Napredni Milq kurikulum (uvod u kvantno-mehanički formalizam i analiza atoma) bi po našoj procjeni ukupno trajao 14 do 15 sati, od čega pojedine teme: Valna funkcija i operatori - 2 sata, Jednadžba svojstvenih stanja - 1 sat, Schrödingerova jednadžba - 3 sata, Atomi - 8 do 9 sati. U hrvatskom kurikulumu, odgojno-obrazovni ishod iz ovog područja fizike glasi: "Analizira modele atoma i energijske spektre", što uključuje i analizu Rutherfordovog modela atoma, model koji uopće nije zahvaćen Milq kurikulumom. Ostali ishodi u ovom području su: "Analizira emisijske i apsorpcijske spektre", "Analizira Bohrov model atoma", "Opisuje kvantno-mehanički model atoma" i izborna tema "Opisuje proces dobivanja stimulirane emisije fotona (laser)". Za sve ovo nam po našoj procjeni preostaje oko 10 nastavnih sati po 4x3 programu. Vidimo da je napredni Milq kurikulum preopširan i predugotrajan te sadrži teme koje uopće nisu predviđene hrvatskim kurikulumom. Prema tome, napredni Milq kurikulum se ne bi odrađivao, ali bi se pri analizi Bohrovog modela atoma i pri analizi kvantno-mehaničkog modela atoma radili naputci i kritički bi razmišljali o modelima sa usvojenim konceptima iz prethodnih gradiva. Za zainteresirane i napredne učenike bi se mogle pokriti određene teme iz naprednog kurikulumu na dodatnoj nastavi fizike. Valna funkcija i operatori, jednadžba svojstvenih stanja, Schrödinge-

rova jednadžba i konceptualna te matematička osnova za primjenu Schrödingerove jednadžbe na vodikov atom bi se mogli pokriti kroz 8 do 9 nastavnih sati.

Vidimo da se Milq kurikulum može uključiti u hrvatske gimnazije, ali je vremenski relativno uska situacija. Za daljnje istraživanje ove teme, trebao bi se napraviti detaljan plan sata za svaku temu koja se misli odrađivati, te potom vidjeti kako se to vremenski uklapa u detaljni nastavni plan godine. Također, još i bitnije, testirati kako poučavanje Milq kurikulumu izgleda u stvarnom razredu, te korigirati količinu sadržaja ovisno o tome kojom brzinom učenici savladavaju gradivo jer u dosadašnjoj literaturi i istraživanjima nema puno podataka o toj temi. Znamo da se osnovni Milq kurikulum poučavao u programu s 3 sata fizike tjedno, a napredni u programu s 5 sati fizike tjedno, ali ne znamo koliko dugo je trajalo poučavanje određenog Milq kurikulumu.



## Bibliography

- [1] Jeremy L. England, Statistical physics of self-replication, *J. Chem. Phys.* 139, 121923 (2013)
- [2] Artis Svilans, Martin Leijnse, Heiner Linke, Experiments on the thermoelectric properties of quantum dots, *Comptes Rendus Physique*, Volume 17, Issue 10, (2016)
- [3] T. E. Humphrey, R. Newbury, R. P. Taylor, H. Linke, Reversible Quantum Brownian Heat Engines for Electrons, *Phys. Rev. Lett.* 89, 116801 (2002)
- [4] O. Kumar, M. Kaur, Single Electron Transistor: Applications & Problems. *International Journal of VLSI Design & Communication Systems.* 1 (4): 24–29 (2010)
- [5] K. Ono, D. G. Austing, Y Tokura, S. Tarucha, Current Rectification by Pauli Exclusion in a Weakly Coupled Double Quantum Dot System, *Science*, Vol 297, Issue 5585 (2002)
- [6] Patrik Recher, Eugene V. Sukhorukov, Daniel Loss, Quantum Dot as Spin Filter and Spin Memory, *Phys. Rev. Lett.* 85, 1962 (2000)
- [7] Ali A. Shokri, M. Mardaani, K. Esfarjani, Spin filtering and spin diode devices in quantum wire systems, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Volume 27, Issue 3, (2005)
- [8] Arne Brataas, Yu. V. Nazarov, J. Inoue, Gerrit E. W. Bauer, Spin accumulation in small ferromagnetic double-barrier junctions, *Phys. Rev. B* 59, 93 (1999)
- [9] W. Rudziński, J. Barnaś, Tunnel magnetoresistance in ferromagnetic junctions: Tunneling through a single discrete level, *Phys. Rev. B* 64, 085318 (2001)
- [10] Xuxuan Chen, Zhifang Zhou, Yuan-Hua Lin, Cewen Nan, Thermoelectric thin films: Promising strategies and related mechanism on boosting energy conversion performance, *Journal of Materiomics*, Volume 6, Issue 3, (2020)
- [11] A.I. Ekimov, Al.L. Efros, A.A. Onushchenko, Quantum size effect in semiconductor microcrystals, *Solid State Communications*, Volume 56, Issue 11, (1985)

- [12] Yuan Pu, Fuhong Cai, Dan Wang, Jie-Xin Wang, Jian-Feng Chen, Colloidal Synthesis of Semiconductor Quantum Dots toward Large-Scale Production: A Review, *Industrial & Engineering Chemistry Research* 57 (6), 1790-1802 (2008)
- [13] L. Mangolini, E. Thimsen, U. Kortshagen, High-Yield Plasma Synthesis of Luminescent Silicon Nanocrystals, *Nano Letters* 5 (4), 655-659 (2005)
- [14] Xiaodong Pi, Ting Yu, Deren Yang, Water-Dispersible Silicon-Quantum-Dot-Containing Micelles Self-Assembled from an Amphiphilic Polymer, *Part. Part. Syst. Charact.* 7/ (2014)
- [15] C. B. Murray, D. J. Norris, M. G. Bawendi, Synthesis and characterization of nearly monodisperse CdE (E = sulfur, selenium, tellurium) semiconductor nanocrystallites, *J. Am. Chem. Soc.* 1993, 115, 19, 8706–8715 (1993)
- [16] C. B. Murray, C. R. Kagan, M. G. Bawendi, Synthesis and Characterization of Monodisperse Nanocrystals and Close-Packed Nanocrystal, *Assemblies Annual Review of Materials Science Vol. 30:545-610* (2000)
- [17] Danylo Zherebetsky, Marcus Scheele, Yingjie Zhang, Noah Bronstein, Christopher Thompson, David Britt, Miquel Salmeron, Paul Alivisatos, Lin-Wang Wang, Hydroxylation of the surface of PbS nanocrystals passivated with oleic acid, *Vol 344, Science, Issue 6190* (2014)
- [18] Banin, U., Cao, Y., Katz, D. et al. Identification of atomic-like electronic states in indium arsenide nanocrystal quantum dots. *Nature* 400, 542–544 (1999)
- [19] Jiabin Cui, Yossef E. Panfil, Somnath Koley, Doaa Shamalia, Nir Waiskopf, Sergei Remennik, Inna Popov, Meirav Oded, Uri Banin, Colloidal quantum dot molecules manifesting quantum coupling at room temperature, *Nat Commun.* 2019; 10: 5401 (2019)
- [20] Catherine J. Murphy, Jeffery L. Coffey, *Quantum Dots: A Primer, Applied Spectroscopy Vol. 56, Issue 1, pp. 16A-27A* (2002)
- [21] LD Hicks, TC Harman, X Sun, MS Dresselhaus, Experimental study of the effect of quantum-well structures on the thermoelectric figure of merit, *Phys Rev B Condens Matter* . 1996 Apr 15;53(16):R10493-R10496 (1996)

- [22] Akihiro Ishida, Daoshe Cao, Sinsuke Morioka, Martin Veis, Yoku Inoue, Takuji Kita, Enhanced Seebeck coefficient in EuTe/PbTe (100) short-period superlattices, *Appl. Phys. Lett.* 92, 182105 (2008)
- [23] D Radić, AM Kadigrobov, LY Gorelik, RI Shekhter, M Jonson, Self-excited oscillations of charge-spin accumulation due to single-electron tunneling, *Physical Review B* 82 (12), 125311 (2010)
- [24] Jürgen König, Jörg Schmid, Herbert Schoeller, Gerd Schön, Resonant tunneling through ultrasmall quantum dots: Zero-bias anomalies, magnetic-field dependence, and boson-assisted transport, *Phys. Rev. B* 54, 16820 (1996)
- [25] Victor Stenger, *Quantum Quackery, Skeptical Inquirer* Volume 21, No. 1 (1997)
- [26] Rainer Müller, Hartmut Wiesner, Teaching quantum mechanics on an introductory level, *American Journal of Physics* 70, 200 (2002)
- [27] Rainer Müller, Oxana Mishina, Quantum physics in secondary school – milq, arXiv:2012.15162 [physics.ed-ph] (2021)
- [28] Teaching Quantum Physics - MILQ, <https://www.milq.info/en/> (17.10.2021.)
- [29] Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet fizike za osnovne škole i gimnazije u republici hrvatskoj, 2019. [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_10\\_210.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_10_210.html) (25.9.2021.)
- [30] Feynman RP, Leighton RB, Sands M, *The Feynman Lectures on Physics*, vol III. Addison-Wesley, Reading (1966)