Granični teoremi za Galton-Watsonove procese

Domjanić, Dario

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dario Domjanić

GRANIČNI TEOREMI ZA GALTON–WATSONOVE PROCESE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zoran Vondraček

Zagreb, prosinac, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Krajem 19. stoljeća britanski znanstvenik F. Galton, koji je između ostalog izučavao ljudsku evoluciju, pitao se koja je vjerojatnost izumiranja plemićkih prezimena u Ujedinjenom Kraljevstvu. Njegovo pitanje je bilo sljedeće.

> *Ako muškarac s određenim prezimenom ima 0, 1, 2, . . . muških potomaka s vjerojatnostima $p_0, p_1, p_2, \ldots$, kolika je vjerojatnost da će prezime izumrijeti nakon* r *generacija i koja je vjerojatnost svakog broja muških potomaka nakon* r *generacija.*

Galton se za pomoć obratio britanskom matematičaru H.W. Watsonu te su zajedno formulirali matematički model koji danas nazivamo *Galton–Watsonov* proces (ili proces grananja). Model opisuje populaciju koja kreće s jednom jedinkom. Svaka jedinka se razmnožava nezavisno od ostalih i ima jednaku distribuciju potomaka. Zanimljivo je pitanje što možemo reći o graničnom ponašanju takvog procesa. Hoće li populacija izumrijeti, sve više rasti ili se možda stabilizirati u nekakvom ekvilibriju? Koji uvjeti uopće određuju dugoročno ponašanje procesa? Vidjet ćemo da ovakvi procesi imaju svojevrsnu dualnost, ili izumiru ili veličina populacije sve više raste. Pokazat ćemo da očekivani broj potomaka po generaciji radi distinkciju. Neka je m očekivani broj potomaka svake jedinke u sljedećoj generaciji. Tada ćemo govoriti o subkritičnim ($m < 1$), kritičnim ($m = 1$) i superkritičnim ($m > 1$) Galton–Watsonovim procesima.

Rad je strukturiran u tri poglavlja. U prvom poglavlju formalno ćemo definirati Galton–Watsonove procese i proučiti neka njihova svojstva. Pokazat ćemo da subkritični i kritični procesi izumiru gotovo sigurno, dok superkritični preživljavaju s pozitivnom vjerojatnošću. U slučaju preživljavanja superkritičnih procesa diskutirat ćemo brzinu rasta.

Svakom Galton–Watsonovom procesu prirodno možemo pridružiti stablo. U drugom poglavlju ćemo proučiti prostor takvih struktura i pokazati vezu između procesa i njegovog stabla. Konstruirat ćemo vjerojatnosnu mjeru na tom prostoru i odrediti zakon razdiobe stabala koja nastaju Galton–Watsonovim procesom. Uz intuiciju o distribucijama pristranih po veličini, opisat ćemo stabla pristrana po veličini i odrediti zakon razdiobe takvih stabala. Pokazat ćemo da se takva stabla mogu lagano dovesti u vezu s Galton–Watsonovim procesima s imigracijom. To su procesi kod kojih u svakoj generaciji osim jedinki nastalih razmnožavanjem imamo jedinke koje su stigle u proces imigracijom izvana.

U trećem poglavlju bavit ćemo se graničnim ponašanjem Galton–Watsonovih procesa. Odgovorit ćemo na pitanja kolika je brzina rasta superkritičnih procesa ako ne izumru te koliko brzo pada vjerojatnost preživljavanja kod subkritičnih i kritičnih procesa. Dokazi će biti bazirani na vezi distribucija Galton–Watsonovih stabala i stabala pristranih po veličini. Vidjet ćemo da će se u igru umiješati i procesi s imigracijom.

Poglavlje 1

Galton–Watsonovi procesi

1.1 Osnovni pojmovi i rezultati

Definicija 1.1.1. Neka je L slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}^+$ i neka je $(L_i^n : i, n \geq 1)$ familija nezavisnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ distribuiranih kao L . *Galton–Watsonov* proces grananja $(Z_n : n \geq 0)$ definiran je na sljedeći način

$$
\begin{aligned}
Z_0 &= 1, \\
Z_n &= \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} L_i^n.
\end{aligned}
$$

Ovaj proces opisuje razvoj populacije koja kreće od jedne jedinke. Z_n predstavlja broj jedinki u n-toj generaciji. Svaka jedinka koja je bila živa u n-toj generaciji umire u sljedećoj generaciji i nezavisno od ostalih ima slučajan broj djece koji je distribuiran kao L. L_i^n je broj potomaka i-te jedinke iz generacije $n-1$ (primijetimo da je $1 \leq i \leq Z_{n-1}$). Primjer je dan na slici 1.1.

Neka je

$$p_k := P(L = k).$$

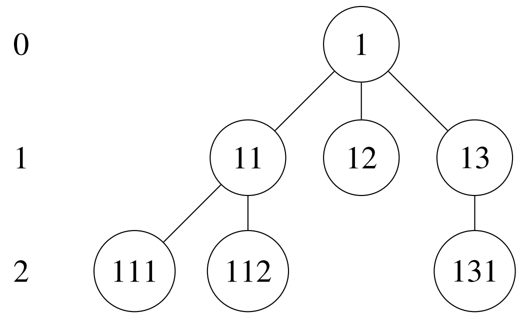
Tada je vjerojatnost da će neka jedinka u sljedećoj generaciji imati k djece upravo p_k pa ćemo $(p_k : k \geq 0)$ zvati *distribucijom potomstva.* L je diskretna slučajna varijabla pa joj možemo pridružiti funkciju izvodnicu vjerojatnosti

$$f(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n,$$

gdje je $s \in \mathbb{R}$ proizvoljan tako da je gornji red dobro definiran (znamo da je red dobro definiran za $0 \leq s \leq 1$). Neka je f_n funkcija izvodnica vjerojatnosti slučajne varijable Z_n,

$$f_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}].$$

Slika 1.1: Prve 3 generacije nekog GW procesa



Proces kreće s jednom jedinkom (čvor 1), $Z_0 = 1$. Ta jedinka ima troje djece (11, 12, 13) pa je $L_1^1 = 3$ i $Z_1 = L_1^1 = 3$. Čvor 11 ima dvoje djece (111, 112) pa je $L_1^2 = 2$, čvor 12 nema djece pa je $L_2^2 = 0$ i čvor 13 ima jedno dijete (131) pa je $L_3^2 = 1$. Stoga je $Z_2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = 2 + 0 + 1 = 3$.

Tada vrijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 1.1.2. $f_n(s) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}(s)$ *za* $0 \leq s \leq 1$.

Dokaz. Računamo

$$\mathbb{E}[s^{Z_n}] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[s^{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} L_i^n} \mid Z_{n-1}]\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[\prod_{i=1}^{Z_{n-1}} s^{L_i^n} \mid Z_{n-1}]\Big] =$$

$$= \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{Z_{n-1}} \mathbb{E}[s^{L_i^n}]\Big] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^L]^{Z_{n-1}}] = \mathbb{E}[f(s)^{Z_{n-1}}].$$

Četvrta jednakost vrijedi zbog nezavisnosti slučajnih varijabli L_i^n, $1 \leq i \leq Z_{n-1}$ i nezavisnosti tih varijabli od Z_{n-1}. Sada imamo $f_n(s) = f_{n-1}(f(s))$ pa iteriranjem dobivamo $f_n(s) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}(s)$.

$\square$

Ukoliko je $Z_n = 0$ tada je $Z_k = 0$ za sve $k \geq n$. Stoga, populacija će izumrijeti ako postoji n takav da je $Z_n = 0$. Događaj $\{\exists n : Z_n = 0\}$, odnosno $\bigcup_{n \geq 1}(Z_n = 0)$ ćemo zvati izumiranje. Neka je q vjerojatnost tog događaja. Tada jer je $(Z_n = 0)_n$ neopadajući niz događaja i zbog neprekidnosti vjerojatnosti na neopadajuće događaje vrijedi

$$q = P\Big(\cup_{n=1}^{\infty}(Z_n = 0)\Big) = \lim_{n \to \infty} P(Z_n = 0). \tag{1.1}$$

Vjerojatnost izumiranja možemo interpretirati i preko funkcije izvodnice.

Korolar 1.1.3. *Vjerojatnost izumiranja je* $q = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$.

Dokaz. Uz dogovor $0^0 = 1$ vrijedi $P(Z_n = 0) = f_n(0)$ pa iz (1.1) slijedi tvrdnja. □

Da bismo predvidjeli broj jedinki u sljedećoj generaciji dovoljno je znati broj jedinki u trenutnoj generaciji i distribuciju potomstva (nije važno koliko je jedinki bilo u prethodnim generacijama). To jest, ponašanje procesa u sljedećem trenutku uvjetno na sadašnjost i prošlost je jednako ponašanju procesa uvjetno samo na sadašnjost. Stoga je jasno da je ovako definiran proces Markovljev lanac. Provjerimo i formalno da Galton–Watsonov proces zadovoljava Markovljevo svojstvo. Imamo

$$\begin{aligned}
P(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n, \dots, Z_1 = i_1, Z_0 = 1) &= \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{i_n} L_i^{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n, \dots, Z_1 = i_1, Z_0 = 1\right) = \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{i_n} L_i^{n+1} = i_{n+1}\right) = P(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n),
\end{aligned}$$

gdje smo koristili da su slučajne varijable $L_1^{n+1}, L_2^{n+1}, \dots, L_{i_n}^{n+1}$ nezavisne od slučajnih varijabli $Z_0, \dots, Z_n$ jer je familija $(L_i^n : i, n \geq 1)$ nezavisna, a $Z_k \in \sigma(L_i^l : l \leq k)$. Stoga je Galton–Watsonov proces grananja Markovljev lanac. Koristeći ovu činjenicu pokažimo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.1.4. *Pretpostavimo* $p_1 \neq 1$. *Tada na događaju neizumiranja* $Z_n \to \infty$ *g.s.*

Dokaz. Pokažimo najprije da je 0 jedino povratno stanje Markovljevog lanca $(Z_n)_n$. Jasno je da je 0 povratno stanje jer ako je $Z_n = 0$ onda je $Z_{n+1} = 0$. Ako je $p_0 = 0$, onda je $Z_{n+1} \geq Z_n$ g.s. za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga, ako je $Z_{n+k} = Z_n$ za neki k, onda je $Z_n = Z_{n+1} = \dots = Z_{n+k}$ pa za $l \in \mathbb{N}$, $l \neq 0$, vrijedi $P(Z_{n+k} = l \text{ za neki } k \mid Z_n = l) \leq P(Z_{n+1} = l \mid Z_n = l) < 1$ jer $p_1 \neq 1$. Time smo pokazali da l različit od 0 ne može biti povratno stanje. Ako je $p_0 > 0$ i ako se stanje l, $l \neq 0$ ponovilo, to znači da ako je $Z_n = l$, onda je $Z_{n+1} \neq 0$ pa $P(Z_n = l \text{ za neki } n \mid Z_0 = l) \leq P(Z_1 \neq 0) = 1 - p_0^l < 1$ jer je $p_0 > 0$. Dakle, stanje l je prolazno.

Ostaje pokazati da $Z_n \to \infty$ g.s. Kako su sva stanja osim 0 prolazna, vjerojatnost da je stanje različito od 0 posjećeno konačno mnogo puta je jednaka 1. Stoga je vjerojatnost da su sva stanja osim 0 posjećena konačno mnogo puta također 1 (presjek prebrojivo mnogo događaja vjerojatnosti 1 ima vjerojatnost 1). Na tom događaju tada vrijedi $Z_n \to \infty$. □

Ova propozicija nam kaže da ako znamo da populacija nije izumrla, možemo očekivati da će populacija u novim generacijama biti sve veća (osim u slučaju da svaka jedinka ima točno jedno dijete). To jest, ukoliko proces ne izumre veličina populacije će eksplodirati.

1.2 Izumiranje i rast

Prošli odjeljak smo završili propozicijom koja kaže da Galton–Watsonovi procesi ili izumru ili eksplodiraju. Prvo ćemo se pozabaviti pitanjem izumiranja, točnije vjerojatnošću tog događaja.

Teorem 1.2.1. *Neka je* $m := \mathbb{E}[L]$.

i) Vjerojatnost izumiranja q *je najmanje rješenje jednadžbe* $f(s) = s$, *za* $s \in [0,1]$ *gdje je* f *funkcija izvodnica pridružena slučajnoj varijabli* L.

ii) Ako je $m \leq 1$ *onda je* $q = 1$ *(osim kada je* $p_1 = 1$*).*
Ako je $m > 1$ *onda je* $q < 1$.

Dokaz. Iz Korolara 1.1.3 imamo $q = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$. Neka je $q_n := f_n(0)$. Kako je $f_{n+1}(s) = f(f_n(s))$, uz $s = 0$ imamo $q_{n+1} = f(q_n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zbog neprekidnosti funkcije f na $[-1,1]$ vrijedi

$$q = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} f(q_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} q_{n-1}) = f(q).$$

Pretpostavimo da za $r \in [0,1]$ vrijedi $f(r) = r$. Deriviranjem f dobivamo

$$f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1} \quad ,\forall s \in \langle -1, 1\rangle.$$

Ta derivacija je nenegativna za $s \in [0,1\rangle$ pa je f neopadajuća na tom intervalu. Imamo

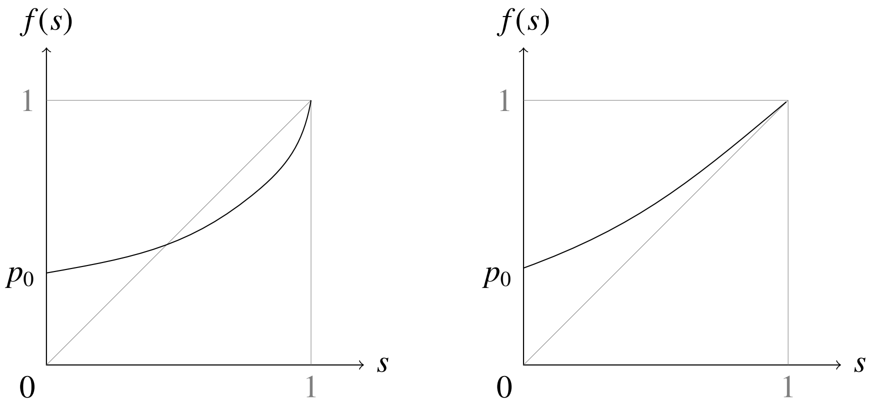
$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(0) = f(0) \leq f(r) = r \\ q_2 &= f(q_1) \leq f(r) = r \\ &\vdots \\ q_n &= f(q_{n-1}) \leq f(r) = r \end{aligned}$$

gdje svaka nejednakost slijedi iz prethodne. Stoga je i $q = \lim_{n\to\infty} q_n \leq r$. Ovime smo pokazali *i)*.

Promotrimo funkciju f na intervalu $[0,1]$. Pretpostavimo da postoji $n \geq 2$ t.d. $p_n = P(L = n) > 0$. Tada je

$$f''(s) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) p_n s^{n-2},$$

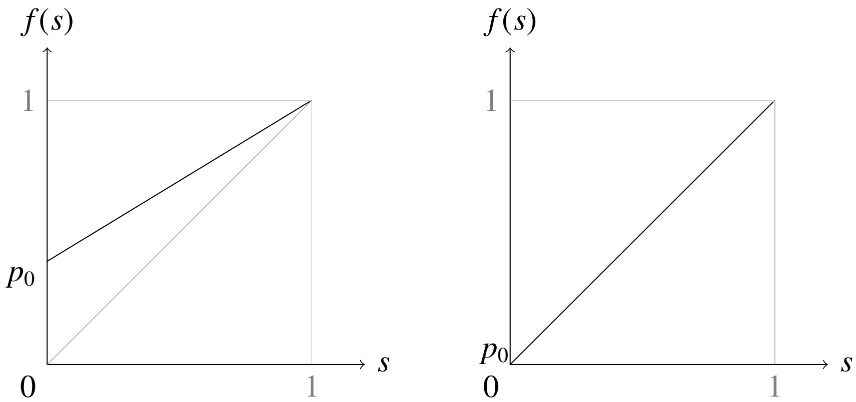
što je veće od 0 za $s > 0$ pa je f strogo konveksna na $[0,1]$. Analogno zaključujemo da je funkcija strogo rastuća na tom intervalu. Funkcija je i neprekidna na tom intervalu te vrijedi $f(0) = p_0 \in [0,1\rangle$ i $f(1) = 1$. Stoga su moguća dva slučaja (prisjetimo se da je $m = f'(1-)$).



(a) $m > 1$ (b) $m \leq 1$

Ako je $m \leq 1$ jednadžba $f(s) = s$ ima samo jedno rješenje na $[0, 1]$ i to je 1 pa je zbog *i)* $q = 1$. Ako je $m > 1$ jednadžba $f(s) = s$ ima 2 rješenja na $[0, 1]$ pa je $q \in [0, 1\rangle$.

U dokazu tvrdnje *ii)* pretpostavili smo da postoji $n \geq 2$ t.d. $p_n = P(L = n) > 0$. Ukoliko nije tako, odnosno ako je $p_n = 0$ za $n \geq 2$ (to znači da je $p_0 + p_1 = 1$) imamo $f(s) = p_0 + p_1 s$, $f'(s) = p_1 \geq 0$. Ovisno o p_1 imamo dva slučaja.



(a) $p_1 < 1$ (b) $p_1 = 1$

Ako je $p_1 < 1$ onda opet imamo $m = p_1 < 1$ i $q = 1$, dok ako je $p_1 = 1$ imamo $q = 0$. □

Kao posljedicu ovog teorema imamo sljedeći korolar.

Korolar 1.2.2. *Ako je $p_1 \neq 1$ tada vrijedi $q = 1$ ako i samo ako $m \leq 1$.*

Dokaz. Slijedi direktno iz Teorema 1.2.1, *ii)*. □

Ovisno o m, GW procese dijelimo na *subkritične* ($m < 1$), *kritične* ($m = 1$) i *superkritične* ($m > 1$). U teoremu 1.2.1 vidjeli smo da subkritični i kritični procesi izumiru s vjerojatnosti 1, dok superkritični proces preživljava s pozitivnom vjerojatnošću. Štoviše iz prethodnog korolara znamo da GW proces izumire g.s. ako i samo ako je $m \le 1$ (osim u trivijalnom slučaju kad je $p_1 = 1$).

Na događaju neizumiranja vrijedi $Z_n \to \infty$ g.s. (Propozicija 1.1.4). Možemo se pitati kolika je brzina te konvergencije, odnosno kolika je brzina rasta populacije. Prirodno je pretpostaviti da Z_n raste kao m^n. Stoga, uz pretpostavku da je $m < \infty$ promotrimo slučajni proces $W = (W_n : n \ge 0)$, gdje je $W_n := Z_n/m^n$, $n \ge 0$.

Lema 1.2.3. *Slučajni proces W je $(\mathbb{F}, P)$ martingal, gdje je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \ge 0)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(L_i^m : 1 \le m \le n, i \ge 1)$.*

Dokaz. Jasno je da je Z_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva pa kako je $m < \infty$ to je i W_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva, to jest W je adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. Kako su sve slučajne varijable nenegativne, očekivanje i uvjetno očekivanje su dobro definirani[1]. Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}\mathbf{1}_{(Z_n=k)} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(L_1^{n+1} + \cdots + L_{Z_n}^{n+1})\mathbf{1}_{(Z_n=k)} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbf{1}_{(Z_n=k)}\mathbb{E}[L_1^{n+1} + \cdots + L_k^{n+1}] \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbf{1}_{(Z_n=k)}\mathbb{E}[L_1^{n+1} + \cdots + L_k^{n+1}] \\ &= \mathbf{1}_{(Z_n=k)}km,\end{aligned}$$

gdje predzadnja jednakost vrijedi jer su L_i^{n+1} nezavisne od $\mathcal{F}_n$. Iz uvjetnog teorema o monotonoj konvergenciji dalje imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{\infty} Z_{n+1}\mathbf{1}_{(Z_n=k)} \mid \mathcal{F}_n\Big] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_{n+1}\mathbf{1}_{(Z_n=k)} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{(Z_n=k)}km \\ &= mZ_n.\end{aligned}$$

Sada napokon imamo

$$\mathbb{E}[W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Z_{n+1}/m^{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = Z_n/m^n = W_n. \tag{1.2}$$

□

[1] Uvjetno očekivanje je inače definirano samo za integrabilne slučajne varijable. Međutim, pokazat ćemo malo kasnije da uvjetno očekivanje možemo definirati za pozitivne slučajne varijable koje nemaju konačno očekivanje (pogledajte odjeljak 3.1) pa je račun opravdan.

Iz dane leme jednostavno slijedi rezultat koji smo i očekivali.

Korolar 1.2.4. *Za* $n \geq 1$ *vrijedi* $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.

Dokaz. Ako u jednadžbi (1.2) računamo očekivanje dobivamo $\mathbb{E}[W_n] = \ldots = \mathbb{E}[W_0] = \mathbb{E}[Z_0] = 1$. Stoga su slučajne varijable W_n integrabilne. Vrijedi $\mathbb{E}[Z_n] = m^n \mathbb{E}[W_n] = m^n$. $\square$

Kako je W nenegativan martingal postoji $W_\infty = \lim_{n\to\infty} W_n$ g.s. (dokaz možete pronaći u [8, str. 30]). Štoviše, znamo da je $W_\infty \geq 0$ i $\mathbb{E}[W_\infty] \leq \mathbb{E}[W_0] = 1$.

Ako proces izumre, jasno je da je tada i $W_\infty = 0$. Iz Teorema 1.2.1 znamo da to vrijedi ako je $m \leq 1$. Pitanje je što možemo reći ako je $m > 1$. Ako je $W_\infty > 0$, onda Z_n raste kao m^n, dok ako je $W_\infty = 0$, a proces nije izumro, rast je sporiji.

Vidimo da je za analizu rasta važan događaj $\{W_\infty > 0\}$. Navedimo stoga još jedan rezultat koji govori o vjerojatnosti tog događaja.

Propozicija 1.2.5. *Ako je* $0 < m < \infty$, *onda je* $P(W_\infty = 0) \in \{q, 1\}$.

Dokaz. Ako je $m \leq 1$, onda znamo da je $W_\infty = 0$. Neka je dalje $1 < m < \infty$. Zbog nezavisnosti familije $(L_i^n : i, n \geq 1)$, nakon prvog koraka imamo Z_1 novih GW procesa koji imaju jednaku distribuciju potomka. Zato vrijedi $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_1} Z_n^i$ gdje su Z_n^i kopije od Z_n, međusobno nezavisne i nezavisne od Z_1. Dijeljenjem s m^n dane jednakosti slijedi

$$\frac{mZ_{n+1}}{m^{n+1}} = \sum_{i=1}^{Z_1} \frac{Z_n^i}{m^n}.$$

Puštanjem $n \to \infty$ dobivamo

$$mW_\infty = \sum_{i=1}^{Z_1} W_\infty^i,$$

gdje su W_∞^i nezavisne kopije slučajne varijable W_∞ i nezavisne od Z_1. Stoga vrijedi $P(W_\infty = 0) = P(W_\infty^1 + \cdots + W_\infty^{Z_1} = 0) = P(W_\infty^1 = 0, \ldots, W_\infty^{Z_1} = 0) = \mathbb{E}[P(W_\infty = 0)^{Z_1}] = f(P(W_\infty = 0))$ pa je $P(W_\infty = 0)$ korijen od $f(s) = s$, $s \in [0, 1]$. Dakle, $P(W_\infty = 0) \in \{q, 1\}$. $\square$

Drugim riječima, ova propozicija kaže da je ili $W_\infty = 0$ g.s. ili je $W_\infty > 0$ g.s. u slučaju neizumiranja. Detaljniju analizu rasta superkritičnih procesa provest ćemo u 3. poglavlju.

Poglavlje 2

Stabla pridružena procesima grananja

2.1 Galton–Watson stabla

Već smo ranije vidjeli da je GW proces prirodno vizualizirati kao stablo (slika 1.1). Pokazat će se od koristi upravo promatrati stabla nastala GW procesom kao posebne strukture. U nastavku ovog dijela ćemo definirati prostor stabala, a sa stablima ćemo raditi kao slučajnim elementima tog prostora. Neka je

$$\mathcal{U} := \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N})^n$$

skup konačnih nizova prirodnih brojeva. Ako su $u, v \in \mathcal{U}$ sa uv ćemo označavati spoj dva niza, gdje je $\emptyset u = u$, $u\emptyset = u$. Na $\mathcal{U}$ definiramo parcijalni uređaj, $u \preccurlyeq v$ ako postoji $z \in \mathcal{U}$ tako da $v = uz$. Pisat ćemo $u \prec v$ ako je $u \preccurlyeq v$ i $u \neq v$, tada kažemo da je u predak od v. Skup svih predaka od v označavamo $A_v = \{u \in \mathcal{U} : u \prec v\}$.

Definicija 2.1.1. $\omega \subset \mathcal{U}$ zovemo *stablo* ako vrijedi:

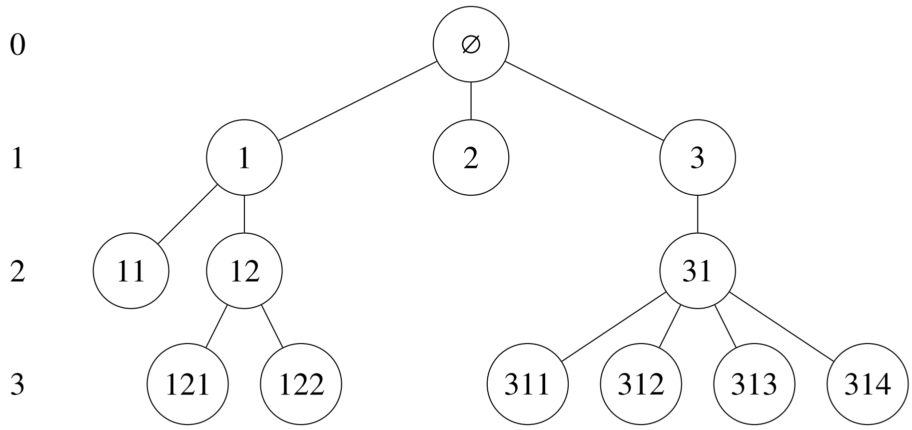
i) $\emptyset \in \omega$,

ii) ako je $u \in \omega$ onda je $A_u \subset \omega$,

iii) ako je $u \in \omega$, onda je $uj \in \omega$ ako i samo ako $1 \leq j \leq k_u(\omega)$ za neki nenegativni $k_u(\omega)$.

Korijen stabla je prazan niz $\emptyset$. Čvor $i_1 \dots i_{n-1} i_n$ je i_n-to dijete od čvora $i_1 \dots i_{n-1}$. Broj $k_u(\omega)$ predstavlja broj djece čvora u u stablu ω. Ako je duljina niza u jednaka $|u| = n$, onda se čvor u nalazi na visini n. Visina stabla je supremum duljina nizova koji se nalaze u stablu. Primjer konačnog stabla visine 3 dan je na slici 2.1.

Slika 2.1: Konačno stablo visine 3



Pogledajmo na ovom primjeru zahtjeve iz Definicije 2.1.1. Korijen stabla je $\emptyset$. Čvor 122 se nalazi u stablu pa znamo da su nizovi 12 i 1 dio stabla. Broj djece čvora 31 je $k_{31} = 4$. Zato se u stablu nalaze nizovi 311,312,313,314, ali ne i 315.

Neka je Ω skup svih stabala definiranih kao u 2.1.1. Za $n \in \mathbb{N}$ i $\omega \in \Omega$ označimo sa $r_n(\omega)$ restrikciju stabla ω na prvih n razina:

$$r_n(\omega) = \{u \in \omega : |u| \leq n\}.$$

Prostor stabala visine manje ili jednake n označavat ćemo s $\Omega^{(n)}$. Na Ω možemo definirati udaljenost

$$d(\omega, \omega') = \frac{1}{1 + \sup\{n \in \mathbb{N} : r_n(\omega) = r_n(\omega')\}}.$$

Da bismo se uvjerili da je ovo metrika provjerimo da vrijedi nejednakost trokuta, ostala svojstva trivijalno vrijede. Neka su $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ tri proizvoljna stabla, uvedimo oznaku $l_{ij} = \sup\{n \in \mathbb{N} : r_n(\omega_i) = r_n(\omega_j)\}$. Ako je $l_{13} \leq l_{12}$ tada je $1/(1 + l_{12}) \leq 1/(1 + l_{13}) \leq 1/(1+l_{13})+1/(1+l_{23})$, odnosno $d(\omega_1, \omega_2) \leq d(\omega_1, \omega_3)+d(\omega_3, \omega_2)$. U slučaju da je $l_{13} > l_{12}$, onda mora vrijediti $l_{23} = l_{12}$ pa imamo $1/(1 + l_{12}) = 1/(1 + l_{23}) \leq 1/(1 + l_{13}) + 1/(1 + l_{23})$, to jest $d(\omega_1, \omega_2) \leq d(\omega_1, \omega_3) + d(\omega_3, \omega_2)$.

Sada kada imamo metrički prostor (Ω, d) možemo promatrati konvergenciju na tom prostoru. Niz $(\omega_n)_n$ konvergira prema ω s obzirom na d ako i samo ako za svaki $h \in \mathbb{N}$ vrijedi $r_h(\omega_n) = r_h(\omega)$ za dovoljno veliki n. S obzirom da je $d(r_h(\omega), r_h(\omega')) \leq d(\omega, \omega')$ funkcija $r_h \colon \Omega \to \Omega^{(h)}$ je neprekidna (pa i izmjeriva). Ovako definirani metrički prostor zadovoljava sljedeća lijepa svojstva.

Lema 2.1.2. *Metrički prostor* (Ω, d) *je separabilan i potpun.*

Dokaz. Označimo skup svih konačnih stabala sa Ω_0 (stabla kojima je visina konačna). Taj skup je prebrojiv. Za $\omega \in \Omega$ niz $(r_n(\omega))_n$ je niz u Ω_0, a iz diskusije prije ove leme lagano je vidjeti da taj niz konvergira prema ω pa je Ω_0 gust u Ω. Stoga je Ω separabilan.

Neka je $(\omega_n)_n$ Cauchyev niz u Ω. Tada je za svaki $h \in \mathbb{N}$ niz $(r_h(\omega_n))_n$ Cauchyev niz u $\Omega^{(h)}$. Za $\omega, \omega' \in \Omega^{(h)}$ ako je $d(\omega, \omega') \leq 1/(1+h)$ onda je $\omega = \omega'$. Stoga je niz $(r_h(\omega_n))_n$ konstantan od nekog člana, jednak ω^h. Kako je funkcija $r_h \colon \Omega \to \Omega^{(h)}$ neprekidna, za $h' > h$ vrijedi $r_h(\omega^{h'}) = r_h(\lim_{n\to\infty} r_{h'}(\omega_n)) = \lim_{n\to\infty} r_h(r_{h'}(\omega_n)) = \lim_{n\to\infty} r_h(\omega_n) = \omega^h$. Zato je $\omega = \bigcup_{h=1}^{\infty} \omega^h \in \Omega$ i ω_n konvergira prema ω. Zaključujemo da je (Ω, d) potpun.

□

Rekli smo da želimo stabla promatrati kao slučajne elemente prostora Ω. Stoga želimo konstruirati σ-algebru i vjerojatnostnu mjeru na tom prostoru. Neka je $u \in \mathcal{U}$ proizvoljan, definirajmo

$$\Omega_u := \{\omega : u \in \omega\}.$$

To je skup svih stabala u Ω koji sadrže u kao čvor ($\Omega_\emptyset = \Omega$). Na Ω definiramo σ-algebru na sljedeći način

$$\mathcal{F} := \sigma(\Omega_u : u \in \mathcal{U}).$$

Tada na prostoru Ω_u imamo σ-algebru $\mathcal{F} \cap \Omega_u$. Ranije uvedena veličina k_u je preslikavanje $k_u \colon \Omega_u \to \mathbb{N}$. S obzirom da je

$$\{k_u \geq j\} \cap \Omega_u = \Omega_{uj}$$

te $\Omega_{uj} \subset \Omega_u$ i $\Omega_{uj} \subset \mathcal{F}$, vrijedi $\{k_u \geq j\} \cap \Omega_u \subset \Omega_u \cap \mathcal{F}$ pa je k_u izmjeriva.

Neka je $z_n(\omega) := \omega \cap \mathbb{N}^n$ (to su svi čvorovi stabla ω na visini n) i neka je $Z_n(\omega)$ kardinalitet od $z_n(\omega)$. Imamo preslikavanja

$$z_n \colon \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$$
$$Z_n \colon \Omega \to \mathbb{N}.$$

Pokažimo da su ta preslikavanja izmjeriva u odgovarajućem paru σ-algebri. Na $\mathbb{N}$ i $\mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ ćemo za σ-algebre uzeti partitivne skupove. Skup $W_S := \{\omega : z_n(\omega) = S\}$, $S \subset \mathbb{N}^n$ možemo zapisati kao $\bigcap_{u\in S} \Omega_u \setminus \bigcup_{v\in\mathbb{N}^n\setminus S} \Omega_v$. Kako su ova unija i presjek prebrojivi $W_S \in \mathcal{F}$ pa je z_n izmjerivo. Za $k \in \mathbb{N}$ događaj $\{\omega : Z_n(\omega) = k\}$ zapišemo kao $\bigcup_{S\subset\mathbb{N}^n,\ |S|=k} W_S$. Imamo prebrojivu uniju skupova iz $\mathcal{F}$ pa je ovaj događaj također u $\mathcal{F}$. Stoga je i Z_n izmjerivo preslikavanje.

Definirat ćemo

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\Omega_u : |u| \leq n).$$

Jasno je da je $\mathcal{F}$ najmanja σ-algebra koja sadrži svaki $\mathcal{F}_n$. Primijetimo da za $u \in \mathbb{N}^n$ vrijedi $\Omega_u = \{\omega : u \in z_n(\omega)\}$. Zato je $\mathcal{F}_n = \sigma(z_m : 0 \leq m \leq n)$.

Za $u \in \mathcal{U}$ definiramo preslikavanje $T_u \colon \Omega_u \to \Omega$

$$T_u(\omega) := \{v : v \in \mathcal{U}, uv \in \omega\}.$$

Skup na desnoj strani dan je kao podskup od $\mathcal{U}$, no iz Definicije 2.1.1 lagano se uvjeriti da se radi o stablu. To stablo možemo zamisliti kao podstablo stabla ω s korijenom u (nije stvarno podstablo jer vrhovi nisu jednaki). Primijetimo da je $k_u = k_\emptyset \circ T_u$ na Ω_u. Nadalje za $\omega \in \Omega$, $u, v \in \mathcal{U}$ vrijedi $uv \in \omega$ ako i samo ako $u \in \omega$ i $v \in T_u(\omega)$. Koristeći ovu ekvivalenciju pokažimo sada da je preslikavanje T_u izmjerivo u odgovarajućem paru σ-algebri. Za $u, v \in \mathcal{U}$ imamo $T_u^{-1}(\Omega_v) \cap \Omega_u = \Omega_{uv}$, a ovaj događaj se nalazi u $\mathcal{F}$. Ako je $|u| = n$ i $|v| = k$ ovu ekvivalenciju možemo izreći preko z_n i Z_n:

$$uv \in z_{n+k}(\omega) \Leftrightarrow u \in z_n(\omega) \quad \text{i} \quad v \in z_k(T_u(\omega)) \tag{2.1}$$

$$Z_{n+k}(\omega) = \sum_{u \in z_n(\omega)} Z_k \circ T_u(\omega). \tag{2.2}$$

Sada smo napokon spremni konstruirati vjerojatnosnu mjeru na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ i uspostaviti vezu između GW procesa i stabala. Da bismo povezali niz $(Z_n)_n$ s GW procesom konstruirat ćemo takvu vjerojatnosnu mjeru da su slučajne varijable k_u nezavisne i jednako distribuirane. Te varijable međutim nemaju istu domenu stoga ćemo morati biti malo oprezniji (tu će nam pomoći slučajne varijable T_u).

Teorem 2.1.3. *Neka je $q = (q(j) : j \in \mathbb{N})$ neka vjerojatnosna mjera na $\mathbb{N}$. Tada vrijedi sljedeće.*

i) Postoji jedinstvena mjera P_q na $(\Omega, \mathcal{F})$ takva da $k_\emptyset$ ima distribuciju q i uvjetno na $\{k_\emptyset = j\}$ varijable T_i, $1 \leq i \leq j$ su nezavisne u odnosu na vjerojatnosnu mjeru P_q.

ii) Za $n \in \mathbb{N}$ uvjetno na $\mathcal{F}_n$ varijable T_u ($u \in z_n$) su nezavisne i imaju zakon razdiobe P_q.

iii) Niz slučajnih varijabli $(Z_n)_n$ definiran na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P_q)$ čine GW proces sa distribucijom potomstva q i $Z_0 = 1$.

Dokaz. Neka je $\Omega^* := \mathbb{N}^{\mathcal{U}} = \prod_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{N}_u$ gdje je $\mathbb{N}_u = \mathbb{N}$. Označimo projekciju na u-tu koordinatu sa $k_u^* \colon \Omega^* \to \mathbb{N}$ i sa $k_{u_1,\dots,u_n}^* \colon \Omega^* \to \mathbb{N}^n$ projekciju na koordinate $u_1, \dots, u_n$. Prostoru Ω^* možemo pridružiti σ-algebru $\mathcal{F}^*$ generiranu cilindrima. Tada po teoremu Kolmogorova znamo da možemo prostoru $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$ pridružiti vjerojatnosnu mjeru $P_q^* = q^{\mathcal{U}} = \bigotimes_{u \in \mathcal{U}} q_u$, gdje je $q_u = q$. Definirajmo preslikavanje $\psi \colon \Omega^* \to \Omega$ sa

$$\psi(\omega^*) := \{u = j_1 \dots j_p : p \in \mathbb{N}, j_{k+1} \leq k_{j_1 \dots j_k}^*(\omega^*) \text{ za } 0 \leq k \leq p\}.$$

Broj $k_{j_1 \dots j_k}^*(\omega^*)$ možemo shvatiti kao broj djece čvora $j_1 \dots j_k$ (prostor Ω^* na svakoj u-toj koordinati sadrži informaciju koliko čvor u treba imati djece). To ne znači da svaki ω^*

određuje jedno stablo. Na primjer ako je $k^*_{123}(\omega^*) = 4$, a $k^*_1(\omega^*) = 0$, ne možemo sastaviti takvo stablo. Preslikavanje ψ je definirano tako da ne uključuje čvorove poput 123 iz prošlog primjera u stablo. Zbog toga je jasno da to preslikavanje nije injektivno (npr. za bilo koju vrijednost $k^*_{123}(\omega^*)$ dobivamo isto stablo). Pokažimo sada da je ψ izmjerivo preslikavanje. Neka je $u = j_1 \dots j_p$, tada vrijedi

$$\psi^{-1}(\Omega_u) = \{\omega^* : k^*_{j_1\dots j_k}(\omega^*) \geq j_{k+1} \text{ za } 0 \leq k < p\},$$

a taj skup se nalazi u $\mathcal{F}^*$ zbog izmjerivosti projekcija k^*_v, $v \in \mathcal{U}$. Sada vjerojatnost na Ω možemo definirati kao

$$P_q = P^*_q \circ \psi^{-1}.$$

Neka je $T^*_u \colon \Omega^* \to \Omega^*$ definirano tako da vrijedi $k^*_v \circ T^*_u = k^*_{uv}$. Tada su T_u i T^*_u povezani relacijom

$$T_u \circ \psi = \psi \circ T^*_u \quad \text{za } u \in \mathcal{U} \text{ na } \psi^{-1}(\Omega_u).$$

Izmjerivost preslikavanja T^*_u opet slijedi iz izmjerivosti projekcija. Za fiksan $n \in \mathbb{N}$ promotrimo varijable $(T^*_u)_{|u|=n}$. Lagano se pokaže da je familija $\{\sigma(k^*_u), u \in \mathcal{U}\}$ nezavisna pa su nezavisne σ-algebre nastale iz neke njezine particije. Odavde slijedi nezavisnost familije $(T^*_u)_{|u|=n}$. Pokažimo da T_u ima zakon razdiobe P^*_q. Za to je dovoljno pokazati da za svaki Borelov pravokutnik $A = k^{*\,-1}_{u_1,\dots,u_k}(M)$ gdje je $M = M_1 \times \cdots \times M_k$ vrijedi $P^*_q(T^*_u \in A) = P^*_q(A)$. Imamo $P^*_q(A) = \prod_{i=1}^k \sum_{m\in\mathbb{N}, m\in M_i} q_{u_i}(m) = \prod_{i=1}^k \sum_{m\in\mathbb{N}, m\in M_i} q_{uu_i}(m) = P^*_q(T^*_u \in A)$.

Neka je $A \in \mathcal{F}$ i $u \in \mathcal{U}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} P_q(T_u \in A) = P_q(T_u^{-1}(A)) = P^*_q(\psi^{-1}(T_u^{-1}(A))) = P^*_q(T_u \circ \psi \in A) = \\ = P^*_q(\psi \circ T^*_u \in A) = P^*_q(\psi \in A) = P^*_q(\psi^{-1}(A)) = P_q(A) \end{aligned}$$

pa slučajne varijable T_u imaju zakon razdiobe P_q. Uvjetno na $\sigma(z_m : 0 \leq m \leq n) = \mathcal{F}_n$ (primijetimo da to samo znači fiksiranje svih z_n), za $u, v \in \mathbb{N}^n$ i $A, B \in \mathcal{F}$ imamo

$$\begin{aligned} P_q(T_u \in A)P_q(T_v \in B) &= P^*_q(\psi \circ T^*_u \in A)P^*_q(\psi \circ T^*_v \in B) \\ &= P^*_q(\psi \circ T^*_u \in A, \psi \circ T^*_v \in B) \\ &= P^*_q(T_u \circ \psi \in A, T_v \circ \psi \in B) \\ &= P^*_q(\psi^{-1}(T_u^{-1}(A)) \cap \psi^{-1}(T_v^{-1}(B))) \\ &= P^*_q(\psi^{-1}(T_u^{-1}(A) \cap T_v^{-1}(B))) \\ &= P_q(T_u^{-1}(A) \cap T_v^{-1}(B)) \\ &= P_q(T_u \in A, T_v \in B). \end{aligned}$$

Stoga su uvjetno na $\mathcal{F}_n$ varijable $(T^*_u)_{|u|=n}$ nezavisne.

Ostaje još pokazati da slučajne varijable $(Z_n)_n$ čine GW proces sa distribucijom potomstva q. Za svaki $\omega \in \Omega$ je $z_0(\omega) = \{\varnothing\}$ pa je $Z_0 = 1$. Koristeći relaciju (2.2) uz $k = 1$ imamo

$$Z_{n+1}(\omega) = \sum_{u \in z_n(\omega)} Z_1 \circ T_u(\omega).$$

Uvjetno na $\mathcal{F}_n$ slučajne varijable $L_u := Z_1 \circ T_u$ su nezavisne i jednako distribuirane. Događaj $\{Z_1 = k\}$ je jednak događaju $\{k_\varnothing = k\}$. Zakon razdiobe od L_u dan je sa $P_q(L_u = k) = P_q(Z_1 \circ T_u = k) = P_q(Z_1 = k) = P_q(k_\varnothing = k) = P_q^*(k_\varnothing^* = k) = q(k)$ pa je $(Z_n)_n$ GW proces po definiciji. □

Na temelju ovog teorema GW stabla možemo definirati na sljedeći način.

Definicija 2.1.4. Slučajna varijabla τ koja poprima vrijednosti u prostoru stabala Ω je GW stablo s distribucijom potomaka q ako su za $n \in \mathbb{N}$ uvjetno na $\{k_\varnothing(\tau) = n\}$ "podstabla" $T_1(\tau), \ldots, T_n(\tau)$ nezavisna i distribuirana kao τ te je distribucija od $k_\varnothing(\tau)$ jednaka q.

Pretpostavljamo da krećemo od nekog GW procesa sa zadanom distribucijom p . Ako u Definiciji 1.1.1 promatramo prostor stabala $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$, tada stablo ω možemo shvatiti kao realizaciju GW procesa određenog sa $(L_i^n(\omega) : 1 \leq i \leq Z_{n-1}(\omega), n \geq 1)$. Stoga ćemo u nastavku mjeru P_p označavati sa **GW**. Slučajna varijabla $T : \Omega \to \Omega$, koja je identiteta ima zakon razdiobe **GW**. Po Definiciji 2.1.4 T je GW stablo. Iz Teorema 2.1.3 lagano slijedi da za $\omega_n \in \Omega^{(n)}$ vrijedi

$$\mathbf{GW}(r_n(T) = \omega_n) = \prod_{u \in \omega_n, |u| < n} p(k_u(\omega_n)).$$

pa se **GW** ponaša očekivano na stablima konačne visine.

2.2 Stabla pristrana po veličini

U prethodnom odjeljku smo pokazali kako s GW procesom možemo formirati slučajno stablo. Zakon razdiobe tog stabla bio je **GW**. U ovom odjeljku ćemo promotriti drugi način formiranja slučajnog stabla koji ćemo zvati *GW proces pristran po veličini*. Stablo nastalo takvim procesom će imati drugi zakon razdiobe koji ćemo označavati sa $\widehat{\mathbf{GW}}$. Važnu ulogu u ovoj konstrukciji čine distribucije pristrane po veličini.

Definicija 2.2.1. Neka je X nenegativna slučajna varijabla sa konačnim očekivanjem. Slučajna varijabla $\widehat{X}$ ima distribuciju pristranu po veličini ako je

$$\mathbb{E}[g(\widehat{X})] = \frac{\mathbb{E}[Xg(X)]}{\mathbb{E}[X]}$$

za svaku pozitivnu Borelovu funkciju g.

Napomena 2.2.2. Ako je X nenegativna slučajna varijabla na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s konačnim očekivanjem, onda je dobro definirana vjerojatnosna mjera takva da za $A \in \mathcal{F}$ vrijedi $\widehat{P}(A) = \int_A \frac{X}{\mathbb{E}[X]} \,\mathrm{d}P$. Iz prethodne definicije vrijedi $P(\widehat{X} \in A) = \widehat{P}(A)$ pa $\widehat{X}$ ima distribuciju $\widehat{P}$.

Neka je L diskretna slučajna varijabla s distribucijom p i očekivanjem m. Tada $\widehat{L}$ ima distribuciju $P(\widehat{L} = k) = kp_k/m$. Distribuciju pristranu po veličini možemo interpretirati na sljedeći način. Pretpostavimo da imamo kutiju s kuglicama numeriranim 1,2,3,...i da je vjerojatnost odabira kuglice k jednaka p_k. Ako za svaki k, kuglicu numeriranu k zamijenimo sa k kuglica numeriranih k, tada je vjerojatnost da ćemo izvući kuglicu k jednaka kp_k/m. Budući da je $P(\widehat{L} = 0) = 0$, vrijedi $\widehat{L} \geq 1$ g.s.

Neka je $(\widehat{L_n})_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli distribuiranih kao $\widehat{L}$. GW stablo pristrano po veličini konstruirat ćemo na sljedeći način. Krećemo sa čvorom v_0 koji ima $\widehat{L_1}$ djece. Odaberemo slučajno jedno dijete v_1. To dijete će imati $\widehat{L_2}$ djece. Ostala djeca čvora v_0 će imati distribuciju potomaka p. Tako nastavljamo dalje, biramo slučajno jedno dijete v_2 od čvora v_1 i pridružujemo mu $\widehat{L_3}$ djece, ostala djeca imaju distribuciju potomaka p.... Ovaj postupak beskonačno ponavljamo. Stablo konstruirano ovakvim procesom prikazano je na slici 2.2.

Za $u \in \mathcal{U}$, označimo sa U_u slučajnu varijablu koja ima uniformnu distribuciju na $\{1, \dots, k_u\}$. Ona će nam služiti da opišemo događaj biranja koje dijete od čvora v_i ćemo proglasiti v_{i+1}. Tada gore opisano stablo možemo napisati kao presjek prebrojivo mnogo događaja oblika $\{\widehat{L_i} = k\}$, $\{k_u = l\}$ za $u \notin \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$, $\{U_{v_i} \circ k_{v_i} = j\}$ gdje su $k, l, j \in \mathbb{N}_0$. Kako su pripadne funkcije izmjerive ovi događaji se nalaze u $\mathcal{F}$. Stoga ovakvim postupkom možemo konstruirati slučajnu varijablu $\widehat{T} \colon \Omega \to \Omega$.

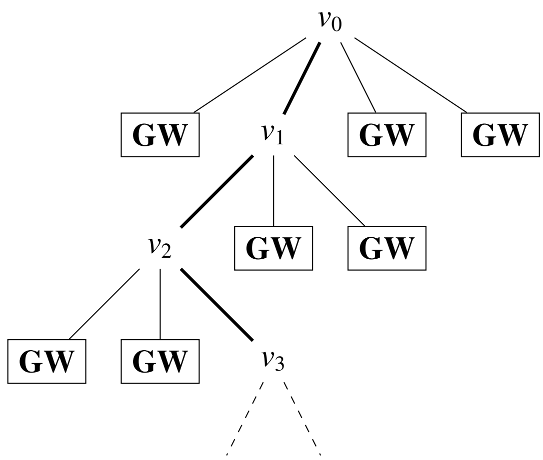
Neka je $\widehat{\mathbf{GW}}_*$ zajednička distribucija slučajne varijable $\widehat{T}$ i niza $(v_0, v_1, \dots)$ i neka je $\widehat{\mathbf{GW}}$ marginalna distribucija na prostoru Ω. Niz $(v_0, v_1, \dots)$ označava koji čvorovi u danom stablu imaju "specijalnu" distribuciju potomstva.

Za $t \in \Omega$ neka je $[t]_n$ skup svih stabala $\omega \in \Omega$ takvih da je $r_n(\omega) = r_n(t)$ (ako je visina od t manja od n, onda je $[t]_n = \{t\}$). Za čvor v koji se nalazi na n-toj razini stabla t neka $[t; v]_n$ označava skup stabala $\omega \in \Omega$ takvih da je $\omega \in [t]_n$ i ω ima istaknuti put od korijena koji prolazi kroz v (kako su u stablu dva vrha povezana samo jednim putem, početak puta od korijena do v je jedinstven).

Uzmimo stablo t visine barem $n + 1$ takvo da korijen ima k djece. Podstabla djece označimo sa $t^{(1)}, \dots, t^{(k)}$. Čvor v koji se nalazi na razini $n + 1$ nalazi se u jednom od ovih podstabala, recimo $t^{(i)}$. Za mjeru $\mathbf{GW}$ vrijedi

$$\mathbf{GW}([t]_{n+1}) = p_k \prod_{j=1}^{k} \mathbf{GW}([t^{(j)}]_n) = kp_k \cdot \frac{1}{k} \cdot \mathbf{GW}([t^{(i)}]_n) \cdot \prod_{j \neq i} \mathbf{GW}([t^{(j)}]_n). \tag{2.3}$$

Slika 2.2: GW stablo pristrano po veličini



Kako je $\widehat{L} \geq 1$ g.s. stabla nastala ovakvim procesom će imati beskonačan niz $(v_0, v_1, \dots)$, zato će biti beskonačne visine pa nema izumiranja. Taj niz čini "kralježnicu" stabla, ostali čvorovi imaju jednaku distribuciju potomstva p pa su njihova podstabla međusobno nezavisne kopije GW stabala (takva stabla su na slici označena pravokutnicima).

Slično za mjeru $\widehat{\mathbf{GW}}_*$ imamo

$$\widehat{\mathbf{GW}}_*([t; v]_{n+1}) = \frac{kp_k}{m} \cdot \frac{1}{k} \cdot \widehat{\mathbf{GW}}_*([t^{(i)}; v]_n) \cdot \prod_{j \neq i} \mathbf{GW}([t^{(j)}]_n). \tag{2.4}$$

Pokažimo indukcijom da vrijedi

$$\widehat{\mathbf{GW}}_*([t; v]_n) = \frac{1}{m^n} \mathbf{GW}([t]_n). \tag{2.5}$$

Jednakost očito vrijedi za $n = 0$ jer se sva stabla podudaraju u čvoru pa su vjerojatnosti na obje strane jednake 1. Pretpostavimo sada da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi (2.5). Tada uvrštavanjem u (2.4) dobivamo $\widehat{\mathbf{GW}}_*([t; v]_{n+1}) = \frac{kp_k}{m} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{m^n} \mathbf{GW}([t^{(i)}]_n) \cdot \prod_{j \neq i} \mathbf{GW}([t^{(j)}]_n)$, a iz (2.3) to je jednako $\frac{1}{m^{n+1}} \mathbf{GW}([t]_{n+1})$. Iz ove jednakosti jednostavno slijedi pomalo neočekivan zaključak. Ako je dano prvih n razina stabla $\widehat{T}$, čvor v_n u nizu $(v_0, v_1, \dots)$ je uniformno distribuiran na n-toj razini u odnosu na $\widehat{\mathbf{GW}}_*$.

Kako jednakost (2.5) vrijedi za svaki n i $v \in z_n(t)$, jednostavno možemo odrediti marginalnu distribuciju na Ω, $\widehat{\mathbf{GW}}([t]_n) = \sum_{v \in z_n(t)} \widehat{\mathbf{GW}}_*([t; v]_n) = Z_n(t) \cdot \widehat{\mathbf{GW}}_*([t; v]_n)$. Kao ranije definiramo slučajnu varijablu $W_n(t) := Z_n(t)/m^n$. Tada imamo

$$\widehat{\mathbf{GW}}([t]_n) = W_n(t) \cdot \mathbf{GW}([t]_n). \tag{2.6}$$

Zbog ove jednakosti kažemo da je distribucija $\widehat{\mathbf{GW}}$ pristrana po veličini. Štoviše, pristranost distribucije po veličini se očituje u sljedećem rezultatu.

Lema 2.2.3. *Za $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan vrijedi $\widehat{\mathbf{GW}}(Z_n = k) = \mathbf{GW}(\widehat{Z_n} = k)$.*

Dokaz. Skup $\{[t]_n : t \in \Omega\}$ čini particiju od Ω. Lagano se vidi da je relacija $\omega_1 \sim \omega_2$ ako $r_n(\omega_1) = r_n(\omega_2)$ relacija ekvivalencije. Kako je prostor konačnih stabala prebrojiv, postoji niz $(t_i)_i$ predstavnika klasa ekvivalencije, $[t_i]_n = \{\omega \in \Omega : \omega \sim t_i\}$. Tada je

$$\{Z_n = k\} = \bigcup_i \{\omega \in [t_i]_n : Z_n(\omega) = k\}.$$

Neka je $(t_{i_j})_j$ podniz od $(t_i)_i$ takav da $Z_n(t_{i_j}) = k$. Gornji događaj tada možemo zapisati kao

$$\{Z_n = k\} = \bigcup_j [t_{i_j}]_n.$$

Dalje računamo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{GW}}(Z_n = k) &= \sum_j \widehat{\mathbf{GW}}([t_{i_j}]_n = \sum_j W_n(t_{i_j})\mathbf{GW}([t_{i_j}]_n) \\
&= \sum_j \frac{k}{m^n}\mathbf{GW}([t_{i_j}]_n) = \frac{k}{m^n}\mathbf{GW}(Z_n = k) \\
&= \mathbf{GW}(\widehat{Z_n} = k).
\end{aligned}$$

□

GW stablo pristrano po veličini možemo povezati s *GW procesom s imigracijom*. Taj proces definiran je na sljedeći način. Proces kreće s 0 jedinki, a karakteriziraju ga dvije distribucije: ranije spomenuta distribucija potomstva i distribucija imigracije. U n-toj generaciji ($n \geq 1$) Y_n novih jedinki dolazi u proces, gdje su Y_n nezavisne i sve imaju jednaku distribuciju imigracije. Sve jedinke razmnožavaju se nezavisno po zakonu distribucije potomstva. Stoga ako $(v_0, v_1, \dots)$ izoliramo iz stabla pristranog po veličini i potomke tih čvorova zamislimo kao imigraciju, očito vrijedi da je $(Z_n - 1)_n$ uz zakon razdiobe $\widehat{\mathbf{GW}}$ proces s imigracijom gdje je $Y_n = \widehat{L_n} - 1$.

Poglavlje 3

Granično ponašanje Galton–Watsonovih procesa

3.1 Osvrt na uvjetno očekivanje

Prije nego što krenemo s graničnim teoremima treba prodiskutirati jednu tehničku stvar. Prisjetimo se da pri definiranju uvjetnog očekivanja slučajne varijable s obzirom na neku σ-algebru zahtijevamo integrabilnost te slučajne varijable. U nastavku ćemo promatrati nizove pozitivnih slučajnih varijabli čiji limesi nemaju nužno konačno očekivanje. Htjet ćemo računati uvjetna očekivanja i takvih varijabli. Stoga treba proširiti definiciju uvjetnog očekivanja, ali tako da se dobro ponaša ukoliko postoji očekivanje, to jest da se podudara sa starom definicijom.

Neka je X nenegativna slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, takva da je $\mathbb{E}[X] = \infty$. Za $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ želimo naći $\mathcal{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu Y, $0 \leq Y \leq \infty$, tako da za svaki $G \in \mathcal{G}$ vrijedi

$$\int_G X \,\mathrm{d}P = \int_G Y \,\mathrm{d}P.$$

Promotrimo slučajne varijable $X_M := \min(X, M)$, $M \in \mathbb{N}$. One su integrabilne pa je dobro definirano $Y_M := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$. Dakle,

$$\int_G X_M \,\mathrm{d}P = \int_G Y_M \,\mathrm{d}P \text{ za sve } G \in \mathcal{G}.$$

Kako je $X_M \geq 0$ i $X_M \nearrow X$, po teoremu o monotonoj konvergenciji vrijedi

$$\lim_{M\to\infty} \int_G X_M \,\mathrm{d}P = \int_G X \,\mathrm{d}P.$$

S druge strane $X_M \nearrow X$ povlači da je $(Y_M)_M$ rastući niz pa postoji Y takav da $Y_M \nearrow Y$ (Y može biti i beskonačno). Budući da je $X_M \geq 0$, slijedi da je i $Y_M \geq 0$ g.s. Sada opet primjenjujući teorem o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{M\to\infty} \int_G Y_M \,\mathrm{d}P = \int_G Y \,\mathrm{d}P.$$

Stoga na koncu imamo

$$\int_G X \,\mathrm{d}P = \lim_{M\to\infty} \int_G X_M \,\mathrm{d}P = \lim_{M\to\infty} \int_G Y_M \,\mathrm{d}P = \int_G Y \,\mathrm{d}P.$$

Kako su $(Y_M)_M$ $\mathcal{G}$-izmjerive i Y je $\mathcal{G}$-izmjeriva. Sada možemo definirati

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] := Y.$$

Jednako kao i u slučaju standardnog uvjetnog očekivanja se pokazuje da je Y g.s. jedinstvena. Rezultat koji ćemo često koristiti je sljedeći.

Lema 3.1.1. *Neka je $X \geq 0$. Ako je $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] < \infty$ g.s., onda je $X < \infty$ g.s.*

Dokaz. Označimo kao ranije $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$. X možemo zapisati kao $X\mathbf{1}_{(X<\infty)} + X\mathbf{1}_{(X=\infty)}$. Stavimo $Z := \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X<\infty)} \mid \mathcal{G}]$ i $W := \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X=\infty)} \mid \mathcal{G}]$. Tada za $G \in \mathcal{G}$ vrijedi

$$\int_G Y \,\mathrm{d}P = \int_G X \,\mathrm{d}P = \int_G X\mathbf{1}_{(X<\infty)} \,\mathrm{d}P + \int_G X\mathbf{1}_{(X=\infty)} \,\mathrm{d}P = \int_G (Z + W) \,\mathrm{d}P.$$

Zbog jedinstvenosti g.s. uvjetnog očekivanja zaključujemo da je $Y = W + Z$ g.s. W možemo zapisati kao $\infty \cdot P(X = \infty \mid \mathcal{G})$. Sada ukoliko je $Y < \infty$ g.s., onda je $P(X = \infty \mid \mathcal{G}) = 0$ g.s. pa je

$$P(X = \infty) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(X=\infty)} \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[P(X = \infty \mid \mathcal{G})] = 0.$$

□

Također ćemo koristiti sljedeće verzije već poznatih rezultata.

Propozicija 3.1.2. *Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nenegativnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.*

i) (uvjetni teorem o monotonoj konvergenciji) Ako je $X_n \leq X_{n+1}$ g.s. za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $X_n \nearrow X$ (X može biti beskonačno), onda

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \nearrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \text{ g.s.}$$

ii) (uvjetna Fatouova lema) $\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} \mid \mathcal{G}]] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$

Dokaz. Pokažimo prvo *i*). Zbog monotonosti niza $(X_n)_n$ imamo $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \nearrow Y$ (Y može biti beskonačno). Za $G \in \mathcal{G}$ koristeći obični teorem o monotonoj konvergenciji dva puta dobivamo

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_G Y] = \lim_n \mathbb{E}[\mathbf{1}_G \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]] = \lim_n \mathbb{E}[\mathbf{1}_G X_n] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_G X].$$

Dokažimo sada *ii*). Neka je $Y_n := \inf_{k\geq n} X_k$ i $Y := \liminf_{n\to\infty} X_n$. Tada $Y_n \nearrow Y$. Zbog monotonosti vrijedi $\mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_k \mid \mathcal{G}]$ za $k \geq n$ pa je

$$\mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{G}] \leq \inf_{k\geq n} \mathbb{E}[X_k \mid \mathcal{G}].$$

Upravo pokazana tvrdnja *i*) sada povlači

$$\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}].$$

□

Napomena 3.1.3. Razlika klasičnih uvjetnih teorema o monotonoj konvergenciji i Fatouove leme u odnosu na prošlu propoziciju je zahtjev da su slučajne varijable X i $\liminf_{n\to\infty} X_n$ integrabilne.

Navedimo još jedan teorem koji će nam trebati za dokaz Kesten–Stigum teorema. Teorem govori o konvergenciji submartingala koji imaju g.s. ograničena uvjetna očekivanja s obzirom na neku σ-algebru. Teorem se dokazuje slično kao klasični teorem o konvergenciji submartingala, uz ocjenu koja se često naziva nejednakost prelazaka. Kako teorem nije standardan, dat ćemo dokaz koji će biti sličan dokazu navedenog klasičnog teorema. Stoga ćemo neke tvrdnje koje su u dokazima slične navoditi bez argumentacije. Za detalje pogledajte [8, poglavlje 1.4.]

Teorem 3.1.4. *Neka je $(X_n)_{n\geq 0}$ nenegativan submartingal s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Ako je $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_0] < \infty$ g.s. onda $(X_n)_n$ konvergira g.s. prema konačnoj slučajnoj varijabli X_∞.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. Definiramo $T_0 = -1$ i za $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} T_{2k-1} &:= min\{m > T_{2k-2} : X_m \leq a\} \\ T_{2k} &:= min\{m > T_{2k-1} : X_m \geq b\}. \end{aligned}$$

Neka je $U_n = U_n([a,b]) := \max\{k : T_{2k} \leq n\}$ i $U = \lim_{n\to\infty} U_n := \sup\{k : T_{2k} < \infty\}$ za $n \in \mathbb{N}$. Stavimo $Y_m := (X_m - a)^+$ i za $m \geq 1$

$$H_m := \begin{cases} 1, & \text{ako je } m \in \langle T_{2k-1}, T_{2k}] \text{ za neki } k \geq 0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Proces $(H_m)_{m\geq 0}$ je predvidiv. Kako je (X_n) submartingal i $(Y_n)_n$ je submartingal, a kako je H_n nenegativna, ograničena slučajna varijabla i martingalna transformacija $(H \cdot Y)_n$ je submartingal. Lagano se pokazuje da vrijedi

$$(H \cdot Y)_n \geq (b-a)U_n$$

pa zaključujemo da je $(b-a)\mathbb{E}[U_n \mid \mathcal{F}_0] \leq \mathbb{E}[(H \cdot Y)_n \mid \mathcal{F}_0]$ g.s. Uz $K_m := 1 - H_m$, $m \geq 1$ vrijedi $Y_n - Y_0 = (H \cdot Y)_n + (K \cdot Y)_n$. Proces $(K \cdot Y)_n$ je također submartingal pa imamo

$$\mathbb{E}[(K \cdot Y)_n \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(K \cdot Y)_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \mid \mathcal{F}_0] \geq \mathbb{E}[(K \cdot Y)_{n-1} \mid \mathcal{F}_0] \geq \cdots \geq (K \cdot Y)_0 = 0 \text{ g.s.}$$

Odavde slijedi

$$\mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{F}_0] - \mathbb{E}[Y_0 \mid \mathcal{F}_0] \geq \mathbb{E}[(H \cdot Y)_n \mid \mathcal{F}_0] \geq (b-a)\mathbb{E}[U_n \mid \mathcal{F}_0]$$

Zbog $X_n \geq 0$ vrijedi $(X_n - a)^+ \leq X_n + |a|$ pa je $\mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{F}_0] \leq |a| + \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_0]$. Kako je $\mathbb{E}[Y_0 \mid \mathcal{F}_0] \geq 0$ g.s. koristeći gornju nejednakost dobivamo

$$E[U_n \mid \mathcal{F}_0] \leq \frac{1}{b-a}(|a| + \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_0]) \leq \frac{1}{b-a}(|a| + \sup_m \mathbb{E}[X_m \mid \mathcal{F}_0]) < \infty \text{ g.s.}$$

Po uvjetnom teoremu o monotonoj konvergenciji $E[U \mid \mathcal{F}_0] = \lim_n E[U_n \mid \mathcal{F}_0] < \infty$ g.s. Stoga je $U < \infty$ g.s. Prebrojiva unija skupova vjerojatnosti 0 opet ima vjerojatnost 0 pa je

$$P(U[a,b] < \infty \text{ za sve } a, b \in \mathbb{Q}, a < b) = 1.$$

Odavde slijedi da je $\limsup_n X_n = \liminf_n X_n$ g.s. Na događaju na kojem vrijedi jednakost definiramo $X_\infty = \limsup_n X_n$, a $X_\infty = 0$ inače. Tada je $X_\infty = \lim_n X_n$ g.s. Po uvjetnoj Fatuovoj lemi imamo

$$\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_0] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_0] \leq \sup_n \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_0] < \infty \text{ g.s.}$$

pa je $X_\infty < \infty$ g.s. □

3.2 Superkritični procesi: brzina rasta

Rast kao m^n

Ranije smo vidjeli da je m^n brzina rasta superkritičnog procesa ako je $W_\infty > 0$. Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete na taj zahtjev.

Teorem 3.2.1 (Kesten–Stigum). *Neka je* $1 < m < \infty$. *Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

i) $P(W_\infty = 0) = q$;

ii) $\mathbb{E}[W_\infty] = 1$;

iii) $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$

Znamo da je kod superkritičnih procesa $q < 1$ pa je $1 - q > 0$. Stoga je uvjet *i*) po Propoziciji 1.2.5 ekvivalentan tome da je

$$P(W_\infty > 0 \mid \text{neizumiranje}) = \frac{P(W_\infty > 0, \text{neizumiranje})}{P(\text{neizumiranje})} = \frac{1-q}{1-q} = 1.$$

Uvjet *iii*) iz teorema se čini dosta tehnički, ali koristeći slučajne varijable pristrane po veličini, možemo ga zapisati malo drugačije. Neka je $\widehat{L}$ slučajna varijabla pristrana po veličini u odnosu na L. Tada po definiciji vrijedi

$$\mathbb{E}[\log \widehat{L}] = \frac{\mathbb{E}[L \log^+ L]}{\mathbb{E}[L]} = \frac{1}{m}\mathbb{E}[L \log^+ L] \tag{3.1}$$

pa je uvjet *iii*) ekvivalentan $\mathbb{E}[\log \widehat{L}] < \infty$. Vjerojatnosna interpretacija ovog uvjeta dolazi iz sljedeće leme.

Lema 3.2.2. *Neka su $X, X_1, X_2, \ldots$ nenegativne nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable. Tada g.s. vrijedi*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0, & \textit{ako je } \mathbb{E}[X] < \infty, \\ \infty, & \textit{ako je } \mathbb{E}[X] = \infty. \end{cases}$$

Dokaz. Pokažimo prvo slučaj kada je $\mathbb{E}[X] < \infty$. Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog $\mathbb{E}[X] < \infty$ i $\mathbb{E}[X/\varepsilon] < \infty$. Kako je X nenegativna imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{X_n/n \geq \varepsilon\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X_n \geq n\varepsilon\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X/\varepsilon \geq n\}) = \mathbb{E}[X/\varepsilon] < \infty.$$

Po Borell–Cantellijevoj lemi vrijedi $P(\limsup_{n\to\infty}\{X_n/n \geq \varepsilon\}) = 0$. Stoga za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ vrijedi $X_n(\omega)/n \geq \varepsilon$ za samo konačno $n \in \mathbb{N}$ pa je $P(\limsup_{n\to\infty} X_n/n < \varepsilon) = 1$. Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i zbog neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće događaje vrijedi

$$\begin{aligned} P\left(\limsup_{n\to\infty} X_n/n = 0\right) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\limsup_{n\to\infty} X_n/n < 1/k\right\}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} P\left(\left\{\limsup_{n\to\infty} X_n/n < 1/k\right\}\right) = 1. \end{aligned}$$

Neka je sada $\mathbb{E}[X] = \infty$, uzmimo $M \geq 1$. Jer je $\mathbb{E}[X] = \infty$ i $\mathbb{E}[X/M] = \infty$. Kako je $X \geq 0$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{X_n/n \geq M\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X \geq nM\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X/M \geq n\}) = \mathbb{E}[X/M] = \infty.$$

Jer su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne, po drugoj Borel–Cantellijevoj lemi $P\left(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \geq nM\}\right) = 1$ pa je i $P\left(\limsup_{n\to\infty} X_n/n \geq M\right) = 1$. Zbog neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće događaje i jer je $M \geq 1$ proizvoljan vrijedi

$$\begin{aligned} P\left(\limsup_{n\to\infty} X_n/n = \infty\right) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{\limsup_{n\to\infty} X_n/n \geq k\right\}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} P\left(\left\{\limsup_{n\to\infty} X_n/n \geq k\right\}\right) = 1. \end{aligned}$$

□

Kao direktnu posljedicu ove leme imamo sljedeći korolar.

Korolar 3.2.3. *Uz iste oznake kao u Lemi 3.2.2, za $c \in \langle 0, 1\rangle$ proizvoljan imamo*

i) $\sum_n e^{X_n} c^n < \infty$ *g.s. ako je* $\mathbb{E}[X] < \infty$*;*

ii) $\sum_n e^{X_n} c^n = \infty$ *g.s. ako je* $\mathbb{E}[X] = \infty$.

Dokaz. Ako je $\mathbb{E}[X] < \infty$ onda iz Leme 3.2.2 vrijedi $\limsup X_n/n = 0$ g.s. To znači da za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ i $\varepsilon > 0$ je $X_n(\omega)/n < \varepsilon$ za sve osim konačno mnogo indeksa. Kako je $c \in \langle 0, 1\rangle$, $1/c > 1$. Uzmimo sada $\varepsilon < \log(1/c)$ i neka je $C(\omega) := \{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) < n\varepsilon\}$. Tada imamo

$$\sum_{n\in C(\omega)} e^{X_n(\omega)} c^n \leq \sum_{n\in C(\omega)} e^{n\varepsilon} c^n = \sum_{n\in C(\omega)} (e^{\varepsilon} c)^n < \infty.$$

Zadnja nejednakost vrijedi jer je izraz u zagradi manji od 1. Kako je $\mathbb{N} \setminus C(\omega)$ konačan vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{X_n(\omega)} c^n = \sum_{n\in C(\omega)} e^{X_n(\omega)} c^n + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus C(\omega)} e^{X_n(\omega)} c^n < \infty$$

pa vrijedi tvrdnja *i*). S druge strane ako je $\mathbb{E}[X] = \infty$ onda iz prethodne leme imamo $\limsup X_n/n = \infty$ g.s., a to znači da za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ i svaki $M > 0$ je $X_n(\omega)/n > M$ za beskonačno mnogo indeksa. Neka je $C(\omega) := \{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega)/n > \log(1/c)\}$. Taj skup je beskonačan pa vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{X_n(\omega)} c^n \geq \sum_{n\in C(\omega)} e^{X_n(\omega)} c^n \geq \sum_{n\in C(\omega)} e^{n\log(1/c))} c^n \geq \sum_{n\in C(\omega)} 1^n = \infty$$

čime je dokazana tvrdnja *ii*). □

Lemu 3.2.2 ćemo primijeniti na slučajnu varijablu $\log \widehat{L}$ u sljedećem teoremu koji govori o GW procesima s imigracijom. Teorem 3.2.1 će biti direktna posljedica tog teorema uz još jedan vjerojatnosni rezultat.

Teorem 3.2.4 **(Seneta).** *Neka je I_n veličina n-te generacije GW procesa s imigracijom Y_n. Neka je $m = \mathbb{E}[L] \in \langle 1, \infty \rangle$ i neka je Y slučajna varijabla koja ima distribuciju jednaku kao Y_n. Ako je* $\mathbb{E}[\log^+ Y] < \infty$, *onda* $\lim_n I_n/m^n$ *postoji i konačan je g.s., a ako je* $\mathbb{E}[\log^+ Y] = \infty$, *tada je* $\limsup_n I_n/c^n = \infty$ *g.s. za svaki* $c > 0$.

Dokaz. Uzmimo prvo da je $\mathbb{E}[\log^+ Y] = \infty$. Tada je iz Leme 3.2.2, $\limsup_n (\log^+ Y_n/n) = \infty$ g.s. Ako je $(a_n)_n$ niz realnih brojeva takav da je $\limsup_n a_n = \infty$ i f je neprekidna funkcija takva da $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, tada je $\limsup_n f(a_n) = \infty$. Uzmemo li funkciju $f(x) = e^x$ i niz $(\log^+ Y_n(\omega)/n)_n$, dobivamo $\limsup_n \sqrt[n]{Y_n} = \infty$ g.s. Stoga za $c > 0$ proizvoljan vrijedi $\limsup_n \sqrt[n]{Y_n}/c = \infty$ g.s. Analogno, uzimanjem $g(x) = x^n$ zaključujemo da je $\limsup Y_n/c^n = \infty$ g.s. Kako je $I_n \geq Y_n$, slijedi $\limsup_n I_n/c^n = \infty$ g.s.

Sada neka je $\mathbb{E}[\log^+ Y] < \infty$. Neka je $\mathcal{G}$ σ-algebra generirana sa $(Y_k)_{k\geq 1}$. Označimo sa $I_{n,k}$ broj potomaka na razini n od jedinki koje su imigrirale u proces na razini k. Tada je $I_n = \sum_{k=1}^n I_{n,k}$ pa dobivamo

$$\mathbb{E}\left[\frac{I_n}{m^n} \,\middle|\, \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{m^n}\sum_{k=1}^n I_{n,k} \,\middle|\, \mathcal{G}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{m^k}\mathbb{E}\left[\frac{I_{n,k}}{m^{n-k}} \,\middle|\, \mathcal{G}\right].$$

Za $k \leq n$ slučajna varijabla $I_{n,k}$ je veličina generacije $n-k$ običnog GW procesa koji kreće sa Y_k jedinki. To je isto kao da imamo Y_k nezavisnih procesa koji kreću s jednom jedinkom pa vrijedi $\mathbb{E}[I_{n,k} \mid \mathcal{G}] = Y_k \cdot m^{n-k}$. Stoga je

$$\mathbb{E}\left[\frac{I_n}{m^n} \,\middle|\, \mathcal{G}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{m^k}.$$

Puštanjem limesa kada $n \to \infty$, na desnoj strani dobivamo red koji po Korolaru 3.2.3 konvergira g.s. Zato je

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\frac{I_n}{m^n} \,\middle|\, \mathcal{G}\right] \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{Y_k}{m^k} < \infty \text{ g.s.} \tag{3.2}$$

Stavimo $\mathcal{F}_n = \sigma((Y_k)_{k\geq 1}, I_0, \dots I_n)$, tada je $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}$. Niz σ-algebri $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ čini filtraciju i $(I_n)_n$ je adaptiran s obzirom na tu filtraciju. Nadalje,

$$\mathbb{E}\left[\frac{I_{n+1}}{m^{n+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = \frac{Y_{n+1}}{m^{n+1}} + \frac{1}{m^{n+1}}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{I_n} L_i^{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = \frac{Y_{n+1}}{m^{n+1}} + \frac{I_n}{m^n} \geq \frac{I_n}{m^n} \text{ g.s.}$$

Druga jednakost vrijedi jer su slučajne varijable L_i^{n+1} nezavisne od $\mathcal{F}_n$. Dakle, I_n/m^n je nenegativan submartingal s obzirom na $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Uz nejednakost (3.2) zadovoljeni su uvjeti Teorema 3.1.4 pa $\lim_n I_n/m^n$ postoji i konačan je g.s. □

Prije samog dokaza Kesten–Stigum teorema potreban nam je još jedan rezultat.

Propozicija 3.2.5. *Neka je μ konačna mjera i ν vjerojatnosna mjera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Neka je $(\mathcal{F}_n)_n$ nepadajući niz σ-algebri takvih da je $\mathcal{F} = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$ te neka su $\mu_n := \mu \upharpoonright \mathcal{F}_n$ i $\nu_n := \nu \upharpoonright \mathcal{F}_n$ restrikcije μ i ν na $\mathcal{F}_n$ takve da je $\mu_n \ll \nu_n$ za svaki n. Neka je $X_n := \mathrm{d}\mu_n / \mathrm{d}\nu_n$ i $X = \limsup_{n\to\infty} X_n$. Tada vrijedi*

$$\mu \ll \nu \Leftrightarrow X < \infty \quad \mu\text{-g.s.} \Leftrightarrow \int X \,\mathrm{d}\nu = \int \mathrm{d}\mu, \tag{3.3}$$

$$\mu \perp \nu \Leftrightarrow X = \infty \quad \mu\text{-g.s} \Leftrightarrow \int X \,\mathrm{d}\nu = 0. \tag{3.4}$$

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da za $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mu(A) = \int_A X \,\mathrm{d}\nu + \mu(A \cap \{X = \infty\}) \tag{3.5}$$

Štoviše, pokazat ćemo da ako vrijedi gornja jednakost, onda je to Lebesgueova dekompozicija mjere μ u odnosu na ν.

Pokažimo da je $(X_n)_n$ martingal s obzirom na $(\mathcal{F}_n)_n$ i mjeru ν. Za $A \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ vrijedi

$$\mathbb{E}[X_{n+1}\mathbf{1}_A] = \int_A X_{n+1} \,\mathrm{d}\nu = \int_A X_{n+1} \,\mathrm{d}\nu_{n+1} = \mu_{n+1}(A) = \mu(A).$$

S druge strane

$$\mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_A] = \int_A X_n \,\mathrm{d}\nu = \int_A X_n \,\mathrm{d}\nu_n = \mu_n(A) = \mu(A)$$

pa je $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$. Kako je $(X_n)_n$ nenegativan martingal, konvergira prema X ν-g.s. i $X < \infty$ ν-g.s.

Definirajmo vjerojatnosnu mjeru $\rho := (\mu + \nu)/C$ gdje je $C := \int \mathrm{d}(\mu + \nu)$. Neka je ρ_n restrikcija te mjere na $\mathcal{F}_n$. Tada možemo definirati $U_n := \mathrm{d}\mu_n / \mathrm{d}\rho_n$ i $V_n := \mathrm{d}\nu_n / \mathrm{d}\rho_n$. Opet kao gore zaključujemo da su $(U_n)_n$ i $(V_n)_n$ nenegativni martingali s obzirom na $\mathcal{F}_n$ i mjeru ρ. Neka su $U := \limsup U_n$ i $V := \limsup V_n$. Kako je $U_n + V_n = C$ ρ-g.s. za svaki n, ti martingali su ograničeni ρ-g.s. Za $A \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$ vrijedi

$$\mu(A) = \mu_n(A) = \int_A U_n \,\mathrm{d}\rho_n = \int_A U_n \,\mathrm{d}\rho.$$

Puštanjem $n \to \infty$ iz teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A U_n \,\mathrm{d}\rho = \int_A U \,\mathrm{d}\rho.$$

Ova jednakost vrijedi za $A \in \cup_m \mathcal{F}_m$, a kako je to π sustav koji generira $\mathcal{F}$, jednakost vrijedi na $\mathcal{F}$. Stoga je $U = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\rho$ i $V = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\rho$. Kako je $U_n + V_n = C$ g.s., $\rho(U = 0, V = 0) = 0$ pa jer je $X_n = U_n/V_n$ vrijedi

$$\frac{U}{V} = \frac{\lim_n U_n}{\lim_n V_n} = \lim_n \frac{U_n}{V_n} = \lim_n X_n = X \quad \rho\text{-g.s.}$$

Neka je $Y := (1/V) \cdot \mathbf{1}_{(V>0)}$, tada je $1 = YV + \mathbf{1}_{(V=0)}$ pa vrijedi

$$\mu(A) = \int_A U \,\mathrm{d}\rho = \int_A UYV \,\mathrm{d}\rho + \int_A \mathbf{1}_{(V=0)} U \,\mathrm{d}\rho. \tag{3.6}$$

Kako je $\nu(V = 0) = \int V\mathbf{1}_{(V=0)} \,\mathrm{d}\rho = 0$, $UY = X\mathbf{1}_{(V>0)} = X$ ν-g.s. pa uz $\mathrm{d}\nu = V\,\mathrm{d}\rho$ imamo

$$\int_A UYV \,\mathrm{d}\rho = \int_A X \,\mathrm{d}\nu. \tag{3.7}$$

S druge strane kako je $U < \infty$ μ-g.s., $\{V = 0\} = \{X = \infty\}$ μ-g.s. Koristeći $\mathrm{d}\mu = U\,\mathrm{d}\rho$ dobivamo

$$\int_A \mathbf{1}_{(V=0)} U \,\mathrm{d}\rho = \int_A \mathbf{1}_{(X=\infty)} \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.8}$$

Iz (3.6), (3.7) i (3.8) slijedi (3.5). Jasno je da je mjera $\mu_r(A) := \int_A X \,\mathrm{d}\nu$ apsolutno neprekidna u odnosu na ν, a kako je $\nu(X = \infty) = 0$ mjere $\mu_s(A) := \mu(A \cap \{X = \infty\})$ i ν su singularne pa je (3.5) Lebesgueov rastav mjere μ s obzirom na ν. Koristeći tu činjenicu ekvivalencije (3.3) i (3.4) sada lagano slijede.

Ako je $\mu \ll \nu$ onda je $X < \infty$ μ-g.s.; ako je $X < \infty$ μ-g.s. onda je $\int X \,\mathrm{d}\nu = \int \mathrm{d}\mu$; konačno ako je $\int X \,\mathrm{d}\nu = \int \mathrm{d}\mu$ onda je $X < \infty$ μ-g.s. i $\mu \ll \nu$.

Ako je $\mu \perp \nu$ onda je $\mu = \mu_s$ pa je $X = \infty$ μ-g.s.; ako je $X = \infty$ μ-g.s. onda je $\int X \,\mathrm{d}\nu = 0$; na kraju ako je $\int X \,\mathrm{d}\nu = 0$ tada je $X = \infty$ μ-g.s. pa je $\mu \perp \nu$. □

Dokaz Kesten–Stigum teorema. Neka su $\mathbf{GW}_n$ i $\widehat{\mathbf{GW}}_n$ restrikcije vjerojatnosnih mjera $\mathbf{GW}$ i $\widehat{\mathbf{GW}}$ na $\mathcal{F}_n$. Tada iz relacije (2.6) vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbf{GW}}_n}{\mathrm{d}\mathbf{GW}_n}(t) = W_n(t).$$

Iz prethodne propozicije imajući na umu da baratamo s dvije vjerojatnosne mjere dobivamo

$$\widehat{\mathbf{GW}} \ll \mathbf{GW} \Leftrightarrow W_\infty < \infty \quad \widehat{\mathbf{GW}}\text{-g.s.} \Leftrightarrow \int W_\infty \,\mathrm{d}\mathbf{GW} = 1, \tag{3.9}$$

$$\widehat{\mathbf{GW}} \perp \mathbf{GW} \Leftrightarrow W_\infty = \infty \quad \widehat{\mathbf{GW}}\text{-g.s} \Leftrightarrow W_\infty = 0 \quad \mathbf{GW}\text{-g.s.} \tag{3.10}$$

Sada umjesto ponašanja W_∞ s obzirom na $\mathbf{GW}$, možemo promatrati ponašanje W_∞ s obzirom na $\widehat{\mathbf{GW}}$, a to znamo iz Teorema 3.2.4. Prisjetimo se diskusije s kraja prošlog poglavlja. Uz $Y_n = \widehat{L} - 1$, $(Z_n - 1)_n$ sa zakonom razdiobe $\widehat{\mathbf{GW}}$ čini proces s imigracijom I_n.

Ako je $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$, tada je $\mathbb{E}[\log \widehat{L}] < \infty$ pa je i $\mathbb{E}[\log^+(\widehat{L} - 1)] < \infty$. Po prošlom teoremu $\lim_n I_n/n$ postoji i konačan je $\mathbf{GW}$-g.s. Kako su distribucije od I_n/m^n uz $\mathbf{GW}$ i $W_n - m^{-n}$ uz $\widehat{\mathbf{GW}}$ jednake i kako je $\lim_n m^{-n} = 0$ vrijedi

$$\widehat{\mathbf{GW}}(W_\infty < \infty) = \widehat{\mathbf{GW}}(\limsup_{n\to\infty} (W_n - m^{-n}) < \infty) = \mathbf{GW}(\limsup_{n\to\infty} I_n/n < \infty) = 1$$

pa je po (3.9) $\mathbb{E}_{\mathbf{GW}}[W_\infty] = \int W_\infty \, \mathrm{d}\mathbf{GW} = 1$. To dokazuje *iii*) $\implies$ *ii*).

Ako je $\mathbb{E}[W_\infty] = 1$, onda je $\mathbf{GW}(W_\infty = 0) < 1$ pa je $\mathbf{GW}(W_\infty = 0) = q$ po Propoziciji 1.2.5, što dokazuje *ii*) $\implies$ *i*).

Ako je $\mathbb{E}[L \log^+ L] = \infty$, onda je $\mathbb{E}[\log^+(\widehat{L} - 1)] = \infty$ pa je $\limsup_n I_n/n = \infty$ $\mathbf{GW}$-g.s. Opet kao ranije zaključujemo

$$\widehat{\mathbf{GW}}(W_\infty = \infty) = \widehat{\mathbf{GW}}(\limsup_{n\to\infty} (W_n - m^{-n}) = \infty) = \mathbf{GW}(\limsup_{n\to\infty} I_n/n = \infty) = 1.$$

Sada iz (3.10) vrijedi $W_\infty = 0$ $\mathbf{GW}$-g.s. pa uz Propoziciju 1.2.5 obratom po kontrapoziciji vrijedi *i*) $\implies$ *iii*). □

Rast sporiji od m^n

Ukoliko proces nije izumro, a $W_\infty = 0$ onda proces raste sporije od m^n. Možemo međutim reći i nešto malo više od toga.

Teorem 3.2.6 (**Seneta–Heyde**). *Ako je $1 < m < \infty$, tada postoji niz konstanti $(c_n)_n$ takav da vrijedi*

i) $\lim_n Z_n/c_n$ *postoji g.s. u* $[0, \infty\rangle$,

ii) $P(\lim_n Z_n/c_n = 0) = q$,

iii) $c_{n+1}/c_n \to m$.

Slično kao kod Kesten–Stigum teorema, uvjet *ii*) je ekvivalentan

$$P(\lim_n Z_n/c_n > 0 \mid \text{neizumiranje}) = \frac{P(\lim_n Z_n/c_n > 0, \text{neizumiranje})}{P(\text{neizmiranje})} = \frac{1-q}{1-q} = 1.$$

To znači da ako proces nije izumro, brzina rasta je dana sa c_n. Kako $c_{n+1}/c_n \to m$, u tom slučaju brzina rasta nije puno manja od m^n.

Definicija 3.2.7. Familija slučajnih varijabli $\mathcal{X}$ je *uniformno integrabilna* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $K \geq 0$ tako da je

$$\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X>K)}] < \varepsilon \text{ za svaki } X \in \mathcal{X}.$$

Teorem 3.2.8 (Vitali). *Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli takav da je $\mathbb{E}[X_n] < \infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako $X_n \to X$ po vjerojatnosti, tada je ekvivalentno:*

i) *Niz $(X_n)_n$ je uniformno integrabilan.*

ii) $X_n \to X$ *u* L^1.

iii) $\mathbb{E}[|X_n|] \to \mathbb{E}[|X|] < \infty$.

Dokaz. Pogledajte [4, teorem 4.6.3]. □

Prije dokaza Teorema 3.2.6 navodimo još jedan pomoćni rezultat. Reći ćemo da stablo ima *nasljedno svojstvo* ukoliko svako konačno stablo ima to svojstvo te ako neko stablo ima to svojstvo, onda ga imaju i sva stabla koja su potomci tog stabla. U nastavku ćemo radi jednostavnosti nasljedna svojstva opisivati kao događaje. Reći ćemo da je neki skup nasljedno svojstvo ako za svako stablo u tom skupu je svako njegovo podstablo u tom skupu i sva konačna stabla su u tom skupu.

Propozicija 3.2.9. *Neka je A neko nasljedno svojstvo. Tada je* $\mathbf{GW}(A \mid \textit{neizumiranje}) \in \{0, 1\}$.

Dokaz. Ako je stablo $\omega \in A$, onda su po definiciji nasljednog svojstva $T_1(\omega), \ldots, T_{Z_1(\omega)}(\omega)$ također u A. Tada vrijedi

$$\mathbf{GW}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{GW}(A \mid Z_1)] \leq \mathbb{E}[\mathbf{GW}(T_1 \in A, \ldots, T_{Z_1} \in A \mid Z_1)] = \mathbb{E}[\mathbf{GW}(A)^{Z_1}].$$

Zadnja jednakost vrijedi jer su $T_1, \ldots, T_{Z_1}$ nezavisne i jednako distribuirane uz Z_1. Neka je f funkcija izvodnica slučajne varijable Z_1. Izraz na desnoj strani je tada upravo $f(\mathbf{GW}(A))$. Stoga imamo $\mathbf{GW}(A) \leq f(\mathbf{GW}(A))$. S druge strane, skup svih konačnih stabala je jednak $\bigcup_{n\geq 1}(Z_n = 0)$ pa kako se svako konačno stablo po definiciji nalazi u A je $\mathbf{GW}(A) \geq q$. Iz dokaza Teorema 1.2.1 znamo da je jedino moguće da je $\mathbf{GW}(A) \in \{q, 1\}$. Kako se sva konačna stabla nalaze u A vrijedi $\mathbf{GW}(A \mid \text{izumiranje}) = 1$. Sada vjerojatnost $\mathbf{GW}(A)$ možemo zapisati kao

$$\mathbf{GW}(A \mid \text{neizumiranje}) \cdot \underbrace{\mathbf{GW}(\text{neizumiranje})}_{1-q} + \underbrace{\mathbf{GW}(A \mid \text{izumiranje})}_{1} \cdot \underbrace{\mathbf{GW}(\text{izumiranje})}_{q}.$$

Iz $\mathbf{GW}(A) \in \{q, 1\}$ slijedi $\mathbf{GW}(A \mid \text{neizumiranje}) \in \{0, 1\}$. □

Dokaz Teorema 3.2.6. Neka je f funkcija izvodnica vjerojatnosti od L. Tada je $f'(s) > 0$ za $s \in \langle 0, 1\rangle$. Također je na tom intervalu $p_0 < f(s) < 1$. Kako je $f(0) = p_0$ i $f(1) = 1$, f je strogo rastuća na $[0, 1]$. Kako je f neprekidna na $[0, 1]$, $f([0, 1]) = [p_0, 1]$. Stoga je f^{-1} dobro definirana na $[p_0, 1]$.

Uzmimo $s_0 \in \langle q, 1\rangle$. Definiramo niz $s_{n+1} := f^{-1}(s_n)$ (primijetimo da je $s_n \in \langle q, 1\rangle$ za svaki n). Kako je $f(s) < s$ za $s \in \langle q, 1\rangle$, imamo $s_{n+1} = f^{-1}(s_n) > s_n$. Stoga je niz $(s_n)_n$ rastući, a kako je i omeđen s 1 vrijedi $s_n \nearrow \sup_n s_n$. Pretpostavimo da je $M := \sup_n s_n < 1$. Neka je $\varepsilon = f^{-1}(M) - M > 0$. Funkcija f^{-1} je neprekidna na $\langle q, 1\rangle$ pa za $\varepsilon/2$ postoji $\delta > 0$ tako da $(|M - x| < \delta) \implies (|f^{-1}(M) - f^{-1}(x)| < \varepsilon/2)$. Po definiciji supremuma postoji s_m takav da je $M - s_m < \delta$. Stoga je $f^{-1}(s_m) - M > \varepsilon/2$, no to onda znači da je $s_{m+1} = f^{-1}(s_m) > M$, što je kontradikcija. Stoga $s_n \nearrow 1$.

Slično kao što smo pokazali Propoziciju 1.1.2 možemo pokazati da je $\mathbb{E}[s_n^{Z_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = f(s_n)^{Z_{n-1}} = s_{n-1}^{Z_{n-1}}$, gdje je $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$. Stoga je $(s_n^{Z_n})_n$ pozitivan martingal pa konvergira g.s. prema nekoj slučajnoj varijabli $Y \in [0, 1]$. Nadalje, ovaj martingal je omeđen po točkama s 1 pa je zato i uniformno integrabilan. Kako je $\mathbb{E}[s_n^{Z_n}] = \cdots = s_0 < \infty$, po Teoremu 3.2.8 imamo konvergenciju prema Y i u L^1 te je $\mathbb{E}[Y] = \lim_n \mathbb{E}[s_n^{Z_n}] = s_0 \in \langle q, 1\rangle$.

Stavimo $c_n = -1/\log s_n$. Tada je $s_n^{Z_n} = e^{-Z_n/c_n}$ pa $\lim_n Z_n/c_n$ postoji g.s. u $[0, \infty]$. Po L'Hospitalovom pravilu vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log f(s_{n+1})}{\log s_{n+1}} = \lim_{s\nearrow 1} \frac{\log f(s)}{\log s} = \lim_{s\nearrow 1} \frac{f'(s)s}{f(s)} = m.$$

Stavimo $A := \{\lim_n Z_n/c_n = 0\}$. Neka je $\omega \in A$ i neka je $Z_1(\omega) = k$. Označimo $a_j = \lim_n Z_n(T_j(\omega))/c_n$, gdje je $1 \le j \le k$. Tada vrijedi

$$\sum_{j=1}^{k} a_j = \lim_n \frac{\sum_{j=1}^{k} Z_n(T_j(\omega))}{c_n} = \lim_n \frac{Z_{n+1}(\omega)}{c_n} = \lim_n \frac{Z_{n+1}(\omega)}{c_{n+1}} \cdot \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_n \frac{Z_{n+1}(\omega)}{c_{n+1}} \cdot m = 0.$$

Kako je $a_j \ge 0$, slijedi da je $a_j = 0$ za svaki j. Stoga je događaj A nasljedno svojstvo pa je $\mathbf{GW}(A \mid \text{neizumiranje}) \in \{0, 1\}$. Pretpostavimo da je $\mathbf{GW}(A \mid \text{neizumiranje}) = 1$. Kako je događaj A trivijalno zadovoljen ukoliko proces izumire, slijedi $\mathbf{GW}(A) = 1$, to jest $\lim_n Z_n/c_n = 0$ g.s. To znači da je $\lim_n s_n^{Z_n} = 1$ g.s. Odavde je $\mathbb{E}[Y] = 1$, no znamo da je $\mathbb{E}[Y] < 1$. Dakle, $\mathbf{GW}(A \mid \text{neizumiranje}) = 0$, drugim riječima $A = \{\text{izumiranje}\}$ g.s. pa slijedi *ii*).

Sada promatramo događaj $B = \{\lim_n Z_n/c_n < \infty\}$. Analognim računom kao ranije se pokaže da je B nasljedno svojstvo pa je $\mathbf{GW}(B \mid \text{neizumiranje}) \in \{0, 1\}$. Ukoliko je $\mathbf{GW}(B \mid \text{neizumiranje}) = 0$, tada na događaju neizumiranja vrijedi $Y = 0$ g.s. pa je $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{\text{izumiranje}}] \le \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\text{izumiranje}}] = q$. To je kontradikcija sa $\mathbb{E}[Y] > q$ pa mora vrijediti $\mathbf{GW}(B \mid \text{neizumiranje}) = 1$. Stoga je $\mathbf{GW}(B) = 1$, što pokazuje *i*). □

3.3 Subkritični procesi: brzina izumiranja

Vidjeli smo ranije da subkritični procesi izumiru g.s. Možemo se pitati kolika je brzina izumiranja. Da bismo odgovorili na to pitanje promatrat ćemo koliko brzo $P(Z_n > 0)$ opada. Prirodno se nameće gruba ocjena

$$P(Z_n > 0) \leq \mathbb{E}[Z_n] = m^n.$$

Pokazat ćemo kada je m^n prikladna brzina izumiranja, a kada proces izumire još brže. Odgovor je dan sljedećim teoremom.

Teorem 3.3.1 (**Heathcote, Seneta i Vere–Jones**)**.** *Neka je* $0 < m < \infty$. *Tada je niz* $(P(Z_n > 0)/m^n)_n$ *padajući. Ukoliko je* $m < 1$ *onda su ekvivalentne sljedeće tvrdnje:*

i) $\lim_{n\to\infty} P(Z_n > 0)/m^n > 0$*;*

ii) $\sup_n \mathbb{E}[Z_n \mid Z_n > 0] < \infty$*;*

iii) $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$.

Opet kao u prošlom odjeljku, teorem će biti posljedica teorema koji govori o procesima s imigracijom. Za taj teorem će nam trebati sljedeća lema.

Lema 3.3.2. *Neka je* $(k_n)_n$ *niz nenegativnih cijelih brojeva,* $(A_{n,k})_{n,k\geq 1}$ *familija nezavisnih događaja i* $B_n := \cup_{k=1}^{k_n} A_{n,k}$ *(ako je* $k_n = 0$ *onda je* $B_n = \emptyset$*). Tada vrijedi*

$$P(\limsup_{n\to\infty} B_n) = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} P(A_{n,k}) < \infty. \tag{3.11}$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da je $\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{k_n} P(A_{n,k}) = \infty$, tada

$$\begin{aligned} P(\liminf B_n^c) &= P\left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{j\geq n} B_j^c\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{j\geq n}\bigcap_{k=1}^{k_j} A_{j,k}^c\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\prod_{j\geq n}\prod_{k=1}^{k_j} P(A_{j,k}^c) = \lim_{n\to\infty}\prod_{j\geq n}\prod_{k=1}^{k_j}(1 - P(A_{j,k})) \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\prod_{j\geq n}\prod_{k=1}^{k_j}\exp(-P(A_{j,k})) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\exp\left(-\sum_{j\geq n}\sum_{k=1}^{k_j} P(A_{j,k})\right) = 0. \end{aligned}$$

Stoga je $P(\limsup B_n) = 1$ pa obratom po kontrapoziciji vrijedi tvrdnja. $\square$

Teorem 3.3.3 (Heathcote). *Neka je I_n veličina n-te generacije GW procesa s imigracijom Y_n. Neka je $m = \mathbb{E}[L] < 1$ i neka je Y slučajna varijabla distribuirana kao Y_n. Ako je $\mathbb{E}[\log^+ L] < \infty$, tada I_n konvergira po distribuciji slučajnoj varijabli koja je konačna g.s., a ako je $\mathbb{E}[\log^+ Y] = \infty$, onda I_n konvergira po vjerojatnosti prema ∞, to jest $\lim_n P(I_n > t) = 1$ za svaki $t > 0$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{G}$ σ-algebra generirana s $(Y_k)_{k\geq 1}$. Označimo sa $I_{n,k}$ broj potomaka na razini n od jedinki koje su imigrirale u proces na razini k. Tada je $I_n = \sum_{k=1}^n I_{n,k}$. Kako distribucija od $I_{n,k}$ ovisi samo o $n-k$ ($I_{k,l}$ je distribuirana kao $I_{j+k-l,j}$ za $j,k,l \in \mathbb{N}$), I_n je distribuirana kao $I'_n := \sum_{k=1}^n I_{2k-1,k}$. Ova suma raste prema nekom limesu I_∞. Taj limes je po Kolmogorovljevom zakonu 0-1 g.s. konačan ili g.s. beskonačan. $I_{n,k}$ možemo napisati na sljedeći način

$$I_{n,k} = \sum_{j=1}^{Y_k} Z_{n-k}(k,j) \tag{3.12}$$

gdje je $Z_n(k,j)$ GW proces koji kreće iz j-te jedinke u k-toj generaciji. Stoga vrijedi $I_{2k-1,k} = \sum_{j=1}^{Y_k} Z_{k-1}(k,j)$ pa je

$$I_\infty = \sum_{k\geq 1}\sum_{j=1}^{Y_k} Z_{k-1}(k,j). \tag{3.13}$$

Neka je $\mathbb{E}[\log^+ Y] < \infty$. Koristeći uvjetni teorem o monotonoj konvergenciji i činjenicu da su $Z_{k-1}(k,j)$ nezavisne od $\mathcal{G}$ dobivamo

$$\mathbb{E}[I_\infty \mid \mathcal{G}] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{Y_k} Z_{k-1}(k,j) \,\middle|\, \mathcal{G}\right] = \sum_{k\geq 1} Y_k m^{k-1} \text{ g.s.}$$

Kako je $m < 1$, po korolaru 3.2.3 je $\mathbb{E}[I_\infty \mid \mathcal{G}] < \infty$ g.s. pa je $I_\infty < \infty$ g.s. i $I_n \xrightarrow{d} I_\infty$.

Pretpostavimo sada da je $I_\infty < \infty$ g.s. Tada iz (3.13) slijedi da je g.s. za samo konačno indeksa k izraz $\sum_{j=1}^{Y_k} Z_{k-1}(k,j)$ veći ili jednak 1. Neka je $A_n := \{\sum_{j=1}^{Y_n} Z_{n-1}(n,j) \geq 1\}$ i $A := \limsup_{n\to\infty} A_n$. Tada je

$$\mathbf{GW}(A) = 0 \quad \text{pa je} \quad \mathbf{GW}(A \mid \mathcal{G}) = 0 \text{ g.s.}$$

Neka je P_Y slika mjere $\mathbf{GW}$ u odnosu na $(Y_k)_k$. Za niz $y = (y_k)_k$ nenegativnih cijelih brojeva neka je $G_y = \{Y_k = y_k, k \geq 1\} \in \mathcal{G}$. Ako vrijedi $P_Y(y) > 0$ i $\mathbf{GW}(A \mid G_y) = \mathbf{GW}(A \cap G_y)/P_Y(y) > 0$ onda je $\mathbf{GW}(A \cap G_y) > 0$. To znači da je $\int_{G_y} \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mathbf{GW} > 0$, a to je u kontradikciji s tim da je $\mathbf{GW}(A \mid \mathcal{G}) = 0$ g.s. Stoga za P_Y gotovo svaki niz y vrijedi

$$\mathbf{GW}(A \mid G_y) = \mathbf{GW}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{y_n} Z_{n-1}(n,j) \geq 1\right\}\right) = 0.$$

Za neki takav y stavimo $A_{n,k} := \{Z_{n-1}(n,k) \geq 1\}$ i $B_n = \cup_{k=1}^{y_n} A_{n,k}$. Iz Leme 3.3.2 imamo

$$\sum_{n\geq 1} y_n \mathbf{GW}(Z_{n-1} \geq 1) = \sum_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{y_n} \mathbf{GW}(Z_{n-1}(n,k) \geq 1) = \sum_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{y_n} \mathbf{GW}(A_{n,k}) < \infty.$$

Kako ovo vrijedi za P_Y gotovo svaki y slijedi

$$\sum_{n\geq 1} Y_n \mathbf{GW}(Z_{n-1} \geq 1) < \infty \text{ g.s.}$$

S obzirom da je $\mathbf{GW}(Z_{n-1} \geq 1) \geq P(L > 0)^{k-1}$ iz Korolara 3.2.3 dobivamo da je $\mathbb{E}[\log^+ Y] < \infty$. Obratom po kontrapoziciji, $\mathbb{E}[\log^+ Y] = \infty$ povlači da je $I_\infty = \infty$ g.s. pa na koncu imamo

$$\lim_{n\to\infty} P(I_n > t) = \lim_{n\to\infty} P(I'_n > t) = P\left(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{I'_n > t\}\right) = P(I_\infty > t) = 1$$

za sve $t > 0$. □

Prije dokaza Teorema 3.3.1 treba nam još jedna lema.

Lema 3.3.4. *Neka je $(X_n)_n$ niz diskretnih slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}^+$, s distribucijama $(\nu_n)_n$ i očekivanjima a_n. Neka je $\hat{\nu}_n$ distribucija od $\widehat{X}_n$. Ako je $(\hat{\nu}_n)_n$ napet niz mjera, onda je $\sup a_n < \infty$, dok ako $\widehat{X}_n \to \infty$ po vjerojatnosti, onda $a_n \to \infty$.*

Dokaz. Ako je $(\hat{\nu}_n)_n$ napet, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ kompaktan takav da je $\hat{\nu}_n(\mathbb{R} \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$. Za $\varepsilon = 1/2$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $K_\varepsilon \subset [-N, N]$ pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\hat{\nu}_n(\{0,1,\ldots,N\}) = \sum_{k=1}^{N} \hat{\nu}_n(\{k\}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k\nu_n(\{k\})}{a_n} \geq \frac{1}{2}.$$

Stoga je

$$\inf_n \sum_{k=1}^{N} \frac{k\nu_n(\{k\})}{a_n} \geq \frac{1}{2}.$$

Odavde dobivamo

$$\sup_n \frac{a_n}{\sum_{k=1}^{N} k\nu_n(\{k\})} \leq 2,$$

a kako je $\sum_{k=1}^{N} k\nu_n(\{k\}) \leq \sum_{k=1}^{N} N\nu_n(\{k\}) \leq N$ imamo $\sup_n a_n/N \leq 2$, odnosno $\sup_n a_n \leq 2N$.

Pretpostavimo sada da $\widehat{X}_n \xrightarrow{P} \infty$, ali da niz $(a_n)_n$ ne ide prema beskonačno. Tada postoji $M = \sup_n a_n < \infty$ pa je

$$\lim_n \sum_{k=1}^{N} k\nu_n(\{k\}) \leq \lim_n \frac{M}{a_n} \sum_{k=1}^{N} k\nu_n(\{k\}) = M \lim_n P(\widehat{X}_n \leq N)) = 0$$

za svaki $N \in \mathbb{N}$. Slijedi

$$\lim_n P(X_n \leq N) \leq \lim_n \sum_{k=1}^{N} k\nu_n(\{k\}) = 0.$$

Stoga za $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $P(X_n \leq N) < \varepsilon$, odnosno $P(X_n > N) \geq 1 - \varepsilon$. Po Markovljevoj nejednakosti $P(X_n > N) \leq P(X_n \geq N) \leq a_n/N$ pa vrijedi $\sup_n a_n \geq N(1-\varepsilon)$. Kako ovo vrijedi za $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan dobivamo $\sup_n a_n = \infty$ što je kontradikcija. □

Dokaz Teorema 3.3.1. Neka je μ_n zakon razdiobe od Z_n uvjetno na $Z_n > 0$. Za stablo $\omega \in \Omega$ neka je $\xi(\omega)$ dijete korijena s najmanjom oznakom tako da ima bar jednog potomka u generaciji n. Ako je $Z_n(\omega) > 0$, neka $H_n(\omega)$ označava broj potomaka tog čvora u n-toj generaciji i $Z_n^{(u)}(\omega)$ broj potomaka čvora u u n-toj generaciji. Tada je $H_n(\omega) = Z_{n-1}^{(\xi(\omega))}\mathbf{1}_{(Z_n>0)}$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{GW}(H_n = k) &= \sum_{i\geq 1} \mathbf{GW}(\xi = i, H_n = k, Z_n > 0) \\
&= \sum_{i\geq 1} \mathbf{GW}(Z_1 \geq i, Z_{n-1}^{(j)} = 0 \text{ za } j < i, Z_{n-1}^{(i)} = k) \\
&= \mathbf{GW}(Z_{n-1} = k) \sum_{i\geq 1} \mathbf{GW}(Z_1 \geq i) \cdot \mathbf{GW}(Z_{n-1} = 0)^{i-1}.
\end{aligned}$$

S druge strane

$$\mathbf{GW}(Z_n > 0) = \sum_{k\geq 1} \mathbf{GW}(H_n = k) = \mathbf{GW}(Z_{n-1} > 0) \sum_{i\geq 1} \mathbf{GW}(Z_1 \geq i) \cdot \mathbf{GW}(Z_{n-1} = 0)^{i-1}$$

pa naposljetku imamo

$$\mathbf{GW}(H_n = k \mid Z_n > 0) = \frac{\mathbf{GW}(H_n = k)}{\mathbf{GW}(Z_n > 0)} = \frac{\mathbf{GW}(Z_{n-1} = k)}{\mathbf{GW}(Z_{n-1} > 0)} = \mathbf{GW}(Z_{n-1} = k \mid Z_{n-1} > 0).$$

Kako je $Z_n \geq H_n$, dobivamo

$$\mu_n([k, \infty\rangle) \geq \mathbf{GW}(H_n \geq k \mid Z_n > 0) = \mu_{n-1}([k, \infty\rangle)$$

pa je niz mjera $(\mu_n)_n$ stohastički nepadajući. Odavde slijedi

$$\mathbb{E}[Z_n \mid Z_n > 0] = \sum_{k\geq 1} \mu_n([k, \infty\rangle) \geq \sum_{k\geq 1} \mu_{n-1}([k, \infty\rangle) = \mathbb{E}[Z_{n-1} \mid Z_{n-1} > 0].$$

Nadalje,

$$\frac{\mathbf{GW}(Z_n > 0)}{m^n} = \frac{1}{\mathbb{E}[Z_n \mid Z_n > 0]}.$$

Zato je niz $(\mathbf{GW}(Z_n > 0)/m^n)_n$ padajući i $i) \Leftrightarrow ii)$.

Pokažimo sada da je $\hat{\mu}_n$ zakon razdiobe od $\widehat{Z_n}$. Neka je U slučajna varijabla koja ima distribuciju μ_n. Tada je $\mathbb{E}[U] = \int U \, d\mu_n = \mathbb{E}[Z_n]/\mathbf{GW}(Z_n > 0)$. Slijedi

$$\hat{\mu}_n(k) = k\frac{\mu_n(k)}{\mathbb{E}[U]} = k\frac{\mathbf{GW}(Z_n = k)}{\mathbb{E}[Z_n]} = \mathbf{GW}(\widehat{Z_n} = k).$$

Neka je I_n proces s imigracijom, $Y_n = \widehat{L_n} - 1$. Tada iz diskusije s kraja odjeljka 2.2 znamo da je

$$\mathbf{GW}(\widehat{Z_n} = k) = \widehat{\mathbf{GW}}(Z_n = k) = \widehat{\mathbf{GW}}(Z_n - 1 = k - 1) = \mathbf{GW}(I_n = k - 1) = \mathbf{GW}(I_n + 1 = k).$$

Ako je $\sup_n \mathbb{E}[Z_n \mid Z_n > 0] < \infty$, tada po prethodnoj lemi $\widehat{Z_n}$ ne može po vjerojatnosti težiti k beskonačno, a onda ne može ni I_n. Po Teoremu 3.3.3 to znači da je

$$\mathbb{E}[\log^+ Y] = \mathbb{E}[\log^+(\widehat{L} - 1)] = \frac{1}{m}\mathbb{E}[L \log^+(L - 1)] < \infty$$

pa $ii) \implies iii)$.

Ako je $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$ onda po Teoremu 3.3.3 I_n konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli koja je g.s. konačna, a zato i $\hat{\mu}_n$ slabo konvergira prema nekoj vjerojatnosnoj mjeri. To znači da je niz $(\hat{\mu}_n)_n$ napet pa po prethodnoj lemi $\sup_n \mathbb{E}[Z_n \mid Z_n > 0] < \infty$, čime smo dobili da $iii) \implies ii)$. □

3.4 Kritični procesi: brzina izumiranja

Kod subkritičnih procesa dali smo grubu ocjenu $P(Z_n > 0) \leq m^n$. Glavno pitanje o brzini izumiranja je bilo kada je m^n prikladna brzina izumiranja. U slučaju kritičnih procesa to pitanje nema smisla. Brzina izumiranja dana je sljedećim teoremom.

Teorem 3.4.1 (Kolmogorovljeva procjena). *Neka je $m = 1$ i $\sigma^2 := \mathrm{Var}(L) = \mathbb{E}[L^2] - 1$. Tada je $\lim_{n\to\infty} nP(Z_n > 0) = 2/\sigma^2$.*

Vidimo da za brzinu izumiranja kritičnih procesa imamo precizniji rezultat nego što smo imali kod brzine rasta kritičnih i brzine izumiranja subkritičnih procesa. Prijašnji rezultati su nam davali odgovarajuće brzine do na neki slučajni faktor. Ovdje znamo koliki je taj faktor. Brzina izumiranja je dana s $2/(\sigma^2 n)$. Ako je $\sigma^2 = \infty$, onda $P(Z_n > 0)$ pada brže od $1/n$. Pokažimo sada taj rezultat. Prije dokaza navodimo nekoliko rezultata koje ćemo koristiti.

Lema 3.4.2. *Neka je L diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u $\mathbb{N}_0$, takva da je $0 < \mathbb{E}[L] < \infty$ i neka je $\widehat{L}$ pripadna slučajna varijabla pristrana po veličini. Pretpostavimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo događaje $H_1^{(n)}, \dots, H_L^{(n)}$ koji su uvjetno na L nezavisni, takvi da je vjerojatnost svakog događaja $p_n > 0$ i $p_n \to 0$. Neka je $Y_n := \sum_{i=1}^{L} \mathbf{1}_{H_i^{(n)}}$. Tada vrijedi:*

i) $\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 1 \mid Y_n > 0) = 1$*;*

ii) $\lim_{n\to\infty} P(L = k \mid Y_n > 0) = P(\widehat{L} = k)$*;*

iii) $\lim_{n\to\infty} P(H_i^{(n)} \mid Y_n > 0, L = k) = 1/k$ *za* $1 \le i \le k$*.*

Dokaz. Računamo:

$$P(Y_n = 1 \mid Y_n > 0, L = k) = \frac{P(Y_n = 1 \mid L = k)}{P(Y_n > 0 \mid L = k)} = k \cdot \frac{p_n(1-p_n)^{k-1}}{1-(1-p_n)^k}.$$

Po L'Hospitalovom pravilu dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1-x)^{k-1}}{1-(1-x)^k} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^{k-1} - x(k-1)(1-x)^{k-2}}{k(1-x)^{k-1}} = \frac{1}{k}.$$

Iz teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 1 \mid Y_n > 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} P(Y_n = 1 \mid Y_n > 0, L = k) P(L = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(L = k) = 1.$$

Nadalje,

$$P(L = k \mid Y_n > 0) = \frac{P(Y_n > 0 \mid L = k) P(L = k)}{P(Y_n > 0)} = \frac{1-(1-p_n)^k}{P(Y_n > 0)} \cdot P(L = k).$$

Imamo

$$P(Y_n > 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_n > 0 \mid L = k) P(L = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-(1-p_n)^k) P(L = k) = \mathbb{E}[1-(1-p_n)^L].$$

Lagano je vidjeti da je $\mathrm{d}\mathbb{E}[(1-(1-x)^L]/\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}[L(1-x)^{L-1}]$ pa kako je $L(1-p_n)^{L-1} \le L$ po teoremu o dominiranoj konvergenciji je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[L(1-p_n)^{L-1}] = \mathbb{E}[L]$. Koristeći L'Hosiptalovo pravilo dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-(1-p_n)^k}{\mathbb{E}[1-(1-p_n)^L]} = \lim_{n\to\infty} \frac{k(1-p_n)^{k-1}}{\mathbb{E}[L(1-p_n)^{L-1}]} = \frac{k}{\mathbb{E}[L]},$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} P(L = k \mid Y_n > 0) = \frac{k}{\mathbb{E}[L]} \cdot P(L = k) = P(\widehat{L} = k).$$

Na koncu imamo

$$\lim_{n\to\infty} P(H_i^{(n)} \mid Y_n > 0, L = k) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(H_i^{(n)}, Y_n > 0 \mid L = k)}{P(Y_n > 0 \mid L = k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{1 - (1 - p_n)^k} = \frac{1}{k}.$$

□

Lema 3.4.3. *Neka je A slučajna varijabla nezavisna od B i C. Neka je funkcija $x \mapsto P(C \leq X)/P(B \leq x)$ rastuća na skupu gdje je $P(B \leq x) > 0$. Ako je $P(A \geq B) > 0$ i $P(A \geq C) > 0$, tada je zakon razdiobe od A uvjetno na $A \geq B$ stohastički dominiran zakonom razdiobe od A uvjetno na $A \geq C$. Posebno, tvrdnja vrijedi ako su B i C geometrijske slučajne varijable takve da B ima veći parametar od C.*

Dokaz. Neka je F funkcija distribucije od A. Za $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
P(A > x \mid A \geq B) &= \frac{P(A > x, A \geq B)}{P(A \geq B)} = \frac{\int_{y>x} P(B \leq y)\, \mathrm{d}F(y)}{\int_{y\in\mathbb{R}} P(B \leq y)\, \mathrm{d}F(y)} \\
&= \left(1 + \frac{\int_{y\leq x} P(B \leq y)\, \mathrm{d}F(y)}{\int_{y>x} P(B \leq y)\, \mathrm{d}F(y)}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{\int_{y\leq x} P(C \leq y) \frac{P(B\leq x)}{P(C\leq x)}\, \mathrm{d}F(y)}{\int_{y>x} P(C \leq y) \frac{P(B\leq x)}{P(C\leq x)}\, \mathrm{d}F(y)}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{\int_{y\leq x} P(C \leq y)\, \mathrm{d}F(y)}{\int_{y>x} P(C \leq y)\, \mathrm{d}F(y)}\right)^{-1} = P(A > x \mid A \geq C).
\end{aligned}$$

Neka je sada $B \sim G(b)$, $C \sim G(c)$ i $b > c$. Stavimo $b_1 = 1 - b$ i $c_1 = 1 - c$. Tada je

$$\frac{P(C \leq k)}{P(B \leq k)} = \frac{1 - (1 - c)^k}{1 - (1 - b)^k} = \frac{1 - c_1^k}{1 - b_1^k}.$$

Dovoljno je pokazati da je $(1 - c_1^{k+1})/(1 - b_1^{k+1}) \geq (1 - c_1^k)/(1 - b_1^k)$, a to je ekvivalentno tome da funkcija $x \mapsto (1 - x^{k+1})/(1 - x^k)$ rastuća. To je jasno jer je

$$\frac{1 - x^{k+1}}{1 - x^k} = \frac{1 - x^k + x^k(1 - x)}{1 - x^k} = 1 + \frac{x^k}{1 + x + \cdots + x^{k-1}} = 1 + \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x^i}\right)^{-1}.$$

□

Teorem 3.4.4 (**Skorokhodov teorem reprezentacije**). *Neka je $(P_n)_n$ niz vjerojatnosnih mjera na metričkom prostoru S, takav da $(P_n)_n$ slabo konvergira prema vjerojatnosoj mjeri P na S i P ima separabilan nosač. Tada postoje slučajne varijable $X, X_1, X_2, \dots$ definirane na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ koje poprimaju vrijednosti u S, takve da je P_n zakon razdiobe od X_n, P je zakon razdiobe od X i $X_n \to X$ P-g.s.*

Dokaz. Pogledajte [3, teorem 6.7.]. □

Napomena 3.4.5. Pretpostavimo da imamo niz slučajnih varijabli $(X_n)_n$ takvih da $X_n \xrightarrow{D} X$. Kako su zakoni razdiobe od X_n, $n \in \mathbb{N}$ i X vjerojatnosne mjere na separabilnom metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$ uz standardnu euklidsku metriku, uvjeti prethodnog teorema su zadovoljeni. Stoga postoje slučajne varijable $Y, Y_1, Y_2, \dots$ na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takve da $X_n \stackrel{D}{=} Y_n$, $X \stackrel{D}{=} Y$ i $Y_n \to Y$ P-g.s.

Prethodni teorem nam u kombinaciji s Teoremom 3.2.8 daje sljedeći koristan rezultat.

Propozicija 3.4.6. *Neka niz nenegativnih slučajnih varijabli $(X_n)_n$ konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli X. Tada vrijedi:*

i) $\mathbb{E}[X] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$*;*

ii) Ako je niz $(X_n)_n$ još uniformno integrabilan, onda $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.

Dokaz. Po Skorokhodovom teoremu (Napomena 3.4.5) postoje slučajne varijable Y, $(Y_n)_n$ takve da $Y_n \stackrel{D}{=} X_n$, $Y \stackrel{D}{=} X$ i $Y_n \to Y$ g.s. Odavde imamo $|Y_n| \to |Y|$ g.s. pa po Fatouovoj lemi vrijedi
$$\mathbb{E}[|Y|] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|Y_n|].$$
Kako je $|Y| \stackrel{D}{=} |X| = X$ i $|Y_n| \stackrel{D}{=} |X_n| = X_n$, slijedi da je $\mathbb{E}[|Y|] = \mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[X]$ i $\mathbb{E}[|Y_n|] = \mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n]$ pa dobivamo
$$\mathbb{E}[X] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n].$$

Pretpostavimo da je niz $(X_n)_n$ uniformno integrabilan, tada je i niz $(Y_n)_n$ uniformno integrabilan. Po Teoremu 3.2.8 vrijedi $\mathbb{E}[|Y_n|] \to \mathbb{E}[|Y|]$, a to znači da i $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$. □

Sada smo spremni dokazati Kolmogorovljevu procjenu.

Dokaz Teorema 3.4.1. Neka je Y_n broj čvorova u prvoj generaciji koji imaju potomka u n-toj generaciji. Tada je $Y_n = \sum_{i=1}^{L} \mathbf{1}_{H_i^{(n)}}$, gdje je $H_i^{(n)}$ događaj da i-ti čvor iz prve generaciji ima potomka u n-toj generaciji. Za $n \geq 2$ je $\{Y_n > 0\} = \{Z_n > 0\}$. Kako $p_n := P(Z_{n-1} > 0) \to 0$, po Lemi 3.4.2 imamo

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 1 \mid Z_n > 0) = 1, \\ &\lim_{n\to\infty} P(L = k \mid Z_n > 0) = P(\widehat{L} = k), \\ &\lim_{n\to\infty} P(H_i^{(n)} \mid Z_n > 0, L = k) = 1/k \text{ za } 1 \leq i \leq k. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Događaj $\{Z_n > 0\}$, za $n \geq 2$, je jednak događaju da barem jedan čvor iz prve generacije ima potomka u n-toj generaciji. Svaki takav čvor ima potomka u n-toj generaciji s vjerojatnosti $P(Z_{n-1} > 0)$ nezavisno od ostalih. Neka je $D_n \sim G(P(Z_{n-1} > 0))$, nezavisna od Z_1. Tada je $\{Z_n > 0\} = \{D_n \leq Z_1\}$ pa je uvjetna distribucija od Z_1 uz $Z_n > 0$ jednaka uvjetnoj distribuciji od Z_1 uz $D_n \leq Z_1$. Kako je $P(Z_{n-1} > 0) > P(Z_n > 0)$, geometrijska slučajna varijabla D_n ima veći parametar od D_{n+1}. Stoga je po Lemi 3.4.3

$$P(Z_1 > k \mid Z_1 \geq D_n) \leq P(Z_1 > k \mid Z_1 \geq D_{n+1}).$$

To znači da i uvjetna distribucija od Z_1 uz $Z_n > 0$ stohastički raste po n. Koristeći teorem o monotonoj konvergenciji i (3.14) dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_1 \mid Z_n > 0] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 > k \mid Z_n > 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\widehat{L} > k) = \mathbb{E}[\widehat{L}],$$

a po definiciji je

$$\mathbb{E}[\widehat{L}] = \frac{\mathbb{E}[L^2]}{\mathbb{E}[L]} = \frac{\operatorname{Var} L + \mathbb{E}[L]^2}{\mathbb{E}[L]} = \sigma^2 + 1.$$

Na događaju $\{Z_n > 0\}$ neka je u_n^n skroz lijevi čvor u n-toj generaciji (onaj koji ima najmanju oznaku po leksikografskom uređaju od svih čvorova na n-toj razini) i neka je put tog čvora do korijena $u_{n-1}^n, \dots, u_0^n$, gdje je u_i^n predak u i-toj generaciji. Neka je X_i' broj potomaka čvora u_i^n u n-toj generaciji koji nisu potomci od u_{i+1}^n i neka je X_i broj djece od u_i^n koji se nalaze desno od u_{i+1}^n. Tada je $Z_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} X_i'$ na događaju $\{Z_n > 0\}$. Primijetimo da kako je u_n^n skroz lijevi čvor u n-toj generaciji, niti jedno dijete čvora u_i^n koje se nalazi lijevo od u_{i+1}^n ne može imati potomka u n-toj generaciji. Stoga su potomci od u_i^n u n-toj generaciji koji nisu potomci od u_{i+1}^n, svi potomci od djece čvora u_i^n koja su desno od u_{i+1}^n. Zato imamo

$$X_i' \mathbf{1}_{(Z_n>0)} = \sum_{j=1}^{X_i \mathbf{1}_{(Z_n>0)}} Z_{n-i-1} \circ T_{u_i^n j}.$$

Slučajne varijable $K_j := Z_{n-i-1} \circ T_{u_i^n j}$ su nezavisne jednako distribuirane (neka je K slučajna varijabla takva da je $K \stackrel{D}{=} K_j$ za svaki j) i nezavisne od $X_i \mathbf{1}_{(Z_n>0)}$. Stoga je

$$\mathbb{E}[X_i' \mathbf{1}_{(Z_n>0)}] = \mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{(Z_n>0)}] \underbrace{\mathbb{E}[K]}_{1} = \mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{(Z_n>0)}]$$

pa je $\mathbb{E}[X_i' \mid Z_n > 0] = \mathbb{E}[X_i \mid Z_n > 0]$. Odavde imamo

$$\frac{1}{nP(Z_n > 0)} = \frac{\mathbb{E}[Z_n]}{nP(Z_n > 0)} = \frac{\mathbb{E}[Z_n \mid Z_n > 0]}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_i \mid Z_n > 0]. \tag{3.15}$$

Treba pokazati da desna strana teži prema $\sigma^2/2$ kada $n \to \infty$. Označimo sa ξ_i broj prvog potomka od u_i^n po leksikografskom uređaju koji ima potomka u n-toj generaciji (znamo da je taj potomak zapravo u_{i+1}^n). Tada uvjetovanjem na broj djece čvora u_i^n dobivamo

$$\begin{aligned}
P(X_i = k \mid Z_n > 0) &= \sum_{l \geq k+1} P(X_i = k, L = l \mid Z_n > 0) \\
&= \sum_{l \geq k+1} P(\xi_i = l - k, L = l \mid Z_n > 0) \\
&= \sum_{l \geq k+1} P(\xi_i = l - k \mid Z_n > 0, L = l)\, P(L = l \mid Z_n > 0) \\
&= \sum_{l \geq k+1} P\left(\bigcap_{j=1}^{l-k-1} (H_j^{(n-i-1)})^{\mathsf{c}} \cap H_{l-k}^{(n-i-1)} \mid Z_{n-i-1} > 0, L = l\right) P(L = l \mid Z_n > 0)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Slično kao u dokazu Leme 3.4.2 računamo

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{l-k-1} (H_j^{(n-i-1)})^{\mathsf{c}} \cap H_{l-k}^{(n-i-1)} \mid Z_{n-i-1} > 0, L = l\right) = (1 - p_{n-i-1})^{l-k-1} \cdot \frac{p_{n-i-1}}{1 - (1 - p_{n-i-1})^l}$$

Puštanjem $n \to \infty$, desna strana ide prema $1/l$. Vratimo se u (3.16). Po teoremu o dominiranoj konvergenciji, uz (3.14) slijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X_i = k \mid Z_n > 0) &= \sum_{l \geq k+1} \frac{1}{l} P(\widehat{L} = l) \\
&= \sum_{l \geq k+1} P\left(\frac{k}{l} \leq U < \frac{k+1}{l}\right) P(\widehat{L} = l) \\
&= P(k \leq U\widehat{L} < k+1) \\
&= P(\lfloor U\widehat{L} \rfloor = k),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

gdje je U uniformna slučajna varijabla na $[0, 1]$, nezavisna od $\widehat{L}$. Kako us U i $\widehat{L}$ nezavisne, vrijedi $P_{(U,\widehat{L})} = P_U \otimes P_{\widehat{L}}$ pa po Fubinijevom teoremu računamo

$$\mathbb{E}[\lfloor U\widehat{L} \rfloor] = \int_{[0,1]\times\mathbb{R}^+} \lfloor uk \rfloor \, \mathrm{d}P_{(U,\widehat{L})}(u, k) = \int_0^\infty \int_0^1 \lfloor uk \rfloor \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}P_{\widehat{L}}(x). \tag{3.18}$$

Izraz $\lfloor uk \rfloor$ je jednak $l \in \mathbb{N}_0$ ako je $u \in \left[\frac{l}{k}, \frac{l+1}{k}\right\rangle$ za $l < k$. Stoga je

$$\int_0^1 \lfloor uk \rfloor \,\mathrm{d}u = \int_0^{1/k} 0 \,\mathrm{d}u + \int_{1/k}^{2/k} 1 \,\mathrm{d}u + \cdots + \int_{(k-1)/k}^{1} (k-1) \,\mathrm{d}u = \frac{1}{k}(1 + \cdots + k - 1) = \frac{k-1}{2}.$$

Uvrstimo li to sada natrag u (3.18) dobivamo $\mathbb{E}[\lfloor U\widehat{L} \rfloor] = \mathbb{E}[\widehat{L} - 1]/2 = \sigma^2/2$.

Pretpostavimo da je $\sigma < \infty$. Neka je Y'_n slučajna varijabla čija je distribucija jednaka uvjetnoj distribuciji od Z_1 uz $Z_n > 0$. Kako je $\mathbb{E}[\widehat{L}] = \sigma^2 + 1 < \infty$, za $\varepsilon > 0$ postoji $K \in \mathbb{N}_0$ takav da je $\sum_{l \geq K} P(\widehat{L} \geq l) < \varepsilon$. Zato je po teoremu o monotonoj konvergenciji (ranije smo pokazali da uvjetna distribucija o Z_1 uz $Z_n > 0$ stohastički raste sa n)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y'_n \mathbf{1}_{Y'_n \geq K}] &= \sum_{l \geq K} P(Y'_n \geq l) = \sum_{l \geq K} P(Z_1 \geq l \mid Z_n > 0) \\ &\leq \limsup_{n \to \infty} \sum_{l \geq K} P(Z_1 \geq l \mid Z_n > 0) = \sum_{l \geq K} P(\widehat{L} \geq l) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da je niz $(Y'_n)_n$ uniformno integrabilan. Neka je Y_n slučajna varijabla čija je distribucija uvjetna distribucija od X_i uz $Z_n > 0$. Broj djece od u_i^n desno od u_{i+1}^n je manji od ukupnog broja djece od u_i^n pa vrijedi

$$P(Y_n \geq k) = P(X_i \geq k \mid Z_n > 0) \leq P(Z_1 \geq k \mid Z_{n-i-1} > 0) = P(Y'_{n-i-1} \geq k).$$

Stoga je

$$\mathbb{E}[Y_n \mathbf{1}_{Y_n \geq K}] = \sum_{l \geq K} P(Y_n \geq l) \leq \sum_{l \geq K} P(Y'_{n-i-1} \geq l) < \varepsilon,$$

što znači da je i niz $(Y_n)_n$ uniformno integrabilan. Iz (3.17) slijedi da $Y_n \xrightarrow{D} \lfloor U\widehat{L} \rfloor$. Po Propoziciji 3.4.6 zato vrijedi $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[\lfloor U\widehat{L} \rfloor]$, to jest $\mathbb{E}[X_i \mid Z_n > 0] \to \sigma^2/2$. Iz (3.15) slijedi $nP(Z_n > n) \to 2/\sigma^2$.

Ako je pak $\sigma = \infty$, onda kako $Y_n \xrightarrow{D} \lfloor U\widehat{L} \rfloor$, po Propoziciji 3.4.6 je

$$\infty = \mathbb{E}[\lfloor U\widehat{L} \rfloor] \leq \liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}[Y_n].$$

Iz (3.15) slijedi $nP(Z_n > n) \to 0$. □

Bibliografija

[1] R. Abraham i J. F. Delmas, *An introduction to Galton-Watson trees and their local limits*, (2015), `https://arxiv.org/abs/1506.05571`.

[2] G. Alsmeyer, *Spezielle Stochastische Prozesse*, University of Münster, `https://www.uni-muenster.de/Stochastik/lehre/WS1011/SpezielleStochastischeProzesse/`, posjećena 14.11.2021.

[3] P. Billingsley, *Convergence of probability measures,* 2. izd., John Wiley & Sons, New York, 1999.

[4] R. Durrett, *Probability: theory and examples,* 5. izd., Cambridge University Press, Cambridge, 2019.

[5] R. Lyons, R. Pemantle i Y. Peres, *Conceptual proofs of L log L criteria for mean behavior of branching processes*, The Annals of Probability **23** (1995), br. 3, 1125–1138.

[6] R. Lyons i Y. Peres, *Probability on trees and networks*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[7] J. Neveu, *Arbres et processus de Galton-Watson*, Annales de l'IHP Probabilités et statistiques **22** (1986), br. 2, 199–207.

[8] Z. Vondraček, *Slučajni procesi*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2010.

Sažetak

U ovom radu promatramo granično ponašanje Galton–Watsonovih procesa. Ti procesi opisuju razvoj populacije koja kreće od jedne jedinke. Svaka jedinka se razmnožava nezavisno od ostalih i ima jednaku distribuciju potomaka. Pokazujemo da ovakvi procesi imaju svojevrsnu dualnost: populacija ili izumre ili sve više raste. Ovisno o očekivanom broju potomaka m, Galton–Watsonove procese dijelimo na subkritične ($m < 1$), kritične ($m = 1$) i superkritične ($m > 1$). Subkritični i kritični procesi izumru g.s., dok superkritični preživljavaju s pozitivnom vjerojatnošću.

Postavlja se pitanje koliko brzo subkritični i kritični procesi izumiru te kolika je brzina rasta superkritičnih procesa u slučaju preživljavanja. Pokazujemo da je kod subkritičnih i superkritičnih procesa glavno pitanje kada je m^n prava brzina izumiranja, odnosno rasta. U oba slučaja ispada da je to ekvivalentno "$L \log L$ uvjetu" koji glasi $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$, gdje je L slučajna varijabla koja predstavlja broj djece neke jedinke u sljedećoj generaciji. Ukoliko taj uvjet nije zadovoljen, subkritični procesi izumiru još brže od m^n, a kritični procesi rastu sporije od m^n. Štoviše, u tom slučaju rast superkritičnih procesa nije puno sporiji. Kod kritičnih procesa imamo malo drugačiju situaciju. Ovdje je brzina izumiranja dana s $1/n$ ako je $\mathrm{Var}(L) < \infty$, a brzina je još veća ako je $\mathrm{Var}(L) = \infty$.

Summary

In this thesis we have studied the limit behavior of Galton–Watson processes. Such processes describe the evolution of the population which starts with one individual. All individuals reproduce independently from each other and have the same offspring distribution. We show that these processes have a certain dichotomy: they either become extinct or population size explodes. Depending on mean of the offspring distribution m, Galton–Watson process is called subcritical if $m < 1$, critical if $m = 1$, and supercritical if $m > 1$. Subcritical and critical processes become extinct a.e., while supercritical processes survive with positive probability.

Finer question is how fast subcritical and critical processes become extinct and what is the growth rate of supercritical processes if they survive. We show that the main question concerning subcritical and supercritical processes is when does m^n give the right decay rate and the right growth rate respectively. In both cases, it turns out that this is equivalent to "$L \log L$" criterion which states $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$, where L is a random variable denoting the number of children of some individual. If this condition isn't true, subcritical processes die out faster than m^n, while the growth rate of supercritical processes is less than m^n. Moreover, in that instance supercritical processes grow just slightly slower than m^n. The behavior of critical processes is somewhat different. They die out with the rate of $1/n$ if $\mathrm{Var}(L) < \infty$, whereas the pace of extinction is even greater if $\mathrm{Var}(L) = \infty$.

Životopis

Rođen sam 19. lipnja 1997. u Zagrebu, gdje sam završio osnovnu školu Pavleka Miškine i XV. gimnaziju. Tijekom osnovne i srednje škole sudjelovao sam na brojnim državnim i drugim matematičkim natjecanjima, gdje sam ostvarivao dobre rezultate.

Nakon završetka srednje škole 2016. godine, upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2019. godine upisujem diplomski studij Matematička statistika na istom fakultetu. Dobio sam nagrade Matematičkog odsjeka za izniman uspjeh na preddiplomskom i diplomskom studiju. Za vrijeme fakulteta sam ostao uključen u srednjoškolska natjecanja kao član udruge *Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"*, gdje sam bio jedan od mentora u pripremi učenika za natjecanja iz matematike. Tijekom studija sam osvojio dvije brončane medalje na International Mathematical Competition-u u Blagoevgradu. Od 2018. godine primam Stipendiju Grada Zagreba za izvrsnost.