Metode procjene rizičnosti vrijednosti

Mutak, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Mutak

METODE PROCJENE RIZIČNOSTI VRIJEDNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Azra Tafro

Zagreb, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Svakog dana susrećemo se s nekim oblikom rizika, hoćemo li izgubiti posao zbog nepovoljne gospodarske situacije, hoće li nam se pokvariti auto, hoćemo li izgubiti urod zbog loših vremenskih uvjeta, hoće li doći do potresa u kojem ćemo ostati bez doma. Tako se i na financijskim tržištima susrećemo s različitim oblicima rizika. Najčešće kada pričamo o riziku u financijama, mislimo na rizik koji donosi ulaganje u određenu financijsku imovinu. Kako bi se izmjerio, odnosno procijenio, rizik koji pojedina financijska imovina nosi, tijekom povijesti počele su se koristiti mjere rizika.

Rizičnost vrijednosti jedna je od mjera rizika koja se počela koristiti 80-ih godina. Riječ je o mjeri rizika koja je predstavljena jednim brojem te nam govori o najvećem mogućem gubitku koji naša imovina ili portfelj može postići u određenom razdoblju. Tijekom godina razvijale su se metode kojima možemo procijeniti rizičnost vrijednosti. Prva metoda kojom se procjenjivala rizičnost vrijednosti bila je metoda varijance i kovarijance koja je i dalje u upotrebi. Ova metoda je parametarska, a također postoje i simulacijske metode za procjenu rizičnosti vrijednosti. U simulacijske metode spadaju povijesna metoda i Monte Carlo metoda.

Financijska imovina za koji procjenjujemo rizik može biti bilo što. Iz tog razloga, nakon što se metode procjene rizičnosti vrijednosti provedu, potrebno je provjeriti efikasnost tih metoda kako bismo vidjeli kvalitetu metoda u određenim situacijama. Prilikom provjere kvalitete metode koristimo testiranje unatrag te testiranje otpornosti na stres.

U ovom radu, bavit ćemo se rizičnošću vrijednosti, metodama za procjenu rizičnosti vrijednosti te testiranjem unatrag i testiranjem otpornosti na stres.

U prvom poglavlju, upoznat ćemo se s pojmovima financijski sustav, financijska tržišta, financijski instrumenti te važnim financijskim institucijama u Hrvatskoj. Definirat ćemo najbitnije pojmove iz statistike te spomenuti par bitnih formula. Također, u prvom poglavlju susrest ćemo se s pojmom rizika. Rizik je općenito teško definirati, ali mi ćemo ga definirati u financijskom smislu. Nakon toga, objasnit ćemo sistematski i nesistematski rizik te kreditni rizik. U ovom poglavlju nabrojit ćemo neke mjere rizika, volatilnost, beta investicije, Sharpeov omjer te Treynorov omjer. Iz nedostataka ovih mjera rizika dolazi do potrebe za novom mjerom rizika kojom ćemo se baviti u idućim poglavljima.

U drugom poglavlju, definirat ćemo novu mjeru rizika, rizičnost vrijednosti ili poznatije

VaR. Rizičnost vrijednosti definirat ćemo neformalno kako bismo lakše mogli shvatiti što je to, ali nakon toga ćemo navesti i formalnu definiciju. U ovom poglavlju objasnit ćemo razliku između relativne i apsolutne rizičnosti vrijednosti te nabrojiti prednosti i nedostatke rizičnosti vrijednosti kao mjere rizika. Spomenut ćemo još jednu mjeru rizika, a to je očekivani gubitak. Očekivani gubitak nam je zanimljiv zato što koristi rizičnost vrijednosti prilikom izračuna. Na kraju ovog poglavlja reći ćemo ukratko o samoj povijesti rizičnosti vrijednosti i kako je došlo do korištenja ove mjere rizika.

Treće poglavlje ovog rada najznačajnije je i najopsežnije. U ovom poglavlju bavit ćemo se trima metodama za procjenu rizičnosti vrijednosti, a to su povijesna metoda, metoda varijance i kovarijance te Monte Carlo metoda. Za svaku od metoda objasnit ćemo kako se koristi te nabrojiti njezine prednosti i nedostatke. U ovom dijelu definirat ćemo formule koje ćemo dalje koristiti u primjeni metoda na konkretnom primjeru. Dodatno, za metodu varijance i kovarijance objasnit ćemo postupak pojednostavljivanja, odnosno mapiranja portfelja te alternativne načine za procjenu volatilnosti i korelacije pomoću EWMA i GARCH modela. Kod Monte Carlo metode objasnit ćemo i dva načina za simulaciju podataka, metodu inverza i bootstrap metodu. Na kraju poglavlja, usporedit ćemo metode.

U četvrtom poglavlju, napravit ćemo primjenu povijesne metode, metode varijance i kovarijance te Monte Carlo metode na portfelj koji se sastoji od dionica Končara, Podravke i HT-a. Koristeći teoriju iz prethodnih poglavlja procijenit ćemo VaR spomenutim metodama i usporediti rezultate.

U zadnjem, petom poglavlju, bavit ćemo se testiranjem unatrag i testiranjem otpornosti na stres. Testiranje unatrag i testiranje otpornosti na stres bitno nam je kako bismo odredili kvalitetu naše metode. Nakon što ćemo reći što je to testiranje unatrag i testiranje otpornosti na stres te objasniti kako se ono provodi, napravit ćemo primjenu na sve metode za portfelj koji smo koristili u prethodnom poglavlju.

Poglavlje 1

Financijska tržišta i rizik

1.1 Financijska tržišta

Financijski sustav zemlje čine njezina valuta i platni sustav, financijska tržišta, financijske institucije te institucije koje reguliraju i nadziru njihov rad. Valuta u Republici Hrvatskoj je kuna, a u platnom sustavu fizičke i pravne osobe obavljaju bezgotovinske transakcije unutar zemlje i s inozemstvom najčešće preko poslovnih banaka. Na **financijskim tržištima** trguje se financijskim instrumentima, pri čemu je **financijski instrument** svaka imovina kojom se može trgovati [9].

Financijska se tržišta mogu podijeliti prema dospijeću na tržište novaca gdje se trguje financijskim instrumentima s dospijećem do godinu dana te na tržište kapitala gdje se trguje dugoročnim financijskim instrumentima. Tržište kapitala možemo podijeliti na više načina, a mi ćemo spomenuti podjelu na organizirano i spontano tržište. **Organizirano tržište** odvija se preko burze sa strogo kontroliranim uvjetima i zahtjevima dok **spontano**, čiji je naziv još i tržište "preko šaltera" (eng. *Over the Counter*, skraćenica OTC), nije strogo definirano. U Republici Hrvatskoj burza nosi naziv Zagrebačka burza.

Financijske institucije su posrednici na financijskom tržištu, mogu biti bankovne i nebankovne institucije. U Republici Hrvatskoj najzastupljenije su poslovne banke čije djelovanje regulira središnja banka koja se naziva Hrvatska narodna banka (skraćenica HNB). Primjeri nebankovnih financijskih institucija su investicijski fondovi, mirovinski fondovi i društva za osiguranje te njihovo djelovanje regulira Hrvatska agencija za nadzor financijskih usluga (skraćenica HANFA).

Financijski se instrumenti također mogu podijeliti prema određenim kriterijima, ali za nas to nije bitno, tako da navodimo samo neke od instrumenata bez podjele. Najpoznatiji financijski instrumenti su dionice i obveznice, a još neki od instrumenata su depozit u bankama, unaprijedni ugovori (eng. *forwards*), budućnice (eng. *futures*), opcije (eng. *options*), zamjene (eng. *swaps*), udjeli u mirovinskim i investicijskim fondovima, itd.

Skup financijske imovine pojedinca ili tvrtke naziva se **portfelj**. Portfelj može biti sastavljen od različitih financijskih imovina, a može se sastojati i od samo jedne vrste imovine. **Povrat** je zarađen ili izgubljen dio investicije u nekom razdoblju prilikom investiranja u financijsku imovinu ili portfelj. Povrati mogu biti dnevni, tjedni, mjesečni, itd. u ovisnosti o tome gledamo li cijene imovine na dnevnoj, tjednoj ili mjesečnoj bazi. Mi ćemo promatrati dnevne povrate te se oni računaju kao postotna promjena vrijednosti cijena imovine između dva uzastopna dana. Sljedeće formule preuzete si iz [17].

Neka $P_{i,1}, \ldots, P_{i,n}$ označavaju cijenu imovine, gdje n označava broj prošlih podataka, a $i = 1, \ldots, m$ je oznaka za i-tu imovinu u portfelju. Dnevni povrat za i-tu imovinu u vremenu t računa se po formuli

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}, \qquad t = 2, \ldots, n. \tag{1.1.}$$

Uočimo da nemamo povrat u prvom danu zato što je to dan u kojem smo tek krenuli s investiranjem. Ponekad su nam korisniji **log povrati**, oznaka r_t, koji se računaju prema formuli

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}, \tag{1.2.}$$

gdje je P_t ponovno cijena imovine u vremenu t.

Pretpostavimo sada da imamo portfelj koji se sastoji od m imovina i označimo te imovine s $I_1, \ldots, I_m$ te s $w_1, \ldots, w_m$ označimo udjele tih imovina u portfelju, a s $R_{1,t}, \ldots, R_{m,t}$ označimo povrate na imovine $I_1, \ldots, I_m$ u vremenu $t = 1, \ldots, n$. Tada se **povrat portfelja** u vremenu t računa kao

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^{m} w_i R_{i,t}. \tag{1.3.}$$

Prosječni dnevni povrat imovine i jednak je

$$\overline{R_i} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} R_{i,t}. \tag{1.4.}$$

Povrati imovine su slučajne varijable pa su prema tome i povrati portfelja slučajne varijable. Kako bismo definirali što su slučajne varijable, prvo moramo definirati vjerojatnosni prostor. Sljedeće definicije preuzete su iz [18].

Pokus je svaka dobro definirana procedura. Rezultati pokusa nazivaju se **ishodi** ili **elementarni događaji**. Skup svih ishoda pokusa zove se **prostor elementarnih događaja** i tradicionalno se označava s Ω. Sami elementarni događaji najčešće se označavaju s ω. Matematički, prostor elementarnih događaja je skup koji može biti konačan, prebrojivo beskonačan ili neprebrojiv.

Definicija 1.1.1. *Neka je Ω neprazan skup. Familija podskupova $\mathcal{F}$ od Ω zove se* σ-algebra*, ako vrijede sljedeća tri svojstva:*
(i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
(ii) Ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^c \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na komplement);
(iii) Ako su $A_j \in \mathcal{F}$, $j \in \mathbb{N}$, onda je i $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na prebrojive unije).
Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se izmjerivi prostor.

Definicija 1.1.2. *Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ σ-algebra.* Vjerojatnost *na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ koja zadovoljava sljedeća tri aksioma:*
(A1) (nenegativnost) Za sve $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) \geq 0$;
(A2) (normiranost) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
(A3) (σ-aditivnost) Za svaki niz $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih događaja $A_j \in \mathcal{F}$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$) vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zove se vjerojatnosni prostor.

Definicija 1.1.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ zove se* diskretna slučajna varijabla *ako postoji prebrojiv skup $D = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ takav da je*
(i) $X(\omega) \in D$ za sve $\omega \in \Omega$;
(ii) $\{X = a_j\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_j\} \in \mathcal{F}$ za sve $j \in \mathbb{N}$.

Definicija 1.1.4. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ zove se* slučajna varijabla *ako vrijedi $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ za sve $x \in \mathbb{R}$.*

Diskretna slučajna varijabla ujedno je i slučajna varijabla te slučajna varijabla koja poprima prebrojivo mnogo vrijednosti je diskretna slučajna varijabla.

Napomena 1.1.5. *Neka je Ω konačan ili prebrojiv te $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Tada je svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla.*

Definicija 1.1.6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $X : \Omega \to D = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla. Funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana s*

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

zove se diskretna funkcija gustoće *slučajne varijable X.*

Napomena 1.1.7. *Neka je $p_j = \mathbb{P}(X = a_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$f(x) = \begin{cases} p_j, & x = a_j \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Gornju relaciju često pišemo kao

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

i to zovemo distribucija od X.

Definicija 1.1.8. *Neka je X slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.* Funkcija distribucije *od X je funkcija $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana s*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

Definicija 1.1.9. *Slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je* apsolutno neprekidna *ako postoji $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ takva da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Funkcija f zove se funkcija gustoće *od X.*

Teorem 1.1.10. *Neka je X slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka je F pripadna funkcija distribucije. Tada vrijedi*
(i) F je neopadajuća;
(ii) F je neprekidna zdesna u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$;
(iii) F ima limes s lijeva u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$;
(iv) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ i $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

1.2 Rizik i mjere rizika

Nakon što smo se upoznali s financijskim tržištima te potrebnim definicijama, formulama i teoremima, uvest ćemo pojam rizika. Iako se riječ rizik često upotrebljava, teško je naći općenitu definiciju koju bismo svi prihvatili. Najveći razlog tome je što rizik postoji u svim aspektima života te u različitim djelatnostima i svatko drugačije shvaća rizik.

U financijama, **rizik** se može shvatiti kao mogućnost da povrat na investiciju bude drugačiji od očekivanog, u pravilu manji od očekivanog. Najčešće se rizik u financijama dijeli na sistematski i nesistematski rizik. **Sistematski rizik**, odnosno tržišni rizik, rizik je koji djeluje na cijelo tržište ili na veliki postotak tržišta. Tržišni se rizik ne može smanjiti diverzifikacijom portfelja, drugim riječima, ako ulažemo u različite imovine, tržišni rizik će i dalje ostati budući da djeluje na cijelo tržište. Najčešći tržišni rizici su rizik kamatne stope, valutni rizik, rizik inflacije, do kojih dolazi, kako im i nazivi sugeriraju, zbog promjene kamatne stope, tečaja ili inflacije. **Nesistematski rizik** je onaj koji utječe samo na jedan dio tržišta, recimo na jednu industriju. Ovaj se rizik može smanjiti tako što se ulaže u različite kategorije financijske imovine. Više o ovim rizicima može se naći u [19].

Uz ovu podjelu na sistematske i nesistematske rizike, spomenimo još kreditni rizik. **Kreditni rizik** je rizik da osoba koja je posudila određen novac, neće biti u stanju vratiti dug. Ta vrsta rizika najznačajnija je za investitore koji u svojim portfelju imaju obveznice. Obveznice koje je izdala država ne nose veliki rizik, ali obveznice koje je izdalo neko poduzeće, mogu imati veliki kreditni rizik.

Rizik možemo mjeriti pomoću mjera rizika. Mi ćemo spomenuti nekoliko mjera rizika o kojima se više detalja može naći u [19]. Najpopularnija mjera je volatilnost. **Volatilnost** mjeri raspršenost povrata imovine ili portfelja. U pravilu, što je volatilnost veća, to naša imovina, odnosno portfelj, nosi veći rizik. Najčešće se volatilnost mjeri kao standardna devijacija povrata. Kako bismo definirali standardnu devijaciju, moramo definirati očekivanje i varijancu te ih definiramo kao u [18].

Definicija 1.2.1. *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako vrijedi* $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|f(x) < \infty$*, onda kažemo da X ima* matematičko očekivanje *koje definiramo kao*

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{x\in\mathbb{R}} xf(x).$$

Napomena 1.2.2. *Ako je*

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix},$$

onda je $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|f(x) = \sum_{a_j\in D} |a_j|p_j$ *i* $\mathbb{E}(X) = \sum_{a_j\in D} a_j p_j$*. Ako X poprima najviše konačno mnogo vrijednosti, onda X nužno ima očekivanje.*

Definicija 1.2.3. *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f i očekivanjem* $\mathbb{E}(X)$. Varijanca *od X definira se kao*

$$Var(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2].$$

Standardna devijacija od X definirana je kao korijen iz varijance, $\sigma(X) := \sqrt{Var(X)}$.

Napomena 1.2.4. *Varijanca* s^2 *uzorka* $x_1, \dots, x_n$ *duljine n definira se kao prosječno kvadratno odstupanje od aritmetičke sredine, tj.*

$$s^2 := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \tag{1.5.}$$

gdje je $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ *aritmetička sredina uzorka. Standardna devijacija tada je jednaka*

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \tag{1.6.}$$

Najveći problem korištenja volatilnosti kao mjere rizika najlakše ćemo objasniti preko primjera. Pretpostavimo da smo vlasnik jedne dionice Končara te pretpostavimo da se cijena dionica Končara iz nekog razloga jako povećala. Zbog velike promjene u cijeni dionice, volatilnost se također povećala. Kako smo već spomenuli, veća volatilnost nam sugerira rizičniju imovinu. Iz ovoga bismo mogli zaključiti da je dionica Končara postala rizičnija, što u stvari nije slučaj zato što nam povećanje cijena dionice ne stvara problem. Mogućnost rješenja danog problema je modifikacija metode tako da umjesto svih događaja uzmemo samo negativne ishode.

Uz volatilnost, ukratko ćemo još objasniti mjere beta investicije, Sharpeov omjer i Treynorov omjer, ali prije toga definirajmo još par pojmova koji će nam biti potrebni, a mogu se naći u [18].

Definicija 1.2.5. *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$.* Kovarijanca *od X i Y definira se kao*

$$Cov(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Definicija 1.2.6. *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$.* Korelacija *(ili* koeficijent korelacije*) od X i Y definira se kao*

$$\rho(X, Y) := \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}.$$

Napomena 1.2.7. *Ako su $x_1, \ldots, x_n$ i $y_1, \ldots, y_n$ realizacije slučajnih varijabli X i Y tada je uzoračka kovarijanca c_{XY} dana s*

$$c_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n - 1}, \tag{1.7.}$$

pri čemu su $\overline{x}$ i $\overline{y}$ aritmetičke sredine uzoraka. Pearsonov koeficijent korelacije r_{XY} definiran je s

$$r_{XY} = \frac{c_{XY}}{s_X s_Y}, \tag{1.8.}$$

gdje su s_X i s_Y uzoračke standardne devijacije.

U financijama, često imamo pretpostavku da je neka slučajna varijabla normalno distribuirana pa objasnimo što to znači.

Definicija 1.2.8. *Neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ te neka je*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Slučajna varijabla X s funkcijom gustoće f zove se normalno distribuirana slučajna varijabla *s parametrima μ i σ^2. Parametar μ predstavlja očekivanje slučajne varijable X, a σ standardnu devijaciju.*

Vratimo se na mjere rizika. **Beta investicije** prikazuje osjetljivost investicije na kretanja na tržištu. Kretanja na tržištu najčešće se opisuju pomoću referentnih imovina kao što su dionički indeks, obveznice bez kupona, obveznički index, itd. U pravilu beta investicije ne daje dovoljno informacija te se temelji na podacima iz prošlosti, a znamo da je prošlost loš proricatelj budućnosti. Beta investicije je dobra mjera rizika za kratka razdoblja, ali ne i za duga. Na primjer, **beta dionice** računa se prema formuli

$$\beta_i = \rho_{i,m} \frac{\sigma_i}{\sigma_m}, \tag{1.9.}$$

gdje je $\rho_{i,m}$ korelacija između povrata dionice i i povrata dioničkog indeksa, a σ_i, odnosno σ_m, standardna devijacija povrata dionice i, odnosno standardna devijacija povrata dioničkog indeksa.

Sharpeov omjer opisuje koliko dobro povrat kompenzira preuzeti rizik. Računa se prema formuli

$$\text{Sharpeov omjer} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p},$$

pri čemu je R_p očekivani povrat portfelja, R_f bezrizična stopa te σ_p standardna devijacija portfelja. Bezrizična stopa nam govori koliki bi povrat ostvarili da smo ulagali u bezrizičnu imovinu kao što su, na primjer, depoziti u banci. Prilikom usporedbe, ona imovina koja ima veći Sharpeov omjer daje veći povrat za isti rizik. Nedostatak ove mjere je pretpostavka da su povrati normalno distribuirani.

Treynorov omjer mjeri višak povrata koji je ostvaren iznad povrata koji je mogao biti ostvaren ulaganjem u bezrizičnu imovinu. Računa se prema formuli

$$\text{Treynorov omjer} = \frac{R_p - R_f}{\beta_p}.$$

Kao i kod Sharpeovog omjera, R_p je očekivani povrat portfelja, a R_f bezrizična stopa. β_p je beta portfelja koji se u slučaju portfelja dionica računa tako što se množe udjeli svake dionice u portfelju s betom dionice te se zbroje dobivene vrijednosti. Nedostaci ove mjere su ovisnost o mjeri beta investicije te nasljeđuje sve nedostatke koje ima i beta investicije. Još jedan nedostatak je da ako portfelj ima negativan beta, Treynorov omjer nema smisla.

Vidjeli smo da sve ove mjere rizika imaju nedostatke, mogli smo navesti još više mjera rizika, ali i one bi imale nedostatke. Upravo zbog toga u sljedećem poglavlju definirat ćemo novu mjeru rizika.

Poglavlje 2

Rizičnost vrijednosti

Upravljanje rizicima oduvijek je bilo jedno od važnijih djelatnosti banaka. Cilj banke je prepoznati i predvidjeti moguće rizike kako bi smanjili gubitke te to rade pomoću mjera rizika. U ovom poglavlju uvodimo mjeru rizika koja se zove rizičnost vrijednosti.

2.1 Općenito o rizičnosti vrijednosti

Rizičnost vrijednosti (eng. *Value at Risk*, skraćenica VaR) jedan je od pokušaja da se prikaže ukupni rizik koji nosi financijska imovina ili portfelj. Tu mjeru koriste širom svijeta velike korporacije, različiti menadžeri te financijske institucije, a popularna je zato što ju je lako razumjeti. U daljnjem tekstu koristit ćemo kraticu VaR za rizičnost vrijednosti. Sljedeće definicije i razmatranja mogu se pronaći u [10, str. 494-497].

VaR je najlakše objasniti koristeći rečenicu „$(1-\alpha)\%$ smo sigurni da u sljedećih N dana nećemo izgubiti više od V“, pri tome α označava stupanj značajnosti, N broj dana, a V je upravo VaR. Također, ovaj α nam govori o kojem VaR-u se radi. Recimo za $\alpha = 1\%$, kažemo da je to 99%-tni VaR. U pravilu, institucije koje kontroliraju banke očekuju od banaka da računaju VaR za tržišni rizik uzimajući $\alpha = 1\%$, iako je često korišten i 99.97%-tni VaR. Za broj dana N najčešće se uzima $N = 1$ zato što u većini slučajeva nemamo dovoljno podataka i informacija kako bismo mogli predvidjeti kretanje tržišnih varijabli kroz duži period.

Jedna od najčešćih pretpostavki za broj dana N je da je VaR za N dana jednak jednodnevnom VaR-u pomnoženim s korijenom iz N. Označimo li s VaR_N vrijednost VaR-a za N dana, tada vrijedi

$$\mathrm{VaR}_N = \mathrm{VaR}_1 \cdot \sqrt{N}.$$

Ova formula je točna kad su promjene u vrijednosti portfelja na uspješne dane, odnosno pozitivni povrati, nezavisne jednako distribuirane normalne varijable s očekivanjem 0. U ostalim slučajevima, formula je aproksimacija.

Formalnije, VaR se može definirati preko funkcije kvantila.

Definicija 2.1.1. *Ako je F funkcija distribucije na $\mathbb{R}$, njen* generalizirani inverz *je funkcija $F^{\leftarrow} : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$F^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \qquad u \in [0,1].$$

*Vrijednost $F^{\leftarrow}(u)$ zovemo još u-*kvantil *distribucije F, a $F^{\leftarrow}$* funkcijom kvantila *od F.*

Prethodna definicija može se pronaći u [4], a sljedeća razmatranja preuzeta su iz [7, str. 595-596].

Označimo s L slučajnu varijablu koja reprezentira gubitak imovine ili portfelja za određeno razdoblje duljine t. VaR je kvantil funkcije distribucije slučajne varijable L. Odnosno, $(1-\alpha)$%-tni VaR definira se kao $(1-\alpha)$%-kvantil distribucije gubitka L, tj.

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha} = F_L^{\leftarrow}(1-\alpha).$$

To možemo zapisati i kao

$$\mathbb{P}(L \leq \mathrm{VaR}_{1-\alpha}) \geq 1-\alpha,$$

pri čemu VaR uzimamo kao najmanji broj koji zadovoljava prethodnu nejednakost. U slučaju da je L neprekidna slučajna varijabla čija funkcija gustoće ima inverz, tada prethodnu nejednakost možemo zapisati kao

$$\mathbb{P}(L \leq \mathrm{VaR}_{1-\alpha}) = 1-\alpha.$$

Objasnimo sada kako možemo definirati slučajnu varijablu L koja predstavlja gubitak imovine ili portfelja. Neka je R_t povrat za period t te V_0 početna vrijednost imovine ili portfelja. Tada je vrijednost buduće imovine ili portfelja jednaka

$$V_t = V_0(1+R_t).$$

Očekivana vrijednost je

$$\mathbb{E}[V_t] = V_0(1+\mu),$$

gdje je μ očekivani povrat. Za apsolutni gubitak vrijedi

$$L_t^a = V_0 - V_t = -V_0 R_t.$$

Kvantil apsolutnog gubitka naziva se apsolutni VaR.
Kako bismo izračunali relativni VaR, potreban nam je relativni gubitak, odnosno

$$L_t^r = \mathbb{E}[V_t] - V_t = V_0(\mu - R_t).$$

Kako smo već napomenuli, većinom gledamo kratka razdoblja, najčešće jedan dan. Očekivani povrat za tako kratki period je jako blizu nule pa je očekivana vrijednost portfelja jednaka početnoj vrijednosti portfelja te su apsolutni i relativni gubitak isti. Relativni gubitak, odnosno relativni VaR značajniji je kada govorimo o dužim razdobljima. Mi ćemo se ovdje baviti jednodnevnim VaR-om pa možemo pretpostaviti da su apsolutni i relativni VaR jednaki te nećemo raditi razliku između njih nego ćemo jednostavno govoriti samo o VaR-u.

2.2 Prednosti i nedostaci rizičnosti vrijednosti

VaR je najčešće korištena mjera rizika, ali to ne znači da nema nedostatke. Ako pretpostavimo da imamo dva različita portfelja, može se dogoditi da će VaR za portfelj koji se sastoji od ta dva portfelja biti veći od zbroja VaR-ova za svaki portfelj posebno, odnosno VaR općenito nije subaditivan. Drugim riječima, diverzifikacijom portfelja povećao se rizik, a u pravilu pretpostavljamo suprotno, odnosno smatramo da se diverzifikacijom portfelja smanjuje rizik. Primjer takvog portfelja je Primjer 13.3. u [7, str. 600].
Prilikom računanja VaR-a, najčešće govorimo o jednodnevnom VaR-u. VaR se može koristiti i za duža razdoblja, ali se tada njegova točnost smanjuje. Istu situaciju imamo u kriznim situacijama, VaR će u kriznim vremenima davati loše rezultate.
VaR nam govori o najvećem mogućem gubitku, ali nam ne govori koliki će taj gubitak stvarno biti, stoga moramo uz VaR koristiti i druge alate za upravljanje rizicima. Također, kako ćemo vidjeti u nastavku, VaR možemo procijeniti na više načina koji mogu davati različite vrijednosti pa prema tome može se javiti nesigurnost korištenja te mjere rizika.
Još jedna kritika VaR-a je to što koristi pretpostavke preuzete iz fizike i matematike te ih direktno primjenjuje na financije. Naravno, te pretpostavke ne uključuju ljudski faktor, odnosno osobine poput sposobnosti učenja i prilagođavanja sudionika na financijskim tržištima.

Nakon što smo naveli nedostatke, spomenimo prednosti. Najznačajnija prednost je jednostavnost. Nije potrebno veliko predznanje kako bismo se mogli služiti ovom mjerom. VaR se lako koristi u daljnjim analizama budući da je to samo jedan broj (ili postotak). Upravo zbog toga što je prikazan jednom vrijednošću, VaR se može lako interpretirati.
VaR se može primijeniti na svu financijsku imovinu pa nam daje mogućnost usporedbe rizika iz različitih kategorija imovine. Prema tome možemo vidjeti odnos između rizika i ostvarenih profita koji proizlaze iz različitih financijskih imovina.
Iako smo već dovoljno puta spomenuli jednostavnost primjene i interpretacije ove metode, da bi se dodatno olakšalo svima, postoje različiti računalni programi pomoću kojih možemo izračunati VaR financijske imovine ili portfelja.
Navedimo još jednu prednost koja je više tehničke prirode nego sama prednost mjere. VaR se smatra standardom, često je korištena mjera te je negdje čak i zakonski obavezna. Uz-

mimo perspektivu tvrtke koja ne koristi VaR. Razlozi da počnu koristiti su u slučaju da konkurentna tvrtka koristi, da neki klijent zahtjeva ili da se zakonom uvede. Ovi razlozi su poprilično vjerojatni da će se dogoditi pa je tvrtki najbolje da odmah počinje koristiti VaR kao mjeru rizika.

Očekivani manjak

Spomenimo još jednu mjeru rizika. Riječ je o **očekivanom manjku** (eng. *Conditional Value at Risk*, skraćenica CVaR), mjeri koja koristi VaR prilikom izračuna, ali kod nje nemamo problem s diverzifikacijom portfelja. Oznaka očekivanog manjka je ES.
Neka je α razina značajnosti, L distribucija gubitka te $\mathrm{VaR}_{1-\alpha}$ $(1-\alpha)\%$-tni VaR, tada vrijedi

$$\mathrm{ES}_{1-\alpha}(L) = \mathbb{E}[L\,|L \geq \mathrm{VaR}_{1-\alpha}].$$

$\mathrm{ES}_{1-\alpha}$ je očekivani gubitak kada je gubitak veći od $\mathrm{VaR}_{1-\alpha}$. Uočimo da vrijedi $\mathrm{ES}_{1-\alpha}(L) \geq \mathrm{VaR}_{1-\alpha}$. Očekivani manjak postaje sve popularnija mjera rizika i često se koristi u praksi, a detaljnije o ovoj mjeri može se pronaći u [7].

Prilikom korištenja bilo koje mjere rizika, potrebno je provesti testiranje unatrag i testiranje otpornosti na stres kako bismo provjerili koliko je metoda dobra. S ovim pojmovima ćemo se detaljnije susresti na kraju rada.

2.3 Povijest rizičnosti vrijednosti

Odlomak o povijesti rizičnosti vrijednosti preuzet je iz [1] te se tamo može naći detaljnije o povijesti i razvoju rizičnosti vrijednosti.

Rizičnost vrijednost pojavljuje se početkom 80-ih godina u Sjedinjenim Američkim Državama. Dennis Weatherstone, tadašnji predsjednik tvrtke J. P. Morgan, želio je dotadašnje izvještaje o riziku pojednostavniti. Do tada su izvještaji bili poprilično dugački i sadržavali mnogo detalja. Još jedan od događaja koji ga je potaknuo na razmišljanje o potencijalnim gubicima je Crni ponedjeljak, odnosno pad tržišta dionica 1987. godine. Nakon toga, početkom 90-ih, Weatherstone je počeo zahtijevati da mu se nakon svakog radnog dana donese izvješće od jedne stranice koje će procjenjivati moguće gubitke u sljedećih 24 sata. To izvješće je izvješće o VaR-u, ali je postalo poznato i pod nazivom "4:15 p.m. report" budući da je Weatherstonu stizalo svaki dan točno u 16 sati i 15 minuta. Nakon toga mnogi su počeli slijediti njegov primjer i počeli razvijati svoje varijante tog izvještaja. Službena verzija, objavljena je 1994. od strane J. P. Morgan preko sustava *RiskMetrics*. Taj sustav je usavršen 1996. godine te je napisan i tekstualni dokument "$RiskMetrics^{TM} - TechnicalDocument$" [14]. Od tada se VaR-a kao instrument za upravljanje rizicima koristi sve više i postaje sve popularniji.

Poglavlje 3

Metode procjene rizičnosti vrijednosti

U ovom poglavlju opisat ćemo tri metode procjene rizičnosti vrijednosti, povijesnu metodu, metodu varijance i kovarijance te Monte Carlo metodu. Navest ćemo po koracima kako se metode koriste te njihove prednosti i nedostatke. Radi jednostavnosti u daljnjem tekstu bavit ćemo se samo dionicama, odnosno portfeljem koji se sastoji od dionica te tržišnim rizikom, iako se VaR može upotrijebiti i za druge financijske imovine i rizike. Jedan od poznatijih je kreditni VaR koji računa VaR za već spomenuti kreditni rizik. Također, radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da imamo 100 novčanih jedinica na raspolaganju za investiranje. U slučaju jedne dionice, svih 100 novčanih jedinica ulažemo u tu dionicu, a u slučaju portfelja, ukupni iznos investiranja je 100 novčanih jedinica, pri čemu se tih 100 raspodijeli unutar portfelja u ovisnosti o udjelima koji svaka dionica ima u portfelju.

3.1 Povijesna metoda

Povijesna metoda, poznata i pod nazivima neparametarska metoda ili povijesna simulacija, jedna je on najjednostavnijih metoda za procjenu vrijednosti VaR-a. Ova metoda koristi prošle podatke kako bi probala predvidjeti što će se dogoditi u budućnosti. Povijesna metoda spada u simulacijske metode.

Prije nego što krenemo na formalno objašnjenje ove metode, uzmimo jedan jednostavan primjer koji je analogan primjeru sa stranice 25 iz [17].

Primjer 3.1.1. *Želimo izračunati jednodnevni 99%-tni VaR dionice Končara. Kako samo ime ove metode govori, uzet ćemo povijesne podatke o kretanju cijena dionice Končara, odnosno dnevne povrate dionice Končara u zadnjih 200 dana. Sortiramo podatke o dnevnim povratima. Budući da samo u 1% slučaja možemo izgubiti više od vrijednosti VaR-a, odnosno samo u 2 dana od 200, dobijemo da će naš 99%-tni VaR biti jednak trećem po redu najgorem povratu.*

Ovih 200 dana uzeto je proizvoljno, umjesto toga mogli smo uzeti manje dana, ali uočimo da je uvijek bolje imati čim više podataka kako bi naši rezultati bili što precizniji. Mogli smo uzeti i više od 200 dana, jedini nedostatak toga je što su možda svi najlošiji povrati bili u nekoj daljoj prošlosti kada je nastupila kriza te su sada bolja vremena, ali naše procjene će dati loše rezultate upravo zbog loših povrata u dalekoj prošlosti. Naravno, to ne mora biti slučaj. Općenito je teško odlučiti koliko ćemo ići u prošlost, a ponekad ni nemamo podatke o daljoj prošlosti, recimo za novootvorena poduzeća.

Glavna pretpostavka povijesne metode je da su slučajne varijable koje predstavljaju povrate u budućnosti jednako distribuirane kao slučajne varijable koje predstavljanju povrate u prošlosti.

Povijesna metoda simulira trenutne povrate na portfelj tako što množi trenutne udjele imovina u portfelju s prošlim povratima. Uočimo da tako ne dobijemo povijesne povrate već povrate koje bi ostvario portfelj da se udjeli imovina u portfelju nisu s vremenom mijenjali. Sada se maksimalni mogući gubitak na željenoj razini značajnosti računa direktno iz dobivene distribucije povrata. U ovisnosti o razini značajnosti α, VaR će nam biti vrijednost onog povrata za koji vrijedi da je $\alpha\%$ ostalih povrata lošije od našeg VaR-a.
Ovaj postupak smo već vidjeli u gornjem primjeru, samo što je primjer bio za jednu dionicu, ali uočimo da je postupak isti za portfelj, samo se povrati računaju po drugoj formuli, odnosno po formuli za povrate portfelja.

Zapišimo gornji postupak za procjenu VaR-a portfelja koji se sastoji od dionica u 5 jednostavnih koraka:

1. Moramo odlučiti koliko daleko u prošlost ćemo ići. Spomenuto testiranje unatrag pomaže nam prilikom određivanja koliko dana ćemo ići unazad. Zatim treba pronaći povijesne podatke o cijenama dionica za taj period.

2. Računamo povrate dionica po formuli 1.1.. U slučaju da nije bilo trgovanja dionicom na određeni dan, prepisuje se cijena od prethodnog dana te je tada povrat jednak nuli. Uočimo da bismo dobili dnevne povrate u terminima novčanih jedinica, morali bismo pomnožiti naše povrate s iznosom koji je uložen u dionicu, što je u našem slučaju 100. Kada bismo gledali gubitke koje naša dionica nosi, gledali bismo povrate u terminima novčanih jedinica pomnožene s -1.

3. Izračunamo povrate portfelja pomoću formule 1.3..

4. Poredamo povrate portfelja od najmanjeg do najvećeg.

5. U ovisnosti o razini značajnosti α odaberemo vrijednost koja se nalazi na mjestu $\lceil \alpha \cdot n \rceil + 1$, gdje je n broj povrata portfelja.

Prednosti

Najveća prednost povijesne metode je njezina jednostavnost. Kod ove metode ne postoji puno statističkih pretpostavki koje moraju biti zadovoljene, tako na primjer ne pretpostavljamo da povrati moraju dolaziti iz poznate distribucije pa prema tome u ovaj model možemo uključiti i rijetke događaje. Važno je napomenuti da kada gledamo samo jednu imovinu, povrati koje dobijemo iz povijesnih podataka u pravilu su jako blizu normalne distribucije. Jedina je razlika u tome što je donji rep funkcije kvantila povrata teži od donjeg repa normalno distribuirane slučajne varijable. To ustvari znači da će dani povijesni povrati u odnosu na normalno distribuiranu slučajnu varijablu s većom vjerojatnošću poprimati male vrijednosti. Više o tome se može naći u [17].

Još jedna od prednosti je dostupnost podataka koji su nam potrebni za izračun. Lako možemo pronaći povijesne podatke o cijenama dionica ili bilo koje druge podatke koji su nam eventualno potrebni za izračun.

Napomenimo još jednom da nemamo podatke za sve dane u godini nego samo za one dane kada se dionicom trgovalo. Dionicama se može trgovati samo kada je burza otvorena, odnosno svaki radni dan. Prema tome, nemamo informacije o cijenama dionica na blagdane te subotom i nedjeljom. U slučaju da nam je potrebna cijena dionice na neki od tih dana, uzimamo cijenu koja je bila na prvi prethodni dan kada se dionicom trgovalo. Isto tako, u slučaju da se na radni dan nije trgovalo nekom dionicom, nemamo ni tada informaciju o cijeni nego se ponovno uzima prva prethodna cijena koja je dostupna. U takvim slučajevima dnevni povrati jednaki su nuli.
Kada bi imali tjedne povrate, tada ih možemo računati po istoj formuli kao za dnevne povrate, samo što cijene dionica gledamo samo jedan određen dan u tjednu.

Nedostaci

Najveći nedostatak smo naveli u primjeru, a to je odabir dužine podataka. Povijesna metoda jako je osjetljiva na odabir koliko dana unatrag ćemo gledati. Ako uzmemo puno podataka, imamo veću preciznost što se tiče povrata, ali metoda postaje sve manje osjetljiva na promjene na tržištu. Ponekad ni nemamo podatke iz dalje prošlosti. Kod malog broja podataka teško je dobro procijeniti VaR na visokim razinama značajnosti.

Povijesna metoda pretpostavlja da nema promjena u volatilnosti tijekom vremena. Ta pretpostavka je u kontradikciji s empirijskim dokazima da se volatilnost mijenja kroz vrijeme.

Znamo da u povijesnoj metodi povrati ne moraju pratiti poznatu distribuciju i da u možemo uključiti rijetke događaje, ali ako uključimo previše rijetkih događaja procjena VaR-a može biti loša te se smanjuje njegova korisnost kao sredstva za upravljanje rizicima.

Veliki nedostatak ove metode je to što se metoda zasniva na pretpostavci da će se budućnost ponašati kao prošlost, ali to u pravilu ne mora vrijediti.

3.2 Metoda varijance i kovarijance

Metoda varijance i kovarijance detaljno je objašnjena u već spomenutom dokumentu "$RiskMetrics^{TM} - TechnicalDocument$"[14]. Ova metoda spada u parametarske metode. Prema metodi varijance i kovarijance, VaR možemo lako procijeniti pomoću varijance i kovarijance, odnosno standardne devijacije i korelacije, unaprijed definiranih faktora tržišnog rizika te pomoću osjetljivosti portfelja na te faktore.

Krenimo od jednostavnog slučaja, pretpostavimo da imamo portfelj koji se sastoji od samo jedne dionice. Prvo od svega želimo izračunati dnevnu volatilnost. Volatilnost se najčešće mjeri standardnom devijacijom. Dnevna se volatilnost procjenjuje formulom 1.6., tj.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(r_t - \overline{r})^2}{n-1}},$$

pri čemu se r_t dnevni log povrat, $\overline{r}$ prosjek dnevnih log povrata za promatrani period, a n broj dnevnih log povrata u tom periodu. Iako je ovo najčešće korištena formula za izračun volatilnosti, vidjet ćemo kasnije da se kod procjene VaR-a metodom varijance i kovarijance koriste i druge formule.

Metoda varijance i kovarijance pretpostavlja da su slučajne varijable koje se koriste u modelu normalno distribuirane. Ako je slučajna varijabla koja predstavlja povrate normalno distribuirana s očekivanjem 0, tada se VaR portfelja, koji je u ovom slučaju jednak VaR-u dionice, može izračunati po formuli

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha} = q_{1-\alpha} \cdot \sigma,$$

pri čemu je $q_{1-\alpha}$ $(1-\alpha)$-kvantil normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i standardnom devijacijom 1, a σ je dnevna volatilnost koja se procjenjuje sa s.

Do prethodne formule došli smo direktno iz definicije VaR-a. Označimo s L slučajnu varijablu koja predstavlja povrate te neka je F njezina funkcija distribucije. Pretpostavimo da je L normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem 0 i standardnom devijacijom σ. Neka je G funkcija distribucije normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i standardnom devijacijom 1. Tada vrijedi

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha} = F^{\leftarrow}(1-\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1-\alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}}\, dy \geq 1-\alpha\}.$$

Jednostavnom zamjenom varijabli vidimo da vrijedi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}}\, dy = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz = G\left(\frac{x}{\sigma}\right).$$

Korištenjem prethodne jednakosti gornja formula može se zapisati kao

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{1-\alpha} &= \inf\{x \in \mathbb{R} : G\left(\frac{x}{\sigma}\right) \geq 1-\alpha\} = \sigma \inf\{\frac{x}{\sigma} \in \mathbb{R} : G\left(\frac{x}{\sigma}\right) \geq 1-\alpha\} = \\ &= \sigma \inf\{y \in \mathbb{R} : G(y) \geq 1-\alpha\} = \sigma \cdot q_{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Ako želimo izračunati potencijalni maksimalni gubitak u novčanim jedinicama, gore dobiveni VaR moramo pomnožiti s trenutnom vrijednošću našeg portfelja, odnosno dionice. Detaljnije o ovom jednostavnom slučaju, primjer te objašnjenje formule može se pronaći u [17, str. 27-29].

Sada ćemo objasniti kako se metoda varijance i kovarijance provodi na općenitom slučaju. Za to su nam potrebna sljedeća 4 koraka koja su preuzeta iz [17, str. 29-42]:

1. Odaberemo slučajne varijable koje utječu na vrijednost koju mjerimo.
2. Mapiramo portfelj, odnosno pojednostavnimo stvarni portfelj kako bi se smanjila kompleksnost i složenost računa (eng. *mapping exposures*).
3. Izračunamo VaR portfelja.
4. Procijenimo volatilnost i korelaciju.

Objasnimo sada detaljnije prethodne korake uz pretpostavku da imamo portfelj koji se sastoji od dionica.

Odabir slučajnih varijabli

U prvom koraku moramo analizom portfelja odlučiti koje slučajne varijable najbolje opisuju vrijednosti portfelja dionica. Najčešće se vrijednost portfelja dionica opisuje slučajnim varijablama koje predstavljaju povrate dionica koje su u portfelju. Pretpostavka metode varijance i kovarijance je da su slučajne varijable normalno distribuirane pa se prema tome pretpostavlja normalnost povrata dionica. Također, metoda varijance i kovarijance pretpostavlja linearnu vezu između vrijednosti portfelja i slučajnih varijabli koje najbolje opisuju taj portfelj. Iz toga slijedi da su i povrati portfelja normalno distribuirani kao linearna kombinacija normalno distribuiranih slučajnih varijabli.

Alternativni načini za opisivanje vrijednosti portfelja su pomoću povrata referentne imovine, kamatnih stopa, tečaja, itd. U ovom se slučaju isto pretpostavlja da vrijednost portfelja na linearan način ovisi o slučajnim varijablama koje su normalno distribuirane.

Mapiranje portfelja

Budući da se većina portfelja sastoji od puno financijskih imovina i na svaku od tih imovina vrlo vjerojatno utječu različiti faktori rizika, u pravilu je teško upravljati takvim portfeljom. Umjesto da gledamo sve slučajne varijable koje smo odabrali u prethodnom koraku, odaberemo najznačajnije slučajne varijable koje utječu na vrijednost portfelja. Ovaj proces je bitan zato što u metodi varijance i kovarijance češće procjenjujemo VaR mapiranog portfelja nego stvarnog. Također, bitno je odabrati dovoljan broj potrebnih slučajnih varijabli zato što, ako previše pojednostavimo model, VaR će biti loše procijenjen, a ako ne pojednostavnimo model dovoljno, ponovno ćemo imati problem sa složenošću računa. Ovaj postupak mapiranja portfelja detaljnije je objašnjen u [17, str. 30-36], a mi ćemo samo objasniti jedno moguće mapiranje portfelja koji se sastoji od više dionica. Riječ je o najjednostavnijem modelu koji sadrži samo jedan faktor.

Pretpostavimo da imamo n dionica te da smo za slučajne varijable koje utječu na vrijednost portfelja uzeli slučajne varijable koje predstavljaju povrate tih dionica. Umjesto da koristimo ovih n slučajnih varijabli, mi ćemo te varijable zapisati pomoću dioničkog indeksa kako bismo smanjili broj računskih operacija. Pretpostavit ćemo da za povrat svake dionice vrijedi

$$R_i = \beta_i R_m + \alpha_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.1.}$$

pri čemu R_m označava povrat dioničkog indeksa, α_i je konstanta koja se procjenjuje iz modela linearne regresije, ε_i predstavlja grešku i to je normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem 0, a β_i je beta dionice koju dobijemo iz formule 1.9.. Dodatno, pretpostavljamo da su slučajne varijable koje predstavljaju povrate dionica i dioničkog indeksa normalno distribuirane.

Za povrat portfelja sada vrijedi sljedeće

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\beta_i R_m + \alpha_i + \varepsilon_i) = \beta_p R_m + \alpha_p + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \varepsilon_i \approx \beta_p R_m + \alpha_p,$$

pri čemu ω_i predstavlja udio i-te dionice u portfelju, $\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \alpha_i$ je konstanta, a $\beta_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \beta_i$ je beta portfelja, odnosno vagani prosjek beta dionica koje su u portfelju.

Napomena 3.2.1. *Neka je X slučajna varijabla te a i b realni brojevi, tada vrijedi $\sigma(aX + b) = a\sigma(X)$.*

Iz prethodne napomene slijedi $\sigma(R_p) = \sigma(\beta_p R_m + \alpha_p) = \beta_p \sigma(R_m)$. Standardna devijacija portfelja, $\sigma_p := \sigma(R_p)$, jednaka je umnošku beta portfelja i standardne devijacije povrata referentne imovine.

Procjena VaR-a

Nakon što smo mapirali naš portfelj, potrebno je izračunati VaR. U prethodnom slučaju, VaR portfelja u terminima novčanih jedinica računa se prema formuli

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha} = \mathrm{MV} \cdot q_{1-\alpha} \cdot \sigma_p, \tag{3.2.}$$

gdje je MV vrijednost portfelja, $q_{1-\alpha}$ $(1-\alpha)$-kvantil normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i standardom devijacijom 1, a σ_p standardna devijacija povrata portfelja. Analogno, u slučaju jedne dionice VaR se računa po istoj formuli, pri čemu je sada MV vrijednost dionice, a σ standardna devijacija povrata dionice.

Pretpostavimo sada da imamo portfelj koji se sastoji od dvije imovine s udjelima ω i $1-\omega$. Standardna devijacija portfelja je tada jednaka

$$\sigma_p = \sqrt{\omega^2\sigma_1^2 + (1-\omega)^2\sigma_2^2 + 2\omega(1-\omega)\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}},$$

gdje je $\rho_{1,2}$ koeficijent korelacije između imovina. Uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobijemo

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_{1-\alpha} &= \mathrm{MV}\cdot q_{1-\alpha}\cdot\sigma_p = \mathrm{MV}\cdot q_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\omega^2\sigma_1^2 + (1-\omega)^2\sigma_2^2 + 2\omega(1-\omega)\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}} = \\
&= \sqrt{(\omega \mathrm{MV} q_{1-\alpha}\sigma_1)^2 + ((1-\omega)\mathrm{MV} q_{1-\alpha}\sigma_2)^2 + 2(\omega \mathrm{MV} q_{1-\alpha}\sigma_1)((1-\omega)\mathrm{MV} q_{1-\alpha}\sigma_2)\rho_{1,2}} = \\
&= \sqrt{\mathrm{VaR}_1^2 + \mathrm{VaR}_2^2 + 2\mathrm{VaR}_1\mathrm{VaR}_2\rho_{1,2}}.
\end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti koristili smo formulu 3.2. te da je ωMV tržišna vrijednost prve imovine, a $(1-\omega)$MV tržišna vrijednost druge imovine.

U slučaju da imamo n imovina, gornja formula za VaR portfelja može se poopćiti te dobijemo sljedeću formulu

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{VaR}_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\mathrm{VaR}_i\mathrm{VaR}_j\rho_{i,j}}, \tag{3.3.}$$

ili u matričnom obliku

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha} = \sqrt{\overline{V}\cdot C\cdot \overline{V}^T},$$

gdje je $\overline{V}$ vektor stupac koji sadrži vrijednosti VaR-a svake imovine, odnosno

$$\overline{V} = \begin{bmatrix}\mathrm{VaR}_1\\ \vdots \\ \mathrm{VaR}_n\end{bmatrix},$$

a $\overline{V}^T$ je transponirani vektor. Matrica C korelacijska je matrica i oblika je

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n}\\ \rho_{1,2} & 1 & \dots & \rho_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \rho_{1,n} & \rho_{2,n} & \dots & 1\end{bmatrix}.$$

Uočimo da je matrica korelacija simetrična.

Procjena volatilnosti i korelacije

Do sada smo pretpostavljali da znamo izračunati standardnu devijaciju povrata imovine i rizičnih faktora, a sada ćemo ukratko opisati kako bismo mogli procijeniti standardnu devijaciju. Ako standardnu devijaciju procjenjujemo iz povijesnih podataka, tada koristimo već viđenu formulu 1.6..

Prethodna formula je jednostavna, ali ima dva velika nedostatka. Prvi nedostatak je to što prosjek dnevnih povrata ne mora predstavljati stvarno očekivanje distribucije povrata. Već smo spomenuli da kada gledamo dnevne povrate, pretpostavljamo da je očekivani povrat jednak nuli, a prosjek dnevnih povrata ne mora biti jednak nuli.
Drugi nedostatak odnosi se na izbor duljine povijesnih podataka te takozvani efekt jeke. S odabirom duljine promatranog perioda, susreli smo se već kod povijesne metode. Imamo isti problem kao i tamo, odabirom duljeg razdoblja dobivamo realnije i preciznije rezultate, ali odabirom prevelikog uzorka može doći do previše stabilne procjene volatilnosti koja će dati loše rezultate za izračun VaR-a.
Procjenjivanje volatilnosti ovom metodom svim podacima daje jednaku važnost neovisno o starosti podatka. Pretpostavimo da gledamo razdoblje od 250 dana s velikim negativnim povratom na prvi dan gledanja uzorka. Uočimo da netipični negativni povrat prije 250 dana utječe na povećanje volatilnosti za sljedeći dan, ali i za svih ostalih 249 dana iako u cijelom uzorku od 250 povrata nije više bilo netipičnih promjena. Izbacivanjem upravo tog povrata, volatilnost će se smanjiti iako nije došlo do nikakvih promjena na tržištu. To se naziva efekt jeke. Drugim riječima, netipične promjene u prošlosti izrazito utječu na procjenu volatilnosti pa spomenuta formula nije previše popularna. Iz tog razloga dolazi do potrebe za drugim metodama procjene volatilnosti kao što su EWMA (eng. *Exponentially Weighted Moving Average*) model i GARCH (eng. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) model.

Kako bismo izbjegli probleme koje nam donosi dodjeljivanje jednake važnosti svim podacima, EWMA model dodjeljuje veće težine novijim podacima. U EWMA modelu vrijedi formula

$$\sigma_{t,n} = \sqrt{\frac{\lambda^0 R_{t-1}^2 + \lambda^1 R_{t-2}^2 + \cdots + \lambda^{n-1} R_{t-n}^2}{\lambda^0 + \lambda^1 + \cdots + \lambda^{n-1}}},$$

odnosno volatilnost u vremenu t na temelju uzorka povrata duljine n računa se tako što se povrat na $(t-i)$-ti dan množi da težinskim faktorom λ^{i-1}, gdje je $\lambda < 1$. Primijetimo da u ovom slučaju koristimo dnevne povrate, a ne dnevne log povrate. Parametar λ naziva se faktor propadanja i kako je $\lambda < 1$, starijim podacima dodjeljuje se manji težinski faktor. Što je λ veći to će procjena volatilnosti reagirati sporije na nove podatke te će stari podaci imati veliki utjecaj. Nasuprot tome, male vrijednosti od λ znače da će se u našem modelu smanjivati utjecaj starih podataka kako novi podaci ulaze u uzorak. U pravilu, gledajući dnevne povrate, uzima se $\lambda = 0.94$.

Vratimo se sada na formulu, uočimo da u nazivniku imamo geometrijski red za koji vrijedi

$$\lambda^0 + \lambda^1 + \cdots + \lambda^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda},$$

pri čemu se zadnji izraz za velike n-ove može aproksimirati s $\frac{1}{1-\lambda}$. Sada vrijedi

$$\sigma_{t,n} = \sqrt{\frac{\lambda^0 R_{t-1}^2 + \lambda^1 R_{t-2}^2 + \cdots + \lambda^{n-1} R_{t-n}^2}{\lambda^0 + \lambda^1 + \cdots + \lambda^{n-1}}} = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\lambda^n}\sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} R_{t-i}^2} \approx$$
$$\approx \sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} R_{t-i}^2}.$$

Iz prethodne formule slijedi da je varijanca, $\sigma_{t,n}^2$ približno jednaka

$$\sigma_{t,n}^2 \approx (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} R_{t-i}^2. \tag{3.3.}$$

Procijenit ćemo još varijancu u vremenu $t+1$, σ_{t+1}^2, EWMA metodom uz pretpostavku da je $n = \infty$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\sigma_{t+1}^2 &= (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{t+1-i}^2 = (1-\lambda)\lambda^0 R_t^2 + (1-\lambda)\sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{t+1-i}^2 \\
&= (1-\lambda)R_t^2 + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{\infty} \lambda\lambda^{j-1} R_{t-j}^2 = (1-\lambda)R_t^2 + \lambda((1-\lambda)\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} R_{t-j}^2) = \\
&= (1-\lambda)R_t^2 + \lambda\sigma_t^2.
\end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti koristili smo formuli 3.3.. Standardna devijacija sada je jednaka

$$\sigma_{t+1} = \sqrt{(1-\lambda)R_t^2 + \lambda\sigma_t^2}.$$

Na sličan način može se procijeniti kovarijanca i korelacija. Kovarijanca između povrata dviju imovina R_1 i R_2 može se procijeniti formulom 1.7., odnosno

$$\mathrm{Cov}(R_1, R_2) = \frac{\sum_{t=1}^{n}(R_{1,t} - \overline{R_1})(R_{2,t} - \overline{R_2})}{n-1}.$$

EWMA metodom, uz pretpostavku da imamo beskonačan uzorak te da je očekivani povrat imovina jednak nuli, prethodna formula jednaka je

$$\mathrm{Cov}(R_1, R_2)_t = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{1,t-i} R_{2,t-i}.$$

Sličnim računom kao kod varijance, dobije se

$$\mathrm{Cov}(R_1, R_2)_{t+1} = (1 - \lambda)R_{1,t+1}R_{2,t+1} + \lambda\mathrm{Cov}(R_1, R_2)_t.$$

Koeficijent korelacije računa se po formuli 1.8., pa dijeljenjem kovarijance imovina s volatilnostima povrata imovina dobijemo koeficijent korelacije između naših imovina. Kod EWMA metode nemamo problem s efektom jeke te volatilnost nije toliko osjetljiva na odabir duljine uzorka.

Uočimo da smo u EWMA modelu računali volatilnost u različitim vremenskim trenucima, odnosno EWMA modeli pretpostavljaju da volatilnost nije konstantna tijekom vremena. To je ujedno i glavna pretpostavka GARCH modela. EWMA modeli su poseban slučaj GARCH modela što ćemo i pokazati kasnije. GARCH modeli pretpostavljaju volatilnost promjenjivu kroz vrijeme pa povrati imovina koju gledamo mogu se izmjenjivati između perioda niskih i visokih volatilnosti, što se naziva volatilnost grupiranja (eng. *volatility clustering*).

Temelji GARCH modela mogu se naći u Engleovom ARCH modelu (1982) [8]. U ARCH modelu reda p varijanca u vremenu $t + 1$ jednaka je

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_t^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p\varepsilon_{t-p+1}^2,$$

pri čemu je ε_t pogreška predviđanja, odnosno razlika između stvarne i procijenjene vrijednosti u vremenu t, a koeficijenti α nepoznati su parametri koje treba procijeniti regresijom, pri čemu mora vrijediti $\alpha_0 > 0$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \geq 0$. Engleov ARCH model generalizirao je Bollerslev 1986. godine [6]. GARCH(p,q) model definiran je jednadžbom

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_t^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p\varepsilon_{t-p+1}^2 + \beta_1\sigma_t^2 + \beta_2\sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q\sigma_{t-q+1}^2,$$

s uvjetima $\alpha_0 > 0$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \geq 0$. Najpoznatiji GARCH model je GARCH(1,1) koji je dan s

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1\sigma_t^2, \qquad \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0.$$

Ako pretpostavimo da je očekivani povrat jednak nula, dobijemo

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_t^2 + \beta_1\sigma_t^2, \qquad \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0.$$

Uočimo da ako uzmemo $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1 - \lambda$ i $\beta_1 = \lambda$, dobili smo EWMA model. Mi smo u definiciji GARCH modela pretpostavljali da je $\alpha_0 > 0$, a sada smo uzeli da je $\alpha_0 = 0$ što je u kontradikciji, ali mi smo definirali osnovni GARCH model, iako postoje kompliciraniji i sofisticiraniji modeli pomoću kojih se može formalnije dokazati da je EWMA model posebni slučaj GARCH modela. Više o ovim modelima može se naći u [2].

Prednosti

Prednost metode varijance i kovarijance je njezina jednostavnost. U ovoj metodi dovoljno je izračunati standardne devijacije i korelacije između danih imovina i uvrstiti u formulu. Naravno, u slučaju jako puno različitih imovina, potrebno je duže vremena kako bi se ova metoda provela ili je potrebno mapirati portfelj pa procjenjivati VaR mapiranog portfelja.

Velika prednost ove metode je u tome što kada izračunamo VaR za neku imovinu ili portfelj na jednoj razini značajnosti, lako možemo izračunati na svim ostalim razinama značajnosti. To lako vidimo iz formule 3.2. zato što, kada jednom izračunamo standardnu devijaciju imovine ili portfelja, množenjem standardne devijacije s vrijednošću imovine ili portfelja i različitim kvantilima normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i standardnom devijacijom 1 dobijemo VaR-ove imovine ili portfelja na različitim razinama značajnosti.

Nedostaci

Najveći nedostatak ove metode je pretpostavka normalnosti slučajnih varijabli. Već smo spomenuli da, kada gledamo povrate pojedinačne imovine, oni imaju teže donje repove od normalne distribucije, odnosno s većom vjerojatnošću poprimaju male vrijednosti. Kod metode varijance i kovarijance, pretpostavlja se da povrati na dionice imaju normalnu distribuciju što očito ne mora biti slučaj. Upravo tom pretpostavkom o normalnosti povrata lako može doći do krive procijene VaR-a. To se najčešće može dogoditi kada imamo imovinu ili portfelj čija distribucija povrata ima teške repove te potencijalno velike gubitke.

Drugi nedostatak je pretpostavka o linearnosti portfelja koja ograničava ovu metodu na portfelj s obveznicama i/ili dionicama. Metoda varijance i kovarijance daje loše procjene kada u portfelju imamo opcije ili neke druge derivate.

Još jedan nedostatak ove metode je to što pretpostavlja konstantnost koeficijenata korelacije između imovina iako se oni mijenjaju.

Kod metode varijance i kovarijance susrećemo se s par bitnih odluka koje trebamo donijeti. Prvo od svega, moramo odabrati koje slučajne varijable najbolje opisuju portfelj. Ponekad je potrebno mapirati portfelj. Mapiranje portfelja u većini slučajeva je jednostavno, ali nije jedinstveno određeno te moramo sami odlučiti kako ćemo pojednostavniti portfelj, odnosno koje slučajne varijable ćemo uzeti. Također, vidjeli smo da se standardna devijacija i korelacija mogu procijeniti na više načina pa prema tome moramo odlučiti koji postupak ćemo koristiti u metodi.

3.3 Monte Carlo metoda

Monte Carlo metoda simulacijska je metoda za procjenu VaR-a. Simulacijske metode u koje spadaju povijesna metoda i Monte Carlo metoda korisne su kada veza između vrijednosti portfelja i faktora tržišnih rizika nisu linearne ili monotone. To se često događa kada imamo portfelj koji sadrži opcije. Simulacijske metode procjenjuju VaR tako što uzimaju određene pretpostavke na distribuciju osnovnih faktora rizika ili na povrate referentne imovine, nakon toga simuliraju uzorak iz te distribucije te na kraju ponovno procjenjuju vrijednost portfelja pomoću osnovnih faktora rizika. Nakon što poredamo vrijednosti simuliranog portfelja od manjeg prema većem, lako možemo izračunati željeni kvantil distribucije vrijednosti portfelja, odnosno željeni VaR. Uočimo da smo kod povijene metode pretpostavili da je distribucija vrijednosti portfelja u budućnosti jednaka onoj u prošlosti pa nije bilo potrebno simulirati novi uzorak nego smo uzeli povijesne podatke o vrijednosti portfelja, odnosno rekonstruirali smo trenutne povrate portfelja tako što smo množili trenutne težine portfelja s prošlim povratima.

Prije nego što krenemo na samu Monte Carlo metodu, reći ćemo nešto o Monte Carlo simulacijama. Monte Carlo simulacije koriste se za modeliranje vjerojatnosti različitih ishoda u slučajevima kada ne možemo lako predvidjeti djelovanje slučajnih varijabli. To je metoda koja se koristi za bolje razumijevanje utjecaja rizika i neizvjesnosti u modelima predviđanja. Monte Carlo simulacije mogu se koristiti za rješavanje niza problema u gotovo svim područjima, najčešće u financijama, inženjerstvu i znanosti. Naziv dolazi od popularne kockarske destinacije u Monaku zato što su slučajni ishodi važni za ovu metodu isto kao i za igre poput ruleta, igre s kockama i igre na automatu. Metodu je prvi razvio matematičar Stanislaw Ulam koji je konstantno igrao pasijans te je bilježio ishode svake igre kako bi promatrao vjerojatnost pobjede. Nakon što je podijelio svoju ideju s Johnom Von Neumannom, počeli su surađivati i zajedno raditi na razvoju Monte Carlo simulacije [12].

U slučajevima kada se suočavamo sa značajnom nesigurnošću prilikom predviđanja ili procjenjivanja, umjesto da slučajnu varijablu zamijenimo s jednim prosječnim brojem, korištenje Monte Carlo simulacije pokazalo se boljim rješenjem budući da koristi više vrijednosti. Osnovna ideja Monte Carlo simulacija je ponavljanje slučajnih uzoraka kako bi se postigli određeni rezultati, odnosno metoda uzima varijablu koja u sebi sadrži nesigurnost i dodjeljuje joj slučajnu vrijednost. Zatim se izračuna model te dobijemo rezultat. Taj postupak ponavljamo, dodjeljujući slučajnoj varijabli mnogo različitih vrijednosti. Jednom kada simulacija završi, računamo aritmetičku sredinu rezultata te se taj broj uzima kao procjena slučajne varijable [11, str. 265-266].

Monte Carlo metoda je najpreciznija, ali i vremenski najzahtjevnija metoda. Ova metoda simulira vrijednosti financijskih varijabli za koje pretpostavljamo da znamo distribucije za niz različitih mogućih ishoda. Najveći problem ove metode je pronaći distribuciju slučajne varijable ili njezinu realizaciju. Kada gledamo simulaciju pomoću prošlih podataka, uočavamo sličnost s povijesnom metodom budući da se u oba slučaja koriste prošli podaci kako bi se prikazala budućnost. Razlika je u tome što Monte Carlo simulacija ne uzima direktno prošle podatke nego se iz prošlih podataka simuliraju slični podaci čiji prosjek tada gledamo.

Prije nego što krenemo dalje, objasnimo ukratko dva načina na koja možemo simulirati podatke, metoda inverza te bootstrap metoda. Prvu metodu koristimo kada znamo distribuciju naše slučajne varijable, a drugu kada imamo realizaciju slučajne varijable.

Kod metode inverza pretpostavljamo da znamo simulirati uzorke iz uniformne razdiobe na $[0, 1]$ te da znamo funkciju distribucije varijable čije vrijednosti želimo simulirati. Prisjetimo se što znači da slučajna varijabla ima uniformu distribuciju.

Definicija 3.3.1. *Za neprekidnu slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da ima uniformnu distribuciju na segmentu $[a, b]$ ako joj je funkcija gustoće definirana s*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Pišemo $X \sim Unif(a, b)$.

Sljedeće leme govore o tome kako se radi simulacija pomoću metode inverza te se mogu naći u [3].

Lema 3.3.2. *Ako je F funkcija distribucije takva da za neke $-\infty \leq a < b \leq \infty$, F je strogo rastuća i neprekidna na (a, b) te vrijedi $F(a) = 0,\ F(b) = 1$, ona je bijekcija s (a, b) u $(0, 1)$ te je dobro definiran njen inverz $F^{-1} : (0, 1) \to (a, b)$. U tom slučaju, za $U \sim Unif(0, 1)$ vrijedi $F^{-1}(U) \sim F$.*

Lema 3.3.3. *Ako je F funkcija distribucije na $\mathbb{R}$ i $U \sim Unif(0, 1)$, vrijedi $F^{\leftarrow}(U) \sim F$.*

Napomena 3.3.4. *Ako je za neki $u \in (0, 1)$, $F^{-1}(u) = \{y \in \mathbb{R} : F(y) = u\} = \{x\}$ za neki $x \in \mathbb{R}$, tada je $F^{\leftarrow}(u) = x$. Posebno, ako je F bijekcija s (a, b) u $(0, 1)$ iz Leme 3.3.2 vrijedi $F^{\leftarrow} = F^{-1}$.*

Drugi način za simuliranje vrijednosti slučajnih varijabli iz hipotetičkih distribucija je pomoću jedne dane realizacije. U ovom slučaju, ne moramo znati funkciju distribucije slučajne varijable već je dovoljno znati jednu njezinu realizaciju. Metoda kojom iz danog uzorka, odnosno realizacije, simuliramo nove uzorke naziva se bootstrap metoda. Objasnimo sada na jednom posebnom slučaju ovu metodu.

Pretpostavimo da imamo slučajnu varijablu koja predstavlja povrat dionice te da imamo povijesne podatke o cijeni te dionice pa samim time i o povratima. Prvo od svega moramo

odlučiti koliko daleko u prošlost ćemo ići, odnosno, koju duljinu uzorka ćemo odabrati. Ponovno se susrećemo s istim problemom kao i ranije, koliko je optimalno ići u prošlost. Budući da smo već dovoljno rekli o tome, pretpostavit ćemo da imamo unaprijed zadan broj podataka, označimo ga s n. Sada imamo jednu realizaciju slučajne varijable te iz te realizacije simuliramo veliki broj novih uzoraka. Broj simulacija označimo s B te u pravilu uzimamo da je B poprilično velik broj. Primijetimo da već ovdje imamo veliki broj operacija koje treba izvršiti. Ovisno o vrsti bootstrapa razlikujemo načine na koji radimo simulacije iz danog uzorka.
Na primjer, za neparametarski bootstrap iz danog uzorka duljine n na slučajan način biramo n vrijednosti iz tog uzorka, pri čemu možemo jednu vrijednost odabrati više puta i taj postupak ponavljamo B puta. Sada smo dobili B podataka o hipotetičnim povratima dionica prošlih n dana. Na isti način kao kod povijesne metode računamo VaR. Nove uzorke koji predstavljaju hipotetične povrate poredamo od najmanjeg do najvećeg te gledamo, u ovisnosti o razini značajnosti α, vrijednost koja se nalazi na mjestu $\lceil \alpha \cdot n \rceil + 1$ i ta vrijednost je naš VaR za simulacije. Uzmemo aritmetičku sredinu svih VaR-ova kako bismo dobili traženi VaR Monte Carlo simulacijom. [11, str. 312-314]

VaR procjenjujemo Monte Carlo metodom u 3 koraka:

1. Moramo pronaći funkciju distribucije slučajne varijable koja predstavlja vrijednost portfelja ili trebamo pronaći neku realizaciju te slučajne varijable. Na primjer, ako znamo iz koje distribucije dolaze povrati portfelja, simuliramo veliki broj podataka iz te distribucije jednake duljine. S druge strane, kada bismo imali jednu realizaciju povrata portfelja (najčešće su to povijesni podaci), iz te realizacije simulirali bismo nove uzorke kao u gornjem odlomku o bootstrapu.

2. Za svaku od realizacija računamo VaR na isti način kao kod povijesne metode. Poredamo podatke od najmanjeg do najvećeg te tražimo vrijednost za koju vrijedi da je $\alpha\%$ povrata lošije od te vrijednosti.

3. Uzmemo aritmetičku sredinu dobivenih VaR-ova.

Prednosti

Monte Carlo metoda najtočnija je metoda za izračun VaR-a. Budući da je ova metoda prilagodljiva, daje dobre rezultate i kada imamo neuobičajene povrate, teške repove i različite netipične scenarije.

Monte Carlo simulacija nije ograničena samo na normalnu distribuciju nego može pretpostavljati da slučajne varijable mogu dolaziti iz bilo koje distribucije. Prema tome, ova metoda je dobra i kada u portfelju imamo opcije. Monte Carlo metoda jedina je od navedenih koja se može koristiti za upravljanje kreditnim rizikom, odnosno za izračun kreditnog VaR-a.

Zbog spomenute prilagodljivosti, ovom metodom moguće je simulirati različite scenarije te testirati veliki broj mogućih ishoda pa ova metoda ima široku primjenu.

Nedostaci

Monte Carlo metoda susreće se u praksi s mnogim problemima koji su najčešće vezani za odabir konkretne metode, odnosno koju distribuciju odabrati, kojim algoritmom simulirati nove uzorke, koliko simulacija napraviti, itd. Kako bismo izbjegli preveliku općenitost, zadržat ćemo se samo na nedostacima metode kada imamo već jednu danu realizaciju slučajne varijable. Pretpostavimo da gledamo slučajnu varijablu koja predstavlja povrate portfelja koji se sastoji od dionica. Prva odluka u Monte Carlo simulaciji je hoćemo li simulirati nove uzorke bootstrap metodom ili ćemo probati pronaći kojoj distribuciji naš uzorak pripada pa tada simulirati nove uzorke iz te distribucije. U slučaju odabira bootstrap metode, sljedeća odluka vezana je uz konkretnu bootstrap metodu zato što bootstrap ima puno različitih varijanti. Pretpostavimo da smo se odlučili koji ćemo bootstrap koristiti, sada treba donijeti odluku koliko simulacija napraviti. Uočimo da smo trebali donijeti već tri poprilično bitne odluke. Naravno, zbog tolike slobode u odabiru, Monte Carlo metoda ima široku primjenu i u pravilu će davati bolje rezultate od ostalih metoda.

Još jedan veliki nedostatak Monte Carlo metode koji je povezan s odabirom broja simulacija je vremenska zahtjevnost. Kako bismo imali čim veću preciznosti i točnosti, potrebno je da broj simulacija bude velik, ali povećanjem broja simulacija povećava se i vrijeme izvršavanja metode. U pravilu, za izvršavanje Monte Carlo metode potrebno je puno više vremena nego za povijesnu metodu te metodu varijance i kovarijance.

3.4 Usporedba metoda

Nakon što smo objasnili metode te nabrojali njihove prednosti i nedostatke i dalje ne možemo sa sigurnošću reći koja metoda je najbolja. Svaka od metoda ima svoje prednosti i nedostatke i ni jedna metoda nije u svemu bolja od drugih.

Prvo od svega, što se tiče ograničenja metoda, odnosno pretpostavki koje svaka metoda koristi, najmanje pretpostavki koristi povijesna metoda. Kod povijesne metode jedino što pretpostavljamo je da će se distribucija povrata u budućnosti ponašati isto kao u prošlosti. S druge strane, povijesna metoda pretpostavlja konstantnu volatilnost dok se kod metode varijance i kovarijance te Monte Carlo metode volatilnost mijenja kroz vrijeme. Prema tome, gledajući volatilnost, metoda varijance i kovarijance te Monte Carlo metoda bolje su od povijesne metode jer pretpostavljaju realniji slučaj.

Razlike između ovih triju metoda su i u složenosti te potrebnom vremenu izvršavanja. Povijesna metoda jednostavna je i razumljiva svima te nije vremenski zahtjevna. Metoda varijance i kovarijance također nije vremenski zahtjevna, ali je malo kompliciranija.

Općenito za provođenje metode varijance i kovarijance nije potrebno nikakvo predznanje budući da se koriste unaprijed dane formule, ali za razumijevanje metode ipak je potrebno znanje iz statistike. Monte Carlo metoda je najkompliciranija i vremenski najzahtjevnija te je za njezino razumijevanje potrebno predznanje iz statistike i računalstva, ali je zbog toga i najpreciznija.

Izbor metode veliki je problem. U pravilu, osoba koja je zadužena za upravljanje rizicima mora dobro proučiti i analizirati svoj portfelj te odlučiti koji parametri su najbitniji prilikom odabira metode za procjenu VaR-a. Tablica 3.1 preuzeta je iz [13] te prikazuje usporedbu metoda po određenim kriterijima.

	Povijesna metoda	Metoda varijance i kovarijance	Monte Carlo metoda
Sposobnost obuhvaćanja rizika portfelja s opcijama	Visoka	Niska (osim u slučaju kratkog razdoblja držanja ili niske opcionalnosti)	Visoka
Jednostavnost provedbe	Visoka (uz dostupnost podataka)	Visoka (s dobrim softverom)	Prilično niska
Potrebno vrijeme	Normalno	Normalno	Relativno mnogo
Razumljivost za višu upravu	Visoka	Niska	Niska
Pouzdanost rezultata u slučaju atipične recentne prošlosti	Niska	Niska (osim ako se ne koriste nove procjene)	Niska (osim ako se ne koriste nove procjene)
Fleksibilnost u mijenjanju pretpostavki	Niska	Visoka za promjene parametra, niska za strukturalne promjene	Visoka

Tablica 3.1: Usporedba metoda

Poglavlje 4

Primjena metoda na portfelj

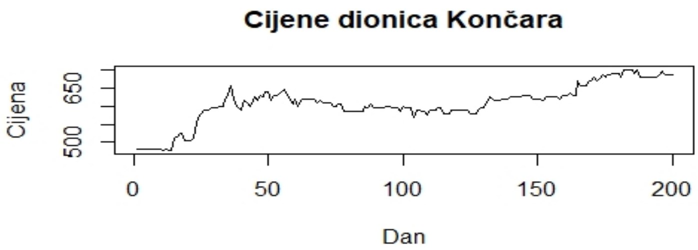
Primjenu metoda procjene VaR-a ilustrirat ćemo na portfelju koji se sastoji od dionica Končara, Podravke i HT-a. Pretpostavit ćemo da je udio dionica Končara u portfelju 50%, udio dionica Podravke 30% te udio HT-ovih dionica 20%. Računat ćemo jednodnevni 99%-tni VaR, tj. $N = 1$ i $\alpha = 1\%$. Na povrate ćemo gledati kao na dnevne povrate. Pretpostavit ćemo da imamo 100 kuna na raspolaganju za investiranje.

Sa stranice Zagrebačke burze (`https://zse.hr/`), preuzeti su podaci o cijenama tih triju dionica za razdoblje od 9. 7. 2020. do 14. 4. 2021. U tom periodu imamo 200 podataka o cijenama dionica. Uzeto je ovo razdoblje kako u izračun ne bi ušli podaci s početka korona krize kada su cijene dionica jako oscilirale. Primjena je rađena u programskom jeziku R [15] pomoću aplikacije RStudio [16] te se kod nalazi u Dodatku A na kraju ovog rada.

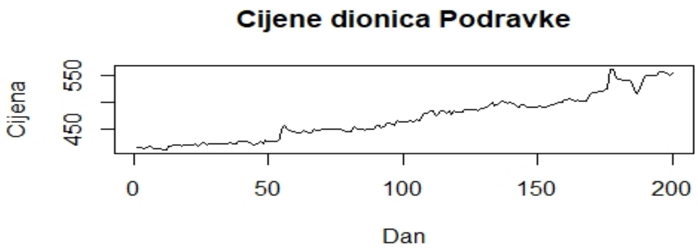
U sljedećim potpoglavljima ukratko ćemo objasniti postupke procjene VaR-a konkretnog portfelja povijesnom metodom, metodom varijance i kovarijance te Monte Carlo metodom. Prikazat ćemo rezultate svake metode te ih usporediti na kraju poglavlja.

4.1 Povijesna metoda

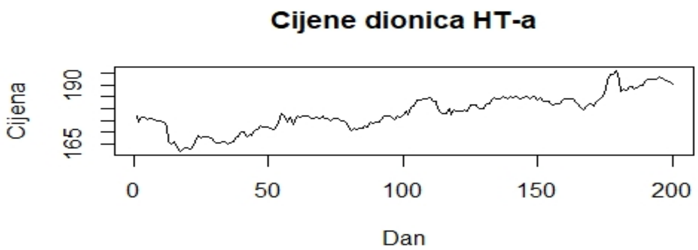
Imamo podatke o cijenama dionica te stavimo da su s $P_{1,1}, \dots, P_{1,200}$ označene cijene dionica Končara, s $P_{2,1}, \dots, P_{2,200}$ cijene dionica Podravke te s $P_{3,1}, \dots, P_{3,200}$ cijene dionica HT-a. Grafovi 4.1, 4.2 i 4.3 prikazuju kretanje cijena dionica Končara, Podravke i HT-a u promatranom razdoblju.



Slika 4.1: Grafički prikaz kretanja cijena dionica Končara od 9. 7. 2020. do 14. 4. 2021.



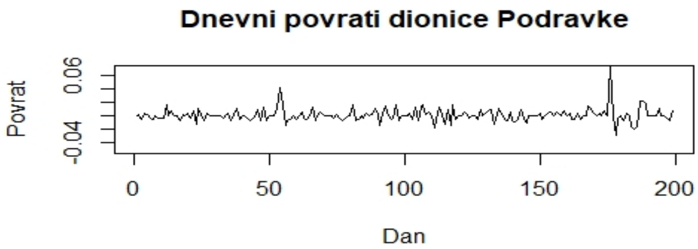
Slika 4.2: Grafički prikaz kretanja cijena dionica Podravke od 9. 7. 2020. do 14. 4. 2021.



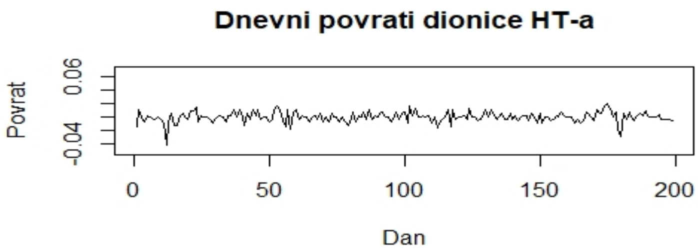
Slika 4.3: Grafički prikaz kretanja cijena dionica HT-a od 9. 7. 2020. do 14. 4. 2021.

Želimo izračunati dnevne povrate tih dionica. To radimo koristeći formulu 1.1.. Na grafovima 4.4, 4.5 i 4.6 prikazani su dnevni povrati naših dionica, pri čemu je skala y-osi ista na sva tri grafa kako bismo lakše usporedili povrate.

Slika 4.4: Grafički prikaz dnevnih povrata dionice Končara od 9. 7. 2020. do 14. 4. 2021.



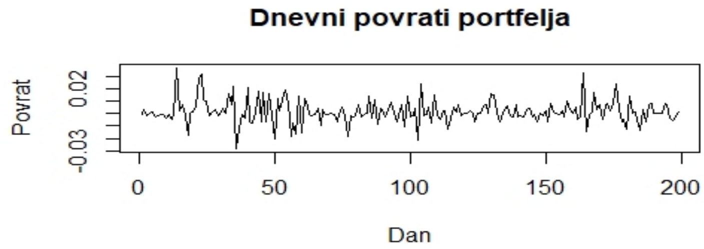
Slika 4.5: Grafički prikaz dnevnih povrata dionice Podravke od 9. 7. 2020. do 14. 4. 2021.



Slika 4.6: Grafički prikaz dnevnih povrata dionice HT-a od 9. 7. 2020. do 14. 4. 2021.

Uočimo da se povrati Podravke i HT-a ne mijenjaju puno na dnevnoj bazi dok dnevni povrati Končara tijekom cijelog promatranog razdoblja poprilično osciliraju u odnosu na Podravku i HT.

Na početku smo rekli da 50% portfelja čine dionica Končara pa je $w_1 = 0.5$ te ostalih 50% je podijeljeno tako da 30% portfelja čine dionice Podravke, a 20% portfelja dionice HT-a, odnosno $w_2 = 0.3$ te $w_3 = 0.2$. Formula 1.3. prikazuje kako se računa povrat portfelja te koristeći tu formulu izračunamo dnevne povrate našeg portfelja. Dnevni povrati portfelja prikazani su na grafu 4.7.



Slika 4.7: Grafički prikaz dnevnih povrata portfelja od 9. 7. 2020. do 14. 4. 2021.

Podatke o dnevnim povratima portfelja poredamo po veličini te tražimo vrijednost povrata za koji vrijedi da je 1% ostalih povrata gore od njega, odnosno tražimo vrijednost povrata za kojeg vrijedi da su 2 povrata gora. To je upravo vrijednost trećeg najgoreg povrata i ta vrijednost je naš jednodnevni 99%-tni VaR.

U ovom slučaju dobije se da je to -0.02069 ili u postotcima -2.069%. Drugim riječima, povijesna metoda nam daje da ćemo sa sigurnošću od 99% sutra najviše izgubiti 2.069%. Prisjetimo se da smo u portfelj uložili 100 kuna. Naš maksimalni sutrašnji gubitak, za koji možemo reći da smo 99% sigurni, iznosi 2.069 kuna.

4.2 Metoda varijance i kovarijance

Pretpostavimo da imamo isti portfelj kao u prethodnom primjeru. Kod metode varijance i kovarijance spomenuli smo da ponekad trebamo mapirati portfelj. Budući da se naš portfelj sastoji samo od tri dionice, ovdje to nije potrebno, iako ćemo napraviti primjer s mapiranim portfeljem kako bismo usporedili rezultate, ali zadržimo se sada na ovom primjeru. Za slučajne varijable koje najbolje opisuju vrijednost portfelja uzet ćemo slučajne varijable koje predstavljaju povrate dionica koje su u portfelju te ćemo dodatno pretpostaviti da su te slučajne varijable normalno distribuirane.

Ponovno računamo jednodnevni 99%-tni VaR te će nam pri tome biti potrebna formula 3.3.. Iz te formule vidimo da je potrebno izračunati VaR za svaku dionicu posebno te koeficijente korelacija između naših dionica, odnosno njihovih povrata. Tablica 4.1 prikazuje koeficijente korelacije povrata između dionica Končara, Podravke i HT-a.

	Končar	Podravka	HT
Končar	1.000	0.099	0.126
Podravka	0.099	1.000	0.179
HT	0.126	0.179	1.000

Tablica 4.1: Tablica koeficijenata korelacije između povrata dionica Končara, Podravke i HT-a.

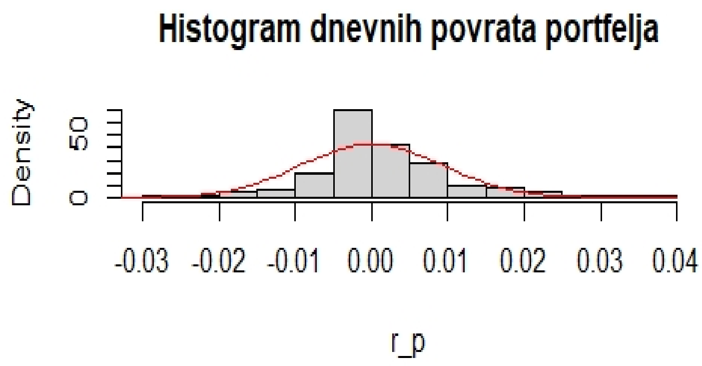
Pomoću formule 3.2., izračunajmo VaR za svaku dionicu posebno. Budući da je $\alpha = 0.01$, vrijednost 99%-kvantila normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i standardnom devijacijom 1 je $q_{0.99} = 2.326$. Tablica 4.2 prikazuje standardne devijacije povrata dionica koje su dobivene u R-u pomoću funkcije *sd()* te VaR svake dionice.

	Končar	Podravka	HT
σ	0.016	0.009	0.008
VaR	0.038	0.022	0.018

Tablica 4.2: Tablica standardnih devijacija i VaR-ova dionica Končara, Podravke i HT-a.

Izračunajmo još VaR za svaku dionicu, ali u terminima novčanih jedinica, odnosno u kunama. U Končar je uloženo 50 kuna, u Podravku 30, a u HT 20 kuna. Kako bismo dobili VaR u terminima novčanih jedinica potrebno je VaR iz prethodne tablice pomnožiti s odgovarajućim iznosom ulaganja. Dobije se da s 99%-tnom sigurnošću sutra nećemo izgubiti više od 1.889 kuna gledajući samo dionice Končara. Analogno, ako gledamo samo dionice Podravke, odnosno HT-a, sa 99%-tnom sigurnošću sutra nećemo izgubiti više od 0.663 kuna, odnosno 0.359 kuna. Ako gledamo VaR portfelja u terminima novčanih jedinica, dobije se da sutra nećemo izgubiti više od 2.155 kuna s 99%-tnom sigurnošću.

Spomenuli smo da metoda varijance i kovarijance pretpostavlja normalnost slučajnih varijabli pa ćemo testirati normalnost povrata portfelja. Za početak crtamo histogram povrata portfelja te na istom grafu funkciju gustoće normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i standardnom devijacijom jednakom standardnoj devijaciji povrata portfelja. Slika 4.8 prikazuje spomenuti histogram gdje je funkcija gustoće prikazana crvenom linijom. Uočimo da nam već histogram sugerira da naši povrati ne dolaze iz normalne razdiobe.



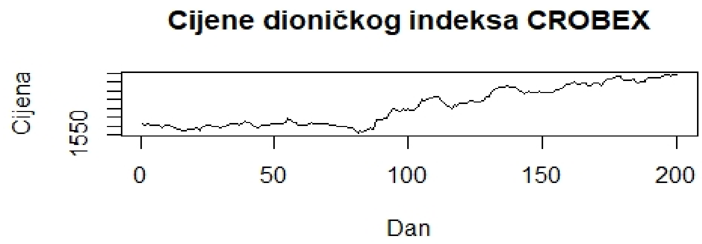
Slika 4.8: Histogram dnevnih povrata portfelja i funkcija gustoće normalne slučajne varijable.

Kako bismo to formalno dokazali, koristit ćemo Kolmogorov-Smirnov test. U R-u ovaj test se provodi pomoću naredbe *ks.test()*. Nulta hipoteza je

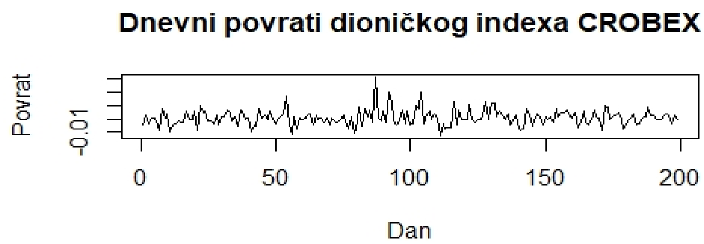
$$H_0 : \text{Uzorak dolazi iz normalne distribucije.}$$

Vrijednost testne statistike je $D = 0.164$, a p-vrijednost je $p = 4.315 \cdot 10^{-5}$. Budući da je p-vrijednost jako mala, odbacujemo nultu hipotezu da naši podaci dolaze iz normalne distribucije.

Sada ćemo još provesti metodu varijance i kovarijance na mapiranom portfelju, odnosno pretpostavit ćemo da naše dionice Končara, Podravke i HT-a linearno ovise o dioničkom indeksu kao u 3.1.. Najpoznatiji dionički indeks na Zagrebačkoj burzi je CROBEX te ćemo njega uzimati za naš referentni indeks. CROBEX se sastoji od 18 dionica u koje spadaju dionice Končara, Podravke i HT-a.
Prvo od svega prikažimo grafički kretanje cijena CROBEX-a kroz promatrani period te dnevne povrate CROBEX-a. Kretanje cijena CROBEX-a prikazano je grafom 4.9, a dnevni povrati CROBEX-a grafom 4.10.



Slika 4.9: Grafički prikaz kretanja cijena CROBEX-a od 9. 7. 2020. do 14. 4. 2021.



Slika 4.10: Grafički prikaz dnevnih povrata CROBEX-a od 9. 7. 2020. do 14. 4. 2021.

Kako bismo izračunali VaR mapiranog portfelja, moramo izračunati bete dionica što radimo pomoću formule 1.9.. Vrijednosti beta dionica dane su u tablici 4.3.

	Končar	Podravka	HT
β	0.861	0.633	0.618

Tablica 4.3: Tablica beta investicija dionica Končara, Podravke i HT-a.

Množenjem iznosa koji je uložen u određenu dionicu s pripadnom betom dobijemo koliko bi to kuna bilo uloženo u CROBEX. Odnosno, kako je $50 \cdot 0.861 = 43$, 50 kuna uloženih u dionicu Končara ekvivalentno je 43 kune uložene u CROBEX. Analogno, za dionice Podravke i HT-a ekvivalentna ulaganja u CROBEX su 19 kuna i 12 kuna. Kada bismo gledali cijeli portfelj, 100 kuna uloženih u naš portfelj ponašat će se isto kao 74 kune uložene u dionički indeks CROBEX. Sada VaR za naš portfelj možemo izračunati kao VaR za CROBEX te ga pomnožimo s vrijednošću ulaganja, odnosno sa 74 kune. Dobijemo da je VaR mapiranog portfelja u terminima novčanih jedinica jednak

$$\mathrm{VaR}_{0.99} = 74 \cdot q_{0.99} \cdot \sigma_m = 0.997,$$

gdje ponovno koristimo $q_{0.99} = 2.326$. Gledajući mapirani portfelj, metodom varijance i kovarijance dobili smo da sa sigurnošću od 99% sutra nećemo izgubiti više od 0.997 kuna. Uočimo da smo dobili puno manji VaR nego ranije.

4.3 Monte Carlo metoda

U ovom primjeru također radimo s portfeljem koji se sastoji od dionica Končara, Podravke i HT-a s udjelima 50%, 30% i 20% te pretpostavljamo da smo u portfelj uložili ukupno 100 kuna. Tražimo maksimalni gubitak za sutra s vjerojatnošću 99%.

Spomenuli smo da se Monte Carlo metoda može raditi na više načina, uzimajući pretpostavke o slučajnim varijablama s kojim radimo ili pronalaženjem realizacije slučajne varijable. Mi ćemo koristiti drugi način, pri čemu ćemo uzimati povijesne podatke o cijenama dionica. Prvi dio isti je kao i prvi dio kod povijesne metode. Imamo 200 podataka o cijenama dionica Končara, Podravke i HT-a te pomoću formule 1.1. izračunamo povrate svake dionice posebno. Zatim, pomoću formule 1.3. izračunamo povrate portfelja. Slika 4.7 prikazuje dnevne povrate portfelja.

Za broj simulacija uzet ćemo $B = 1000$. Prema tome, 1000 puta ponavljamo sljedeći postupak:

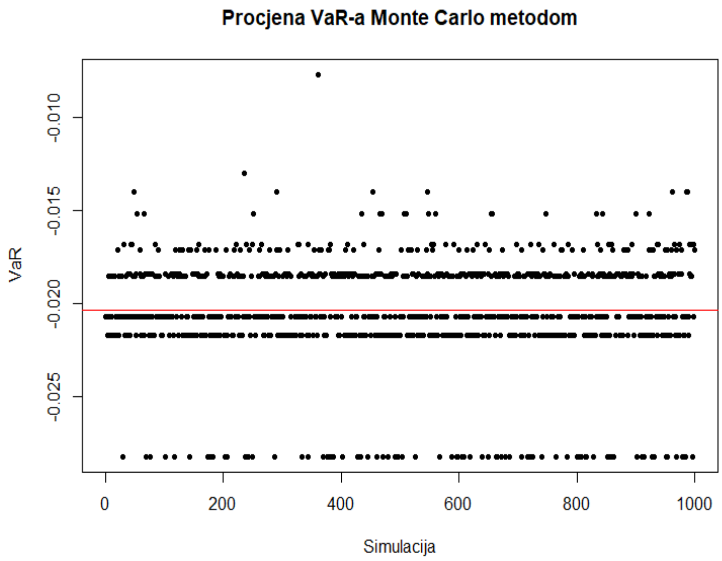
1. Uzmemo dobivenih 199 podataka o povratima portfelja te iz tih podataka simuliramo novi uzorak iste duljine. Vrijednosti u novom uzorku birane su iz početnih podataka na slučajan način, pri čemu dopuštamo da se ista vrijednost uzme više puta.

2. Poredamo dobivene podatke od manjeg prema većem.

3. Uzmemo vrijednost koja se nalazi na trećem mjestu i to je upravo 99%-tni VaR za nove podatke budući da je 1% podataka lošije od njega.

Nakon što smo 1000 puta ponovili gornji postupak i dobili 1000 VaR-ova za različite podatke, izračunamo njihov prosjek te je to traženi VaR koji se dobije Monte Carlo metodom. Vrijednost tog VaR-a je -0.02035 ili u postocima -2.035%. Možemo sa sigurnošću od 99% reći da sutra nećemo izgubiti više od 2.035 kuna.

Graf 4.11 prikazuje procijenjene vrijednosti VaR-ova te prosječnu vrijednost VaR-ova koja je prikazana crvenom linijom.



Slika 4.11: Grafički prikaz procijenjenih vrijednosti VaR-a te prosječna vrijednost VaR-a.

4.4 Usporedba rezultata

Za kraj ćemo još samo usporediti rezultate za naš portfelj koji se sastoji od dionica Končara, Podravke i HT-a. Tablica 4.4 prikazuje procijenjene maksimalne sutrašnje gubitke u terminima novčanih jedinica za svaku metodu posebno na razini značajnosti $\alpha = 1\%$.

	Povijesna metoda	Metoda varijance i kovarijance	Monte Carlo metoda
VaR	2.069	2.155	2.035

Tablica 4.4: Procijenjeni VaR-ovi za svaku od metoda.

Uočimo da smo dobili slične procjene. Povijesnom metodom smo dobili da ćemo sa sigurnošću od 99% sutra izgubiti najviše 2.069 kuna, metodom varijance i kovarijance 2.155 kuna, a Monte Carlo metodom 2.035 kuna. U našem slučaju nije bilo bitno koju metodu koristimo budući da su sve dale slične rezultate.

Poglavlje 5

Testiranje unatrag i testiranje otpornosti na stres

U ovom poglavlju bavit ćemo se testiranjem unatrag te testiranjem otpornosti na stres. Oba testa služe za provjeru kvalitete metode te nam pomažu pri odabiru metode za procjenu VaR-a.

5.1 Testiranje unatrag

Testiranje unatrag (eng. *backtesting*) provodi se tako što se provjerava kako se naša metoda za procjenu VaR-a ponašala u prošlosti. Pomoću testiranja unatrag možemo zaključiti koliko je naša metoda dobra. Pretpostavimo da smo odlučili koji VaR želimo izračunati te da smo odabrali metodu kojom želimo procijeniti VaR. Procijenimo naš VaR. Sada se želimo uvjeriti koliko je ta procjena dobra. Računamo isti taj VaR, pri čemu koristimo iste faktore tržišnog rizika samo za drugo razdoblje, odnosno za prošla razdoblja za koja znamo koliki je bio stvarni gubitak. Procjenjivanjem više dobivenih VaR-ova za prošlost i uspoređivanjem sa stvarnim gubicima vidimo koliko je naša metoda bila dobra. Na primjer, ako za 99%-tni VaR u manje od 1% slučajeva imamo da je stvarni gubitak veći od procjene VaR-a, možemo zaključiti da je metoda jako dobra. Nasuprot tome, ako su naše procjene VaR-ova u velikom broju slučajeva manje od stvarnih gubitaka, očito da metoda u tom slučaju ne daje najbolje rezultate. U pravilu, banke same odlučuju koliko može biti odstupanja da bi se metoda i dalje smatrala dobrom i pouzdanom [10].

Testiranje unatrag pomaže i kod odabira duljine podataka koje koristimo. Kada bismo željeli pronaći najidealniju duljinu podataka koju ćemo koristiti dalje u metodi, potrebno je provesti testiranje unatrag na prošlim podacima različitih duljina.

Primjeri testiranja unatrag

Prisjetimo se primjene metoda za procjenu VaR-a na portfelj. Tražili smo jednodnevni 99%-tni VaR portfelja koji se sastoji od dionica Končara, Podravke i HT-a s udjelima, redom, 50%, 30% i 20%. U sve tri primjene koristili smo povijesne podatke o cijenama dionica za razdoblje od 9. 7. 2020. do 14. 4. 2021. te smo računali najveći mogući gubitak za 15. 4. 2021. Uočimo da primjena prethodnih triju metoda spada u testiranje unatrag zato što znamo stvarni gubitak na dan 15. 4. 2021.

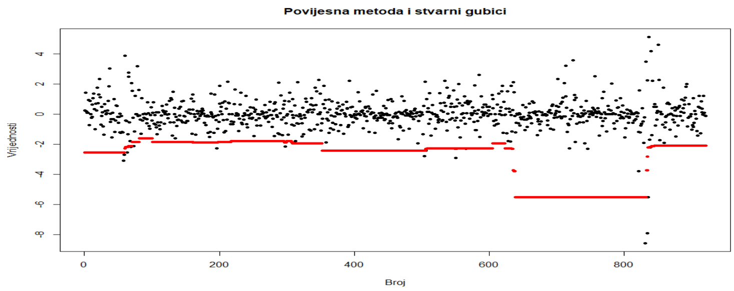
Kako bismo lakše objasnili testiranje unatrag na primjeru, pretpostavit ćemo da je danas 14. 4. 2021. te da računamo najveći mogući gubitak sutra s 99%-tnom sigurnošću. Prvo ćemo objasniti primjenu testiranja unatrag na povijesnoj metodi. U primjeni povijesne metode za naš portfelj, dobili smo da je najveći mogući sutrašnji gubitak 2.069 kuna sa sigurnošću od 99%. Kako bi testiranje unatrag bila dobra metoda provjere kvalitete metode, testiranje unatrag trebalo bi provesti na više različitih razdoblja.

Pokazat ćemo testiranje unatrag za povijesnu metodu na podacima duljine 200 za razdoblje od 8. 7. 2020. do 13. 4. 2021. te ćemo procijenjeni VaR usporediti sa stvarnim gubitkom na dan 14. 4. 2021. Radimo istu stvar koju smo radili u poglavlju u kojem smo primjenjivali povijesnu metodu na portfelj, samo sada radimo s drugim podacima. Imamo podatke o cijenama dionica Končara, Podravke i HT-a koje smo preuzeli sa stranice Zagrebačke burze pa računamo dnevne povrate za svaku dionicu posebno koristeći formulu 1.1.. Nakon toga, koristeći formulu 1.3. izračunamo dnevne povrate našeg portfelja. Poredamo povrate od najmanjeg do najvećeg. Budući da tražimo vrijednost za koju će vrijediti da je 1% povrata lošije od njega, uzimamo vrijednost koja je treća po redu i to je upravo naš VaR.

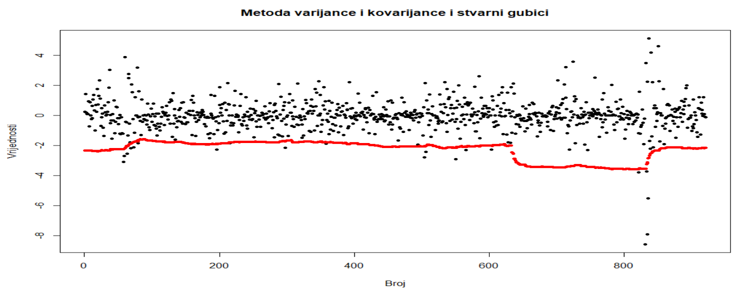
Ovaj dio je također rađen u programskom jeziku R te dobijemo da je testiranjem unatrag povijesne metode procjena VaR-a, odnosno najveći mogući sutrašnji gubitak jednak 2.069 kuna. Stvarni gubitak, odnosno u ovom slučaju dobitak, jednak je 0.114 kuna.

Uočimo dvije stvari, prvo da je procjena VaR-a jednaka za različite podatke, a drugo da nismo izgubili više od procjene VaR-a. Jednakost VaR-ova za različite podatke bila je očekivana zato što se podaci razlikuju u samo jednoj vrijednost.

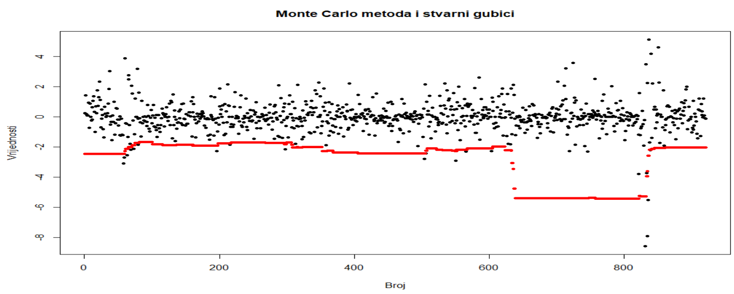
Također, napravili smo testiranje unatrag za sve metode na više razdoblja. Podaci koje smo koristili su u razdoblju od 26. 12. 2016. do 14. 4. 2021. te su također preuzeti sa stranice Zagrebačke burze. Računali smo jednodnevni 99%-tni VaR u terminima novčanih jedinica. Proveli smo testiranje unatrag na 921 različitih razdoblja te smo dobili rezultate koji su grafički prikazani na slikama 5.1, 5.2 i 5.3. Prva slika prikazuje usporedbu procijenjenog VaR-a povijesnom metodom i stvarnog gubitka. Analogno, druga i treća slika prikazuju usporedbu procijenjenog VaR-a metodom varijance i kovarijance, odnosno Monte Carlo metodom, i stvarnog gubitka. Crnom bojom označeni su stvarni gubici, a crvenom bojom procijenjeni maksimalni gubici za taj dan.



Slika 5.1: Usporedba rezultata povijesne metode i stvarnih gubitaka



Slika 5.2: Usporedba rezultata metode varijance i kovarijance i stvarnih gubitaka



Slika 5.3: Usporedba rezultata Monte Carlo metode i stvarnih gubitaka

Iz grafova vidimo da je većina stvarnih gubitaka bila manja od VaR-a. Točnije, dobili smo da je procjena VaR-a povijesnom metodom bila pogrešna u 16 slučaja, metodom varijance i kovarijance u 18 slučaja, a Monte Carlo metodom u 20 slučaja. Budući da smo računali 99%-tni VaR, dozvoljena pogreška je 1%, odnosno u 9 slučaja. Ni jedna od metoda procjene nije to zadovoljila. Povijesna metoda ima pogrešku u 1.7% slučajeva, metoda varijance i kovarijance u 1.9% slučajeva, a Monte Carlo metoda u 2.1% slučajeva. Uspoređujući metode prema ovom kriteriju, povijesna metoda daje najbolje procjene.

5.2 Testiranje otpornosti na stres

Testiranje otpornosti na stres (eng. *stress testing*) metoda je za provjeru kvalitete metode za procjenu VaR-a tako što se metoda za procjenu VaR-a provodi u ekstremnim i netipičnim slučajevima, recimo u kriznim vremenima. Testiranje otpornosti na stres može se definirati kao procjena ranjivosti portfelja prema iznimnim, ali vjerojatnim događajima. Radi jednostavnosti, ekstremne slučajeve, krizna vremena, rijetke događaje nazivat ćemo stresnim scenarijima. Stresni scenariji mogu biti netipična događanja iz prošlosti, ali i hipotetični događaji za koje se smatra da se mogu dogoditi u budućnosti.

Stresne scenarije koji se koriste u testiranju otpornost na stres u pravilu određuju osobe zadužene za upravljanje rizicima. Ponekad se osobe zadužene za upravljanje rizicima sastanu s višim menadžmentom te zajedno razmatraju trenutnu ekonomsku situaciju i prema tome razvijaju različite stresne scenarije. Jedan primjer stresne situacije je dnevno kretanje standardne devijacije za više od 5. Pod pretpostavkom normalne distribucije, primjena standardne devijacije za 5 događa se jednom u 7000 godina, dok u praksi to nije neobičajna pojava, odnosno ovakvo odstupanje može se dogoditi jednom ili dvaput u 10 godina.

Nakon krize 2008. godine, počelo se razmišljati o uvođenju VaR-a u stresnim uvjetima (eng. *stressed VaR*, skraćenica S-VaR). Ovakav VaR temelji se na povijesnoj metodi, pri čemu se podaci koje koristimo uzimaju iz razdoblja stresnih scenarija u prošlosti. VaR u stresnim uvjetima jednak je testiranju otpornosti na stres povijesne metode [10].

Berkowitz (2000) [5] smatra da testiranje otpornosti na stres ima četiri svrhe. Prvo, simulirati događaje koji su vjerojatniji da će se dogoditi u budućnosti nego što su bili u prošlosti. Drugo, simulirati događaje koji se nikad nisu dogodili, a za koje se smatra da će se vrlo vjerojatno dogoditi. Treće, simulirati događaje kod kojih postoji mogućnost da će se dotadašnji obrasci promijeniti. Četvrto, simulirati događaje koji mogu reflektirati strukturalne prekide koji bi se mogli dogoditi.

Berkowitz također predlaže da se određenim stresnim događanjima daje formalna vjerojatnost. Odnosno, da prilikom računanja VaR-a, normalan VaR koji računamo uzimamo s vjerojatnošću $1-\alpha$, a različite stresne scenarije s vjerojatnostima $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, pri čemu vrijedi $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \alpha$. Stresni scenariji bi tada bili u potpunosti uključeni u analizu rizika. Iako pojedine banke pokušavaju koristiti dodjeljivanje formalnih vjerojatnosti mogućim događajima, većina banaka to još ne koristi. Neovisno o tome, testiranje otpornosti na stres i dalje je veoma bitna stavka u upravljanju rizicima, osobito ako je skup stresnih scenarija dobro definiran i smatra se malo vjerojatnim, ali razumnim od strane osobe koja upravlja rizicima. Upravo zbog toga, testiranje otpornosti na stres nije samo teorijski postupak već utječe na stvarno donošenje odluka.

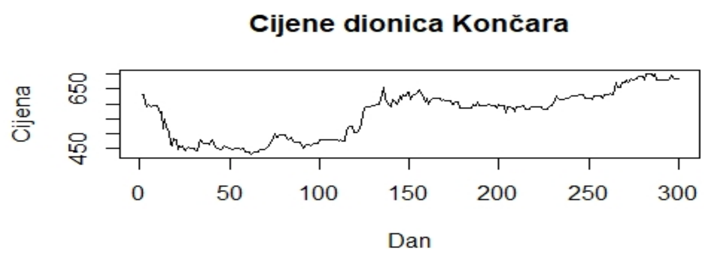
Pojedine banke, na primjer Deutsche Bank, radije koriste testiranje otpornosti na stres prilikom izračuna VaR-a nego neku od navedenih metoda za procjenu VaR-a. Odabir ovisi najviše o osobi koja upravlja rizicima te o metodi koju je ta osoba odabrala za procjenu

VaR-a. Na primjer, ako imamo portfelj koji se sastoji od puno opcija i ako bismo VaR procjenjivali metodom varijance i kovarijance, testiranje otpornosti na stres dalo bi bolje rezultate zato što tako možemo postići veće promijene u cijenama imovine te razne volatilnosti. Ovaj primjer govori o velikom potencijalu testiranja otpornosti na stres, ali često to nije toliko razvijeno u praksi. Više o tome može se naći u [17].

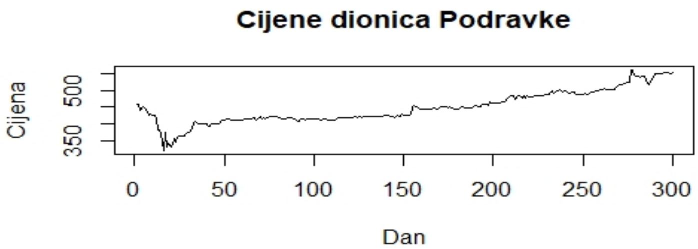
Testiranje otpornosti na stres može se primijeniti na sve tri metode procjene VaR-a i to na više načina. Mi ćemo ilustrirati primjer testiranja otpornosti na stres za sve metode, pri čemu ćemo koristiti povijesne podatke koji uključuju početak korona krize kako bismo imali slučaj stresnog scenarija. Uočimo da smo mogli uzeti i neke druge podatke koji uključuju krizu, npr. podatke za vrijeme financijske krize 2008. Spomenimo još ovdje jedan primjer testiranja otpornosti na stres za metodu varijance i kovarijance. Kako bismo u toj metodi uveli stresni scenarij, u formuli 3.2. se umjesto stvarne volatilnosti uzima proizvoljna vrijednost, veća od stvarne vrijednosti.

Primjeri testiranja otpornosti na stres

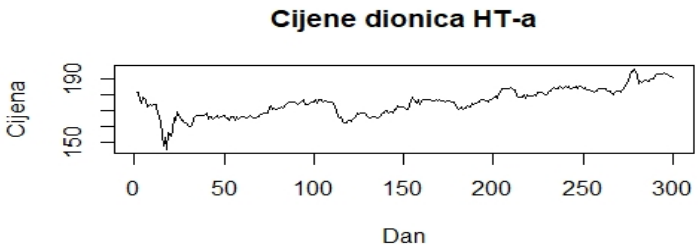
Pogledajmo sada primjer testiranja otpornosti na stres za povijesnu metodu. Ponovno imamo portfelj koji se sastoji od 50% dionica Končara, 30% dionica Podravke te 20% HT-ovih dionica. Umjesto razdoblja od 200 podataka koje smo promatrali u povijesnoj metodi, promatrat ćemo razdoblje od 300 podataka u periodu od 20. 2. 2020. do 14. 4. 2021. Uzeli smo ovo razdoblje kako bismo uključili početak korona krize koji smo u prošlom poglavlju željeli izbjeći. I dalje ćemo pretpostavljati da je $N = 1$, $\alpha = 1\%$ te da smo uložili 100 kuna. Primjer je ponovno rađen u programskom jeziku R.
Prikažimo prvo grafički kako su se mijenjale cijene dionica u danom periodu. To vidimo na grafovima 5.4, 5.5 i 5.6.



Slika 5.4: Grafički prikaz kretanje cijena dionica Končara od 20. 2. 2020. do 14. 4. 2021.



Slika 5.5: Grafički prikaz kretanje cijena dionica Podravke od 20. 2. 2020. do 14. 4. 2021.

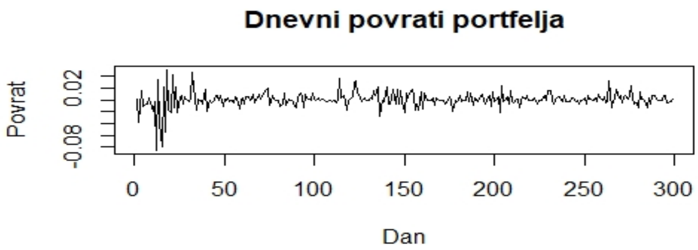


Slika 5.6: Grafički prikaz kretanje cijena dionica HT-a od 20. 2. 2020. do 14. 4. 2021.

Uočimo da su cijene dionica na početku prošle godine jako pale. Kretanje cijena ovih dionica nakon velikog pada u ožujku prošle godine razlikuju se u ovisnosti o kojoj dionici se radi. Cijene dionica Končara najdulje su se zadržavale na niskim razinama te su nakon toga imale veliki rast nakon kojeg je uslijedilo skoro pa linearno povećanje cijena dionica. Cijene dionica Podravke su nakon šoka u ožujku 2020. godine počele linearno rasti. Najzanimljiviji graf je graf kretanja cijena dionica HT-a u promatranom razdoblju. Uočimo da cijene dionica HT-a više osciliraju od cijena dionica Končara i Podravke.

Iz grafova možemo zaključiti da je za očekivati da će na ovim podacima naš portfelj ispasti rizičniji. Ponovimo sada isti postupak kao kod povijesne metode i kao kod testiranja unatrag povijesne metode da se uvjerimo u ovu tvrdnju. Prvo od svega računamo dnevne povrate svake dionice posebno pomoću formule 1.1. te nakon toga dnevne povrate portfelja pomoću formule 1.3..

Dobiju se dnevni povrati portfelja koji su prikazani na grafu 5.7.



Slika 5.7: Grafički prikaz dnevnih povrata portfelja od 20. 2. 2020. do 14. 4. 2021.

Nakon sortiranja uzmemo četvrti najgori povrat te je to traženi VaR. Dobije se da ćemo sutra najviše izgubiti 3.784 kuna sa sigurnošću od 99%. Kada smo imali podatke koji ne uključuje veliki pad cijena dionica početkom prošle godine, dobili smo da je naš portfelj manje rizičan, što smo i očekivali.

Proveli smo testiranje otpornosti na stres i za ostale dvije metode, ali ovdje izostavljamo objašnjenje budući da su postupci analogni postupcima iz 4. poglavlja. Metodom varijance i kovarijance dobijemo da je maksimalni sutrašnji gubitak s 99%-tnom sigurnošću jednak 3.103 kuna, a Monte Carlo metodom uz 1000 simulacija neparametarskim bootstrapom dobijemo da je jednodnevni 99%-tni VaR jednak -0.05419%, odnosno najveći sutrašnji gubitak s 99%-tnom sigurnošću je 5.419 kuna. U svim metodama procjene VaR-a dobili smo rizičniji portfelj kada smo uzeli podatke koji uključuju korona krizu što smo i očekivali.

Dodatak A

Kod u R-u

```
> library(readxl)
> podaci=read_excel("podaci.xlsx")
> #cijene dionica
> p1=podaci$Koncar[101:300]
> p2=podaci$Podravka[101:300]
> p3=podaci$HT[101:300]
> n=200
> #nacrtajmo kretanje cijena dionica
> plot(p1, type='l', xlab='Dan', ylab='Cijena',
+      main='Cijene dionica Končara')
> plot(p2, type='l', xlab='Dan', ylab='Cijena',
+      main='Cijene dionica Podravke')
> plot(p3, type='l', xlab='Dan', ylab='Cijena',
+      main='Cijene dionica HT-a')
> #računamo dnevne povrate
> r1=(p1[2:n]-p1[1:(n-1)])/p1[1:(n-1)]
> r2=(p2[2:n]-p2[1:(n-1)])/p2[1:(n-1)]
> r3=(p3[2:n]-p3[1:(n-1)])/p3[1:(n-1)]
> #nacrtamo na istoj skali dnevne povrate
> plot(r1, type='l', xlab='Dan', ylab='Povrat',ylim=c(-0.05,0.07),
+      main='Dnevni povrati dionice Končara')
> plot(r2, type='l', xlab='Dan', ylab='Povrat',ylim=c(-0.05,0.07),
+      main='Dnevni povrati dionice Podravke')
> plot(r3, type='l', xlab='Dan', ylab='Povrat',ylim=c(-0.05,0.07),
+      main='Dnevni povrati dionice HT-a')
> #računamo dnevne povrate portfelja
```

```
> w=c(0.5,0.3,0.2)
> r=matrix(c(r1,r2,r3),nrow=n-1,ncol=3)
> r_p=numeric(199)
> for (i in 1:199){
+   r_p[i]=sum(w*r[i,])
+ }
> #crtamo dnevne povrate portfelja
> plot(r_p, type='l', xlab='Dan', ylab='Povrat',
+      main='Dnevni povrati portfelja')
> #sortiramo podatke
> r_p=sort(r_p)
> #vrijednost VaR-a je treći po redu povrat,tj
> VaR_povijesna_metoda=r_p[3]
> #računamo korelacije između dnevnih povrata
> cor12=cor(r1,r2)
> cor23=cor(r2,r3)
> cor13=cor(r1,r3)
> #računamo standardne devijacije dnevnih povrata
> sd1=sd(r1)
> sd2=sd(r2)
> sd3=sd(r3)
> #kvantil normalne razdiobe
> q=qnorm(0.99)
> #var u terminima novčanih jedinica za svaku dionicu posebno
> var1=sd1*q*50
> var2=sd2*q*30
> var3=sd3*q*20
> #parametarski var u terminima novčanih jedinica za portfelj
> var_parametarski=sqrt(var1^2+var2^2+var3^2+2*var1*var2*cor12+
+       2*var2*var3*cor23+2*var1*var3*cor13)
> #cijene crobex-a i dnevni povrati
> p_m=podaci$crobex[101:300]
> r_m=(p_m[2:n]-p_m[1:(n-1)])/p_m[1:(n-1)]
> #nacrtajmo cijene indeksa crobex i dnevne povrate
> plot(p_m, type='l', xlab='Dan', ylab='Cijena',
+      main='Cijene dioničkog indeksa CROBEX')
> plot(r_m, type='l', xlab='Dan', ylab='Povrat',
+      main='Dnevni povrati dioničkog indexa CROBEX')
> #standardna devijacija crobexa
```

```
> sd_m=sd(r_m)
> #korelacije dionica i crobexa
> cor1=cor(r1,r_m)
> cor2=cor(r2,r_m)
> cor3=cor(r3,r_m)
> #beta dionica
> beta1=cor1*sd1/sd_m
> beta2=cor2*sd2/sd_m
> beta3=cor3*sd3/sd_m
> #ekvivalenti
> b1=beta1*50
> b2=beta2*30
> b3=beta3*20
> beta=b1+b2+b3
> #parametarski var u terminima novčanih jedinica
> #uz mapiranje portfelja
> var_mapiranje=beta*q*sd_m
> #radimo 1000 simulacija za procjene var-a
> B=1000
> set.seed(123)
> var=numeric(B)
> for(i in 1:B){
+   x=sample(r_p,n-1,replace=TRUE)
+   x=sort(x)
+   var[i]=x[3] }
> #računamo očekivanje koje je traženi var monte carlo simulacijom
> var_monte_carlo=mean(var)
> #crtamo procijenjene var-ove i očekivanje
> plot(var,pch=20, xlab='Simulacija',
+      main='Procjena VaR-a Monte Carlo metodom')
> abline(h=var_monte_carlo,col='red')
> #dolaze li povrati portfelja iz normalne razdiobe
> hist(r_p, probability = TRUE, breaks=20,
+      main='Histogram dnevnih povrata portfelja')
> q=seq(-0.04,0.04,0.001)
> sd_p=sd(r_p)
> points(q,dnorm(q,0,sd_p), type='l', col='red')
> ks.test(r_p, 'pnorm', mean=0,sd=sd_p )
> #crtanje VaR-ova
```

```
> plot(0,-100*VaR_povijesna_metoda, col='red', ylab='VaR',
+      ylim=c(2,2.2),xlim=c(-0.1,0.1))
> points(0,var_parametarski, col='blue')
> points(0,-100*var_monte_carlo, col='green')
> #testiranje unatrag
> #povijesna metoda
> p1_back=podaci$Koncar[100:299]
> p2_back=podaci$Podravka[100:299]
> p3_back=podaci$HT[100:299]
> r1_back=(p1_back[2:n]-p1_back[1:(n-1)])/p1_back[1:(n-1)]
> r2_back=(p2_back[2:n]-p2_back[1:(n-1)])/p2_back[1:(n-1)]
> r3_back=(p3_back[2:n]-p3_back[1:(n-1)])/p3_back[1:(n-1)]
> r_back=matrix(c(r1_back,r2_back,r3_back),nrow=n-1,ncol=3)
> r_p_back=numeric(199)
> for (i in 1:199){
+   r_p_back[i]=sum(w*r_back[i,]) }
> r_p_back=sort(r_p_back)
> VaR_povijesna_metoda_back=r_p_back[3]
> stvarni_gubitak=0.001137432
> #povijesna metoda
> #cijene dionica
> p1=podaci$Koncar
> p2=podaci$Podravka
> p3=podaci$HT
> n=300
> #nacrtajmo
> plot(p1, type='l', xlab='Dan', ylab='Cijena',
+      main='Cijene dionica Končara')
> plot(p2, type='l', xlab='Dan', ylab='Cijena',
+      main='Cijene dionica Podravke')
> plot(p3, type='l', xlab='Dan', ylab='Cijena',
+      main='Cijene dionica HT-a')
> #dnevni povrati
> r1=(p1[2:n]-p1[1:(n-1)])/p1[1:(n-1)]
> r2=(p2[2:n]-p2[1:(n-1)])/p2[1:(n-1)]
> r3=(p3[2:n]-p3[1:(n-1)])/p3[1:(n-1)]
> #nacrtamo na istoj skali
> plot(r1, type='l', xlab='Dan', ylab='Povrat',ylim=c(-0.15,0.2),
+      main='Dnevni povrati dionice Končara')
```

```
> plot(r2, type='l', xlab='Dan', ylab='Povrat',ylim=c(-0.15,0.2),
+      main='Dnevni povrati dionice Podravke')
> plot(r3, type='l', xlab='Dan', ylab='Povrat',ylim=c(-0.15,0.2),
+      main='Dnevni povrati dionice HT-a')
> #portfelj
> w=c(0.5,0.3,0.2)
> r=matrix(c(r1,r2,r3),nrow=n-1,ncol=3)
> r_p=numeric(299)
> for (i in 1:299){
+   r_p[i]=sum(w*r[i,]) }
> #crtamo
> plot(r_p, type='l', xlab='Dan', ylab='Povrat',
+      main='Dnevni povrati portfelja')
> #sortiramo
> r_p=sort(r_p)
> #vrijednost VaR-a je četvrti po redu povrat,tj
> VaR=r_p[4]
> VaR
> #metoda varijance i kovarijance
> #računamo korelacije između dnevnih povrata
> cor12=cor(r1,r2)
> cor23=cor(r2,r3)
> cor13=cor(r1,r3)
> #računamo standardne devijacije dnevnih povrata
> sd1=sd(r1)
> sd2=sd(r2)
> sd3=sd(r3)
> #kvantil normalne razdiobe
> q=qnorm(0.99)
> #var u terminima novčanih jedinica za svaku dionicu posebno
> var1=sd1*q*50
> var2=sd2*q*30
> var3=sd3*q*20
> #parametarski var u terminima novčanih jedinica za portfelj
> var_parametarski=sqrt(var1^2+var2^2+var3^2+2*var1*var2*cor12+
+                        2*var2*var3*cor23+2*var1*var3*cor13)
> var_parametarski
> #monte carlo
> #radimo 1000 simulacija za procjene var-a
```

```
> B=1000
> set.seed(123)
> var=numeric(B)
> for(i in 1:B){
+   x=sample(r_p,n-1,replace=TRUE)
+   x=sort(x)
+   var[i]=x[3] }
> #računamo očekivanje koje je traženi var monte carlo simulacijom
> var_monte_carlo=mean(var)
> #testiranje unatrag
> library(readxl)
> podaci=read_excel("back.xlsx")
> VaR_povijesna_metoda_back=numeric(921)
> var_parametarska=numeric(921)
> var_monte_carlo_back=numeric(921)
> stvarni=numeric(921)
> for (i in 0:920) {
+ od=1+i
+ do=200+i
+ p1=podaci$Koncar[od:do]
+ p2=podaci$Podravka[od:do]
+ p3=podaci$HT[od:do]
+ n=200
+ r1=(p1[2:n]-p1[1:(n-1)])/p1[1:(n-1)]
+ r2=(p2[2:n]-p2[1:(n-1)])/p2[1:(n-1)]
+ r3=(p3[2:n]-p3[1:(n-1)])/p3[1:(n-1)]
+ w=c(0.5,0.3,0.2)
+ r=matrix(c(r1,r2,r3),nrow=n-1,ncol=3)
+ r_p=numeric(199)
+ for (j in 1:199){
+   r_p[j]=sum(w*r[j,])
+ }
+ if(i==0) {}
+   else {stvarni[i]=r_p[1]}
+ r_p=sort(r_p)
+ VaR_povijesna_metoda_back[i+1]=r_p[3]
+ cor12=cor(r1,r2)
+ cor23=cor(r2,r3)
+ cor13=cor(r1,r3)
```

```
+ #računamo standardne devijacije dnevnih povrata
+ sd1=sd(r1)
+ sd2=sd(r2)
+ sd3=sd(r3)
+ #kvantil normalne razdiobe
+ q=qnorm(0.99)
+ #var u terminima novčanih jedinica za svaku dionicu posebno
+ var1=sd1*q*50
+ var2=sd2*q*30
+ var3=sd3*q*20
+ #parametarski var u terminima novčanih jedinica za portfelj
+ var_parametarska[i+1]=sqrt(var1^2+var2^2+var3^2+2*var1*var2*cor12+
+                        2*var2*var3*cor23+2*var1*var3*cor13)
+ B=1000
+ set.seed(123)
+ var=numeric(B)
+ for(k in 1:B){
+   x=sample(r_p,n-1,replace=TRUE)
+   x=sort(x)
+   var[k]=x[3]
+ }
+ #računamo očekivanje koje je traženi var monte carlo simulacijom
+ var_monte_carlo_back[i+1]=mean(var)
+ }
> var_pov=VaR_povijesna_metoda_back*100
> var_par=var_parametarska*(-1)
> var_mc=var_monte_carlo_back*100
> stvarni[921]=0.5*0+0.3*(-0.00722)+0.2*0.005249
> stvarni=stvarni*100
> matrica=matrix(c(var_pov,var_par,var_mc,stvarni), nrow=921)
> pov=0
> mvk=0
> mc=0
> for( i in 1:921){
+   if(matrica[i,1]>matrica[i,4]) pov=pov+1
+   if(matrica[i,2]>matrica[i,4]) mvk=mvk+1
+   if(matrica[i,3]>matrica[i,4]) mc=mc+1
+ }
> broj=1:921
```

```
> plot(broj, matrica[,4], main='Povijesna metoda i stvarni gubici',
+      ylab='Vrijednosti', xlab='Broj', pch=20)
> points(broj, matrica[,1], col='red', pch=20)
> plot(broj, matrica[,4],
+      main='Metoda varijance i kovarijance i stvarni gubici',
+      ylab='Vrijednosti', xlab='Broj',pch=20)
> points(broj, matrica[,2], col='red',pch=20)
> plot(broj, matrica[,4], main='Monte Carlo metoda i stvarni gubici',
+      ylab='Vrijednosti', xlab='Broj',pch=20)
> points(broj, matrica[,3], col='red',pch=20)
```

Bibliografija

[1] E. Adamko P., Spuchlakova i K. Valaškova, *The history and ideas behind VaR*, 2015, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212567115006073, (svibanj, 2021.).

[2] C. Alexander, *Market Models: A Guide to Financial Data Analysis*, John Wiley and Sons, Inc, 2001.

[3] B. Basrak, *Monte Carlo metode*, 2016, https://web.math.pmf.unizg.hr/~bbasrak/pdf_files/FinPrak/FPchap1.pdf, (preuzeto 10.7.2021.).

[4] B. Basrak, *Analiza podataka*, 2017, https://web.math.pmf.unizg.hr/~bbasrak/pdf_files/FinPrak/FPchap3.pdf, (preuzeto 7.6.2021.).

[5] J. Berkowitz, *A Coherent Framework for Stress Testing,"*, Jurnal of Risk **2** (2000), 1–11.

[6] T. Bollerslev, *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Jurnal of Econometrica **31** (1986), br. 3, 307–327.

[7] P. Brandimarte, *Handbook in Monte Carlo Simulation*, John Wiley and Sons, Inc., 2014.

[8] R. F. Engle, *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica **50** (1982), br. 4, 987–1007.

[9] HNB, *Financijski sustav RH*, 2015, https://www.hnb.hr/temeljne-funkcije/financijska-stabilnost/uloge-i-suradnja/financijski-sustav-rh, (svibanj, 2021.).

[10] J. C. Hull, *Options, futures, and other derivatives*, Pearson Education, Inc., 2015.

[11] P. Jorion, *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, The McGraw-Hill Companies, Inc, 2007.

[12] W. Kenton, *Monte Carlo Simulation*, 2021, https://www.investopedia.com/terms/m/montecarlosimulation.asp, (srpanj, 2021.).

[13] D. Mikulčić, *Value at Risk*, 2001, https://www.hnb.hr/documents/20182/121891/p-007.pdf/b51d2a34-82ad-4fcb-a7c1-1a480f980f4a, (preuzeto 11.7.2021.).

[14] J. P. Morgan/Reuters, $RiskMetrics^{TM} - TechnicalDocument$, 1996, https://www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-aee2-3449d5c7e95a, (svibanj, 2021.).

[15] R Core Team, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2020, https://www.R-project.org/.

[16] RStudio Team, *RStudio: Integrated Development Environment for R*, RStudio, PBC., Boston, MA, 2020, http://www.rstudio.com/.

[17] F. Saita, *Value at Risk and Bank Capital Managment*, Elsevier Inc., 2007.

[18] N. Sandrić i Z. Vondraček, *Vjerojatnost- predavanja*, 2019, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/vjer/files/vjer_predavanja.pdf, (preuzeto 7.6.2021.).

[19] T. Segal, *Common Methods of Measurement for Investment Risk Management*, 2020, https://www.investopedia.com/ask/answers/041415/what-are-some-common-measures-risk-used-risk-management.asp, (svibanj, 2021.).

Sažetak

Rizičnost vrijednosti, poznatija kao VaR, jedna je od mjera rizika u financijama koja se koristi širom svijeta, a predstavlja najveći mogući gubitak u nekom razdoblju. VaR možemo procijeniti na više načina. U ovom radu opisane su tri metode procjene VaR-a, a to su povijesna metoda, metoda varijance i kovarijance te Monte Carlo metoda.

Povijesna metoda procjenjuje VaR pomoću povijesnih podataka te pretpostavlja da će se distribucija povrata u budućnosti ponašati isto kao u prošlosti. Metoda varijance i kovarijance parametarska je metoda koja procjenjuje VaR pomoću standardne devijacije i korelacije slučajnih varijabli za koje se pretpostavlja da su normalno distribuirane. Monte Carlo metoda, isto kao i povijesna metoda, spada u simulacijske metode. Ova metoda simulira veliki broj mogućih ishoda te računa VaR za svaki od tih scenarija. Uzimanjem aritmetičke sredine tako dobivenih VaR-ova dobijemo procjenu traženog VaR-a.

Nakon procjene VaR-a bilo kojom od ovih metoda, potrebno je provesti testiranje unatrag. Testiranje unatrag je metoda u kojoj provjeravamo kvalitetu modela tako što procjenjujemo VaR u prošlosti te ga uspoređujemo sa stvarnim gubicima. Također, može se provesti testiranje otpornosti na stres kako bismo vidjeli ponašanje metoda za procjenu VaR-a u stresnim situacijama kao što su na primjer krizna vremena.

U ovom radu, uz prethodno spomenutu teoriju, napravljena je primjena metoda za procjenu VaR-a te testiranja unatrag i testiranja otpornosti na stres na portfelj koji se sastoji od tri hrvatske dionice.

Summary

Value at Risk (VaR) is one of the most popular risk measures in finance used around the world and it represents the largest possible loss over a period of time. VaR can be estimated with a few different methods. This paper describes three methods for estimating VaR, the historical method, the variance-covariance approach, and the Monte Carlo method.

The historical method estimates VaR using historical data and assumes that the distributions of returns in the future will behave the same as in the past. The variance-covariance approach is a parametric method that estimates VaR using standard deviations and correlations of random variables that are assumed to be normally distributed. The Monte Carlo method is a simulation method same as the historical method. This method simulates a large number of hypothetical scenarios and calculates VaR for each of these scenarios. Our required VaR is the average of all of these values.

After estimating VaR with one mentioned method, backtesting is needed. Backtesting is a procedure in which the quality of the model is checked by calculating VaR in past and comparing results with actual losses. Also, we can do stress testing to estimate VaR in stress scenarios like the financial crisis.

This thesis also shows the application of methods, backtesting, and stress testing on a portfolio with three Croatian stocks.

Životopis

Moje ime je Marija Mutak. Rođena sam 13. 3. 1996. u Zaboku. Osnovnu školu završila sam u Bedekovčini te sam nastavila svoje obrazovanje u Gimnaziji Antuna Gustava Matoša u Zaboku, smjer opća gimnazija. Godine 2014. upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2019. godine te sam stekla titulu prvostupnice matematike. Iste godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.