Sferna geometrija

Pižir, Kristijan

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:372417

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-02**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kristijan Pižir

SFERNA GEOMETRIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Diplomski rad posvećujem svojim roditeljima koji su mi omogućili dugotrajno studiranje i cijelim putem bili uz mene i nikad nisu gubili nadu.

Zahvaljujem mentorici na prijedlogu ove vrlo zanimljive teme te pomoći pri izradnji rada.

Zahvaljujem se Eleni, kumovima, prijateljima i rodbini na pomoći, strpljenju i razumijevanju tijekom posljednjih 5 godina studiranja te tijekom pisanja ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Ovo je rad o sfernoj geometriji i njenoj primjeni u nastavi matematike. Cilj ovog diplomskog rada je proučiti temeljne definicije i teoreme sferne geometrije. Osim toga, kako se sferna geometrija ne proučava u redovnoj nastavi, cilj je i osmisliti aktivnosti za dodatnu nastavu matematike za srednjoškolske učenike u kojima bi oni istražili osnovne pojmove sferne geometrije. Naglasak je na aktivnostima s Lenartovom sferom koja će olakšati usporedbu sferne i ravninske euklidske geometrije.
Rad je podijeljen na četiri poglavlja. U prvom poglavlju promotrit ćemo osnovna svojstva sferne geometrije. U drugom poglavlju fokus je na sfernim trokutima i sfernoj trigonometriji te njezinoj usporedbi s euklidskom trigonometrijom. Treće poglavlje proučava sferna gibanja, a posljednje poglavlje predstavlja petosatnu radionicu sferne geometrije na dodatnoj nastavi u srednjoj školi.

Poglavlje 1

Sferna geometrija

U ovom poglavlju opisati ćemo osnovna svojstva i pojmove sferne geometrije. Sferna geometrija, i iz nje izvedena eliptička neeuklidska geometrija, pored hiperboličke geometrije, prva je prepoznata geometrija u kojoj ne vrijedi poznati Peti Euklidov postulat o paralelama:

> Ako pravac koji siječe dva druga pravca tvori s njima s iste strane unutarnje kutove čiji je zbroj manji od dva prava kuta, ta dva pravca neograničeno produžena sastaju se s one strane na kojoj je taj zbroj manji od dva prava kuta.

Dugo proučavana zbog svojih praktičnih primjena u navigaciji i astronomiji, sferna geometrija ima mnoge sličnosti i poveznice, ali i mnoge razlike u odnosu na euklidsku geometriju. Tvrdnje u ovom diplomskom radu odnosit će se na samu sferu, a ne na točke u prostoru koje leže unutar ili izvan sfere. Proučavat ćemo tzv. unutrašnju (intrinzičnu) geometriju sfere, geometriju koju doživljava "mali mravac koji stanuje na sferi". Geometrija sfere ujedno je i geometrija Zemlje, ako Zemlju aproksimiramo sferom. Ranije u povijesti nije bilo uočeno da ona nosi geometriju drukčiju od euklidske ravnine, iako do putovanja u svemir, sva mjerenja i putovanja na Zemlji su koristila "unutrašnju geometriju sfere". Ipak, za proučavanje sferne geometrije prikladno nam je koristiti "ambijent" $\mathbb{R}^3$, jer nam omogućuje lakši zapis i račun. U tu svrhu najprije ćemo se podsjetiti svojstava $\mathbb{R}^3$ kao unitarnog prostora s vektorskim produktom. Osim pravaca, definirat ćemo i ravnine kao nove geometrijske objekte.

1.1 Prostor $\mathbb{R}^3$

Kao što to činimo i za $\mathbb{R}^2$, skup $\mathbb{R}^3$ organiziramo najprije u vektorski prostor tako da definiramo operacije zbrajanja i množenja skalarom, za koje se može pokazati da zadovoljavaju svojstva iz definicije vektorskog prostora, pa za vektore $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$, vrijedi:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$
$$cx = (cx_1, cx_2, cx_3).$$

Potom $\mathbb{R}^3$ snabdijevamo euklidskim skalarnim produktom

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Time dobivamo euklidski prostor $\mathbb{E}^3$ u kojem vrijede analogna svojstva (uključujući Pitagorin teorem) kao u $\mathbb{E}^2$. U $\mathbb{E}^3$ dodatno možemo definirati vektorski produkt (umnožak).

Definicija 1.1.1. *Vektorski produkt vektora $u, v \in \mathbb{R}^3$ je jedinstveni vektor $u \times v$ takav da za svaki $x \in \mathbb{R}^3$ vrijedi*

$$\langle u \times v, x\rangle = det(x, u, v).$$

Prethodno možemo zapisati kao jednakost zbog svojstava determinante, a uočavamo i da je vektorski produkt definiran indirektno, pomoću tzv. mješovitog produkta (pomoću determinante), tj. postojećeg skalarnog produkta.

Teorem 1.1.2. *Za vektorski produkt vrijedi:*

i. *$u \times v$ je dobro definiran;*

ii. $\langle u \times v, u\rangle = \langle u \times v, v\rangle = 0$*;*

iii. $u \times v = -v \times u$*;*

iv. $\langle u \times v, w\rangle = \langle u, v \times w\rangle$*;*

v. $(u \times v) \times w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u$*.*

Dokaz.

i. Vektor $u \times v$ je dobro definiran. Drugim riječima, postoji jedinstven vektor definiran navedenim pravilom. Dokaz se poziva na Teorem o reprezentaciji linearnog funkcionala.
Taj teorem kaže da za linearni funkcional f definiran na realnom unitarnom prostoru V postoji jedinstven vektor v iz V takav da je $f(x) = \langle v, x\rangle$.
Poznato je da je preslikavanje $x \mapsto det(x, u, v)$, za zadane vektore u, v linearni funkcional: $\mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$. Prema tome, postoji jedinstveni vektor x kojim je on reprezentiran pomoću skalarnog produkta, $det(x, u, v) = \langle z, x\rangle$. Sada definiramo $z = u \times v$.

ii. Koristimo svojstva determinante pa je tako $\langle u \times v, u\rangle = det(u, v, u)$, a determinanta kojoj su dva retka ili stupca ista, jednaka je 0.

iii. Antikomutativnost vektorskog množenja je posljedica zamjene redaka (stupaca) u determinanti.

iv. Zbog cikličke zamjene vektora u determinanti i komutativnosti skalarnog produkta vrijedi

$$\langle u \times v, w \rangle = det(u, v, w) = det(v, w, u) = \langle v \times w, u \rangle = \langle u, v \times w \rangle.$$

v. Za dokaz ovog svojstva koristimo linearnost. Uzmemo dva linearno nezavisna vektora ϵ_1, ϵ_2 i definiramo $\epsilon_3 = \epsilon_1 \times \epsilon_2$. Tada, zbog svojstava determinante, vrijede i sljedeći odnosi $\epsilon_1 = \epsilon_2 \times \epsilon_3$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 \times \epsilon_1$. Provjerimo prvo tvrdnju za te vektore. S lijeve strane formule koju dokazujemo imamo

$$(\epsilon_1 \times \epsilon_2) \times \epsilon_3 = \epsilon_3 \times \epsilon_3 = 0,$$

a s desne strane je

$$\langle \epsilon_1, \epsilon_3 \rangle \epsilon_2 - \langle \epsilon_2, \epsilon_3 \rangle \epsilon_1 = 0\epsilon_2 - 0\epsilon_1 = 0.$$

Analogno, za ostale poretke vektore vrijedi

$$(\epsilon_2 \times \epsilon_3) \times \epsilon_3 = -\epsilon_2 = \langle \epsilon_2, \epsilon_3 \rangle \epsilon_3 - \langle \epsilon_3, \epsilon_3 \rangle \epsilon_2,$$

$$(\epsilon_3 \times \epsilon_1) \times \epsilon_3 = \epsilon_1 = \langle \epsilon_3, \epsilon_3 \rangle \epsilon_1 - \langle \epsilon_1, \epsilon_3 \rangle \epsilon_3.$$

Zbog linearnosti imamo

$$(u \times v) \times \epsilon_3 = \langle u, \epsilon_3 \rangle v - \langle v, \epsilon_3 \rangle u.$$

Zbog simetrije analogni identiteti vrijede i ako ϵ_3 zamijenimo s ϵ_1 ili ϵ_2. Konačno, zbog linearnosti, imamo

$$(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u.$$

□

Korolar 1.1.3.

i. $u \times v = 0$ *ako i samo ako su u, v kolinearni (koordinate su im proporcionalne);*

ii. *Ako je* $u \times v \neq 0$*, tada* $\{u, v, u \times v\}$ *čini bazu za* $\mathbb{R}^3$*;*

iii. $\langle u \times v, w \times z\rangle = \langle u, w\rangle\langle v, z\rangle - \langle v, w\rangle\langle u, z\rangle$*;*

iv. $||u \times v||^2 = ||u||^2||v||^2 - \langle u, v\rangle^2$*. (**Lagrangeov identitet**)*

Dokaz.

i. $u \times v = 0 \iff det(u, v, x) = 0$ za svaki x, što je moguće ako i samo ako su u, v linearno zavisni.

ii. Imamo tri vektora $u, v, u \times v \neq 0$. Zbog svojstva (i.) znamo da su u, v linearno nezavisni. Da bismo dokazali da čine bazu, dovoljno je pokazati da su sva tri vektora linearno nezavisni.
Ako postoje brojevi λ, μ, ν takvi da

$$\lambda u + \mu v + \nu(u \times v) = 0,$$

skalarnim množenjem ove jednadžbe s $u \times v$ dobivamo $\nu(u \times v)^2$. Kako vektor $u \times v$ nije nul-vektor, nije mu ni skalarni produkt jednak 0, pa skalar ν mora biti 0.
Vektorskim množenjem gornje jednadžbe s v dobivamo

$$\lambda(u \times v) = 0,$$

a vektorskim množenjem s u dobivamo

$$\mu(v \times u) = 0,$$

pa slijedi $\lambda = \mu = \nu = 0$. Stoga su vektori linearno nezavisni.

iii. Vrijedi

$$\langle u \times v, w \times z\rangle = \det(u, v, w \times z) = \det(v, w \times z, u) = \langle v \times (w \times z), u\rangle.$$

Primijenimo tvrdnju (v.) Teorema 1.1.2. i dobivamo rezultat.

iv. Lagrangeov identitet direktna je posljedica prethodne tvrdnje za $w = u, z = v$.

$\square$

Nadalje, kao i u $\mathbb{E}^2$ uvodimo **ortonormiranu trojku**, što je zapravo ortonormirana baza za $\mathbb{E}^3$. Prikaz proizvoljnog vektora u takvoj je bazi jedinstven, a koeficijenti u rastavu se određuju pomoću skalarnog produkta.

Pravce u $\mathbb{E}^3$ definiramo kao i u $\mathbb{E}^2$, dakle zadane točkom i vektorom smjera. Time dobivamo parametarsku jednadžbu pravaca u $\mathbb{E}^3$. Uočavamo da ostale jednadžbe pravaca nisu analogne jednadžbama pravaca u $\mathbb{E}^2$.

Zatim definiramo ravnine. **Ravnina** je podskup od $\mathbb{E}^3$ koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. Nije sadržan niti u jednom pravcu;
2. Pravac koji je spojnica bilo kojih točaka tog skupa je sadržan u njemu;
3. Taj skup ne sadržava sve točke od $\mathbb{E}^3$.

Sljedeći teorem govori nam kako se ravnina još može zadati:

Teorem 1.1.4.

i. Točkom P i dvama nekolinearnim vektorima v, w, pišemo $P + [v, w]$;

ii. Trima nekolinearnim točkama P, Q, R, pišemo PQR;

iii. Točkom P i (jediničnim) vektorom normale N; jednadžba $\langle X - P, N\rangle = 0$;

Pritom smo označili $[v, w] = tv + sw : t, s \in \mathbb{R}$, te govorimo o linearnoj ljusci ili potprostoru razapetom vektorima v, w.

Dokaz.

i. Pokazujemo da je skup $P + [v, w]$ ravnina (nazovimo ju α). Neka su $Q = P + v$ i $R = P+w$ dvije točke skupa α. Kako vektori $Q-P = v$ i $R-P = w$ nisu kolinearni, ni točke P, Q, R nisu kolinearne, to α nije sadržano u nekom pravcu. Time je zadovoljen prvi uvjet iz definicije ravnine.
Ako je $X = P + v \times w$, vidimo da $X \notin \alpha$ jer je skup linearno nezavisan. Stoga, nije svaka točka iz $\mathbb{E}^3$ u α, čime je zadovoljen i treći uvjet iz definicije ravnine.
Konačno, neka su

$$X = P + x_1 v + x_2 w, \quad Y = P + y_1 v + y_2 w$$

točke iz α, te neka je $t \in \mathbb{R}$. Generirajmo s tim točkama pravac

$$\begin{aligned}(1-t)X + tY &= (1-t)P + tP + ((1-t)x_1 + ty_1)v + ((1-t)x_2 + ty_2)w \\ &= P + ((1-t)x_1 + ty_1)v + ((1-t)x_2 + ty_2)w.\end{aligned}$$

Očito je pravac također sadržan u α. Prema tome, α je ravnina.

ii. Neka su P, Q, R nekolinearne točke i neka je $v = Q - P$ i $w = R - P$. Tada, prema [i.], $P + [v, w]$ je ravnina koja sadrži P, Q i R.
Pokazujemo jedinstvenost. Neka je Π neka ravnina koja sadrži P, Q i R. Tada $P + \lambda v + \mu w = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P) = (1 - \lambda - \mu)P + \lambda Q + \mu R = (1 - \lambda - \mu)P + (\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\lambda + \mu})Q + (\frac{\mu}{\lambda + \mu})R$. Ovime je prikazana tipična točka iz $P + [v + w]$ kao točka na pravcu PX, pri čemu je

$$X = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}Q + \frac{\mu}{\lambda + \mu}R$$

točka na pravcu QR. Stoga, svaka ravnina koja sadrži P, Q i R mora sadržavati i $P + [v, w]$. Ali, ako Π sadrži točku S koja nije u $P + [v, w]$, tada je $\{S - P, v, w\}$ linearno nezavisan skup. Ako je Z bilo koja točka iz $\mathbb{E}^3$, tada

$$Z - P = \lambda v + \mu w + \nu(S - P),$$

za neke λ, μ i ν.
Može se provjeriti da je

$$Z = \nu S + (1 - \nu)\left(P + \frac{\lambda}{1 - \nu}v + \frac{\mu}{1 - \nu}w\right),$$

što pokazuje da je svaka točka iz $\mathbb{E}^3$ na pravcu koji povezuje S sa točkom iz Π. To je nemoguće jer Π ne sadrži cijeli $\mathbb{E}^3$. Zaključujemo da je $\Pi = P + [v, w]$ i da je ravnina koja sadrži P, Q i R jedinstvena.

iii. Konačno, povezujemo karakterizacije ravnine (i.) i (ii.). Neka je dana jedinična normala N. Tada možemo odabrati v, w tako da je $\{N, v, w\}$ ortonormiran skup. Za svaki $X \in \mathbb{E}^3$ možemo pisati

$$X - P = \langle X - P, N\rangle N + \langle X - P, v\rangle v + \langle X - P, w\rangle w,$$

što pokazuje da $X - P$ leži u $[v, w]$ ako i samo ako $\langle X - P, N\rangle = 0$. Stoga, $\{X | \langle X - P, N\rangle = 0\}$ je ravnina.

$\square$

1.2 Pravci u $\mathbb{S}^2$

Sfera čiju geometriju proučavamo je **jedinična sfera**:

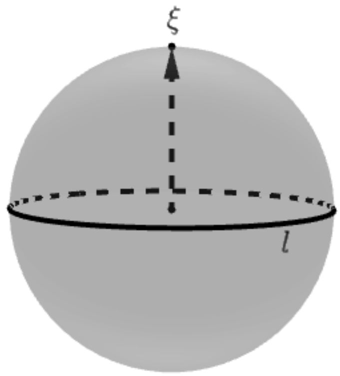
$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{E}^3 : \|x\| = 1\}.$$

Definicija 1.2.1. *Neka je ξ proizvoljan jedinični vektor. Tada*

$$l = \{x \in \mathbb{S}^2 : \langle x, \xi \rangle = 0\},$$

nazivamo ***pravcem*** *na $\mathbb{S}^2$. Vektor ξ naziva se* ***pol*** *od l.*

Napomena: Sferna geometrija je neeuklidska. Stoga, svaki put kada neki objekt prikazujemo slikom, distorzije su neizbježne. Slike koje vjerno predočuju jedan aspekt (npr. zakrivljenost linija) iskriviti će neke druge aspekte (npr. duljine i kutove).



Slika 1.1: Velika kružnica l s polom ξ.

Jednadžbom $\langle X - P, N \rangle = 0$ definirana je ravnina u $\mathbb{R}^3$ koja prolazi kroz središte sfere (ishodište) i kojoj je vektor ξ jedinični vektor normale. Prema tome, presijecanjem sfere ravninom kroz središte dobivamo kružnicu na sferi najvećeg mogućeg radijusa, tj. radijusa jednakog radijusu sfere. Te kružnice nazivamo velikim (glavnim) kružnicama na sferi. Ako *putujemo ravno naprijed* na $\mathbb{S}^2$, tada putujemo po velikim kružnicama. Geometrijski je jasno da pravci na $\mathbb{S}^2$ ne mogu biti paralelni (uvijek se sijeku), što je razlika u odnosu na euklidsku geometriju.

Antipodalne točke su točke $P, Q \in \mathbb{S}^2$ takve da je $P = -Q$. Dva se pravca na $\mathbb{S}^2$ sijeku u dvije antipodalne točke.

Teorem 1.2.2.

1. *Antipodalna točka pola pravca l također je pol pravca l.*
2. *Antipodalna točka neke točke koja leži na pravcu također leži na tom pravcu.*

Sljedeća tvrdnja vrijedi i u euklidskoj ravnini (naravno, bez pretpostavke o antipodalnim točkama).

Teorem 1.2.3. *Dvije različite točke P, Q na $\mathbb{S}^2$ koje nisu antipodalne određuju jedinstven pravac PQ.*

Dokaz. Određujemo pravac zadan s dvije točke $P, Q \in \mathbb{S}^2$ koje nisu antipodalne. Trebamo odrediti njegov pol. Po definiciji, to će biti jedinični vektor ξ koji je ortogonalan i na P i na Q. Dobar kandidat je

$$\xi = \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|}$$

jer kako P, Q nisu antipodalne, njihov vektorski produkt nije 0. Time smo pokazali egzistenciju takvog pravca. Dokazujemo još jedinstvenost. Ako je η neki drugi pol pravca, tada vrijedi $\langle \eta, P\rangle = \langle \eta, Q\rangle = 0$. Po Teoremu 1.1.2., tvrdnja v., slijedi $(P \times Q) \times \eta = 0$. Prema tome, η je kolinearan s $P \times Q$. Kako je i jediničan, vrijedi $\eta = \pm(P \times Q)$. Prema tome, traženi pravac je jedinstven. □

Zadatak. Odredite jednadžbu pravca zadanog točkama $P = (1, 0, 0)$, $Q = \frac{\sqrt{5}}{5}(2, -1, 0)$.

Rješenje. Prvo računamo vektorski produkt $P \times Q$:

$$P \times Q = \left(0, 0, -\tfrac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Zatim određujemo pol traženog pravca:

$$\xi = \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|} = \frac{\left(0, 0, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}{\|\left(0, 0, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\|} = (0, 0, -1).$$

Dakle, jednadžba traženog pravca je:

$$l = \{x \in \mathbb{S}^2 : \langle x, (0, 0, -1)\rangle = 0\}.$$

Raspisivanjem skalarnog produkta dobivamo jednadžbu ravnine $z = 0$ kojom presijecamo sferu da bismo dobili traženi pravac na sferi.

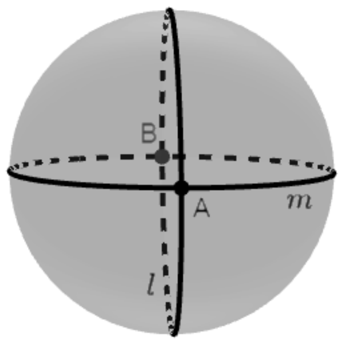
Možemo se zapitati što je s antipodalnim točkama, određuju li one jedinstveni pravac? Odgovor je ne. Ako zamislimo Zemlju i njene geografske polove te meridijane kroz njih, vidimo da kroz polove prolazi beskonačno mnogo pravaca.
Sljedeća je tvrdnja drukčija nego u euklidskoj ravnini:

Teorem 1.2.4. *Dva različita pravca se sijeku u* ***dvije točke*** *i one su antipodalne.*

Dokaz. Neka su polovi pravaca označeni s ξ, η. Vrijedi $\xi \neq \pm\eta$. Prema tome, $\xi \times \eta \neq 0$. Dakle, dvije točke

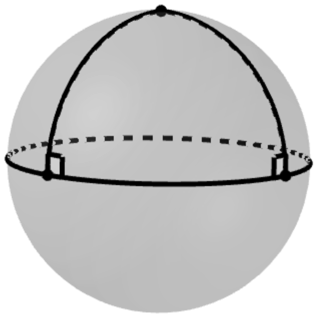
$$\pm\xi \times \eta$$

leže na oba pravca (tj. zadovoljavaju $\langle x, \xi \rangle = 0$ i $\langle x, \eta \rangle = 0$). To su upravo dvije točke presjeka. ◻



Slika 1.2: Dvije velike kružnice l i m sijeku se u antipodalnim točkama A i B.

Korolar 1.2.5. *Nikoja dva pravca u $\mathbb{S}^2$ nisu paralelna.*



Slika 1.3: I okomice na veliku kružnicu se sijeku.

1.3 Udaljenost točaka

Iduće pitanje koje se postavlja je kako mjeriti udaljenost između dvije točke na sferi?

Definicija 1.3.1. *Neka su $P, Q \in \mathbb{S}^2$. **Udaljenost** na sferi definiramo kao*

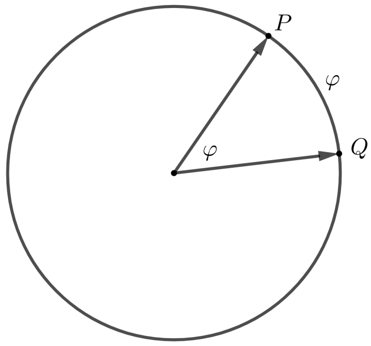
$$d(P, Q) = \cos^{-1}\langle P, Q\rangle \in [0, \pi],$$

pri čemu je $\cos^{-1} = \arccos$.

Formula za kut vektora glasi

$$cos\varphi = \frac{\langle a, b\rangle}{||a||||b||}.$$

Primjenom te formule za točke $P, Q \in \mathbb{S}^2$ (norme su im 1) dobivamo $\cos\varphi = \langle P, Q\rangle$. Dakle, mjerimo kut između vektora, pri čemu je mjera kuta realni broj $\in [0, \pi]$. Radijanska mjera kuta odgovara duljini pripadnog kružnog luka na kružnici radijusa 1, što objašnjava mjerenje duljine na jediničnoj sferi kao mjerenje kuta radijanskom mjerom.



Slika 1.4: Udaljenost u sfernoj geometriji.

Teorem 1.3.2. *Funkcija d je metrika na $\mathbb{S}^2$, tj. ako su $P, Q, R \in \mathbb{S}^2$ tada vrijedi*

i. $d(P, Q) \geq 0$*;*

ii. $d(P, Q) = 0$ *ako i samo ako* $P = Q$*;*

iii. $d(P, Q) = d(Q, P)$*;*

iv. $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$.

Korolar 1.3.3. *Ako u tvrdnji iv. vrijedi jednakost, tada su točke kolinearne.*

Zadatak. Zadane su tri točke

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)\,, Q = \left(\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, 0\right), R = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right).$$

Kako možemo provjeriti jesu li točke P, Q i R kolinearne?

1.način: Odredimo pravac PQ te provjerimo pripada li i točka R tom pravcu.

$$P \times Q = \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}\right).$$
$$\xi = \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right)$$

Dakle, jednadžba traženog pravca je:

$$l = \{x \in \mathbb{S}^2 : \langle x, \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \tfrac{2}{\sqrt{10}}, \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right)\rangle = 0\}.$$

Uvrštavanjem točke R u jednadžbu pravca lako vidimo da i ona pripada pravcu.

2.način: Provjeravamo jesu li točke kolinearne koristeći karakterizaciju kolinearnosti pomoću udaljenosti. Prvo računamo međusobne udaljenosti točaka P, Q, R:

$$\begin{aligned} d_1 &= d(P, Q) = \cos^{-1}\langle P, Q\rangle = \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{\sqrt{14}}\right) \\ d_2 &= d(Q, R) = \cos^{-1}\langle Q, R\rangle = \cos^{-1}\left(-\tfrac{3}{7}\right) \\ d_3 &= d(P, R) = \cos^{-1}\langle P, R\rangle = \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{\sqrt{14}}\right) \end{aligned}$$

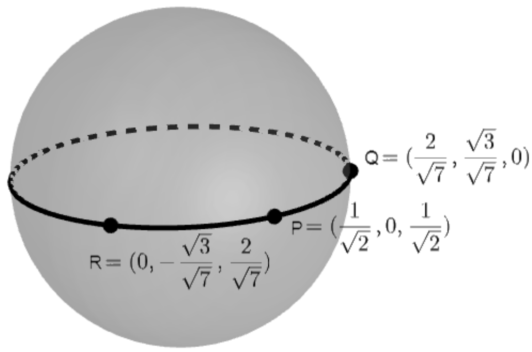
Zatim koristimo formulu za zbroj

$$\cos^{-1}(x) \pm \cos^{-1}(y) = \cos^{-1}\left(xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right).$$

Dobivamo

$$d_1 + d_3 = \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{\sqrt{14}}\right) + \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{\sqrt{14}}\right) = \cos^{-1}\left(-\tfrac{3}{7}\right) = d_3.$$

Budući da vrijedi jednakost u nejednakosti trokuta, zaključujemo da su točke kolinearne.



Slika 1.5: Kolinearne točke na sferi.

1.4 Parametarska jednadžba pravca u sfernoj geometriji

Neka je l pravac s polom ξ, te neka $\{\xi, P, Q\}$ čine jednu ortonormiranu trojku (bazu) za $\mathbb{E}^3$. Teorem 1.4.1. govori da parametrizacija pravca l glasi

$$\alpha(t) = (\cos t)P + (\sin t)Q,$$

pri čemu uzimamo $t \in \mathbb{R}$.

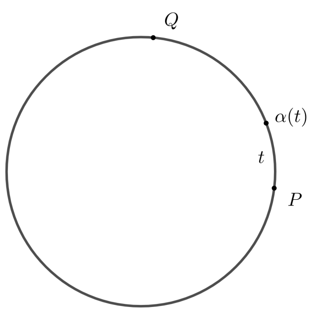
Teorem 1.4.1.

i. $l = \{\alpha(t) \big| t \in \mathbb{R}\}$*;*

ii. Svaka točka pravca l pogođena je točno jednom za t $\in [0, 2\pi]$*;*

iii. $d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = |t_1 - t_2|$ *ako vrijedi* $0 \leq |t_1 - t_2| \leq \pi$.

Ova se parametrizacija naziva **standardna parametrizacija pravca** l. Ona nije jedinstvena, P je proizvoljna točka na l, a čak i kad je ona zadana, za nju postoje dvije točke Q na l. Za ovu parametrizaciju još kažemo da opisuje tipičnu točku $\alpha(t)$ pravca l.



Slika 1.6: Standardna parametrizacija pravca l.

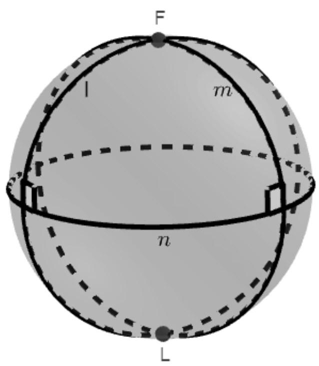
1.5 Okomiti pravci u sfernoj geometriji

Definicija 1.5.1. *Pravci na $\mathbb{S}^2$ su* ***okomiti*** *ako su im polovi ortogonalni.*

U euklidskoj je geometriji pramen paralelnih pravaca karakteriziran kao skup pravaca sa zajedničkom okomicom, dok u sfernoj geometriji, kako nema paralelnih pravaca, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1.5.2. *Neka su $l, m \in \mathbb{S}^2$ različiti pravci. Tada postoji jedinstveni pravac n koji je okomit na oba, $l \perp n, m \perp n$. Pritom su točke presjeka od l i m polovi od n.*

Dokaz. Teorem tvrdi da dva različita pravca l, m s polovima ξ, η imaju zajedničku (jedinstvenu) okomicu. Kako bismo definirali taj pravac(okomicu), sjetimo se da je pravac s polom ξ zadan s $\langle x, \xi \rangle = 0$. Stoga definiramo pol tog pravca. Zbog definicije okomitosti pravaca, dobar kandidat za pol je $\pm\frac{\xi \times \eta}{\|\xi \times \eta\|}$. Time je pravac (okomica) jedinstveno određen. Usporedimo li sa Teoremom 1.2.4., vidimo da je to upravo točka presjeka dva različita pravca l, m. □



Slika 1.7: Pravac *n* okomit je na pravce *m* i *l*.

Teorem 1.5.3. *Ako je $l \in \mathbb{S}^2$ pravac, $P \in \mathbb{S}^2$ točka koja nije pol od l, tada postoji jedinstveni pravac m kroz P okomit na l.*

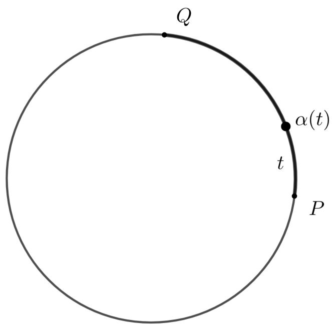
Dokaz. Tražimo okomicu iz zadane točke P na zadani pravac l. Moramo odrediti pol okomice. On mora biti ortogonalan na pol ξ od l, te mora prolaziti kroz P, što po definiciji pravca znači da je P na njega ortogonalno. Dobar kandidat je $\pm\frac{\xi \times P}{||\xi \times P||}$. Dodatno, možemo uočiti da ako je P pol od l, tada je $P = \pm\xi$, pa je gornji vektorski produkt jednak 0, te u tom slučaju ne možemo tako postupiti. □

1.6 Segmenti (dužine) na sferi

Odabirom dvije točke na pravcu na $\mathbb{S}^2$ (velika kružnica) pravac se dijeli na dva podskupa (dva kružna luka) čija su svojstva jednaka svojstvima dužina u $\mathbb{E}^2$. Te podskupove nazivamo **segmentima**.

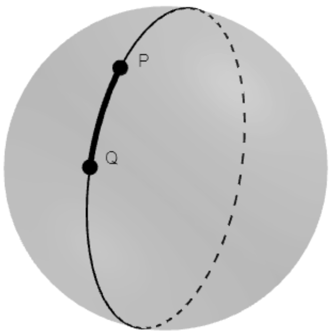
Definicija 1.6.1. *Podskup s od $\mathbb{S}^2$ nazivamo **segmentom** ako postoje točke $P, Q \in \mathbb{S}^2$ takve da je $\langle P, Q\rangle = 0$ i brojevi $t_1 < t_2$ pri čemu je $t_2 - t_1 < 2\pi$ tako da je*

$$s = \{(cost)P + (sint)Q : t \in [t_1, t_2]\}.$$



Slika 1.8: Segment na pravcu na sferi.

Sve su točke segmenta kolinearne te svaki segment definira jedinstveni pravac (jer je pravac na $\mathbb{S}^2$ jedinstveno određen dvjema (ne-antipodalnim) točkama P, Q). S druge strane, točke P, Q i brojevi t_1, t_2 koji definiraju segment nisu jedinstveni.



Slika 1.9: Segment na sferi, drugi pogled.

Teorem 1.6.2. *Neka je s segment određen točkama P, Q, parametrima t_1, t_2, ali i točkama $\tilde{P}, \tilde{Q}$ i parametrima $\tilde{t_1}, \tilde{t_2}$. Tada:*

i. $t_2 - t_1 = \tilde{t_2} - \tilde{t_1}$*;*

ii. Ako zapišemo $\alpha(t) = (\cos t)P + (\sin t)Q$ *i* $\tilde{\alpha}(t) = (\cos t)\tilde{P} + (\sin t)\tilde{Q}$*, imamo:*

$$\{\alpha(t_1), \alpha(t_2)\} = \{\tilde{\alpha}(\tilde{t_1}), \tilde{\alpha}(\tilde{t_2})\}\ ;$$

iii. $P \times Q = \pm\tilde{P} \times \tilde{Q}$*. Ove su točke polovi pravca na kojima s leži.*

Razlika parametara $t_2 - t_1 = \tilde{t_2} - \tilde{t_2}$ ne ovisi o izboru točaka P, Q i taj broj nazivamo **duljinom segmenta**.
Točke $\alpha(t_1)$ i $\alpha(t_2)$ nazivamo **krajevima** ili **rubnim točkama** segmenta s. Sve ostale točke nazivamo **unutrašnjim točkama** segmenta s. Te točke opet neće ovisiti o izboru točaka P, Q koje određuju segment.

Iako Teorem 1.6.2. kaže da segment nije jednoznačno zadan parom ortogonalnih točaka niti intervalom parametrizacije, sljedeći njegov korolar pokazuje da se interval parametrizacije može izabrati tako da broj a bude $a \in [0, 2\pi\rangle$.

Korolar 1.6.3. *Za proizvoljan par ortogonalnih točaka A, B koji određuje segment s na pravcu AB, postoji jedinstveni interval $[a, b]$ takav da je $a \in [0, 2\pi\rangle$ i*

$$s = \{(\cos t)A + (\sin t)B : t \in [a, b]\}.$$

Dokaz. Ako je segment s zadan kao $s = \{(\cos t)P + (\sin t)Q : t \in [t_1, t_2]\}$, tada postoji broj ϕ takav da vrijedi

$$P = (\cos\phi)A + (\sin\phi)B, Q = (-\sin\phi)A + (\cos\phi)B.$$

Uvrštavanjem P i Q u formulu segmenta i primjenom adicijskih teorema dobivamo

$$(\cos t)P + (\sin t)Q = (\cos(t + \phi))A + (\sin(t + \phi))B, t \in \mathbb{R}.$$

Kako je s zadan uz $t \in [t_1, t_2]$, za a biramo

$$a = (t_1 + \phi)\text{mod}2\pi,$$

a za broj b

$$b = a + (t_2 - t_1).$$

□

Teorem 1.6.4. *Dvije točke A i B koje nisu antipodalne određuju jedinstvena* ***dva segmenta*** *kojima su one krajevi. Unija tih segmenata je pravac AB, a presjek skup koji se sastoji samo od krajeva $\{A, B\}$.*

Dokaz. Neka je ξ (pol pravca) jedinični vektor u smjeru $A \times B$ i neka je $Q = \xi \times A$. Kako Q zadovoljava $\langle Q, \xi\rangle = 0$, slijedi da je Q točka na pravcu AB. Ona je po konstrukciji ortogonalna i na A, pa A, Q čine par ortogonalnih točaka koje određuju neki segment. Za bilo koju točku pravca AQ, pa i točku B, postoji odgovarajući parametar $L \in \langle 0, 2\pi\rangle$ takav da vrijedi

$$B = (\cos L)A + (\sin L)Q.$$

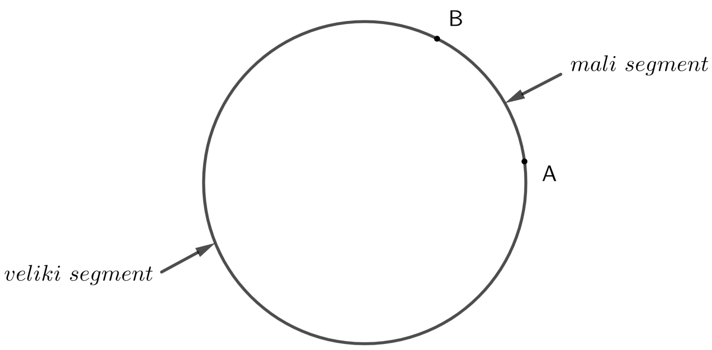
Definiramo dva segmenta

$$s_1 = (\cos t)A + (\sin t)Q, t \in [0, L], s_2 = (\cos t)A + (\sin t)Q, t \in [0, 2\pi - L].$$

Oba ta segmenta, zbog periodičnosti, imaju A i B za krajeve. Unija segmenata je cijeli pravac AB. □

Definicija 1.6.5. *Neka su A, B dvije točke koje nisu antipodalne. Dulji od dva segmenta kojima su A, B krajevi naziva se* ***veliki segment****, a kraći* ***mali segment****. Za ta dva segmenta kažemo da su* ***komplementarni****.*

Definicija 1.6.6. *Ako su A i B antipodalne točke, svaki od (beskonačno mnogo) segmenata koji imaju A i B kao svoje rubne točke nazivamo* ***polupravcima****.*



Slika 1.10: Komplementarni segmenti.

1.7 Zrake i kutovi

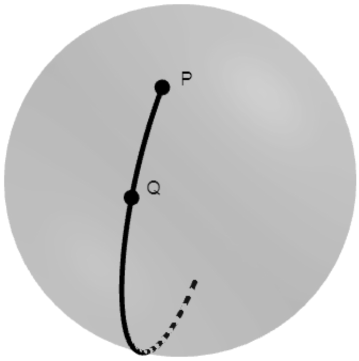
U sfernoj geometriji **zraku** definiramo kao polupravac bez jedne krajnje točke. Drugu krajnju točku nazivamo nazivamo ishodištem zrake. Ako je $\overline{PQ}$ mali segment duljine L standardno parametriziran kao

$$\{(\cos t)P + (\sin t)\tilde{P} : t \in [0, L]\},$$

tada je $\overrightarrow{PQ}$ jedinstvena zraka koja prolazi točkom Q, a početak joj je u P,

$$\overrightarrow{PQ} = \{(\cos t)P + (\sin t)\tilde{P} : t \in [0, \pi\rangle\}.$$

Kut na sferi definiramo kao u euklidskoj geometriji, tj. kut je unija dvaju zraka sa zajedničkim početkom. (Alternativno se, kao u nastavi, može definirati kao dio sfere (u $\mathbb{E}^2$ dio ravnine) omeđen zrakama koje imaju zajednički početak.) Pišemo $\angle PQR$, gdje je Q zajednička početna točka tih zraka. **Ispruženi kut** je zapravo pravac na sferi bez jedne točke.



Slika 1.11: Zraka.

Definicija 1.7.1. *Neka je $\measuredangle PQR$ kut. Točka X je unutrašnjost kuta ako mali segment $\overline{XP}$ ne siječe $\overleftrightarrow{QR}$ i mali segment $\overline{XR}$ ne siječe $\overleftrightarrow{QP}$.*

Sljedeći nam je cilj definirati mjeru kuta. S obzirom da zrake nemaju vektore smjera, moramo pronaći drugi način definiranja radijanske mjere kuta. Ako razmišljamo u kontekstu $\mathbb{E}^3$, jedinične normale dvaju presječnih pravaca su vektori koji su polovi tih dvaju pravaca. Stoga, kut između pravaca odgovara kutu između tih jediničnih normala.
Ako uzmemo dva pravca na sferi (oni se uvijek sijeku), tada oni definiraju četiri kuta.

Definicija 1.7.2. ***Mjera kuta*** *$\measuredangle PQR$ jednaka je*

$$\cos^{-1}\langle \frac{Q\times P}{||Q\times P||}, \frac{Q\times R}{||Q\times R||}\rangle \in [0,\pi].$$

Zadatak. Zadane su tri točke

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), Q = \left(\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, 0\right), R = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right).$$

Kolika je mjera kuta $\angle PQR$?
Rješenje. Računamo:

$$Q \times P = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}\right), \frac{Q \times P}{||Q \times P||} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right),$$
$$Q \times R = \left(\frac{2\sqrt{3}}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{2\sqrt{3}}{7}\right), \frac{Q \times R}{||Q \times R||} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{40}}, -\frac{4}{\sqrt{40}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{40}}\right),$$

Slijedi:

$$\angle PQR = \cos^{-1}\left\langle\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{40}}, -\frac{4}{\sqrt{40}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{40}}\right)\right\rangle = \cos^{-1}(1)$$

pa dobivamo da je

$$\angle PQR = 0^\circ.$$

Time smo na još jedan način potvrdili zaključak iz zadatka na str. 12, da su točke P, Q i R kolinearne.

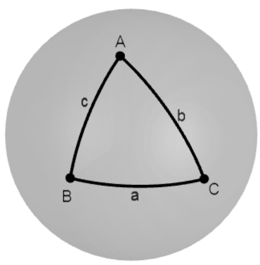
Poglavlje 2

Sferna trigonometrija

2.1 Trokut

Neka su P, Q i R tri nekolinearne točke. **Trokut** $\triangle PQR$ je unija triju malih segmenata $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RP}$. Ti se segmenti nazivaju stranicama trokuta. **Duljina stranice** jednaka je udaljenosti između njenih krajnjih točaka

$$d(P, Q) = cos^{-1}\langle P, Q\rangle \in [0, \pi].$$



Slika 2.1: Sferni trokut.

2.2 Trigonometrija

Neka je zadan trokut s vrhovima A, B, C i neka je a duljina stranice BC, b duljina stranice AC i c duljina stranice AB, kao na gornjoj slici. Za kut s vrhom A koristit ćemo oznaku A, za kut s vrhom B oznaku B itd.

Teorem 2.2.1. (Poučak o kosinusu za kut)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Dokaz. Mjera kuta A u trokutu $\triangle ABC$ jednaka je

$$cos^{-1}\langle \frac{A \times B}{||A \times B||}, \frac{A \times C}{||A \times C||} \rangle.$$

Za duljinu stranice $a = \overline{BC}$ vrijedi $\cos a = \langle B, C \rangle$. Lagrangeov identitet povlači

$$||B \times C||^2 = ||B||^2 ||C||^2 - \langle B, C \rangle^2 = 1 - \cos^2 a = \sin^2 a.$$

Za skalarni produkt brojnika izraza za mjera kuta A vrijedi

$$\langle A \times B, A \times C \rangle = \langle B, C \rangle - \langle A, C \rangle \langle A, B \rangle = \cos a - \cos b \cos c.$$

Da bismo odredili $\cos A$ podijelimo još taj skalarni produkt s normama

$$||A \times B|| = \sin c, ||A \times C|| = \sin b,$$

te tvrdnja slijedi. □

Zadatak. Geografski podaci za Zagreb i Pariz su:

$$\text{Zagreb } 45,8150°N,\ 15,9819°E,$$
$$\text{Pariz } 48,8566°N,\ 2,3522°E.$$

Odredite najkraću udaljenost između Zagreba i Pariza (uzimamo da je radijus Zemlje 6370 km).

Rješenje.

O udaljenosti između točaka govorimo u stupnjevima, a geografska širina omogućuje nam saznati duljine z i p stranica trokuta. Od sjevernog pola N do ekvatora, dio pripadnog luka ima duljinu $\frac{\pi}{2} = 90°$. Geografska širina označava kut otklona od ekvatora, dakle, trebamo je oduzeti od duljine meridijana. Stoga je

$$p = 90° - 45.8150° = 44.185°.$$

Analogno, za Pariz vrijedi:

$$z = 90^\circ - 48.8566^\circ = 41.1434^\circ.$$

Dakle, znamo duljine stranica p i z. Kut pri sjevernom polu N je kut između meridijana, u ovom slučaju

$$N = 15.9819^\circ - 2.3522^\circ = 13.6297^\circ,$$

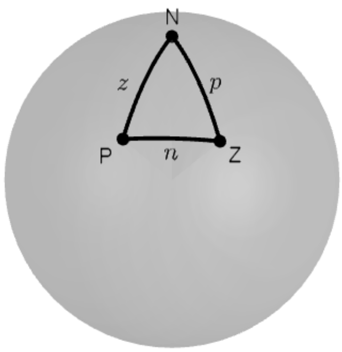
jer se radi o meridijanima s iste strane nultog meridijana. Sada primijenimo poučak o kosinusu, zapisan drugačije:

$$\begin{aligned}\cos n &= \cos N \sin p \sin z + \cos p \cos z\\ &= \cos 13.6297^\circ \sin 44.185^\circ \sin 41.1434^\circ + \cos 44.185^\circ \cos 41.1434^\circ\\ &= 0.9857.\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je udaljenost između Zagreba i Pariza jednaka 9.71°. Drugim riječima, pripadni središnji kut pravca na sferi kao kružnice iznosi 9.71°. Ako želimo izračunati duljinu luka kružnice određenog tim kutom, uzimamo u obzir da je radijus Zemlje (dakle i pravca kao kružnice) jednak 6370 km te računamo:

$$l = r\theta$$

i dobivamo da je najkraća udaljenost između Zagreba i Pariza jednaka 1079.4 km.



Slika 2.2: Skica trokuta čiji su vrhovi sjeverni pol (N), Zagreb (Z) i Pariz (P).

Teorem 2.2.2. (Poučak o sinusu)

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Dokaz. Primijetimo

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Slično

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c}.$$

Prema tome je

$$\sin^2 A = 4\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{k}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

k određujemo tako da pomnožimo prva dva izraza uz pretvorbu zbroja i razlike kosinusa u produkt sinusa i stavimo $a + b + c = 2s$

$$\cos(b-c) - \cos a = -2\sin\frac{b-c+a}{2}\sin\frac{b-c-a}{2} = 2\sin(s-c)\sin(s-b),$$

$$\cos a - \cos(b+c) = -2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a-b-c}{2} = 2\sin s \sin(s-a).$$

Dobivamo formulu

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{4\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c},$$

a zatim i

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{2(\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c))^{1/2}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Ova je formula invarijantna na zamjenu a, b, c pa tvrdnja slijedi. □

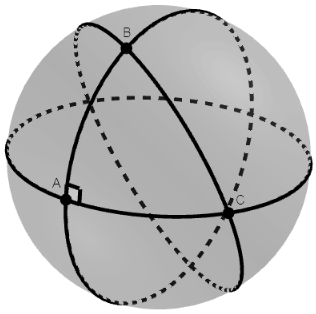
Korolar 2.2.3. *Mjere kutova u potpunosti su određene duljinama stranica trokuta, i obratno, duljine stranica u potpunosti su određene mjerama kutova.*

Trokut koji ima barem jedan kut pravi (tj. mjere $\pi/2$) naziva se **pravokutnim trokutom**.

Zadatak. Izračunajmo kut pri vrhu A ako je zadan trokut $\triangle ABC$ i vrijedi $\overline{AB} \perp \overline{AC}$.

Rješenje: Primijetimo, segmenti su okomiti ako su okomiti pravci na kojima se nalaze. Pravci su okomiti ako su njihovi polovi ortogonalni. Pol pravca AB je npr. $\dfrac{A \times B}{|A \times B|}$, a pravca AC npr. $\dfrac{A \times C}{|A \times C|}$ (polovi su određeni do na predznak). Prema tome, ako su navedeni pravci okomiti, tada vrijedi $\langle A \times C, A \times B \rangle = 0$. Imamo

$$\angle CAB = \cos^{-1}\langle \frac{A \times C}{|A \times C|}, \frac{A \times B}{|A \times B|} \rangle = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}.$$



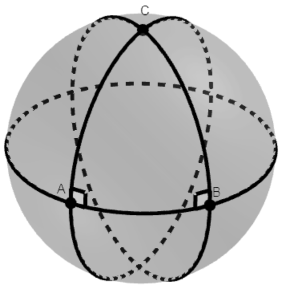
Slika 2.3: Pravokutni trokut ABC u kojem vrijedi $\overline{AB} \perp \overline{AC}$.

Zadatak. Zadane su točke $P = (1, 0, 0), Q = (0, 1, 0), R = (0, 0, 1)$, Odredite $\angle PQR$.
Rješenje. Odredimo prvo vektorske produkte:

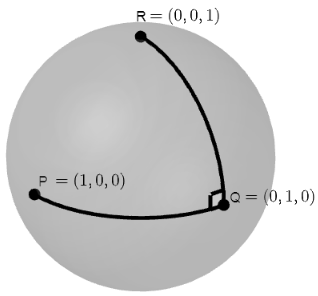
$$Q \times P = (0, 0, 1)$$
$$Q \times R = (1, 0, 0)$$

Računamo:

$$\angle PQR = \cos^{-1}\langle \frac{Q \times P}{|Q \times P|}, \frac{Q \times R}{|Q \times R|} \rangle = \cos^{-1}\langle (0, 0, 1), (1, 0, 0) \rangle = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}.$$



Slika 2.4: Pravokutni trokut ABC s dva prava kuta.



Slika 2.5: $\angle PQR = \pi/2$.

Sljedeći je teorem analogon **Pitagorinog teorema**.

Teorem 2.2.4. *Neka je $\triangle ABC$ trokut na $\mathbb{S}^2$ i neka su mu stranice duljine $a = d(B,C)$, $b = d(A,C)$, $c = d(A,B)$. Ako vrijedi $\overline{AB} \perp \overline{AC}$, tada*

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Dokaz. Ovaj je teorem specijalan slučaj teorema o kosinusu. Stoga je dovoljno u teorem o kosinusu uvrstiti $\cos A = 0$. $\square$

Teorem 2.2.5. *U sfernom trokutu s kutom $C = \frac{\pi}{2}$ vrijedi:*

$$\cos A = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, \cos B = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}.$$

Dokaz. Iz Teorema 2.2.1 i Teorema 2.2.4. slijedi:

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos a \cos^2 b}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a(1 - \cos^2 b)}{\sin b \sin c} \\ &= \frac{\cos a \sin^2 b}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a \sin b}{\sin c} = \frac{\frac{\cos c}{\cos b} \sin b}{\sin c} = \frac{\frac{\sin b}{\cos b}}{\frac{\sin c}{\cos c}} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}.\end{aligned}$$

Analogno dobivamo i formulu za $\cos B$. □

Teorem 2.2.6. *U sfernom trokutu s kutom $C = \frac{\pi}{2}$ vrijedi:*

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}, \sin B = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Dokaz. Slijedi direktno iz Teorema 2.2.2. jer je $\sin C = 1$. □

Analogno, kao što smo Teoremom 2.2.1. izrazili mjeru kuta pomoću duljina stranica, možemo učiniti i obratno. Ako su zadane mjere kutova A, B, C euklidskog trokuta, ne možemo izračunati duljine njegovih stranica jer je trokut određen samo do na sličnost. U sfernoj trigonometriji ipak imamo formule koje nam to omogućuju.

Teorem 2.2.7. (Poučak o kosinusu za stranicu)

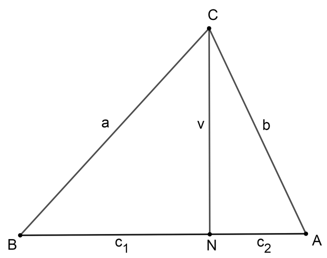
$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Dokaz. Spustimo visinu iz vrha C na nasuprotnu stranicu. Neka je njezino nožište N, duljina v i neka dijeli nasuprotnu stranicu na dijelove duljine c_1 i c_2. U sfernom trokutu iz Teorema 2.2.5 (Pitagorin teorem) primijenjenog na pravokutne trokute BNC i ANC slijedi $\cos a = \cos c_1 \cos v$ i $\cos b = \cos c_2 \cos v$. Pomnožimo te dvije jednadžbe međusobno i sa $\cos c$, koji s lijeve strane raspišemo po adicijskoj formuli $\cos(c_1 + c_2) = (\cos c_1 \cos c_2 - \sin c_1 \sin c_2)$:

$$\cos a \cos b(\cos c_1 \cos c_2 - \sin c_1 \sin c_2) = \cos c_1 \cos c_2 \cos^2 v \cos c.$$

Podijelimo s $\cos c_1 \cos c_2$ i zamijenimo $\cos^2 v$ s $1 - \sin^2 v$:

$$\cos a \cos b(1 - \operatorname{tg} c_1 \operatorname{tg} c_2) = (1 - \sin^2 v) \cos c.$$



Slika 2.6: Poučak o kosinusu za stranicu.

Sad izmnožimo zagrade i presložimo jednadžbu ovako:

$$\cos a \cos b - \cos c = \cos a \cos b \operatorname{tg} c_1 \operatorname{tg} c_2 - \sin^2 v \cos c.$$

Izraz na lijevoj strani raspišemo po Teoremu 2.2.1.:

$$-\sin a \sin b \cos C = \cos a \cos b \operatorname{tg} c_1 \operatorname{tg} c_2 - \sin^2 v \cos c.$$

Podijelimo li sa $-\sin a \sin b$, dobijemo

$$\cos C = -\frac{\operatorname{tg} c_1}{\operatorname{tg} a} \frac{\operatorname{tg} c_2}{\operatorname{tg} b} + \frac{\sin v}{\sin a} \frac{\sin v}{\sin b} \cos c.$$

Na kraju primijenimo Teorem 2.2.5. i Teorem 2.2.6. na pravokutne trokute BNC i ANC, te dobijemo traženu relaciju:

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$$

□

Analogni dokaz možemo provesti i u euklidskoj ravnini, ali dobijemo relaciju koja ne uključuje duljine stranica (zapravo je to dokaz adicijske formule za sinus).

Sukladnost sfernih trokuta

Općenito, za trokute kažemo da su sukladni ako postoji izometrija koja jedan trokut preslikava u drugi. U sfernoj geometriji, dva trokuta s jednakim odgovarajućim kutovima su sukladna, tj. svi slični trokuti su sukladni. U sfernom trokutu tri kuta potpuno određuju trokut pa će određivati i površinu. Stoga na sferi vrijedi i KKK poučak o sukladnosti trokuta. Potreban aparat za razumijevanje sljedećih teorema razvit ćemo u sljedećem poglavlju.

Teorem 2.2.8. (SSS poučak) Ako se dvama trokutima duljine stranica podudaraju, tada su oni sukladni.

Teorem 2.2.9. (KKK poučak) Ako se dvama trokutima podudaraju mjere svih kutova, tada su oni sukladni.

Teorem 2.2.10. (SKS poučak) Ako se dvama trokutima podudaraju duljine dviju stranica i mjera kuta kojeg one određuju, tada su oni sukladni.

Poglavlje 3

Gibanja u sfernoj geometriji

3.1 Osna simetrija

Prisjetimo se najprije osne simetrije u ravnini. Neka je l pravac kroz točku P te neka je N normala tog pravca. Dvije točke X i X' su simetrične s obzirom na pravac l ako je polovište segmenta XX' nožište F okomice iz F na l. Drugim riječima, X i X' su simetrični s obzirom na l ako imamo

$$\tfrac{1}{2}(X + X') = F.$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X' &= X - \langle X - P, N \rangle N, \\
\frac{1}{2}X' &= \frac{1}{2}X - \langle X - P, N \rangle N, \\
X' &= X - 2\langle X - P, N \rangle N.
\end{aligned}$$

Definicija 3.1.1. *Osna simetrija s obzirom na pravac l je preslikavanje iz $\mathbb{E}^2$ u $\mathbb{E}^2$ definirano kao :*

$$\Omega_\ell X = X - \langle X - P, N \rangle N,$$

pri čemu je N jedinična normala pravca l, a P je točka na pravcu l.

U sfernoj geometriji osnu simetriju definiramo na sljedeći način:

Definicija 3.1.2. *Osna simetrija Ω_ℓ s obzirom na pravac ℓ s polom ξ dana je s*

$$\Omega_\ell X = X - 2\langle X, \xi \rangle \xi.$$

Ako usporedimo ovu definiciju s definicijom osne simetrije u euklidskoj geometriji, uočavamo da se radi o analognim definicijama. Na $\mathbb{S}^2$ promatramo ravninu koja presijeca sferu i njenu jediničnu normalu, tj. pol pravca dobivenog presijecanjem sfere ravninom. Dakle, na $\mathbb{S}^2$ govorimo o simetriji s obzirom na ravninu.

Iako to nije odmah očito, osnom simetrijom točke sfere ponovo se dobiva točka sfere.

Teorem 3.1.3. *Neka je $\langle \xi, \xi \rangle = 1$ i definiramo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s pravilom*

$$Tx = x - 2\langle x, \xi \rangle \xi.$$

Tada

i. *T je linearni operator.*

ii. $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^3$.

Dokaz.

i. Slijedi izravno iz linearnosti skalarnog produkta.

ii. $$\begin{aligned} \langle Tx, Ty \rangle &= \langle x - 2\langle x, \xi \rangle \xi, y - 2\langle y, \xi \rangle \xi \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 2\langle x, \xi \rangle \langle \xi, y \rangle - 2\langle x, \xi \rangle \langle y, \xi \rangle + 4\langle x, \xi \rangle \langle y, \xi \rangle \langle \xi, \xi \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

□

Svojstvo ii. pokazuje da ako je $|x| = 1$, onda je $|Tx| = 1$. Stoga, točka Tx je točka sfere, tj. za $\Omega_\ell X$ vrijedi

$$\langle \Omega_\ell X, \Omega_\ell X \rangle = \langle X, X \rangle = 1,$$

što znači da je osna simetrija izometrija sfere. Preciznije

Teorem 3.1.4.

i. $d(\Omega_\ell X, \Omega_\ell Y) = d(X, Y), \forall X, Y$ *na* $\mathbb{S}^2$.

ii. $\Omega_\ell \Omega_\ell X = X, \forall X$ *na* $\mathbb{S}^2$.

iii. $\Omega_\ell : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ *je bijekcija.*

Zadatak. Pronađimo na sferi osnosimetričnu točku točke $X = (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ u odnosu na pravac koji prolazi točkama $P = (1, 0, 0)$ i $Q = \frac{\sqrt{5}}{5}(2, -1, 0)$.

Rješenje. Prvo računamo vektorski produkt $P \times Q$:

$$P \times Q = \left(0, 0, -\tfrac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Zatim određujemo pol traženog pravca:

$$\xi = \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|} = \frac{\left(0, 0, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}{\|\left(0, 0, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\|} = (0, 0, -1).$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}
\Omega_\ell X &= X - 2\langle X, \xi\rangle\xi \\
\Omega_\ell X &= (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}) - 2\langle(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}), (0, 0, -1)\rangle(0, 0, -1) \\
\Omega_\ell X &= (\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}).
\end{aligned}$$

Vidimo da je i dobivena točka upravo točka sfere.

3.2 Kompozicije osnih simetrija

Neka su l, m dva pravca s polovima ξ, η te neka je P točka njihovog presjeka (jedna od dvije). Izaberemo ortonormiranu trojku $\{e_1, e_2, e_3\}$, pri čemu je $e_3 = P$. Tada se vektori ξ, η (kao vektori ortogonalni na P) mogu prikazati kao linearne kombinacije od $\{e_1, e_2\}$. Budući da su i jedinični, možemo odabrati brojeve θ, φ tako da

$$\xi = (-\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2, \eta = (-\sin\varphi)e_1 + (\cos\varphi)e_2.$$

Proučimo djelovanje operatora osne simetrije na vektorima baze. Direktnim računom dobivamo

$$\begin{aligned}
\Omega_\ell e_1 &= (\cos 2\theta)e_1 + (\sin 2\theta)e_2, \\
\Omega_\ell e_2 &= (\sin 2\theta)e_1 - (\cos 2\theta)e_2, \\
\Omega_\ell e_3 &= e_3.
\end{aligned}$$

Sada možemo operator Ω_ℓ matrično zapisati u bazi $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\Omega_\ell = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gornja $2x2$ matrica u tom matričnom prikazu odgovara prikazu osne simetrije u $\mathbb{E}^2$. Ako analogno (s vektorom φ) zapišemo i matricu osne simetrije Ω_m, produkt $\Omega_\ell\Omega_m$ ima u gornjoj bazi matrični prikaz

$$\Omega_\ell\Omega_m = \begin{bmatrix} \cos 2(\theta-\varphi) & -\sin 2(\theta-\varphi) & 0 \\ \sin 2(\theta-\varphi) & \cos 2(\theta-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gornja podmatrica predstavlja rotaciju u $\mathbb{E}^2$ pa takvu kompoziciju (produkt) osnih simetrija nazivamo **rotacijom** oko P.

Definicija 3.2.1. *Ako su α i β pravci koji prolaze kroz točku P, tada izometriju $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ nazivamo* ***rotacija*** *oko točke P. Skup svih rotacija oko točke P označavamo s $ROT(P)$.*

Definicija 3.2.2. *Neka je l pravac i neka su m, n pravci okomiti na l.* ***Translacija*** *duž l je produkt $\Omega_m\Omega_n$. Skup svih translacija duž pravca ℓ označavamo s $TRANS(\ell)$.*

Spomenuli smo već da u $\mathbb{S}^2$ ne postoje paralelni pravci. U stvari, ako su dva pravca okomita na pravac l, oni se sijeku u polovima od l.

Teorem 3.2.3.

i. Svaka translacija u $\mathbb{S}^2$ ujedno je i rotacija.

ii. Svaka rotacija u $\mathbb{S}^2$ ujedno je i translacija.

Promotrimo dva pravca α, β okomita na l. Neka je P proizvoljna točka na l. Neka je ξ pol od l i neka je $Q = \xi \times P$. Tada možemo odabrati brojeve a i b tako da

$$(\cos a)P + (\sin a)Q \in \alpha,\ (\cos b)P + (\sin b)Q \in \beta.$$

Tada je $(-\sin a)P + (\cos a)Q$ pol od α, a $(-\sin b)P + (\cos b)Q$ pol od β. Kao i kod rotacija, direktnim računom dobivamo

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha P &= (\cos 2a)P + (\sin 2a)Q, \\ \Omega_\alpha Q &= (\sin 2a)P - (\cos 2a)Q, \\ \Omega_\alpha \xi &= \xi. \end{aligned}$$

Zapisano matrično u bazi $\{P, Q, \xi\}$

$$\Omega_\alpha = \begin{bmatrix} \cos 2a & \sin 2a & 0 \\ \sin 2a & -\cos 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako analogno (s vektorom b) zapišemo i matricu osne simetrije Ω_β, produkt $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ ima u gornjoj bazi matrični prikaz

$$\Omega_\alpha\Omega_\beta = \begin{bmatrix} \cos 2(a-b) & -\sin 2(a-b) & 0 \\ \sin 2(a-b) & \cos 2(a-b) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gornja podmatrica ponovo predstavlja rotaciju u $\mathbb{E}^2$.

Sljedeći nam teorem govori da je rotacija oko točke ξ koja je presjek tih pravaca jednaka translaciji duž pravca ℓ kojemu je ξ pol, i obratno.

Teorem 3.2.4. *$TRANS(\ell)$ je Abelova grupa jednaka grupi $ROT(\xi)$, gdje je ξ pol od ℓ.*

Definicija 3.2.5. ***Klizna simetrija*** *s osi l je kompozicija $\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_\ell$, gdje su α,β pravci okomiti na l.*

Neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormirana baza za $\mathbb{E}^3$, gdje je e_3 pol pravca l. Tada je

$$\begin{aligned} \Omega_\ell e_1 &= e_1, \\ \Omega_\ell e_2 &= e_2, \\ \Omega_\ell e_3 &= e_3. \end{aligned}$$

Korolar 3.2.6. *S obzirom na takvu bazu, matrični prikaz klizne simetrije s osi l ima sljedeći oblik*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

za neki $\theta \in \mathbb{R}$.

Definicija 3.2.7. ***Antipodalno preslikavanje*** *E je preslikavanje na $\mathbb{S}^2$ dano s*

$$Ex = -x.$$

U proizvoljnoj ortonormiranoj bazi, E ima sljedeći matrični prikaz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Antipodalno preslikavanje je klizna simetrija jer se može faktorizirati kao

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

tj. kao produkt tri osne simetrije s obzirom na osi čiji polovi čine ortonormiranu bazu. Ova klizna simetrija nema jedinstvenu os, svaki pravac je os.

Centralna simetrija H_p s obzirom na točku P je kompozicija dvaju osnih simetrija čije su osi okomite i sijeku se u P.

Teorem 3.2.8. *Neka je P točka na* $\mathbb{S}^2$. *Tada je* $\forall x \in \mathbb{S}^2$

$$H_p x = -x + 2\langle x, P\rangle P.$$

Dokaz. Neka su ξ i η polovi međusobno okomitih pravaca koji prolaze kroz točku P. Tada je $\{\xi, \eta, P\}$ ortonormirana baza i na $\mathbb{S}^2$ vrijedi jednakost

$$x = \langle x, P\rangle P + \langle x, \xi\rangle\xi + \langle x, \eta\rangle\eta.$$

Izravnim računom (primjenom dvije osne simetrije) dobivamo

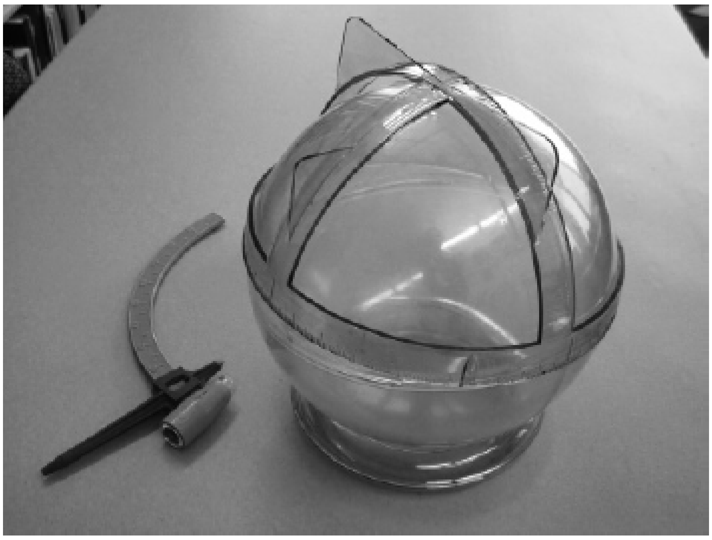
$$H_p x = x - 2\langle x, \xi\rangle\xi - 2\langle x, \eta\rangle\eta$$

Zbrajanjem gornja dva identiteta dobivamo traženi izraz za $H_p x$. □

Poglavlje 4

Sferna geometrija u dodatnoj nastavi

Kurikulum nastave matematike fokusiran je primarno na euklidsku geometriju i koncepte. Neeuklidska geometrija u udžbenicima se pojavljuje samo u obliku povijesnih crtica ili zanimljivosti. Cilj ovog poglavlja je pokazati kako bi sferna geometrija, ako bi ju učenici proučavali usporedno s geometrijom ravnine, mogla dovesti učenike do novih pogleda i saznanja koja imaju primjenu u pravom svijetu. Poznato nam je da sferna geometrija ima mnoge primjene u svakodnevnom životu, bilo u fizici, astronomiji, navigaciji itd. Uporabom sfere i konstrukcijskih alata za primjenu na sferi učenici mogu doživjeti neeuklidske konstrukcije kao integralni dio satova geometrije.
Ideja ovog poglavlja je prikazati aktivnosti koje bi nastavnici mogli provoditi s učenicima na dodatnoj nastavi s ciljem da savladaju osnove sferne geometrije. Učenici bi imali priliku vidjeti sličnosti i razlike koncepata i definicija u ravninskoj i sfernoj geometriji. Također, razvili bi razumijevanje o tome što je aksiomatski sustav te svijest o postojanju različitih aksiomatskih sustava unutar istog područja proučavanja.
Kao vodilja poslužit će nam kurikulum sferne geometrije Istvana Lenarta, mađarskog matematičara koji je razvio i edukacijski alat za proučavanje sferne geometrije poznat kao Lenartova sfera. Velika prednost ovog alata za dodatnu nastavu o sfernoj geometriji je opipljivost i iskustvo koje učenici dobivaju iz prve ruke. Iako učenici mogu mnogo naučiti i alatima dinamičke geometrije, naš će fokus biti na aktivnostima s Lenartovom sferom. Lenartova sfera i pomoćni alati znatno nam olakšavaju mjerenje na sferi i znatno povećavaju preciznost. Mogli bismo učenicima dati i da eksperimentiraju na lopti za stolni tenis, balonima, narančama i sl., međutim, konstrukcije bi bile daleko od preciznosti koju inače postižemo u geometriji ravnine. Pomoćni alati potrebni za rad na Lenartovoj sferi su hemisferne folije, sferno ravnalo, sferni kutomjer te sferni šestar.
Sfernu geometriju gradimo na konačnoj plohi, za razliku od ravninske koja je beskonačna. Sva svojstva sferne geometrije učenik uočava na konačnom i opipljivom objektu, s minimalnom potrebom za pozivanjem na pojam beskonačnosti.



Slika 4.1: Lenartova sfera (slika preuzeta iz [2]).

Mnoge koncepte sferne geometrije učenici su već vidjeli na nastavi geografije. Poznavanje geografskog koordinatnog sustava olakšava uvođenje osnovnih koncepata u relativno ranom stadiju učenikovog obrazovanja. Učenje sferne geometrije usporedno s već poznatim konceptima ravninske geometrije učenicima ne povećava samo razumijevanje geometrije na sferi, već produbljuje i učeničko razumijevanje ravninske geometrije. Učenici će uočiti da svaki put kad postave problem u jednoj geometriji, nastaje analogni problem u drugoj geometriji. Naučiti će prevesti problem jedne geometrije u problem druge geometrije te vidjeti da isti problemi imaju drukčija rješenja u različitim geometrijama, bilo jednostavnija, bilo kompleksnija.

4.1 Aktivnosti u dodatnoj nastavi

Opisati ćemo nekoliko aktivnosti kojima će učenici usvojiti osnovne koncepte sferne geometrije. Aktivnosti se zasnivaju na usporedbi ravninske i sferne geometrije pa je najčešće predviđeno da učenici provode konstrukcije u oba okruženja, nakon čega provode istraživanje i dolaze do zaključaka.

Prva je aktivnost ključna za osnovno razumijevanje razlika između dvije geometrije jer na sferi nema ravnih crta. Osnova je svih daljnjih aktivnosti.

Aktivnost 1: Možete li nacrtati ravnu crtu na sferi?

Uzmimo da je točka najjednostavniji objekt u ravnini i na sferi:

- *Opišite najkraći put između dvije točke u ravnini.*
- *Opišite najkraći put između dvije točke na sferi.*
- *Opišite objekt koji dobijete kada produžite svaki od tih puteva.*

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da je velika kružnica sferni ekvivalent pravca u ravnini.

Detaljan tijek:
Učenici crtaju dvije proizvoljne točke te provode konstrukciju u ravnini, nakon čega slijedi diskusija.

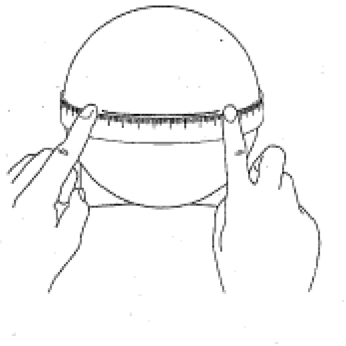
Pitanja za diskusiju:

- Ako bismo dobivenoj dužini produžili krajeve, bi li se oni ikad sreli?
- Koliko pravaca možemo nacrtati kroz jednu točku u ravnini?
- Koliko pravaca možemo nacrtati kroz dvije točke u ravnini?

Prije nego što će provesti konstrukciju na sferi, učenici predviđaju što će se dogoditi na sferi, tj. što će biti najkraći put između dvije točke i što će se dogoditi ako produže krajeve dobivene dužine. Zatim odabiru dvije proizvoljne točke te provode konstrukciju na Lenartovoj sferi uz pomoć sfernog ravnala (prije toga mogu konstrukciju provesti i pomoću komada špage te nacrtati pravac uz rub špage).

Pitanja za diskusiju:

- Kako biste nazvali dobiveni pravac na sferi?
- Na koliko segmenata zadane točke dijele veliku kružnicu?
- Koliko velikih kružnica možemo nacrtati kroz jednu točku na sferi?
- Koliko velikih kružnica možemo nacrtati kroz dvije točke na sferi?



Slika 4.2: Sferno ravnalo.

Na kraju aktivnosti, učenici će izraditi tablicu u kojoj će usporediti rezultate u ravnini i na sferi.

Pravci u ravnini	**Pravci na sferi**
Pravac je beskonačan.	Velika kružnica je konačna.
Pravac nema središte.	Velika kružnica ima dva središta (ta središta nazivamo polovima). Npr. ekvator na globusu ima Sjeverni pol i Južni pol kao središta.
Ako pratimo pravac u ravnini, nikada se nećemo vratiti u početnu točku.	Ako pratimo veliku kružnicu na sferi, uvijek ćemo se vratiti u početnu točku.
Za svake dvije točke postoji jedinstveni pravac koji prolazi kroz njih. Točke dijele pravac na tri segmenta, jedan konačan i dva beskonačna.	Postoji jedinstvena velika kružnica koja prolazi kroz zadane dvije točke, ako te točke nisu polovi. Dvije točke dijele veliku kružnicu na dva konačna segmenta. Ako su zadane točke polovi, tada postoji beskonačno mnogo velikih kružnica koje prolaze kroz njih.
Segment pravca je najkraći put između dvije točke.	Manji luk velike kružnice je najkraći put između dvije točke.

Sljedeća aktivnost učenicima će otkriti razlike u mjerenju udaljenosti u ravnini i na sferi.

Aktivnost 2: Kako mjerimo udaljenost?

Često mjerimo udaljenost između dva objekta:

- *Opišite kako izmjeriti udaljenost u ravnini.*
- *Opišite kako izmjeriti udaljenost na sferi.*
- *Objasnite koje mjerne jedinice koristite pri mjerenju udaljenosti u ravnini i na sferi.*

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti kako izmjeriti udaljenost na sferi te koju mjernu jedinicu koristimo za mjerenje te udaljenosti.

Detaljan tijek:
Učenici crtaju dvije proizvoljne točke te mjere udaljenost dviju točaka u ravnini, nakon čega slijedi diskusija. Prije nego što će provesti konstrukciju na sferi, učenici predviđaju što će se dogoditi na sferi, tj. kako će izmjeriti udaljenost dvije točke na sferi i koje će mjerne jedinice koristiti.
Zatim odabiru dvije proizvoljne točke te konstruiraju veliku kružnicu na Lenartovoj sferi pomoću sfernog ravnala.

Pitanja za diskusiju:

- Izrazite duljinu velike kružnice u stupnjevima.
- Koliko kružnih lukova povezuje zadane točke?
- Kolika je duljina svakog luka izražena u stupnjevima?
- Duljinu kojeg luka ste odabrali kao mjeru udaljenosti između dviju točaka?
- Opišite par točaka čiju je udaljenost moguće mjeriti duž više od jednog luka.
- Kolika je najveća moguća udaljenost između dvije točke u ravnini?
- Kolika je najveća moguća udaljenost između dvije točke na sferi?
- Kolika je najmanja, a kolika najveća udaljenost između točke i velike kružnice na sferi?

Na kraju aktivnosti, učenici će izraditi tablicu u kojoj će usporediti rezultate u ravnini i na sferi.

Udaljenost u ravnini	**Udaljenost na sferi**
Udaljenost mjerimo duž pravca koji spaja zadane točke. Postoji samo jedna udaljenost koju možemo mjeriti.	Udaljenost mjerimo duž velike kružnice koje povezuje zadane točke. Postoje dvije udaljenosti koje možemo mjeriti, a obično biramo kraću od njih.
Nema ograničenja na udaljenost između dvije točke. Ne postoji najveća moguća udaljenost.	Najveća moguća udaljenost između dvije točke iznosi 180° .
Između bilo koje dvije točke postoji samo jedan najkraći put duž kojeg mjerimo udaljenost.	Između bilo koje dvije točke, koje nisu polovi, postoji samo jedan najkraći put duž kojeg mjerimo udaljenost. Ako su zadane dvije točke polovi, postoji beskonačno mnogo puteva između njih, ali svi imaju istu duljinu od 180° . Stoga, udaljenost između dva pola je 180° .

Aktivnost 3: U koliko se točaka pravci mogu sijeći?

Dva pravca u ravnini ili na sferi sijeku se u jednoj ili više točaka:

- *Istražite sjecišta dvaju pravaca u ravnini.*
- *Istražite sjecišta dvaju velikih kružnica na sferi.*
- *Objasnite svoja zapažanja o paralelnim pravcima u ravnini i na sferi.*

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da se velike kružnice na sferi sijeku u dvije točke te da na sferi ne postoje paralelni pravci, tj. paralelne velike kružnice.

Detaljan tijek:
Učenici crtaju proizvoljan pravac u ravnini te konstruiraju četiri pravca: pravac koji nema zajedničkih točaka sa zadanim pravcem, pravac koji ima točno jednu zajedničku točku sa zadanim pravcem, pravac koji ima točno dvije zajedničke točke sa zadanim pravcem te pravac koji ima više od dvije zajedničke točke sa zadanim pravcem.

Pitanja za diskusiju:

- Koje su konstrukcije bile moguće u ravnini?
- Koji je od konstruiranih pravaca paralelan sa zadanim i zašto?

Prije nego što će provesti konstrukciju na sferi, učenici diskutiraju hoće li zaključci iz ravnine vrijediti i na sferi.
Zatim na Lenartovoj sferi crtaju proizvoljnu veliku kružnicu te provode konstrukcije analogne onima u ravnini.

Pitanja za diskusiju:

- Opišite u kakvom odnosu mogu biti dvije velike kružnice na sferi?
- Mogu li dvije velike kružnice na sferi biti paralelne?
- Je li jednostavniji ravninski ili sferni slučaj?

Dodatno, u ovoj aktivnosti moguće je detaljnije proučiti Euklidov peti postulat. Učenici na komadu papira crtaju pravac i proizvoljnu točku koja nije na tom pravcu. Zadatak je da kroz tu točku nacrtaju što je moguće više pravaca paralelnih sa zadanim pravcem te pomoću crteža objasne zašto taj postulat ima smisla u ravnini. Zatim će učenici izreći taj postulat za okruženje sferne geometrije te pokušati provesti konstrukciju analognu onoj u ravnini. Konačno, objašnjavaju zašto taj postulat nema smisla na sferi te izriču svoj postulat koji je istinit za geometriju sfere. Na kraju aktivnosti, učenici će izraditi tablicu u kojoj će usporediti rezultate u ravnini i na sferi.

Sjecišta dvaju pravaca u ravnini	**Sjecišta dvaju pravaca na sferi**
Dva pravca bez zajedničkih točaka zovemo paralelnim pravcima.	Dvije velike kružnice nikada ne mogu biti paralelne.
Dva pravca s točno jednom zajedničkom točkom nazivamo pravcima koji se sijeku.	Dvije velike kružnice nikada ne mogu imati točno jednu točku sjecišta.
Dva pravca nikada ne mogu imati više od jedne točke sjecišta.	Dvije velike kružnice uvijek imaju točno dvije točke u kojima se sijeku.

Aktivnost 4: Koliki je zbroj mjera kutova u trokutu?

Ako zbrojimo mjere svih kutova trokuta, dobivamo li uvijek isti zbroj?

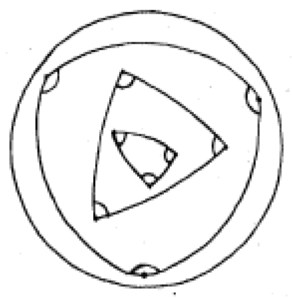
- *Istražite zbroj mjera kutova trokuta u ravnini.*
- *Istražite zbroj mjera kutova sfernih trokuta.*

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da zbroj mjera kutova u sfernom trokutu nije točno 180°, tj. da je taj zbroj između 180° i 540° .

Detaljan tijek:
Učenici crtaju dva trokuta u ravnini, jedan unutar drugog, i mjere unutarnje kutove svakog od trokuta. Pitanje za diskusiju:

- Objasnite zašto je zbroj mjera unutarnjih kutova trokuta u ravnini uvijek jednak.

Prije nego što će provesti konstrukciju na sferi, učenici diskutiraju koliki će biti zbroj mjera unutarnjih kutova sfernog trokuta.
Zatim crtaju tri trokuta na Lenartovoj sferi, prvi unutar drugoga i drugi unutar trećeg, pa mjere unutarnje kutove svakog od trokuta.



Slika 4.3: Konstrukcija na sferi (slika preuzeta iz [3]).

Pitanja za diskusiju:

- Objasnite zašto ste dobili različite zbrojeve mjera unutrašnjih kutova za svaki od tri trokuta.
- Što mislite koliki je najmanji mogući zbroj unutarnjih kutova sfernog trokuta?

- Što mislite koliki je najmanji mogući zbroj unutarnjih kutova sfernog trokuta? Obrazložite svoje razmišljanje.

Na kraju aktivnosti, učenici će izraditi tablicu u kojoj će usporediti rezultate u ravnini i na sferi.

Zbroj mjera unutrašnjih kutova trokuta u ravnini	**Zbroj mjera unutrašnjih kutova sfernih trokuta**
Zbroj mjera unutrašnjih kutova trokuta u ravnini uvijek je jednak 180° .	Najveći mogući trokut ima sve vrhove na istoj velikoj kružnici. Taj trokut ima tri kuta od 180° pa mu je zbroj mjera unutrašnjih kutova jednak 540°. To je degenerirani trokut jer su mu sva tri vrha kolinearna. Najmanji mogući trokut ima sva tri vrha na istoj velikoj kružnici i jednu stranicu koja leži na ostale dvije. Ovaj degenerirani trokut ima dva kuta od 0° i jedan kut od 180° , pa je zbroj mjera kutova jednak 180°. Stoga je zbroj mjera unutrašnjih kutova sfernog trokuta jednak ili veći od 180° i jednak ili manji od 540° . Za nedegenerirane sferne trokute zbroj mjera unutrašnjih kutova veći je od 180° i manji od 540°.

Aktivnost 5: Može li trokut imati više od jednog pravog kuta?

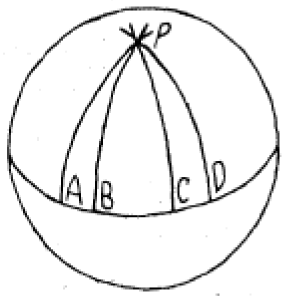
Pokušajte konstruirati trokut s više od jednog pravog kuta.

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da sferni trokut može imati više od jednog pravog kuta.

Detaljan tijek:
Učenici konstruiraju pravokutni trokut u ravnini. Pitanja za diskusiju:

- Objasnite zašto trokut u ravnini može imati najviše jedan pravi kut.

Prije nego što će provesti konstrukciju na sferi, učenici predviđaju može li sferni trokut imati više od jednog pravog kuta i obrazlažu svoja razmišljanja.
Zatim crtaju proizvoljnu točku P na sferi i veliku kružnicu čiji je točka P pol. Sljedeći korak je konstrukcija četiri okomice iz P na tu veliku kružnicu. Točke presjeka okomica i velike kružnice označit će sa A, B, C, D. Konačno, učenici mjere kutove i stranice trokuta PAB, PAC i PAD.

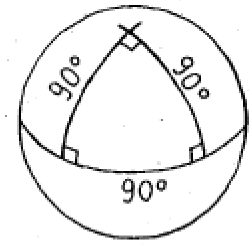


Slika 4.4: Konstrukcija na sferi (Slika preuzeta iz [3]).

Pitanja za diskusiju:

- Je li zbroj mjera unutrašnjih kutova sfernih trokuta uvijek jednak 180°?
- Opišite odnos između površina dobivenih trokuta i zbroja mjera njihovih unutrašnjih kutova.
- Nacrtajte trokut koji ima točno dva prava kuta. Izmjerite duljine njegovih stranica i zbroj mjera njegovih kutova.
- Nacrtajte trokut koji ima točno tri prava kuta. Izmjerite duljine njegovih stranica i zbroj mjera njegovih kutova.
- Mislite li da su pravokutni trokuti jednostavniji u ravnini ili na sferi? Obrazložite.
- Objasnite zašto KKK poučak garantira sukladnost sfernih trokuta.

Na kraju aktivnosti, učenici će izraditi tablicu u kojoj će usporediti rezultate u ravnini i na sferi.



Slika 4.5: Trokut s tri prava kuta i duljine njegovih stranica. (Slika preuzeta iz [3].

Pravokutni trokuti u ravnini	**Pravokutni trokuti na sferi**
Trokut može imati najviše jedan pravi kut,	Trokut može imati jedan, dva ili tri prava kuta.
Ako dva trokuta zadovoljavaju uvjete KKK poučka, oni nisu nužno sukladni.	Ako dva trokuta zadovoljavaju uvjete KKK poučka, sigurno su sukladni.

Ovo je bio primjer radionice u trajanju od 5 sati na dodatnoj nastavi. Provedene su osnovne aktivnosti kroz koje učenici uočavaju osnovne razlike ravninske i sferne geometrije. Ovisno o vremenu koje nastavnik ima na raspolaganju, aktivnosti je moguće i proširiti naprednijim sadržajima.

Bibliografija

[1] Patrick J. Ryan, *Euclidean and Non-Euclidean Geometry An Analytic Approach*, (1986.), Cambridge University Press.

[2] Glen Van Brummelen, *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical trigonometry*, (2013.) Princeton University Press.

[3] Istvan Lenart, *Non-Euclidean Adventures on the Lenart sphere: Investigations in Planar and Spherical Geometry*, (1996.), Key Curriculum Press.

[4] Iva Kavčić, Vedran Krčadinac, *Sferna i hiperbolička trigonometrija*, Matematičko-fizički list, LXIX 1 (2018.-2019.).

[5] Vedrana Mikulić Crnković, Ivona Traunkar, *Sferna geometrija na Lenartovoj sferi*, (2020.), Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, broj 84.

[6] Željka Milin Šipuš, Nastavni materijali kolegija *Modeli geometrije*, PMF-Matematički odsjek.

[7] *Spherical geometry*, https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical geometry.

[8] Krešimir Horvatić, *Linearna algebra*, (2004.), Golden Marketing - Tehnička knjiga.

Sažetak

U ovom su diplomskom radu opisani osnovni pojmovi sferne geometrije, te su navedeni osnovni teoremi i definicije spomenutog područja matematike. Redom su opisana osnovna svojstva sferne geometrije, sferna trigonometrija, sferna gibanja te konačno, petodnevna radionica sferne geometrije na dodatnoj nastavi matematike.
Sferna geometrija je gradivo koje se u Republici Hrvatskoj ne nalazi u redovnom programu osnovne i srednje škole. Stoga je u radu predstavljen način kako to područje približiti učenicima u sklopu dodatne nastave matematike. Prikazan je niz aktivnosti u kojima učenici provode konstrukcije u okruženjima ravninske i sferne geometrije te prevođenjem problema iz jedne geometrije u drugu produbljuju svoje znanje.

Summary

This thesis presents the basic concepts as well as an overview of the basic definitions and theorems of spherical geometry. It includes the following sections: basic concepts and properties of spherical geometry, spherical trigonometry, spherical motions, as well as a five-day workshop in spherical geometry for interested high school students.
Spherical geometry is not part of the national curriculum for Croatian primary and secondary schools. Therefore, the paper presents a way to bring this area of mathematics closer to students through additional teaching of mathematics. It provides a sequence of activities in which students construct shapes in both geometries (plane and spherical geometry) as well as deepen their knowledge by transferring problems from one geometry to another.

Životopis

Rođen sam u Koprivnici 03. veljače 1989. godine. Završio sam Osnovnu školu Ljudevita Modeca u Križevcima 2003. godine, pa upisao Gimnaziju Ivana Zakmardija Dijankovečkog u Križevcima, opći smjer. Nakon završetka srednje škole 2007. godine, upisujem Farmaceutsko-biokemijski fakultet u Zagrebu, kojeg ne uspijevam završiti.
Kako od 2010. godine radim kao voditelj škole tenisa u Križevcima, a matematika mi je bila stara strast, odlučujem spojiti ljubav prema radu s djecom i matematici te 2016. godine upisujem preddiplomski studij Matematika; nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.
2019. godine upisujem diplomski studij Matematika; nastavnički smjer na istom fakultetu.