

# Izoperimetrijska nejednakost i primjene

---

Škrnjug, Karla

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:099270>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-19**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Karla Škrnjug

**IZOPERIMETRIJSKA NEJEDNAKOST I  
PRIMJENE**

Diplomski rad

Voditelji rada:  
dr. sc. Marija Galić  
izv. prof. dr. sc. Boris Muha

Zagreb, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem se dragoj mentorici dr. sc. Mariji Galić koja mi je predložila ovu zanimljivu temu te na njenom strpljenju, pomoći i vodstvu pri izradi ovog diplomskog rada.*

*Hvala mojoj obitelji koja mi je omogućila studiranje i bila podrška tijekom svih godina studija.*

*Hvala prijateljicama na stvaranju divnih uspomena tijekom ovih pet godina studiranja.*

*Posebno hvala dečku Valentinu bez čije podrške i ljubavi nijedan uspjeh, pa tako ni ovaj, ne bi bio moguć, niti potpun. Hvala što si vjerovao u mene čak i kada ja nisam!*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Izoperimetrijska nejednakost</b>	<b>3</b>
1.1 Osnovna teorija krivulja . . . . .	3
1.2 Izoperimetrijska nejednakost i dokazi . . . . .	8
<b>2 Povijesni pregled</b>	<b>17</b>
2.1 Zenodorusovi teoremi . . . . .	17
2.2 Steinerovi dokazi . . . . .	22
2.3 Dodatak: geometrijski dokaz formule za površinu . . . . .	27
<b>3 Izoperimetrijski problem geometrijskih likova u ravnini</b>	<b>29</b>
3.1 Izoperimetrijski problem za trokut . . . . .	29
3.2 Izoperimetrijski problem za četverokut . . . . .	34
<b>4 Primjena izoperimetrijskog problema u srednjoškolskim zadacima</b>	<b>41</b>
4.1 Aktivnosti u nastavi matematike u kojima se pojavljuje izoperimetrijski problem . . . . .	42
4.2 Zadaci u kojima se pojavljuje izoperimetrijski problem . . . . .	51
<b>Bibliografija</b>	<b>58</b>

# Uvod

Početak razvoja matematike vežemo uz Egipćane i Babilonce. Iako nisu imali konkretne dokaze niti precizna objašnjenja, poznavali su neke osnovne pojmove i teoreme koje su primjenjivali u zadacima. Bavili su se rješavanjem brojnih problema u različitim područjima matematike, a jedan od problema koji su pronašli poznat je pod nazivom *Didonin problem*, u suvremenoj matematici poznat kao *Izoperimetrijski problem*, čije je precizno rješenje otkriveno tek u 18. stoljeću nove ere.

Legenda kaže da je kraljica Didona (danas poznata kao kraljica Kartage) prilikom bježanja iz vlastitog grada tražila sklonište. U potrazi za skloništem naišla je na područje u blizini današnjeg grada Tunisa. Došavši do lokalnog vladara Yarba, "skromno" je zatražila da joj proda onoliko zemlje koliko se može ograničiti kožom jednog bika. Yarb je pristao, a Didona je, zajedno sa svojim podanicima, kožu bika razrezala na uske trake te je njihovim spajanjem ograničila jedno veliko područje na kojem je kasnije nastala Kartaga. Iz navedene priče nastao je Didonin problem:



Slika 0.1: Didona razrezuje kožu bika

*Odrediti maksimalnu površinu zemlje koja se može ograditi spajanjem traka od kože bika.*

kojeg je ona intuitivno riješila. Na suvremenom jeziku matematike, problem bi glasio:

*Među svim krivuljama, pronađite onu koja zatvara maksimalnu površinu.*

Navedimo još da su se stari Grci zanimali za ovaj problem i iz praktičnih razloga. Naime, u to doba se vjerovalo da opseg nekog područja određuje i njegovu površinu, stoga je bilo korisno imati gornju granicu za površinu kako bi se spriječilo varanje lokalnih trgovaca koji su površinu određivali prema opsegu.

U ovom diplomskom radu detaljno ćemo proučiti izoperimetrijski problem, njegovu važnost i primjene, te ćemo dokazati izoperimetrijsku nejednakost, slavni rezultat globalne teorije ravninskih krivulja koji nam daje odgovor na pitanje koje izometrijski problem postavlja. Unutar prvog poglavlja dotaknut ćemo se osnovne teorije krivulja koja nam je potrebna za razumijevanje materije. Zatim ćemo iskazati i na tri načina dokazati izoperimetrijsku nejednakost.

U drugom poglavlju dat ćemo kratak povijesni pregled kako se dokazao teorem koji kaže da *Krug ima veću površinu od bilo kojeg mnogokuta s istim opsegom*. Naime, u pokušaju dokazivanja izoperimetrijskog problema, matematičari su došli do otkrića veznog uz krug te su vjerovali kako je time izoperimetrijska nejednakost dokazana.

U trećem poglavlju vidjet ćemo kako glasi izoperimetrijski problem za geometrijske likove u ravnini. Točnije, otkrit ćemo koji od svih danih trokuta odnosno četverokuta s istim opsegom ima najveću površinu. Intuitivno već znamo odgovor, no jednostavnim algebarskim izračunom pokazat ćemo dane tvrdnje.

U zadnjem, četvrtom poglavlju, opisat ćemo aktivnosti u kojima se pojavljuje izoperimetrijski problem, a koje su prikladne za izvođenje u nastavi matematike u srednjim školama. Također, vidjet ćemo i primjere zadataka u kojima se pojavljuje izoperimetrijski problem i koji su također prilagođeni učenicima srednjih škola.

# Poglavlje 1

## Izoperimetrijska nejednakost

### 1.1 Osnovna teorija krivulja

Kroz dosadašnje obrazovanje već smo se puno puta susreli s krivuljama. Iako možda u ovom trenutku ne znamo preciznu definiciju, svakako intuitivno znamo što su to krivulje. Neke od najjednostavnijih krivulja s kojima smo se susreli su pravac i kružnica. Svaku krivulju možemo prikazati grafički ili jednadžbom, pa stoga pravac možemo prikazati implicitnim oblikom jednadžbe na sljedeći način:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdje su  $A, B$  i  $C$  realni brojevi. S druge strane, kružnicu možemo prikazati jednadžbom

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2,$$

gdje je  $(p, q)$  središte kružnice, a  $r$  radijus ili polumjer kružnice. Implicitnim jednadžbama krivulje opisujemo kao skup točaka, gdje se točka kreće u ravnini te pritom ostavlja trag iza sebe. Pomicanjem točke nastaje krivulja. S druge strane, krivulje možemo prikazati i parametarski. To znači da vremenskom trenutku pridružujemo položaj čestice u tom trenutku. Preciznije, pravac parametarski prikazujemo:

$$x = at + p, y = bt + q, \quad t \in \mathbb{R},$$

pri čemu je  $(p, q)$  točka kojom pravac prolazi, a  $(a, b)$  vektor smjera pravca. Analogno, kružnicu prikazujemo

$$x = r \cos(t) + p, y = r \sin(t) + q, \quad t \in [0, 2\pi],$$

pri čemu je  $r$  duljina radijusa ili polumjera kružnice, a  $(p, q)$  središte kružnice. Sada možemo definirati pojam krivulje.



**Definicija 1.1. Parametrizirana krivulja**  $\gamma$  u  $\mathbb{R}^n$  je glatko preslikavanje s otvorenog intervala  $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$  u  $\mathbb{R}^n$

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

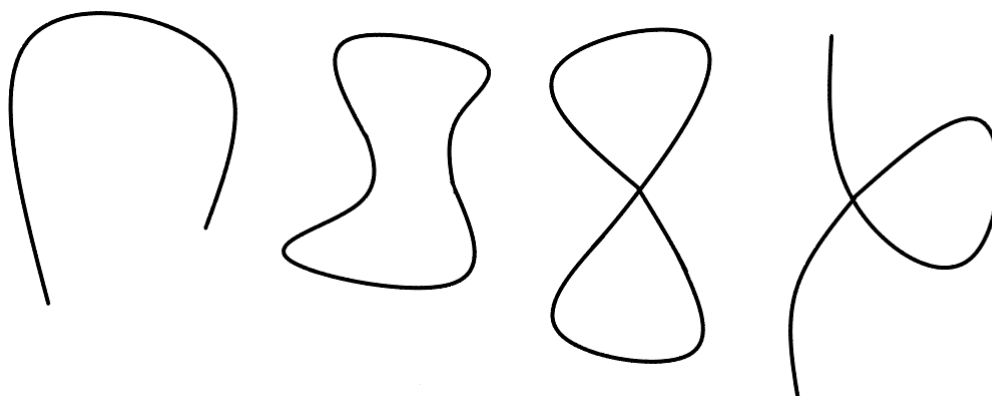
Kažemo da je parametrizirana krivulja  $\gamma$  **regularna** u točki  $t \in I$  ako vrijedi

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t) \neq 0,$$

u suprotnom kažemo da je  $\gamma$  singularna u točki  $t \in I$ . Ako je parametrizirana krivulja regularna u svakoj točki  $t \in I$ , onda kažemo da je krivulja  $\gamma$  regularna.

**Napomena.** Funkcija je *glatko preslikavanje* na nekom intervalu  $I$  ako je funkcija u svakoj točki tog intervala neprekidna i ima derivaciju svakog reda.

Kada govorimo o položaju krivulja u ravnini ili prostoru, možemo promatrati jednostavne ili složene, odnosno otvorene ili zatvorene krivulje. Na Slici 1.1 su prikazane redom



Slika 1.1: Primjeri raznih krivulja

jednostavno otvorena, jednostavno zatvorena, složena zatvorena i složena otvorena krivulja. Uočimo da kod jednostavnih krivulja nema samopresijecanja traga što nije slučaj kod složenih krivulja. Sada možemo pobliže pojasniti kakve su to jednostavno zatvorene krivulje.

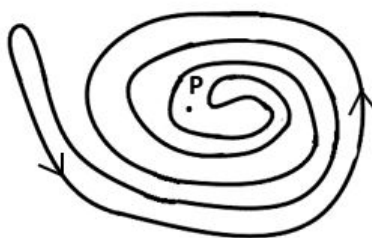
**Definicija 1.2.** Za regularnu krivulju  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  kažemo da je **zatvorena** ako postoji konstanta  $L \in \mathbb{R}$  za koju je  $\gamma(t + L) = \gamma(t)$  za sve  $t \in \mathbb{R}$ . Najmanja takva konstanta naziva se **periodom** krivulje  $\gamma$ .

**Definicija 1.3.** Za zatvorenu krivulju s periodom  $L$  kažemo da je **jednostavno zatvorena krivulja** u  $\mathbb{R}^2$  ako je  $\gamma(t) = \gamma(t')$  ako i samo ako  $t - t' = kL$  za neki  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ako поближе promotrimo jednostavno zatvorene krivulje, možemo uočiti da svaka jednostavno zatvorena krivulja ima unutrašnjost i vanjštinu. Preciznije, prema *teoremu o Jordanovoj krivulji* možemo reći da skup točaka koje nisu točke krivulje čine disjunktnu uniju dvaju podskupova od  $\mathbb{R}^2$  sa svojstvima:

- vanjšтина  $\text{ext}(\gamma)$  je neograničen skup,
- unutrašnjost  $\text{int}(\gamma)$  je ograničen skup,
- unutrašnjost  $\text{int}(\gamma)$  i vanjšтина  $\text{ext}(\gamma)$  su povezani skupovi, tj. svake dvije točke iz skupa mogu biti povezane krivuljom koja je cijela sadržana u tom skupu.

Na Slici 1.2 vidimo da nije uvijek jednostavno odrediti nalazi li se točka  $P$  u unutrašnjosti ili vanjštini krivulje. Kada govorimo o jednostavno zatvorenim krivuljama, možemo pro-

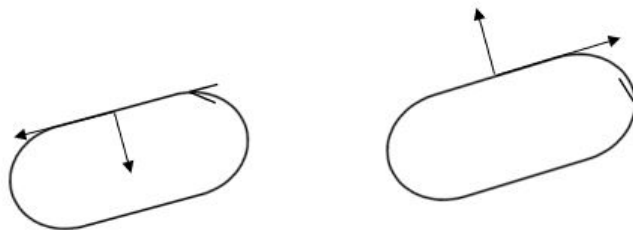


Slika 1.2: Jednostavno zatvorena krivulja

matrati njihovu *orijentaciju*. Uočimo da je na Slici 1.2 orijentacija u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Takva orijentacija naziva se *pozitivna orijentacija*. S druge strane, za krivulju kažemo da je negativno orijentirana ako je njezin smjer u smjeru kazaljke na satu što možemo vidjeti na Slici 1.3.

**Definicija 1.4.** Neka je  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regularna krivulja. Tada vektor  $\dot{\gamma}(t)$  zovemo **vektorom brzine** ili **tangencijalnim vektorom** krivulje  $\gamma$  u trenutku  $t$ . Funkciju  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  zovemo **brzinom krivulje**  $\gamma$  u trenutku  $t$ . Kažemo da je  $\gamma$  **jedinične brzine** ili **parametrizirana duljinom luka** ako vrijedi:

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = 1, \quad \forall t \in I. \quad (1.1)$$



Slika 1.3: Pozitivna i negativna orijentacija krivulje

**Definicija 1.5.** Neka je  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizirana krivulja. **Funkcija duljine luka** krivulje  $\gamma$  od točke  $\gamma(t_0)$ ,  $t_0 \in I$  je funkcija

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du. \quad (1.2)$$

**Duljina** krivulje  $\gamma$  definirana je kao realan broj

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt. \quad (1.3)$$

**Definicija 1.6.** Neka je  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizirana krivulja. Parametrizirana krivulja  $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  je **reparametrizacija** krivulje  $\gamma$  ako postoji difeomorfizam  $\varphi : J \rightarrow I$  za koji vrijedi  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ , tj.

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s)) = \gamma(t), s \in J, t \in I.$$

**Napomena.** Ako je  $\gamma$  regularna krivulja, tada je i njena reparametrizacija  $\tilde{\gamma}$  također regularna.

**Primjer.** Zadana je kružnica s parametrizacijom  $\gamma(t) = (p+r \sin(t), q+r \cos(t))$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ . Pogledajmo čemu je jednaka njena reparametrizacija duljinom luka. Koristeći formulu (1.2) odredimo čemu je jednaka funkcija duljine luka kružnice:

$$s(t) = \int_0^{2\pi} r dt = rt \implies t = \frac{s}{r}.$$

Uvrstimo  $t$  u parametrizaciju:

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma\left(\frac{s}{r}\right) = \left(p + r \sin\left(\frac{s}{r}\right), q + r \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right), \quad s \in [0, 2r\pi).$$

Lako se vidi da vrijedi:  $\|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\| = 1$ , tj.  $\tilde{\gamma}$  je parametrizacija duljinom luka.

**Primjer.** Pokažimo sada da je reparametrizacija  $\tilde{\gamma}$  jednostavno zatvorene krivulje  $\gamma$  s periodom  $L$  također jednostavno zatvorena krivulja s periodom  $l(\gamma)$ .

Koristeći definiciju funkcije duljine luka krivulje (1.2) uočimo sljedeće:

$$s(t + L) = \int_0^{t+L} \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_0^L \|\dot{\gamma}(u)\| du + \int_L^{t+L} \|\dot{\gamma}(u)\| du.$$

Prvi integral s desne strane jednakosti je zapravo duljina luka krivulje  $\gamma$ , točnije  $l(\gamma)$ . Drugi integral možemo raspisati na sljedeći način:

$$\int_L^{t+L} \|\dot{\gamma}(u)\| du = \left\{ \begin{array}{l} v = u - L \\ dv = du \end{array} \right\} = \int_0^t \|\dot{\gamma}(v + L)\| dv = \int_0^t \|\dot{\gamma}(v)\| dv = s(t)$$

pri čemu smo u predzadnjoj jednakosti koristili činjenicu da je  $\gamma$  jednostavno zatvorena krivulja s periodom  $L$  pa vrijedi  $\gamma(v + L) = \gamma(v)$ , a time i  $\dot{\gamma}(v + L) = \dot{\gamma}(v)$ . Dakle, dobili smo da vrijedi

$$s(t + L) = s(t) + l(\gamma).$$

Analogno možemo dobiti da vrijedi i

$$s(t + kL) = s(t) + kl(\gamma), \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}. \quad (1.4)$$

Konačno,

$$\tilde{\gamma}(s + kl(\gamma)) = \tilde{\gamma}(s(t) + kl(\gamma)) = \tilde{\gamma}(s(t + kL)) = \gamma(t + kL) = \gamma(t) = \tilde{\gamma}(s),$$

gdje smo koristili (1.4), jednakost  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$  te činjenicu da je  $\gamma$  jednostavno zatvorena krivulja s periodom  $L$ . Ovime smo pokazali da je reparametrizacija  $\tilde{\gamma}$  također jednostavno zatvorena krivulja s periodom  $l(\gamma)$ .

Znamo da se površina omeđena nekom zatvorenom krivuljom može odrediti pomoću integrala, tj.

$$\mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = \int_{\text{int}(\gamma)} dx dy. \quad (1.5)$$

Zbog jednostavnosti notacije, koristit ćemo oznaku  $\mathcal{A}(\gamma) := \mathcal{A}(\text{int}(\gamma))$ .

Tu površinu možemo odrediti koristeći Greenov teorem.

**Teorem 1.7** (Greenov teorem). Neka je  $\Omega$  otvoren skup u  $\mathbb{R}^2$  i  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije klase  $C^1$  na  $\Omega$ . Neka je  $\Gamma$  kontura i neka je  $D$  zatvoreno područje unutar konture  $\Gamma$ . Pretpostavimo da je  $D$  podskup od  $\Omega$ . Tada vrijedi:

$$\int_{\text{int}(\Gamma)} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

gdje je  $\Gamma$  pozitivno orijentirana jednostavno zatvorena krivulja.

**Napomena.** *Kontura* je po dijelovima gladak zatvoren put koji sam sebe ne presijeca, odnosno neprekidna funkcija  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  takva da je  $\gamma|_{(a,b)}$  injekcija.

**Propozicija 1.8.** Ako je  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  pozitivno orijentirana jednostavno zatvorena krivulja u  $\mathbb{R}^2$  s periodom  $L$ , tada vrijedi:

$$\mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^L (x\dot{y} - y\dot{x}) dt. \quad (1.6)$$

*Dokaz.* Ako stavimo da je  $f = -\frac{1}{2}y$ ,  $g = \frac{1}{2}x$ , slijedi da je  $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 1$ . Uvrštavanjem tako definiranih funkcija  $f$  i  $g$  u Teorem 1.7 slijedi:

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_{\text{int}\gamma} 1 dx dy = \int_{\gamma} \left( -\frac{1}{2}y dx + \frac{1}{2}x dy \right) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (-y dx + x dy) = \frac{1}{2} \int_0^L (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

čime je propozicija dokazana.  $\square$

**Napomena.** Kako je  $\gamma$  jednostavno zatvorena krivulja, slijedi da je

$$\int_0^L (x\dot{y} + \dot{x}y) dt = \int_0^L (xy)' dt = x(L)y(L) - x(0)y(0) = 0,$$

odakle vidimo da vrijedi

$$\int_0^L x\dot{y} dt = - \int_0^L \dot{x}y dt. \quad (1.7)$$

Uvrštavanjem (1.7) u (1.6), dobivamo još jednu formulu pomoću koje možemo računati površinu:

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^L x\dot{y} dt = - \int_0^L \dot{x}y dt. \quad (1.8)$$

## 1.2 Izoperimetrijska nejednakost i dokazi

Nakon kratkog uvoda u teoriju krivulja, spremni smo iskazati (i dokazati) teorem izoperimetrijske nejednakosti.

**Teorem 1.9 (Izoperimetrijska nejednakost).** Neka je  $\gamma$  jednostavno zatvorena krivulja,  $l(\gamma)$  njena duljina (opseg) i  $\mathcal{A}(\gamma)$  površina unutrašnjosti. Tada je

$$\mathcal{A}(\gamma) \leq \frac{1}{4\pi} l(\gamma)^2. \quad (1.9)$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\gamma$  kružnica.

**Napomena.** Ako je  $\gamma$  kružnica, tada je  $\mathcal{A}(\gamma) = r^2\pi$ , a  $l(\gamma) = 2r\pi$ , odakle slijedi:

$$\mathcal{A}(\gamma) = r^2\pi = \frac{1}{4\pi}4r^2\pi = \frac{1}{4\pi}l(\gamma).$$

**Napomena.** Nekad će nam biti korisnije promatrati *dualni izoperimetrijski problem* koji glasi:

*Od svih likova sa zadanom površinom, pronađite onaj s najmanjim opsegom.*

Jasno je da je ovaj problem ekvivalentan originalnom izoperimetrijskom problemu, a poveznica između njih je postupak skaliranja. Pretpostavimo da krug rješava samo dualni problem, a da ne rješava originalni problem. To bi značilo da postoji neki drugi geometrijski lik koji ima isti opseg kao krug, ali veću površinu. Nadalje, taj lik možemo reskalirati tako da ima istu površinu kao i krug. No, reskalirani lik onda ima manji opseg što je kontradikcija. Dakle, izometrijski problem i njemu dualni problem su ekvivalentni.

U dokazu Teorema 1.9 koristit ćemo sljedeću nejednakost:

**Propozicija 1.10** (Wirtingerova<sup>1</sup> nejednakost). Neka je  $F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  glatka funkcija za koju vrijedi  $F(0) = F(\pi) = 0$ . Tada vrijedi

$$\int_0^\pi \dot{F}(t)^2 dt \geq \int_0^\pi F(t)^2 dt,$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je  $F(t) = A \sin(t)$  za svaki  $t \in [0, \pi]$ , gdje je  $A$  proizvoljna konstanta.

*Dokaz.* Neka je  $G(t) = \frac{F(t)}{\sin(t)}$ . Vrijedi:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \dot{F}^2 dt &= \int_0^\pi (\dot{G} \sin(t) + G \cos(t))^2 dt \\ &= \int_0^\pi \dot{G}^2 \sin^2(t) dt + 2 \int_0^\pi G \dot{G} \sin(t) \cos(t) dt + \int_0^\pi G^2 \cos^2(t) dt. \end{aligned} \tag{1.10}$$

---

<sup>1</sup>Wilhelm Wirtinger (1865. -1945.), austrijski matematičar

Raspišimo izraz  $2 \int_0^\pi G \dot{G} \sin(t) \cos(t) dt$  koristeći parcijalnu integraciju:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi G \dot{G} \sin(t) \cos(t) dt \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} du = \dot{G} dt \\ v = G \sin(t) \cos(t) \end{array} \quad \begin{array}{l} u = G \\ dv = (\dot{G} \sin(t) \cos(t) + G(\cos^2(t) - \sin^2(t))) dt \end{array} \right\} \quad (1.11) \\
 &= G^2 \sin(t) \cos(t) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (G \dot{G} \sin(t) \cos(t) + G^2(\cos^2(t) - \sin^2(t))) dt \\
 &= - \int_0^\pi G \dot{G} \sin(t) \cos(t) dt + \int_0^\pi G^2(\sin^2(t) - \cos^2(t)) dt,
 \end{aligned}$$

odakle slijedi da je

$$2 \int_0^\pi G \dot{G} \sin(t) \cos(t) dt = \int_0^\pi G^2(\sin^2(t) - \cos^2(t)) dt.$$

Uvrštavanjem prethodne jednakosti u (1.10) imamo:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \dot{F}^2 dt &= \int_0^\pi \dot{G}^2 \sin^2(t) dt + \int_0^\pi G^2(\sin^2(t) - \cos^2(t)) dt + \int_0^\pi G^2 \cos^2(t) dt \\
 &= \int_0^\pi (\dot{G}^2 + G^2) \sin^2(t) dt = \int_0^\pi \dot{G}^2 \sin^2(t) dt + \int_0^\pi G^2 \sin^2(t) dt \\
 &= \int_0^\pi \dot{G}^2 \sin^2(t) dt + \int_0^\pi F^2 dt,
 \end{aligned}$$

odakle slijedi da je

$$\int_0^\pi \dot{F}^2 dt - \int_0^\pi F^2 dt = \int_0^\pi \dot{G}^2 \sin^2(t) dt.$$

Integral s desne strane je sigurno veći ili jednak od 0, odnosno jednak je 0 ako i samo ako je  $\dot{G} = 0$ , odnosno ako je  $G$  konstantna funkcija, tj.  $F = A \sin t$ , gdje je  $A$  proizvoljna konstanta. Time je dokazana Wirtingerova nejednakost.  $\square$

## Prvi dokaz

*Dokaz Teorema 1.9.* Najprije bismo mogli pretpostaviti da je krivulja  $\gamma$  parametrizirana duljinom luka  $s$ . No, kako se u iskazu teorema pojavljuje  $\pi$ , i kako znamo da je  $\gamma$  jednostavno zatvorena krivulja, pretpostavit ćemo da je period od  $\gamma$  jednak  $\pi$  i da je  $\gamma$  parametrizirana s  $t$ , gdje je

$$t = \frac{\pi s}{l(\gamma)}.$$

Dobivena krivulja je i dalje jednostavno zatvorena i ima period  $\pi$  jer kad se  $s$  poveća za  $l(\gamma)$  tada se  $t$  poveća za  $\pi$ .

Nadalje, uočimo da se  $l(\gamma)$  i  $\mathcal{A}(\gamma)$  ne mijenjaju ako se  $\gamma$  translacija za konstantan vektor  $b$ , tj.  $\gamma(t) \rightarrow \gamma(t) + b$ . Uzimajući  $b = -\gamma(0)$ , možemo pretpostaviti i da je  $\gamma(0) = 0$ , odnosno da  $\gamma$  počinje i završava u ishodištu.

Kako bismo dokazali Teorem 1.9, izračunat ćemo  $l(\gamma)$  i  $\mathcal{A}(\gamma)$  koristeći polarne koordinate:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Ako  $s$  označimo  $\frac{d}{dt}$ , lako se vidi da vrijedi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta}, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta}, \end{aligned}$$

odakle kvadriranjem dobivamo:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \theta - 2\theta \cdot r \dot{r} \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2, \\ \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \theta + 2\theta \cdot r \dot{r} \sin \theta \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivenih izraza i korištenjem osnovnog trigonometrijskog identiteta slijedi:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2. \quad (1.12)$$

S druge strane,

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = \left( \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right) \left( \frac{ds}{dt} \right)^2,$$

gdje smo iskoristili lančano pravilo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Kako je  $t = \frac{\pi s}{l(\gamma)}$ , slijedi da je  $s = \frac{t l(\gamma)}{\pi}$ , pa je

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{l(\gamma)^2}{\pi^2}.$$

Nadalje, koristeći činjenicu da je  $s$  parametar duljine luka, znamo da vrijedi

$$\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 = 1,$$



čime se jednakost (1.12) svodi na

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \frac{l(\gamma)^2}{\pi^2}. \quad (1.13)$$

Odredimo sada čemu je jednak izraz  $x\dot{y} - y\dot{x}$  (koji se pojavljuje kod računanja površine):

$$\begin{aligned} x\dot{y} - y\dot{x} &= r \cos \theta \cdot (\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta}) - r \sin \theta \cdot (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta}) \\ &= r^2\dot{\theta}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2\dot{\theta}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Uvrštavanjem prethodne jednakosti (1.14) u Propoziciju 1.8, slijedi:

$$\mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (x\dot{y} - y\dot{x}) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (r^2\dot{\theta}) dt.$$

Nadalje, koristeći jednakost (1.13), slijedi:

$$\int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) dt = \int_0^\pi \frac{l(\gamma)^2}{\pi^2} dt = \frac{l(\gamma)^2}{\pi^2} \cdot \pi = \frac{l(\gamma)^2}{\pi}.$$

Koristeći prethodne dvije jednakosti, vidimo da izraz  $\frac{l(\gamma)^2}{4\pi} - \mathcal{A}(\gamma)$  možemo zapisati kao

$$\frac{l(\gamma)^2}{4\pi} - \mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{4} \int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi (r^2 \cdot \dot{\theta}) dt = \frac{1}{4} \int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - 2r^2\dot{\theta}) dt.$$

Ako označimo

$$\mathcal{I} := \int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - 2r^2\dot{\theta}) dt,$$

vidimo da se dokaz izoperimetrijske nejednakosti svodi na pokazivanje da je  $\mathcal{I} \geq 0$ , te da je  $\mathcal{I} = 0$  ako i samo ako je  $\gamma$  kružnica. Računamo:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (r^2(\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}) + \dot{r}^2) dt &= \int_0^\pi (r^2(\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta} + 1 - 1) + \dot{r}^2) dt \\ &= \int_0^\pi (r^2(\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta} + 1) - r^2 + \dot{r}^2) dt \\ &= \int_0^\pi (r^2(\dot{\theta} - 1)^2 - r^2 + \dot{r}^2) dt \\ &= \int_0^\pi r^2(\dot{\theta} - 1)^2 dt + \int_0^\pi (\dot{r}^2 - r^2) dt. \end{aligned}$$

Uočimo da je prvi integral sigurno veći ili jednak nuli. Kako bismo se uvjerali da je i drugi integral veći ili jednak nuli, iskoristit ćemo Wirtingerovu nejednakost s  $F = r$ . Funkcija  $F$

zadovoljava pretpostavke Propozicije 1.10 jer je  $r(0) = r(\pi) = 0$  zbog  $\gamma(0) = \gamma(\pi) = 0$ . Stoga vrijedi  $I \geq 0$ .

Jednakost se postiže ako i samo ako je  $I = 0$ , a to je moguće jedino ako su oba integrala jednaka 0. Prvi integral s desne strane jednak je 0 ako i samo ako je  $\dot{\theta} = 1$  za svaki  $t$ , a drugi integral je jednak 0 ako i samo ako je  $r = A \sin t$ , gdje je  $A$  konstanta (ponovno koristimo Wirtingerovu nejednakost).  $\square$

## Drugi dokaz

Izoperimetrijsku nejednakost možemo dokazati i primjenom Fourierovih redova.

*Dokaz Teorema 1.9.* Neka je  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  parametrizacija od  $\gamma$  duljinom luka, tj.  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1, \forall t$ . Tada je period od  $\gamma$  jednak  $L = l(\gamma)$ . Definirajmo kompleksnu funkciju  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  s periodom  $2\pi$  :

$$z(t) = x\left(\frac{L}{2\pi}t\right) + iy\left(\frac{L}{2\pi}t\right).$$

Ako  $\mathbb{C}$  shvatimo kao  $\mathbb{R}^2$ , možemo pisati

$$z(t) = \left(x\left(\frac{L}{2\pi}t\right), y\left(\frac{L}{2\pi}t\right)\right),$$

odakle slijedi

$$z\left(\frac{2\pi}{L}t\right) = \left(x\left(\frac{L}{2\pi} \frac{2\pi}{L}t\right), y\left(\frac{L}{2\pi} \frac{2\pi}{L}t\right)\right) = (x(t), y(t)) = \gamma(t).$$

Dakle,  $z$  je parametrizacija od  $\gamma$ . Nadalje, iz definicije funkcije  $z$ , slijedi da je

$$\dot{z}(t) = \frac{L}{2\pi} \dot{x}\left(\frac{L}{2\pi}t\right) + i \frac{L}{2\pi} \dot{y}\left(\frac{L}{2\pi}t\right), \quad (1.15)$$

što koristimo u sljedećem računu:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\dot{z}(t)|^2 dt &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(\dot{z}(t))^2 + \operatorname{Im}(\dot{z}(t))^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \dot{x}^2\left(\frac{L}{2\pi}t\right) + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \dot{y}^2\left(\frac{L}{2\pi}t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \underbrace{\left\|\dot{\gamma}\left(\frac{L}{2\pi}t\right)\right\|}_{1}^2 dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 dt = \frac{L^2}{2\pi}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

S druge strane, periodičnu funkciju  $z$  možemo zapisati u obliku Fourierovog reda:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

gdje su  $c_k \in \mathbb{C}$  koeficijenti u raspisu Fourierovog reda, odakle slijedi:

$$\dot{z}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k i k e^{ikt}.$$

Sada ponovno računamo isti izraz kao u (1.16), ali koristeći razvoj u Fourierov red:

$$\int_0^{2\pi} |\dot{z}(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} \dot{z}(t) \bar{\dot{z}}(t) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c}_l k l e^{i(k-l)t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \cdot k^2 \cdot 2\pi. \quad (1.17)$$

Izjednačavanjem (1.16) i (1.17) dobivamo izraz za duljinu krivulje  $\gamma$  izražen pomoću Fourierovih koeficijenata:

$$l(\gamma)^2 = L^2 = (2\pi)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \cdot k^2. \quad (1.18)$$

Pogledajmo još čemu je jednaka površina koju omeđuje krivulja  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A}(\gamma) &= \int_0^L (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt = \int_0^L \operatorname{Re} \left( z \left( \frac{2\pi}{L} t \right) \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot i \cdot \bar{\dot{z}} \left( \frac{2\pi}{L} t \right) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(z(s) \cdot i \cdot \bar{\dot{z}}(s)) ds = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iks} \cdot i \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{c}_l (-i) l e^{-ils} \right) ds \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} l c_k \bar{c}_l e^{i(k-l)s} ds \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 2\pi. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Prije nastavka, slijedi kratak račun koji pokazuje kako smo dobili drugu jednakost u (1.19). Lako se vidi da vrijedi:

$$xy - \dot{x}y = \operatorname{Re}[(x + iy)(i\dot{x} + \dot{y})].$$

Iz (1.15) slijedi:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) &= \frac{2\pi}{L} \dot{z} \left( \frac{2\pi}{L} t \right) / i, \\ \dot{x}(t) - i\dot{y}(t) &= \frac{2\pi}{L} \dot{z} \left( \frac{2\pi}{L} t \right) / i, \\ i\dot{x}(t) + \dot{y}(t) &= i \frac{2\pi}{L} \dot{z} \left( \frac{2\pi}{L} t \right). \end{aligned}$$

Kako znamo da je

$$x(t) + iy(t) = z\left(\frac{2\pi}{L}t\right),$$

slijedi tvrdnja.

Konačno iz (1.18) i (1.19) zaključujemo da vrijedi:

$$\frac{\mathcal{A}(\gamma)}{\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|c_k|^2 = \frac{l(\gamma)^2}{(2\pi)^2},$$

odakle slijedi:

$$4\pi\mathcal{A}(\gamma) \leq l(\gamma)^2.$$

□

### Treći dokaz

*Dokaz Teorema 1.9.* Neka je  $\gamma^r = r\gamma$  krivulja nastala homotetijom od  $\gamma$  s koeficijentom  $r$ , gdje je  $r > 0$ . Tada je duljina krivulje  $\gamma^r$  jednaka

$$l(\gamma^r) = l(r\gamma) = \int_a^b \|r\dot{\gamma}\| dt = r \int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt = rl(\gamma),$$

dok je površina unutrašnjosti krivulje  $\gamma^r$  jednaka

$$\mathcal{A}(\gamma^r) = \mathcal{A}(r\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b (rxr\dot{y} - r\dot{x}ry) dt = r^2 \frac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y) dt = r^2 \mathcal{A}(\gamma).$$

Ako promotrimo krivulju  $\gamma^r$ , gdje je  $r = \frac{2\pi}{l(\gamma)}$ , umjesto zadane krivulje  $\gamma$ , slijedi da je  $l(\gamma^r) = 2\pi$ . Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $l(\gamma) = 2\pi$ . Stoga je dovoljno dokazati da je

$$\mathcal{A}(\gamma) \leq \pi.$$

Nadalje, pretpostavimo da je  $\gamma$  parametrizirana duljinom luka, uz  $a = 0$  i  $b = 2\pi$ , te da je početna točka izabrana tako da  $\gamma(0)$  i  $\gamma(\pi)$  nisu vrhovi krivulje  $\gamma$ . Drugim riječima,  $\gamma$  je klase  $C^2$  u okolinama od 0 i  $\pi$ . Također možemo pretpostaviti da vrijedi  $x(0) = x(\pi) = 0$ .

Koristeći (1.8) (vidi napomenu nakon Propozicije 1.8), slijedi

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^{2\pi} x\dot{y} dt$$

te je dovoljno provjeriti da integral od 0 do  $\pi$  te integral od  $\pi$  do  $2\pi$  funkcije  $x\dot{y}$  iznose najviše  $\frac{\pi}{2}$ . Najprije imamo

$$\int_0^{\pi} x\dot{y} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (x^2 + \dot{y}^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + x^2 - \dot{x}^2) dt, \quad (1.20)$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi jer je  $\gamma$  parametrizirana duljinom luka. Kako je  $x(0) = x(\pi) = 0$ , postoji po dijelovima  $C^1$  funkcija  $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  takva da je

$$x(t) = u(t) \sin(t).$$

Posebno,  $\dot{x} = \dot{u} \sin(t) + u \cos(t)$ , pa iz (1.20) slijedi

$$\int_0^\pi x\dot{y} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(1 - \dot{u}^2 \sin^2(t) + u^2(\sin^2(t) - \cos^2(t)) - 2u\dot{u} \sin(t) \cos(t)\right) dt.$$

Sjetimo se da smo izraz  $2u\dot{u} \sin(t) \cos(t)$  već računali prilikom dokazivanja Wirtingerove nejednakosti (vidi (1.11)):

$$\int_0^\pi 2u\dot{u} \sin(t) \cos(t) dt = \int_0^\pi u^2(\sin^2(t) - \cos^2(t)) dt,$$

odakle slijedi da je

$$\int_0^\pi x\dot{y} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \dot{u}^2 \sin^2(t)) dt.$$

Integral s desne strane prethodne nejednakosti možemo zapisati kao

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \dot{u}^2 \sin^2(t)) dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^\pi \dot{u}^2 \sin^2(t) dt \leq \frac{\pi}{2},$$

pri čemu nejednakost vrijedi jer je drugi integral uvijek  $\geq 0$ . Analogno bismo dokazali da je

$$\int_\pi^{2\pi} x\dot{y} dt \leq \frac{\pi}{2}.$$

Konačno,

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^{2\pi} x\dot{y} dt \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

čime je teorem dokazan. □

# Poglavlje 2

## Povijesni pregled

### 2.1 Zenodorusovi teoremi

Nakon otkrića izoperimetrijskog problema brojni matematičari pokušali su ga rigorozno dokazati. Problem su, prema svojim standardima, riješili stari Grci kad je Zenodorus<sup>1</sup> dokazao da:

*Krug ima veću površinu od bilo kojeg mnogokuta s istim opsegom.*

Originalna verzija Zenodorusovih teorema i njihovih dokaza je izgubljena te stoga svo saznanje koje imamo o Zenodorusovim teoremima dolazi od komentara dvaju matematičara Papusa<sup>2</sup> i Theona<sup>3</sup> iz Aleksandrije. Pogledajmo kako je Zenodorus u nekoliko koraka dokazao da krug ima veću površinu od bilo kojeg mnogokuta s istim opsegom.

**Teorem 2.1.** Za pravilne mnogokute istog opsega, više stranica podrazumijeva veću površinu.

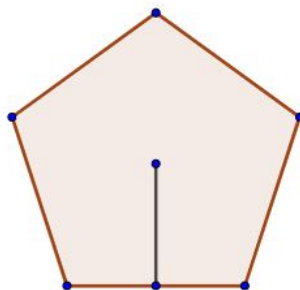
*Dokaz.* Odaberimo pravilan peterokut te nacrtajmo apotemu tog peterokuta. Apotema je dužina koja spaja središte pravilnog mnogokuta i polovište jedne od stranica. Ujedno je i visina karakterističnog trokuta pravilnog mnogokuta što poblizhe možemo vidjeti na Slici 2.1.

---

<sup>1</sup>Zenodorus (200. - 140. pr. Kr.), grčki matematičar

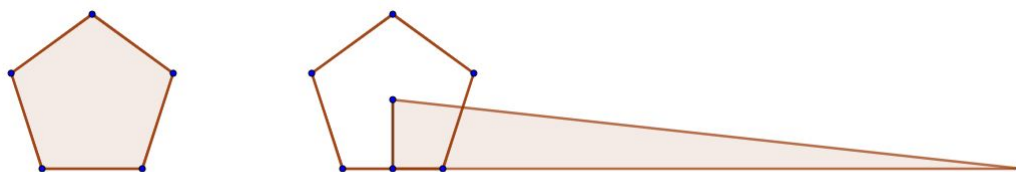
<sup>2</sup>Papus iz Aleksandrije (290. - 340.), grčki matematičar

<sup>3</sup>Theon iz Aleksandrije (335. - 405.), grčki matematičar



Slika 2.1: Pravičan peterokut i njegova apotema

Nacrtajmo pravokutan trokut takav da mu je jedna kateta apotema pravilnog peterokuta, a duljina druge katete je jednaka opsegu zadanog peterokuta, vidi Sliku 2.2.



Slika 2.2: Pravičan peterokut i trokut jednakih površina

Pokažimo da takav trokut ima istu površinu kao i zadani peterokut. Neka je  $a$  duljina stranice pravilnog peterokuta, a  $x$  duljina apotema (visine) pravilnog peterokuta. Odredimo najprije površinu pravokutnog trokuta. Jedna njegova kateta jednaka je apotemi (visini) pravilnog peterokuta dok je druga jednaka opsegu pravilnog peterokuta pa je stoga površina takvog trokuta jednaka:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 5a.$$

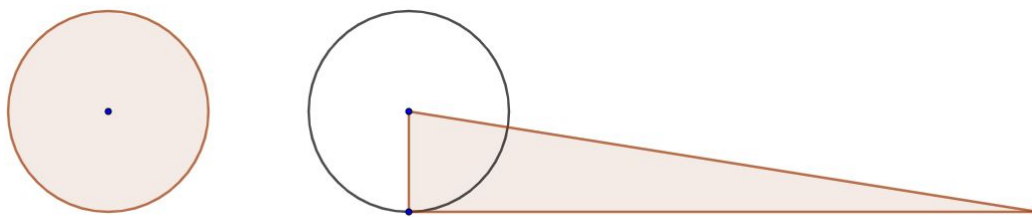
S druge strane površina pravilnog peterokuta jednaka je zbroju površina pet karakterističnih trokuta (unutar peterokuta) čije su visine zapravo apoteme:

$$P_2 = 5 \cdot \frac{a \cdot x}{2}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi. Ako povećavamo broj stranica peterokuta, duljina stranice se smanjuje, a visina se povećava. Veća visina podrazumijeva veću površinu pa iz toga slijedi Zenodorusova tvrdnja.  $\square$

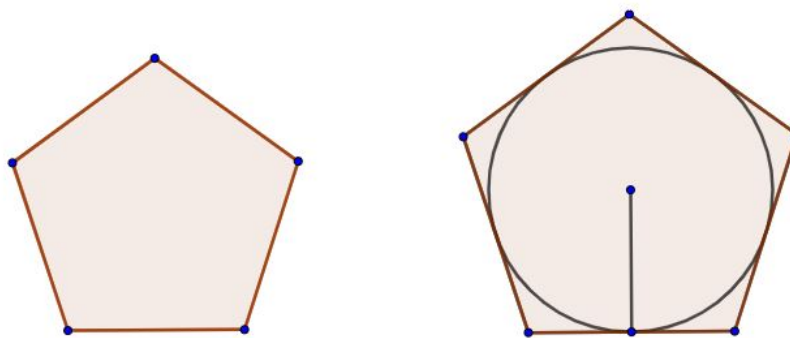
**Teorem 2.2.** Krug ima veću površinu od bilo kojeg pravilnog mnogokuta s istim opsegom.

*Dokaz.* Za krug analogno možemo dokazati da je njegova površina jednaka površini pravokutnog trokuta s katetama jednakim radijusu kruga i opsegu kružnice, vidi Sliku 2.3.



Slika 2.3: Krug i pravokutan trokut jednakih površina

Ono što zaista želimo pokazati je to da je apotema bilo kojeg pravilnog mnogokuta kraći od radijusa kružnice upisane tom mnogokutu. Ponovno odaberimo pravilan peterokut i kružnicu istog opsega. Reskalirajmo stranice peterokuta tako da zadana kružnica bude upisana tom peterokutu kao što je prikazano na Slici 2.4.



Slika 2.4: Skaliranje pravilnog peterokuta

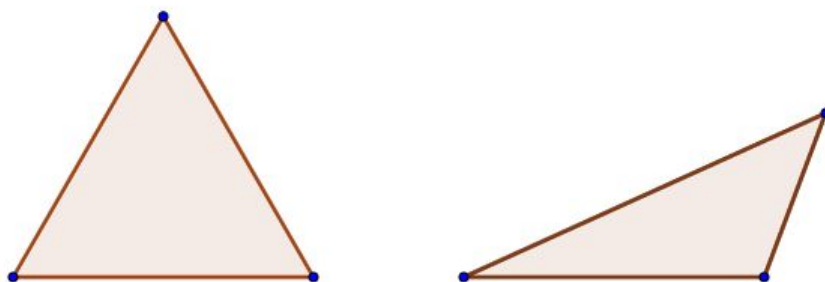


Uočimo, opseg peterokuta je sada veći nego opseg kruga i također veći nego što je bio prije skaliranja. Dakle, skaliranje je zapravo bilo uvećavanje, pa se apotem povećao do radijusa, dok je prije bio manji od radijusa.  $\square$

Sada slijedi ključni teorem za kojeg pretpostavljamo da među svim  $n$ -terokutima istog opsega postoji jedan koji ima veću površinu od ostalih.

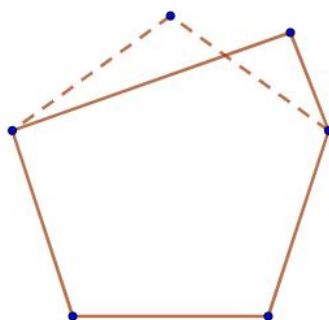
**Teorem 2.3.** Među svim  $n$ -terokutima istog opsega, pravilni  $n$ -terokut ima najveću površinu.

*Dokaz.* Može se pokazati da među svim trokutima jednakog opsega (koji imaju istu bazu), najveću površinu ima jednakostraničan trokut (vidi dokaz Teorema 3.1). Tu tvrdnju ćemo koristiti u ovom dokazu.



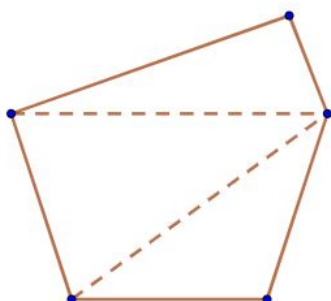
Slika 2.5: Odnosi površina trokuta s osnovicom jednake duljine

Pretpostavimo suprotno, odnosno da mnogokut najveće površine nije pravilan, tj. da sve stranice tog mnogokuta nisu jednake duljine. Zbog jednostavnosti, odaberimo peterokut (tvrdnja bi se analogno pokazala za bilo koji  $n$ -terokut). Na Slici 2.6, peterokut najveće površine prikazan je punom linijom, dok se u pozadini nalaze isprekidane linije koje predstavljaju položaj stranica kada bi mnogokut bio pravilan. Promotrimo samo gornje trokute. Kako trokut s najvećom površinom mora biti jednakostraničan, slijedi da će trokut s "isprekidanim" linijama imati veću površinu od trokuta s "punim" linijama.



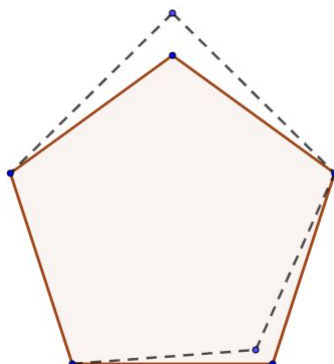
Slika 2.6: Pravičan (isprekidane linije) i nepravilan (pune linije) peterokut

Da bismo modificirali nepravilan mnogokut u pravilan, triangulirajmo mnogokut. Uočimo da smo triangulacijom dobili tri nepravilna trokuta (vidi Sliku 2.7). Odaberimo ona dva trokuta koja sadrže po dvije stranice peterokuta.



Slika 2.7: Triangulacija nepravilnog mnogokuta

Promijenimo kutove nepravilnih trokuta na način da šiljasti kut povećavamo, odnosno tupi kut smanjujemo dok ne dobijemo jednake kutove. Ovakvom promjenom povećat će se površina tog mnogokuta, a stranice će ostati jednake duljine. Sukladno tome, maksimalan  $n$ -terokut mora biti pravilan.



Slika 2.8: Modificiranje nepravilnog peterokuta u pravilan

Jedini slučajevi koje nismo obuhvatili ovim postupkom su jednakokrani trokuti koji imaju jednake duljine krakova, a različite duljine osnovica. U tom slučaju, ponovno bismo ponovili postupak promjene kuteva kojim bismo došli do povećanja površine.  $\square$

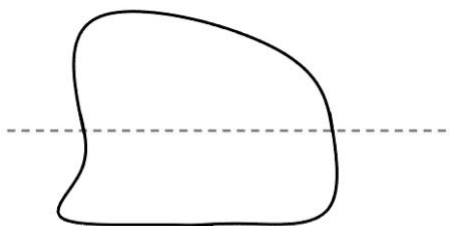
## 2.2 Steinerovi dokazi

Još od doba Renéa Descartesa, u matematici se težilo k tome da se rješavanje geometrijskih problema svede na algebarski račun. No mnogi su se matematičari ipak borili protiv općenitih formula i pritom se zalagali za geometrijski i analitički pristup. Jedan od njih bio je i Jakob Steiner<sup>4</sup>. On je dokazao izoperimetrijski problem na pet različitih načina (iako svi dokazi pretpostavljaju da rješenje problema postoji). Suštinu tih pet dokaza zapravo čine tri različite ideje koje ćemo u ovom poglavlju pobliže razmotriti.

**Teorem 2.4.** Bilo koji lik s maksimalnom površinom mora biti krug.

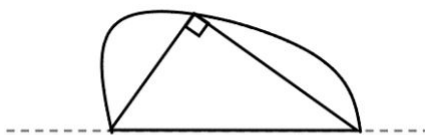
**Steinerov dokaz četiri zgloba.** Uzmimo proizvoljan lik s maksimalnom površinom. Podijelimo taj lik simetralnom linijom na dva dijela tako da su opsezi svakog od tih dvaju dijelova jednaki (vidi Sliku 2.9). Tada će i njihove površine biti jednake.

<sup>4</sup>Jakob Steiner (1796. - 1863.), švicarski matematičar



Slika 2.9: Podjela geometrijskog lika na dva dijela jednakih opsega

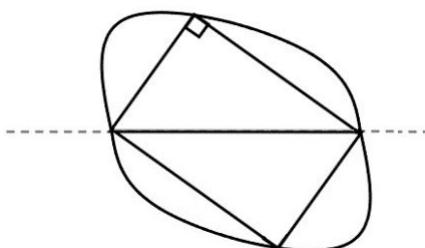
Odaberimo jednu od tih dviju polovica i pretpostavimo da oblik koji zatvara krivulja nije polukrug. Povucimo linije iz sjecišta krivulje i pravca simetrije. Sigurno postoje barem dvije linije koje se sijeku u točki na krivulji takve da kut među njima nije pravi. Unutrašnjost trokuta možemo zamišljati kao prazninu, a vanjske dijelove kao fiksirane. Pomičimo točke po pravcu simetrije dok kut koji zatvaraju linije postane pravi kut, tj. mjera tog kuta bude jednaka  $90^\circ$  kao na Slici 2.10.



Slika 2.10: Pravokutan trokut unutar geometrijskog lika

Na ovaj način povećali smo površinu pa reflektiranjem dobijemo lik veće površine, kojemu je opseg ostao isti kao na početku. Dakle, došli smo do kontradikcije pa zaključujemo da početni lik mora biti krug.  $\square$

Preslikamo li sada ovaj lik centralnosimetrično (vidi Sliku 2.11), dobit ćemo četverokut. Naziv dokaza teorema poistovjećujemo s vrhovima. Vrhove tog četverokuta možemo smatrati kao zglobove s obzirom da se u svakom vrhu sijeku barem dvije linije.



Slika 2.11: Centralnosimetrično preslikavanje

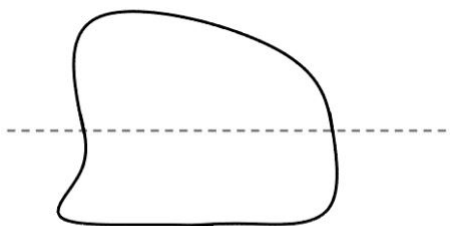
Zanimljivo je da se ovaj dokaz može upotrijebiti kao dokaz da optimalni  $2n$ -terokut mora biti pravilan. Pretpostavimo da nije. Prepolovimo  $2n$ -terokut na pola tako da spojimo vrh 1 s vrhom  $n + 1$ . Ovakvim načinom neće se svi vrhovi nalaziti na polukrugu od vrha 1 do vrha  $n + 1$ . Stoga možemo primijeniti Steinerovu metodu i dobiti bolji, izoperimetrijski  $2n$ -terokut.

**Steinerov dokaz srednje vrijednosti.** Neka su dane dvije krivulje i krivulja srednje vrijednosti koja se u svakom trenutku nalazi na pola puta između zadanih krivulja, vidi Sliku 2.12.



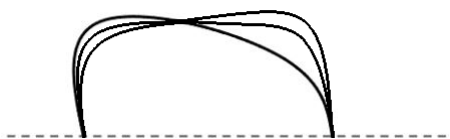
Slika 2.12: Proizvoljne krivulje i krivulja srednje vrijednosti u sredini

Uzmimo proizvoljni lik (vidi Sliku 2.13) maksimalne površine i prepolovimo ga na pola sa simetralnom linijom kao u prvom dokazu da dobijemo dva dijela istih opsega. Simetralna linija će također podijeliti lik na dva dijela jednakih površina.



Slika 2.13: Proizvoljni lik

Ukoliko ih ta linija ne podijeli na dva dijela jednakih površina, tada možemo napraviti refleksiju gornjeg (ili donjeg) dijela lika. Ako se refleksije preklapaju, lik je podijeljen na dva jednaka dijela. Pretpostavimo da se te linije ne preklapaju te ih preslikajmo na istu stranu i nacrtajmo krivulju srednje vrijednosti kao na Slici 2.14.



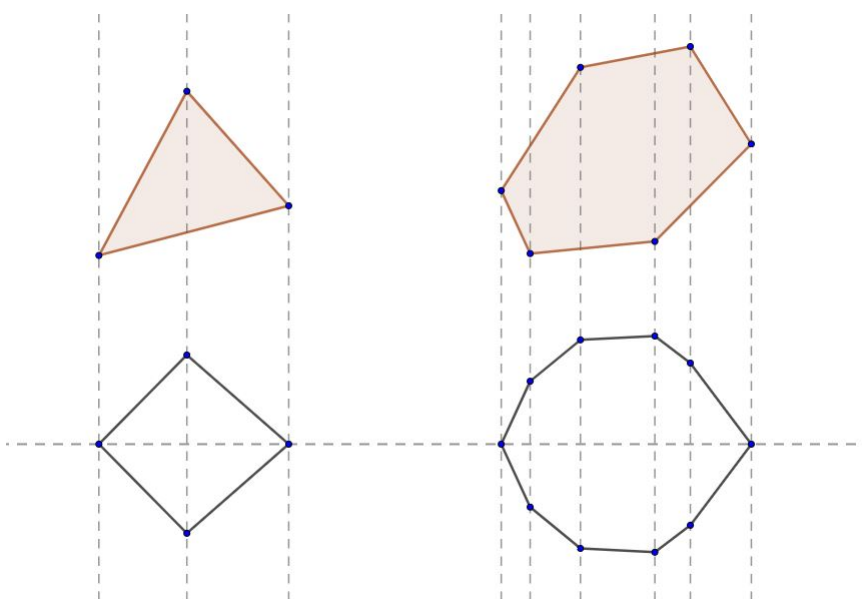
Slika 2.14: Proizvoljne krivulje i njihova krivulja srednje vrijednosti

Krivulja srednje vrijednosti je kraća, ali zatvara jednaku površinu kao i preostale dvije krivulje jer sadrži zajedničku površinu, polovinu dodatne površine prve krivulje te polovinu dodatne površine druge krivulje. Međutim, te dodatne površine su jednake odakle slijedi da krivulja srednje vrijednosti zatvara jednaku površinu kao i druge dvije krivulje.

Dakle, kada bismo presjekli opseg lika maksimalne površine na pola, te polovine moraju biti iste. Kada ne bi bile iste, to bi značilo da bismo ovim postupkom mogli konstruirati likove jednakih opsega, a manjih površina, što je kontradikcija. Stoga zaključujemo da lik s maksimalnom površinom mora biti krug.  $\square$

Sada dolazimo do trećeg dokaza ovog teorema koji je poznat pod nazivom *Dokaz grude snijega*. Ako zgrabimo rukom dio snijega, zatim s drugom rukom pričvrstimo iz različitih kutova taj snijeg, dobit ćemo grudu snijega oblika kugle, tj. oblika sfere. Ovim postupkom minimizirali smo površinu. Sada ćemo analogan postupak primijeniti na ravninskim likovima.

**Steinerov dokaz grude snijega.** Krenimo s nekim proizvoljnim konveksnom likom. Želimo ga modificirati tako da postane simetričan s obzirom na neku liniju u ravnini. Pretpostavimo da postoje linije okomite na simetralnu liniju kroz vrhove takve da polovina svakog odsječka leži na jednoj strani kao na Slici 2.15.



Slika 2.15: Rekonstrukcija proizvoljnog lika

Površina je svugdje jednaka. Uočimo da se trokuti preslikavaju u jednakokračne trokute, a trapezi u jednakokračne trapeze. Kod mnogokuta, opseg se smanjuje osim u slučaju kada su trokuti i trapezi već jednakokračni, a to je moguće ako je izvorna slika simetrična. Primijenimo li to sada na beskonačno male veličine, uvjereni smo da će vrijediti za bilo koju konveksni lik. Stoga rješenje mora biti konveksno u svakom smjeru. Takva figura mora biti krug.

Da bismo se uvjerali možemo uzeti bilo koji proizvoljan lik. Rekonstruirajmo taj lik tako da bude simetričan s obzirom na  $x$ -os, a potom ga rekonstruirajmo da bude simetričan s obzirom na  $y$ -os. Kao posljedica ovakve rekonstrukcije lik mora biti simetričan u svakoj liniji koja prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava. Stoga, takav lik mora biti krug.  $\square$

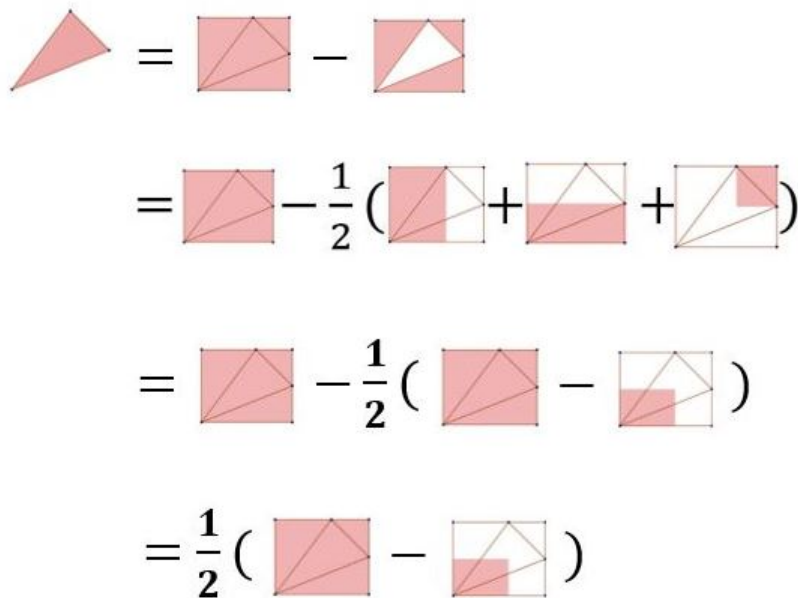
### 2.3 Dodatak: geometrijski dokaz formule za površinu

U prvom poglavlju smo vidjeli da smo formulu za računanje površine područja omeđenog nekom krivuljom

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx.$$

dobili kao posljedicu Greenovog teorema. U ovom dodatku, vidjet ćemo kako geometrijski možemo pokazati da ta formula vrijedi, prvo za trokute, a zatim za proizvoljne  $n$ -terokute.

Krenimo najprije s trokutom. Na slici 2.16 vidimo kako njegovu površinu možemo izračunati geometrijski.



Slika 2.16: Geometrijski izračun površine trokuta

Odredimo sada površinu trokuta analitički. Neka se trokut nalazi u prvom kvadrantu tako da su njegovi vrhovi točke  $(0, 0)$ ,  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ , označene u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu. Sada površinu možemo izračunati koristeći formulu:

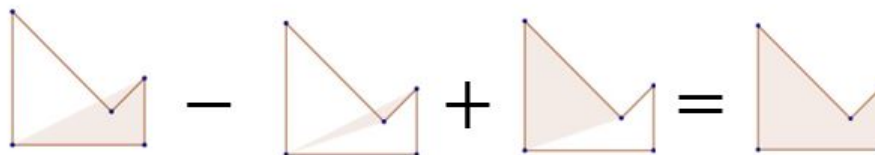
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} |x_0(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_0) + x_2(y_0 - y_1)|.$$



Uvrštavanjem točaka u formulu dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} |0 \cdot (y_1 - y_2) + x_1(y_2 - 0) + x_2(0 - y_1)| \\ &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.\end{aligned}$$

Kada bismo imali  $n$ -terokut s vrhovima  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$  označenim u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu, tada bismo podijelili mnogokut na koherentno orijentirane trokute te sumirali površine tih trokuta, vidi Sliku 2.17.



Slika 2.17: Geometrijski izračun površine proizvoljnog  $n$ -terokuta

Površina tog  $n$ -terokuta bi bila jednaka

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} x_{k-1} y_k - y_{k-1} x_k. \quad (2.1)$$

Pustimo li limes u formuli (2.1) uočiti ćemo da se površina bilo kojeg područja  $D$  omeđenog sa  $\partial D$  može izračunati koristeći formulu:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x(y + dy) - y(x + dx) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$

## Poglavlje 3

# Izoperimetrijski problem geometrijskih likova u ravnini

### 3.1 Izoperimetrijski problem za trokut

**Teorem 3.1.** Među svim trokutima istog opsega, jednakostraničan ima najveću površinu.

*Dokaz.* Ovaj teorem dokazat ćemo koristeći Heronovu formulu za površinu trokuta koja glasi: Neka je dan trokut sa stranicama duljina  $a, b$  i  $c$  te neka je  $s = \frac{a+b+c}{2}$  poluopseg tog trokuta. Tada je površina jednaka  $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

Nadalje, prisjetimo se aritmetičko-geometrijske nejednakosti za  $n = 3$ . Neka su  $x, y$  i  $z$  pozitivni brojevi, tada vrijedi:

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z}, \quad (3.1)$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je  $x = y = z$ . Stavimo da je  $x = s - a, y = s - b, z = s - c$  i uvrstimo u formulu (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} &\geq \sqrt[3]{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \\ \frac{3s - (a+b+c)}{3} &\geq \sqrt[3]{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \\ \left(\frac{3s-2s}{3}\right)^3 &\geq (s-a)(s-b)(s-c) \\ \left(\frac{s}{3}\right)^3 &\geq \frac{P^2}{s}. \end{aligned}$$

Iz prethodnog slijedi:

$$P^2 \leq \frac{s^4}{27}, \text{ tj.}$$

$$P \geq -\frac{s^2}{\sqrt{27}} \quad \text{ili} \quad P \leq \frac{s^2}{\sqrt{27}}.$$

Zaključujemo, trokut s opsegom  $2s = a + b + c$  sigurno neće imati površinu veću od  $\frac{s^2}{\sqrt{27}}$ , odnosno bit će jednaka  $\frac{s^2}{\sqrt{27}}$  ako i samo ako je trokut jednakostraničan. Naime, ako uzmemo jednakostraničan trokut s duljinom stranice  $a$ , tada je njegov poluopseg jednak  $s = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$ , dok mu je površina jednaka:

$$P = \frac{\left(\frac{3a}{2}\right)^2}{\sqrt{27}} = \frac{\frac{9a^2}{4}}{\sqrt{27}} = \frac{9a^2}{4 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{3a^2}{4\sqrt{3}} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{12} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

pa je jasno da je u tom slučaju  $P = \frac{s^2}{\sqrt{27}}$ . Ovime je završen dokaz teorema.  $\square$

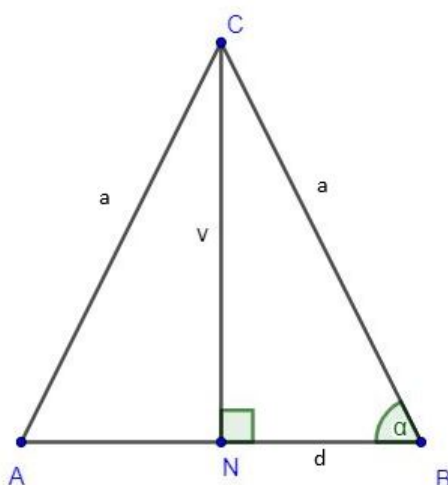
Sličan dokaz Teorema 3.1 pronašao je Grégoire Nicollier <sup>1</sup>.

*Dokaz.* Pretpostavimo da trokut  $\triangle ABC$  nije jednakostraničan. Neka su stranice trokuta  $a = BC$ ,  $b = AC$  i  $c = AB$ . Uzmimo sada proizvoljnu elipsu, za koju vrijedi da su vrhovi trokuta  $A$  i  $B$ , smješteni u fokusima te elipse, a treći vrh trokuta vrh  $C$ , se nalazi na elipsi. Pomaknimo točku  $C$  tako da ona bude smještena točno na maloj osi elipse. Prilikom ovakvog pomicanja točke  $C$  opseg se neće promijeniti. Tada je  $a = b$  i  $c = 2d$  (pri čemu je  $d$  udaljenost točke  $A$  od ishodišta), te pretpostavimo da je opseg jednak 2. Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned} a + b + 2d &= 2 \\ a + a + 2d &= 2 \\ 2a + 2d &= 2 \\ a + d &= 1 \\ a &= 1 - d. \end{aligned}$$

Određimo sada površinu jednakokračnog trokuta čije su duljine stranica  $a, a, 2d$ .

<sup>1</sup>Grégoire Nicollier, švicarski matematičar



Slika 3.1: Jednakokračan trokut

Pomoću Pitagorinog poučka odredimo visinu:

$$v^2 + d^2 = a^2 \implies v = \sqrt{a^2 - d^2},$$

a zatim računamo (imajući na umu da je  $a = 1 - d$ ):

$$P^2 = \frac{2d \cdot v}{2} = \frac{4d^2(a^2 - d^2)}{4} = d^2(a^2 - d^2) = d^2((1-d)^2 - d^2) = d^2(1 - 2d + d^2 - d^2) = d^2 - 2d^3.$$

Uočimo sljedeće:

$$d^2 - 2d^3 = \frac{1}{27} - \left(d - \frac{1}{3}\right)^2 \left(2d + \frac{1}{3}\right), \quad (3.2)$$

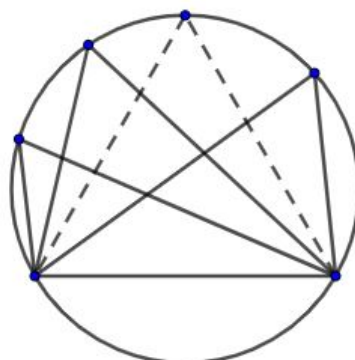
pri čemu je desna strana zapravo Taylorov razvoj polinoma  $d^2 - 2d^3$  oko točke  $d = \frac{1}{3}$ . Kako je  $d \geq 0$ , desna strana u (3.2) je sigurno manja od  $\frac{1}{27}$ , tj.

$$d^2 - 2d^3 \leq \frac{1}{27}.$$

Jednakost se postiže kada je  $d = \frac{1}{3}$ . Tada je  $a = 1 - d = \frac{2}{3}$ ,  $b = a = \frac{2}{3}$  i  $c = 2 \cdot d = \frac{2}{3}$ , tj. jednakost se postiže kad je trokut jednakostraničan. Time je teorem dokazan.  $\square$

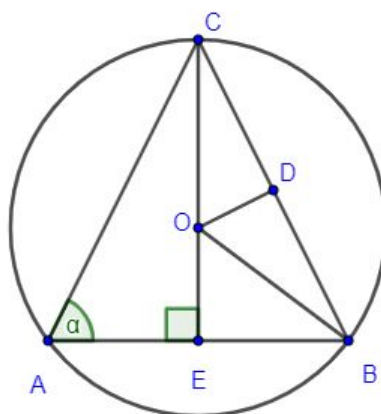
**Teorem 3.2.** Od svih trokuta upisanih u kružnicu najveću površinu ima jednakostraničan trokut.

*Dokaz.* Nacrtajmo trokute unutar kružnice s istom bazom. Znamo da, od svih takvih trokuta, trokut najveće površine će imati najveću visinu. Intuitivno znamo da će taj trokut biti jednakostraničan. Dokažimo sada ovu tvrdnju.



Slika 3.2: Trokuti unutar kružnice s jednakom bazom

Pretpostavimo da je trokut s najvećom površinom upisan u kružnicu jednakokratan. Odaberimo proizvoljan jednakokratan trokut. Neka je  $\alpha = \sphericalangle BAC$ . Tada je  $\sphericalangle ACE = 90^\circ - \alpha$ . Neka je  $O$  središte kružnice opisane trokutu  $\triangle ABC$  te neka su  $D$  i  $E$  polovišta stranica  $\overline{BC}$  i  $\overline{AB}$ , redom.



Slika 3.3: Jednakokratan trokut upisan u kružnicu

Tada je  $\sphericalangle ACB = 180^\circ - 2\alpha$  jer je odabrani trokut jednakokrtačan. Iz trokuta  $\triangle ECB$  slijedi  $\sphericalangle ECB = 90^\circ - \alpha$ . Nadalje, promotrimo trokut  $\triangle BCO$ . Trokut  $\triangle BCO$  je jednakokrtačan jer vrijedi  $|OB| = |OC| = R$ , gdje je  $R$  radijus trokutu opisane kružnice. Uočimo da vrijedi sljedeće:

$$\sphericalangle DBO = \sphericalangle OCD = \sphericalangle ECB = \sphericalangle ACE = 90^\circ - \alpha.$$

Također,  $|BD| = |DC|$  jer je  $D$  polovište stranice  $\overline{BC}$ . Mjere kuteva  $\sphericalangle CBE$  i  $\sphericalangle CBO$  su  $\alpha$  i  $90^\circ - \alpha$  redom. Stoga iz činjenice  $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CBO + \sphericalangle OBE$ , slijedi  $\sphericalangle OBE = \alpha - 90^\circ + \alpha = 2\alpha - 90^\circ$ .

Odredimo sada duljinu stranice  $|OE|$  primjenom trigonometrije na trokut  $\triangle OBE$  :

$$\sin(\sphericalangle OBE) = \frac{|OE|}{|OB|} = \frac{|OE|}{R} \implies |OE| = R \sin(2\alpha - 90^\circ). \quad (3.3)$$

Raspišimo izraz (3.3) koristeći adicijsku formulu za sinus:

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha - 90^\circ) &= \sin(2\alpha) \cos(90^\circ) - \cos(2\alpha) \sin(90^\circ) = -\cos(2\alpha), \\ |OE| &= -R \cos(2\alpha). \end{aligned}$$

Kako je  $|CE| = |CO| + |OE|$  te je  $|CO| = R$ , a  $|OE| = -R \cos(2\alpha)$ , slijedi

$$|CE| = R - R(1 - \cos(2\alpha)) = R(1 - \cos(2\alpha)).$$

Primjenom trigonometrije na trokut  $\triangle OBE$  odredimo duljinu stranice  $|EB|$  :

$$\cos(\sphericalangle OBE) = \frac{|EB|}{|OB|} = \frac{|EB|}{R} \implies |EB| = R \cos(2\alpha - 90^\circ). \quad (3.4)$$

Raspišimo izraz (3.4) koristeći adicijsku formulu za kosinus:

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha - 90^\circ) &= \cos(2\alpha) \cos(90^\circ) + \sin(2\alpha) \sin(90^\circ) = \sin(2\alpha), \\ |EB| &= R \sin(2\alpha). \end{aligned}$$

Sada odredimo duljinu stranice  $|AB|$  :

$$|AB| = 2|EB| = 2 \cdot R \sin(2\alpha)$$

kako bismo mogli odrediti površinu trokuta  $\triangle ABC$  :

$$P = \frac{2 \cdot R \sin(2\alpha) \cdot R(1 - \cos(2\alpha))}{2} = R^2 \sin(2\alpha)(1 - \cos(2\alpha)).$$

Mi želimo maksimizirati funkciju površine, stoga najprije moramo odrediti prvu derivaciju funkcije  $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P(\alpha) = R^2 \sin(2\alpha)(1 - \cos(2\alpha))$  :

$$P' = R^2 \cos(2\alpha) \cdot 2(1 - \cos(2\alpha)) + R^2 \sin(2\alpha)(\sin(2\alpha)) \cdot 2.$$

Pronađimo ekstreme ove funkcije izjednačavanjem prve derivacije s 0:

$$\begin{aligned} R^2 \cos(2\alpha) \cdot 2(1 - \cos(2\alpha)) + R^2 \sin(2\alpha)(\sin(2\alpha)) \cdot 2 &= 0 \\ \cos(2\alpha) \cdot (1 - \cos(2\alpha)) + \sin(2\alpha)(\sin(2\alpha)) &= 0 \\ \cos(2\alpha) - \cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) &= 0 \\ \cos(2\alpha) - \cos^2(2\alpha) + 1 - \cos^2(2\alpha) &= 0 \\ -2 \cos^2(2\alpha) + \cos(2\alpha) + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Uvedimo supstituciju  $t = \cos(2\alpha)$  i odredimo rješenja kvadratne jednadžbe:

$$\begin{aligned} -2t^2 + t + 1 &= 0, \\ t_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad t_2 &= 1. \end{aligned}$$

Uvrstimo dobivena rješenja u supstituciju te odredimo konačno rješenje:

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) = 1 &\implies 2\alpha = 0^\circ \implies \alpha = 0^\circ, \\ \cos(2\alpha) = -\frac{1}{2} &\implies 2\alpha = 120^\circ \implies \alpha = 60^\circ. \end{aligned}$$

Rješenje  $\alpha = 0^\circ$  nije moguće pa ga odbacujemo. Odavde slijedi da trokut mora biti jednakostraničan, tj. pretpostavka je bila kriva. Time je teorem dokazan.  $\square$

## 3.2 Izoperimetrijski problem za četverokut

Kada govorimo o izoperimetrijskom problemu za četverokute, zapravo mislimo na sljedeće:

*Od svih četverokuta s jednakim opsegom, kvadrat ima najveću površinu.*

Također, ekvivalentno možemo reći:

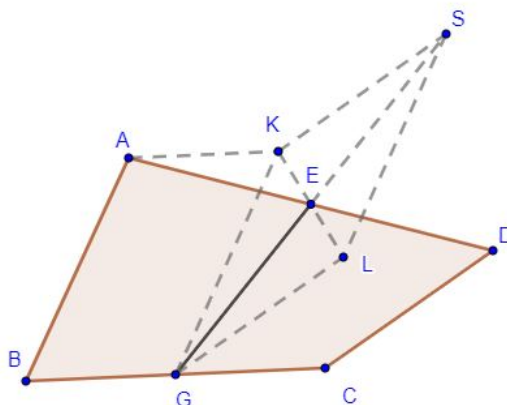
*Od svih četverokuta s jednakom površinom, kvadrat ima najmanji opseg.*

Dokaze ovih tvrdnji ćemo provesti u nekoliko koraka. Najprije ćemo dokazati da za proizvoljan četverokut (koji nije paralelogram), postoji paralelogram koji ima manji opseg, ali jednaku površinu. Potom ćemo dokazati da za proizvoljan paralelogram (koji nije pravokutnik) postoji pravokutnik s jednakim opsegom, ali većom površinom. Naposljetku ćemo dokazati da za proizvoljan pravokutnik (koji nije kvadrat) postoji kvadrat s jednakim opsegom, ali većom površinom.

**Korak 1. Za proizvoljan četverokut (koji nije paralelogram), postoji paralelogram koji ima manji opseg, ali jednaku površinu.**

**Lema 3.3.** U četverokutu  $ABCD$  gdje je  $E$  polovište stranice  $AD$ ,  $G$  polovište stranice  $BC$  vrijedi sljedeće:

$$2EG \leq GK + KS = GK + LS = AB + CD$$



Slika 3.4: Proizvoljan četverokut  $ABCD$

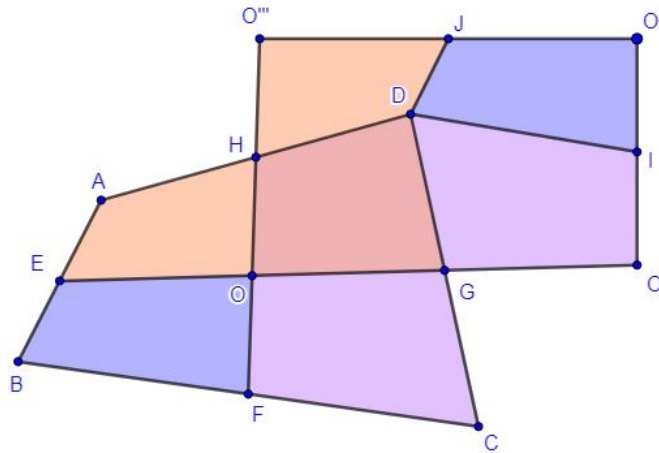
*Dokaz Leme 3.3.* Skicu smo nacrtali tako da smo najprije konstruirali polovišta stranica  $AD$  i  $BC$  (točke  $E$  i  $G$ , redom). Zatim smo odredili točke  $K$  i  $L$  tako da su  $BGKA$  i  $GCDL$  paralelogrami. Uočimo sljedeće:

$$2EG = GS \leq GK + KS = GK + LS = BA + GL = AB + CD$$

Pri izračunu smo koristili nejednakost trokuta. □

*Dokaz Koraka 1.* Dan je četverokut  $ABCD$ . Konstruirajmo polovišta stranica  $AB, BC, CD, DE$  i označimo ih sa  $E, F, G, H$  redom. Spojnice nasuprotnih polovišta sijeku se u točki  $O$ . U ovom konkretnom slučaju te spojnice se sijeku pod pravim kutem u točki  $O$  pa je točka  $O$  ujedno i jedan vrh pravokutnika.





Slika 3.5: Proizvoljan četverokut i paralelogram jednake površine

Najprije nacrtajmo lik  $O'''HDJ$  koji je označen crvenom bojom na Slici 3.5. Njega crtamo tako da produžimo stranice tako da vrijedi  $|HO'''| = |HO|$  i  $|OE| = |O'''J|$ . Zatim nacrtamo pravac paralelan s  $AE$  kroz  $J$ . U sjecištu paralele i pravca  $AH$  dobit ćemo točku  $D$ . Analogno ponovimo postupak za preostale dijelove.

Koristeći Lemu 3.3, slijedi:

$$\begin{aligned} 2OO' &= 2EG \leq AD + BC, \\ 2OO''' &= 2HF \leq DC + AB \end{aligned}$$

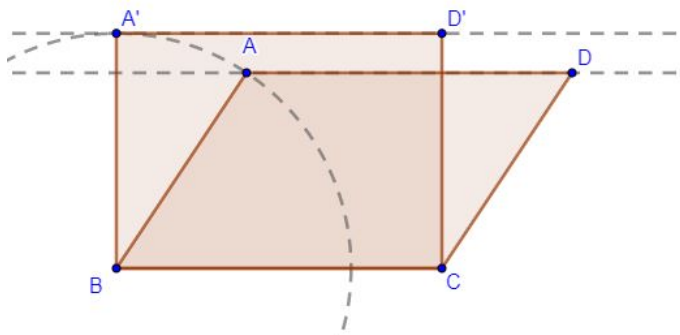
pa je

$$2(OO' + OO''') \leq AD + BC + DC + AB.$$

Dakle, opseg paralelograma (pravokutnika)  $OO'O''O'''$  je manji od opsega četverokuta  $ABCD$ , ali su im površine jednake (zbog konstrukcije).  $\square$

**Korak 2: Za svaki paralelogram (koji nije pravokutnik) postoji pravokutnik s jednakim opsegom, ali većom površinom.**

*Dokaz Koraka 2.* Sa Slike 3.6 možemo uočiti da se površina paralelograma povećava čim se povećava udaljenost između "gornje" i "donje" paralelne stranice.



Slika 3.6: Paralelogram i pravokutnik jednakog opsega

Površina paralelograma će biti najveća kada točka  $A$ , koja se nalazi na kružnici sa središtem u  $B$ , "stigne" u točku koja se nalazi na pravcu koji prolazi kroz  $B$  i okomit je na  $BC$ , dakle kada paralelogram postane pravokutnik, a tijekom te transformacije opseg paralelograma se neće promijeniti.  $\square$

**Korak 3: Za proizvoljan pravokutnik (koji nije kvadrat) postoji kvadrat s jednakim opsegom, ali većom površinom.**

*Dokaz Koraka 3.* Želimo pokazati da kvadrat ima najveću površinu. Neka je  $p$  fiksni parametar, a  $a$  stranica kvadrata za koju vrijedi  $a = \frac{p}{4}$ . Za pravokutnik čije su stranice  $u$  i  $v$ , i čiji je opseg jednak opsegu kvadrata vrijedi:

$$2(u + v) = 4a = 4 \cdot \frac{p}{4} = p \implies u + v = \frac{p}{2}.$$

Uvećajmo stranicu  $u$  za neku vrijednost  $x$ , gdje je  $x < a$ , a stranicu  $v$  umanjimo za istu tu vrijednost  $x$ :

$$\begin{aligned} u &= a + x, \\ v &= a - x. \end{aligned}$$

Površina pravokutnika sa stranicama  $u$  i  $v$  je jednaka:

$$P = uv = (a + x)(a - x) = a^2 - x^2.$$

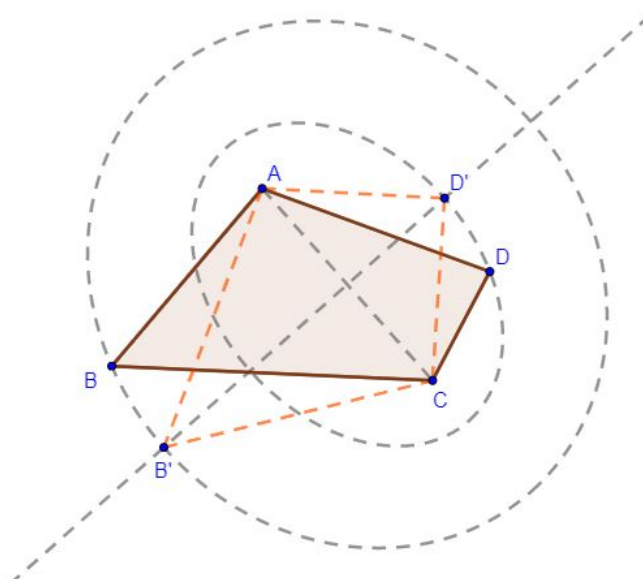
Vrijednost  $a^2$  je površina kvadrata sa opsegom  $4a$ , a vrijednost  $a^2 - x^2$  je površina pravokutnika sa istim opsegom ( $2(u + v) = 2(a + x) + 2(a - x) = 4a$ ). Kako je  $x^2 \geq 0$ , vrijedi  $a^2 - x^2 \leq a^2$  pri čemu se jednakost postiže ako je  $x = 0$ , odnosno ako je pravokutnik kvadrat.  $\square$

S druge strane, izoperimetrijsku nejednakost za četverokute možemo dokazati i na sljedeći način. Najprije ćemo dokazati da za proizvoljan četverokut postoji deltoid s jednakim opsegom, a većom površinom. Potom ćemo dokazati da postoji romb jednakog opsega, a veće površine od izabranog deltoida. U konačnici ćemo dokazati da za proizvoljan romb postoji kvadrat jednakog opsega, a veće površine.

**Korak 1: Za proizvoljan četverokut postoji deltoid s jednakim opsegom, a većom površinom.**

*Dokaz Koraka 1.* Dan je proizvoljan četverokut  $ABCD$  takav da vrijedi  $|AD| \neq |CD|$ . Nacrtajmo elipsu sa fokusima u točkama  $A$  i  $C$  koja prolazi kroz točku  $D$ . Na takvoj elipsi sigurno postoji točka  $D'$  za koju vrijedi  $P(ACD) < P(ACD')$ . Opsezi tih trokuta su jednaki jer vrijedi sljedeće:

$$2a = AD + CD = AD' + D'C.$$

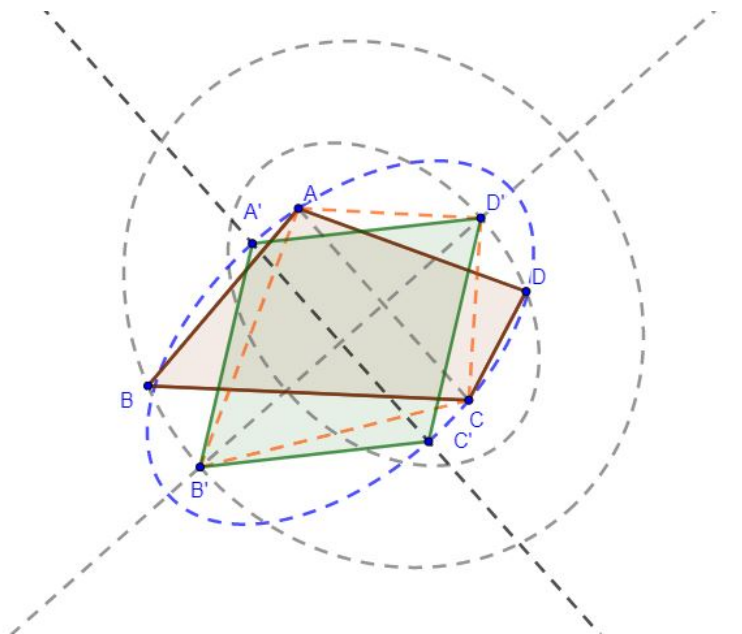


Slika 3.7: Proizvoljan četverokut i deltoid jednakog opsega

Površine tih trokuta računamo kao polovinu umnoška stranice i visine na tu stranicu. Kako imaju zajedničku stranicu slijedi da će trokut imati veću površinu ako mu je visina dulja. Visina će biti najdulja ako se točka  $D'$  nalazi na maloj osi elipse. Analogno ponovimo postupak te pronađemo elipsu koja ima fokuse u točkama  $A$  i  $C$ , te prolazi točkom  $B$ . Ovim postupkom dobit ćemo točku  $B'$ . Zaključujemo, deltoid  $AB'CD'$  na Slici 3.7 ima isti opseg kao četverokut  $ABCD$ , a veću površinu.  $\square$

**Korak 2: Za proizvoljan deltoid postoji romb jednakog opsega, a veće površine.**

*Dokaz Koraka 2.* Krenimo od deltoida  $AB'CD'$  (iz prethodnog koraka) za koji vrijedi  $|AB'| = |B'C'|$  i  $|AD'| = |D'C'|$ . Kada bi još vrijedilo i  $|AB'| = |AD'|$ , tada bismo imali romb i bili bismo gotovi s dokazom.

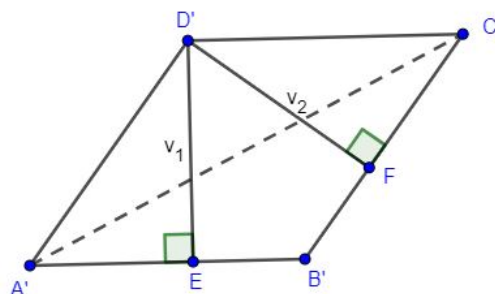


Slika 3.8: Deltoid i romb istog opsega

Nacrtajmo sada elipsu koja ima fokuse u točkama  $B'$  i  $D'$ , te prolazi točkom  $A$ . Pronađimo točku  $A'$  na analogan način kao u prethodnom koraku. Zbog simetričnosti, točka  $C'$  se također nalazi na elipsi. Za točku  $C'$  dolazimo do istog zaključka kao i za točku  $A'$ . Ovim postupkom smo dobili četverokut  $A'B'C'D'$  koji je romb (na Slici 3.8 istaknut zeleno) i koji ima isti opseg, ali je veće površine nego zadani deltoid.  $\square$

**Korak 3: Za proizvoljan romb postoji kvadrat jednakog opsega, a veće površine.**

*Dokaz Koraka 3.* Zadan je romb  $A'B'C'D'$ . Površina romba jednaka je zbroju površina trokuta  $\triangle A'B'D'$  i  $\triangle B'C'D'$ . Njihove površine su jednake polovini umnoška stranice i visine na tu stranicu. S obzirom da je riječ o rombu, sve stranice su jednake duljine, pa stoga površine ovise o duljini visina. Nacrtajmo romb sa pripadnim visinama.



Slika 3.9: Romb

Opseg romba i kvadrata koji tražimo jednak je  $4a$ . Ako je  $a$  duljina stranice romba, tada je površina kvadrata jednaka  $P = a^2$ . Površina romba je jednaka  $P = \frac{1}{2}(av_1 + av_2)$ , gdje je  $v_1$  duljina visine na trokut  $\Delta A'B'D'$ , a  $v_2$  duljina visine na trokut  $\Delta B'C'D'$ . S obzirom da je riječ o rombu, te dvije visine su jednake. Stoga je površina romba jednaka  $P = av$ . Iz pravokutnog trokuta uočavamo da je duljina visine uvijek manja od duljine stranice, odnosno jednaka duljini stranice ako i samo ako je taj četverokut kvadrat.  $\square$

## Poglavlje 4

# Primjena izoperimetrijskog problema u srednjoškolskim zadacima

S matematičkim obrazovanjem upoznajemo se od najranijih dana kroz različite oblike u prirodi koja nas okružuje. Zatim kroz osnovnoškolsko obrazovanje postepeno učimo oblike, izgrađujemo pojmove koji su nam već poznati, otkrivamo svojstva različitih geometrijskih likova, upoznajemo se s aksiomima i teoremima (iako u tom trenutku nismo sigurni da se radi o aksiomima, npr. Peanovi aksiomi). Postupno izgrađujemo matematičko znanje kroz dvije dimenzije: matematičke domene i procese.

Domene se odnose na matematički sadržaj, a u domene ubrajamo: Brojeve, Algebru, Oblik i prostor, Mjerenje i Podatke. S druge strane, matematički procesi kojima izgrađujemo matematičke pojmove su prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje zadataka i matematičko modeliranje te primjena računala. Njih najbolje uočavamo i prepoznamo u ciljevima izvođenja nastave.

Ciljeve nastave postižemo kroz različite nastavne oblike i metode. Neki od nastavnih oblika koje možemo koristiti su: frontalna nastava ili diferencirana nastava. Unutar diferencirane nastave imamo mogućnost rasporediti učenike u timove ovisno o učeničkom predznanju, njihovim pregovaračkim sposobnostima, snalažljivosti i sl. Načini organizacije rada nastave matematike koje često koristimo na nastavi su predavačka metoda, metoda dijaloga, heuristička metoda, metoda demonstracije, metoda eksperimenta. Kroz različite nastavne oblike i nastavne metode ostvarujemo postizanje ishoda učenja.

Ishodi učenja su iskazi o tome što se očekuje da će učenik kao rezultat učenja moći raditi. Na primjer, ako se na nastavnom satu uči nova nastavna cjelina "Linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom" očekivani ishod učenja će biti: Učenik će moći rješavati linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom.

Unutar ovog poglavlja susret ćemo se s različitim aktivnostima i tipovima zadataka

koji mogu biti primjereni redovnoj nastavi matematike ili nastavi za nadarene učenike. Na kraju navodimo neke od ciljeva za koje očekujemo da su već postignuti u prijašnjem obrazovanju, kao i one koji će se tek postići:

- Učenik će moći grafički prikazati kvadratnu funkciju i objasniti oblik kvadratne funkcije u ovisnosti o diskriminanti i vodećemu koeficijentu.
- Učenik će moći znanje o kvadratnoj jednadžbi primijeniti na problemsku situaciju koja uključuje probleme s ekstremima.
- Učenik će moći primijenjivati Talesov teorem o obodnom kutu nad promjerom.
- Učenik će moći izreći i ilustrirati poučke o sukladnosti i sličnosti trokuta.
- Učenik će moći primijenjivati derivaciju funkcije u problemskoj situaciji.

## 4.1 Aktivnosti u nastavi matematike u kojima se pojavljuje izoperimetrijski problem

S obzirom na različitu težinu zadataka, ovakve tipove zadataka možemo zadati učenicima srednje škole koji pohađaju dodatnu nastavu matematike te pritom ne moramo napomenuti da u pozadini zadataka zapravo stoji izoperimetrijska nejednakost jer učenici mogu riješiti zadatke i bez saznanja o tome. Svakako bi bilo zanimljivo učenicima istaknuti legendu o nastanku tog problema te kako izoperimetrijski problem izgleda za neke likove u ravnini. U ovom poglavlju dotaknut ćemo se nekih zadataka u kojima se skriva izoperimetrijski problem, opisati aktivnosti pripremljene za timske radove učenika i zadatke pripremljene za samostalne ili timske radove učenika. U prvoj navedenoj aktivnosti, učenici samostalno otkrivaju četverokut najveće površine, a tek na kraju učiteljica uvodi pojam izoperimetrijskog problema i nejednakosti.

### Aktivnost 1: Izoperimetrijski problem četverokuta

Cilj aktivnosti	Učenici će otkriti četverokut najveće površine u problemskom zadatku
Nastavni oblik	Diferencirana nastava u obliku tinskog rada, istraživačka nastava
Nastavna metoda	Metoda razgovora
Potrebni materijal	Nastavni listić sa zadacima

**Tijek aktivnosti:** Učitelj/ica dijeli učenike u grupe koje se sastoje od četiri učenika s obzirom na raspored sjedenja učenika u učionici. Naizmjenice dijeli učenicima nastavne

listić. Potom ostavlja učenike da samostalno rješavaju zadatke te povremeno prolazi kroz razred kako bi provjerila postoje li neke nedoumice ili pitanja kod učenika. Po završetku rješavanja zadataka, učenici i učitelj/ica će zajedno riješiti zadatke na ploči te detaljno proučiti sve korake donošenja zaključaka o rješavanju zadataka.

**Napomena.** Zadat su preuzeti s predavanja kolegija Metodika nastave matematike 2 ak. god. 2019./2020. a zadao ih je doc. dr. sc. Matija Bašić.

Pogledajmo kako bi izgledao primjer nastavnog listića i rješenja zadataka s nastavnog listića.

**Zadatak 4.1.** Pri izgradnji ovčarnika treba zadovoljiti uvjet da je potrebna korisna površina po jednoj ovci  $1.5\text{m}^2$ . Kolika je najmanja duljina ograde kojom možemo ograditi 200 ovaca?

*Rješenje:* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da ovčarnik ima oblik pravokutnika. Označimo s  $a$  dulju stranicu, a s  $b$  kraću stranicu.



Slika 4.1: Ovčarnik (pravokutnik)

Ukupna površina koja mora biti ograđena je jednaka

$$P = 1.5\text{m}^2 \cdot 200 = 300\text{m}^2. \quad (4.1)$$

Formula za površinu pravokutnika je  $P = ab$  te izjednačavanjem s (4.1) slijedi:

$$ab = 300 \implies a = \frac{300}{b}, \quad b \neq 0. \quad (4.2)$$

S obzirom da tražimo najmanju duljinu ograde slijedi da moramo minimizirati funkciju koja opisuje opseg pravokutnika. Opseg pravokutnika računamo po formuli  $o = 2a + 2b = 2(a + b)$ . Uvrstimo (4.2) u formulu za opseg pravokutnika:

$$o(b) = 2\left(\frac{300}{b} + b\right) = 2\left(\frac{300 + b^2}{b}\right) = \frac{600 + 2b^2}{b}.$$



Da bismo pronašli minimum ove funkcije moramo odrediti ekstreme. Ekstreme određujemo tako da najprije odredimo derivaciju funkcije:

$$o'(b) = \frac{4b \cdot b - (600 + 2b^2) \cdot 1}{b^2} = \frac{2b^2 - 600}{b^2}.$$

Zatim izjednačimo prvu derivaciju funkcije s 0:

$$\begin{aligned} \frac{2b^2 - 600}{b^2} = 0 &\implies 2b^2 - 600 = 0 \implies 2b^2 = 600 \implies b^2 = 300 \\ &\implies b_{1,2} = \pm \sqrt{300} = \pm 10\sqrt{3}. \end{aligned}$$

S obzirom da udaljenost ne može biti negativna vrijednost negativno rješenje odbacujemo. Odredimo sada vrijednost veličine  $a$ :

$$a = \frac{300}{b} = \frac{300}{10\sqrt{3}} = \frac{300 \cdot 10\sqrt{3}}{10\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}.$$

Opseg tog ovčarnika jednak je:

$$o = 2(a + b) = 2(10\sqrt{3} + 10\sqrt{3}) = 40\sqrt{3}.$$

□

Uočimo da s obzirom da vrijedi  $a = b$ , ovčarnik je oblika kvadrata. Dakle, četverokut najveće površine je kvadrat što smo već spominjali unutar primjene izoperimetrijskog problema. Ovakav način rješavanja primjeren je učenicima 4. razreda srednje škole koji prate gimnazijski program te su dosad već naučili što je derivacija i usvojili osnovne tehnike deriviranja.

2. način rješavanja zadatka. Iz aritmetičko-geometrijske nejednakosti slijedi:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Pomnožimo nejednakost s 4 kako bismo s lijeve strane dobili opseg:

$$2(a+b) \geq 4\sqrt{ab}.$$

Uočimo desna strana je jednaka  $\sqrt{P} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ . Time dobivamo sljedeće:

$$o \geq 40\sqrt{3},$$

gdje se jednakost postiže ako vrijedi  $a = b$ . Kako smo već spomenuli, kvadrat je četverokut najveće površine pa je opseg jednak  $40\sqrt{3}$  i samim time najmanja duljina ograde kojom možemo ograditi 200 ovaca iznosi  $40\sqrt{3}\text{m}^2$ . □

Ovakav način rješavanja primjereniji je nadarenim učenicima i učenicima koji se pripremaju za matematička natjecanja. Iako se aritmetički i geometrijski nizovi uče tek u 4. razredu srednje škole, aritmetički i geometrijski niz se na vrlo jednostavan način mogu i ranije objasniti za slučajeve  $n = 2$  ili  $n = 3$ . Kako su učenici već u 2. razredu srednje škole jako dobro upoznati s računom s korijenima, uz uputu i detaljno objašnjenje na konkretnom primjeru, znali bi riješiti zadatak ovom metodom.

Ovakvom aktivnošću svi učenici otkrivaju izoperimetrijski problem četverokuta. S druge strane, mogli bismo rasporediti učenike tako da jedan dio učenika otkriva izoperimetrijski problem četverokuta, a drugi dio izoperimetrijski problem trokuta, što ćemo prikazati u sljedećoj aktivnosti.

## Aktivnost 2: Izoperimetrijska nejednakost trokuta i četverokuta

Cilj aktivnosti	Učenici će otkriti izoperimetrijsku nejednakost četverokuta i trokuta u problemskom zadatku
Nastavni oblik	Diferencirana nastava u obliku timskog rada, istraživačka nastava
Nastavna metoda	Metoda razgovora
Potrebni materijal	Nastavni listić sa zadacima

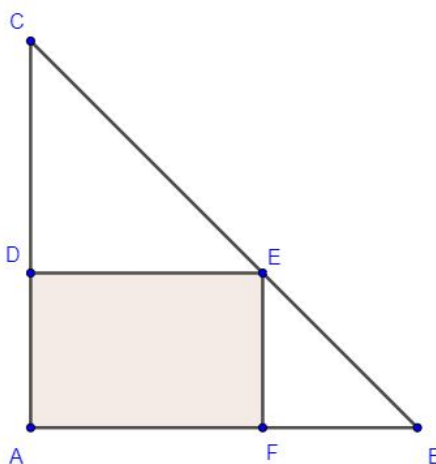
**Tijek aktivnosti:** Učitelj/ica dijeli učenike u grupe u kojima se nalazi po četiri učenika s obzirom na njihovo predznanje matematike. Dijeli im listiće te ih ostavlja da samostalno rješavaju zadatke te povremeno prolazi kroz razred kako bi provjerila postoje li neke nedoumice ili pitanja kod učenika. Po završetku rješavanja zadataka, učenici i učitelj/ica će zajedno riješiti zadatke na ploči te detaljno proučiti sve korake donošenja zaključaka o rješavanju zadataka.

**Napomena.** Zadaci su preuzeti s vježbi kolegija Metodika nastave matematike 2 akademske godine 2019./2020. a zadala ih je dr. sc. Renata Vlahović Kruc (zadatak grupa A) i predavanja Metodika nastave matematike 3 akademske godine 2020./2021., a zadao ih je doc. dr. sc. Matija Bašić (zadatak grupa B).

Pogledajmo kako bi izgledali primjeri nastavnih listića i rješenja zadataka s nastavnih listića.

**Zadatak 4.2** (Grupa A). U jednakokrčan pravokutan trokut s katetom duljine 5cm upisan je pravokutnik tako da je jedan njegov vrh u vrhu pravog kuta trokuta. Odredite koji pravokutnik ima najveću površinu.

Rješenje: Prikažimo najprije situaciju iz zadatka skicom.



Slika 4.2: Jednakokračan pravokutni trokut i pravokutnik unutar njega

Neka je  $|AF| = a$ , a  $|AD| = b$ . Tada je  $|FB| = 5 - a$ ,  $|DC| = 5 - b$ ,  $|DE| = a$  i  $|FE| = b$ . Površina jednakokračnog pravokutnog trokuta iznosi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| = \frac{25}{2} \text{ cm}^2.$$

Površinu pravokutnika  $AFED$  dobit ćemo tako da od površine trokuta  $\triangle ABC$  oduzmemo površine trokuta  $\triangle DEC$  i  $\triangle FBE$ . Odredimo površine trokuta  $\triangle DEC$  i  $\triangle FBE$ .

$$P(\triangle DEC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (5 - b)$$

$$P(\triangle FBE) = \frac{1}{2} \cdot (5 - a) \cdot b$$

Površinu trokuta  $\triangle ABC$  možemo napisati kao:

$$P(\triangle ABC) = P(\triangle DEC) + P(\triangle FBE) + P(AFED). \quad (4.3)$$

Uvrstimo u (4.3) sve površine koje su nam poznate.

$$\begin{aligned} \frac{25}{2} &= \frac{1}{2}a(5 - b) + \frac{1}{2}b(5 - a) + P(AFED), \\ P(AFED) &= \frac{25}{2} - \frac{5a - ab}{2} - \frac{5b - ab}{2}, \\ P(AFED) &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}a - \frac{5}{2}b + ab. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sada uočimo da su trokuti  $\triangle FBE$  i  $\triangle DEC$  slični po K-K poučku. Prisjetimo se iskaza K-K poučka: *Dva su trokuta slična, ako im se podudaraju dva kuta trokuta.* Zapišimo omjere odgovarajućih stranice sličnih trokuta:

$$\begin{aligned}\frac{5-a}{b} &= \frac{a}{5-b}, \\ (5-a)(5-b) &= ab, \\ 25 + ab - 5a - 5b &= ab, \\ 5a + 5b = 25 &\implies a = 5 - b.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Uvrstimo sada (4.5) u (4.4):

$$\begin{aligned}P(AFED) &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}(5-b) - \frac{5}{2}b + (5-b)b, \\ P(AFED) &= \frac{25}{2} - \frac{25}{2} + \frac{5}{2}b - \frac{5}{2}b + 5b - b^2, \\ P(AFED) &= -b^2 + 5b.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Da bismo odredili maksimalnu površinu pronađimo ekstreme funkcije  $P: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $P(b) = -b^2 + 5b$ . Odredimo najprije prvu derivaciju:

$$P' = -2b + 5.$$

Izjednačimo prvu derivaciju s 0:

$$-2b + 5 = 0 \implies b = \frac{5}{2} = 2.5.$$

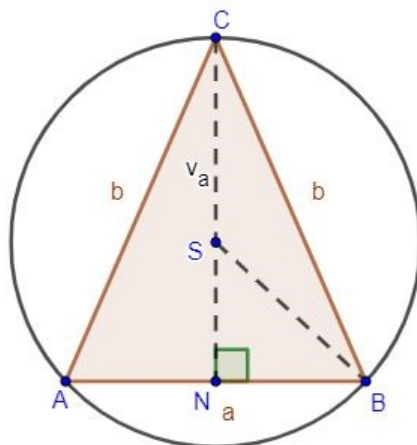
Odredimo sada vrijednost  $a$ :

$$a = 5 - b \implies a = \frac{5}{2}.$$

Sada možemo zaključiti da je pravokutnik najveće površine kvadrat što slijedi iz izoperimetrijskog problema za četverokut. Ponovno, ovaj zadatak bismo mogli riješiti tako da se vratimo u korak (4.6) te odredimo maksimum kvadratne funkcije.  $\square$

**Zadatak 4.3** (Grupa B). U krug polumjera 10cm upišite jednakokračni trokut maksimalne površine. Uputa: kao parametar odaberite kut nasuprot osnovice te modelirajte trigonometrijskom funkcijom.

*Rješenje:* Situaciju iz zadatka najprije prikažimo skicom.



Slika 4.3: Jednakokračan trokut unutar kružnice

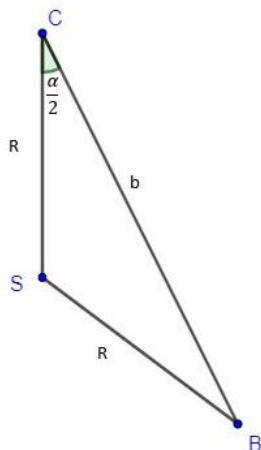
Površinu jednakokračnog trokuta možemo odrediti koristeći formulu  $P = \frac{1}{2}a \cdot v_a$ , gdje je  $a$  duljina stranice, a  $v_a$  duljina visine na tu stranicu. Želimo izraziti duljinu stranice  $a$  i duljinu visine  $v_a$  preko istog parametra. Iz pravokutnog trokuta  $\triangle NBC$  izrazimo duljinu visine  $v_a$ :

$$v_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 \implies v_a = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Sada iz tog istog trokuta izrazimo  $a$  pomoću  $b$  primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{b} \implies a = 2b \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (4.7)$$

S obzirom da su dvije stranice trokuta  $\triangle BCS$  radijusi kružnice opisane trokutu slijedi da je trokut jednakokračan. Treća stranica tog trokuta je stranica  $b$ . Kut pri vrhu  $C$ , tj. kut  $\sphericalangle SCB$  jednak je  $\frac{\alpha}{2}$ .



Slika 4.4: Jednakokrčan trokut  $\Delta BCS$

Primijenimo kosinsov poučak na trokut  $\Delta BCS$  :

$$\begin{aligned} R^2 &= R^2 + b^2 - 2Rb \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\ b^2 &= 2Rb \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad b \neq 0 \\ b &= 2R \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Sada uvrstimo (4.8) u (4.7):

$$a = 4 \cdot R \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Primjenimo formulu za umnožak sinusa i kosinusa:

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \left( \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right), \tag{4.9}$$

odakle dobivamo sljedeće:

$$a = 2R(\sin \alpha + \sin 0) = 2R \sin(\alpha).$$

Uvrstimo sada sve izračunate vrijednosti u formulu za površinu:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} a \cdot v_a \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 20 \sin(\alpha) \sqrt{\left(20 \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{20 \sin(\alpha)}{2}\right)^2} \\
 &= 10 \sin(\alpha) \sqrt{400 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 100 \sin^2(\alpha)} \\
 &= 10 \sin(\alpha) \sqrt{400 \cdot \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} - 100 \sin^2(\alpha)} \\
 &= 10 \sin(\alpha) \sqrt{200 + 200 \cos(\alpha) - 100 \sin^2(\alpha)} \\
 &= 10 \sin(\alpha) \cdot 10 \sqrt{2 + 2 \cos(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha))} \\
 &= 100 \sin(\alpha) \sqrt{\cos^2(\alpha) + 2 \cos(\alpha) + 1} \\
 &= 100 \sin(\alpha) \sqrt{(\cos(\alpha) + 1)^2} \\
 &= 100 \sin(\alpha) \cdot |\cos(\alpha) + 1|,
 \end{aligned}$$

pri čemu smo u četvrtom koraku iskoristili formulu  $\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$ . Preostaje nam još odrediti ekstreme funkcije  $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $P(\alpha) = 100 \sin(\alpha) \cdot |\cos(\alpha) + 1|$ . S obzirom da se unutar funkcije nalazi funkcija apsolutne vrijednosti rastavit ćemo funkciju po dijelovima s obzirom na dva intervala.

**1. slučaj:**  $\cos(\alpha) + 1 > 0 \implies \cos(\alpha) > -1 \implies \alpha > \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 P' &= 100 \cos(\alpha)(\cos(\alpha) + 1) + 100 \sin(\alpha)(-\sin(\alpha)) \\
 &= 100 \cos^2(\alpha) + 100 \cos(\alpha) - 100 \sin^2(\alpha) \\
 &= 100 \cos^2(\alpha) + 100 \cos(\alpha) - 100(1 - \cos^2(\alpha)) \\
 &= 200 \cos^2(\alpha) + 100 \cos(\alpha) - 100.
 \end{aligned}$$

Uvrstimo supstituciju  $t = \cos(\alpha)$  i pronađimo ekstreme funkcije:

$$200t^2 + 100t - 100 = 0 \implies t_1 = \frac{1}{2} \text{ ili } t_2 = -1.$$

Uvrstimo izračunate vrijednosti u supstituciju:

$$\begin{aligned}
 \cos(t_1) = \frac{1}{2} &\implies \alpha = 60^\circ, \\
 \cos(t_2) = -1 &\implies \alpha = 180^\circ.
 \end{aligned}$$

S obzirom da je  $\alpha$  kut u trokutu nema smisla gledati drugo rješenje.

**2. slučaj:**  $\cos(\alpha) + 1 < 0 \implies \cos(\alpha) < -1 \implies \alpha < \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$

$$\begin{aligned} P' &= 100 \cos(\alpha)(\cos(\alpha) + 1) + 100 \sin(\alpha)(\sin(\alpha)), \\ &= 100 \cos^2(\alpha) + 100 \cos(\alpha) + 100 \sin^2(\alpha), \\ &= 100 \cos^2(\alpha) + 100 \cos(\alpha) + 100(1 - \cos^2(\alpha)), \\ &= 100 \cos(\alpha) + 100. \end{aligned}$$

Uvrstimo supstituciju  $s = \cos(\alpha)$  i pronađimo ekstreme funkcije:

$$100s + 100 = 0 \implies s = -1.$$

Uvrstimo izračunatu vrijednost u supstituciju:

$$\cos(s) = -1 \implies \alpha = 180^\circ.$$

S obzirom da je  $\alpha$  kut u trokutu,  $\alpha = 180^\circ$  nije rješenje. Dakle, jedino moguće rješenje je  $\alpha = 60^\circ$ . Stoga zaključujemo da je trokut jednakostraničan što slijedi i kao posljedica izoperimetrijskog problema za trokute: Trokut s najvećom površinom je jednakostraničan.

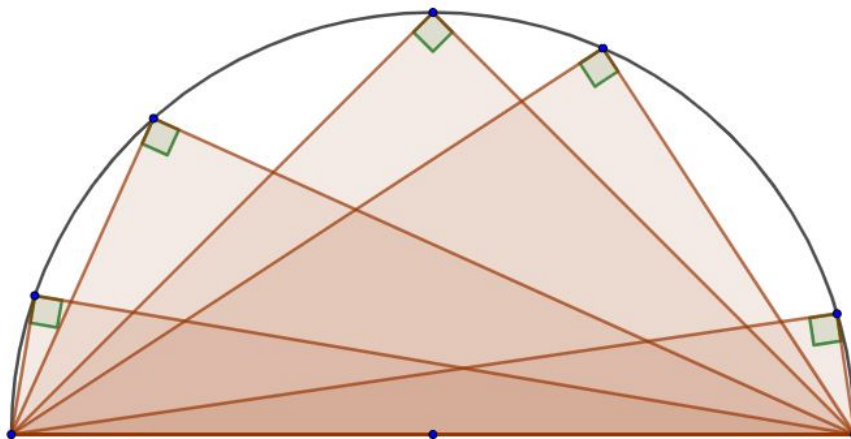
□

## 4.2 Zadaci u kojima se pojavljuje izoperimetrijski problem

**Zadatak 4.4.** Od svih pravokutnih trokuta zadane duljine hipotenuze  $c$  najveću površinu ima jednakokračni pravokutni trokut.

*1. način rješavanja zadatka.* Primjenom Talesovog poučka koji glasi *Svaki obodni kut nad promjerom je pravi* slijedi da se vrh pravog kuta svakog pravokutnog trokuta čija je hipotenuza ujedno promjer kružnice, nalazi na polukružnici (vidi Sliku 4.5).





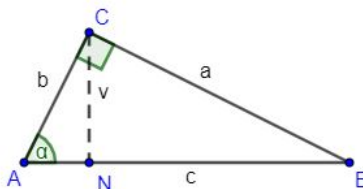
Slika 4.5: Pravokutni trokuti unutar polukružnice

Iz formule za površinu trokuta slijedi  $P = \frac{1}{2}c \cdot v_c$  slijedi da će najveću površinu imati trokut koji ima najveću visinu. Intuitivno, ali i iz skice, možemo uočiti da će najveća visina biti točno jednaka  $r$ , odnosno najveća visina se nalazi na pravcu okomitom na promjer koji prolazi kroz središte. Duljina te visine je  $v_c = r = \frac{c}{2}$ . Površina takvog trokuta je jednaka:

$$P = \frac{1}{2}c \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{2} = r^2.$$

Lako se vidi primjenom S-K-S poučka da je traženi pravokutni trokut s najvećom površinom jednakokračan.  $\square$

2. način rješavanja zadatka. Dokažimo sada da je zaista riječ o jednakokračnom pravokutnom trokutu algebarskom metodom. Nacrtajmo najprije trokut i označimo poznate vrijednosti.



Slika 4.6: Pravokutni trokut

Površina ovog trokuta jednaka je polovini umnoška stranice  $c$ , tj. hipotenuze i visine na tu hipotenuzu (na Slici 4.6 označeno  $CN$ ). Primjenom trigonometrije na trokut  $\triangle NCB$  slijedi

$$\sin(\alpha) = \frac{v}{b} \implies v = b \sin(\alpha).$$

Iz pravokutnog trokuta  $\triangle ABC$  slijedi

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \implies b = c \cos(\alpha). \quad (4.10)$$

Uvrstimo sada  $b$  u (4.10):

$$v = c \cos(\alpha) \sin(\alpha) = \frac{c}{2}(\sin(2\alpha) - \sin(0)) = \frac{c}{2} \sin(2\alpha)$$

pri čemu smo koristili formulu (4.9). Uvrstimo sada poznate vrijednosti u formulu za površinu trokuta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{2} \sin(2\alpha) = \frac{c^2}{4} \sin(2\alpha).$$

Odredimo ekstreme ove funkcije, tj. ekstreme funkcije  $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $P(\alpha) = \frac{c^2}{4} \sin(2\alpha)$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$ . Derivirajmo funkciju:

$$P' = \frac{c^2}{4} \cos(2\alpha) \cdot 2 = \frac{c^2}{2} \cos(2\alpha).$$

Izjednačimo prvu derivaciju s 0:

$$\frac{c^2}{2} \cos(2\alpha) = 0 \implies \cos(2\alpha) = 0.$$

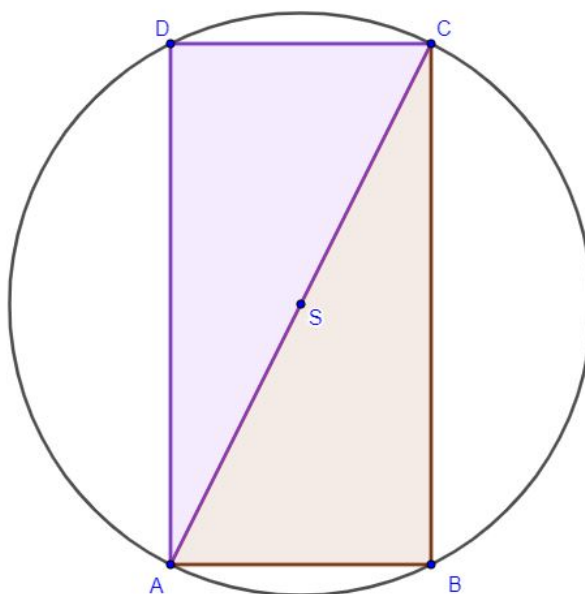
Odredimo konačno rješenje:

$$\cos(2\alpha) = 0 \implies 2\alpha = 90^\circ \implies \alpha = 45^\circ$$

odakle slijedi da je trokut sa maksimalnom površinom jednakokratan.  $\square$

**Zadatak 4.5.** Od svih pravokutnika upisanih danoj kružnici polumjera duljine  $r$ , najveću površinu ima kvadrat.

*1. način rješavanja zadatka.* Skicirajmo najprije situaciju iz zadatka. Podijelimo pravokutnik dijagonalom na dva sukladna dijela (što znamo da vrijedi po K-S-K poučku). K-S-K poučak o sukladnosti glasi: *Dva su trokuta sukladna ako su im sukladne jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu.*



Slika 4.7: Pravokutnik unutar kružnice

Promotrimo jedan od tih dva trokuta. Uočimo da je trokut  $\triangle ACD$  pravokutan s pravim kutem pri vrhu  $D$ , te da mu je hipotenuza duga  $2r$ . Upravo ovaj slučaj smo obradili u prethodnom zadatku. Sada analogno primijenimo i na trokut  $\triangle ABC$  te u konačnici dobivamo da je pravokutnik najveće površine kvadrat.  $\square$

2. način rješavanja zadatka. Formula po kojoj ćemo odrediti površinu pravokutnika glasi  $P = a \cdot b$ , gdje su  $a$  i  $b$  duljine stranica pravokutnika. Upišimo bilo koji proizvoljan pravokutnik u kružnicu kao na Slici 4.7. Uočimo da vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}(2r)^2 &= a^2 + b^2, \\ 4r^2 &= a^2 + b^2, \\ a^2 &= b^2 - 4r^2, \\ a &= \sqrt{4r^2 - b^2}.\end{aligned}$$

Uvrstimo izračunatu vrijednost od  $a$  u formulu za površinu pravokutnika:

$$P = a \cdot b = b\sqrt{4r^2 - b^2}.$$

Da bismo odredili pravokutnik maksimalne površine, moramo pronaći maksimum funkcije  $P : \langle -\infty, -2r \rangle \cup \langle 2r, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $P(b) = b\sqrt{4r^2 - b^2}$  koja opisuje površinu. Odredimo najprije derivaciju te funkcije:

$$P' = \sqrt{4r^2 - b^2} + b \frac{-2b}{2\sqrt{4r^2 - b^2}}.$$

Izjednačimo prvu derivaciju s 0:

$$\begin{aligned} \sqrt{4r^2 - b^2} + b \frac{-2b}{2\sqrt{4r^2 - b^2}} &= 0 \\ \frac{(\sqrt{4r^2 - b^2})^2 - b^2}{2\sqrt{4r^2 - b^2}} &= 0 \\ \frac{4r^2 - b^2 - b^2}{2\sqrt{4r^2 - b^2}} &= 0 \\ \frac{4r^2 - 2b^2}{2\sqrt{4r^2 - b^2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4r^2 - 2b^2 = 0 &\Rightarrow b^2 = 2r^2. \end{aligned}$$

Sada je stranica  $a$  jednaka:

$$a = \sqrt{4r^2 - b^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2}.$$

Uočimo  $a = b = r\sqrt{2}$  pa je traženi pravokutnik maksimalne površine kvadrat.  $\square$

**Zadatak 4.6.** Dužinu zadane duljine  $d$  rastavite na dva dijela, duljine  $a$  i  $b$  tako da umnožak bude što veći mogući.

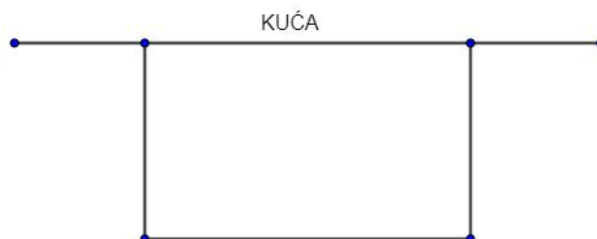
*Dokaz.* Neka je dio dužine čija je duljina  $a$  označen s  $x$ . Tada je preostali dio duljine jednak  $d - x$ . Umnožak  $a \cdot b$  je tada jednak

$$\begin{aligned} ab &= x(d - x) = dx - x^2 = -(x^2 - dx) \\ &= -\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{d}{2} + \frac{d^2}{4}\right) + \frac{d^2}{4} \\ &= \frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Uočimo da je ovaj izraz maksimalan ako je izraz u zagradi jednak 0. Tada vrijedi  $x = \frac{d}{2} = a = b$ . Geometrijski to znači da od svih pravokutnika opsega  $2d = 2(a + b)$  najveću površinu ima kvadrat.  $\square$

**Zadatak 4.7.** Treba ograditi vrt pravokutnog oblika tako da jednu stranicu vrta čini zid kuće, a preostale tri stranice su napravljene od žice duljine 120m. Koliko iznosi najveća moguća površina vrta?

*Rješenje:* Najprije skicirajmo situaciju iz zadatka.



Slika 4.8: Ograđeni vrt

Formula za određivanje opsega vrta glasi  $o = a + 2b$ . Kako je opseg jednak 120m slijedi:

$$a + 2b = 120 \implies a = 120 - 2b. \quad (4.11)$$

Površinu vrta računamo po formuli  $P = ab$ . Uvrstimo (4.11) u formulu za površinu:

$$P = (120 - 2b)b = 120b - 2b^2 = -2b^2 + 120b. \quad (4.12)$$

Odredimo prvu derivaciju funkcije  $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $P(b) = -2b^2 + 120b$  kako bismo pronašli maksimalnu površinu vrta:

$$P'(b) = -4b + 120.$$

Izjednačimo prvu derivaciju sa 0:

$$-4b + 120 = 0 \implies 4b = 120 \implies b = 30.$$

Uvrstimo dobivenu vrijednost  $b = 30$  u (4.11) i odredimo  $a$ :

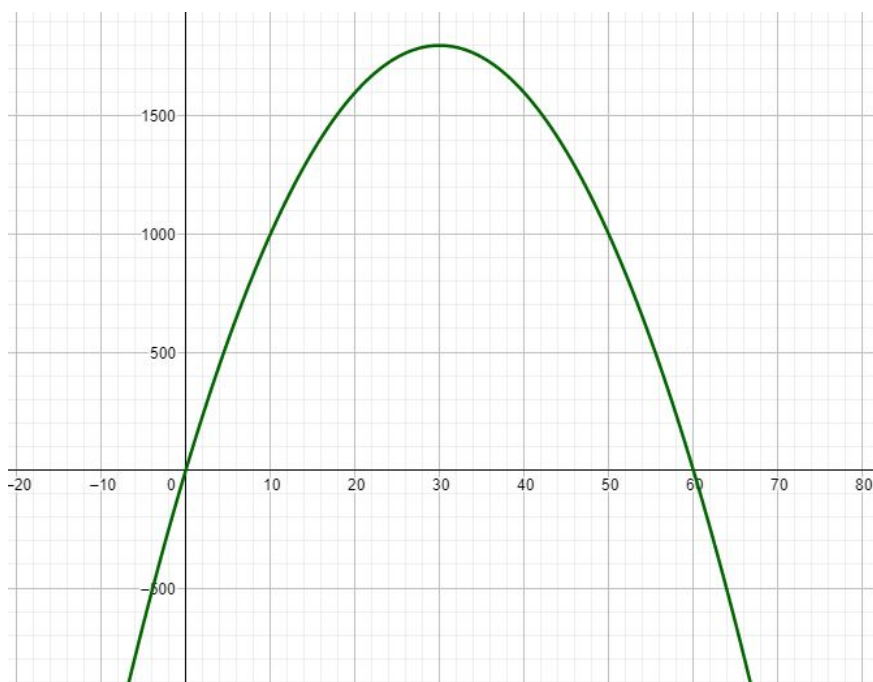
$$a = 120 - 2 \cdot 30 = 120 - 60 = 60.$$

Maksimalna površina vrta ograđenog žicom duljine 120m jednaka je

$$P = ab = 60 \cdot 30 = 1800\text{m}^2.$$

Zbog primjene derivacija, ovakav način rješavanja mogli bismo zadati učenicima 4. razreda srednje škole. □

2. način rješavanja zadatka. Isti zadatak mogli bismo riješiti primjereno učenicima 2. razreda srednje škole. Postupak rješavanja je isti do koraka (4.11). U tom trenutku sjetimo se da je funkcija  $P(b)$  kvadratna funkcija. Graf kvadratne funkcije je parabola. U ovom konkretnom slučaju parabola otvorom okrenuta prema dolje (jer je koeficijent uz  $b^2$  manji od 0). Ta parabola siječe  $x$ -os u točkama 0 i 60, a  $y$ -os u točki 0.



Slika 4.9: Graf kvadratne funkcije  $P(b) = -2b^2 + 120b$

Kako je otvorom okrenuta prema dolje slijedi da se maksimum funkcije postiže u točki tjemena. Koordinate tjemena kvadratne funkcije su:  $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$  pa je točka u kojoj se maksimum funkcije postiže jednaka:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{-4} = 30.$$

Ovim postupkom smo dobili isto rješenje. □

U ovom zadatku dobili smo da je lik maksimalne površine pravokutnik zbog ograničenja samo na tri stranice četverokuta. Kada bismo imali ograničenje na sve četiri stranice dobili bismo da je četverokut s maksimalnom površinom kvadrat.

# Bibliografija

- [1] Marco Abate, Francesco Tovena. *Curves and Surfaces*. Springer-Verlag Italia, 2012.
- [2] Catherine Bandle. *Dido's Problem and Its Impact on Modern Mathematics*. Notices of the AMS, Volume 64, Number 9, 2017.
- [3] Christian Bar. *Elementary Differential Geometry*. Cambridge University Press, 2010.
- [4] Viktor Blasjö. *The Isoperimetric Problem*. American Mathematical Monthly, 112(6), 526-566, 2005.
- [5] Alexander Bogomolny. *Isoperimetric theorem and inequality*.  
[http://cut-the-knot.org/do\\_you\\_know/isoperimetric.shtml](http://cut-the-knot.org/do_you_know/isoperimetric.shtml)
- [6] Vladimir Devidé. *Elementarno rješavanje nekih problema o ekstremima*. Matka 18 (br. 70), 2009./2010.
- [7] *Kurikulum za nastavni predmet Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2 u Republici Hrvatskoj*. [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_10\\_209.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_10_209.html)
- [8] Željka Milin Šipuš. *Nastavni oblici i metode*. [http://geoskolazg.weebly.com/uploads/1/8/2/5/18250091/mnm3-nastavni\\_oblici\\_i\\_metode.pdf](http://geoskolazg.weebly.com/uploads/1/8/2/5/18250091/mnm3-nastavni_oblici_i_metode.pdf)
- [9] Željka Milin Šipuš, Stipe Vidak. *Uvod u diferencijalnu geometriju*. Skripta PMF-MO, verzija 2.4.
- [10] Andrew Pressley. *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag London, Second edition, 2010.
- [11] [https://www.liverpool.ac.uk/~maryrees/homepagemath302/m302\\_17\\_4\\_12article.pdf](https://www.liverpool.ac.uk/~maryrees/homepagemath302/m302_17_4_12article.pdf)

# Sažetak

U ovom diplomskom radu opisana je prva pojava izoperimetrijskog problema u matematici te otkriće tog problema (legenda o Didoni) i važnost u svakidašnjem životu. Rezultat izoperimetrijskog problema jest izoperimetrijska nejednakost. Izoperimetrijska nejednakost dokazana je uporabom tehnike diferencijalnog računa te primjenom Fourierovih redova. Prikazana je konkretna primjena izoperimetrijske nejednakosti na geometrijskim likovima u ravnini (trokut i četverokut). Naposljetku, rezultati izoperimetrijske nejednakosti primjenjeni su na srednjoškolskim zadacima, pri čemu su prikazane različite aktivnosti u nastavi matematike koje potiču učenike na logičko razmišljanje i zaključivanje. Izoperimetrijska nejednakost skriva se u pozadini rješениh zadataka srednjoškolskih učenika u različitim područjima matematike.

**Ključne riječi:** legenda o Didoni, izoperimetrijski problem, izoperimetrijska nejednakost, aktivnosti u nastavi matematike, srednjoškolski zadaci



# Summary

This thesis describes the first appearance of the isoperimetric problem in mathematics and the discovery of this problem (Dido's legend) and its importance in everyday life. The result of the isoperimetric problem is isoperimetric inequality. Isoperimetric inequalities are proved using the technique of differential calculus and the application of the Fourier series. The concrete application of isoperimetric inequality on geometric figures in a plane (triangle and quadrilateral) is presented. Finally, the results of isoperimetric inequality were applied to high school assignments, showing different activities in mathematics teaching. Isoperimetric inequality is hidden in the background of solved problems of high school students in different areas of mathematics.

**Key words:** Dido's legend, isoperimetric problem, isoperimetric inequality, activities in teaching mathematics, high school tasks

# Životopis

Karla Škrnjug rođena je u Zagrebu 04. srpnja 1997. godine. Rodom je iz mjesta Mala Pačetina smještenog u općini Petrovsko koja se nalazi nedaleko od grada Krapine. Svoje osnovnoškolsko obrazovanje završila je 2012. godine u Osnovnoj školi Antuna Mihanovića u Petrovskom. Srednjoškolsko obrazovanje nastavila je u Općoj gimnaziji u Krapini. Godine 2016. upisala je sveučilišni preddiplomski studij Matematika; nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu te ga završila 2019. godine i stekla titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike (univ. bacc. educ. math.). Po završetku preddiplomskog studija upisala je diplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer. Stručnu praksu pohađala je u Osnovnoj školi Voltino te u Gimnaziji Tituš Brezovački u Zagrebu.