Okretanje novčića

Vučković, Mislav

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Mislav Vučković

OKRETANJE NOVČIĆA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zoran Vondraček

Zagreb, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

1 Uvod

U ovom diplomskom radu odstupamo od uobičajenog eksperimenta bacanja novčića i promatramo malo drugačiji eksperiment.

Označimo s $X_n \in \{0, 1\}$ vrijednost koju novčić pokazuje u n-tom koraku. Radi određenosti, neka je događaj $\{X_n = 1\}$ da novčić pokazuje glavu, a $\{X_n = 0\}$ da pokazuje pismo. Eksperiment se sastoji od toga da se u prvome koraku baca simetrični novčić, a u svakom idućem koraku $n \geq 2$ okrećemo novčić na drugu stranu s nekom vjerojatnošću $p_n \in [0, 1]$. Formalno, početno simetrično bacanje zapisujemo kao Bernoullijevu slučajnu varijablu $X_1 \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ i uz $p_n \in [0, 1], n \geq 2$, niz vjerojatnosti okretanja novčića u n-tom koraku. Za $n \geq 2$ imamo:

$$X_n = \begin{cases} 1 - X_{n-1}, & \text{s vjerojatnošću } p_n \\ X_{n-1}, & \text{s vjerojatnošću } 1 - p_n \end{cases}.$$

Dakle, poslije prvog bacanja, u n-tom koraku okrećemo novčić na drugu stranu s vjerojatnošću p_n za $n \geq 2$. Uvedimo oznaku

$$T_N := X_1 + \cdots + X_N,$$

krajnji cilj ovog rada je doznati graničnu distribuciju od $\dfrac{T_N}{N}$, tj. udio pojavljivanja glave/pisma prethodnog izraza kako $N \to \infty$.

U radu ćemo promatrati najviše kako početni vjerojatnosni niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utječe na gornju graničnu distribuciju. Vidjet ćemo da ako taj niz jako brzo pada prema nuli, tj. ako okretanje novčića rano uspori, tada će granična distribucija biti Bernoullijeva slučajna varijabla. Nadalje, promatrat ćemo i slučajeve kada niz (p_n) sporije pada prema nuli pa ćemo pokazati da tada granična distribucija prati normalnu ili beta razdiobu. Još ćemo odgovoriti na pitanje uz koje uvjete na (p_n) vrijede zakoni velikih brojeva. Za kraj, komentirat ćemo kako simetričnost novčića utječe na sve dokazane rezultate.

U teoriji je lakše raditi sa simetričnim slučajnim varijablama, pa u nastavku rada umjesto slučajne varijable X_n ćemo bez smanjenja općenitosti promatrati slučajnu varijablu $Y_n = 2X_n - 1 \in \{-1, 1\}$. Slično kao i ranije, vidimo da za transformirane slučajne varijable Y_n vrijedi

$$Y_1 = \begin{cases} 1, & \text{s vjerojatnošću } \frac{1}{2} \\ -1, & \text{s vjerojatnošću } \frac{1}{2} \end{cases}$$

i za $n \geq 2$

$$Y_n = \begin{cases} -Y_{n-1}, & \text{s vjerojatnosšću } p_n \\ Y_{n-1}, & \text{s vjerojatnosšću } 1 - p_n \end{cases},$$

pa ćemo umjesto T_N promatrati

$$S_N := Y_1 + \cdots + Y_N.$$

Nadalje, Neka su $W_1 \sim B\left(\frac{1}{2}\right), W_2 \sim B(p_2), W_3 \sim B(p_3), \ldots$ nezavisne slučajne varijable. Tada varijablu Y_n možemo zapisati kao

$$Y_n = (-1)^{\sum_{k=1}^{n} W_k}.$$

Primjetimo da za naš niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sada vrijedi

$$p_n = \mathbb{P}(W_n = 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Propozicija 1. *Neka je*

$$e_{ij} := \prod_{k=i+1}^{j} (1 - 2p_k). \tag{1}$$

Za niz slučajnih varijabli $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vrijedi*

1. $\mathbb{E}(Y_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
2. $\mathrm{Var}(Y_n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
3. $\mathrm{Corr}(Y_i, Y_j) = e_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$
4. $\mathbb{E}(Y_i | Y_j) = e_{ij} Y_i, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$

Dokaz. Imamo

1.

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left[(-1)^{\sum_{k=1}^{n} W_k}\right] = (nezavisnost) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(-1)^{W_k}\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[(-1)^{W_1}\right] \cdot \prod_{k=2}^{n} \mathbb{E}\left[(-1)^{W_k}\right] = 0 \cdot \prod_{k=2}^{n} \mathbb{E}\left[(-1)^{W_k}\right] = 0.$$

2.
$$\mathrm{Var}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) = \mathbb{E}\left[\left((-1)^{\sum_{k=1}^n W_k}\right)^2\right] = \mathbb{E}(1) = 1.$$

3.
$$\mathrm{Corr}(Y_i, Y_j) = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}\left[(-1)^{\sum_{i+1}^j W_k}\right] = \prod_{k=i+1}^{j} \mathbb{E}(-1)^{W_k} =$$
$$= \prod_{k=i+1}^{j} (1 - 2p_k) = e_{ij}.$$

4.
$$\mathbb{E}(Y_j | Y_i) = Y_i\, \mathbb{E}\left[(-1)^{\sum_{i+1}^j W_k}\right] = e_{ij} Y_i.$$

□

Primjetimo da za $K = 2m$ i izbor $i_1 < i_2 < \cdots < i_K$ vrijedi sljedeće za slučajne varijable (W_n):

$$\sum_{k=1}^{i_1} W_k + \sum_{k=1}^{i_2} W_k + \ldots + \sum_{k=1}^{i_K} W_k = \sum_{k=i_1+1}^{i_2} W_k + \sum_{k=i_3+1}^{i_4} W_k + \ldots + \sum_{k=i_{K-1}+1}^{i_K} W_k \pmod 2.$$

Iz toga slijedi

Korolar 2. *Za svaki $K = 2m$ i izbor $i_1 < i_2 < \cdots < i_K$ vrijedi*
$$\mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} \cdots Y_{i_K}) = e_{i_1 i_2} e_{i_3 i_4} \cdots e_{i_{K-1} i_K}. \tag{2}$$

Dokaz.
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} \cdots Y_{i_K}) &= \mathbb{E}(-1)^{\sum_{k=1}^{i_1} W_k + \sum_{k=1}^{i_2} W_k + \ldots + \sum_{k=1}^{i_K} W_k} = \\ &= \mathbb{E}(-1)^{\sum_{k=i_1+1}^{i_2} W_k + \sum_{k=i_3+1}^{i_4} W_k + \ldots + \sum_{k=i_{K-1}+1}^{i_K} W_k} \\ &= e_{i_1 i_2} e_{i_3 i_4} \cdots e_{i_{K-1} i_K}. \end{aligned} \tag{3}$$

□

Korolar 3 (Procjena korelacije)**.** *Pretpostavimo da* $\lim_{k\to\infty} p_k = 0$ *i neka je* $n_a \in \mathbb{N}$ *takav da* $p_k \leq 1/2$ *za* $k \geq n_a$*. Tada za* $n_a \leq i < j$ *vrijedi*

$$\exp\left(-2\sum_{k=i+1}^{j} p_k\right) \cdot \prod_{k=i+1}^{j} (1 - r_k) \leq e_{ij} \leq \exp\left(-2\sum_{k=i+1}^{j} p_k\right),$$

gdje je $r_k := 2p_k^2 e^{2p_k}$.

Nadalje, za bilo koji $C > 1$*, postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za* $n_0 \leq i < j$ *vrijedi*

$$\exp\left(-2C\sum_{k=i+1}^{j} p_k\right) \leq e_{ij} \leq \exp\left(-2\sum_{k=i+1}^{j} p_k\right).$$

Napomena 4. *Primjetimo da izraz iz prethodnog korolara*

$$\exp\left(-2\sum_{k=i+1}^{j} p_k\right)$$

brzo teži k nuli.

Dokaz. Iz Taylorovog teorema o ostatku, funkciju $x \mapsto e^{-x}$, za $x \geq 0$ možemo razviti kao Taylorov polinom prvog stupnja s ostatkom $R_1(x) = \dfrac{x^2}{2} \cdot e^{-c}$, gdje je $c \in (0, x)$:

$$e^{-x} = 1 - x + R_1(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} \cdot e^{-c}.$$

To drugačije možemo zapisati kao

$$e^{-x} - (1 - x) = \frac{x^2}{2} \cdot e^{-c} \geq 0, \quad x \geq 0. \tag{4}$$

S druge strane vidimo i

$$e^{-x} - (1 - x) = \frac{x^2}{2} \cdot e^{-c} \leq \frac{x^2}{2} \cdot 1, \quad x \geq 0. \tag{5}$$

Sada iz nejednakosti (4) i (5) proizlazi sljedeća nejednakost

$$0 \leq e^{-x} - (1 - x) \leq \frac{x^2}{2}, \quad x \geq 0.$$

Uvrštavanjem $x = 2p_k \geq 0$ u gornju nejednakost dobivamo

$$0 \leq e^{-2p_k} - (1 - 2p_k) \leq 2p_k^2,$$

iz čega slijedi

$$e^{-2p_k} - 2p_k^2 \leq 1 - 2p_k \leq e^{-2p_k}. \tag{6}$$

Kako je

$$e^{-2p_k}(1 - r_k) = e^{-2p_k}(1 - 2e^{2p_k}p_k^2) = e^{-2p_k} - 2p_k^2,$$

uvrštavanjem natrag u (6) dobivamo

$$e^{-2p_k}(1 - r_k) = e^{-2p_k} - 2p_k^2 \leq 1 - 2p_k \leq e^{-2p_k}.$$

Sada množenjem u gornjoj nejednakosti po indeksu k od $i+1$ do j konačno dobivamo

$$\exp\left(-2\sum_{k=i+1}^{j} p_k\right) \cdot \prod_{k=i+1}^{j}(1 - r_k) \leq e_{ij} \leq \exp\left(-2\sum_{k=i+1}^{j} p_k\right).$$

Slično slijedi i druga tvrdnja jer se lako pokaže da za dovoljno male $x \geq 0$ imamo

$$e^{-Cx} \leq 1 - x \leq e^{-x}.$$

□

2 Posebni slučajevi

2.1 Apsolutna sumabilnost vjerojatnosnog niza

U ovom potpoglavlju pretpostavljamo da za niz (p_n) vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n < \infty.$$

Lema 5 (Borel-Cantelli)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor te neka je* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz događaja na tom prostoru. Ako vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) < \infty,$$

tada je vjerojatnost da se beskonačno mnogo tih događaja ostvari jednaka nuli, tj.

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = 0.$$

Propozicija 6. *Uz sve navedene pretpostavke na nizove* (p_n) *i* (X_n)*, vrijedi:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n < \infty \Longrightarrow \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N} \xrightarrow{g.s.} B\left(\frac{1}{2}\right).$$

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je kodomena slučajne varijable $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{X_1 + \cdots + X_N}{N}$ jednaka skupu $\{0, 1\}$ g.s.
Primjetimo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(W_n = 1) < \infty,$$

pa je pretpostavka Borel-Cantellijeve leme zadovoljena, što znači da je $\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty}\{W_n = 1\}\right) = 0$. Dakle, događaj $\{W_n = 1\}$ se pojavljuje najviše konačno mnogo puta, tj. novčić se okreće najviše konačno mnogo puta gotovo sigurno. Označimo s $A := \limsup\limits_{n\to\infty}\{W_n = 1\}$, tada očito vrijedi $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1$.

Neka je sada $\omega \in \Omega \setminus A$, imamo dva slučaja:

1. $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0) \quad X_n(\omega) = 1.$

   Za $N > n_0$ imamo

$$\frac{X_1(\omega) + \cdots + X_N(\omega)}{N} = \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_{n_0}(\omega)}{N} + \frac{X_{n_0+1}(\omega) + \cdots X_N(\omega)}{N} =$$
$$= \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_{n_0}(\omega)}{N} + \frac{N - n_0}{N}.$$

   Uzimanjem limesa slijedi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_N(\omega)}{N} = 1.$$

2. $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0) \quad X_n(\omega) = 0.$

   Za $N > n_0$ imamo

$$\frac{X_1(\omega) + \cdots + X_N(\omega)}{N} = \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_{n_0}(\omega)}{N} + \frac{X_{n_0+1}(\omega) + \cdots X_N(\omega)}{N} =$$
$$= \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_{n_0}(\omega)}{N} + \frac{0}{N}.$$

   Uzimanjem limesa konačno dobivamo

$$\lim_{N\to\infty} \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_N(\omega)}{N} = 0.$$

Dakle pokazali smo da je prostor stanja jednak $\{0, 1\}$ gotovo sigurno. Preostaje još samo pokazati da vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N} = 0\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N} = 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Kao što smo već komentirali, događaj $\{W_n = 1\}$, $n \geq 2$, se pojavljuje najviše konačno mnogo puta, tj. novčić se okreće najviše konačno mnogo puta. Dakle, naš proces okretanja novčića se poslije nekog koraka stabilizira.

Jedan mogući niz poprimanja vrijednosti niza (X_n) bi bio

$$1, 0, 1, 0, 1, 1, \ldots, 1, 1, \ldots$$

Iz gornjeg vidimo da smo dobili niz: glava, pismo, glava, pismo, tada se proces stabilizirao i samo su se glave pojavljivale. Ako te vrijednosti prevedemo u vrijednosti niza okretanja $(W_n)_{n\geq 2}$ tada taj niz poprima sljedeće vrijednosti

$$1,1,1,1,0,0,\dots,0,0,\dots$$

jer smo poslije prvog slučajnog bacanja okrenuli novčić točno četiri puta za redom, a poslije toga ga više nismo okretali. Primjetimo da npr. slučaj za realizaciju od (X_n)

$$1,0,1,0,\dots,1,0,1,0,\dots$$

nije moguć, jer tada je realizacija pripadnog niza okretanja $(W_n)_{n\geq 2}$ jednaka

$$1,1,1,1,\dots,1,1,\dots$$

što je u kontradikciji s Borel-Cantellijevom lemom.

Označimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^N &:= \{(i_1,i_2,\dots,i_n) | n \in \mathbb{N}, i_k \in \mathbb{N}, 2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n,\ n \text{ neparan}\} \\
\mathcal{I}^P &:= \{(i_1,i_2,\dots,i_n) | n \in \mathbb{N}, i_k \in \mathbb{N}, 2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n,\ n \text{ paran}\}.
\end{aligned}$$

Nadalje, definirajmo oznake

$$\begin{aligned}
W(\mathcal{I}^N) &:= \bigcup_{(i_1,\dots,i_{2n-1})\in\mathcal{I}^N} \left(\bigcap_{l=1}^{2n-1} \{W_{i_l}=1\} \cap \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} W_{i_j} = 2n-1 \right\} \right) \\
W(\mathcal{I}^P) &:= \bigcup_{(i_1,\dots,i_{2n})\in\mathcal{I}^N} \left(\bigcap_{l=1}^{2n} \{W_{i_l}=1\} \cap \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} W_{i_j} = 2n \right\} \right).
\end{aligned}$$

Primjetimo da je $W(\mathcal{I}^N)$ skup svih događaja gdje se novčić okreće neparno mnogo puta, a $W(\mathcal{I}^P)$ označava događaje okretanja novčića parno mnogo puta. Pokrili smo sve slučajeve gdje je $\{W_n = 1\}$ za konačno mnogo $n \geq 2$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N} = 0\right) &= \mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\} \cap W\left(\mathcal{I}^P\right)\right) + \mathbb{P}\left(\{X_1 = 1\} \cap W\left(\mathcal{I}^N\right)\right) \\
&= (\text{nezavisnost}) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1 = 0\})\,\mathbb{P}\left(W\left(\mathcal{I}^P\right)\right) + \mathbb{P}(\{X_1 = 1\})\,\mathbb{P}\left(W\left(\mathcal{I}^N\right)\right) \\
&= \left(\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}\right) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1 = 1\})\,\mathbb{P}\left(W\left(\mathcal{I}^P\right)\right) + \mathbb{P}(\{X_1 = 0\})\,\mathbb{P}\left(W\left(\mathcal{I}^N\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{X_1 = 1\} \cap W\left(\mathcal{I}^P\right)\right) + \mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\} \cap W\left(\mathcal{I}^N\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N} = 1\right).
\end{aligned}$$

Kako zbroj tih dviju vjerojatnosti mora biti jednak jedan, zaključujemo da vrijedi:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N} = 0\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N} = 1\right) = \frac{1}{2}.$$

□

2.2 Harmonijski niz

U ovom potpoglavlju modeliramo inicijalni vjerojatnosni niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kao

$$p_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 2.$$

Odmah je jasno da ne možemo iskoristiti rezultate iz Potpoglavlja 2.1 zbog poznate činjenice da harmonijski red divergira, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

pa ne možemo iskoristiti Borel-Cantellijevu lemu. Kako bismo uspjeli dokazati nešto više o zakonu razdiobe takve slučajne varijable, trebamo uvesti više pojmova.

Definicija 7. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla na tom prostoru. Pretpostavimo da postoji $0 < \delta < 1$ takav da vrijedi

$$E(e^{tX}) < \infty, \quad |t| < \delta.$$

Funkcija $M : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ definarana s

$$M(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$$

zove se **funkcija izvodnica momenata** slučajne varijable X.

Propozicija 8. *Za funkciju izvodnicu momenata vrijedi:*

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \, \mathbb{E}(X^n)}{n!}.$$

Dokaz. Iz definicije mora vrijediti $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$, za $|t| < \delta$. Slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{t|X|}) &= \mathbb{E}(e^{t|X|}\chi_{\{X\geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{t|X|}\chi_{\{X\leq 0\}}) \\
&= \mathbb{E}(e^{tX}\chi_{\{X\geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{-tX}\chi_{\{X\leq 0\}}) \\
&\leq \mathbb{E}(e^{tX}) + \mathbb{E}(e^{-tX}) < \infty.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{E}(e^{t|X|}) < \infty$, za $|t| < \delta$. Iz Taylorovog zapisa imamo:

$$e^{t|X|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n |X|^n}{n!}.$$

Iz toga slijedi da očekivanje možemo zapisati kao:

$$\mathbb{E}(e^{|t||X|}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n |X|^n}{n!}\right) = \text{(LTMK)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n \, \mathbb{E}(|X|^n)}{n!} < \infty,$$

gdje LTMK označava Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji. Kako je gornji izraz konačan slijedi da je dobro definiran sljedeći izraz i vrijedi

$$M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \, \mathbb{E}(X^n)}{n!}.$$

$\square$

Korolar 9. *Neka je X slučajna varijabla s pripadnom funkcijom izvodnicom M_X na nekom otvorenom intervalu $(-\delta, \delta)$, gdje je $0 < \delta < 1$ i vrijedi $M_X(t) < \infty$ za $|t| < \delta$. Tada vrijedi*

$$M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n).$$

Dokaz. Iz prethodnog teorema znamo da je

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \, \mathbb{E}(X^n)}{n!}$$

i da red s desne strane konvergira. Kako pripadni red potencija konvergira na otvorenom intervalu, znamo da je diferencijabilan pa deriviranjem po varijabli t na $(-\delta, \delta)$ dobivamo

$$M'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} \, \mathbb{E}(X^n)}{(n-1)!}.$$

Slično, ako ponovimo taj korak k puta imamo

$$M^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k} \, \mathbb{E}(X^n)}{(n-k)!}.$$

Uvrštavanjem $t = 0$ slijedi da je

$$M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n),$$

čime je dokaz gotov. □

Teorem 10. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajne varijable na tom prostoru. Neka su $M_X, M_Y : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ pripadne funkcije izvodnice. Tada vrijedi*

$$(\forall t \in (-\delta, \delta)) \quad M_X(t) = M_Y(t) \Rightarrow X \textit{ i } Y \textit{ su jednako distribuirane}$$

Sada ćemo uvesti jedan važan pojam u teoriji vjerojatnosti, a to je pojam slabe konvergencije.

Definicija 11. Neka je $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz mjera na prostoru Borelovih skupova $\mathcal{B}$. Kažemo da (μ_n) slabo konvergira k mjeri μ, ako vrijedi

$$(\forall g \in C_b(\mathbb{R})) \quad \int_{\mathbb{R}} g d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} g d\mu.$$

Pišemo $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. Ovdje $C_b(\mathbb{R})$ označava skup svih neprekidnih, ograničenih funkcija na $\mathbb{R}$.

Općenito, kada radimo s vjerojatnosnim mjerama, slaba konvergencija je važan pojam. Naime, poznata je činjenica je da postoji $1-1$ veza između funkcija distribucija i vjerojatnosnih mjera induciranih slučajnim varijablama. Pojam slabe konvergencije vjerojatnosnih mjera je važan jer on implicira konvergenciju po distribuciji. Navodimo sljedeći rezultat bez dokaza (vidjeti [6], Teorem 18.1.)

Propozicija 12. *Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Označimo zakon razdiobe od X_n s*

$$\mathbb{P}_n(B) := \mathbb{P}(X_n \in B), \quad B \in \mathcal{B}$$

te funkciju distribucije od X_n s F_n. Tada, ako postoji vjerojatnosna distribucija $\mathbb{P}$ za koju vrijedi $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$, uz $F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$ vrijedi

$$F_n(x) \to F(x), \quad \forall x \in C(F),$$

gdje $C(F)$ označava točke neprekidnosti funkcije distribucije F. Drugim riječima, postoji slučajna varijabla X takva da $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Sada vidimo važnost slabe konvergencije mjera u teoriji vjerojatnosti. Navodimo jedan važan rezultat koji će nam pomoći pri dokazivanju većine ključnih teorema u ovome radu (vidjeti [4], Teorem 3.3.26.)

Teorem 13. *Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s pripadnim nizom funkcija distribucija $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ako za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n^k\right) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega x^k dF_n(x) =: \mu_k < \infty$ i ako dodatno*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\mu_{2k}^{1/2k}}{2k} < \infty, \tag{7}$$

tada niz (F_n) slabo konvergira prema jedinstvenoj distribuciji s tim momentima.

Napomena 14. ***Carlemanov kriterij*** *glasi:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} x^{2k} d\mu \right)^{-1/2k} = \infty.$$

Ako vrijedi Carlemanov kriterij umjesto uvjeta (7), tada isto vrijedi zaključak Teorema 13.

Napomena 15. *U prethodnom teoremu tvrdimo da niz (F_n) slabo konvergira prema jednistvenoj funkciji distribucije s jednakim momentima, što je iz Propozicije 12 ekvivalentno tome da pripadne slučajene varijable (X_n) konvergiraju po distribuciji k jedinstvenoj slučajnoj varijabli s tim momentima.*

Lema 16. *Uniformna distribucija $U \sim U[-1,1]$ ima funkciju izvodnicu momenata*

$$M_U(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2t} < \infty, \quad t \in [-1,1]$$

i za njene momente vrijedi

$$E\left[U^k\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, & \text{za } k \text{ paran} \\ 0, & \text{za } k \text{ neparan} \end{cases}.$$

Dokaz. Pokažimo prvu tvrdnju za funkciju izvodnicu momenata.

$$M_U(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(tU\right)\right] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot e^{tu} du = \frac{e^t - e^{-t}}{2t}.$$

Nadalje, za momente vrijedi

$$\mathbb{E}(U^n) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot u^n du = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_{-1}^{1} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & n \text{ paran} \\ 0, & n \text{ neparan} \end{cases}.$$

$\square$

Lema 17. *Za svake $K, N \in \mathbb{N}$ takve da $K < N$, vrijedi sljedeće*

$$\sum_{n=K}^{N} n(n-1)\cdots(n-K) = \frac{(N+1)N\cdots(N-K)}{K+2}. \tag{8}$$

Dokaz. Prisjetimo se da vrijedi relacija

$$\sum_{j=k}^{n-m} \binom{j}{k}\binom{n-j}{m} = \binom{n+1}{k+m+1},$$

pa uvrštavanjem $m = 0$ u gornju relaciju dobivamo

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{9}$$

Sada za sumu iz (8) vrijedi

$$\sum_{n=K+1}^{N} n(n-1)\dots(n-K) = (K+1)! \sum_{n=K+1}^{N} \binom{n}{K+1} = (K+1)! \cdot \binom{N+1}{K+2}$$
$$= \frac{(N+1)N\cdots(N-K)}{K+2}.$$

□

Lema 18. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *proizvoljan i* $i_{2n}, i_{2n+1} \in \mathbb{N}$ *takvi da* $2n \leq i_{2n}$, $2n+1 \leq i_{2n+1}$ *i* $i_{2n} < i_{2n+1}$. *Tada vrijedi*

$$\sum_{i_{2n}=2n}^{i_{2n+1}-1} (i_{2n}-2n)(i_{2n}-(2n-1))\cdots(i_{2n}-3)(i_{2n}-2)$$
$$= \frac{1}{2n}(i_{2n+1}-(2n+1))(i_{2n+1}-2n)\cdots(i_{2n+1}-2). \tag{10}$$

Dokaz.

$$\sum_{i_{2n}=2n}^{i_{2n+1}-1} (i_{2n}-2n)(i_{2n}-(2n-1))\cdots(i_{2n}-3)(i_{2n}-2)$$
$$= \sum_{i_{2n}=2n+1}^{i_{2n+1}-1} (i_{2n}-2n)(i_{2n}-(2n-1))\cdots(i_{2n}-3)(i_{2n}-2)$$
$$= (2n-1)! \sum_{i_{2n}=2n+1}^{i_{2n+1}-1} \binom{i_{2n}-2}{2n-1} = (2n-1)! \sum_{i_{2n}=2n-1}^{i_{2n+1}-3} \binom{i_{2n}}{2n-1}$$
$$= (9) = (2n-1)! \cdot \binom{i_{2n+1}-2}{2n} = \frac{1}{2n}(i_{2n+1}-(2n+1))(i_{2n+1}-2n)\cdots(i_{2n+1}-2).$$

□

Sada smo spremni na dokaz glavnoga teorema ovog potpoglavlja.

Teorem 19. *Uz pretpostavku* $p_n = \frac{1}{n}$, $\quad n \geq 2$, *vrijedi*

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_N}{N} \quad \xrightarrow{\mathcal{D}} \quad U[-1,1].$$

Dokaz. U dokazu ovog teorema koristit ćemo Teorem 13. Prvo moramo saznati koji su momenti niza slučajnih aritmetičkih sredina iz iskaza.
Iz definicije od e_{ij} i uz $p_n = \frac{1}{n}$ imamo:

$$e_{ij} = \prod_{k=i+1}^{j} (1 - 2p_k) = \prod_{k=i+1}^{j} \left(1 - \frac{2}{k}\right) = \frac{j-2}{j} \cdot \frac{j-3}{j-1} \cdots \frac{i-1}{i+1} = \frac{(i-1)i}{(j-1)j}.$$

Sada iz (2) slijedi:

$$\mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} \dots Y_{i_K}) = \frac{i_1(i_1-1)}{i_2(i_2-1)} \cdot \frac{i_3(i_3-1)}{i_4(i_4-1)} \cdots \frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}.$$

Prisjetimo se da je Y_n simetrična slučajna varijabla, što povlači da je distribucija od S_N simetrična, iz čega odmah slijedi da su neparni momenti od S_N jednaki nuli, tj. $\mathbb{E}(S_N^M) = 0$, za sve $M \in \mathbb{N}$, M neparan. Za parne K koristimo multinomni teorem:

$$\mathbb{E}\, S_N^K = I + K! \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_K \le N} \mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} \dots Y_{i_K}).$$

Ovdje I označava sumu produkata po svim K-torkama $i_1, i_2, \dots, i_K$ takvih da postoje bar dva indeksa i_p i i_q za koje vrijedi $i_p = i_q$. Primjetimo da je $Y_i \in \{-1, 1\}$ pa iz toga slijedi da $|Y_i^l| \le 1$, za $l \ge 1$. Sada znamo međe od I, $|I| \le m(N, K)$, gdje $m(N, K)$ označava broj takvih produkata gdje postoje bar dva ista indeksa u produktu.

Kako postoje bar dva ista indeksa u produktu, produkt $Y_{i_1} Y_{i_2} \cdots Y_{i_K}$ možemo zapisati kao $Y_{i_l}^2 Y_{i_1} Y_{i_2} \cdots Y_{i_{K-2}}$, gdje su $i_l, i_1, i_2, \dots, i_{K-2}$ indeksi, ne nužno različiti. Kako svaki indeks možemo odabrati na N načina, matematičkom indukcijom se lako pokaže da vrijedi $m(N, K) \le N \cdot N^{K-2} = N^{K-1}$, a to odmah povlači $|I| \le N^{K-1}$.
Sada imamo

$$\mathbb{E}\, S_N^K = K! \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_K \le N} \mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} \dots Y_{i_K}) + \mathcal{O}(N^{K-1}). \tag{11}$$

Procijenimo sumu očekivanja:

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_K \le N} \mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} \dots Y_{i_K}) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_K \le N} \frac{i_1(i_1-1)}{i_2(i_2-1)} \cdot \frac{i_3(i_3-1)}{i_4(i_4-1)} \cdots \frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{2\le i_2<\dots<i_K\le N} \frac{1}{i_2(i_2-1)}\cdot\frac{i_3(i_3-1)}{i_4(i_4-1)}\cdots\frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} i_1(i_1-1) = (8)\\
&= \sum_{2\le i_2<\dots<i_K\le N} \frac{1}{i_2(i_2-1)}\cdot\frac{i_3(i_3-1)}{i_4(i_4-1)}\cdots\frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}\cdot\left(\frac{i_2(i_2-1)(i_2-2)}{3}\right)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{2\le i_2<\dots<i_K\le N} (i_2-2)\cdot\frac{i_3(i_3-1)}{i_4(i_4-1)}\cdots\frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}\\
&= \frac{1}{3}\sum_{3\le i_3<\dots<i_K\le N} \frac{i_3(i_3-1)}{i_4(i_4-1)}\cdots\frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}\sum_{i_2=2}^{i_3-1}(i_2-2) = (10)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{3\le i_3<\dots<i_K\le N} \frac{i_3(i_3-1)}{i_4(i_4-1)}\cdots\frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}\left(\frac{(i_3-3)(i_3-2)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{3!}\sum_{4\le i_4<\dots<i_K\le N} \frac{1}{i_4(i_4-1)}\cdots\frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}\sum_{i_3=3}^{i_4-1}[i_3(i_3-1)(i_3-2)(i_3-3)] = (8)\\
&= \frac{1}{3!}\sum_{4\le i_4<\dots<i_K\le N} \frac{1}{i_4(i_4-1)}\cdots\frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}\cdot\left(\frac{i_4(i_4-1)\cdots(i_4-4)}{5}\right)\\
&= \frac{1}{3!\cdot 5}\sum_{5\le i_5<\dots<i_K\le N} \frac{i_5(i_5-1)}{i_6(i_6-1)}\cdots\frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}\sum_{i_4=4}^{i_5-1}(i_4-2)(i_4-3)(i_4-4) = (10)\\
&= \frac{1}{3!\cdot 5}\sum_{5\le i_5<\dots<i_K\le N} \frac{i_5(i_5-1)}{i_6(i_6-1)}\cdots\frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}\cdot\left(\frac{(i_5-2)(i_5-3)(i_5-4)(i_5-5)}{4}\right)\\
&= \frac{1}{5!}\sum_{6\le i_6<\dots<i_K\le N} \frac{1}{i_6(i_6-1)}\cdots\frac{i_{K-1}(i_{K-1}-1)}{i_K(i_K-1)}\sum_{i_5=5}^{i_6-1} i_5(i_5-1)\cdots(i_5-5) = (8)\\
&= \cdots = \frac{K}{(K+1)!}\sum_{K\le i_K\le N}(i_K-2)(i_K-3)\cdots(i_K-K) = (10)\\
&= \frac{(N-1)(N-2)\cdots(N-K)}{(K+1)!}.
\end{aligned}
$$

Iz gornjega slijedi da je

$$
\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_K\le N} \mathbb{E}(Y_{i_1}Y_{i_2}\dots Y_{i_K}) = \frac{N^K}{(K+1)!} + \mathcal{O}(N^{K-1}).
$$

Iz toga slijedi

$$\mathbb{E}\, S_N^K = K!\frac{N^K}{(K+1)!} + \mathcal{O}(N^{K-1}) = \frac{N^K}{K+1} + \mathcal{O}(N^{K-1}),$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_N}{N}\right)^K\right] = \frac{1}{K+1} + \mathcal{O}(N^{-1}),$$

pa kada $N \to \infty$ dobivamo:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{S_N^K}{N^K}\right) = \begin{cases} 0, & K \text{ neparan} \\ \frac{1}{K+1}, & K \text{ paran} \end{cases}.$$

Sada iz Leme 16 znamo da za $U \sim U([-1,1])$ vrijedi

$$\mathbb{E}\, U^K = \begin{cases} 0, & K \text{ neparan} \\ \dfrac{1}{K+1}, & K \text{ paran} \end{cases}.$$

Kako smo pokazali da je

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{S_N^K}{N^K}\right) = \mathbb{E}\left(U^K\right)$$

i jer očito vrijedi

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left(X^{2k}\right)^{1/2k}}{2k} = \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2k(2k+1)^{1/2k}}\right) = 0 < \infty,$$

iz Teorema 13 konačno slijedi da

$$\frac{S_N}{N} \xrightarrow{\mathcal{D}} U([-1,1]).$$

□

2.3 Generalizirani harmonijski niz

Neka je $a > 0$ fiksan, realan broj. Niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sada definiramo kao

$$p_n = \frac{a}{n}, \quad n \geq 2.$$

Definicija 20. Funkciju $B : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sa zakonom pridruživanja

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

nazivamo **beta funkcija**.

Definicija 21. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Za slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da ima simetričnu beta distribuciju oko točke $1/2$ s parametrom $a > 0$, u oznaci $X \sim Beta(a)$, ako je funkcija sa zakonom pridruživanja

$$f_X(x;a) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,a)} x^{a-1}(1-x)^{a-1}, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

vjerojatnosna funkcija gustoće od X.

Definicija 22. Besselova funkcija prve vrste definira se kao

$$\mathrm{BesselI}_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}.$$

Definicija 23. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Uz oznaku

$$c^{(0)} := 1$$
$$c^{(n)} := c(c+1)\cdots(c+n-1),$$

definiramo **konfluentnu hipergeometrijsku funkciju** kao

$$F(z;a,b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}z^n}{b^{(n)}n!}.$$

Može se pokazati da postoji veza između konfluentne hipergeometrijske funkcije i Besselove funkcije (vidjeti [1], jednakost 13.6.3):

$$F(t;a,2a) = e^{t/2}\left(\frac{t}{4}\right)^{1/2-a} \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) \mathrm{Bessel}I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right). \tag{12}$$

S druge strane, može se uspostaviti veza između konfluentne hipergeometrijske funkcije i funkcije izvodnice momenata simetrične beta razdiobe (vidjeti [2], jednakost 25.17):

$$M_{Beta(a)}(t) = F(t;a,2a).$$

Uz gornje rezultate, vrijedi sljedeći korolar

Korolar 24. *Za funkciju izvodnicu momenata simetrične beta razdiobe vrijedi*

$$M_{Beta(a)}(t) = e^{t/2}\left(\frac{t}{4}\right)^{1/2-a}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) BesselI_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right). \tag{13}$$

U ovom potpoglavlju ćemo sličnim metodama kao u prethodnom potpoglavlju pokazati da u slučaju $p_n = \frac{a}{n}$, $a > 0$, kvocijent $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{N}$ konvergira po distribuciji k $Beta(a)$. Kako bismo koristili prethodne tehnike, moramo znati kako izgledaju momenti simetrične beta razdiobe. $Beta(a)$ ima sljedeće momente ([3], Appendix A - Standard Distributions)

$$\mu_k = \prod_{l=1}^{k} \frac{a+l-1}{2a+l-1}.$$

Uz jednakost (13), za funkciju izvodnicu momenata vrijedi

$$\begin{aligned} M_{Beta(a)}(t) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{l=1}^{k}\frac{a+l-1}{2a+l-1}\right)\frac{t^k}{k!} = \\ &= e^{t/2}\left(\frac{t}{4}\right)^{1/2-a}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Bessel}I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Lema 25. *Vrijede sljedeće dvije jednakosti*

1.

$$\exp\left\{\sum_{n=i+1}^{j}\log\left(1-\frac{2a}{n}\right)\right\} = \exp\left\{\mathcal{O}\left(\frac{j-i}{i^2}\right) - 2a\sum_{n=i+1}^{j}\frac{1}{n}\right\} \tag{15}$$

2.

$$\exp\left\{\mathcal{O}\left(\frac{j-i}{i^2}\right) - 2a\sum_{n=i+1}^{j}\frac{1}{n}\right\} = \exp\left\{\mathcal{O}\left(\frac{j-i}{i^2}\right) - 2a\log\left(\frac{j}{i}\right)\right\}. \tag{16}$$

Dokaz. 1. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je $i > 4a$ takav da vrijedi

$$\frac{2a}{n} < \frac{1}{2}, \text{ za } n > i.$$

Taylorovim razvojem logaritamske funkcije slijedi nejednakost ([8], Lema 8.1)

$$|\log(1-x)+x| \le 2x^2, \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Iz toga slijedi

$$\log\left(1-\frac{2a}{n}\right) = -\frac{2a}{n} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{2a}{n}\right)^2\right).$$

Sada sumiranjem gornje relacije po indeksu n od $i+1$ do j dobivamo

$$\sum_{n=i+1}^{j} \log\left(1-\frac{2a}{n}\right) = -2a\sum_{n=i+1}^{j}\frac{1}{n} + \sum_{n=i+1}^{j}\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{17}$$

Međutim, kako je

$$\sum_{n=i+1}^{j}\frac{1}{n^2} \le \sum_{n=i+1}^{j}\frac{1}{i^2} = \frac{j-i}{i^2},$$

slijedi da je zadnji član u (17) jednak $\mathcal{O}\left(\frac{j-i}{i^2}\right)$, iz čega slijedi (15).

2. Označimo

$$H_j := \sum_{n=1}^{j}\frac{1}{n}.$$

Može se pokazati da vrijedi sljedeća relacija ([1], 6.13.18)

$$H_j = \log(j) + \gamma + \frac{1}{2j} - \frac{1}{12j^2} + \frac{1}{120j^4} - \epsilon, \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{252j^6},$$

gdje je γ Eulerova konstanta. Iz gornjega očito slijedi

$$H_j = \log(j) + \gamma + \frac{1}{2j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{j^2}\right).$$

Računamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=i+1}^{j}\frac{1}{n} = H_j - H_i &= \log(j) + \gamma + \frac{1}{2j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{j^2}\right) - \left(\log(i) + \gamma + \frac{1}{2i} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{i^2}\right)\right)\\ &= \log\left(\frac{j}{i}\right) + \left(\frac{1}{2j} - \frac{1}{2i}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{i^2}\right) = \log\left(\frac{j}{i}\right) + \frac{i-j}{2ji} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{i^2}\right)\\ &\le \log\left(\frac{j}{i}\right) + \frac{j-i}{2i^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{i^2}\right) = \log\left(\frac{j}{i}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{j-i}{i^2}\right).\end{aligned}$$

Sada iz gornjeg računa vidimo da očito vrijedi (16).

$\square$

Teorem 26. *Vrijedi*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow{\mathcal{D}} Beta(a).$$

Dokaz. Pri dokazivanju ovog teorema ćemo ponovno iskoristiti dokaz Teorema 13. Prisjetimo se oznake N-te parcijalne sume slučajnih varijabli (Y_n)

$$S_N = Y_1 + \cdots + Y_N,$$

i parcijalne sume za varijable (X_n)

$$T_N = X_1 + \cdots + X_N.$$

Iz iskaza propozicije vidimo da zapravo tražimo distribuciju od $\lim_{N\to\infty} T_N/N$, no nju ćemo dobiti preko distribucije od $\lim_{N\to\infty} S_N/N$. Kako bismo to uspjeli, prvo moramo pronaći momente od $\lim_{N\to\infty} S_N/N$. Sada pomoću relacija (15) i (16) računamo

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \prod_{n=i+1}^{j}(1-2p_n) = \prod_{n=i+1}^{j}\left(1-\frac{2a}{n}\right) = \exp\left\{\sum_{n=i+1}^{j}\log\left(1-\frac{2a}{n}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\mathcal{O}\left(\frac{j-i}{i^2}\right) - 2a\sum_{n=i+1}^{j}\frac{1}{n}\right\} = \exp\left\{\mathcal{O}\left(\frac{j-i}{i^2}\right) - 2a\log\left(\frac{j}{i}\right)\right\} \\ &= \frac{i^{2a}}{j^{2a}}\cdot\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{j-i}{i^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{18}$$

U članku [5] je pokazano da za parne K-ove vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, S_N^K &= K! \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_K\le N} \mathbb{E}(Y_{i_1}Y_{i_2}\dots Y_{i_K}) + \mathcal{O}(N^{K-1}) \\ &= K! \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_K\le N} \frac{i_1^{2a}}{i_2^{2a}}\cdot\frac{i_3^{2a}}{i_4^{2a}}\cdots\frac{i_{K-1}^{2a}}{i_K^{2a}} + \mathcal{O}(N^{K-1}) \\ &= \frac{K!N^K(1+\mathcal{O}\left(N^{-1}\right))}{(1+2a)\cdot 2\cdot(3+2a)\cdot 4\cdots(K-1+2a)\cdot K} + \mathcal{O}(N^{K-1}) \\ &= \frac{K!N^K(1+\mathcal{O}\left(N^{-1}\right))}{K!!(1+2a)\cdot(3+2a)\cdots(K-1+2a)} + \mathcal{O}(N^{K-1}) = (K=2m,\ K!!=2^m m!) \\ &= \frac{(2m)!N^{2m}(1+\mathcal{O}\left(N^{-1}\right))}{2^m m!(1+2a)\cdot(3+2a)\cdots(2m-1+2a)} + \mathcal{O}(N^{2m-1}). \end{aligned} \tag{19}$$

Sada uz $K = 2m$ imamo

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_N^K}{N^K}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{S_N^{2m}}{N^{2m}}\right) = \frac{(2m)!(1+\mathcal{O}\left(N^{-1}\right))}{2^m m!(1+2a)\cdot(3+2a)\cdots(2m-1+2a)} + \mathcal{O}(N^{2m-1})/N^{2m}$$
$$\xrightarrow{N\to\infty} \frac{(2m)!}{2^m m!(1+2a)\cdot(3+2a)\cdots(2m-1+2a)} := \mu_{2m},$$

Nadalje primjetimo da vrijedi sljedeća relacija

$$\left|\frac{S_N}{N}\right| \leq \frac{|Y_1|+|Y_2|+\cdots+|Y_n|}{N} \leq \frac{1+1+\cdots+1}{N} = 1,$$

iz čega slijedi da za svaki $m \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{S_N}{N}\right)^{2m} \leq 1 \Longrightarrow \mu_{2m} := \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_N}{N}\right)^{2m}\right] \leq 1.$$

Gornje sada očito povlači da

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\mu_{2m}^{1/2m}}{2m} \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{2m} = 0 < \infty,$$

pa su sve pretpostavke Teorema 13 ispunjene. Sada je još potrebno ispitati kojoj distribuciji ti momenti pripadaju. Označimo s Ψ_a jedinstvenu distribuciju za koju vrijedi

$$\mathbb{E}\left(\Psi_a^K\right) = \begin{cases} 0, & K \text{ neparan} \\ \dfrac{(2m)!}{2^m m!(1+2a)\cdot(3+2a)\cdots(2m-1+2a)}, & K = 2m \end{cases}.$$

Za parne momente K to možemo zapisati kao:

$$\mathbb{E}\left(\Psi_a^K\right) = \frac{(2m)!\Gamma(a+1/2)}{2^{2m}\Gamma(m+a+1/2)}.$$

Sličnim argumentima kao kod zapisa funkcije izvodnice momenata iz (13), za funkciju izvodnicu momenata od Ψ_a vrijedi:

$$\begin{aligned} M_a(t) = \mathbb{E}\, e^{t\Psi_a} &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{2m}}{2^m \cdot m! \cdot \prod_{i=1}^{m}(2a+2i-1)} \\ &= \mathrm{Bessel}I_{a-1/2}(t)\Gamma(a+1/2)(t/2)^{1/2-a}. \end{aligned} \tag{20}$$

Primjetimo da je $M_a(t) < \infty$, za sve $t \in [-1, 1]$.

Sada iz Teorema 13 zaključujemo kao i ranije da $S_N/N \xrightarrow{\mathcal{D}} \Psi_a$. Primjetimo da iz definicije od T_N i S_N vrijedi

$$S_N = 2T_N - N,$$

iz čega direktno slijedi da je

$$\frac{T_N}{N} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_N}{N} + \frac{1}{2}.$$

Tada za $\dfrac{T_N}{N} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$ i $\chi_a := \dfrac{\Psi_a + 1}{2}$ očito slijedi

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \Psi_a \Longrightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_a.$$

Potrebno je još pokazati da je $\chi_a \sim Beta(a)$. Iz formule funkcije izvodnice momenata M_a od Ψ_a iz (20) i uz definiciju funkcije izvodnice momenata simetrične beta distribucije iz (14) vidimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{t\chi_a}) &= \mathbb{E}(e^{t\Psi_a/2+t/2}) = e^{t/2} M_a(t/2) \\ &= e^{t/2}\mathrm{Bessel}I_{a-1/2}(t/2)\Gamma(a+1/2)(t/4)^{1/2-a} = M_{Beta(a)}(t).\end{aligned}$$

Pa kako su $M_{Beta(a)}$ i M_{χ_a} jednake i konačne na intervalu $[-1, 1]$, zaključujemo da naša tvrdnja vrijedi, tj.

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} Beta(a).$$

$\square$

Primjer 27. *Uvrštavanjem $a = 1$ u formulu, direktno slijedi da niz konvergira po distribuciji k $U([-1, 1])$, što smo već pokazali Teoremom 19. Za ostale slučajeve imamo*

- ***Arkus sinus**: Za $a = \frac{1}{2}$:*

$$\mathbb{E}\, e^{t\Psi} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2^m \cdot m!)^2} = BesselI_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{t\cos(\theta)} d\theta.$$

Može se pokazati ([1], formula 29.3.60) da je funkcija gustoće od $\Psi_{1/2}$

$$f_{\Psi_{1/2}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}.$$

- ***Polukrug***: *Za* $a = 3/2$.

$$\mathbb{E}\, e^{t\Psi} = \frac{2BesselI_1(t)}{t} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{t\cos\theta}\cos\theta d\theta = BesselI_0(t) - BesselI_2(t).$$

S funkcijom gustoće ([1], formula 9.6.19):

$$f_{\Psi_{3/2}}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}.$$

- ***Generalan slučaj***:
Gustoća od Ψ_a *je dana s*

$$f_{\Psi_a}(x) = \frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(a)\sqrt{\pi}}(1-x^2)^{a-1}, \quad za\ -1 < x < 1.$$

Za $m \in \mathbb{N}$ *imamo:*

$$\int_{-1}^{1} x^{2m}(1-x^2)^{a-1}dx = \int_0^1 y^{m-1/2}(1-y)^{a-1}dy = Beta(m+1/2, a) = \\ = \frac{\Gamma(m+1/2)\Gamma(a)}{\Gamma(m+a+1/2)}.$$

2.4 Generalizirani red potencija

Fiksirajmo $\gamma, a > 0$ i definirajmo sada

$$p_n = \frac{a}{n^\gamma}, \quad n \geq 2.$$

Primjetimo da za $\gamma > 1$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^\gamma} < \infty,$$

a taj slučaj smo pokrili Propozicijom 6, dok smo slučaj $\gamma = 1$ pokrili Teoremom 26. Dakle, preostaje još samo ispitati konvergenciju za $0 < \gamma < 1$. Prije toga, moramo uvesti par pojmova koji će nam pomoći pri dokazivanju glavnog teorema ovog potpoglavlja.

Definicija 28. Neka je $\mathcal{M}$ familija konačnih mjera na prostoru Borelovih skupova $\mathcal{B}$. Za familiju $\mathcal{M}$ kažemo da je **napeta** ako

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists K_\epsilon \subseteq \mathbb{R})(K_\epsilon \text{ kompaktan}) \quad \mu(\mathbb{R} \setminus K_\epsilon) < \epsilon, \ \forall \mu \in \mathcal{M}.$$

Sa slabom konvergencijom vežemo i pojam relativne kompaktnosti.

Definicija 29. Neka je $\mathcal{M}$ familija konačnih mjera na $\mathcal{B}$. Kažemo da je familija $\mathcal{M}$ **relativno kompaktna** ako za svaki niz u $\mathcal{M}$ postoji podniz koji slabo konvergira prema nekoj konačnoj mjeri na $\mathcal{B}$.

Slijedi jedan od centralnih teorema moderne teorije vjerojatnosti, dokaz se može naći u [9] (vidjeti Teorem 13.17.)

Teorem 30 (Prohorov)**.** *Neka je $\mathcal{K} = \{F_i \colon i \in I\}$ familija funkcija distribucija na $\mathbb{R}$. Ako vrijedi*

$$F_i(\infty) - F_i(-\infty) \leq M < \infty, \quad \forall i \in I,$$

tada je familija $\mathcal{K}$ napeta ako i samo ako je ona relativno kompaktna.

Korolar 31. *Neka je $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **napet** niz vjerojatnosnih mjera. Ako svaki slabo konvergentni podniz $(\mathbb{P}_{n_k})$ slabo konvergira prema istoj vjerojatnosnoj mjeri $\mathbb{P}$ tada konvergira i cijeli niz prema toj mjeri, tj. $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $\mathbb{P}_n \overset{w}{\not\to} \mathbb{P}$. Tada postoji neki $g \in C_b(\mathbb{R})$, podniz $(\mathbb{P}_{n_k})$ od $(\mathbb{P}_n)$ i $\epsilon > 0$ takav da

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g d\,\mathbb{P}_{n_k} - \int_{\mathbb{R}} g d\,\mathbb{P} \right| \geq \epsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Kako je $(\mathbb{P}_{n_k})$ napet i ograničen niz vjerojatnosnih mjera, po teoremu Prohorova slijedi da je on relativno kompaktan. Znači postoji podniz $(\mathbb{P}_{n_{k_l}})$ od $(\mathbb{P}_{n_k})$ koji konvergira slabo k nekoj vjerojatnosnoj mjeri $\mathbb{Q}$, tj. $\mathbb{P}_{n_{k_l}} \xrightarrow{w} \mathbb{Q}$. Iz pretpostavke korolara slijedi da je $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$. Dakle

$$\int_{\mathbb{R}} g d\,\mathbb{P}_{n_{k_l}} \to \int_{\mathbb{R}} g d\,\mathbb{P},$$

što je kontradikcija s (21). Dakle, tvrdnja vrijedi. $\square$

Napomena 32. *Ovaj korolar će biti važan u idućih par teorema jer iz njega slijedi da ako uzmemo neki napet niz* $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vjerojatnosnih mjera, i ako svaki slabo konvergentni podniz* $(\mathbb{P}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergira prema istoj vjerojatnosnoj mjeri, tada i cijeli niz* $(\mathbb{P}_n)$ *konvergira prema toj vjerojatnosnoj mjeri, a to će nam povlačiti pripadnu konvergenciju po distribuciji po Propoziciji 12.*

Pokazat ćemo za našu graničnu distribuciju da vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 33. *Niz* $\frac{S_N}{N^{(1+\gamma)/2}}$ *konvergira po distribuciji prema* $N(0,\sigma^2)$*, gdje je*

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{a(1-\gamma)}}.$$

Prije dokaza samog teorema, promotrimo izraz koji će nam biti koristan pri dokazivanju tog teorema:

$$Q(n_0,N) := \sum_{n_0\le i_1<i_2<\dots i_K\le N} \exp\left(c\left[i_1^{1-\gamma} - i_2^{1-\gamma} + i_3^{1-\gamma} - i_4^{1-\gamma} + \cdots + i_{K-1}^{1-\gamma} - i_K^{1-\gamma}\right]\right),$$

za velike N i fiksne n_0, γ, c. Uz $K = 2m$, $m \ge 1$, može se pokazati da je $Q(n_0,N)$ asimpototski jednak

$$\frac{N^{K(1+\gamma)/2}}{c^m(1-\gamma^2)^m m!}.$$

Taj rezultat slijedi direktno iz sljedeće leme ([5], Appendix - Lema 1)

Lema 34. *Neka je*

$$Z_l := \rho_l \cdot \frac{i_{2l+1}^{(1+\gamma)l}}{l!c^l(1-\gamma^2)^l} + o(N^{(1+\gamma)l}),$$

gdje $\rho_l \to 1$ *kako* $N\to\infty$*. Tada za* $l = 0,1,\dots,m-1$ *imamo*

$$Q(n_0,N) = \left(\sum_{n_0+2l\le i_{2l+1}<i_{2l+2}<\cdots<i_{2m}\le N} \exp\left(c\left[i_{2l+1}^{1-\gamma} - i_{2l+2}^{1-\gamma} + \cdots + i_{2m-1}^{1-\gamma} - i_{2m}^{1-\gamma}\right]\right)\right)\cdot Z_l. \tag{22}$$

Nadalje, vrijedi

$$Q(n_0,N) = Z_m. \tag{23}$$

Dokažimo još jednu pomoćnu lemu

Lema 35. *Vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = e^{-1}. \tag{24}$$

Dokaz. Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \exp\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k}{n}\right) \right\} = \exp\left\{ \int_0^1 \log(x) dx \right\} = e^{-1}.$$

□

Sada smo spremni dokazati glavni teorem ovog potpoglavlja.

Dokaz Teorema 33. Neka je $\eta_{a,\gamma,N} := \frac{S_N}{N^{(1+\gamma)/2}}$ niz iz iskaza teorema i $\eta_{a,\gamma} \sim N(0,\sigma^2)$, gdje je σ definirana kao u iskazu teorema. Pokazat ćemo da $\eta_{a,\gamma,N}$ konvergira po distribuciji k $\eta_{a,\gamma}$. Prisjetimo se činjenice

$$\mathbb{E}\, \eta_{a,\gamma}^K = \begin{cases} 0, & K \text{ neparan} \\ \sigma^K (K-1)!!, & K \text{ paran} \end{cases}. \tag{25}$$

Neka je sada $A, A > a$, dana konstanta. Po Korolaru 3 uz $C = A$ postoji $n_0 = n_0(a, A, \gamma)$ takav da za sve i, j takve da $n_0 \le i < j$ vrijedi

$$\exp\left\{ -2A \sum_{n=i+1}^{j} \frac{1}{n^\gamma} \right\} \le e_{ij} \le \exp\left\{ -2a \sum_{n=i+1}^{j} \frac{1}{n^\gamma} \right\}. \tag{26}$$

Budući da je $x \mapsto \frac{1}{x^\gamma}$ strogo padajuća imamo

$$\frac{(j+1)^{1-\gamma} - (i+1)^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \int_{i+1}^{j+1} \frac{dx}{x^\gamma} \le \sum_{n=i+1}^{j} \frac{1}{n^\gamma} \le \int_i^j \frac{dx}{x^\gamma} = \frac{j^{1-\gamma} - i^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

iz čega pomoću (26) slijedi

$$\exp\left(-\frac{2A}{1-\gamma} \left[j^{1-\gamma} - i^{1-\gamma} \right] \right) \le e_{ij} \le \exp\left(-\frac{2a}{1-\gamma} \left[(j+1)^{1-\gamma} - (i+1)^{1-\gamma} \right] \right).$$

Sada uz $c := 2a(1-\gamma)^{-1}$ i $d := 2A(1-\gamma)^{-1}$ vrijedi

$$\exp\left(-d[j^{1-\gamma} - i^{1-\gamma}] \right) \le e_{ij} \le \exp\left(-c\left[(j+1)^{1-\gamma} - (i+1)^{1-\gamma} \right] \right).$$

Može se pokazati da je $\sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,\eta^2_{a,\gamma,N} < \infty$ (pogledati (27), slučaj $m = 1$). Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\eta_{a,\gamma,N}}(x : \{|x| \geq A\}) = \mathbb{P}_{\eta_{a,\gamma,N}}\left(\left\{x : \frac{|x|}{A} \geq 1\right\}\right) &= \int_{\{x:|x|/A\geq 1\}} 1 \quad d\,\mathbb{P}_{\eta_{a,\gamma,N}} \leq \\ &\leq \int_{\{x:|x|/A\geq 1\}} \frac{x^2}{A^2} d\,\mathbb{P}_{\eta_{a,\gamma,N}} \leq \frac{1}{A^2}\int_{\mathbb{R}} x^2 d\,\mathbb{P}_{\eta_{a,\gamma,N}} \\ &\leq \frac{1}{A^2}\cdot \sup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,\eta^2_{a,\gamma,N} < \infty,\end{aligned}$$

pa vidimo da je $(\eta_{a,\gamma,N})_{N\in\mathbb{N}}$ napet niz. Kako bismo mogli pokazati konvergenciju po distribuciji, dovoljno je pokazati da svaki slabo konvergentni podniz ima jednaki slabi limes kao što smo to komentirali u Napomeni 32. Pretpostavimo da je $(N_l)_{l\geq 1}$ podniz i $\mathbb{P}\eta_{a,\gamma,N_l} \xrightarrow[l\to\infty]{w} \mathcal{L}$. Kako je

$$\left|\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots Y_{n_0-1}}{N_l^{(1+\gamma)/2}}\right| \leq \frac{n_0 - 1}{N_l^{(1+\gamma)/2}},$$

slijedi $\mathcal{L} = \lim\limits_{l\to\infty} \mathcal{L}_{N_l,A}$, gdje je

$$\mathcal{L}_{N_l,A} := \mathbb{P}\left(\frac{Y_{n_0} + \cdots + Y_{N_l}}{N_l^{(1+\gamma)/2}}\right).$$

Taj limes mora biti jednak za svaki $A > a$ (i odgovarajući $n_0 = n_0(a, A, \gamma)$) jer početni dio sume u nazivniku teži k nuli kada $N \to \infty$, pa to ne utječe na limes.
Označimo sada parne momente od $\mathcal{L}$ s $M_{2m} \in [0, \infty]$, $m \geq 1$. Neparni momenti su očito nula, zbog simetrije slučajne varijable. Nadalje, označimo s $M_{N_l,A,K}$ K-ti moment od $\mathcal{L}_{N_l,A}$.

Pokazat ćemo da za $A > a$ i $K = 2m$, $m \geq 1$, vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{(2m-1)!!}{[A(1-\gamma)]^m} \leq \liminf_{l\to\infty} M_{N_l,A,K} &= \liminf_{l\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{Y_{n_0} + \cdots + Y_{N_l}}{N_l^{(1+\gamma)/2}}\right]^K \\ \leq \limsup_{l\to\infty} M_{N_l,A,K} &= \limsup_{l\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{Y_{n_0} + \cdots + Y_{N_l}}{N_l^{(1+\gamma)/2}}\right]^K \leq \frac{(2m-1)!!}{[a(1-\gamma)]^m}.\end{aligned} \tag{27}$$

Kada se gornja nejednakost pokaže, tada će iz gornje procjene i iz relacije $\mathcal{L} = \lim_l \mathcal{L}_{N_l,A}$ slijediti da za svaki $A > a$

$$\lim_{l\to\infty} M_{N_l,A,K} = M_K, \tag{28}$$

za sve $K \geq 1$. Kako (27) vrijedi za sve $A > a$, kada pustimo $A \searrow a$ koristeći (27) i (28) imamo

$$M_K = \frac{(2m-1)!!}{[a(1-\gamma)]^m}. \tag{29}$$

Primjetimo sada da relacije (27) i (28) ne ovise o (N_l), pa to zapravo znači da za bilo koji takav (N_l) imamo $\mathbb{P}_{N_l} \xrightarrow[l\to\infty]{w} \mathcal{L}$. Nadalje iz Leme 24 slijedi

$$\begin{aligned} \limsup_{m\to\infty} \frac{M_{2m}^{1/2m}}{2m} &= \limsup_{m\to\infty} \frac{[(2m-1)!!]^{1/2m}}{2m\,[a(1-\gamma)]^{1/2}} \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{(2m)!!^{1/2m}}{2m\,[a(1-\gamma)]^{1/2}} \\ &= (\text{Lema } 24) = \frac{e^{-1}}{[a(1-\gamma)]^{1/2}} < \infty. \end{aligned}$$

Sada iz (25) i (29) uz korištenje Teorema 13 odmah slijedi da $\mathcal{L} = \lim_l \mathcal{L}_{N_l,A} = \mathbb{P}_{N(0,\sigma^2)}$, za proizvoljan $(N_l)_{l\in\mathbb{N}}$.

To znači da moramo samo pokazati (27). Lako se vidi da za $K = 2m$

$$\mathbb{E}\left[Y_{n_0} + \cdots + Y_N\right]^K = I + K! \sum_{n_0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_K \leq N} \mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} \ldots Y_{i_K}),$$

gdje I predstavlja sumu članova manjeg stupnja (tamo gdje se indeksi ponavljaju). Koristeći (2) i (29) nastavljamo gornju jednakost s gornjom ogradom

$$\leq I + K! \sum_{n_0+1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_K \leq N+1} \exp\left(c \cdot U_{i_1 \ldots i_K}\right), \tag{30}$$

gdje je

$$U_{i_1\ldots i_K} := i_1^{1-\gamma} - i_2^{1-\gamma} + i_3^{1-\gamma} - i_4^{1-\gamma} + \cdots + i_{K-1}^{1-\gamma} - i_K^{1-\gamma}.$$

Iz Leme 34 slijedi da je desna strana nejednakosti (30) jednaka

$$I + K! \cdot \frac{N^{K(1+\gamma)/2}}{c^m (1-\gamma^2)^m m!} \cdot (1 + o(1)).$$

Analogno se pokaže i donja međa:

$$\mathbb{E}[Y_{n_0}+\cdots+Y_N]^K \geq I+K! \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_K\leq N} \exp(d\cdot U_{i_1\ldots i_K}) = I+\frac{K!N^{K(1+\gamma)/2}}{c^m(1-\gamma^2)^m m!}\cdot(1+o(1)).$$

Kao što smo rekli, ostatak I je sačinjen od članova nižeg stupnja. U raspisu od $\mathbb{E}(Y_{n_0}+\cdots+Y_N)^K$ za $r=1,2,\ldots,K-1$ moramo sumirati i članove oblika:

$$\mathbb{E}(Y_{i_1}^{p_1}Y_{i_2}^{p_2}\cdots Y_{i_r}^{p_r}), \quad n_0\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq N, \quad p_j\geq 1, p_1+p_2+\cdots+p_r=K.$$

Kako je $Y_i=\pm 1$, tada je $Y_i^p=1$ za parne p i $Y_i^p=Y_i$ za neparne p, zbog čega je dovoljno procijeniti sumu oblika

$$\mathcal{R}(r;l_1,l_2,\ldots,l_r;N;K;\gamma) := \sum \mathbb{E}(Y_{i_1}Y_{i_2}\cdots Y_{i_r}),$$

gdje suma ide po svim $(i_1,\ldots,i_r)$ takvim da $i_1\geq 1$, $i_r\leq K$ i $i_{k+1}\geq i_k+l_k$, $1\leq l_k\leq K$, za sve k.
Kako je $r\leq K-1$ imamo da sume oblika $\mathcal{R}(r;l_1,l_2,\ldots,l_r;N;K;\gamma)$ imaju najviše stupanj $N^{r(1+\gamma)/2}\leq N^{(K-1)(1+\gamma)/2}$ po istom argumentu kao u (30). Broj takvih suma ovisi samo o K pa on ne raste s brojem N.
Iz toga slijedi da za $m\geq 1$ imamo

$$(I)\leq \liminf_{l\to\infty}\left[\frac{Y_{n_0}+\cdots+Y_{N_l}}{N_l^{(1+\gamma)/2}}\right]^K \leq \limsup_{l\to\infty}\left[\frac{Y_{n_0}+\cdots+Y_{N_l}}{N_l^{(1+\gamma)/2}}\right]^K \leq (II),$$

gdje je

$$(II) := \frac{(2m)!}{[c(1-\gamma^2)]^m m!} = \frac{(2m)!}{[2a(1-\gamma)]^m m!]} = \frac{(2m)!}{2^m m!}\cdot[a(1-\gamma)]^{-m} = \frac{(2m-1)!!}{[a(1-\gamma)]^m}.$$

Na analogan način se dobije

$$(I) := \frac{(2m-1)!!}{[A(1-\gamma)]^m}.$$

Sada vidimo da puštanjem $A\searrow a$ dobivamo da su momenti od η_{a,γ,N_l} jednaki za proizvoljan podniz $(N_l)_{l\in\mathbb{N}}$, pa slijedi tvrdnja teorema.

$\square$

3 Zakoni velikih brojeva

U ovom poglavlju ćemo odgovoriti na pitanje uz koje uvjete na niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vrijede zakoni velikih brojeva. Definirajmo sumu

$$E(N,K) := N^{-K} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_K\le N} e_{i_1 i_2} e_{i_3 i_4} \cdots e_{i_{K-1} i_K}.$$

Primjetimo da korištenjem Propozicije 1 vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_N) = \mathrm{Var}(Y_1+\cdots+Y_N) &= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Var}(Y_k) + \ 2 \sum_{1\le i_1<i_2\le N} \mathrm{Cov}(Y_{i_1}, Y_{i_2}) \\ &= N + 2 \sum_{1\le i_1<i_2\le N} e_{i_1 i_2} = N + 2N^2 E(N,2).\end{aligned}$$

To jest

$$\mathrm{Var}(S_N) = N + 2N^2 E(N,2),$$

iz čega slijedi

$$\mathrm{Var}(S_N/N) = 1/N + 2E(N,2). \tag{31}$$

Dokažimo par korisnih lema

Lema 36. *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih, realnih brojeva za koji vrijedi*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty.$$

Tada postoji niz $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji zadovoljava $l_{n+1} \ge l_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} l_n = \infty$ te vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} l_n a_n < \infty.$$

Dokaz. Definirajmo niz $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kao

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n.$$

Kako red pridružen nizu (a_n) konvergira, zaključujemo da je niz (r_n) konvergentan i pada prema nuli. Sada imamo

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{\sqrt{r_{n-1}}} = \frac{(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})(\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n})}{\sqrt{r_{n-1}}} \le 2(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) =: t_n$$

i kako je red $\sum t_n$ konvergentan (teleskopiranje), tada je i red

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}}$$

konvergentan. Sada uz $l_n = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}$, slijedi tvrdnja leme. $\square$

Lema 37. *([7], Lema 2) Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva za koji vrijedi*

$$a_n \geq 0, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} < \infty.$$

Tada postoji podniz (a_{n_k}) od (a_n) takav da

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n_k} < \infty \ i \ \frac{n_{k+1}}{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} 1.$$

Dokaz. Kako je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergentan, tada po Lemi 36 postoji niz realnih brojeva $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji zadovoljava

$$l_{n+1} \geq l_n, \quad \lim_{n\to\infty} l_n = \infty,$$

te vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n \frac{a_n}{n} < \infty.$$

Sada možemo induktivno definirati niz prirodnih brojeva $m(i)$ kao

$$m(1) = 1, \quad m(i+1) = m(i) + 1 + \left[\frac{m(i)}{l_{m(i)}}\right], \tag{32}$$

gdje je $x \mapsto [x]$ cjelobrojni dio od x. Očito vrijedi

$$0 < m(i+1) - m(i) = \mathcal{O}(m(i)).$$

Sada za svaki i biramo n_i takav da

$$m(i) \leq n_i \leq m(i+1) \text{ i definiramo } a_{n_i} := \min_{m(i)\leq r\leq m(i+1)} a_r.$$

Nadalje primjetimo da iz (32) slijedi

$$(m(i+1) - m(i)) \cdot l_{m(i)} = \left(1 + \left[\frac{m(i)}{l_{m(i)}}\right]\right) \cdot l_{m(i)} \geq \left(\frac{m(i)}{l_{m(i)}}\right) \cdot l_{m(i)} = m(i)$$

pa pomoću te nejednakosti imamo:

$$s_i := \sum_{r=m(i)}^{m(i+1)-1} l_r \frac{a_r}{r} \geq (m(i+1)-m(i)) l_{m(i)} \cdot \frac{a_{n_i}}{m(i+1)} \geq \frac{m(i)}{m(i+1)} \cdot a_{n_i}.$$

Primjetimo da $\sum s_n$ konvergira jer $\sum l_n \frac{a_n}{n}$ konvergira, pa iz toga slijedi da i dani red $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{n_i}$ konvergira, što je trebalo dokazati. □

Propozicija 38. *([7], Teorem 1) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli na tom prostoru za koje vrijedi $|X_n| \leq 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$ i označimo s $\|\cdot\|$ L^2 normu na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako vrijedi*

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} X_n \right\|^2 < \infty,$$

tada za niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vrijedi jaki zakon velikih brojeva.

Dokaz. Iz Leme 37 slijedi da postoji niz $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ za koji vrijedi

$$\sum_{k\geq 1} \left\| \frac{1}{N_k} \sum_{n\leq N_k} X_n \right\|^2 < \infty \text{ i } \frac{N_{k+1}}{N_k} \to 1.$$

Budući da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Y_n\| < \infty \Rightarrow \|Y_n\| \to 0,$$

tada iz prethodnog očito slijedi da

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n\leq N_k} X_n \xrightarrow{g.s.} 0. \tag{33}$$

S druge strane imamo

$$\max_{1\leq s\leq N_{K+1}-N_k} \left| \frac{1}{N_k} \sum_{N_k+1}^{N_k+s} X_n \right| \leq \frac{N_{k+1}-N_k}{N_k} \xrightarrow{k\to\infty} 0. \tag{34}$$

Kako je $N_k \leq N < N_{k+1}$, imamo

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} X_n \right| \leq \left| \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} X_n \right| + \max_{1 \leq s < N_{k+1} - N_k} \left| \frac{1}{N_k} \sum_{N_k+1}^{N_k+s} X_n \right|,$$

pa puštanjem limesa $N \to \infty$ u gornjoj relaciji i pomoću (33) i (34) dobivamo

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} X_n \xrightarrow{g.s.} 0.$$

Dakle, vrijedi jaki zakon velikih brojeva. □

Lema 39. *Neka je $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nadalje, neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan i definirajmo niz događaja $(A_n(\epsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ kao*

$$A_n(\epsilon) := \{|X_n - X| > \epsilon\}.$$

Ako za proizvoljan $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n(\epsilon)\right) < \infty,$$

tada niz (X_n) konvergira k X gotovo sigurno.

Dokaz. Iz pretpostavke leme vidimo da vrijedi rezultat Borel-Cantellijeve leme, tj.

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \to \infty} A_n(\epsilon)\right) = 0.$$

Primjetimo, $\omega \in \{\lim_n X_n = X\}$ ako i samo ako

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall i \in \mathbb{N}) \quad i \geq n \Rightarrow |X_i(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{m}$$

ako i samo ako

$$\omega \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \left(A_i \left(\frac{1}{m} \right) \right)^c = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \limsup_{n \to \infty} A_n \left(\frac{1}{m} \right) \right)^c.$$

Iz gornjeg imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} X_n = X\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \limsup_{n} A_n \left(\frac{1}{m} \right) \right) \\
&\geq 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\limsup_{n} A_n \left(\frac{1}{m} \right) \right) = 1,
\end{aligned}$$

pa očito vrijedi konvergencija g.s. □

Teorem 40. *Uz gornje oznake, vrijedi:*

1. *(Jaki zakon) Ako vrijedi barem jedno od sljedećeg:*

$$\sum_N \frac{E(N,2)}{N} < \infty \text{ ili } \sum_N E(N,K), \text{ za neki parni } K,$$

   tada vrijedi jaki zakon velikih brojeva. Preciznije, $S_N/N \to 0$, g.s.

2. *(Slabi zakon) $S_N/N \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, tj. vrijedi slabi zakon velikih brojeva ako i samo ako za sve pozitivne parne brojeve K vrijedi:*

$$\lim_{N\to\infty} E(N,K) = 0.$$

Dokaz. Ponovno ćemo koristiti rezultat Teorema 13. Prisjetimo se sada izvoda iz (11), imamo

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_N}{N}\right)^K = K!N^{-K} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_K\le N} \mathbb{E}(Y_{i_1}Y_{i_2}\cdots Y_{i_K}) + \mathcal{O}(1/N) = K!E(N,K) + \mathcal{O}(1/N). \tag{35}$$

1. Dokazat ćemo za svaku pretpostavku odvojeno.

   a) Po pretpostavci imamo

$$\sum_N \frac{E(N,2)}{N} < \infty.$$

   Sjetimo se da za simetričnu slučajnu varijablu Y_n vrijedi $\mathbb{E}\,Y_n = 0$ i $\mathrm{Var}Y_n = 1$. Nadalje, iz relacije

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_N}{N}\right) = \frac{1}{N} + 2E(N,2)$$

   i činjenice da je $\mathbb{E}\left(\frac{S_N}{N}\right) = 0$, imamo

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{n\le N} Y_n\right\|^2 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_N}{N}\right)^2\right] = \mathrm{Var}\left(\frac{S_N}{N}\right) = 2E(N,2) + \frac{1}{N},$$

iz čega slijedi

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n \le N} Y_n \right\|^2 = 2 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{E(N,2)}{N} + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty.$$

Time je zadovoljena pretpostavka Propozicije 38, pa vrijedi jaki zakon velikih brojeva.

b) Neka je sada

$$\sum_N E(N,K) < \infty.$$

U izvodu za formulu (11) smo pokazali da je

$$\mathbb{E}\, S_N^K = K! \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_K \le N} \mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} \ldots Y_{i_K}) + \mathcal{O}(N^{K-1}), \tag{36}$$

i da je u toj formuli za očekivanje lijeva suma većeg reda od desnog člana koji je reda $\mathcal{O}(N^{K-1})$. Zaključujemo da to i dalje vrijedi u ovome slučaju. Dijeljenjem s N^K u gornjoj relaciji dobivamo

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_N^K}{N^K}\right) = K! N^{-K} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_K \le N} \mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} \ldots Y_{i_K}) + \mathcal{O}(N^{-1}),$$

ili ekvivalentno

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_N^K}{N^K}\right) = K! E(N,K) + \mathcal{O}(N^{-1}).$$

Označimo taj član reda $\mathcal{O}(N^{-1})$ s I_N. Dakle, kao što smo već komentirali, za I_N vrijedi $I_N \le K! E(N,K)$.

Sada po Markovljevoj nejednakosti imamo

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N}\right| > \epsilon\right) \le \frac{\mathbb{E}\, S_N^K}{\epsilon^K N^K} \le \frac{K! E(N,K) + I_N}{\epsilon^K} \le \frac{2K! E(N,K)}{\epsilon^K},$$

iz čega slijedi

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N}\right| > \epsilon\right) \le \frac{2K!}{\epsilon^K} \sum_{N=1}^{\infty} E(N,K) < \infty.$$

Sada iz Leme 39 slijedi tvrdnja.

2. Pretpostavimo prvo da je $\lim_{N\to\infty} E(N,K) = 0$ za svaki parni $K \in \mathbb{N}$. Nadalje, iz zapisa (35) imamo

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{S_N}{N}\right)^K = \lim_{N\to\infty}(K!E(N,K) + \mathcal{O}(1/N)) = 0$$

Sada iz Teorema 13 lako slijedi da S_N/N konvergira po distribuciji k nul-distribuciji. Kako niz konvergira po distribuciji k nuli i kako je nula konstanta, zaključujemo da vrijedi slabi zakon velikih brojeva.

Obratno, pretpostavimo sada da vrijedi slabi zakon velikih brojeva, tj. $S_N/N \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Pokažimo da pripadni parni momenti teže k nuli. Prisjetimo se da je $|S_N/N| \leq 1$, sada za proizvoljan $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_N}{N}\right)^K\right] &= \int_{|S_N/N|<\epsilon}\left(\frac{S_N}{N}\right)^K d\,\mathbb{P} + \int_{|S_N/N|\geq\epsilon}\left(\frac{S_N}{N}\right)^K d\,\mathbb{P}\\ &\leq \epsilon^K + \int_{|S_N/N|\geq\epsilon} 1 d\,\mathbb{P} = \epsilon^K + \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N}\right| \geq \epsilon\right).\end{aligned}$$

Puštanjem $N \to \infty$ u gornjoj relaciji dobivamo da je K-ti moment proizvoljno mali, pa mora biti jednak nuli. Sada iz relacije

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_N}{N}\right)^K = K!E(N,K) + \mathcal{O}(1/N)$$

puštanjem limesa očito slijedi da je $\lim_{N\to\infty} E(N,K) = 0$, za proizvoljan paran $K \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi i obrat teorema.

□

U idućem koraku ćemo pokazati slučaj kada ne vrijede zakoni velikih brojeva.

Teorem 41. *Ako za sve pozitivne parne brojeve K vrijedi*

$$\exists \lim_{N\to\infty} E(N,K) =: \mu_K > 0$$

i ako

$$\sum_{K \text{ paran}} \frac{1}{(K!\cdot\mu_K)^{1/K}} = \infty,$$

tada ne vrijedi zakon velikih brojeva. Štoviše, distribucija od S_N/N konvergira k jedinstvenoj distribuciji s neparnim momentima jednakim nula i parnim momentima jednakim $K! \cdot \mu_K$.

Dokaz. Primjetimo da iz već pokazane relacije

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_N}{N}\right)^K\right] = K!E(N,K) + \mathcal{O}(1/N)$$

puštanjem $N \to \infty$, slijedi

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_N}{N}\right)^K\right] = K! \cdot \mu_K.$$

Nadalje, kako je iz pretpostavke

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m!)^{1/2m}\mu_{2m}^{1/2m}} = \infty,$$

zaključujemo da za naš niz vrijedi Carlemanov kriterij, pa po Napomeni 14 slijedi tvrdnja teorema.

□

Korolar 42. *Uz $p_n = \dfrac{a}{n^\gamma}$, za $0 < \gamma < 1$ i $a > 0$, vrijedi jaki zakon velikih brojeva tj.*

$$\frac{S_N}{N} \xrightarrow{g.s.} 0.$$

Dokaz. Iz dokaza Teorema 33 vidjeli smo da svi momenti kvocijenta $\dfrac{S_N}{N^{(1+\gamma)/2}}$ konvergiraju kada $N \to \infty$. Tako imamo $\mathbb{E}(S_N^2) \sim N^{1+\gamma}$, pa uz činjenicu $\mathbb{E}(S_N) = 0$ iz relacije (31) slijedi

$$E(N,2) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left(\frac{S_N^2}{N^2}\right) - \frac{1}{N}\right) \sim N^{\gamma-1}.$$

Nadalje, iz gornje relacije imamo

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{E(N,2)}{N} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left(S_N^2/N^2\right) - 1/N}{N} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{N^{2-\gamma}} - \frac{1}{N^2}\right) < \infty,$$

iz čega vidimo da je zadovoljen prvi uvjet o jakom zakonu velikih brojeva iz Teorema 40. Dakle, zaključujemo da tvrdnja korolara vrijedi. □

Korolar 43 (Monotonost)**.** *Neka su* $(\hat{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dva niza s vrijednostima u* $[0,1]$ *takvi da za sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $\hat{p}_n \geq p_n$. *Tada, ako slabi zakon velikih brojeva vrijedi za niz* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onda slabi zakon vrijedi i za niz* $(\hat{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi slabi zakon velikih brojeva za niz (p_n). Tada po drugoj točki Teorema 40 vrijedi da je $\lim_{N\to\infty} E(N,K) = 0$, za sve parne $K \in \mathbb{N}$. Nadalje, imamo

$$\hat{e}_{ij} = \prod_{k=i+1}^{j} (1 - 2\hat{p}_k) \leq \prod_{k=i+1}^{j} (1 - 2p_k) = e_{ij},$$

iz toga slijedi

$$\begin{aligned}\hat{E}(N,K) = N^{-K} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq N} \hat{e}_{i_1 i_2}\hat{e}_{i_3 i_4}\cdots\hat{e}_{i_{K-1} i_K} \leq \\ \leq N^{-K} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq N} e_{i_1 i_2} e_{i_3 i_4}\cdots e_{i_{K-1} i_K} = E(N,K).\end{aligned}$$

Zbog činjenice $\lim\limits_{N\to\infty} E(N,K) = 0$, za sve parne $K \in \mathbb{N}$, puštanjem limesa kada $N \to \infty$ u gornjoj relaciji, dobivamo da je $\lim\limits_{N\to\infty} \hat{E}(N,K) = 0$, $\forall K \in \mathbb{N}$, K paran. Sada po obratu druge točke Teorema 40 slijedi slabi zakon velikih brojeva i za niz $(\hat{p}_n)$, tj.

$$\frac{\hat{S}_N}{N} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

□

4 Nesimetrični slučaj

Pokazat ćemo da za naš inicijalan niz vjerojatnosti $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vrijede dosadašnji zaključci bez naše pretpostavke da je $X_1 \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$, tj. bez pretpostavke da je novčić simetričan. Tako u ovom poglavlju bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $X_1 \equiv 1$, iz čega odmah imamo da je $Y_1 \equiv 1$. Sjetimo se da kada smo imali slučaj

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n < \infty,$$

tada smo dobili da je

$$\frac{X_1 + \cdots + X_N}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} B(q).$$

No sada više ne možemo tvrditi da je $q = \dfrac{1}{2}$ kao što smo to u Propozociji 6 mogli. Sljedeći teorem će nam dati točan oblik vrijednosti za q, neovisno o početnom stanju.

Teorem 44. *Uz sljedeću oznaku*

$$e_{1\infty} := \prod_{i=2}^{\infty}(1 - 2p_i),$$

vrijedi

$$q = \mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{Y_1 + \cdots + Y_N}{N} = 1\right) = \frac{1 + e_{1\infty}}{2}.$$

Dokaz. Kako znamo da je red pridružen nizu (p_n) konvergentan, tada ponovno iz Borel-Cantellijeve leme znamo da će se novčić okrenuti najviše konačno mnogo puta. Iz toga slijedi da je

$$Y_n = \lim_{N\to\infty} Y_N =: Y_\infty \in \{-1, 1\}, \qquad \text{za dovoljno velike } n \in \mathbb{N},$$

pa očito slijedi da $Y_n \to Y_\infty$. To nadalje povlači da

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_N}{N} \xrightarrow{g.s.} Y_\infty.$$

Nadalje, jer za niz (Y_n) vrijedi $|Y_n| \le 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $Y_n \to Y_\infty$, po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\mathbb{E}\,Y_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,Y_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=2}^{n}(1 - 2p_i) = \prod_{i=2}^{\infty}(1 - 2p_i) = e_{1\infty}.$$

Nadalje, kako je $Y_\infty = 2B(q) - 1$ i $\mathbb{E}\, B(q) = q$, dobivamo $2q - 1 = e_{1\infty}$, što je trebalo pokazati. $\square$

Vrijede i rezultati ostalih teorema, jer oni proizlaze iz formula (3) i (2) koje su i dalje dobre. Jedina razlika se pojavljuje promatranjem neparnih momenata, jer oni više ne moraju biti jednaki nuli. Za $K = 2m + 1$ sada imamo

$$\mathbb{E}(Y_{i_1} Y_{i_2} \cdots Y_{i_K}) = e_{0i_1} e_{i_2 i_3} \cdots e_{i_{K-1} i_K}.$$

Račun iz (19) vrijedi i dalje za parne K, međutim za neparne K ne možemo koristiti činjenicu da je $\mathbb{E}\, S_N^K = 0$. Ipak, ako se račun iz (19) ponovi, dobije se da je $\mathbb{E}\, S_N^K = \mathbb{E}\, S_N^{2m+1} = \mathcal{O}(N^{2m}) = \mathcal{O}(N^K)$, pa kako $N \to \infty$ tako izraz $\mathbb{E}\, S_N^K$ teži k nuli, pa zaključak Teorema 26 za generalizirani harmonijski red i dalje vrijedi. Sličan argument se može iskoristiti kada se ponovno dokazuje Teorem 33. Naime, analogno kao u prethodnom dijelu komentara, pokaže se da za sve neparne momente od S_N vrijedi $\mathbb{E}\, S_N^{2m+1} = \mathcal{O}(N^{m(1+\gamma)}) = \mathcal{O}(N^{K(1+\gamma)/2})$, pa tvrdnja i tog teorema vrijedi.

Literatura

[1] M. Abramowitz i I. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications, 1992.

[2] N. Balakrishnan, N. L. Johnson i S. Kotz. *Continuous Univariate Distributions, Volume 2*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[3] R. Bhattacharya, L. Lin i V. Patrangenaru. *A Course in Mathematical Statistics and Large Sample Theory*. Springer, 2016.

[4] R. Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge, 2019.

[5] J. Englander i S. Volkov. „Turning a coin over instead of tossing it". *Journal of Theoretical Probability* 31.2 (2018.), 1097–1118.

[6] J. Jacod i P. Protter. *Probability Essentials*. Springer, 2004.

[7] R. Lyons. „Strong laws of large numbers for weakly correlated random variables". *Michigan Math J.* 35 (1988.), 353–359.

[8] N. Sandrić i Z. Vondraček. *Vjerojatnost: predavanja*. 2019. URL: `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/vjer/files/vjer_predavanja.pdf`.

[9] N. Sarapa. *Teorija vjerojatnosti*. Školska knjiga, 1986.

Sažetak

Svi su dobro upoznati s eksperimentom bacanja simetričnog novčića. U ovom radu se obrađuje malo drugačija tema: u prvom koraku bacamo simetričan novčić, a zatim u n-tom koraku okrećemo novčić na drugu stranu s nekom vjerojatnošću p_n, $n \geq 2$. Preciznije, uz proizvoljan vjerojatnosti niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, promatramo slučajne varijable $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za koje je $X_1 \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ i za $n \geq 2$

$$X_n := \begin{cases} X_{n-1}, & \text{s vjerojatnošću } p_n \\ 1 - X_{n-1}, & \text{s vjerojatnošću } 1 - p_n \end{cases}.$$

Cilj rada je odgovorit na pitanje kada granična distribucija od

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$$

konvergira, i ako konvergira, ka kojoj distribuciji konvergira. Vidjet ćemo da uz određene uvjete na niz vjerojatnosti (p_n) dobivamo različite vrste konvergencije. Na primjer, ako niz "jako brzo" konvergira k nuli, tada se dobiva konvergencija po distribuciji k Bernoullijevoj slučajnoj varijabli. Nadalje, pokazat ćemo i da naša granična distribucija može slijediti normalnu i beta razdiobu uz određene uvjete. Odgovorit ćemo i na pitanje, uz koje uvjete vrijede zakoni velikih brojeva za našu graničnu distribuciju. Za kraj ćemo odgovoriti na pitanje hoće li pretpostavka o simetričnosti novčića utjecati na sve dokazane rezultate o konvergenciji.

Summary

The coin tossing experiment is one of the most famous experiments in mathematics. In this thesis we are going to analyze a different kind of experiment involving a coin: in the first step we toss a standard coin, after that, in every n-th step we turn the coin on the other side with probability p_n, $n \geq 2$. Therefore, with a given sequence of probabilities $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, we define a sequence of random variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that $X_1 \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ and for $n \geq 2$

$$X_n := \begin{cases} X_{n-1}, & \text{with probability } p_n \\ 1 - X_{n-1}, & \text{with probability } 1 - p_n \end{cases}.$$

The main goal of this thesis is to determine when the limiting distribution of

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$$

converges, and to which distribution it converges. We are going to see that under different conditions on the sequence (p_n), we obtain different types of convergence, and different types of distributions. To give a more clear example, let's say that the sequence of probabilities (p_n) is going to zero "very quickly", then we obtain the convergence in distribution, where the limiting distribution is a Bernoulli random variable. Among other distributions, we will obtain normal and beta distributions. We will also obtain that under some conditions, the laws of large numbers hold. At the end, we will answer the question whether or not the symmetry of the coin affects the conclusions of the theorems we are going to prove.

Životopis

Rođen sam 27. lipnja 1997. godine u Zagrebu. Pohađao sam Osnovnu školu "Ljudevit Gaj" u općini Mihovljan, malom mjestu u Zagorju. Nakon toga upisujem matematičku gimnaziju u Krapini gdje sam razvio ljubav prema matematici i tako sam poslije mature upisao preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Na studiju sam razvio veliki interes za statistikom i strojnim učenjem te sam upisao diplomski studij Matematičke statistike isto na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.