

Promjena razlučivosti slike uz pomoć histopolacijskog splajna

Jambrek, Roberta

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:311116>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-03**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Roberta Jambrek

PROMJENA RAZLUČIVOSTI SLIKE UZ
POMOĆ HISTOPOLACIJSKOG
SPLAJNA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Tina Bosner

Zagreb, prosinac, 2021

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Ovaj diplomski rad posvećujem svojim roditeljima i suprugu koji su mi kroz svo vrijeme moga studija bili velika podrška. Željela bih još zahvaliti svojoj mentorici, doc. dr. sc. Tini Bosner, što mi je svojim korisnim primjedbama i savjetima pomogla prilikom izrade ovog diplomskog rada.

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
1 Boje	2
1.1 RGB prostor boja	2
1.2 Pamćenje boja u računalu	3
2 B-splajn	5
2.1 Definicija i svojstva B-splajna	5
2.2 Prostor $S_{k,t}$	9
2.3 Evaluacija	12
2.4 Derivacija	12
2.5 Očuvanje oblika	14
3 Interpolacija splajnom	16
3.1 Interpolacija splajnom	16
3.2 Ocjena greške interpolacijskoga splajna	17
3.3 Primjer interpolacije B-splajnom	19
4 Histopolacija	22
4.1 Histopolacija	22
4.2 Histopolacijski splajn	22
4.3 Primjena u promijeni razlučivosti slike	23
4.4 Numerički testovi	26
Bibliografija	34

Uvod

Živimo u digitalnom dobu i svakodnevno na ekranima raznih rezolucija promatramo slike raznih dimenzija. Svi smo se i sami našli u situaciji kada smo željeli povećati ili na neki način modificirati sliku koju smo ili pronašli na mreži ili smo i sami njezin autor. Ovaj diplomski rad započet ćemo s bojama i njihovom reprezentacijom u računalu. Spomenut ćemo na koji način i pomoću kojih osjetila čovjek uopće vidi boje. Nastavit ćemo s definicijom B-splajnova te navesti neka njihova važna svojstva. Bavit ćemo se interpolacijom splajnom i ocjenom greške interpolacijskoga splajna te navesti primjer interpolacije B-splajnom. Na samome kraju rada bavit ćemo histopolacijom i histopolacijskim uvjetima. Usporedit ćemo slike dobivene uvećavanjem smanjenje verzije originalne slike bikvadratnim histopolacijskim splajnom s metodom najbližeg susjeda, bilinearnom interpolacijom i bikubičnom interpolacijom.

Poglavlje 1

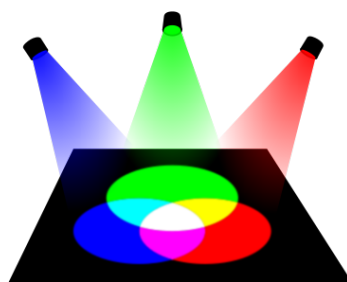
Boje

Čovjek predmete oko sebe vidi zahvaljujući sensorima za elektromagnetske valove u području valnih duljina koje nazivamo vidljiva svjetlost. To područje obuhvaća valne duljine od 390 nm do 760 nm, tj. frekvencijski spektar od 394.7 THz do 769.2 THz. Čovjek ima razvijene dvije vrste senzora specijalizirane za dvije različite namjene, za dan i noć. Noć je karakteristična po tome što je razina svjetlosti vrlo niska. Za ovakvo okruženje razvila se prva vrta osjetila, štapići. Oni raspoznaju različite intenzitete svjetlosti i funkcioniraju pri vrlo malim količinama svjetlosti. Tijekom dana raspoloživa količina svjetlosti je vrlo velika. Za to okruženje razvijena je druga vrsta osjetila, čunjići. Pomoću njih, čovjek je sposoban primiti informacije o boji predmeta iz okoline. U našem oku postoje tri tipa osjetila: za crvenu, zeleni i plavu boju i upravo su ona zaslužna za prvi i osnovni prostor boja.

1.1 RGB prostor boja

Kako bismo sustavno mogli raditi s bojama, važno je bojama pridjeliti numeričke vrijednosti. Tijekom proučavanje svjetlosti i problematike vezane za boje, razvijeno je nekoliko modela kojima se pokušava dobiti kontrola nad bojama. Kao što smo gore spomenuli, prvi i osnovni model proizašao je iz toga kako vidimo boje - tako je nastao RGB prostor boja. Slova u nazivu navedenog prostora početna su slova engleskih naziva boja - *Red* (crvena), *Green* (zeleni), *Blue* (plava). Uzevši u obzir činjenicu da čovjek ima osjetila za tri primarne boje, pretpostavilo se da se sve boje mogu dobiti kao linearna kombinacija triju osnovnih boja. Na taj način, da bismo pamtili boju pojedine točke, trebamo pamtit i koliko ima crvene, zelene i plave boje, tj. potrebno je pamtit i tri broja. Ukoliko sve tri navedene komponente iznose nula, dobit ćemo crnu boju, a ukoliko sve tri komponente iznose maksimum, bijelu. U preostalim slučajevima, tj. ako su pojedine komponente prisutne s različitim udjelima dobit ćemo preostale boje. Primjerice, nijanse sivih boja možemo

dobiti tako da su sve tri komponente jednake. Ovaj proces možemo zamisliti kao da na raspolaganju imamo crveni, zeleni i plavi izvor svjetlosti te da su sva tri izvora usmjerena u istu točku. Ukoliko su sva tri izvora ugašena, točka je crna jer nema nikakve druge svjetlosti. Uključujemo li pojedine izvore, točka će poprimiti različite boje usljed miješanja boja. Zbog svojstva da se pojedine komponente svjetlosti zbrajaju, navedeno miješanje nazivamo aditivno miješanje. Ovaj opisani model vrlo je jednostavan, ali njegova mana je što se sve boje ne mogu opisati pomoću tri primarne boje.



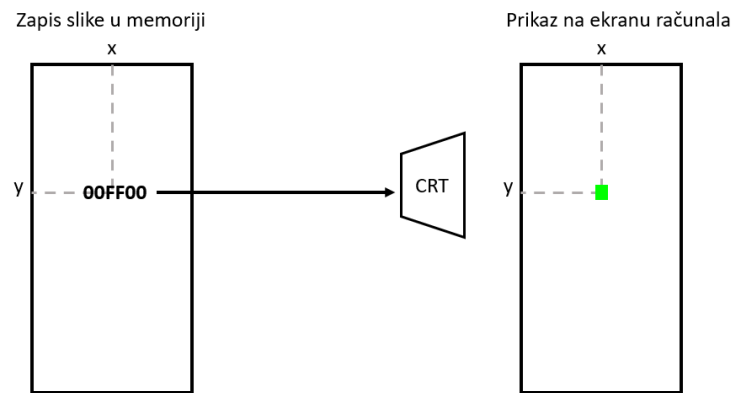
Slika 1.1: Aditivno miješanje boja

1.2 Pamćenje boja u računalu

Rad s bojama na računalu prilagodljiv je potrebama i memorijskim ograničenjima sustava. Osnovni način prikaza boja u računalu je putem RGB sustava. Za svaku boju, pamte se tri komponente (crvena, zelena i plava). Postoje dva načina rada: upotreba palete boja i direktna reprezentacija boje. Prvi način razvijen je zbog uštede memorije te shodno tome ima određena ograničenja. Dubina je glavni faktor koji određuje koliko ćemo boja moći prikazati. Dubinu mjerimo u broju bitova. Ovisnost dubine i broja mogućih boja dana je s:

$$n = 2^d,$$

gdje je n broj raspoloživih boja, a d dubina. Uz 24 bita po pikselu, bitove možemo grupirati u grupe od 8 bitova, gdje svaka boja ima svojih 8 bitova. Tada se koristi direktna reprezentacija boje za svaki piksel što nam daje $2^{24} = 16\,777\,216$ mogućih boja koje možemo prikazati. Navedena metoda prikazana je Slikom 1.2. Na lokaciji (x, y) piše zapis boje: `00FF00`, što odgovara zelenoj boji. Mana direktne reprezentacije je što zahtjeva veliku količinu memorije za pohranu većih slika.



Slika 1.2: Direktna reprezentacija boje

Poglavlje 2

B-splajn

Polinomna interpolacija visokog stupnja se u praksi ne koristi zbog svojih loših svojstava. Umjesto polinomne interpolacije na cijelom intervalu, koristi se po dijelovima polinomna interpolacija. Na svakom podintervalu koristi se polinom fiksnog niskog stupnja koji je tada puno niži od stupnja polinoma ukoliko bi imali jedan polinom za cijeli interval. Ovo poglavlje započet ćemo definicijama proširene particije te B-splajnova.

2.1 Definicija i svojstva B-splajna

Proširena particija

Definicija 2.1.1. *Neka je dan strogo rastući niz čvorova $X := (x_i)_{i=0}^l$:*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_l = b$$

i $k \in \mathbb{N}$ red polinoma. Neka je t dan s:

$$\begin{aligned} t_1 &\leq \dots \leq t_k = x_0 = a \\ t_{k+1} &\leq \dots \leq t_{k+M} = \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{x_{l-1}, \dots, x_{l-1}}_{m_{l-1}}, \\ b = x_l &= t_{k+M+1} \leq \dots \leq t_{2k+M} \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdje su m_i , $0 < m_i \leq k$, multipliciteti čvorova, $m = (m_1, \dots, m_{l-1})$, i M suma multipliciteta čvorova, $M = m_1 + m_2 + \dots + m_{l-1}$. Niz čvorova t naziva se proširena particija particije X i najčešće se uzima: $t_1 = \dots = t_k = a$ i $t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = b$, gdje je $n = k + M$.

Definicija B-splajna

Započet ćemo s proširenom particijom $t := (t_i)$. B-splajnovi reda 1 za dani niz čvorova su karakteristične funkcije dane particije, tj. funkcije:

$$B_{i,1}(t) := X_i(t) := \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (2.2)$$

Za zadnji podinterval se često uzima $[t_n, t_{n+1}]$, ako želimo da nam desni rub intervala b uđe u domenu. Primjetimo da su te funkcije neprekidne s desna. Također, za B-splajn reda 1 mora vrijediti:

$$\sum_i B_{i,1}(t) = 1, \forall t \in [a, b) \quad (2.3)$$

Sada, koristeći B-splajnove reda 1, rekursivno dolazimo do B-splajnova reda k :

$$B_{i,k} = \omega_{i,k} B_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k}) B_{i+1,k-1} \quad (2.4)$$

gdje je

$$\omega_{i,k}(t) := \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} & t_i \neq t_{i+k-1} \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (2.5)$$

Iz toga slijedi da je B-splajn reda 2 dan sa:

$$B_{i,2} = \omega_{i,2} X_i + (1 - \omega_{i+1,2}) X_{i+1} \quad (2.6)$$

i općenito se sastoji od dva netrivialna linearna dijela koja se neprekidno spajaju u po dijelovima linearnu funkciju koja iščezava izvan intervala $[t_i, t_{i+2})$. Upravo se iz tog razloga B-splajn reda 2 naziva i linearni B-splajn. Nadalje, B-splajn reda 3 je dan sa:

$$\begin{aligned} B_{i,3} &= \omega_{i,3} B_{i,2} + (1 - \omega_{i+1,3}) B_{i+1,2} \\ &= \omega_{i,3} \omega_{i,2} X_i + (\omega_{i,3}(1 - \omega_{i+1,2}) + (1 - \omega_{i+1,3}) \omega_{i+1,2}) X_{i+1} \\ &\quad + (1 - \omega_{i+1,3})(1 - \omega_{i+2,2}) X_{i+2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

i općenito se sastoji od tri netrivialna kvadratna dijela koja se neprekidno spajaju u po dijelovima kvadratnu funkciju klase C^1 koja iščezava izvan intervala $[t_i, t_{i+3})$. Nakon $k - 1$ koraka, dolazimo do $B_{i,k}$ oblika:

$$B_{i,k} = \sum_{j=i}^{i+k-1} b_{j,k} X_j \quad (2.8)$$

gdje je $b_{j,k}$ polinom stupnja $< k$, odnosno stupnja točno $k - 1$ pošto je to zbroj produkata $k - 1$ linearnih polinoma.

Svojstva B-splajnova

U nastavku ćemo navesti neka važna svojstva B-splajnova:

Teorem 2.1.2. *B-splajnovi $B_{i,k}$ za koje je $t_i < t_{i+k}$ su nenegativni, malog nosača te čine particiju jedinice. Odnosno vrijedi:*

- a) $B_{i,k}(x) = 0$ za $x < t_i$ i $x > t_{i+k}$
- b) $B_{i,k}(x) > 0$ za $t_i < x < t_{i+k}$, a iz toga slijedi $\text{supp } B_{i,k} \subseteq [t_i, t_{i+k}]$, tj. segment $[t_i, t_{i+k}]$ je nosač od $B_{i,k}$, (zatvarač skupa koji sadrži sve točke u kojima $B_{i,k}$ ima vrijednosti različite od 0)
- c) Ako je $t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle$, onda je $B_{i,k}(t) > 0, i = j - k + 1, \dots, j$.
- d) $\sum_{i=1}^n B_{i,k}(x) = 1, \forall x \in [a, b]$.

Dokaz. a) Ovo svojstvo dokazat ćemo matematičkom indukcijom po k .

- (i) Baza indukcije ($n = 1$): Za $k = 1$ i $x < t_i$ imamo (2.2).
- (ii) Pretpostavka indukcije ($n = k - 1$): Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za B-splajnovne reda $k - 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$, tj. $B_{i,k-1}(x) = 0, x < t_i$.
- (iii) Korak indukcije ($n = k$): Iz (2.4) slijedi:

$$B_{i,k} = \omega_{i,k} B_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k}) B_{i+1,k-1}.$$

Prema pretpostavci je $B_{i,k-1}(x) = 0$. Kako je $x < t_i$, slijedi da je i $B_{i+1,k-1}(x) = 0$ pa tvrdnja vrijedi i za $B_{i,k}$, tj. $B_{i,k} = 0$. Sada, prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi $\forall k \in \mathbb{N}$. Analogan postupak provodi se i za $x > t_{i+k}$.

b) Ovo svojstvo dokazat ćemo matematičkom indukcijom po k .

- (i) Baza indukcije ($n = 1$): Za $k = 1$ i $t_i < t_{i+1}$ imamo (2.2).
- (ii) Pretpostavka indukcije ($n = k - 1$): Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za B-splajnovne reda $k - 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$.
- (iii) Korak indukcije ($n = k$): Za $t_i < x < t_{i+k}$, u slučaju kada je $t_i < t_{i+k-1}$ ili $t_{i+1} < t_{i+k}$, iz (2.4) $B_{i,k}$ se dobiva linearnom kombinacijom s pozitivnim koeficijentima dvaju nenegativnih $B_{i,k-1}$ i $B_{i+1,k-1}$ od kojih je barem jedan veći od 0 (iz pretpostavke slijedi da je $[t_i, t_{i+k-1}]$ nosač od $B_{i,k-1}$, a $[t_{i+1}, t_{i+k}]$ nosač od $B_{i+1,k-1}$). Prema pretpostavci, tvrdnja vrijedi i za $B_{i,k}$. Sada, prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi $\forall k \in \mathbb{N}$.

- c) Iz svojstva b) Teorema 2.1.2. znamo da je nosač od $B_{i,k}$ sadržan u $[t_i, t_{i+k}]$. Ako je $t_j \in t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k-1}$ i $t_j < t_{j+1}$, slijedi, $B_{i,k}(t) > 0, t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle$. Dakle, za fiksni $j, B_{i,k}(t) > 0$ za $t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle, i = j, j-1, \dots, j-k+1$.
- d) Ovo svojstvo dokazat ćemo matematičkom indukcijom po k .

- (i) Baza indukcije ($n = 1$): Za $k = 1$ iz (2.2) vidimo da tvrdnja očito vrijedi.
- (ii) Pretpostavka indukcije ($n = k - 1$): Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za B-splajnovne reda $k - 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$.
- (iii) Korak indukcije ($n = k$): Iz (2.4), svojstva c) Teorema 2.1.2. i za $x \in [t_j, t_{j+1})$ imamo:

$$\begin{aligned}
 \sum_i B_{i,k}(x) &= \sum_{i=j+1-k}^j B_{i,k}(x) \\
 &= \sum_{i=j+1-k}^j \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \sum_{i=j+1-k}^j \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x) \\
 &= \sum_{i=j+1-k}^j \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \sum_{i=j+2-k}^{j+1} \frac{t_{i+k-1} - x}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) \\
 &= \sum_{i=j+2-k}^j B_{i,k-1}(x) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Iz nosača B-splajna slijedi da je $B_{j+1-k,k-1}(x) = 0, B_{j+1,k-1}(x) = 0$ za dani podinterval te zbog toga vrijedi predzadnja jednakost. Sada, prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi $\forall k \in \mathbb{N}$.

□

B-splajn za koji vrijedi $B_{i,k}(t_i) > 0$ ili $B_{i,k}(t_{i+k}) > 0$ je onaj kojem je prvi ili zadnji čvor maksimalnog multipliciteta k . U najčešćem slučaju, kada je $t_1 = \dots = t_k$ i $t_{n+1} = \dots = t_{n+k}$, će to vrijediti za prvi i zadnji splajn.

Korolar 2.1.3. *Ako je t_j multipliciteta $m < k$, odnosno $t_{j-1} < t_j = \dots = t_{j+m-1} < t_{j+m}$, tada je $B_{i,k}(t_j) > 0, i = j - k + m, \dots, j - 1$.*

Dokaz. Iz Teorema 2.1.2. znamo da je nosač od $B_{i,k}$ sadržan u $[t_i, t_{i+k}]$. Krenimo od $i = 1$ i povećavajmo ga za 1. Provjeravamo koji je prvi i za koji je $B_{i,k}(t_j) > 0$. Takav i mora zadovoljavati $t_{i+k} = t_{j+m}$, dakle $i = j - k + m$, a zadnji i za koji vrijedi navedeni uvijet je $i = j - 1$. □

2.2 Prostor $S_{k,t}$

Prostor $S_{k,t}$

U ovom odjeljku pokazat ćemo da $S_{k,t}$ sadrži sve polinome stupnja $< k$. Započet ćemo s par definicija.

Definicija 2.2.1. *Splajn reda k s proširenom particijom t je linearna kombinacija B-splajnova $B_{i,k}$ pridruženih čvorovima te particije.*

$$S_{k,t} := \left\{ \sum_i B_{i,k} a_i, a_i \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.9)$$

je skup svih takvih funkcija.

Definicija 2.2.2. *Neka je $\Pi_{<k}$ prostor svih polinoma stupnja $< k$.*

Definicija 2.2.3. *Neka je $\tilde{S}$ prostor svih po dijelovima polinomnih funkcija reda k s točkama prekida t_i koje su $k - 1 - \#t_i$ puta neprekidno diferencijabilne u t_i . S $\#t_i$ označavamo multiplicitet čvora.*

Teorem 2.2.4 (Marsdenov identitet). *Vrijedi:*

$$(x - \tau)^{k-1} = \sum_i B_{i,k}(x) \psi_{i,k}(\tau), \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

gdje je

$$\psi_{i,k}(\tau) := (t_{i+1} - \tau) \cdots (t_{i+k-1} - \tau). \quad (2.11)$$

Za $j = 1, 2, \dots, k$ vrijedi:

$$x^{j-1} = \sum_i \xi_i^{(j)} B_{i,k}(x) \quad (2.12)$$

gdje je

$$\xi_i^{(j)} = (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{(k-1)!} \psi_{i,k}^{(k-j)}(0). \quad (2.13)$$

Dokaz. Iz rekurzivne relacije (2.4) za proizvoljan niz koeficijenata a vrijedi:

$$\sum_i B_{i,k} a_i = \sum_i B_{i,k-1} ((1 - \omega_{i,k}) a_{i-1} + \omega_{i,k} a_i). \quad (2.14)$$

S druge strane, promorimo li poseban niz:

$$a_i := \psi_{i,k}(\tau) := (t_{i+1} - \tau) \cdots (t_{i+k-1} - \tau) \quad (2.15)$$

vidimo da za $t_i < t_{i+k-1}$, odnosno za $B_{i,k-1} \neq 0$ imamo:

$$\begin{aligned} (1 - \omega_{i,k}(x))a_{i-1} + \omega_{i,k}(x)a_i = \\ ((1 - \omega_{i,k}(x))(t_i - \tau) + \omega_{i,k}(x)(t_{i+k-1} - \tau))\psi_{i,k-1}(\tau) = \\ (x - \tau)\psi_{i,k-1}(\tau), \end{aligned} \quad (2.16)$$

pošto je $(1 - \omega_{i,k})f(t_i) + \omega_{i,k}f(t_{i+k-1})$ pravac koji prolazi točkama $f(t_i)$ i $f(t_{i+k-1})$, slijedi da mora biti jednak f jer je u našem slučaju f pravac. It zoga slijedi:

$$\sum_i B_{i,k}(x)\psi_{i,k}(\tau) = (x - \tau) \sum_i B_{i,k-1}(x)\psi_{i,k-1}(\tau), \quad (2.17)$$

iz čega indukcijom slijedi:

$$\sum_i B_{i,k}(x)\psi_{i,k}(\tau) = (x - \tau)^{k-1} \sum_i B_{i,1}(x)\psi_{i,1}(\tau) = (x - \tau)^{k-1} \quad (2.18)$$

jer je $\psi_{i,1}(\tau) = 1$ ($\psi_{i,1}(\tau)$ je prazan produkt) i $B_{i,1}(x) = 1$ (zbog (2.3)). Deriviramo li jednakost (2.18) $k - j$ puta obzirom na τ i uvrštavanjem $\tau = 0$ dobivamo rastav za x^{j-1} , tj. (2.12). $\square$

Kako je τ u (2.10) proizvoljan slijedi da $S_{k,t}$ sadrži sve polinome stupnja $< k$. Podijelimo li (2.10) s $(k - 1)!$ i deriviramo obzirom na τ , dolazimo do:

$$\frac{(x - \tau)^{k-v}}{(k - v)!} = \sum_i B_{i,k}(x) \frac{(-D)^{v-1} \psi_{i,k}(\tau)}{(k - 1)!}, \quad v > 0. \quad (2.19)$$

Uvrstimo li to u Taylorovu formulu:

$$p(x) = \sum_{v=1}^k \frac{(x - \tau)^{k-v}}{(k - v)!} D^{k-v} p(\tau), \quad \forall p \in \Pi_{<k}, \quad (2.20)$$

zaključujemo da svaki takav polinom možemo zapisati u obliku:

$$p = \sum_i B_{i,k} \lambda_{i,k} p \quad (2.21)$$

gdje je dualni funkcional $\lambda_{i,k}$ definiran kao:

$$\lambda_{i,k} f := \sum_{v=1}^k \frac{(-D)^{v-1} \psi_{i,k}(\tau)}{(k - 1)!} D^{k-v} f(\tau). \quad (2.22)$$

Kako $B_{i,k}(t_j) \neq 0$ implicira da je $\psi_{i,k}(t_j) = 0$, ukoliko u (2.10) stavimo $\tau = t_j$, tada će jedino ostati samo oni nosači koji su ili lijevo ili desno od t_j . Iz toga slijedi:

$$(x - t_j)_+^{k-1} = \sum_{i \geq j} B_{i,k}(x) \psi_{i,k}(t_j) \quad (2.23)$$

gdje je

$$\alpha_+ := \max\{\alpha, 0\} \quad (2.24)$$

pozitivni dio broja α , tj. $(x - t_j)_+^{k-1}$ funkcija takva da vrijedi:

$$(x - t_j)_+^{k-1} = \begin{cases} (x - t_j)^{k-1} & x - t_j > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Kako je $t_i < t_j < t_{i+k}$, to povlači da je $D^{v-1}\psi_{i,k}(t_j) = 0$ u slučaju kada je $v \leq \#t_j$ iz (2.19) slijedi:

$$(x - t_j)_+^{k-v} \in S_{k,t}, \quad 1 \leq v \leq \#t_j. \quad (2.26)$$

Teorem 2.2.5. *Prostor splajnova reda k s proširenom particijom t , $S_{k,t}$, jednak je prostoru $\tilde{S}$.*

Dokaz. Bez smanjena općenitosti pretpostavimo da je $t_i < t_{i+k}$, $\forall i$. Dovoljno je dokazati da je za bilo koji konačan interval $I := [a, b]$, restrikcija $\tilde{S}|_I$ prostora $\tilde{S}$ jednaka restrikciji $S_{k,t}|_I$ prostora $S_{k,t}$. $S_{k,t}|_I$ razapet je svim B-splajnovima čiji su barem neki dijelovi nosača u intervalu I , tj. sa svim $B_{i,k}$ takvima da vrijedi $\langle t_i, t_{i+k} \rangle \cap I \neq \emptyset$. Baza prostora $\tilde{S}|_I$ sastoji se od funkcija:

$$\begin{aligned} (x - a)^{k-v}, \quad v = 1, \dots, k \\ (x - t_i)_+^{k-v}, \quad v = 1, \dots, \#t_i, \quad a < t_i < b. \end{aligned} \quad (2.27)$$

To slijedi iz toga što se po dijelovima polinomna funkcija f s točkom prekida t_i koja je $k - 1 - \#t_i$ puta neprekidno diferencijabilna može jedinstveno zapisati kao:

$$f(x) = p + \sum_{v=1}^{\#t_i} (x - t_i)_+^{k-v} c_v, \quad (2.28)$$

gdje je p odgovarajući polinom reda k i c_v odgovarajući koeficijenti. Kako obje funkcije iz (2.27) leže u $S_{k,t}$ zbog (2.21), (2.23) i (2.26) slijedi:

$$\tilde{S}|_I \subseteq (S_{k,t})|_I. \quad (2.29)$$

S druge strane, dimenzija $\tilde{S}|_I$ jednaka je broju B-splajnova koji imaju dio nosača u I što je jednako $k + \sum_{a < t_i < b} \#t_i$, a to je gornja međa dimenzije prostora $(S_{k,t})|_I$. Iz toga slijedi da vrijedi jednakost u (2.29), što smo i željeli dokazati. $\square$

2.3 Evaluacija

U ovom odjeljku razmatrat ćemo kako pomoću rekurzivne relacije (2.4) evaluirati splajn:

$$s = \sum_i B_{i,k} a_i. \quad (2.30)$$

Iz (2.14) slijedi:

$$s = \sum_i B_{i,k} a_i = \sum_i B_{i,k-1} a_i^{[1]}, \quad (2.31)$$

gdje je

$$a_i^{[1]} := (1 - \omega_{i,k}) a_{i-1} + \omega_{i,k} a_i. \quad (2.32)$$

Primjetite kako $a_i^{[1]}$ nije konstanta, već pravac koji prolazi točkama (t_i, a_{i-1}) i (t_{i+k-1}, a_i) . $a_i^{[1]}(t)$ je konveksna kombinacija a_{i-1} i a_i uz $t_i \leq t \leq t_{i+k-1}$. Nakon $k - 1$ iteracije dolazimo do sljedeće formule:

$$s = \sum_i B_{i,1} a_i^{[k-1]}, \quad (2.33)$$

iz koje slijedi da je:

$$s = a_i^{[k-1]} \text{ na intervalu } [t_i, t_{i+1}).$$

U nastavku navodimo algoritam za računanje. Konstantni polinomi $a_i^{[0]} := a_i, i = j - k + 1, \dots, j$ koji određuju s na intervalu $[t_j, t_{j+1})$ rekurzivno generiraju polinome $a_i^{[r]}, r = 1, \dots, k - 1$:

$$a_i^{[r+1]} := (1 - \omega_{i,k-r+1}) a_{i-1}^{[r]} + \omega_{i,k-r+1} a_i^{[r]}, \quad j - k + r + 1 < i \leq j. \quad (2.34)$$

Tada je $s = a_j^{[k-1]}$ na intervalu $[t_j, t_{j+1})$. Dodatno, za $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, vrijednost $\omega_{i,k-r+1}(t)$ iz (2.34) je između 0 i 1. Zbog toga se računanje $s(t) = a_j^{[k-1]}(t)$ preko gornje rekurzije (2.34) sastoji od konveksnih kombinacija, što je važno za numeričku stabilnost.

2.4 Derivacija

Kako bi došli do formule za deriviranje B-splajnova trebat će nam sljedeća dva teorema i korolar.

Teorem 2.4.1. *Neka je $I := [a, b)$ konačan interval. Tada restrikcija:*

$$\{B_{i,k|I} : B_{i,k|I} \neq 0\} \quad (2.35)$$

čini bazu prostora po dijelovima polinomnih funkcija stupnja $< k$ na I s točkama prekida $\{t_i : a < t_i < b\}$ koje su $k - 1 - \#t_i$ puta diferencijabilne u svakoj od svojih točaka prekida t_i .

Korolar 2.4.2. Ako je $t_i < t_{i+k-1}$, onda je derivacija splajna iz $S_{k,t}$, splajn stupnja $< k - 1$ s istim nizom čvorova, tj. $DS_{k,t} \subseteq S_{k-1,t}$.

Teorem 2.4.3. Ako je τ iz definicije (2.22) iz intervala $[t_i, t_{i+k})$, onda:

$$\lambda_{i,k} \left(\sum_j B_{j,k} a_j \right) = a_i. \quad (2.36)$$

Prema Korolaru 2.4.2., derivacija DS splajna $s \in S_{k,t}$ je ponovno splajn s istim nizom čvorova, ali za jedan stupnj manji. To znači da, prema Teoremu 2.4.3., ukoliko je $\tau \in [t_i, t_{i+k-1})$ do koeficijenta B-splajna a'_i dolazimo pomoću formule:

$$a'_i = \lambda_{i,k-1}(Ds).$$

Kako bi povezali a' s a , možemo izraziti $\lambda_{i,k-1}D$ kao linearnu kombinaciju funkcionala $\lambda_{i,k}$, koristeći pri tome činjenicu da $\lambda_{i,k}$ linearno ovisi o $\psi_{i,k}$. Iz definicije (2.22) i

$$(t_{i+k-1} - t_i)\psi_{i,k-1} = \psi_{i,k} - \psi_{i-1,k}. \quad (2.37)$$

slijedi:

$$\begin{aligned} (\lambda_{i,k} - \lambda_{i-1,k})f(\tau) &= \sum_{v=1}^k \frac{(-D)^{v-1}(\psi_{i,k} - \psi_{i-1,k})(\tau)}{(k-1)!} D^{k-v}f(\tau) \\ &= (t_{i+k-1} - t_i) \sum_{v=1}^{k-1} \frac{(-D)^{v-1}\psi_{i,k-1}(\tau)}{(k-1)!} D^{k-v}f(\tau). \end{aligned}$$

Zadnja jednakost vrijedi zbog (2.37) i $D^{k-1}\psi_{i,k-1} = 0$. S druge strane iz definicije (2.22) imamo:

$$\begin{aligned} \lambda_{i,k-1}Df(\tau) &= \sum_{v=1}^{k-1} \frac{(-D)^{v-1}\psi_{i,k-1}(\tau)}{(k-2)!} D^{k-1-v}Df(\tau) \\ &= (k-1) \sum_{v=1}^{k-1} \frac{(-D)^{v-1}\psi_{i,k-1}(\tau)}{(k-1)!} D^{k-v}f(\tau). \end{aligned}$$

Usporedimo li gornje dvije jednakosti, dobijemo:

$$\lambda_{i,k-1}D = \frac{k-1}{t_{i+k-1} - t_i} (\lambda_{i,k} - \lambda_{i-1,k}). \quad (2.38)$$

Pretpostavimo li da je $B_{i,k-1} \neq 0$, tj. da je $t_i < t_{i+k-1}$, možemo odabrati $\tau \in \langle t_i, t_{i+k-1} \rangle = \langle t_{i-1}, t_{i+k-1} \rangle \cap \langle t_i, t_{i+k} \rangle$. To nas dovodi do algoritma za računanje koeficijenata a'_i :

$$\sum a'_i B_{i,k-1} := D \sum a_i B_{i,k}$$

$$a'_i = (k-1) \frac{a_i - a_{i-1}}{t_{i+k-1} - t_i}, \quad t_i < t_{i+k-1}. \quad (2.39)$$

Komentirajmo još slučaj kada je $t_i = t_{i+k-1}$. Tada je $B_{i,k-1} = 0$ te nema potrebe računati a'_i . U tom slučaju splajn

$$s = \sum_i B_{i,k} a_i$$

ne mora biti neprekidan u t_i te računanje $(Ds)(t_i)$ nema smisla. S druge strane, računanje $(Ds)(t_i-)$ i $(Ds)(t_i+)$ uvijek ima smisla i dani algoritam daje sve potrebne a'_j potrebne za izračun.

2.5 Očuvanje oblika

Definicija 2.5.1. Kontrolni poligon $C_{a,t}$ povezan s reprezentacijom $\sum_i B_i a_i$ splajna $s \in S_t$ isprekidana je linija ili po dijelovima linearna funkcija s vrhovima $P_i := (t_{i,k}^*, a_i)$, gdje je

$$t_{i,k}^* := \frac{t_{i+1} + t_{i+2} + \dots + t_{i+k-1}}{k-1}. \quad (2.40)$$

Slika 2.1 ilustrira matematičku formulaciju očuvanja oblika, tj. činjenicu da bilo koji pravac siječe splajn najviše onoliko puta koliko siječe i kontrolni poligon.

Teorem 2.5.2. Ako je splajn $s = \sum_i B_i a_i$ kontinuirano diferencijabilan, onda:

$$|a_i - s(t_{i,k}^*)| \leq \text{const} |t|^2 \sup_t |D^2 s(t)| \quad (2.41)$$

gdje je

$$|t| := \sup_i (t_{i+1} - t_i) \quad (2.42)$$

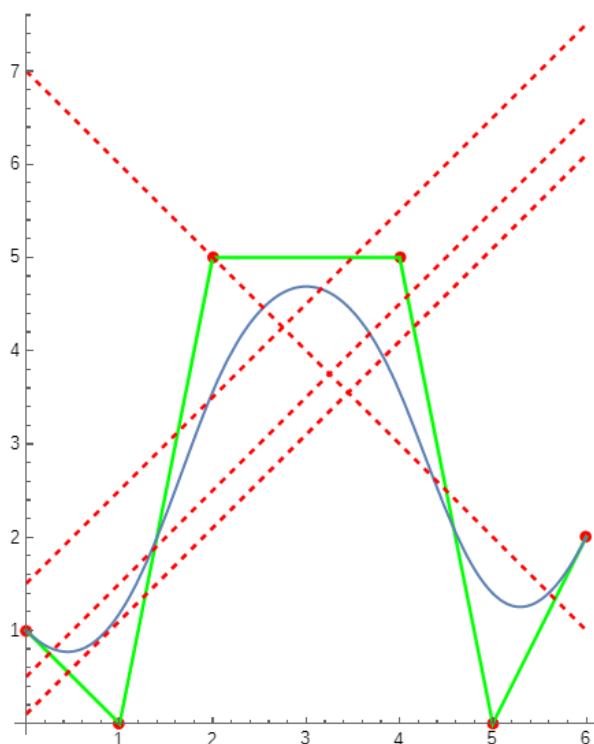
i $t_{i,k}^*$ dan s (2.40).

Korolar 2.5.3. Neka je $C_{a,t}$ kontrolni poligon povezan s reprezentacijom $\sum_i B_i a_i$ neprekidnog splajna $s \in S_t$. Tada:

$$\sup_t |s(t) - C_{a,t}(t)| \leq \text{const} |t|^2 \sup_t |D^2 s(t)|. \quad (2.43)$$

Teorem 2.5.4 (Svojstvo konveksne ljuske). Ako je $t_j \leq t < t_{j+1}$, onda je $s(t)$ konveksna kombinacija od k B-splajn koeficijenata $a_{j-k+1}, \dots, a_j$.

To svojstvo slijedi iz algoritma za evaluaciju splajna ili direktno iz svojstva da su B-splajnovi nenegativni i čine particiju jedinice.



Slika 2.1: Kubični splajn, njegov kontrolni poligon i pravci koji ih sijeku

Definicija 2.5.5. $S^-(a)$ je broj strogih promjena predznaka na nekom nizu a .

Na primjer: $S^-(-1, 1, -1, 1) = 3$, $S^-(-1, 0, -1, 1) = 1$, $S^-(0, 0, 0, 0) = 0$.

Teorem 2.5.6 (Smanjenje varijacije). $S^-(s) \leq S^-(a)$, tj. za proizvoljne $x_1 < \dots < x_r$, $S^-(s(x_1), \dots, s(x_r)) \leq S^-(a)$.

Korolar 2.5.7 (Očuvanje oblika). Splajn sijeće svaki pravac najviše onoliko puta koliko ga sijeće njegov kontrolni poligon. Posebno, ukoliko je kontrolni poligon monoton (konveksan), onda isto vrijedi i za splajn.

Poglavlje 3

Interpolacija splajnom

3.1 Interpolacija splajnom

Pretpostavit ćemo da je $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ nepadajući niz čvorova takav da je $t_i < t_{i+k}, \forall i$. U ovom poglavlju želimo pronaći splajn $s \in S_{k,t}$ takav da za dane $\tau = (\tau_i)_{i=1}^n$ i funkciju f vrijedi:

$$s(\tau_i) = f(\tau_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

gdje je $\dim S_{k,t} = n$. Ako je:

$$s = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j,k}, \quad f_i := f(\tau_i) \quad (3.2)$$

tada interpolacijski uvijeti kažu da tražimo $(\alpha_i)_{i=1}^n$ takve da vrijedi:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j,k}(\tau_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Uvedimo oznake: $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n := (B_{j,k}(\tau_i))_{i,j=1}^n, f = (f_1, \dots, f_n)^T$. Sada naš problem postaje rješavanje linearnog sustava:

$$A\alpha = f \quad (3.4)$$

Odnosno, problem traženja jedinstvenog interpolacijskog splajna s pretvoren je u ispitivanje regularnosti matrice A u čemu će nam pomoću sljedeći teorem.

Teorem 3.1.1 (Schoenberg-Whitney). *Neka je τ strogo rastući niz točaka za koji iz $a < t_i = \dots = t_{i+r} = \tau_j < b$ slijedi $r < k - 1$. Tada je matrica $A := (B_{j,k}(\tau_i))$ regularna ako i samo ako vrijedi:*

$$B_{i,k}(\tau_i) \neq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Neka je $n \times n$ matrica $(B_{j,k}(\tau_i))$ regularna. Glavna prednost korištenja B-splajnova jest činjenica da je matrica $(B_{j,k}(\tau_i))$ vrpčasta širine k (matrica s manje od k dijagonala iznad i ispod glavne dijagonale).

Kako su B-splajnovi malog nosača i uz $B_{i,k}(\tau_i) \neq 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} B_{i,k}(\tau_i) \neq 0 &\implies |j - i| < k, \quad \text{tj.} \\ B_{i,k}(\tau_i) = 0 &\implies |j - i| \geq k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Prilikom programiranja s vrpčastim matricama, za njihovo spremanje u memoriju računalo može koristiti "vrpčasto spremanje". Odnosno, potrebno je spremiti najviše $(2k - 1) \cdot n$ elemenata umjesto njih $n \times n$, pošto se nule ne pamte.

Još jedno važno svojstvo interpolacijske matrice jest totalna pozitivnost. Za matricu A i zadani niz $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$ sa:

$$A \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ j_1 & \dots & j_s \end{bmatrix} := (a_{i_p j_q})_{p=1, q=1}^{r,s}$$

definirana je podmatrica dobivena od A odabirom određenih redova i stupaca.

Definicija 3.1.2. Za matricu A reda n kažemo da je totalno pozitivna ako su sve njezine minorine nenegativne, odnosno ako vrijedi:

$$\det A \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ j_1 & \dots & j_s \end{bmatrix} \geq 0, \text{ gdje je} \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n; \quad j_1 < \dots < j_s \leq n; \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Teorem 3.1.3 (Karlin). Matrica $(B_{j,k}(\tau_i))$ totalno je pozitivna za sve $\tau_1 < \dots < \tau_n$.

3.2 Ocjena greške interpolacijskoga splajna

Neka je I interpolacijski projektor sa skupa neprekidnih funkcija, $I : G \rightarrow S_{k,t}$, $s \in S_{k,t} \implies Is = s$. Neka je za neki fiksni interval $[a, b]$:

$$\|g\| := \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|.$$

Lema 3.2.1. Za svaku neprekidnu funkciju g na intervalu $[a, b]$, interpolacijska greška ograničena je s:

$$\|g - Ig\| \leq (1 + \|I\|)\text{dist}(g, S_{k,t}), \quad (3.7)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} \|I\| &:= \max_{g \in C[a,b] \setminus 0} \frac{\|Ig\|}{\|g\|} \\ \text{dist}(g, S_{k,t}) &:= \min_{s \in S_{k,t}} \|g - s\|. \end{aligned}$$

Dokaz. $\forall s \in S_{k,t}$ vrijedi:

$$\|g - Ig\| = \|g - s - I(g - s)\| \leq \|g - s\| + \|I\|\|g - s\| = (1 + \|I\|)\|g - s\|.$$

Ako vrijedi $\forall s \in S_{k,t}$, onda vrijedi i za onaj za koji se postiže minimum:

$$\|g - Ig\| \leq (1 + \|I\|)\text{dist}(g, S_{k,t}).$$

□

Nedostatak ocjene je što ne znamo $\|I\|$, a to ovisi o $|t|$:

$$|t| := \max_i (t_{i+1} - t_i)$$

i o τ . Može se pokazati da:

Lema 3.2.2. *Postoji pozitivna konstanta const_k takva da je norma interpolacijskog procesa I ograničena odozdo s:*

$$\|I\| \geq \text{const}_k \max_i \frac{\min\{t_{j+k-1} - t_j : \langle \tau_i, \tau_{i+1} \rangle \cap \langle t_j, t_{j+k-1} \rangle \neq \emptyset\}}{\tau_{i+1} - \tau_i}. \quad (3.8)$$

Iz gornje leme vidimo da $\|I\|$ može biti proizvoljno velik ako približimo dvije interpolacijske točke. O $\text{dist}(g, S_{k,t})$ možemo reći još nešto:

Teorem 3.2.3. *Postoji konstanta $\text{const}_{k,j}$, za $j = 0, \dots, k-1$ takva da za sve $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ uz:*

$$t_1 = \dots = t_k = a < t_{k+1} \leq \dots \leq t_n < b = t_{n+1} = \dots = t_{n+k}$$

i $\forall g \in C^j[a, b]$ vrijedi:

$$\text{dist}(g, S_{k,t}) \leq \text{const}_{k,j} |t|^j \omega(g^{(j)}; |t|), \quad (3.9)$$

gdje je ω modul neprekidnosti definiran kao:

$$\omega(g; h) := \max\{|g(x) - g(y)| : |x - y| \leq h; x, y \in [a, b]\}. \quad (3.10)$$

Ukoliko je $j = k-1$ i g ima k neprekidnih derivacija, imamo:

$$\text{dist}(g, S_{k,t}) \leq \text{const}_k |t|^k \|g^{(k)}\|. \quad (3.11)$$

Ukoliko postoji sloboda odabira interpolacijskih točaka za proširenu particiju t , tada se preporučaju Greville-ove točke dane s (2.40) i za njih vrijedi:

$$x = \sum_{i=1}^n t_{i,k}^* B_{i,k}(x). \quad (3.12)$$

Označimo li s I_k^* interpolacijski operator koji interpolira splajnom reda k u Greville-ovim točkama, možemo pokazati da je:

$$\|I_2^*\| = 1, \|I_3^*\| \leq 2, \|I_4^*\| \leq 27.$$

Pošto je:

$$\|g - I_k^* g\| \leq (1 + \|I_k^*\|) \text{dist}(g, S_{k,t}),$$

za "umjeren" k , a sigurno za $k \leq 4$, je I_k^* skoro najbolja moguća aproksimacija funkcije g u $S_{k,t}$.

3.3 Primjer interpolacije B-splajnom

Uzmimo da želimo interpolirati C^2 kubičnim splajnom, to znači da unutarnji čvorovi trebaju biti jednostruki. Zahtjevamo da vrijedi:

$$s(x_i) = p_i, \quad i = 0, 1, \dots, l.$$

Proširenu particiju T definiramo s:

$$t_j = \begin{cases} x_0 & j = 1, 2, 3, 4 \\ x_{j-4} & j = 5, \dots, l+3 \\ x_l & j = l+4, \dots, l+7 \end{cases}$$

Dimenzija prostora splajnova je $n = l + 3$, a splajn kojim interpoliramo je oblika:

$$s(x) = \sum_{j=1}^n a_j B_{j,4}(x). \quad (3.13)$$

Kako imamo $l + 1 = n - 2$ interpolacijskih točaka, a moramo odrediti n koeficijenata a_j , ostaje nam 2 stupnja slobode. Postoji više načina na koje možemo postaviti uvjete na ta dva stupnja slobode:

1. Zahtjevamo da vrijedi $s''(x_0) = 0$ i $s''(x_l) = 0$. Ovu vrstu interpolanta nazivamo interpolant prirodnim splajnom.
2. Zahtjevamo da je interpolant klase C^3 u x_1 i x_{l-1} . Ovaj uvjet nazivamo uvjet bez čvorova jer prva i zadnja dva segmenta čvorova ($[x_0, x_2]$ i $[x_{l-2}, x_l]$ redom) specificiraju jedan kubični polinom kao da x_1 i x_{l-1} nisu čvorovi.
3. Zahtjevamo da su zadane tangente u krajnim točkama krivulje, tj. da vrijedi $s'(x_0) = p'_0$ i $s'(x_l) = p'_l$. Ovu vrstu interpolanta nazivamo kompletnim interpolantom kubičnim splajnom. On se najčešće koristi i mi ćemo ga koristiti u nastavku.

Tražimo kompletan interpolant kubičnim splajnom takav da vrijedi:

$$p_j = s(x_j) = \sum_{i=1}^n a_i B_{i,4}(x_j), \quad j = 0, \dots, l$$

$$p'_j = s'(x_j) = \sum_{i=1}^n a_i B'_{i,4}(x_j), \quad j = 0, l.$$

Kako su prvi i zadnji čvor maksimalnog multipliciteta, vrijedi $a_0 = p_0$ i $a_n = p_l$. U $x_0 = t_1 = \dots = t_4$ samo $B_{1,4}$ i $B_{2,4}$ imaju s desna derivacije različite od 0. $B_{1,4}$ je klase $C^{(-1)}$ u x_0 , $B_{2,4}$ je klase C^0 u x_0 , a $B_{i,4}$ je barem C^1 klase u x_0 za $i \geq 3$ i $B_{i,4} \equiv 0$ za $x < x_0$ pa je $B'_{i,4}(x_0) = 0$. Kako iz svojstva B-splajna

$$\sum_{i=1}^n B_{i,4}(x) = 1$$

slijedi

$$\sum_{i=1}^n B'_{i,4}(x) = 0, \quad \forall x,$$

imamo:

$$B'_{1,4}(x_0) = -B'_{2,4}(x_0).$$

Slično dolazimo do:

$$B'_{n-1,4}(x_l) = -B'_{n,4}(x_l).$$

Već smo odredili koji su B-splajnovi različiti od nule u nekom $x_i = t_{i+4}$, $i = 1, \dots, l-1$. Kako je x_i jednostruki čvor, slijedi:

$$B_{j,4}(x_i) = B_{j,4}(t_{i+4}) > 0, \quad j = i+1, i+2, i+3.$$

Iz toga slijedi:

$$p_i = \sum_{j=i+1}^{i+3} a_j B_{j,4}(x_i).$$

Iskoristit ćemo dobivene zaključke i dobivamo sljedeći sustav:

$$B \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p'_0 \\ \dots \\ p'_l \\ p_l \end{bmatrix}.$$

Neka je $b_{i,j} = B_{i,4}(x_j)$, $b'_{i,j} = B'_{i,4}(x_j)$. Tada je matrica B oblika:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b'_{1,0} & b'_{2,0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,1} & b_{3,1} & b_{4,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-3,l-1} & b_{n-2,l-1} & b_{n-1,l-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_{n-1,l} & b'_{n,l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješavanjem ovog $n \times n$ sustava jednadžbi dolazimo do koeficijenta B-splajnova. Navedena matrica može biti velikih dimenzija, ali je tridijagonalna te za rješavanje sustava s takvom matricom ima puno efikasnih numeričkih metoda.

Poglavlje 4

Histopolacija

4.1 Histopolacija

Promjena rezolucije slike povezana je s promjenom broja piksela originalne slike. Do vrijednosti piksela nove slike dolazimo koristeći neki aproksimacijski algoritam na originalnoj slici. Kada povećavamo dimenziju slike, stvaramo nove informacije te zbog toga može doći do neželjenih efekata koji smanjuju oštrinu slike.

Najčešće korištene metode interpolacije su interpolacija najbližeg susjeda, bilinearna i bikubična interpolacija. Navedene interpolacijske metode koriste polinomne splajнове kako bi očuvale što više informacija o slici. Od navedenih metoda, aproksimacijske bazirane na kubičnim polinomima su najtočnije i vizualno najugodnije.

Mi ćemo u ovom poglavlju govoriti o promjeni razlučivosti slike pomoću histopolacijskog splajna. Taj pristup promijene rezolucije slike kao rezultat daje oštrije slike, ali je podložniji numeričkim oscilacijama te je potrebno poduzeti određene korake kako bi se oscilacije smanjile.

Prvo ćemo definirati histopolacijski splajn. Zatim ćemo usporediti gore navedene metode s histopolacijskim splajnom. Glavna ideja histopolacijskog pristupa je poistovjećivanje piksela s 2D numeričkim ćelijama i vrijednosti piksela s prosječnom vrijednosti ćelije. Motivacija za to dolazi od načina na koji digitalne kamere "spremaju" sliku.

4.2 Histopolacijski splajn

Razmotrimo sada sljedeći konstrukcijski problem. Pretpostavimo da je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ i da umjesto vrijednosti u točkama znamo prosječne vrijednosti intervala $\bar{v}_i$ neke funkcije v :

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v(x) dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

gdje su poznate vrijednosti $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ za sve intervale $I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Nas zanima aproksimacija s funkcije v takva da vrijedi:

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{I_i} s(\xi) d\xi = \bar{v}_i, \quad \forall i. \quad (4.2)$$

Uvijet (4.2) naziva se histopolacijski problem, a splajn s koji zadovoljava navedeni uvijet naziva se histopolacijski splajn.

Neka je definirana primitivna funkcija dane funkcije v :

$$V(x) = \int_a^x v(\xi) d\xi \quad (4.3)$$

Kako su nam poznate prosječne vrijednosti intervala funkcije v (4.1), vrijednosti primitivne funkcije V na rubovima intervala su dane s:

$$V(x_i) = \sum_{j=1}^i \int_{x_{j-1}}^{x_j} v(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^i \bar{v}_j \Delta x_j. \quad (4.4)$$

Interpolacijom primitivne funkcije V dolazimo do splajna S koji interpolira funkciju V na rubovima intervala x_{i-1} i x_i . Traženi histopolacijski splajn koji zadovoljava (4.2) je:

$$s = S'. \quad (4.5)$$

4.3 Primjena u promijeni razlučivosti slike

Moglo bi se reći da senzori digitalnih kamera "spremaju" ili broje fotone koji se u relativno kratkom periodu nađu na nepreklapajućim, svjetlosno osjetljivim dijelovima senzora. Piksele slike možemo zamisliti kao dvodimenzionalne ćelije u nekoj $m \times n$ pravokutnoj mreži. Vrijednost piksela predstavlja prosječni intenzitet svjetlosti snimljen senzorom koji nas vodi do histopolacijskog pristupa u promijeni razlučivosti slike. Histopolacijski pristup oponaša proces snimanja slike digitalnom kamerom tako da konstruira splajn plohu koja sadrži prosjeke intenziteta svjetlosti piksela početne slike. Ukoliko povećamo i ponovno smanjimo sliku istom metodom, pogreška bi trebala biti nula. Slično konstrukcijskom problemu u prethodnom odjeljku, vrijednost piksela je prosječna vrijednost intervala $\bar{v}_{i,j}$ funkcije v :

$$\bar{v}_{i,j} = \frac{1}{\|I_{i,j}\|} \int_{I_{i,j}} v(x, y) dx dy. \quad (4.6)$$

Naš cilj je pronaći prosječne vrijednosti piksela na nekoj $\tilde{m} \times \tilde{n}$ mreži koja dijeli iste granice kao i originalna mreža. Nepoznatu funkciju v aproksimirat ćemo histopolacijskom

splajn plohom s . Splajn ploha s mora zadovoljavati rekonstrukcijski uvijet (4.6) za sve ćelije pravokutne mreže. Histopolacijsku splajn plohu možemo dobiti kao tenzorski produkt dviju jednodimenzionalnih metoda za računanje histopolacijskih splajnova. Na taj način, 2D rekonstrukcija i promjena razlučivosti odvija se dimenziju po dimenziju. Ovaj pristup generalizacija je 1D rekonstrukcijskog problema. Dakle, dovoljno je razmatrati problem promjene razlučivosti slike u jednoj dimenziji. Originalna mreža sadrži n ćelija (piksela) u svakom redu, dok ih nova mreža sadrži $\tilde{n}$:

$$\tilde{I}_i = [\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i], \quad i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad (4.7)$$

gdje je $\tilde{x}_0 = x_0$ i $\tilde{x}_{\tilde{n}} = x_n$. Kako bi promjenili razlučivost slike u jednom smjeru, dovoljno je iskoristiti histopolacijski splajn (4.5):

$$\tilde{v}_i = \frac{1}{\Delta \tilde{x}_i} \int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i} s(x) dx = \frac{1}{\Delta \tilde{x}_i} (S(\tilde{x}_i) - S(\tilde{x}_{i-1})), \quad i = 1, \dots, \tilde{n}. \quad (4.8)$$

Nakon što se promjena razlučivosti slike odvije po svim redovima originalne slike, isti postupak mora se ponoviti po svim stupcima nove mreže slike. Promotrimo li desnu stranu jednakosti (4.8) očito je da nema potrebe za eksplicitnom konstrukcijom histopolacijske funkcije s . Kako bi izračunali prosječne vrijednosti piksela slike, dovoljno je evaluirati interpolacijski splajn na granicama intervala. Vrijednosti interpoliranih piksela potrebno je kvantizirati kako bi bili u okviru željene diskretizacije intenziteta vrijednosti piksela. Obično je 8 bita po boji, odnosno 256 razina, dovoljno za reprezentaciju intenziteta piksela. Valja napomenuti kako je za svaku boju potrebno raditi zasebnu aproksimaciju. U dvije dimenzije histopolacijski problem je:

$$\frac{1}{\|I_{i,j}\|} \int_{I_{i,j}} f(x, y) dx dy = \bar{v}_{i,j}$$

Neka je domena pravokutna mreža $[a, b] \times [c, d]$ i neka je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$. Svaki piksel $I_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ originalne slike ima vrijednost jednaku $\bar{v}_{i,j}$.

Dvodimenzionalni slučaj također možemo riješiti aproksimirajući neku primitivnu funkciju. Neka je:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

onda je:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y).$$

Neka je kumulativna funkcija jednaka:

$$V(x_i, y_0) = 0, \quad i = 0, \dots, n$$

$$V(x_0, y_j) = 0, \quad j = 0, \dots, m$$

$$V(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \Delta x_k \Delta y_l \bar{v}_{k,l}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m,$$

gdje je $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$. Nadalje, zahtjevamo da $F(x_i, y_j)$ aproksimira $V(x_i, y_j)$. Iz [5] vidimo da ako F interpolira V u čvorovima, lako je pokazati da:

$$\frac{1}{\Delta x_i \Delta y_j} \int_{I_{i,j}} f(x, y) dx dy = \frac{1}{\Delta x_i \Delta y_j} (V(x_i, y_j) - V(x_{i-1}, y_j) - V(x_i, y_{j-1}) + V(x_{i-1}, y_{j-1})) = \bar{v}_{i,j}.$$

Neka je f_j histopolacijski splajn koji aproksimira piksele u j -tom redu, tj. zadovoljava:

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_j(x) dx = \bar{v}_{i,j}, \quad \forall i = 1, \dots, p. \quad (4.9)$$

Sada radimo okomitu aproksimaciju tako da odaberemo $[x_{i-1}, x_i]$ i pronađemo funkciju $g_i(y) := \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx$ koja aproksimira vrijednosti $\frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_j(x) dx$:

$$\frac{1}{\Delta y_j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} g_i(y) dy = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_j(x) dx, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m. \quad (4.10)$$

To znači, da primitivna funkcija

$$G_i(y) = \int_{y_0}^y g_i(\eta) d\eta = \int_{y_0}^y \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \eta) dx d\eta$$

u čvorovima y_j aproksimira $\sum_{l=1}^j \Delta y_l \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x) dx$, što je aproksimacija od $\frac{1}{\Delta x_i} (V(x_i, y_j) - V(x_{i-1}, y_{j-1}))$. Konačno, iz (4.9) i (4.10) slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_i \Delta y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy &= \frac{1}{\Delta y_j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \right) dy = \\ \frac{1}{\Delta y_j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} g_i(y) dy &= \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_j(x) dx = \bar{v}_{i,j} \end{aligned}$$

Štoviše, histopolacijski uvjeti očuvani su kada se rezolucija poveća za neku vrijednost u obje dimenzije. Točnije, neka je $\tilde{n} = p \cdot n$ i $\tilde{m} = r \cdot m$, za neke $p, r \in \mathbb{N}$ i neka je:

$$\tilde{x}_{pi+l} = x_i + \frac{\Delta x_i}{p} l, \quad i = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, p,$$

$$\tilde{y}_{rj+k} = y_j + \frac{\Delta y_j}{r} l, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, r.$$

Funkcije f_j i dalje zadovoljavaju (4.9), a funkcije g_i redefinirane su:

$$g_i(y) := \frac{1}{\Delta \tilde{x}_i} \int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i} f(x, y) dx, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}$$

i zahtjevamo da zadovoljavaju:

$$\frac{1}{\Delta y_j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} g_i(y) dy = \frac{1}{\Delta \tilde{x}_i} \int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i} f_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, m, \quad \Delta \tilde{x}_i := \tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1}.$$

Onda zbog $\Delta \tilde{x}_{pi+l} = \frac{\Delta x_i}{p}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|I_{i,j}\|} \int_{I_{i,j}} f(x, y) dx dy &= \frac{1}{\Delta y_j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p g_{pi+l}(y) dy = \\ \frac{1}{p} \frac{p}{\Delta x_i} \sum_{l=1}^p \int_{\tilde{x}_{pi+l-1}}^{\tilde{x}_{pi+l}} f_j(x) dx &= \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_j(x) dx = \bar{v}_{i,j} \end{aligned}$$

4.4 Numerički testovi

Kako bi evaluirali metodu promijene razlučivosti slike pomoću histopolacijskog splajna, odabrane slike smanjit ćemo na 50% prvobitne dimenzije te ju ponovno povećati. Navedenih 50% odnosi se na promjenu razlučivosti slike u svakoj dimenziji. Navedenu metodu usporedit ćemo s nekoliko poznatih metoda. Dobivene slike uspoređuju se s referentnom slikom uz pomoć srednje kvadratne pogreške (eng. *Mean-Squared Error*) i najvišeg omjera signala i šuma (eng. *Peak Signal-to-Noise Ratio*). Pomoću navedenih mjera određujemo kvalitetu slike. Definirajmo prvo navedene mjere.

Neka je A originalna jednobojna $m \times n$ slike i neka je $\tilde{A}$ njezina aproksimacija.

Definicija 4.4.1. Srednja kvadratna pogreška (MSE) dana je s:

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (A(i, j) - \tilde{A}(i, j))^2, \quad (4.11)$$

gdje su m i n redom širina i visina slike. Za slike s tri RGB vrijednosti po pikselu, MSE definiramo kao:

$$MSE = \frac{1}{3mn} \sum_{c=1}^3 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (A(i, j, c) - \tilde{A}(i, j, c))^2, \quad (4.12)$$

gdje c označava intenzitet crvene, zelene ili plave boje po pikselu.

Slika 4.1: Originalna slika veličine 256×256

Definicija 4.4.2. Najviši omjer signala i šuma ($PSNR$) dan je s:

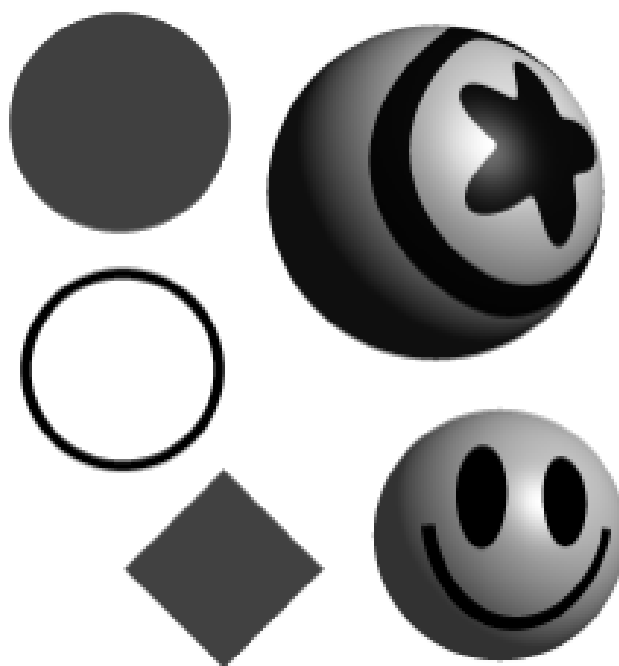
$$PSNR = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{A_{max}^2}{MSE}\right), \quad (4.13)$$

gdje je A_{max} najveća vrijednost piskela slike.

Bolje aproksimacije imaju manji MSE , a veći $PSNR$. Mi smo rezoluciju Slike 4.1 smanjili s 256×256 na 128×128 te ju ponovno povećali na prvobitne dimenzije. Uspoređivali smo metodu najbližeg susjeda, bilinearnu interpolaciju, bikubičnu interpolaciju i bikvadratni histopolacijski splajn. Rezultate izvršavanja vidimo na Slici 4.3. Tablica 4.1 sadrži pripadajuće MSE i $PSNR$ vrijednosti. Iz navedene tablice vidimo da histopolacijski splajn daje najbolje rezultate, i za MSE i za $PSNR$.

Metoda	MSE	$PSNR$
najbliži susjed	152.88	26.29
bilinearna interpolacija	140.05	26.67
bikubična interpolacija	115.24	27.51
bikvadratni histopolacijski splajn	113.35	27.59

Tablica 4.1: Numerički rezultati promjene razlučivosti slike - Lena.

Slika 4.2: Originalna slika veličine - 228×228

Istim metodama promjenili smo razlučivost Slike 4.2. S dimenzija 228×228 smanjili smo ju na 114×114 te ju ponovno povećali na prvobitne dimenzije. U nastavku nalazi se Tablica 4.2 s pripadajućim numeričkim rezultatima i usporedba slika dobivenih primjenom navedenih metoda (Slika 4.4).

Metoda	<i>MSE</i>	<i>PSNR</i>
najbliži susjed	78.04	29.21
bilinearna interpolacija	53.78	29.21
bikubična interpolacija	29.81	33.37
bikvadratni histopolacijski splajn	22.8	34.55

Tablica 4.2: Numerički rezultati promjene razlučivosti slike - Oblici.

Na Slici 4.5 golim okom i ne vidimo pretjerane razlike u kvaliteti pojedine metode, no uvećamo li pojedini detalj slike, razlike postanu puno uočljivije (Slika 4.6). Uočimo kako metoda najbližeg susjeda, koja je i daleko najjednostavnija, daje najlošije rezultate i slika djeluje zamućeno, a isto vrijedi i za bilinearnu interpolaciju. Bikubična interpolacija i bikvadratni histopolacijski splajn rezultiraju oštirim slikama s oštrim rubovima te histo-

polacijski splajn daje daleko bolje brojeve. Problem metode histopolacijskog splajna su artefakti u obliku sjena (*ringing effect*). Isti problem javlja se u manjoj mjeri i kod bikubične interpolacije.

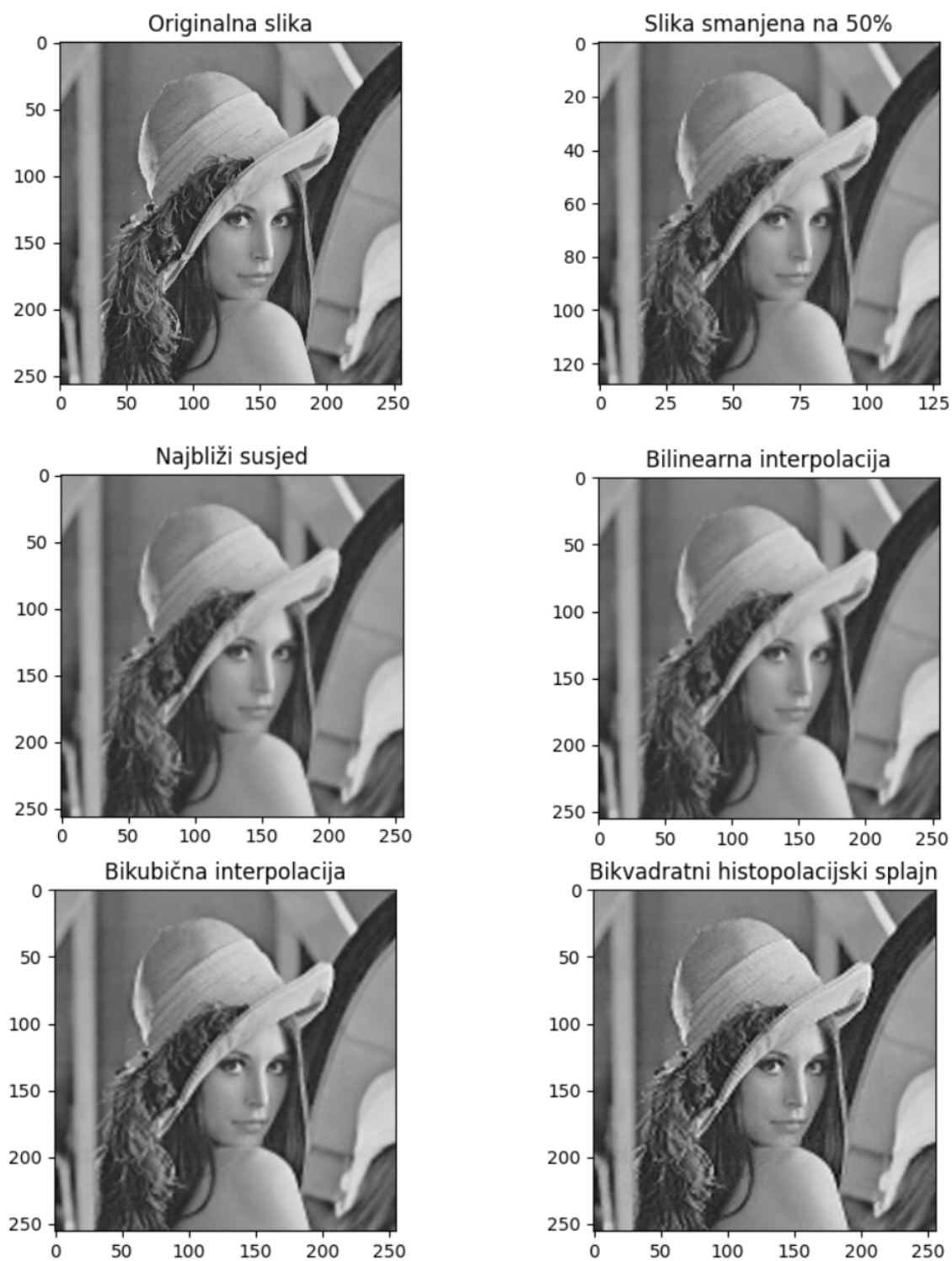
Za kraj, promotrit ćemo sliku u boji (Slika 4.3). Navedenu sliku smanili smo na dimenzije 253×253 te ponovno povećali na prvobitne dimenzije 506×506 . Iako su MSE i PSNR nešto lošiji kod bikvadratnog histopolacijskog splajna u usporedbi s metodom bikubične interpolacije, možemo primjetiti da bikvadratni histopolacijski splajn ipak rezultira oštrijom slikom (Slika 4.7).



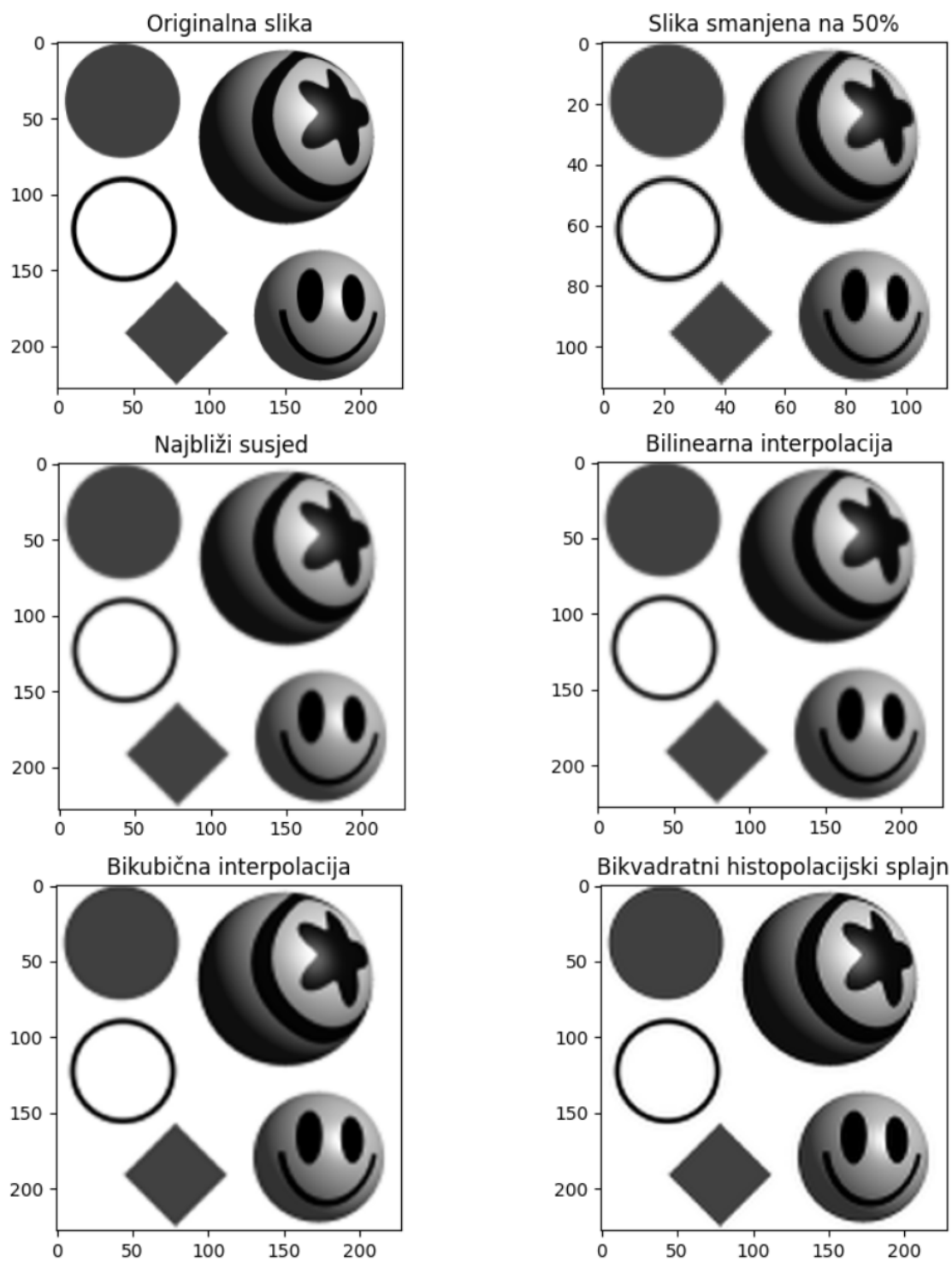
Slika 4.3: Originalna slika veličine - 506×506

Metoda	<i>MSE</i>	<i>PSNR</i>
najbliži susjed	68.30	29.79
bilinarna interpolacija	55.32	29.79
bikubična interpolacija	35.9	32.58
bikvadratni histopolacijski splajn	38.19	32.31

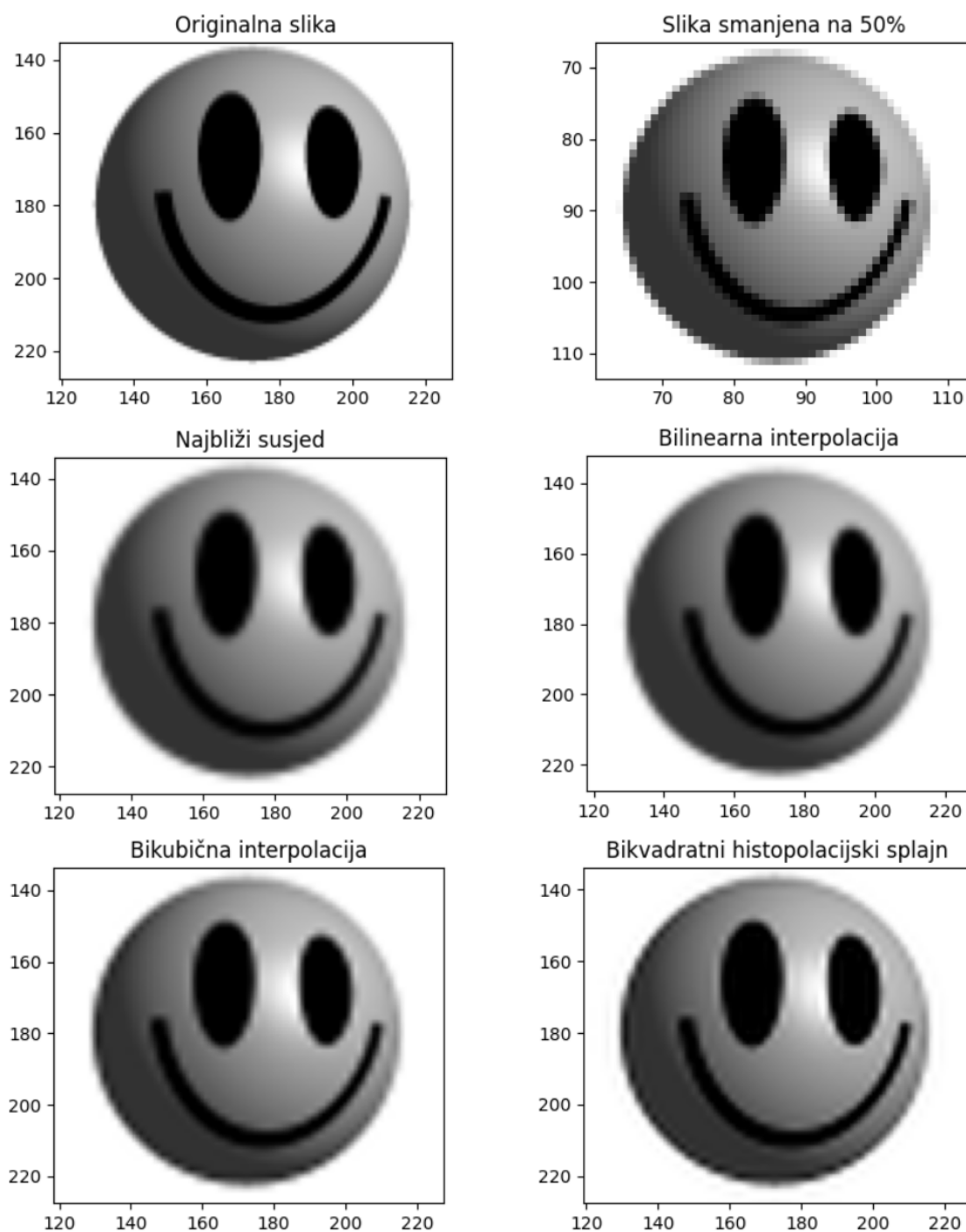
Tablica 4.3: Numerički rezultati promjene razlučivosti slike - Cvijet.



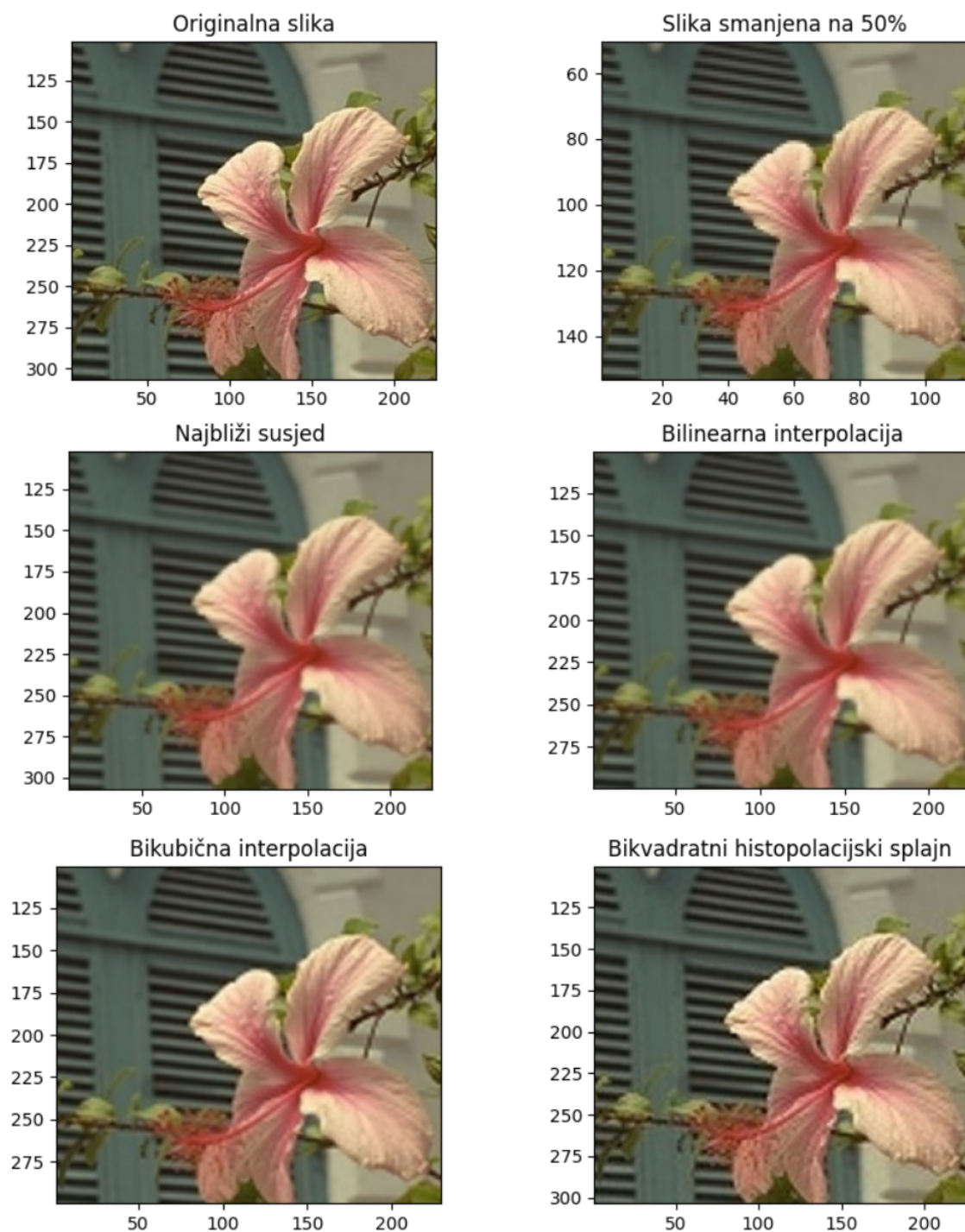
Slika 4.4: Usporedba metoda - Lena



Slika 4.5: Usporedba metoda - Oblici



Slika 4.6: Usporedba metoda - Dio slike



Slika 4.7: Usporedba metoda - Dio slike

Bibliografija

- [1] C. de Boor, *B(asic)-Spline Basics*, (1986).
- [2] T. Bosner, S. Singer, *Polinomna splajn interpolacija*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/nadpredavanja/15nb.pdf>.
- [3] T. Bosner, B. Crnković, J. Škifić, *Application of CCC-Schoenberg operators on image resampling*, BIT Numerical Mathematics **60** (2020), 129–155, <https://doi.org/10.1007/s10543-019-00770-7>.
- [4] T. Bosner, B. Crnković, J. Škifić, *Tension splines with application on image resampling*, Mathematical Communications **19** (2014), 517–529.
- [5] I. J. Schoenberg, *Spline Functions and Approximation Theory*, (1972).
- [6] M. Čupić, Ž. Mihajlović, *Interaktivna računalna grafika kroz primjere u OpenGL-u*, (2021).

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada je upoznati se s metodama promjene razlučivosti slike uz pomoć histopolacijskog splajna. Navedenu metodu usporedili smo s metodom najbližeg susjeda, bilinearnom i bikubičnom interpolacijom. Rezoluciju slike smanjivali smo na 50% dimenzije početne slike i ponovno i povećavali na prvobitne dimenzije pa uspoređivali dobivene rezultate. Evaluacija rezultata navedenih metoda provedena je uz pomoć MSN (srednje kvadratne pogreške) i PSNR (najveći omjer signala i šuma). Metoda bikvadratnog histopolacijskog splajna dala je najbolje rezultate.

Summary

The aim of this thesis is to get acquainted with the method of changing the image resolution with the help of histopolation spline. We compared this method with the nearest neighbor method, bilinear and bicubic interpolation. We reduced the image resolution to 50% of the dimensions of the initial image and again increased it to the original dimensions and compared the obtained results. The evaluation of the results of these methods was performed using MSN (Mean-Squared Error) and PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio). The biquadratic histopolation spline method provided the best results.

Životopis

Rodena sam 24. veljače 1997. godine u Zagrebu. Pohađala sam i završila Osnovnu školu Savski Gaj, a potom Tehničku školu Ruđera Boškovića - smjer: tehničar za računalstvo. Tijekom srednoškolskog obrazovanja završila sam tečaj za radioamatere (P - Razred) i sudjelovala u projektu komunikacije s ISS-om 2013. godine. Također završila sam i - CCNA (Cisco Certified Network Associate) Routing and Switching tečaj 2014. godine. Nakon završetka srednoškolskog obrazovanja, 2015. godine upisujem preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Iako mi je želja bila upisati nastavnički smjer, uspjela sam se upisati na istraživački na kojem sam provela jednu godinu te se na kraju ipak prebacila na željeni smjer. Godine 2019. stekla sam titulu univ. bacc. educ. math te iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika; smjer: nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Iako još nisam diplomirala, od 9. mjeseca ove godine zaposlena sam u Osnovnoj školi Pavleka Miškine gdje predajem matematiku i informatiku.