Evolute konika u projektivno-metričkim ravninama

Božić, Ivana

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Božić Dragun

Evolute konika u projektivno-metričkim ravninama

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2021.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ivana Božić Dragun

The evolute of conics in projective-metric planes

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2021

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Božić Dragun

Evolute konika u projektivno-metričkim ravninama

DOKTORSKI RAD

Mentor:
doc. dr. sc. Helana Koncul

Zagreb, 2021.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ivana Božić Dragun

The evolute of conics in projective-metric planes

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
doc. dr. sc. Helana Koncul

Zagreb, 2021

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, ______________________________________, student/ica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi ____,OIB ______________________________, JMBAG ___________________________________, ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj završni/diplomski/doktorski rad pod naslovom: ____
____
____, isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, ______________________________

____

Potpis

Ovom prilikom željela bih izraziti zahvalnost Prof. dr. sc. Ani Sliepčević.
Hvala prije svega na nesebičnom mentoriranju, dijeljenju znanja i ideja, sretna sam da sam imala priliku raditi s Vama. Hvala na svakoj kritici, pohvali, sugestiji, majčinskom i prijateljskom odnosu. Za mene ćete uvijek biti Mentor uz čiju podršku su nastali i prvi koraci mog znanstvenog puta i ovaj rad.
Zahvaljujem se Izv. prof. dr. sc. Emi Jurkin na svim sugestijama i svesrdnoj podršci.
Najtoplije zahvaljujem i Izv. prof. dr. sc. Vedranu Krčadinac, Prof. dr.sc. Zdenki Kolar Begović i članovima geometrijskog seminara, čije je poticajno okruženje doprinijelo kvaliteti ovog rada. Zahvaljujem se na svemu svojoj prijateljici Doc. dr. sc. Heleni Koncul i njezinoj obitelji. Hvala Kruni za svu tehničku podršku.
Na samom kraju zahvaljujem se svojoj obitelji, Roditeljima, mojoj Zrinki, mom Hrci i to na podršci i povjerenju.
Ovaj rad posvećujem našoj djeci, Mati (koji je bio najveći poticaj kad bih htjela posustati), Evi i našoj maloj curici.

Sažetak

Evoluta dane krivulje je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, a istovremeno to je i omotaljka njezinih normala. Od 1665. godine kada je matematičar Huygens uveo pojam evolute, do danas o evolutama konika u euklidskoj ravnini napisani su brojni radovi. U ovom doktorskom radu proučavaju se svojstva evoluta uz isticanje njihovih karakteristika vezanih za Plückerove formule (red, razred, broj dvostrukih točaka/tangenata, broj šiljaka, infleksionih točaka/pravaca) u sedam od ukupno devet projektivno-metričkih ravnina. Rad je podijeljen na pet poglavlja u kojima je napravljen opsežan pregled osnovnih pojmova i svojstava evoluta konika u euklidskoj, pseudoeuklidskoj, kvazihiperboličnoj, kvazieliptičnoj i projektivno proširenoj hiperboličnoj ravnini. U radu je detaljno proučeno kako položaj konike prema apsolutnoj figuri utječe na red i razred njezine evolute. Pri istraživanju u projektivnim modelima projektivno-metričkih ravnina koriste se metode sintetičke geometrije koje omogućuju konstruktivnu obradu krivulja u dinamičkim računalnim programima *The Geometer's Sketchpad* i *Geogebra*. Pri analitičkom istraživanju evoluta koriste se programi *Wolfram Mathematica* i *Demos*. Cilj je rada sistematizacija činjenica vezanih za istaknute projektivno-metričke ravnine te znanstveni doprinos pri klasifikaciji evoluta i njihovoj konstruktivnoj obradi.

Ključne riječi: evoluta, oskulacijska kružnica konike, euklidska ravnina, pseudoeuklidska ravnina, kvazieliptična ravnina, kvazihiperbolična ravnina, hiperbolična ravnina

Summary

The locus of centers of osculating circles is called the evolute of a curve. The evolute is also the envelope of the family of normal lines to the curve. From 1665, when the mathematician Huygens introduced the notion of the evolute of a conic in the Euclidean plane, to the present day numerous papers have been written. In this doctoral thesis, the properties of evolutes are studied with emphasis on their characteristics related to Plücker formulas (order, class, number of double points/tangents, number of cups, inflection points/lines) in seven out of a total of nine projective-metric planes. The thesis is divided into five chapters in which an extensive review about basic concepts and properties of the evolute of a conic is made in the Euclidean plane, pseudo-Euclidean plane, quasi-hyperbolic plane, quasi-elliptic plane and projective extended hyperbolic plane. The thesis studies in detail how the position of the conic towards the absolute figure affects the order and class of its evolute. The syntehetic and analytical methods have been used in the studies. The computer programs used in the research are *The Geometer's Sketchpad*, *Geogebra*, *Wolfram Mathematica* and *Demos*. The main aim of this thesis is to systematize the facts related to prominent projective-metric planes and scientific contribution to the classification of evolutes and their constructive processing.

Keywords: The evolute, the osculating circle of a conic, the Euclidean plane, the pseudo-Euclidean plane, quasi-hyperbolic plane, quasi-elliptic plane, the hyperbolic plane.

Sadržaj

Uvod

Razlikujemo devet projektivno-metričkih ravnina ovisno o vrsti metrike na pravcu i na pramenu pravaca, koja može biti eliptična, hiperbolična ili parabolična. Često se nazivaju i Cayley-Kleinovim projektivnim ravninama, u počast Felixu Kleinu koji je klasificirao gemetrije u svom „Erlangenskom programu” te inducirao metriku u neke modele projektivne ravnine i Arthuru Cayleyju koji je uvođenjem metrike u projektivnu ravninu napravio nekoliko modela neeuklidske ravnine.
Svaka od tih ravnina može se „uroniti” u proširenu projektivnu realnu ravninu $PG(2, \mathbb{R})$. To su četiri ravnine čija je apsolutna figura neraspadnuta konika: eliptično-eliptična ravnina (eliptična ravnina), hiperbolično-eliptična ravnina (hiperbolična ravnina), hiperbolično-hiperbolična ravnina i eliptično-hiperbolična ravnina, te pet ravnina čija je apsolutna figura raspadnuta konika: parabolično-eliptična ravnina (euklidska ravnina), parabolično-hiperbolična ravnina (pseudoeuklidska ravnina), hiperbolično-parabolična ravnina (kvazihiperbolična ravnina), eliptično-parabolična ravnina (kvazieliptična ravnina) i parabolično-parabolična ravnina (izotropna ravnina), [16].

Evoluta dane krivulje je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, a istovremeno to je i omotaljka njezinih normala. Pojam evolute uveo je 1665. godine Christiaan Huygens, a od tada do danas o evolutama konika u euklidskoj ravnini napisani su brojni radovi. U ostalim projektivno-metričkim ravninama svojstva evoluta uz isticanje njihovih karakteristika vezanih za Plückerove formule (red, razred, broj dvostrukih točaka/tangenata, broj šiljaka, infleksionih točaka/pravaca) do sada nisu proučavana.

Rad je podijeljen na pet poglavlja u kojima je napravljen opsežan pregled osnovnih pojmova i svojstava evoluta konika u sedam od navedenih devet ravnina.
U izotropnoj ravnini nije definirana okomitost te sve kružnice imaju središte u apsolutnoj točki pa stoga u toj ravnini nema smisla promatrati evolute. U eliptičnoj se ravnini pojam evolute može definirati, ali je njihova konstruktivna obrada izrazito teška jer je

apsolutna figura imaginarna krivulja 2. reda. Iz tog razloga će i ova ravnina biti izuzeta iz promatranja u radu.
U radu je detaljno proučeno kako položaj konike prema apsolutnoj figuri utječe na red i razred njezine evolute.
Pregled rada po poglavljima:

Prvo poglavlje odnosi se na euklidsku ravninu gdje se daje pregled brojnih poznatih činjenica o evolutama konika.

Drugo poglavlje bavi se evolutama konika u pseudoeuklidskoj ravnini, promatraju se i konstruiraju evolute kao pravčaste omotaljke krivulja 2. reda.
U prvom dijelu drugog poglavlja istraživanje je provedeno sintetičkom i konstruktivnom metodom na projektivnom modelu pseudoeuklidske ravnine. Drugi dio drugog poglavlja posvećen je analitičkoj obradi istraživanja, gdje se na afinom modelu pseudoeuklidske ravnine potvrđuje točnost tvrdnji iz prvog dijela drugog poglavlja.
U poglavlju se posebno ističu rezultati koji se razlikuju od onih u euklidskoj ravnini.

Treće poglavlje bavi se evolutama konika u kvazihiperboličnoj ravnini.
Evoluta se promatra kao točkovna krivulja za krivulju 2. razreda i bez obzira što se do spoznaje o evolutama u kvazihiperboličnoj ravnini može doći koristeći princip dualiteta iz pseudoeuklidske ravnine, ovdje su one originalno konstruirane na pogodno odabranom modelu te ravnine.

Četvrto poglavlje odnosi se na kvazieliptičnu ravninu gdje se daje pregled osnovnih svojstava ravnine i činjenica vezanih za evolute konika u toj ravnini.

Peto poglavlje odnosi se na hiperboličnu ravninu u kojoj je metrika inducirana realnom krivuljom 2. reda. Istaknimo da je hiperbolična ravnina proučavana tako da se promatraju sve točke projektivne ravnine bez obzira nalaze li se unutar apsolutne konike, izvan nje ili na njoj, kao i svi pravci koji apsolutnu koniku sijeku realno, imaginarno ili je dodiruju. Stoga je proučavanje hiperbolične ravnine obuhvatilo ne samo hiperbolično-eliptičnu ravninu, već i hiperbolično-hiperboličnu i eliptično-hiperboličnu ravninu.
U hiperboličnoj ravnini konstruiraju se evolute kao pravčaste omotaljke krivulja 2. reda.

Pri istraživanju u projektivnim modelima projektivno-metričkih ravnina koriste se metode sintetičke geometrije koje omogućuju konstruktivnu obradu krivulja u dinamičkim računalnim programima *The Geometer's Sketchpad* i *Geogebra*.
Pri analitičkom istraživanju evoluta koriste se programi *Wolfram Mathematica* i *Demos*.

Cilj je rada sistematizacija činjenica vezanih za projektivno-metričke ravnine te znanstveni doprinos pri klasifikaciji evoluta i njihovoj konstruktivnoj obradi.

Rezultati ovog doktorskog rada doprinijet će boljem shvaćanju sličnosti i razlika između evoluta konika u istaknutim projektivno-metričkim ravninama i euklidskoj ravnini.

Poglavlje 1

Evolute u euklidskoj ravnini

1.1 Algebarske krivulje

Ravninska algebarska krivulja n-tog reda je skup svih točaka $T(x, y)$ čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu $f^n(x, y) = 0$, gdje je $f^n(x, y)$ polinom n-tog stupnja.

Red ravninske algebarske krivulje jednak je broju njezinih sjecišta s bilo kojim pravcem ravnine. Ta sjecišta mogu biti realna, u parovima konjugirano imaginarna, jednostruka i višestruka.

Razred ravninske algebarske krivulje jednak je broju tangenata (realnih i imaginarnih), koje možemo povući na tu krivulju iz po volji odabrane točke koja ne leži na toj krivulji. Skup svih tangenata u svim točkama algebarske krivulje reda n čini algebarsku krivulju nekog razreda k, pri čemu je općenito $n \neq k$.
Točke krivulje u kojima postoji jedinstvena tangenta, nazivamo regularnim točkama krivulje. Takve su gotovo sve točke algebarske krivulje. Pored regularnih, na algebarskim krivuljama mogu postojati i singularne točke u kojima krivulja ima više tangenata. To su na primjer višestruke točke u kojima krivulja samu sebe siječe. Broj takvih točaka algebarske krivulje je ograničen.

Dvostruki elementi algebarske krivulje n-tog reda su dvostruke točke (čvorovi, šiljci ili izolirane dvostruke točke), dok su za algebarsku krivulju n-tog razreda dvostruki elementi, dvostruki pravci (dvostruke tangente, infleksioni pravci ili izolirani dvostruki pravci).
Nedegenerirana algebarska krivulja reda n može imati najviše $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dvostrukih točaka, analogno nedegenerirana algebarska krivulja razreda n može imati najviše $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dvostrukih pravaca.

Povezanost karakterističnih osobina algebarske krivulje dane su sljedećim relacijama koje se zovu *Plückerove formule* i prvi puta su objavljene u njegovu „Sustavu analitičke geometrije u ravnini" 1834. godine:

$$\begin{aligned} k &= n(n-1) - 2d - 3r, \\ n &= k(k-1) - 2t - 3w, \\ w &= 3n(n-2) - 6d - 8r, \\ r &= 3k(k-2) - 6t - 8w, \end{aligned}$$

gdje je n red krivulje, k razred krivulje, d broj dvostrukih točaka (čvorova i izoliranih dvostrukih točaka), r broj šiljaka, t broj dvostrukih pravaca (dvostrukih tangenata i izoliranih dvostrukih pravaca) i w broj infleksionih točaka (infleksionih pravaca) krivulje, [21], [23]. Iz prve formule vidljivo je da ako krivulja n-tog reda nema singularnih točaka, onda je njezin razred $n(n-1)$, a broj infleksionih točaka takve krivulje određuje se relacijom $w = 3n(n-2)$, pri čemu neke od tih infleksionih točaka mogu biti i imaginarne. Formulu za određivanje samo realnih infleksionih točaka dao je F. Klein. Ona ima oblik

$$w_1 = k + r_1 + 2d_1 - 2t_1 - n$$

pri čemu je d_1 broj realnih dvostrukih točaka, r_1 broj relnih šiljaka, t_1 broj izoliranih dvostrukih pravaca i w_1 broj realnih infleksionih točaka takve krivulje.

Rod algebarske krivulje n-tog reda jednak je broju p koji je razlika između najvećeg mogućeg broja dvostrukih točaka koje može imati nedegenerirana krivulja toga reda, odnosno razreda, i stvarnog broja dvostrukih točaka koje ima promatrana krivulja. Veza ostalih karekterističnih osobina algebarske krivulje roda p prikazan je sljedećim relacijama:

$$\begin{aligned} p &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r, \\ p &= \frac{(k-1)(k-2)}{2} - t - w. \end{aligned}$$

Ako je krivulja roda 0 tada se može izraziti racionalnim funkcijama nekog parametra. Takve se algebarske krivulje nazivaju *racionalnim krivuljama*, [21], [23], [17]. Međutim obratno ne vrijedi, nije svaka racionalna krivulja roda 0.

1.2 Koordinatizacija i analitički model projektivne ravnine

Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{L}$ neprazni disjunktni skupovi. Elemente od $\mathcal{P}$ nazivat ćemo točkama i označavati A, B, C, ..., a elemente od $\mathcal{L}$ nazivat ćemo pravcima i označavati a, b, c, ... Neka je $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ relacija koju ćemo zvati relacijom incidencije, [18], [7].

Definicija 1.2.1. *Uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ se naziva projektivna ravnina ako vrijede sljedeći aksiomi:*
(P1) Za svake dvije različite točke postoji jedinstveni pravac incidentan s njima.
(P2) Za svaka dva različita pravca postoji točka incidentna s njima.
(P3) Postoje četiri točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne.

Poznato je da projektivna ravnina ima različite modele tj. realizacije, [18], [7].
Neka je F polje, a V trodimenzionalni vektorski prostor nad F, $(V \cong F^3)$. Označimo sa $\mathcal{P}$ skup svih jednodimenzionalnih potprostora od V, sa $\mathcal{L}$ skup svih dvodimenzionalnih potprostora od V te neka je I relacija inkluzije. Uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ je projektivna ravnina koju označavamo $PG(2, F)$.

Projektivna ravnina konstruirana pomoću potprostora vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ označava se s $PG(2, \mathbb{R})$ (kao projektivna geometrija dimenzije 2 nad poljem $\mathbb{R}$).
U analitičkom modelu realne projektivne ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = PG(2, \mathbb{R})$ točke, odnosno pravci, su klase uređenih trojki realnih brojeva koje se nazivaju homogenim koordinatama točke, odnosno homogenim koordinatama pravca

$$\lambda(x_0, x_1, x_2) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}/\{0\},$$

$$\mu[u_0, u_1, u_2] = [\mu u_0, \mu u_1, \mu u_2], \quad \mu \in \mathbb{R}/\{0\},$$

s tim što je isključena trojka $(0, 0, 0)$, odnosno $[0, 0, 0]$.
Dvije trojke (x_0, x_1, x_2) i (y_0, y_1, y_2) predstavljaju istu točku ako pripadaju istoj klasi, tj. ako postoji realan broj $\lambda \neq 0$ takav da je $x_i = \lambda y_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$. Analogno, dvije trojke $[u_0, u_1, u_2]$ i $[v_0, v_1, v_2]$ predstavljaju isti pravac ako pripadaju istoj klasi, tj. ako postoji realan broj $\mu \neq 0$ takav da je $u_i = \mu v_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$, [18].

Napomena. Zbog praktičnih razloga uređena trojka u oblim zagradama označava točku, a trojka u uglatim zagradama označava pravac.

Točka $X(x_0, x_1, x_2)$ i pravac $u[u_0, u_1, u_2]$ su incidentni ako i samo ako vrijedi

$$x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 = 0, \text{ tj. } X^Tu = 0.$$

Koordinate pravca $u[\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2]$ zadanog točkama $X(x_0, x_1, x_2)$ i $Y(y_0, y_1, y_2)$, u oznaci $u \sim X \wedge Y$ [9], računaju se kao vektorski produkt iz homogenih koordinata točaka

$$[\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2] \sim (x_0, x_1, x_2) \wedge (y_0, y_1, y_2) = [x_1y_2 - x_2y_1, x_2y_0 - x_0y_2, x_0y_1 - x_1y_0],$$

pri čemu jednadžba pravca u ima oblik

$$\begin{vmatrix} \hat{x}_0 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (x_1y_2 - x_2y_1)\hat{x}_0 + (x_2y_0 - x_0y_2)\hat{x}_1 + (x_0y_1 - x_1y_0)\hat{x}_2 = 0.$$

Analogno koordinate točke $X(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$ zadane kao sjecište pravaca $u[u_0, u_1, u_2]$ i $v[v_0, v_1, v_2]$, u oznaci $X \sim u \wedge v$, računaju se kao vektorski produkt iz homogenih koordinata pravaca

$$(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2) \sim [u_0, u_1, u_2] \wedge [v_0, v_1, v_2] = (u_1v_2 - u_2v_1, u_2v_0 - u_0v_2, u_0v_1 - u_1v_0),$$

pri čemu jednadžba točke X ima oblik

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_0 & \hat{u}_1 & \hat{u}_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{u}_0 + (u_2v_0 - u_0v_2)\hat{u}_1 + (u_0v_1 - u_1v_0)\hat{u}_2 = 0.$$

Neka je $f(x_0, x_1, x_2)$ homogeni polinom stupnja n nad poljem $\mathbb{R}$. Skup svih točaka projektivne ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0 \tag{1.1}$$

naziva se *algebarskom krivuljom n-tog reda*, dok se skup svih pravaca projektivne ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu

$$f(u_0, u_1, u_2) = 0 \tag{1.2}$$

naziva *algebarskom krivuljom (omotaljkom) n-tog razreda*. Algebarska krivulja prikazana jednadžbom (1.1) ili (1.2) je nedegenerirana ili neraspadnuta ako je pripadni homogeni polinom ireducibilan nad poljem $\mathbb{R}$. Ako je homogeni polinom reducibilan, odnosno može se rastaviti na dva ili više ireducibilnih polinoma stupnja nižeg od n nad poljem $\mathbb{R}$, tada je krivulja degenerirana ili raspadnuta, [9], [18].

1.3 Polariteti konika

Jednadžba konike u matričnom obliku glasi $X^TCX = 0$, što se može napisati i u obliku $(CX)^TX = 0$, jer je C simetrična matrica 3. reda pridružena krivulji koja se naziva *matricom konike*, a X jednostupčana koordinatna matrica. Ako je krivulja nedegenerirana tada je pripadna matrica konike C regularna matrica, u suprotnom je matrica konike singularna matrica. Neka je C regularna matrica, CX se može predstaviti kao slika točke X u polaritetu zadanom matricom C, stoga jednadžba $X^TCX = 0$ izražava incidenciju točke X i njezine polare, pravca koji joj je pridružen u tom preslikavanju. Dakle, nesingularna konika zadaje polaritet, a točke konike su one točke ravnine koje su incidentne s vlastitom polarom. Polara točke na konici je tangenta konike u toj točki. Obrnuto, ako je zadan polaritet ravnine, konika se može zadati kao skup točaka koje su incidentne sa svojom polarom, [18].

Definicija 1.3.1. *Autopolarni trovrh je trovrh, ujedno i trostran, takav da su svaki vrh i nasuprotna stranica uzajamno pridruženi kao pol i polara u zadanom polaritetu.*

Definicija 1.3.2. *Točke X i Y su konjugirane u nekom polaritetu (tj. u odnosu na neku koniku) ako jedna od njih leži na polari druge.*

Točka konike je incidentna s vlastitom polarom, tj. sama sebi je konjugirana. Također, i svaka druga točka tangente konjugirana je s diralištem tangente.
Dualno vrijedi i za dva pravca.

Definicija 1.3.3. *Pravci u i v su konjugirana u nekom polaritetu ako svaki od njih prolazi polom drugog.*

Tangenta konike je pravac koji je sam sebi konjugiran [2], [18].

Teorem 1.3.1. *Neka pravac o siječe koniku c u dvjema različitim točkama, T_1 i T_2. Ako je P bilo koja točka pravca o različita od sjecišta s konikom, a Q točka na pravcu o koja je konjugirana s P, onda vrijedi $H(T_1T_2, PQ)$. Dakle, konjugirane točke na pravcu o ujedno su i harmonički pridružene s obzirom na sjecišta pravca s konikom.*

Uočimo, Q je sjecište pravca o i polare od P.

Nesingularnom konikom, danom jednadžbom $X^T CX = 0$ određen je prema dosadašnjem razmatranju, jedan polaritet pri kojemu je nekoj čvrstoj točki X' pridružena polara $U' = CX'$. Jednadžba te polare, čija je koordinatna matrica U', ima oblik $(U')^T X = 0$. Ako u tu jednadžbu uvrstimo pravčaste koordinate promatrane čvrste polare $U' = CX'$, dobijemo jednadžbu polare točke X' u obliku $(X')^T CX = 0$, [18].

1.4 Oskulacijske kružnice i evolute konika u euklidskoj ravnini

U regularnoj točki T krivulje k promatramo tangentu i normalu. Bilo koja kružnica koja prolazi točkom T, a središte joj leži na normali, ima istu tangentu u T kao i krivulja k. Svaka takva kružnica ima s krivuljom k dvije zajedničke točke podudarne s točkom T pa kažemo da kružnica i krivulja imaju u točki T *dodir 1. reda*, a kružnicu nazivamo *dirnom kružnicom* krivulje k u točki T. Dirnih kružnica krivulje k u točki T ima beskonačno mnogo (isto koliko i točaka na normali), i one čine pramen dirnih kružnica krivulje k u točki T. Ako je k algebarska krivulja reda n, svaka dirna kružnica imat će s njom, osim dodirne točke T koju brojimo kao 2 sjecišta, još $2(n-1)$ zajedničkih točaka. U pramenu dirnih kružnica krivulje k u regularnoj točki T uvijek postoji jedna kružnica kojoj se još jedno od preostalih $2(n-1)$ sjecišta podudara s točkom T. Ta kružnica i krivulja k imaju 3 zajedničke točke podudarne s točkom T i kažemo da u T imaju *dodir 2. reda*. Ovu kružnicu nazivamo *oskulacijskom kružnicom* krivulje k u točki T ili *kružnicom zakrivljenosti* krivulje k u točki T.
Ako je krivulja k u okolini točke T simetrična u odnosu na normalu, tada će ona sa svojom oskulacijskom kružnicom imati 4 zajedničke točke u T. U takvim slučajevima kažemo da krivulja i kružnica imaju *dodir 3. reda* ili da se hiperoskuliraju, a kružnicu nazivamo *hiperoskulacijskom kružnicom* krivulje k.
Oskulacijska kružnica konike jedinstvena je za svaku njezinu točku T. Budući da u točki T ove dvije krivulje imaju dodir 2. reda, tj. tri sjecišta koja su pala u istu točku T, svaka oskulacijska kružnica siječe koniku još u jednoj realnoj točki. Zakrivljenost krivulje k u točki T jednaka je zakrivljenosti njezine oskulacijske kružnice u T.

Jedan od načina da se odredi jednadžba oskulacijske kružnice u proizvoljnoj točki $T(x_1, y_1)$ krivulje drugog stupnja je sljedeći, [5]:
Neka je elipsa zadana jednadžbom $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i $T(x_1, y_1)$ neka je proizvoljna točka elipse. Parametarska jednadžba normale elipse u točki T zadana je jednadžbom

$$x(\tau) = x_1(1 + b^2\tau), \quad y(\tau) = y_1(1 + a^2\tau), \tag{1.3}$$

gdje je τ parametar pomične točke S na normali.
Jednadžba kružnice koja dira elipsu u točki $T(x_1, y_1)$:

$$[x - x_1(1 + b^2\tau)]^2 + [y - y_1(1 + a^2\tau)]^2 = (b^4x_1^2 + a^4y_1^2)\tau^2 \tag{1.4}$$

Ako iz jednadžbe kružnice (1.4) i jednadžbe elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ eliminiramo npr. koordinatu y, dobivamo bikvadratnu jednadžbu u x, koja je djeljiva faktorom $(x - x_1)^2$. Nakon djeljenja dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$e^4x^2 - 2e^2(a^2 + b^2 + 2a^2b^2\tau)x_1x + [e^4x_1^2 + 4a^4b^2(1 + a^2\tau)(1 + b^2\tau)] = 0 \tag{1.5}$$

s korijenima x_3, x_4, koji se mogu izračunati. Oskulacijska kružnica ima s elipsom četiri sjecišta, od kojih su tri pala u točku T, tj. mora osim već ispunjenog uvjeta $x_2 = x_1$ biti ispunjen još i uvjet $x_3 = x_1$. Ta jednakost daje nam za τ vrijednost:

$$\tau = \frac{e^2x_1^2 - a^4}{a^4b^2}. \tag{1.6}$$

Sada uvrštavanjem τ u jednadžbe (1.3) dobivamo središte oskulacijske kružnice. Formula za udaljenostu dviju točaka dati će nam polumjer oskulacijske kružnice. Tako dobivamo formule:

$$x = \frac{e^2}{a^4}x_1^3, \quad y = -\frac{e^2}{b^4}y_1^3, \quad r^2 = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^3}{a^8b^8}. \tag{1.7}$$

Sad možemo zapisati jednadžbu oskulacijske kružnice.
Giba li se točka T neprekinuto po konici, tada će središta pripadnih oskulacijskih kružnica opisivati algebarsku krivulju kojoj će tangente biti odgovarajuće normale konike.
Tu krivulju nazivamo **evolutom** konike.

Definicija 1.4.1. *Evoluta dane krivulje je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, istovremeno to je i omotaljka njezinih normala, [23].*

Prema tome su prve dvije jednadžbe iz (1.7) parametarske jednadžbe evolute elipse za parametre x_1, y_1 i vezane su relacijom $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$. A eliminiramo li ih iz odnosa tri jednadžbe, proizlazi poznata jednadžba evolute elipse, **kao geometrijskog mjesta središta oskulacijskih kružnica elipse**,

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}. \tag{1.8}$$

Iste formule (1.7) vrijede i u slučaju elemenata oskulacijske kružnice hiperbole u njezinoj točki $T(x_1, y_1)$, dok se jednadžba evolute razlikuje od jednadžbe (1.8) samo po tome što na lijevoj strani stoji razlika, $(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}$.
Za oskulacijsku kružnicu parabole u točki $T(x_1, y_1)$ imamo:

$$x = 3x_1 + p, \quad y = -\frac{2x_1y_1}{p}, \quad r^2 = \frac{(2x_1 + p)^3}{p}. \tag{1.9}$$

Eliminacijom x_1, y_1 iz prve dvije jednadžbe i jednadžbe $y_1^2 = 2px_1$ slijedi jednadžba evolute parabole

$$27py^2 = 8(x-p)^3. \tag{1.10}$$

Teorem 1.4.1. *Evoluta konike općenito je krivulja šestoga reda i četvrtog razreda.*

Teorem je dokazan u velikom broju radova, na različite načine, istaknimo [8].
Činjenicu da je evoluta konike krivulja četvrtog razreda možemo pokazati i tako da promatramo pridruženje između svih točaka konike kao niza drugog reda i svih točaka na beskonačno dalekom pravcu ravnine kao niza prvog reda.

Dokaz. Neka je x tangenta u točki X konike, koja siječe beskonačno daleki pravac u točki X'. Tada se točki X konike pridružuje ona točka X'' beskonačno dalekog pravca, koja je u apsolutnoj (cirkularnoj) involuciji na tom pravcu pridružena točki X'. Obrnuto: bilo kojoj točki Y'' beskonačno dalekog pravca pridružuju se one dvije točke konike, koje su dirališta tangenata položenih na koniku iz točke Y', koja je u apsolutnoj involuciji pridružena točki Y''. Primjenom Chaslesove relacije [6], [30], zaključuje se da je rezultat ovoga $1-2$ pridruženja spomenutih nizova točaka omotaljka četvrtog razreda. □

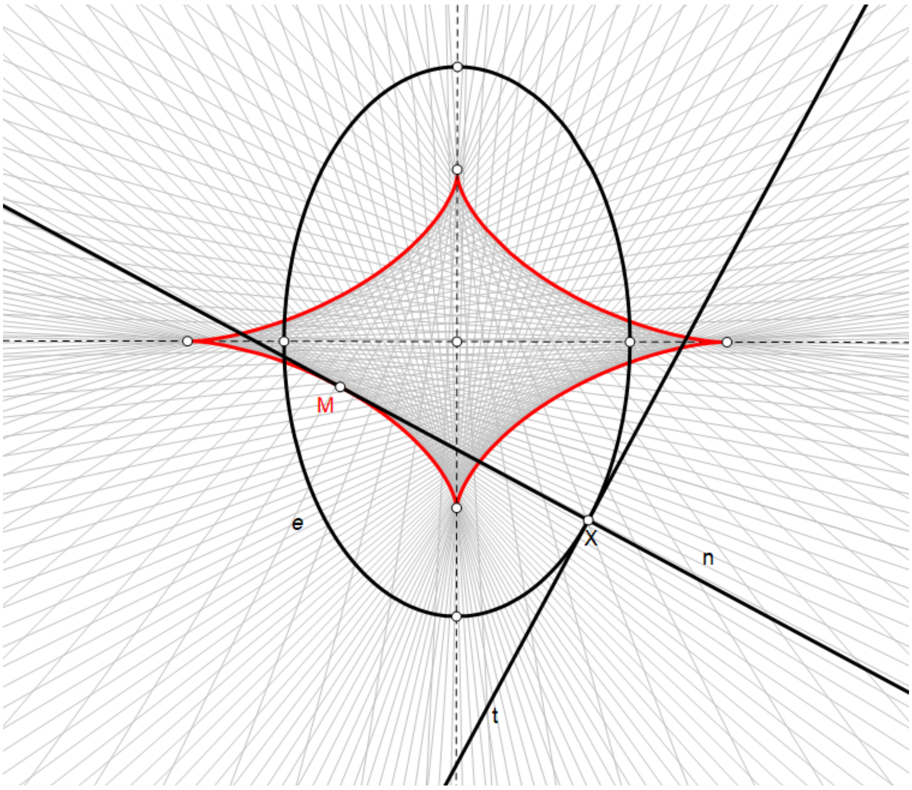
Poznati su i sljedeći odnosi dane krivulje i njezine evolute:
Točki ekstrema polumjera zakrivljenosti dane krivulje (tj. tjemenu dane krivulje) odgovara, općenito, šiljak evolute. Točki krivulje u kojoj je njezina zakrivljenost jednaka nuli, odgovara beskonačno daleka točka evolute, [23].

Kao što je poznato i iz gornjih jednadžbi vidljivo u euklidskoj ravnini za evolutu elipse, hiperbole i parabole zaključuje se sljedeće, (vidi Tablicu 1.1.):

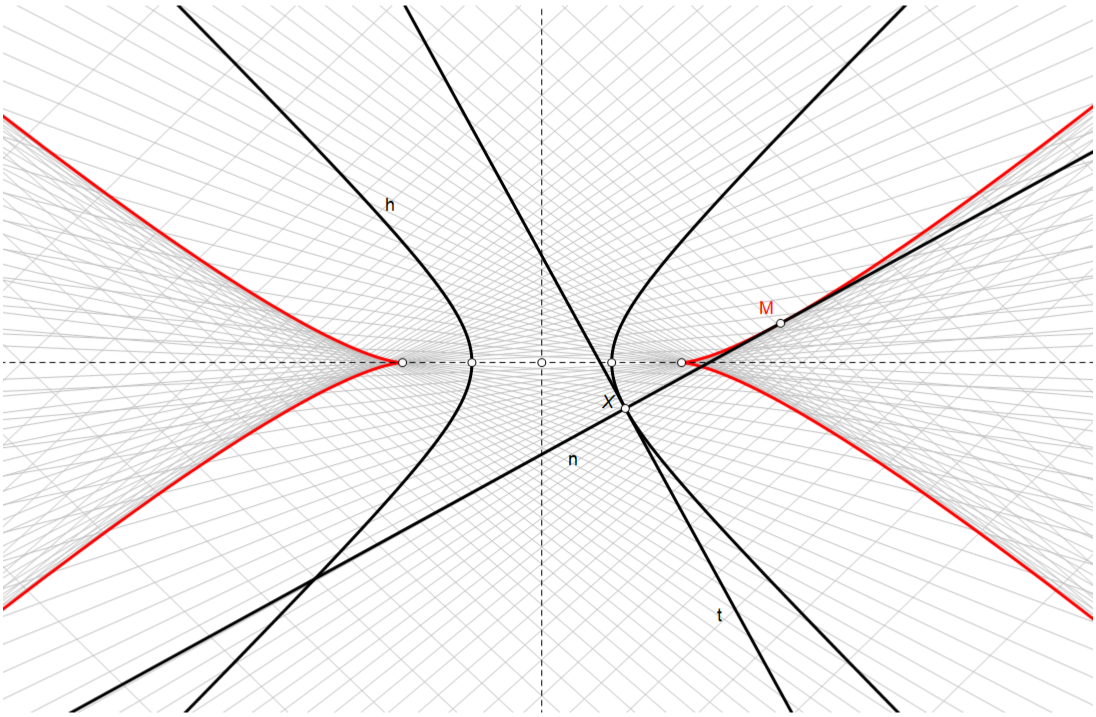
- Evoluta elipse je algebarska krivulja 6. reda i 4. razreda, koja ima 4 realna šiljka koji su središta zakrivljenosti u tjemenima elipse i 2 imaginarna šiljka na beskonačno dalekom pravcu, koji odgovaraju središtima zakrivljenosti u imaginarnim beskonačno dalekim točkama elipse, (vidi sl. 1.1).

- Evoluta hiperbole je krivulja 6. reda i 4. razreda. Ima 2 realna šiljka koji odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u realnim tjemenima hiperbole, 2 imaginarna šiljka su središta zakrivljenosti u imaginarnim tjemenima, te 2 šiljka beskonačno daleko na apsolutnom pravcu, koji su središta zakrivljenosti u beskonačno dalekim točkama hiperbole, (vidi sl. 1.2).

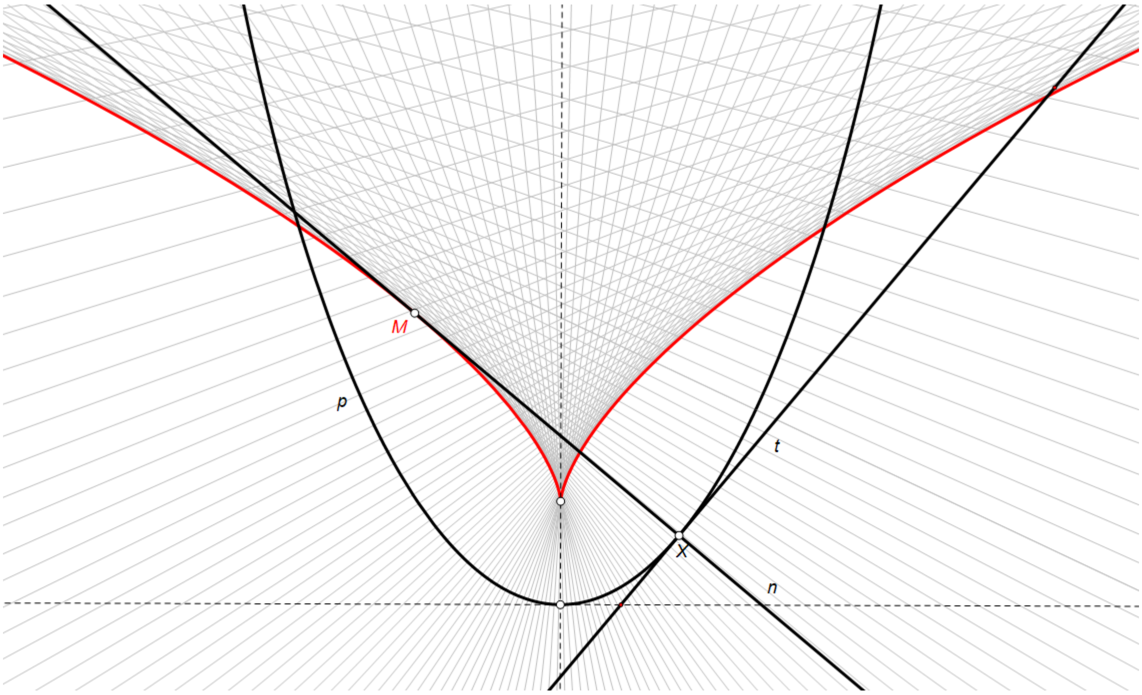
- Evoluta parabole je krivulja 3. reda i 3. razreda. Ima jedan realan šiljak koji odgovara središtu zakrivljenosti oskulacijske kružnice u tjemenu parabole, (vidi sl. 1.3).



Slika 1.1: Evoluta elipse e u euklidskoj ravnini



Slika 1.2: Evoluta hiperbole h u euklidskoj ravnini



Slika 1.3: Evoluta parabole p u euklidskoj ravnini

Tablica 1.1

evoluta koje e-konike	razred	red	rod	broj dvostrukih pravaca	broj infleksionih pravaca	broj šiljaka
e	4	6	0	3	0	6
h	4	6	0	3	0	6
p	3	3	0	0	1	1

Do jednadžbe evolute moguće je doći i na sljedeći način:

Neka je zadana krivulja predočena parametarskim jednadžbama

$$x = x\,(t)\,, \quad y = y\,(t)\,, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

Označimo s $C(\xi, \eta)$ središte zakrivljenosti dane krivulje u točki (x, y).

Njezine parametarske jednadžbe imat će oblik

$$\xi = x - y'\frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}, \quad \eta = y + x'\frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}. \tag{1.11}$$

Služeći se tim jednadžbama, određuju se evolute konika u euklidskoj ravnini.

Primjer 1.4.1. *Odredimo evolutu elipse zadane parametarskom jednadžbom*

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Kako bismo izračunali koordinate središta zakrivljenosti C koristimo formule (1.11):

$$x' = (a\cos t)' = -a\sin t, \quad y' = (b\sin t)' = b\cos t,$$

$$x'' = (-a\sin t)' = -a\cos t, \quad y'' = (b\cos t)' = -b\sin t.$$

$$\begin{aligned}
\xi = x - y'\frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'} &= a\cos t - b\cos t\cdot\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}\\
= a\cos t - \cos t\cdot\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{a} &= \frac{a^2\cos t - a^2\sin^2 t\cos t - b^2\cos^3 t}{a}\\
= \frac{a^2\cos t\left(1 - \sin^2 t\right) - b^2\cos^3 t}{a} &= \frac{1}{a}\left(a^2\cos^3 t - b^2\cos^3 t\right) = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta = y + x'\frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'} &= b\sin t - a\sin t\cdot\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}\\
= b\sin t - \sin t\cdot\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{b} &= \frac{b^2\sin t - a^2\sin^3 t - b^2\cos^2 t\sin t}{b}\\
= \frac{b^2\sin t\,(1 - \cos^2 t) - a^2\sin^3 t}{b} &= \frac{1}{b}\left(b^2\sin^3 t - a^2\sin^3 t\right) = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.
\end{aligned}$$

Iz čega slijedi

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t, \quad \eta = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t.$$

Eliminacijom parametra t, postižemo jednadžbu

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \;\Rightarrow a\xi = \left(a^2 - b^2\right)\cos^3 t \;\Rightarrow \frac{a\xi}{a^2 - b^2} = \cos^3 t \;\Rightarrow \frac{(a\xi)^{\frac{2}{3}}}{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}} = \cos^2 t;$$

$$\eta = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t \;\Rightarrow b\eta = \left(b^2 - a^2\right)\sin^3 t \;\Rightarrow \frac{b\eta}{[-(a^2 - b^2)]} = \sin^3 t \;\Rightarrow \frac{(b\eta)^{\frac{2}{3}}}{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}} = \sin^2 t.$$

$$\frac{(a\xi)^{\frac{2}{3}}}{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}} + \frac{(b\eta)^{\frac{2}{3}}}{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}} = 1 \;\Rightarrow (a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = \left(a^2 - b^2\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ako je $a\xi = X$, $b\eta = Y$, $a^2 - b^2 = A$, jednažba evolute ima oblik

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}},$$

iz kojeg je vidljivo da je evoluta algebarska krivulja 6. reda.

U posebnom slučaju, pokazat će se da je evoluta kružnice točka tj. središte kružnice.

Primjer 1.4.2. *Odredimo evolutu kružnice zadane parametarskom jednadžbom*

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t.$$

Koristimo formule (1.11):

$$x' = (r\cos t)' = -r\sin t, \quad y' = (r\sin t)' = r\cos t,$$

$$x'' = (-r\sin t)' = -r\cos t, \quad y'' = (r\cos t)' = -r\sin t.$$

$$\xi = x - y'\frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'} = r\cos t - r\cos t\cdot\frac{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r\cos t - r\cos t = 0;$$

$$\eta = y + x'\frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'} = r\sin t - r\sin t\cdot\frac{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r\sin t - r\sin t = 0.$$

Za evolute krivulja drugog stupnja možemo odrediti i njihove jednadžbe u pravčastim koordinatama, [5].

Jednadžba normale u zadanoj točki $T(x_1, y_1)$ elipse glasi:

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2)x_1 y_1, \tag{1.12}$$

hiperbole,

$$a^2 y_1 x + b^2 x_1 y = (a^2 + b^2)x_1 y_1, \tag{1.13}$$

odnosno parabole,

$$y_1 x + py = (p + x_1)y_1. \tag{1.14}$$

Ako se naime jednadžba normale elipse (1.12) identificira s jednadžbom pravca u pravčastim koordinatama $ux + vy + 1 = 0$ slijedi relacija:

$$a^2 y_1 : -b^2 x_1 : -e^2 x_1 y_1 = u : v : 1,$$

odakle je

$$x_1 = -\frac{a^2}{e^2 u}, \quad y_1 = \frac{b^2}{e^2 v}.$$

Točka $T(x_1, y_1)$ je ona točka elipse u kojoj se konstruirala normala, stoga njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu elipse,

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = e^4$$

odnosno,

$$e^4u^2v^2 - b^2u^2 - a^2v^2 = 0. \tag{1.15}$$

Jednadžba (1.15) predstavlja skup svih normala elipse, dakle evolutu elipse **kao omotaljku normala**. Iz nje se može zaključiti da je evoluta elipse krivulja 4. razreda.
Istim postupkom dobiva se jednadžba evolute hiperbole u pravčastim koordinatama

$$e^4u^2v^2 + b^2u^2 - a^2v^2 = 0, \tag{1.16}$$

i jednadžba evolute parabole u pravčastim koordinatama

$$pu^3 + 2puv^2 + 2v^2 = 0, \tag{1.17}$$

iz koje možemo zaključiti da je evoluta parabole 3. razreda.

Poglavlje 2

Pseudoeuklidska ravnina

2.1 Osnovni pojmovi

Pseudoeuklidska ravnina (pe) je realna projektivna ravnina $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ u kojoj je metrika inducirana realnim pravcem f i dvjema realnim točkama J_1 i J_2 koje mu pripadaju. Apsolutna figura označava se s $\mathcal{F}_{\mathbb{PE}} = \{\mathbf{f}, \mathbf{J_1}, \mathbf{J_2}\}$, pri čemu pravac f nazivamo *apsolutnim pravcem*, a točke J_1 i J_2 *apsolutnim točkama.*

Definicija 2.1.1. *Točke koje pripadaju apsolutnom pravcu f nazivaju se **izotropnim točkama**. Pravci koji prolaze apsolutnom točkom J_1 ili J_2 nazivaju se **izotropnim pravcima**.*
*Dva pravca su **paralelna** ako je njihovo sjecište izotropna točka.*
*Dva su pravca **okomita** ukoliko s dva izotropna pravca koja spajaju njihovo sjecište s apsolutnim točkama J_1 i J_2 čine harmonijsku četvorku.*

Uobičajno je prema [11], [12], [13], [14], [20], [27] da se konstrukcije izvode na tzv. projektivnom modelu pseudoeuklidske ravnine s apsolutnom figurom $\mathcal{F}_{\mathbb{PE}} = \{\mathbf{f}, \mathbf{J_1}, \mathbf{J_2}\}$ u konačnosti, a analitički izračuni uobičajno se izvode na tzv. afinom modelu pseudoeuklidske ravnine gdje je apsolutni pravac f određen jednadžbom $x_0 = 0$, a apsolutne točke J_1, J_2 koordinatama $(0, 1, \pm 1)$.
Dvostrukim točkama J_1, J_2 definirana je hiperbolička involucija na apsolutnom pravcu f, koja je analogon cirkularne involucije na nepravom ili beskonačno dalekom pravcu euklidske ravnine. Parovima pridruženih točaka te involucije prolaze međusobno okomiti pravci pseudoeuklidske ravnine. Konstrukcija okomitih pravaca se temelji na svojstvima potpunog četverovrha i na sljedećem poznatom teoremu o involucijama [18]:

Teorem 2.1.1. *Dvostruki elementi i par pridruženih elemenata neke involucije čine harmonijsku četvorku.*

Definicija 2.1.2. *Algebarska krivulja reda n je* ***cirkularna*** *u pseudoeuklidskoj ravnini ako prolazi barem jednom apsolutnom točkom. Za krivulju k kažemo da ima* ***tip cirkularnosti*** (r,t) *ako je apsolutna točka J_1 presjek krivulje k s apsolutnim pravcem f multipliciteta r, a apsolutna točka J_2 presjek krivulje k s apsolutnim pravcem f multipliciteta t. Zbroj $r+t$ definira se kao* ***stupanj cirkularnosti****.*
Za krivulju reda n kažemo da je ***potpuno cirkularna*** *ako je red krivulje jednak stupnju cirkularnosti, tj. $n = r + t$, [15], [12].*

Zbog realnosti apsolutnih točaka, konike se s obzirom na položaj prema apsolutnoj figuri, dijele na 9 različitih tipova (vidi sl. 2.1), [12]:

• *elipse* e koje sijeku apsolutni pravac f u dvije imaginarne točke,

• *hiperbole* h_1, h_2 i h_3 koje sijeku apsolutni pravac f u dvije realne točke,

• hiperbola je tipa h_1 ako iz apsolutnih točaka J_1 i J_2 postoje 2 para realnih i različitih izotropnih tangenta,

• hiperbola je tipa h_2 ako iz apsolutnih točaka postoje par realnih i različitih izotropnih tangenta i par konjugirano imaginarnih izotropnih tagenata,

• hiperbola je tipa h_3 ako iz apsolutnih točaka postoje dva para konjugirano imaginarne izotropnih tangenta,

• *specijalne hiperbole* h_{s1}, h_{s2} kod kojih je jedan od realnih presjeka s apsolutnim pravcem f jedna od apsolutnih točaka J_1 ili J_2,

• hiperbola je tipa h_{s1} ako iz apsolutnih točaka J_1 i J_2 postoji par konjugirano imaginarnih izotropnih tangenta i dvostruka realna izotropna tangenta,

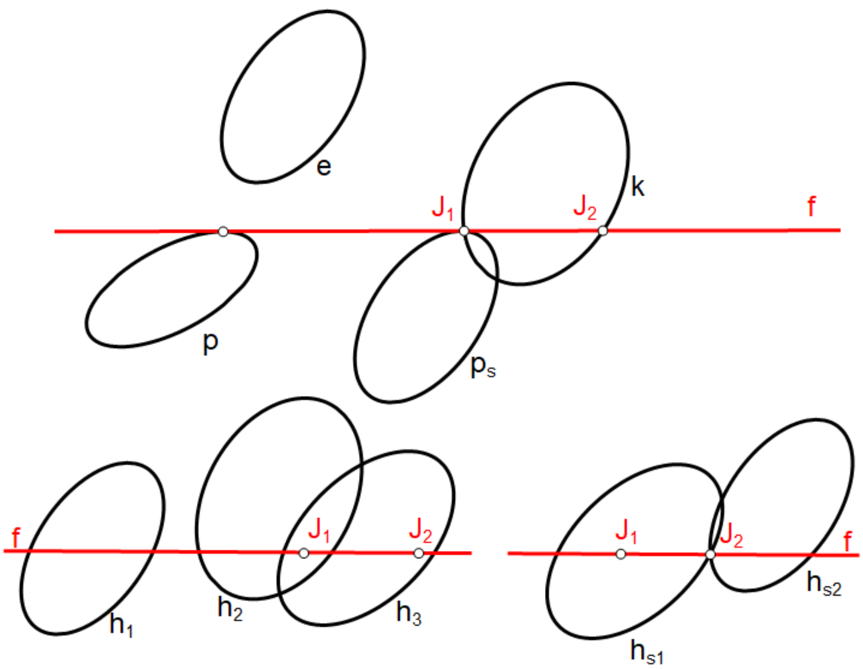
• hiperbola je tipa h_{s2} ako iz apsolutnih točaka J_1 i J_2 postoji par realnih i različitih izotropnih tangenta i dvostruka realna izotropna tangenta,

• *parabole* p koje dodiruju apsolutni pravac f,

• *specijalne parabole* p_s koje dodiruju apsolutni pravac f upravo u jednoj od apsolutnih točaka J_1 ili J_2,

• *kružnice* k koje sijeku apsolutni pravac f u obje apsolutne točke J_1 i J_2.

Važno je istaknuti da u projektivnom modelu pseudoeuklidske ravnine, bez smanjenja općenitosti, svaka od konika pseudoeuklidske ravnine može se prikazati euklidskom kružnicom, što u mnogome olakšava konstrukcije alatima euklidske ravnine.



Slika 2.1: Tipovi konika u pseudoeuklidskoj ravnini

Za razliku od euklidske ravnine u kojoj egzistiraju samo kružnice kao cirkularne konike, u pseudoeuklidskoj ravnini u smislu cirkularnosti konike se dijele na, [12]:

• *necirkularne* (elipse e, parabole p i hiperbole h_1, h_2 i h_3),

• *1-cirkularne* (specijalne hiperbole h_{s1}, h_{s2}),

• *potpuno cirkularne* (kružnice k i specijalne parabole p_s).

Uz konike u pseudoeuklidskoj ravnini vezani su i sljedeći pojmovi, [12]:

• *Fokusi* konike su sjecišta njezinih izotropnih tangenata.

Konika općenito ima četiri fokusa, koji mogu biti realni i različiti, konjugirano imaginarni ili padaju zajedno (dvostruki i četverostruki). Sva četiri fokusa kružnice k padaju u istu točku tzv. četverostruki fokus ili središte kružnice. Parabola p ima četiri fokusa od kojih je jedan u neizotropnoj točki, drugi u izotropnom diralištu s apsolutnim pravcem, a preostala dva u apsolutnim točkama. Specijalna parabola p_s ima dvostruke fokuse u svakoj apsolutnoj točki. Elipsa e i hiperbola h_1 imaju četiri realna fokusa. Hiperbole h_2 i h_3 imaju četiri imaginarna fokusa, dok specijalna hiperbola h_{s1} ima dva dvostruka realna, odnosno h_{s2} dva dvostruka imaginarna fokusa.

• *Središte* konike je pol apsolutnog pravca f.

Središte elipse e leži unutar krivulje, središte parabole p je na krivulji, a sve ostale konike imaju središte izvan krivulje.

• *Promjer* konike je svaki pravac kroz njezino središte (polara izotropne točke).

• *Konjugirani promjeri* p_1 i p_2 konike koji sijeku apsolutni pravac f u točkama P_1 i P_2 redom su takvi promjeri konike za koje vrijedi da je točka P_1 pol pravca p_2, a točka P_2 pol pravca p_1 u odnosu na danu koniku.

• *Osi* konike su dva međusobno okomita konjugirana promjera konike.

• *Tjemena* konike su sjecišta konike sa svojim osima.

Elipse e imaju četiri realna i različita tjemena. Hiperbole h_1 i h_3 imaju dva realna i različita tjemana, te dva konjugirano imaginarna. Hiperbole h_2 imaju četiri konjugirano imaginarna tjemena. Specijalne hiperbole h_{s1} i h_{s2} te specijalne parabole p_s imaju realno četverostruko tjeme u apsolutnoj točki. Parabole p imaju jedno realno jednostruko tjeme i jedno trostruko na apsolutnom pravcu. Kružnice k nemaju tjemena.

• *Ravnalice* konike su polare fokusa.

Krivulja 2. reda c može se zapisati u homogenim točkovnim koordinatama, [14], [12], [9]

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \tag{2.1}$$

odnosno u afinim koordinatama

$$a_{00} + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{12}xy = 0. \tag{2.2}$$

Konika c siječe apsolutni pravac f u točkama čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0. \tag{2.3}$$

Uvjeti za koeficijente pojedinog tipa krivulje 2. reda dani su u sljedećoj tablici:

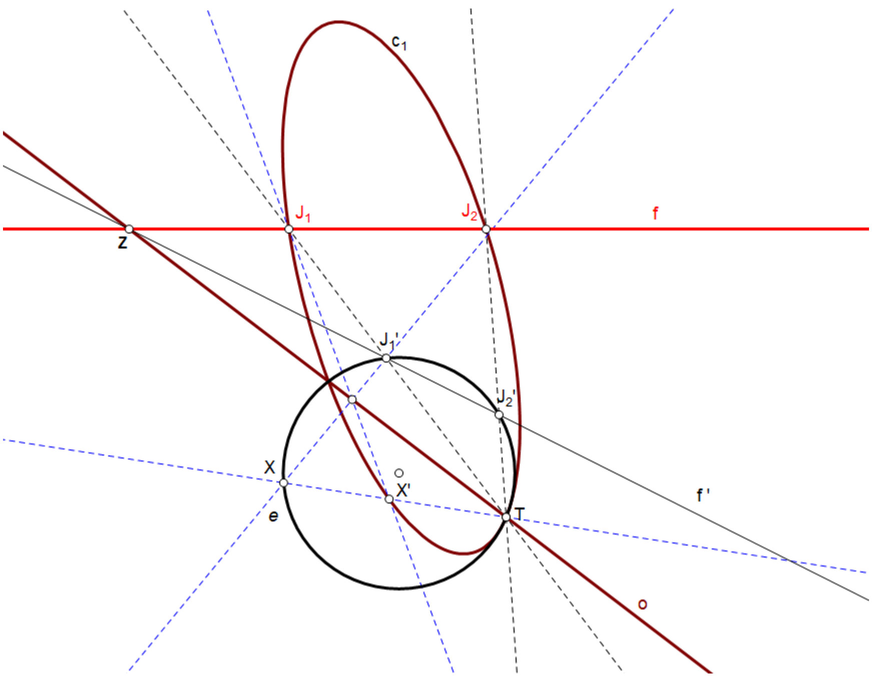
Tablica 2.1

hiperbola	$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$
parabola	$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
elipsa	$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$
specijalna hiperbola	$a_{11} + a_{22} + 2a_{12} = 0$ ili $a_{11} + a_{22} - 2a_{12} = 0$
specijalna parabola	$a_{11} = a_{22} = -a_{12}$ ili $a_{11} = a_{22} = a_{12}$
kružnica	$a_{12} = 0$ i $a_{11} = -a_{22}$

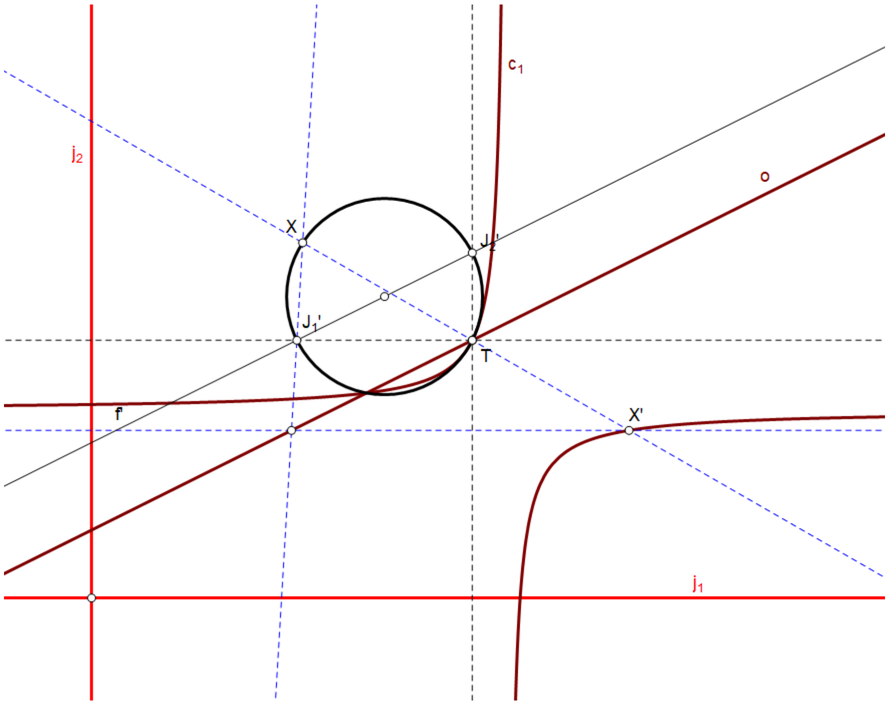
2.2 Oskulacijske kružnice i evolute konika u pseudoeuklidskoj ravnini

2.2.1 Konstrukcija oskulacijske kružnice konike

U poglavlju 1.4 objašnjeno je značenje pojma oskulacijska kružnica konike. Koristeći se elacijama, pokazat će se konstrukcija oskulacijske kružnice konike u po volji odabranoj točki konike, [24], [31].
Potrebno je odrediti takvu elaciju, koja će danu koniku c preslikati u oskulacijsku kružnicu c_1 u točki T konike. Točka T izabere se za centar jedne elacije, kojoj treba odrediti os i par pridruženih točaka. Neka su spojnice TJ_1 i TJ_2 dane točke T s apsolutnim točkama zrake takve elacije, a njihova sjecišta $J_1^{'}$ i $J_2^{'}$ s konikom c bit će pridružene apsolutnim točkama. Dakle, parovi su pridruženih točaka $J_1, J_1^{'}$ i $J_2, J_2^{'}$. Apsolutnom pravcu f je tada pridružena spojnica $f' = J_1^{'}J_2^{'}$, dakle, f' je nedogledni pravac elacije.
Pravci f i f' moraju se sjeći na osi elacije, pa os elacije prolazi tim sjecištem i točkom T. Elacija $(T, o, J_1, J_1^{'})$ preslikava zadanu koniku c u traženu oskulacijsku kružnicu c_1 u točki T, (vidi slike 2.2, 2.3).



Slika 2.2: Konstrukcija oskulacijske kružnice elipse e na projektivnom modelu pe-ravnine



Slika 2.3: Konstrukcija oskulacijske kružnice elipse e na afinom modelu pe-ravnine; f je beskonačno daleki pravac, apsolutne točke J_1, J_2 incidentne su s međusobno okomitim pravcima j_1 i j_2 u euklidskom smislu

2.2.2 Evolute konika u pseudoeuklidskoj ravnini

Evoluta dane krivulje je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, istovremeno to je i omotaljka njezinih normala, [23].

Teorem 2.2.1. *Evoluta konike u pseudoeuklidskoj ravnini općenito je krivulja šestoga reda i četvrtog razreda.*

Dokaz. Neka je x tangenta u točki X konike, koja siječe apsolutni pravac f u točki X'. Tada se točki X konike pridružuje ona točka X'' apsolutnog pravca, koja je u apsolutnoj involuciji na tom pravcu pridružena točki X'. Obrnuto: bilo kojoj točki Y'' apsolutnog pravca pridružuju se one dvije točke konike, koje su dirališta tangenata položenih na koniku iz točke Y', koja je u apsolutnoj involuciji pridružena točki Y''.
Primjenom Chaslesove relacije [6], [30], zaključuje se da je rezultat ovoga $1-2$ pridruženja spomenutih nizova točaka omotaljka četvrtog razreda. $\square$

Zbog realnosti apsolutnih točaka u pseudoeuklidskoj ravnini postoji čak 9 vrsta različitih konika pa postoji i veći broj različitih tipova njihovih evoluta čije će se karakteristike istaknuti u ovome poglavlju.

- Osi konike o_1, o_2 i apsolutni pravac f stranice su autopolarnog trostrana i dvostruki pravci evolute.

- Šiljci evolute na apsolutnom pravcu f nalaze se u točkama koje su u apsolutnoj involuciji pridružene točkama u kojima konika siječe apsolutni pravac f.

- Šiljci na osima odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u tjemenima dane konike i konstruiraju se elacijom, [24] (str. 65, poglavlje 3.1). Istom elacijom može se konstruirati bilo koje središte zakrivljenosti dane konike.

Evoluta elipse e i hiperbola tipa h_1, h_2 i h_3 neraspadnuta je krivulja četvrtog razreda s tri dvostruka pravca, dok u slučaju parabole p i cirkularnih konika tj. specijalnih hiperbola[1] h_{s1}, h_{s2}, i specijalne parabole[2] p_s, evoluta je raspadnuta krivulja 4. razreda na krivulje nižih razreda, (vidi Tablicu 2.2).

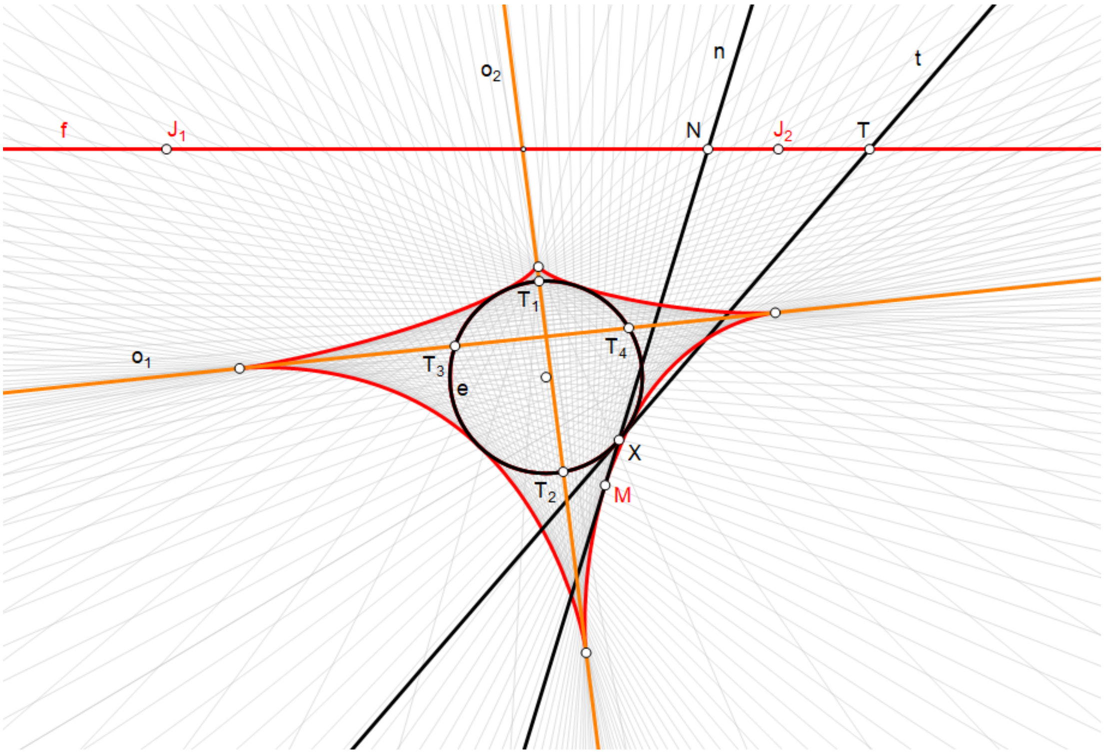
Tablica 2.2

evoluta koje pe-konike	razred evolute	red evolute	rod evolute	broj dvostrukih pravaca	broj infleksionih pravaca	broj šiljaka Re+Im
e	4	6	0	3	0	4+2
h_1	4	6	0	3	0	4+2
h_2	4	6	0	3	0	2+4
h_3	4	6	0	3	0	4+2
h_{s1}	3	3	0	0	1	1
h_{s2}	3	3	0	0	1	1
p	3	3	0	0	1	1
p_s	2	2	0	0	0	0

[1] 1-cirkularne

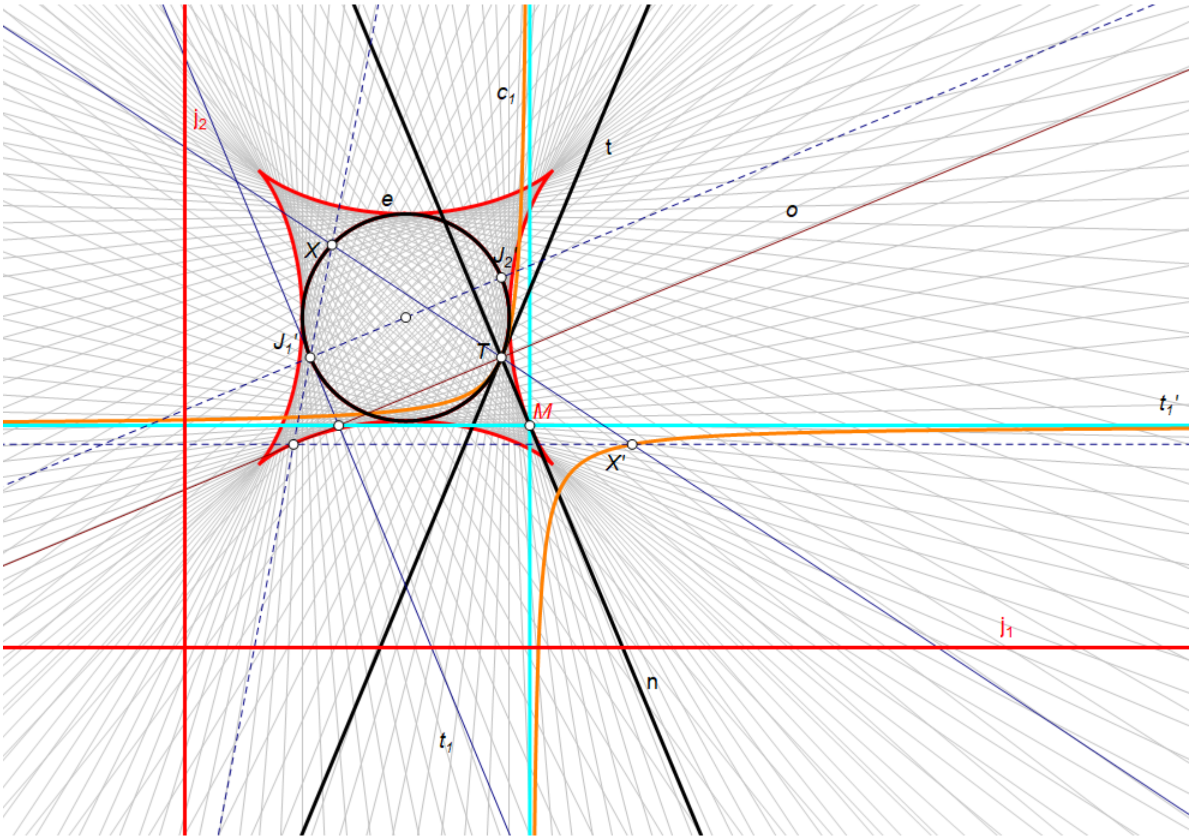
[2] potpuno cirkularne

Evoluta elipse e je algebarska krivulja 6. reda i 4. razreda. Apsolutni pravac f i osi o_1 i o_2 konike e dvostruki su pravci evolute. Apsolutni pravac f je izolirani dvostruki pravac, šiljci na f su imaginarni. Šiljci na osima odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u četiri realna tjemena, (vidi sl. 2.4, 2.5). Zaključujemo da evoluta pseudoeuklidske elipse e ima četiri realna i dva imaginarna šiljka kao i u slučaju euklidske ravnine.

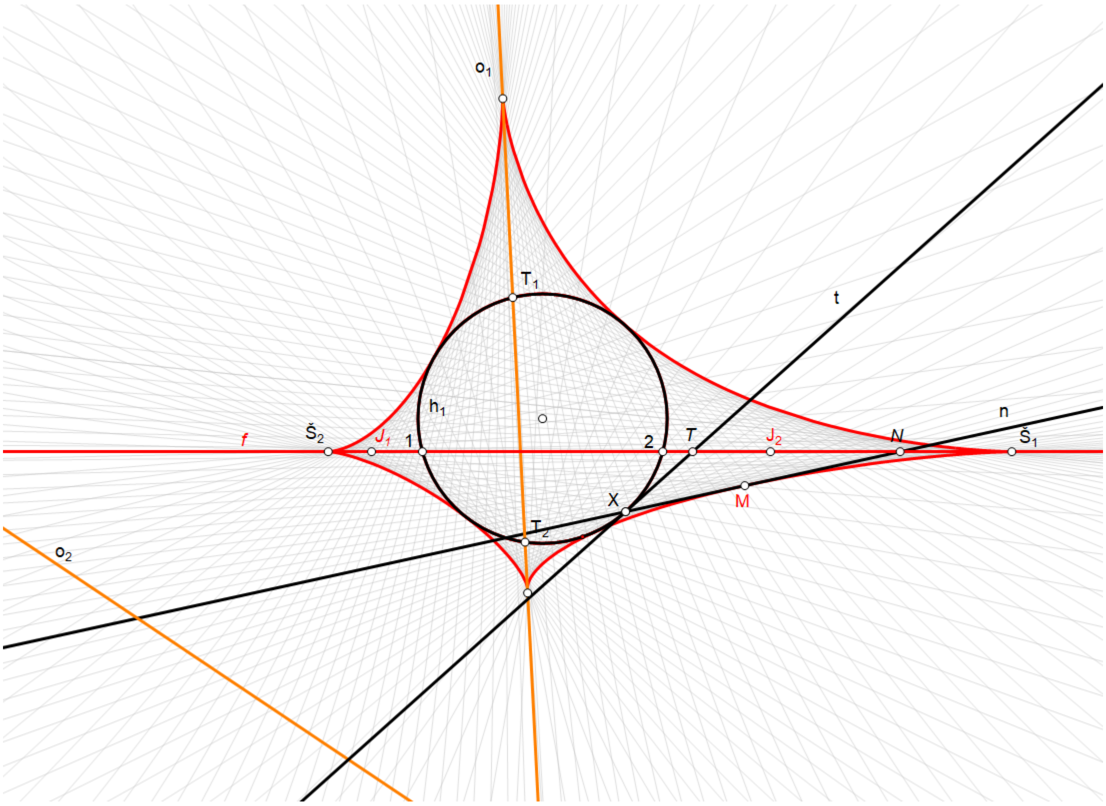


Slika 2.4: Evoluta elipse e u pe-ravnini

Evoluta hiperbole h_1 je algebarska krivulja 6. reda i 4. razreda. Apsolutni pravac f i osi o_1 i o_2 konike h_1 dvostruki su pravci evolute. Šiljci na apsolutnom pravcu f nalaze se u točkama $\check{S}_1$, $\check{S}_2$ koje su u apsolutnoj involuciji pridružene točkama u kojima hiperbola h_1 siječe apsolutni pravac f, (točke 1, 2). Šiljci na osi o_1 odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u dva realna tjemenima. Šiljci na osi o_2 su imaginarni, odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u dva konjugirano imaginarna tjemena, (vidi sl. 2.6). Zaključujemo da evoluta pseudoeuklidske hiperbole h_1 ne odstupa od očekivanog slučaja evolute hiperbole u euklidskoj ravnini, ima 4 realna i 2 konjugirano imaginarna šiljka.

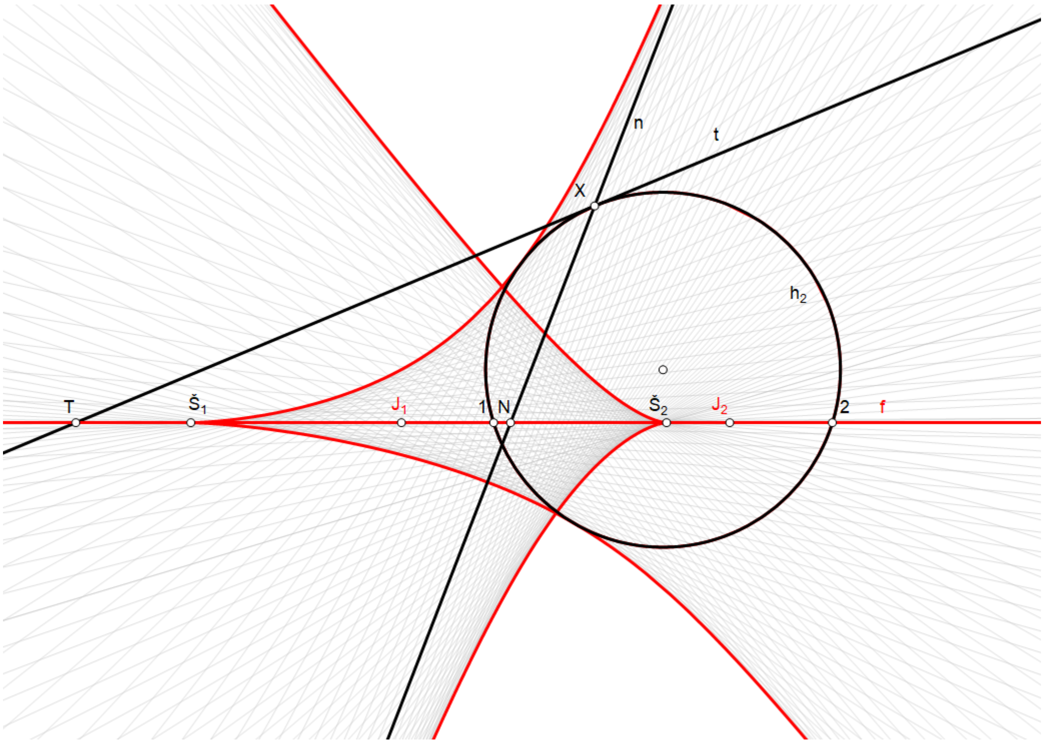


Slika 2.5: Afin model - Oskulacijska kružnica (narančasta) u točki T i evoluta elipse e



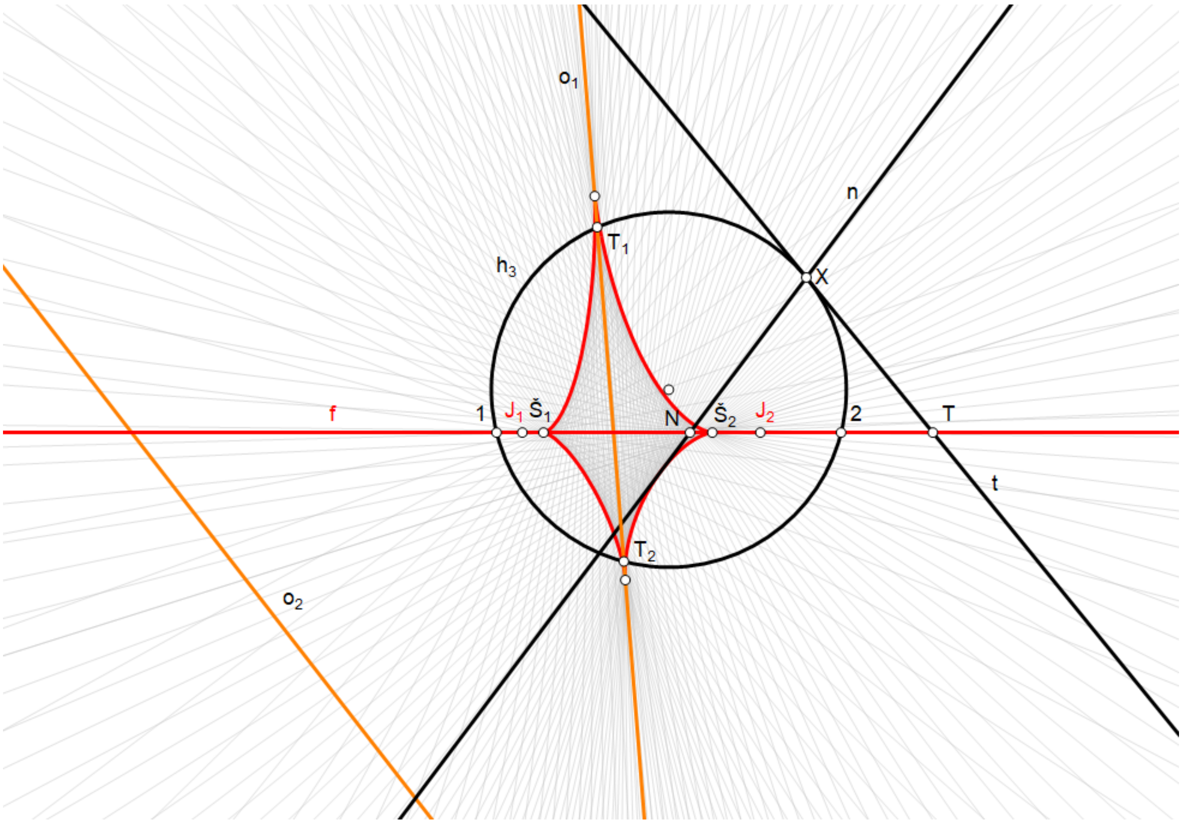
Slika 2.6: Evoluta hiperbole h_1 u pe-ravnini

Evoluta hiperbole h_2 je algebarska krivulja 6. reda i 4. razreda. Apsolutni pravac f i imaginarne osi o_1 i o_2 konike h_2 dvostruki su pravci evolute. Šiljci na apsolutnom pravcu f nalaze se u točkama $\check{S}_1$, $\check{S}_2$ koje su u apsolutnoj involuciji pridružene točkama u kojima konika siječe apsolutni pravac f. Šiljci na osima o_1 i o_2 su u parovima konjugirano imaginarni, jer ova konika nema realnih tjemena niti hiperoskulacijskih kružnica, (vidi sl. 2.7). Zaključujemo da evoluta pseudoeuklidske hiperbole h_2 ima 6 šiljaka od kojih su 2 realna i 4 konjugirano imaginarna, što ne odstupa od očekivanog i usporedbe s euklidskom ravninom.



Slika 2.7: Evoluta hiperbole h_2 u pe-ravnini

Evoluta hiperbole h_3 je algebarska krivulja 6. reda i 4. razreda. Apsolutni pravac f i osi o_1 i o_2 konike h_3 dvostruki su pravci evolute. Šiljci na apsolutnom pravcu f nalaze se u točkama $\check{S}_1$, $\check{S}_2$ koje su u apsolutnoj involuciji pridružene točkama u kojima hiperbola h_3 siječe apsolutni pravac f. Šiljci na osi o_1 odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u dva realna tjemenima. Šiljci na osi o_2 su imaginarni, odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u dva konjugirano imaginarna tjemena, (vidi sl. 2.8). Zaključujemo da evoluta pseudoeuklidske hiperbole h_3 ne odstupa od očekivanog slučaja evolute hiperbole u euklidskoj ravnini, ima 4 realna i 2 konjugirano imaginarna šiljka.

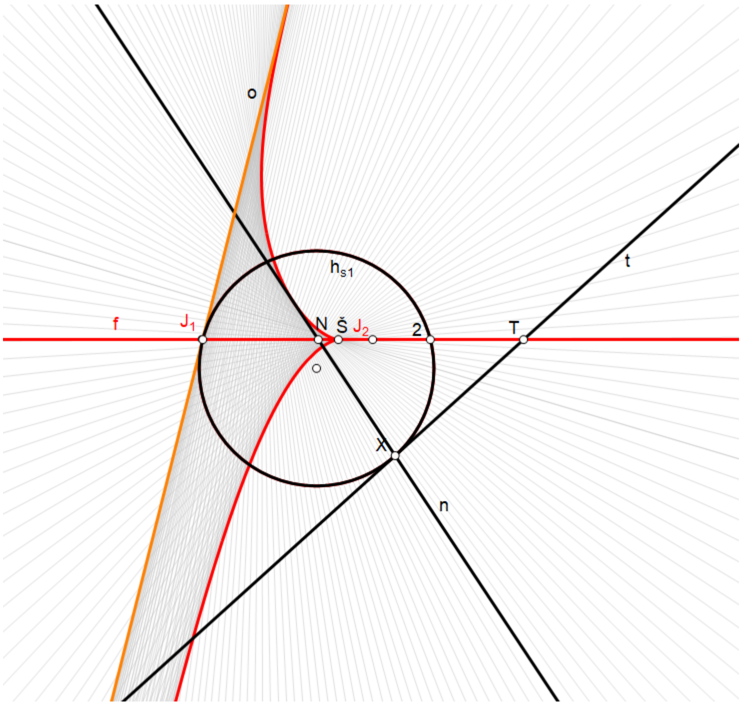


Slika 2.8: Evoluta hiperbole h_3 u pe-ravnini

Evoluta cirkularnih konika raspadnuta je krivulja 4. razreda na krivulju 3. razreda i pramen izotropnih pravaca odgovarajućom apsolutnom točkom, (na slikama je to J_1).

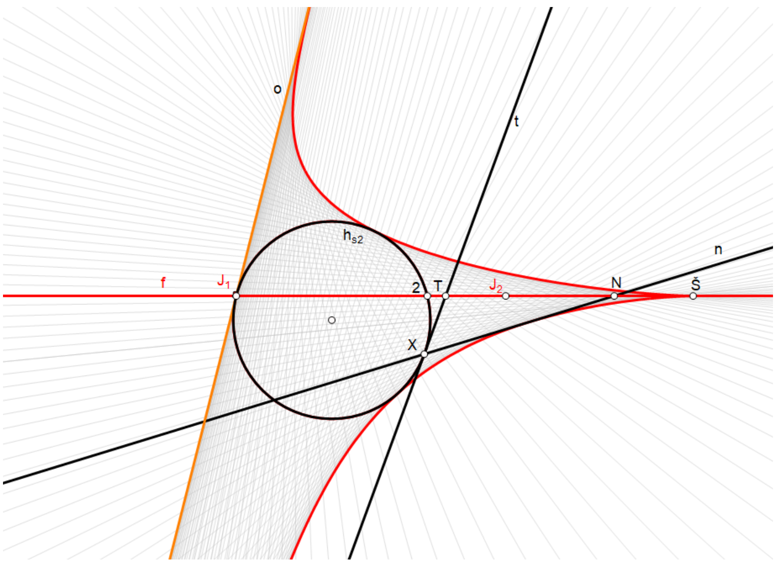
Evoluta specijalne hiperbole h_{s1} je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Nema dvostrukih pravaca. Krivulja h_{s1} ima realno četverostruko tjeme u apsolutnoj točki J_1. Jedan šiljak evolute nalazi se na apsolutnom pravcu f i u apsolutnoj involuciji pridružen je točki 2 u kojoj konika siječe apsolutni pravac (različitoj od apsolutne točke). Šiljak se nalazi unutar konike. Os o ($o_1 = o_2$) konike je infleksioni pravac evolute, (vidi sl. 2.9). Budući da specijalna hiperbola h_{s1} prolazi apsolutnom točkom J_1, koja je i dvostruka točka hiperbolične (cirkularne) involucije na f, postoji beskonačno mnogo normala okomitih na tangentu u točki J_1. Ti pravci čine pramen izotropnih pravaca i dio su raspada krivulje 4. razreda. Zaključujemo da evoluta specijalne hiperbole h_{s1} odstupa od očekivanja i ne postoji usporedba s euklidskom ravninom.

Evoluta specijalne hiperbole h_{s2} je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Nema dvostrukih pravaca. Konika h_{s2} ima realno četverostruko tjeme u apsolutnoj točki J_1. Jedan šiljak nalazi se na apsolutnom pravcu f i u apsolutnoj involuciji pridružen je točki 2 u kojoj konika siječe apsolutni pravac (različitoj od apsolutne točke). Šiljak se nalazi



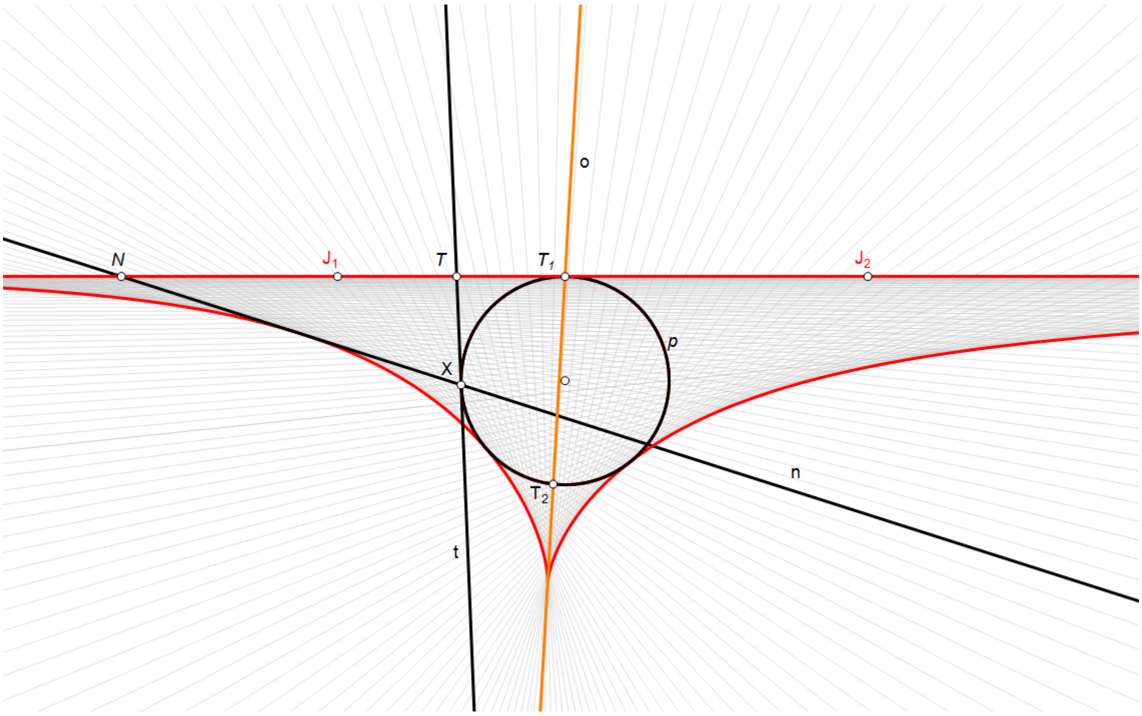
Slika 2.9: Evoluta hiperbole h_{s1} u pe-ravnini

izvan konike. Os $(o_1 = o_2)$ konike je infleksioni pravac evolute, (vidi sl. 2.10). Budući da specijalna hiperbola h_{s2} prolazi apsolutnom točkom J_1, koja je i dvostruka točka hiperbolične (cirkularne) involucije na f, postoji beskonačno mnogo normala okomitih na tangentu u točki J_1. Ti pravci čine pramen izotropnih pravaca i dio su raspada krivulje 4. razreda. Zaključujemo da evoluta specijalne hiperbole h_{s2} odstupa od očekivanja i ne postoji usporedba s euklidskom ravninom.



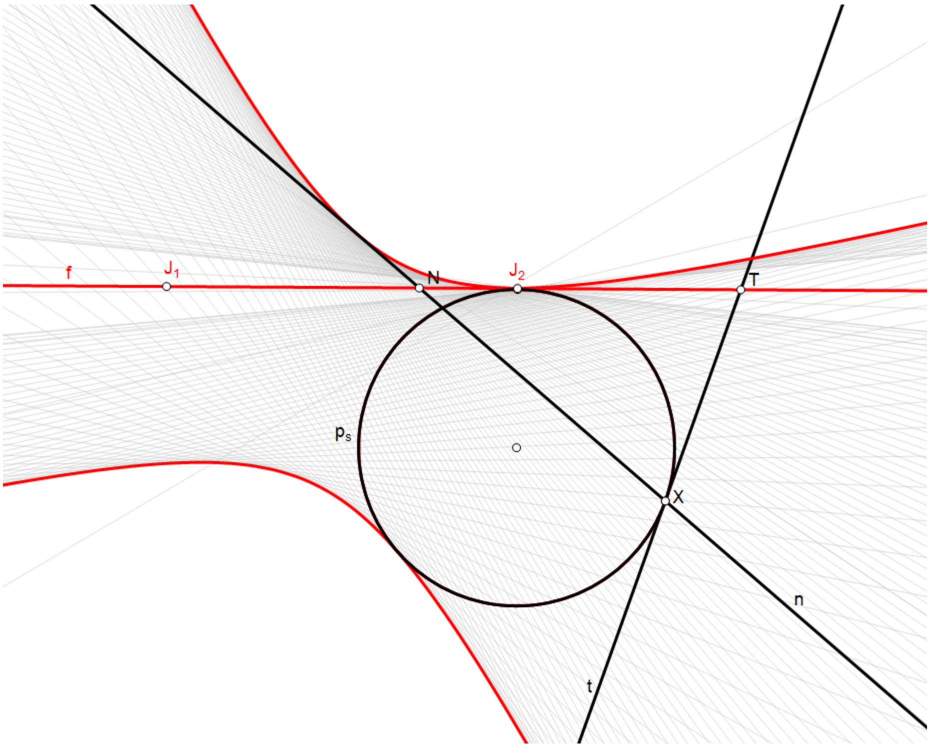
Slika 2.10: Evoluta hiperbole h_{s2} u pe-ravnini

Evoluta parabole p je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Nema dvostrukih pravaca. Parabola p ima realno trostruko tjeme T_1 na apsolutnom pravcu i jedno jednostruko tjeme T_2. Jedan šiljak evolute nalazi se na osi parabole o i odgovara središtu zakrivljenosti u njezinom jednostukom tjemenu T_2. Apsolutni pravac je infleksioni pravac evolute, (vidi sl. 2.11). Zaključujemo da evoluta pseudoeuklidske parabole p ne odstupa od očekivanja u usporedbi s euklidskom ravninom.



Slika 2.11: Evoluta parabole p u pe-ravnini

Evoluta specijalne parabole p_s je algebarska krivulja 2. reda i 2. razreda, (vidi sl. 2.12). Budući da specijalna parabola dira apsolutni pravac u točki J_2, dva puta brojeni pramen pravaca u toj točki dio je raspada krivulje četvrtog razreda. Zaključujemo da evoluta pseudoeuklidske specijalne parabole p_s odstupa od očekivanja i ne postoji usporedba s euklidskom ravninom. Specijalna parabola je potpuno cirkularna konika, a zanimljivo je da je i njezina evoluta također potpuno cirkularna i to specijalna parabola.



Slika 2.12: Evoluta specijalne parabole p_s u pe-ravnini

2.3 Jednadžba evolute

Poznato je da je pseudoeuklidska ravnina realna afina ravnina $\mathbb{R}^2_1$ zadana nesingularnom indefinitnom kvadratnom formom $q(x) = \langle x, x\rangle$, pri čemu je metrika $\langle \cdot, \cdot\rangle$ (*pseudo-skalarni produkt*) definirana s

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

Duljina vektora (*pseudo-skalarna norma*) $x \in \mathbb{R}^2_1$ definirana je s

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x, x\rangle|}.$$

Za vektor x u pe-ravnini definiramo funkciju predznaka *sgn* kao *sgn* x = *sgn*$(\langle x, x\rangle)$, [3]. S obzirom na definiranu pseudo-metriku u pseudoeuklidskoj ravnini razlikujemo tri vrste vektora koje definiramo kako slijedi:

Definicija 2.3.1. *Za vektor $x \in \mathbb{R}^2_1$ kažemo da je:*

1. prostorni vektor ako je sgn $x = 1$.

2. vremenski ako je sgn $x = -1$.

3. svjetlosni (nul, izotropni) ako je sgn $x = 0$.

Za koordinate vektora $x \in \mathbb{R}^2_1$ vrijede sljedeći uvjeti:

1. vektor je prostorni ako je $|x_1| > |x_2|$.
2. vektor je vremenski ako je $|x_1| < |x_2|$.
3. vektor je svjetlosni (nul, izotropni) ako je $|x_1| = |x_2|$.

Napomena 2.3.1. *Svojstvo biti prostorni (odnosno vremenski, svjetlosni) kraće se naziva kauzalni karakter vektora, [19].*

Definicija 2.3.2. *Dva su vektora $x,\ y \in \mathbb{R}^2_1$ okomita (ortogonalna) ako je $\langle x, y\rangle = 0$.*

Neka je $x \to x^{\perp}$ operator okomitosti, koji vektoru $x = (x_1, x_2)$ pridružuje ortogonalan vektor $x^{\perp} = \big(sgn(\langle x, x\rangle)x_2, sgn(\langle x, x\rangle)x_1\big)$ i vrijedi

1. $(x^{\perp}) \perp x$,
2. $|x^{\perp}| = |x|$,
3. $sgn(x^{\perp}) = -sgn(x)$.

Iz zadnjeg svojstva vektora $x^{\perp}$ slijedi:
Svaki vektor, različit od nul vektora, okomit na prostorni vektor je vremenski i obrnuto, tj.

$$sgn(x) = -sgn(y) \quad \text{ako je} \quad x \perp y, \quad x, y \neq 0.$$

Također, vektor okomit na svjetlosni vektor je svjetlosni.

Definicija 2.3.3. *Svako glatko preslikavanje $P : I \to \mathbb{R}^2_1$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, zovemo krivulja (parametrizirana krivulja) u $\mathbb{R}^2_1$.*

Za točku $P(t)$ krivulje P kažemo da je prostorna, vremenska ili svjetlosna točka krivulje, ovisno o vrsti tangencijalnog vektora $P'(t)$ u točki $P(t)$.

Primjer 2.3.1. *Promotrimo elipsu e u pseudoeuklidskoj ravnini prikazanu euklidskom kružnicom $P(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\rangle$. Točke $P(t)$, $t \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle$ su vremenske, točke $P(t)$, $t \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\rangle$ su prostorne. Točke $P(-\frac{\pi}{4})$, $P(\frac{\pi}{4})$, $P(\frac{3\pi}{4})$, $P(\frac{5\pi}{4})$ su svjetlosne.*

Krivulja $P : I \to \mathbb{R}^2_1$ je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna (nul)) ako je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna) u svakoj točki $P(t)$, $t \in I$, [22].

Definicija 2.3.4. *Neka je $P : I \to \mathbb{R}^2_1$ krivulja i $t \in I$. Za točku $P(t)$ kažemo da je* ***regularna*** *ako je $P'(t) \neq 0$. U suprotnom kažemo da je točka $P(t)$* ***singularna****.*
Za krivulju P kažemo da je regularna ako je točka $P(t)$ regularna za svaki $t \in I$. U suprotnom kažemo da je krivulja P singularna.

Krivulje u pseudoeuklidskoj ravnini parametriziraju se na sličan način kao i u euklidskoj ravnini.

Definicija 2.3.5. *Za prostornu (vremensku) krivulju $P : I \to \mathbb{R}^2_1$ kažemo da je jedinične brzine ili da je parametrizirana duljinom luka ako je $|P'(t)| = 1$, $\forall t$.*

Svaka regularna krivulja u pseudoeuklidskoj ravnini (bez svjetlosnih točaka) ima parametrizaciju jedinične brzine.
U svakoj regularnoj (ne svjetlosnoj) točki $P(t)$ krivulje imamo orijentirani Frenetov trobrid koji se sastoji od vektora

$$\mathbf{t}(t) = \frac{P'(t)}{|P'(t)|}, \quad n(t) = \mathbf{t}(t)^{\perp}$$

i zakrivljenost

$$k(t) = \frac{\det(P'(t), P''(t))}{|P'(t)|^3},$$

štoviše vrijedi i $sgn\ n(t) = sgn\ k(t)$, [3], [4] ,[22].
Za krivulje parametrizirane duljinom luka u svakoj regularnoj točki (koja nije svjetlosna, ni točka infleksije) vrijedi, [3]

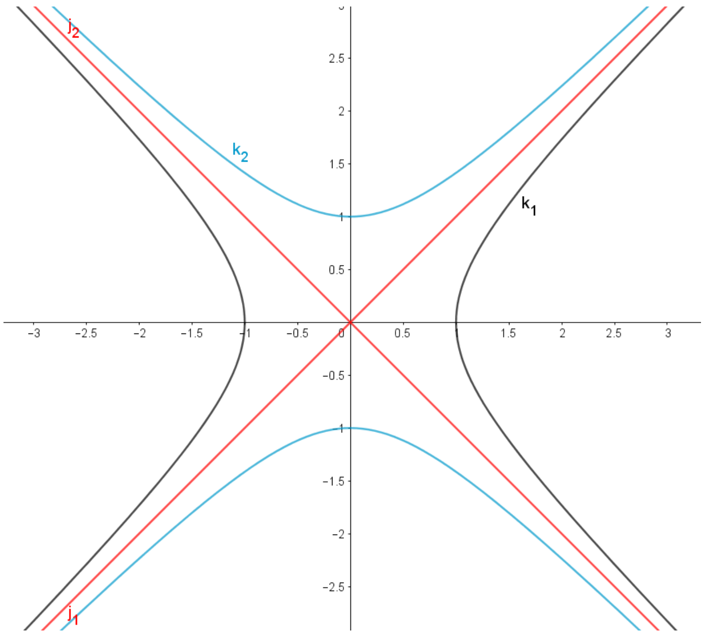
$$k(t) = \det(P'(t), P''(t))$$

$$\mathbf{t}'(t) = k(t)n(t), \quad n'(t) = k(t)\mathbf{t}(t). \tag{2.4}$$

U afinom modelu pseudoeuklidske ravnine, gdje je f beskonačno daleki pravac, a J_1, J_2 incidentne s pravcima $y = x$ i $y = -x$, kružnica (predočena kao ortogonalna hiperbola u euklidskom smislu) ima jednadžbu

$$(x_1 - s_1)^2 - (x_2 - s_2)^2 = \delta r^2,$$

gdje je $S(s_1, s_2)$ središte, r polumjer, $\delta \in \{-1, 1\}$. Ako je $\delta = 1$ sve točke kružnice u pseudoeuklidskoj ravnini su vremenske, odnosno ako je $\delta = -1$ prostorne, (vidi sl. 2.13).



Slika 2.13: Crno na slici označena je vremenska kružnica k_1 pe-ravnine, $P(t) = (\pm r\cosh t, r\sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$, polumjera 1 s središtem u $S(0,0)$, plavo je označena prostorna kružnica k_2 pe-ravnine, $P(t) = (r\sinh t, \pm r\cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$ polumjera 1 s središtem u $S(0,0)$

Jednadžba oskulacijske kružnice u proizvoljnoj točki krivulje u pseudoeuklidskoj ravnini određuje se kako slijedi:

Poznato je da ako je $P(t) = (x(t), y(t))$ parametrizirana krivulja u pe-ravnini i $P(t_0)$ njezina proizvoljna točka (koja nije svjetlosna, niti točka infleksije), središte i radijus oskulacijske kružnice krivulje u točki $P(t_0)$ dani su s, [4]

$$S = P(t_0) - \frac{1}{k(t_0)} n(t_0) \quad r = \frac{1}{|k(t_0)|}.$$

Primjer 2.3.2. *Neka je $P(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\rangle$ elipsa e u pe-ravnini. U prostornim i vremenskim točkama (vidi Primjer 2.3.1) vrijedi*

$$\mathbf{t} = \left(-\frac{\sin t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}}, \frac{\cos t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$n = \left(\frac{\cos t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}}, -\frac{\sin t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}} \right), \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle$$

$$n = \left(-\frac{\cos t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}}, \frac{\sin t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}} \right), \quad t \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\rangle$$

$$k = \frac{1}{r|\cos 2t|^{\frac{3}{2}}}$$

Središte i radijus oskulacijske pseudo-kružnice dani su s:

$$S_o = (r\cos t, r\sin t) + r\cos 2t(\cos t, -\sin t), \quad t \notin \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$r_o = r|\cos 2t|^{\frac{3}{2}}$$

Slično kao u euklidskoj ravnini do jednadžbe evolute u pseudoeuklidskoj ravnini moguće je doći na sljedeći način:

Neka je $P(t) = (x(t), y(t))$ parametrizirana krivulja u pe-ravnini, označimo s $S(a,b)$ središte zakrivljenosti dane krivulje u točki $P_0 = P(t_0)$.

Parametarska jednadžba njezine evolute imati će oblik, [4]:

$$a = x(t_0) - y'(t_0)\frac{(x'(t_0))^2 - (y'(t_0))^2}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}, \; b = y(t_0) - x'(t_0)\frac{(x'(t_0))^2 - (y'(t_0))^2}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} \tag{2.5}$$

odnosno

$$a = x(t_0) - y'(t_0)\frac{\langle P'(t_0), P'(t_0)\rangle}{\det(P'(t_0), P''(t_0))}, \quad b = y(t_0) - x'(t_0)\frac{\langle P'(t_0), P'(t_0)\rangle}{\det(P'(t_0), P''(t_0))} \tag{2.6}$$

Koristeći formule (4.1) ili (2.6) odredi se jednadžba evolute u pe-ravnini.

Prema definiciji 1.4.1 poznato je da je evoluta $E(t)$ dane krivulje $P(t)$ geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, iz čega slijedi da jednadžba evolute $E(t)$ bez svjetlosnih i bez točaka infleksije dana na slijedeći način

$$E(t) = P(t) - \frac{1}{k(t)}n(t). \tag{2.7}$$

Evoluta prostorne (odnosno vremenske) krivulje je vremenska (odnosno prostorna) krivulja, [22].

Primjerima u nastavku, određivanjem jednadžbe evolute konike u afinom modelu pseudoeuklidske ravnine, pri čemu je f beskonačno daleki pravac, a J_1, J_2 incidentne s pravcima $y = x$ i $y = -x$, potvrditi ćemo tvrdnje o redu evolute iz prethodnog poglavlja.

Primjer 2.3.3. *Odredimo jednadžbu evolute elipse u pe-ravnini zadane parametarskom jednadžbom* $P(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\rangle$.

Koristeći se formulama (4.1)

$$x'(t_0) = (r\cos t)' = -r\sin t, \quad y'(t_0) = (r\sin t)' = r\cos t,$$

$$x''(t_0) = (-r\sin t)' = -r\cos t, \quad y''(t_0) = (r\cos t)' = -r\sin t.$$

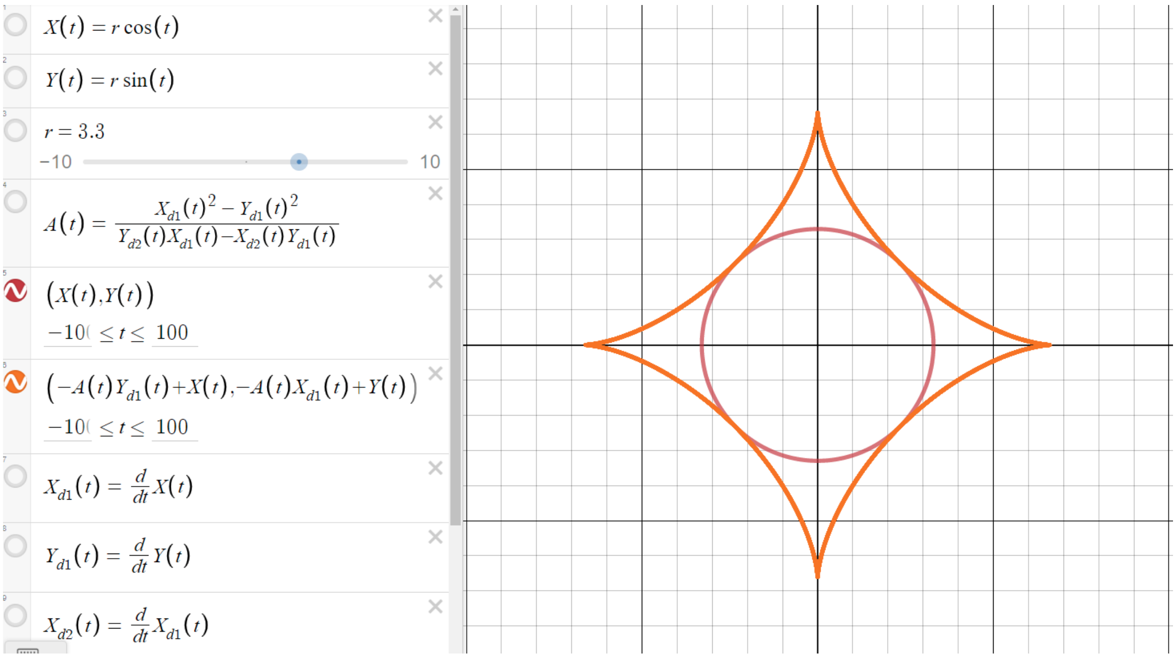
$$x(t) = r\cos t{-}r\cos t{\cdot}\frac{r^2\sin^2 t - r^2\cos^2 t}{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r\cos t{-}r\cos t\cdot\big(\sin^2 t - \cos^2 t\big)$$
$$= r\cos t + r\cos t\cdot\big(\cos^2 t - \sin^2 t\big) = r\cos t + r\cos t\cdot\big(2\cos^2 t - 1\big) = 2r\cos^3 t;$$

$$y(t) = r\sin t + r\sin t\cdot\frac{r^2\sin^2 t - r^2\cos^2 t}{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r\sin t + r\sin t\cdot\big(\sin^2 t - \cos^2 t\big)$$
$$= r\sin t - r\sin t\cdot\big(\cos^2 t - \sin^2 t\big) = r\sin t - r\sin t\cdot\big(1 - 2\sin^2 t\big) = 2r\sin^3 t$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje da je riječ o astroidi $Q(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $x^\sim = 2rx$, $y^\sim = 2ry$, (vidi sl. 2.14), stoga je očito da je riječ o krivulji 6. reda. Isključimo li parametar t, postići ćemo često upotrebljeni oblik iz koje je red evolute još jasnije vidljiv, $X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}}$.

Koristimo li se formulom (2.7) jednadžba evolute elipse u pe-ravnini glasi

$$E(t) = (r\cos t, r\sin t) + r\cos 2t\big(\cos t - \sin t\big), \quad t \notin \Big\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\Big\}.$$



Slika 2.14: Crveno zadana elipsa u afinom modelu pe-ravnine, narančasto njezina evoluta

Primjer 2.3.4. *Odredimo jednadžbu evolute specijalne parabole zadane parametarskom jednadžbom*

$$P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x'(t_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\right)' = \frac{1-2t}{\sqrt{2}}, \quad x''(t_0) = -\sqrt{2},$$

$$y'(t_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\right)' = \frac{1+2t}{\sqrt{2}}, \quad y''(t_0) = \sqrt{2},$$

$$x(t) = x(t_0) - y'(t_0)\frac{(x'(t_0))^2 - (y'(t_0))^2}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} = \frac{9\sqrt{2}}{2}t + \frac{15\sqrt{2}}{2}t^2$$

$$y(t) = y(t_0) - x'(t_0)\frac{(x'(t_0))^2 - (y'(t_0))^2}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} = \frac{9\sqrt{2}}{2}t - \frac{15\sqrt{2}}{2}t^2$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute specijalne parabole pokazuje da je riječ o krivulji 2. reda. Kako je pravac $y = -x$ os evolute, zaključujemo da je riječ također o specijalnoj paraboli, (vidi sl. 2.15) .

Slika 2.15: Crveno zadana specijalna parabola, narančasto evoluta specijalne parabole

Primjer 2.3.5. *Odredimo jednadžbu evolute parabole u pseudoeuklidskoj ravnini zadane parametarskom jednadžbom*

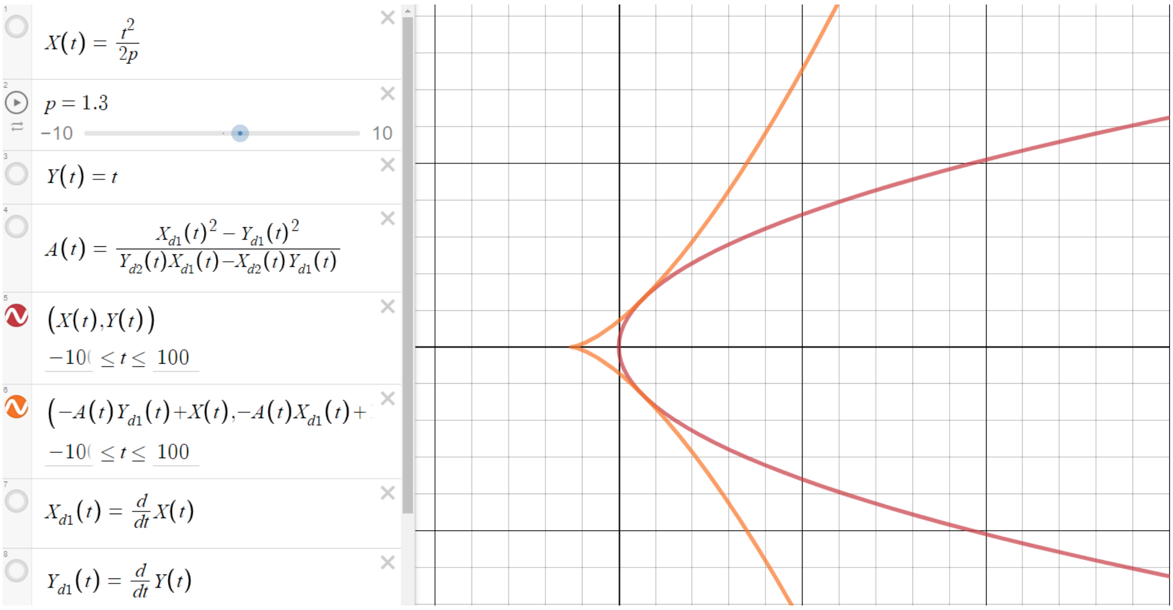
$$P(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x'(t_0) = \frac{t}{p}, \quad x''(t_0) = \frac{1}{p}, \quad y'(t_0) = 1, \quad y''(t_0) = 0$$

$$x(t) = \frac{3}{2p}t^2 - p, \quad y(t) = \frac{t^3}{p^2}$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o euklidskoj semi-kubnoj paraboli, odnosno krivulji 3. reda, (vidi sl. 2.16).



Slika 2.16: Crveno zadana parabola u pe-ravnini, narančasto evoluta parabole

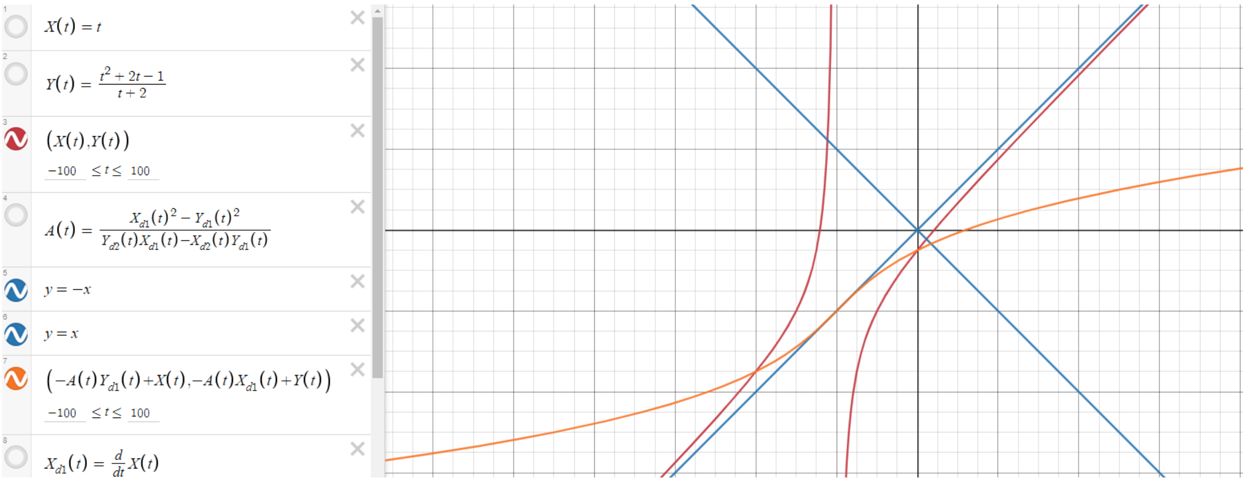
Primjer 2.3.6. *Odredimo jednadžbu evolute specijalne hiperbole h_{s1} zadane parametarskom jednadžbom*

$$P(t) = \left(t, \frac{t^2 + 2t - 1}{t + 2}\right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x(t) = -\frac{4t^3 + 27t^2 + 60t + 45}{2(t+2)^3}, \quad y(t) = -\frac{4t + 11}{2(t+2)}$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o krivulji 3. reda, (vidi sl. 2.17).



Slika 2.17: Crveno zadana specijalna hiperbola h_{s1}, narančasto njezina evoluta

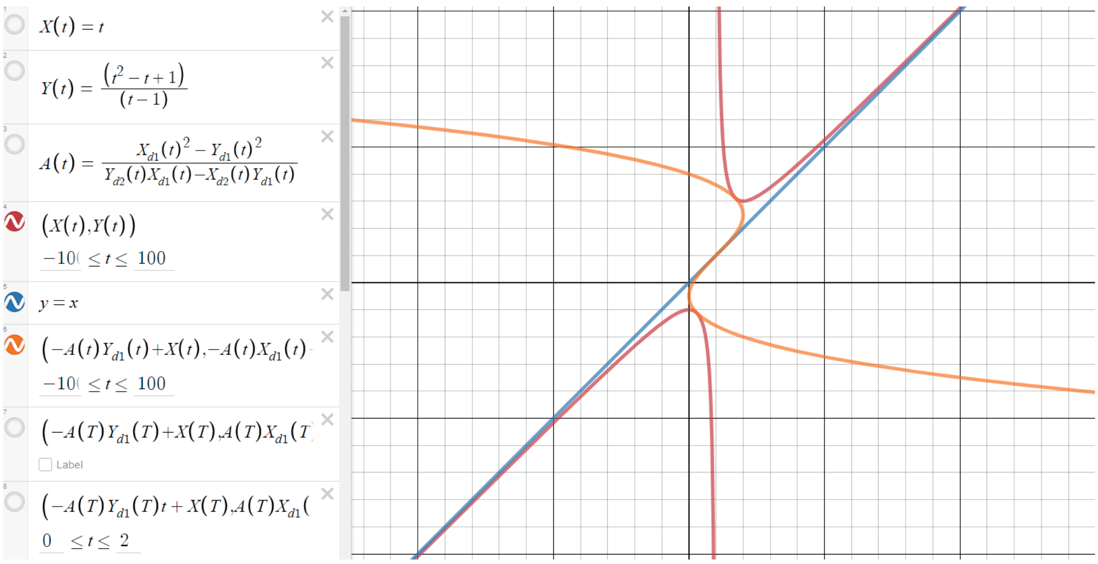
Primjer 2.3.7. *Odredimo jednadžbu evolute specijalne hiperbole h_{s2} zadane parametarskom jednadžbom*

$$P(t) = \left(t, \frac{t^2 - t + 1}{t - 1}\right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x(t) = \frac{2t^3 - 3t^2}{2(t-1)^3}, \quad y(t) = \frac{2}{(t-1)^3}$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o krivulji 3. reda, (vidi sl. 2.18).



Slika 2.18: Crveno zadana specijalna hiperbola h_{s2}, narančasto njezina evoluta

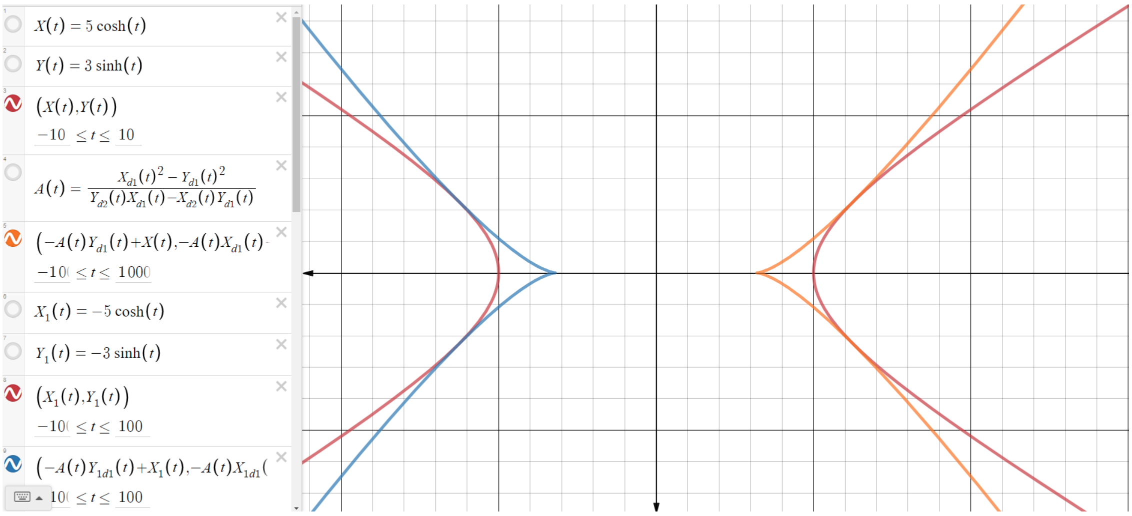
Primjer 2.3.8. *Odredimo jednadžbu evolute hiperbole h_1 zadane parametarskom jednadžbom*

$$P(t) = \Big(5\cosh t, 3\sinh t\Big), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x(t) = \frac{16\cosh^3(t)}{5}, \quad y(t) = \frac{16\sinh^3(t)}{3}$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o krivulji 6. reda, (vidi sl. 2.19).



Slika 2.19: Crveno zadana hiperbola h_1, narančasto/plava njezina evoluta

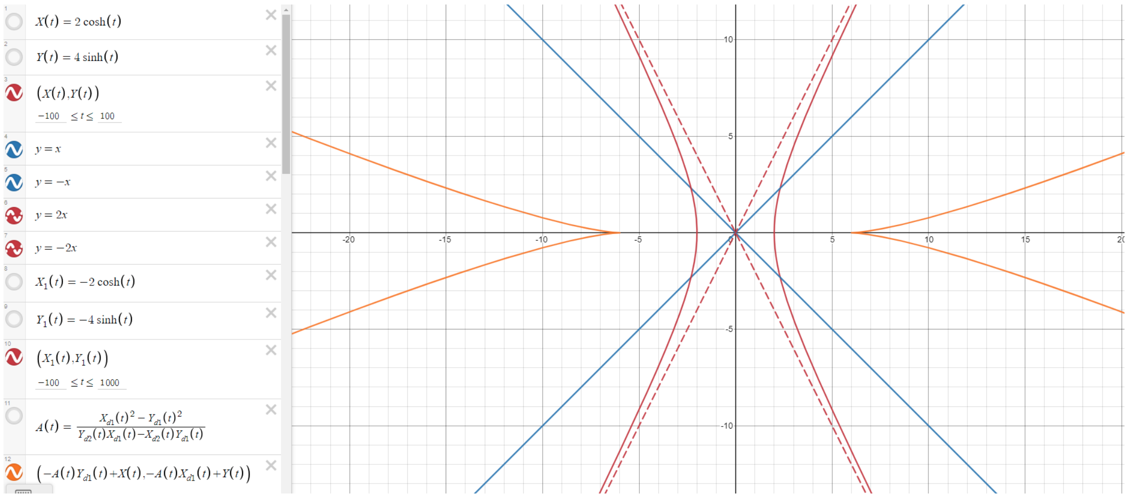
Primjer 2.3.9. *Odredimo jednadžbu evolute hiperbole h_3 zadane parametarskom jednadžbom*

$$P(t) = \Big(2\cosh t, 4\sinh t\Big), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x(t) = -6\cosh^3(t), \quad y(t) = -3\sinh^3(t)$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o krivulji 6. reda, (vidi sl. 2.20).



Slika 2.20: Crveno zadana hiperbola h_3, narančasto njezina evoluta

Primjer 2.3.10. *Odredimo jednadžbu evolute hiperbole h_2 zadane parametarskom jednadžbom*

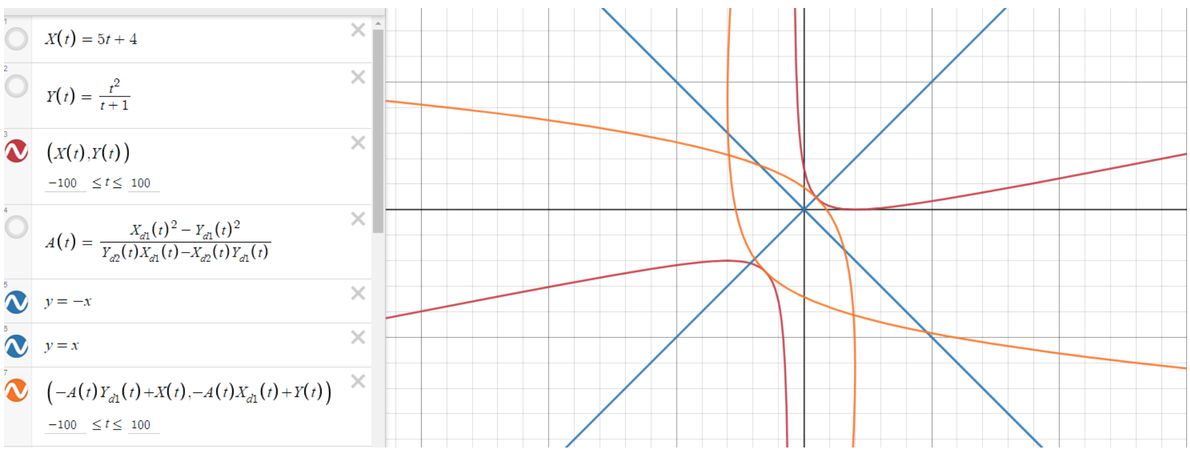
$$P(t) = \left(5t + 4, \frac{t^2}{t+1}\right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x(t) = \frac{-24t^6 + 144t^5 + 288t^4 + 202t^3 - 45t^2 - 120t - 40}{10(t-1)^3},$$

$$y(t) = \frac{-24t^4 + 96t^3 + 144t^2 + 100t + 25}{2(t+1)}$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o krivulji 6. reda, (vidi sl. 2.21).



Slika 2.21: Crveno zadana hiperbola h_2, narančasto njezina evoluta

Propozicija 2.3.1. *Neka je $P(t)$ parametrizirana krivulja u pe-ravnini i $E(t)$ njezina evoluta.*

1. *Točka $E(t_0)$ evolute je regularna točka ako i samo ako točka $P(t_0)$ nije tjeme zadane krivulje.*

2. *Ako je točka $P(t_0)$ tjeme zadane krivulje, tj. $k'(t_0) = 0$, $k''(t_0) \neq 0$, tada je točka $E(t_0)$ šiljak evolute.*

Dokaz. Neka je $E(t) = P(t) - \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t)$. Koristeći se formulama 2.4, prve tri derivacije evolute su

$$E'(t) = \frac{k'(t)}{k^2(t)}\mathbf{n}(t) \tag{2.8}$$

$$E''(t) = \frac{k'(t)}{k(t)}\mathbf{t}(t) + \left(\frac{k''(t)}{k^2(t)} - 2\frac{(k'(t))^2}{k^3(t)}\right)\mathbf{n}(t) \tag{2.9}$$

$$E'''(t) = \left(2\frac{k''(t)}{k(t)} - 3\frac{(k'(t))^2}{k^2(t)}\right)\mathbf{t}(t) + \left(k'(t) + \frac{k'''(t)}{k^2(t)} - 6\frac{k'(t)k''(t)}{k^3(t)} + 6\frac{(k'(t))^3}{k^4(t)}\right)\mathbf{n}(t). \tag{2.10}$$

1. Prva tvrdnja slijedi iz 2.8.

2. Iz prve tvrdnje znamo da ako je $P(t_0)$ tjeme krivulje, $E(t_0)$ je singularna točka evolute. Iz formula 2.9 i 2.10 druga i treća derivacija evolute u tjemenu $P(t_0)$ glasi

$$E''(t_0) = \frac{k''(t_0)}{k^2(t_0)}\mathbf{n}(t_0) \neq 0 \tag{2.11}$$

$$E'''(t_0) = 2\frac{k''(t_0)}{k(t_0)}\mathbf{t}(t_0) + \frac{k'''(t_0)}{k^2(t_0)}\mathbf{n}(t_0) \neq 0, \tag{2.12}$$

   Iz čega slijedi da su vektori $E''(t_0)$, $E'''(t_0)$ linearno nezavisni, stoga je $E(t_0)$ šiljak evolute.

□

Zanimljivo je i primjetiti sljedeću činjenicu vezanu za krivulju i njezinu evolutu.

Propozicija 2.3.2. *Neka je $P : I \to \mathbb{R}^2_1$ prostorna ili vremenska krivulja. Tada P ne siječe svoju evolutu.*

Dokaz. Propozicija 3.3. [22]. □

Ta činjenica ne vrijedi u euklidskoj ravnini.

Poglavlje 3

Kvazihiperbolična ravnina

3.1 Osnovni pojmovi

Kvazihiperbolična ravnina (qh) je projektivna ravnina $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ s hiperboličnom metrikom na pravcu i paraboličnom metrikom na pramenu [9], [25], kojoj je apsolutna figura realna degenerirana krivulja 2. stupnja, odnosno par realnih pravaca j_1 i j_2 koji se sijeku u realnoj točki F. Apsolutna figura označava se s $\mathcal{F}_{\mathbb{QH}} = \{\mathbf{j_1}, \mathbf{j_2}, \mathbf{F}\}$, pri čemu se pravci j_1 i j_2 nazivaju *apsolutnim pravcima*, a točka F *apsolutnom točkom*.

U radu će se promatrati Cayley-Kleinov model kvazihiperbolične ravnine proširen na cijelu ravninu $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ te će se nazivati *projektivno proširena kvazihiperbolična ravnina* i označavat će se s $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$.

Definicija 3.1.1. *Pravci ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ koji su incidentni s apsolutnom točkom F nazivaju se **izotropnim pravcima**.*
*Točke ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ koje su incidentne s apsolutnim pravcem j_1 ili j_2 nazivaju se **izotropnim točkama**.*
*Dvije točke ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ nazivaju se **paralelnima** ako su incidentne s istim izotropnim pravcem.*
*Dvije točke ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ nazivaju se **okomitima** ako leže na paru izotropnih pravaca koji su u harmonitetu s apsolutnim pravcima j_1 i j_2.*

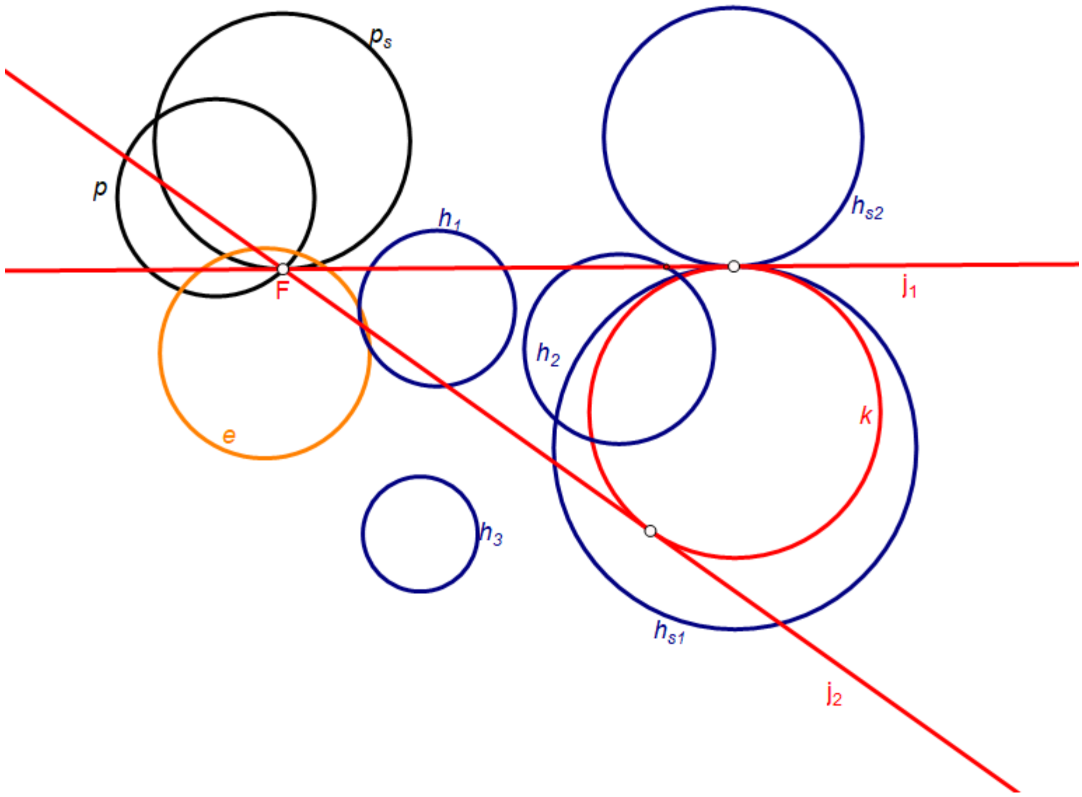
Hiperbolična involucija na pramenu pravaca (F) kojoj su apsolutni pravci fiksni pravci naziva se *apsolutna involucija*. Kako fiksni pravci neke involucije zajedno s bilo kojim parom pridruženih pravaca čine harmoničku četvorku pravaca, [9], [25], slijedi da je apsolutnom involucijom određena okomitost točaka u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Stoga prema [9], apsolutna involucija je cirkularna involucija kvazihiperbolične ravnine.

S obzirom na položaj krivulje 2. razreda u odnosu na apsolutnu figuru kvazihiperbolične ravnine razlikujemo 9 tipova krivulja 2. razreda (vidi sl. 3.1)[3], [9], [25]:

- *hiperbola* - krivulja 2. razreda koja ima par realnih i različitih izotropnih pravaca, a s obzirom na njen položaj spram apsolutne figure razlikujemo sljedećih 5 tipova hiperbola:
  - *hiperbola* h_1 - siječe svaki od apsolutnih pravaca u dvije realne i različite točke,
  - *hiperbola* h_2 - siječe jedan apsolutni pravac u dvije realne i različite točke, a drugi u paru konjugirano imaginarnih točaka,
  - *hiperbola* h_3 - siječe svaki od apsolutnih pravaca u paru konjugirano imaginarnih točaka,
  - *specijalna hiperbola* h_{s_1} - hiperbola kojoj je jedan od izotropnih pravaca apsolutan, a drugi ju apsolutni pravac siječe u dvije realne i različite točke,
  - *specijalna hiperbola* h_{s_2} - hiperbola kojoj je jedan od izotropnih pravaca apsolutan, a drugi ju apsolutni pravac siječe u paru konjugirano imaginarnih točaka,
- *kružnica* k - krivulja 2. razreda kojoj su izotropni pravci apsolutni pravci,
- *elipsa* e - realna ili imaginarna krivulja 2. razreda koja ima par konjugirano imaginarnih izotropnih pravaca,
- *parabola* p - krivulja 2. razreda koja prolazi apsolutnom točkom, te ima samo jedan izotropni pravac, odnosno njezini izotopni pravci se podudaraju,
  - *specijalna parabola* p_s - parabola kojoj je izotropni pravac apsolutan.

Zbog specifičnosti apsolutne figure, s apsolutnom točkom F u konačnosti svaku od devet tipova konika, bez smanjenja općenitosti, moguće je predočiti bilo kojim tipom euklidske konike. Zbog konstruktivnih razloga predočit ćemo je euklidskom kružnicom.

[3]Radi preglednosti slike razredne krivulje su prikazane pripadnom dualnom rednom krivuljom.



Slika 3.1: Tipovi krivulja 2. razreda u projektivnom modelu $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$

Uz konike u kvazihiperboličnoj ravnini vezani su i sljedeći pojmovi, [25]:

Centrala ili glavni promjer krivulje 2. razreda je polara apsolutne točke F s obzirom na krivulju. Centrala konike je analogon središta konike u euklidskoj ravnini i dual središta konike u pseudoeuklidskoj ravnini. Sve konike, osim parabole imaju realnu neizotropnu centralu. Centrala parabole je njena izotropna tangenta.

Analogon euklidskog promjera konike bila bi svaka točka centrale kao pol nekog od izotropnih pravaca. Parovi konjugiranih točaka na centrali konike čine involutoran niz točaka koji je dualni analogon parova konjugiranih promjera konike pseudoeuklidske ravnine. Onaj par konjugiranih točaka na centrali, koji su međusobno okomiti zovemo **središtima konike**. Konika općenito ima dva središta koja mogu biti realna i različita, konjugirano imaginarna ili padaju zajedno. Središta su dualni analogoni osi euklidske i pseudoeuklidske konike. Oba središta parabole incidentna su s apsolutnom točkom, dok se kod kružnice sve točke na njenoj centrali mogu smatrati njenim središtima jer su svi parovi konjugiranih točaka na njezinoj centrali međusobno okomite točke. Dualno je to činjenici da su svi parovi konjugiranih promjera euklidske i pseudoeuklidske kružnice međusobno okomiti.

Osim centrale, konika ima još dva sporedna **izotropna promjera**. To su spojnice njezinih središta s apsolutnom točkom F. Dakle, konika općenito ima tri promjera i svi su oni međusobno okomiti. Parabola i kružnica imaju uz centralu i beskonačno mnogo sporednih promjera.

Direktrise ili ravnalice konike spojnice su njezinih sjecišta s apsolutnim pravcima. Općenito konika ima četiri ravnalice i one su duali pseudoeuklidskih fokusa konike. Mogu biti sve četiri realne ili u parovima konjugirano imaginarne. Specijalna hiperbola h_{s1} ima dvije realne dvostruke, a h_{s2} par imaginarnih dvostrukih direktrisa, dok kružnica ima jednu četverostruku direktrisu.

Pol direktrise nazivamo **fokusom**, a konika ih ima jednako koliko i direktrisa.

Tjemena konike sjecišta su konike s njezinim osima kao i u euklidskoj i pseudoeuklidskoj ravnini. Tjeme je takva točka konike u kojoj ona ima hiperoskulacijsku kružnicu, a pokazuje se da konika može imati četiri, dva, jedno ili nijedno realno tjeme.

Središtu zakrivljenosti euklidske konike analogno se definira **centrala zakrivljenosti** konike u qh-ravnini. To je centrala one kružnice, koja oskulira koniku u određenoj točki. Kao što se krivulja središta zakrivljenosti i omotaljka normala euklidske konike podudaraju, u qh-ravnini će se podudarati njihovi analogoni.

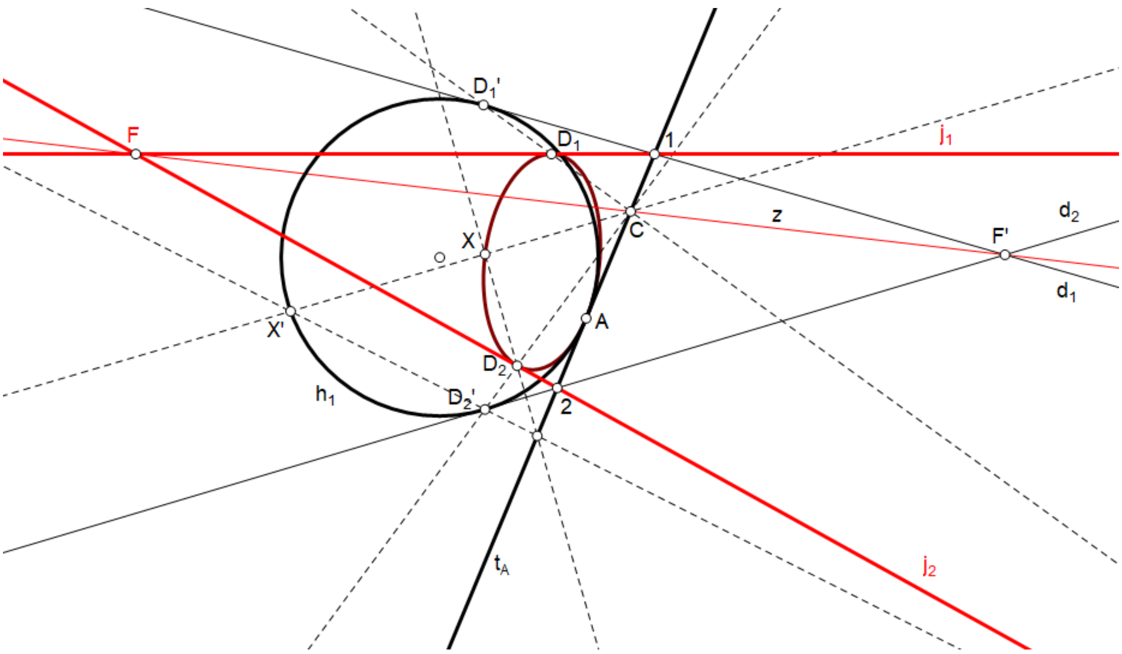
Napomena 3.1.1. *Iako se u qh-ravnini u osnovi promatraju razredne krivulje, tjemena se definiraju kao karakteristične točke redne konike.*

3.2 Oskulacijske kružnice i evolute konika u kvazihiperboličnoj ravnini

3.2.1 Konstrukcija oskulacijske kružnice konike

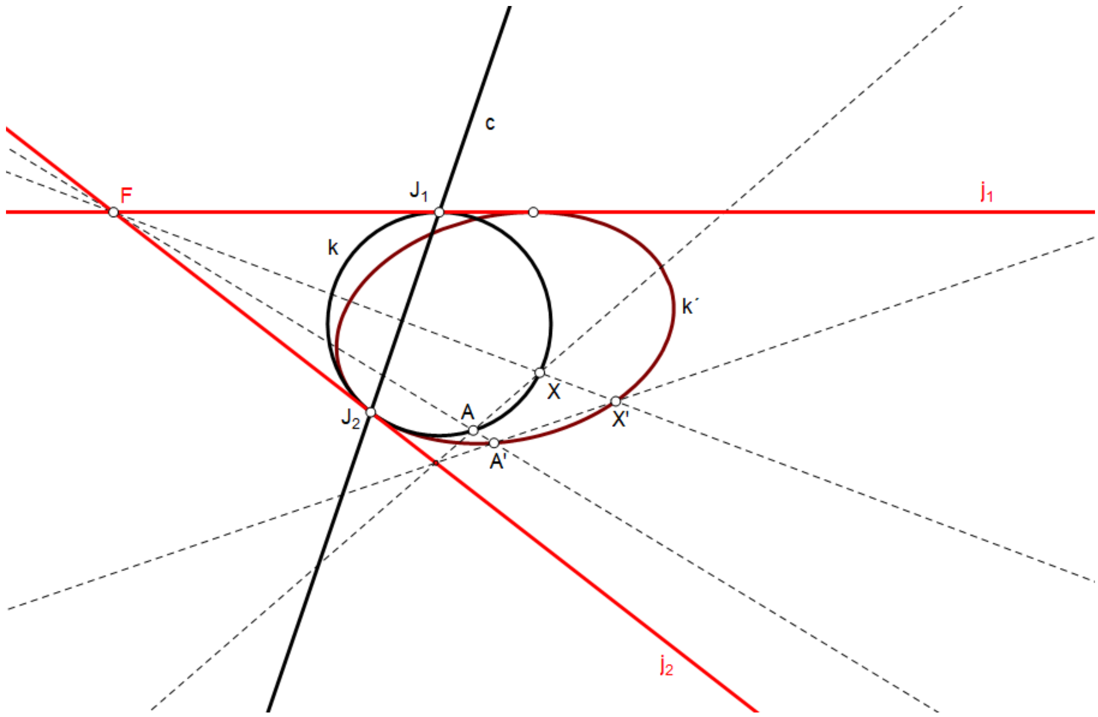
Neka je zadana qh-konika h_1. Koristeći elaciju konstruirat ćemo qh-kružnicu (u nastavku kružnicu) koja oskulira zadanu qh-koniku h_1 u njezinoj proizvoljnoj točki.
Neka je A po volji odabrana točka qh-konike h_1 i t_A tangenta u njoj. Za os perspektivne kolineacije, odnosno elacije izaberemo tangentu t_A. Neka su točke 1 i 2 sjecišta tangenata j_1 i j_2 tražene kružnice s osi elacije t_A. Točkama 1 i 2 prolaze tangente d_1 i d_2 zadane qh-konike h_1. Sjecište F', tangenata d_1 i d_2, u elaciji je pridruženo apsolutnoj točki F, pa je spojnica FF' zraka elacije koja siječe os u središtu C elacije. Diralištima $D_1{}'$ i $D_2{}'$ pridružene su točke D_1 i D_2. Točke D_1 i D_2 dirališta su tražene oskulacijske kružnice (vidi sliku 3.2).

Na ovaj način moguće je konstruirati oskulacijsku kružnicu u općoj točki svake konike u qh-ravnini.



Slika 3.2: Konstrukcija oskulacijske kružnice hiperbole h_1

Napomena 3.2.1. *Posebno je zanimljivo istaknuti da se u qh-ravnini i dvije qh-kružnice mogu međusobno oskulirati i to u izotropnom diralištu. Neka je zadana qh-kružnica* k*, qh-kružnica* k' *koja ju oskulira u izotropnom diralištu* J_2 *konstruira se perspektivnom kolineacijom (elacijom)* (F, j_2, A, A')*, gdje je* F *središte kolineacije, apsolutni pravac* j_2 *os kolineacije, a točki* A *na zadanoj kružnici* k *po volji je pridružena točka* A' *na zraci* FA *(vidi sliku 3.3). Uočimo da postoji beskonačno mnogo takvih kružnica i one čine pramen oskulacijskih kružnica. Međusobna oskulacija dviju kružnica ne postoji u euklidskoj niti u pseudoeuklidskoj ravnini.*



Slika 3.3: Konstrukcija oskulacijske qh-kružnice k' qh-kružnice k

3.2.2 Evolute konika u kvazihiperboličnoj ravnini

Definicija 3.2.1. *Evoluta konike qh-ravnine je skup točaka na tangentama qh-konika koje su okomite na dirališta oskulacijskih qh-kružnica, istovremeno evoluta je omotaljka centrala oskulacijskih qh-kružnica.*

Neka je u qh-ravnini zadana neka konika c (krivulja drugog razreda) i njezina proizvoljna tangenta t s diralištem u točki X. Neka su J_1 i J_2 sjecišta tangente t s apsolutnim pravacima j_1 i j_2. Točke X i X_1 na tangenti t međusobno su okomite ako čine harmonijsku četvorku s točkama J_1 i J_2. Evoluta zadane qh-konike je skup svih točaka X_1 na tangentama qh-konike koje su okomite na odgovarajuće dirалиšte X.

Teorem 3.2.1. *U kvazihiperboličnoj ravnini evoluta konike općenito je krivulja četvrtog reda i šestog razreda.*

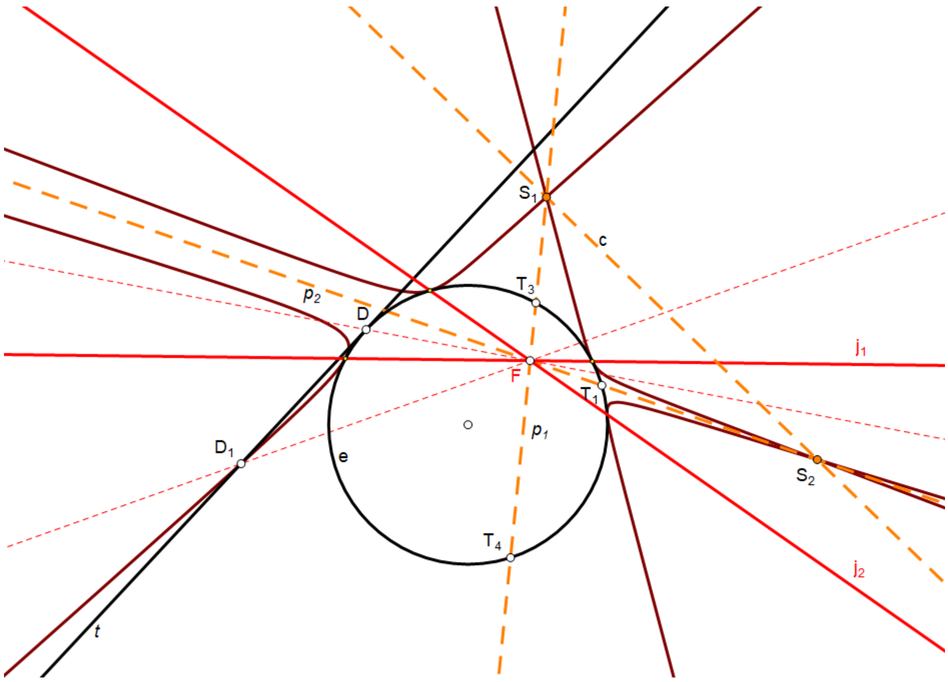
Dokaz. Evoluta je proizvod pramena 2. razreda, zadane qh-konike c, i pramena pravaca prvoga razreda s vrhom u apsolutnoj točki F. Svakoj tangenti t qh-konike c pridružen je jedan pravac x_1 iz pramena (F) koji prolazi točkom X_1 koja je pridružena diralištu X tangente t u harmonitetu (J_1J_2, XX_1). Obrnuto, svakom pravcu x_1 iz (F) pridružene su dvije tangente t, t' qh-konike c koje diraju tu qh-koniku u njenim sjecištima X, X' s pravcem x pridruženom pravcu x_1 u harmonitetu (j_1j_2, xx_1). Primjenom Chaslesove relacije [6], [30], rezultat toga pridruženja je krivulja 4. reda. □

Poznato je da ako racionalnu krivulju 4. reda upišemo u trokut tako da mu se vrhovi poklapaju s tri dvostruke točke te krivulje, kvadratnom transformacijom dobijemo krivulju 2. reda, [23]. Suprotno, ako transformirana krivulja 2. reda, (npr. kružnica) siječe bilo koju stranicu spomenutog trokuta u dvijema točkama, tada odgovarajuća krivulja 4. reda mora imati, prema svojstvu kvadratne transformacije, u suprotnom vrhu tog trokuta dvije tangente, dakle čvornu točku. Ako spomenute dvije točke padnu u jednu, tada padaju zajedno i odgovarajuće tangente, pa prema tome krivulja 4. reda u vrhu trokuta ima šiljak. Ako su sjecišta krivulje 2. reda sa stranicom trokuta imaginarna, suprotni vrh trokuta biti će izolirana dvostruka točka krivulje 4. reda. Osobitosti oblika te krivulje ovise također i o tome da li krivulja 2. reda siječe stranice trokuta ili njihove produžetke [23].

Kod evolute qh-konika, apsolutna točka F i središta qh-konike S_1, S_2 dvostruke su točke evolute. Dvostruke točke vrhovi su autopolarnog trovrha.

Evoluta elipse e i hiperbola h_1, h_2 i h_3 u kvazihiperboličnoj ravnini neraspadnuta je krivulja četvrtog reda s tri dvostruke točke. Evoluta specijalnih hiperbola h_{s1} i h_{s2}, te parabole p je raspadnuta krivulja 4. reda na krivulje trećeg reda i pravac (niz točaka). U slučaju specijalne parabole p_s evoluta je raspadnuta krivulja 4. reda na krivulju drugog reda i dva puta brojeni pravac, (vidi Tablicu 3.1).

Evoluta elipse e je algebarska krivulja 4. reda i 6. razreda. Apsolutna točka F i središta konike S_1, S_2 dvostruke su točke evolute, (vidi sl. 3.4). Prema gore opisanom svojstvu kvadratne transformacije S_1, S_2 čvorne su točke, dok je F izolirana dvostruka točka. Zaključujemo da evoluta elipse potvrđuje tvrdnje iz prethodna dva poglavlja.

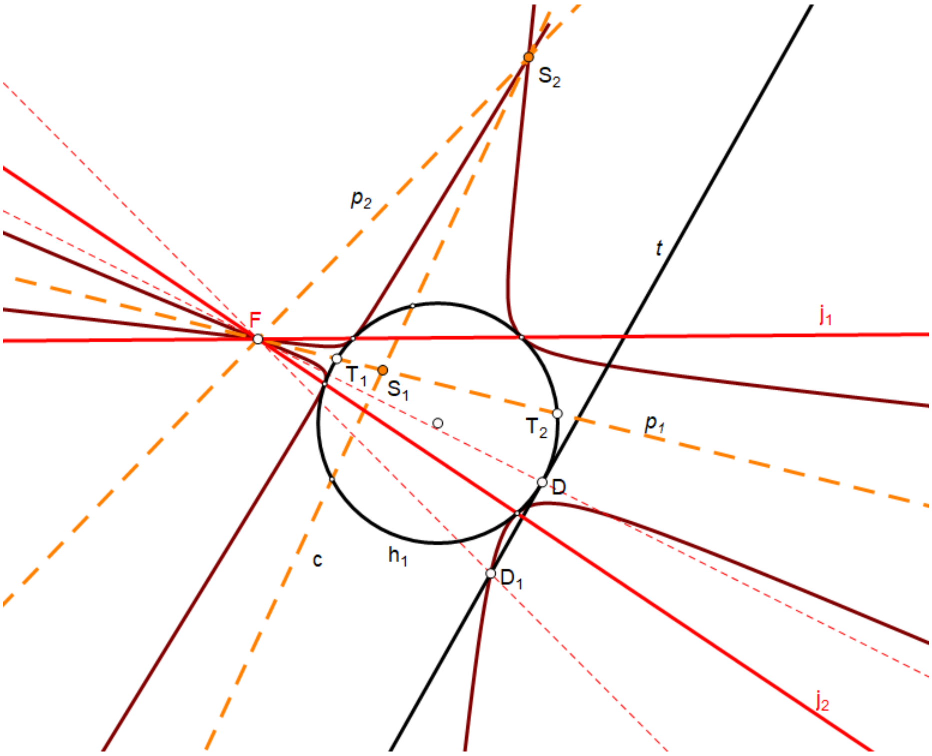


Slika 3.4: Evoluta (smeđe) elipse e u kvazihiperboličnoj ravnini

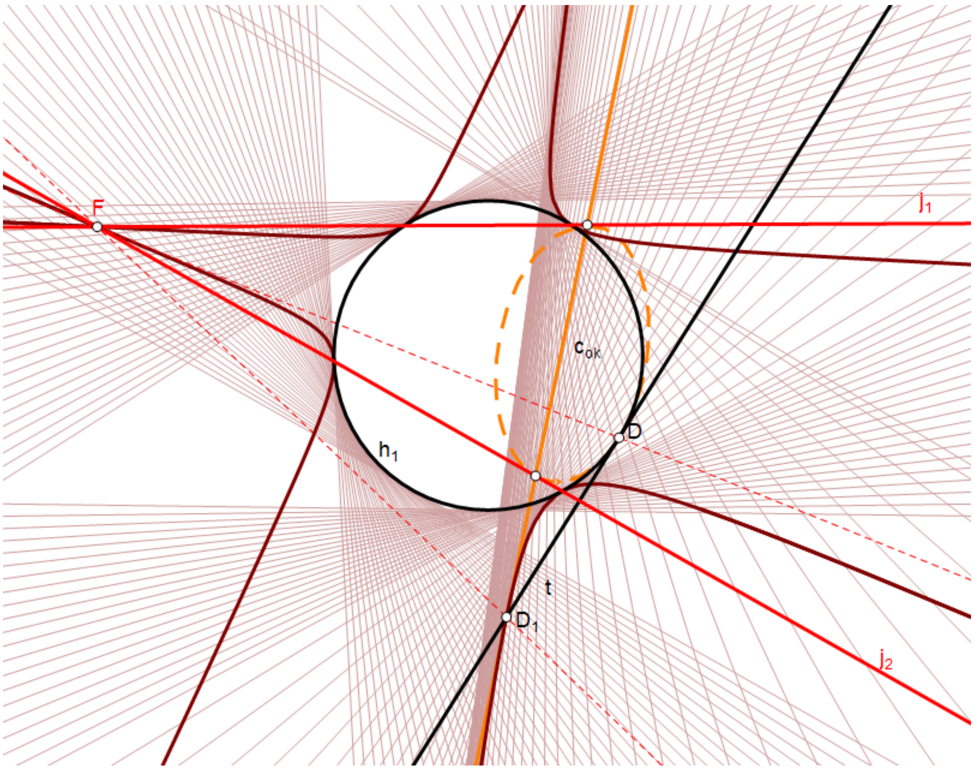
Evoluta hiperbole h_1 je algebarska krivulja 4. reda i 6. razreda. Apsolutna točka F i središta konike S_1, S_2 dvostruke su točke evolute, (vidi sl. 3.5, 3.6). Prema svojstvu kvadratne transformacije, F i jedno središte S_2 čvorne su točke. Zaključujemo da evoluta hiperbole h_1 ne odstupa od očekivanog u usporedbi s prethodna dva poglavlja.

Evoluta hiperbole h_2 je algebarska krivulja 4. reda i 6. razreda. Apsolutna točka F i imaginarna središta konike S_1, S_2 dvostruke su točke evolute, (vidi sl. 3.7).
Zaključujemo da evoluta hiperbole h_2 potvrđuje tvrdnje iz prethodna dva poglavlja.

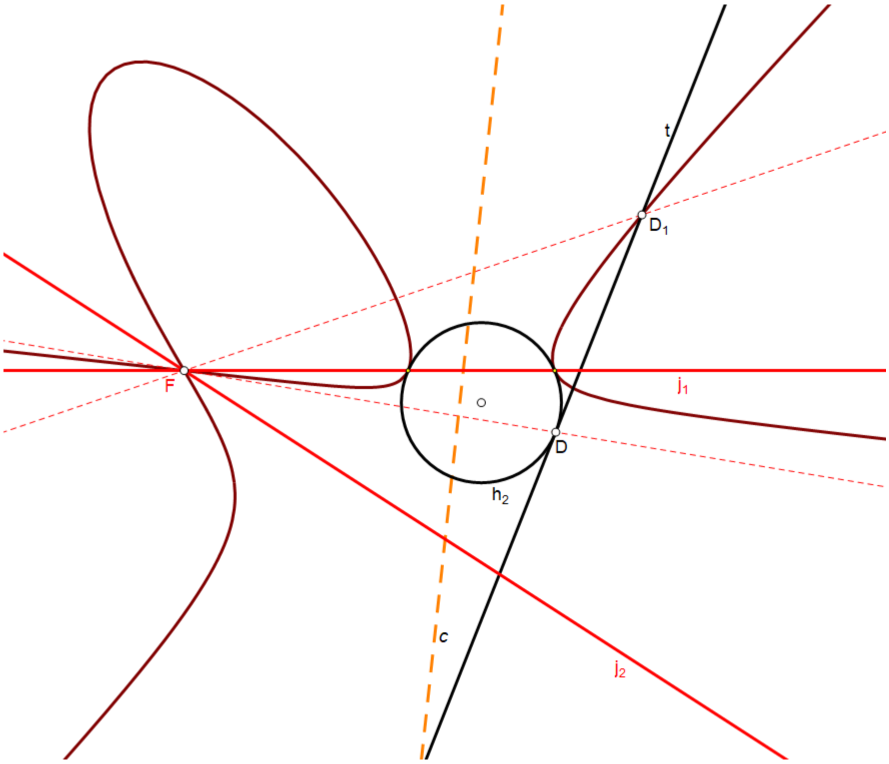
Evoluta hiperbole h_3 je algebarska krivulja 4. reda i 6. razreda. Apsolutna točka F i središta konike S_1, S_2 dvostruke su točke evolute, (vidi sl. 3.8). Prema svojstvu kvadratne



Slika 3.5: Evoluta (smeđe) hiperbole h_1 u kvazihiperboličnoj ravnini

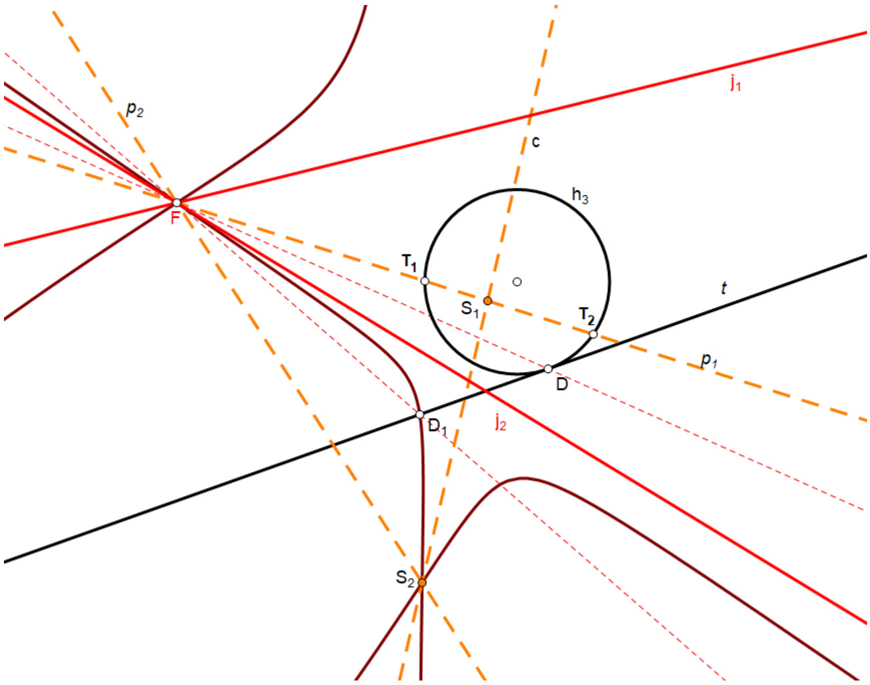


Slika 3.6: Evoluta (smeđe) hiperbole h_1 prikazana i kao omotaljka centrala oskulacijskih kružnica



Slika 3.7: Evoluta (smeđe) hiperbole h_2 u kvazihiperboličnoj ravnini

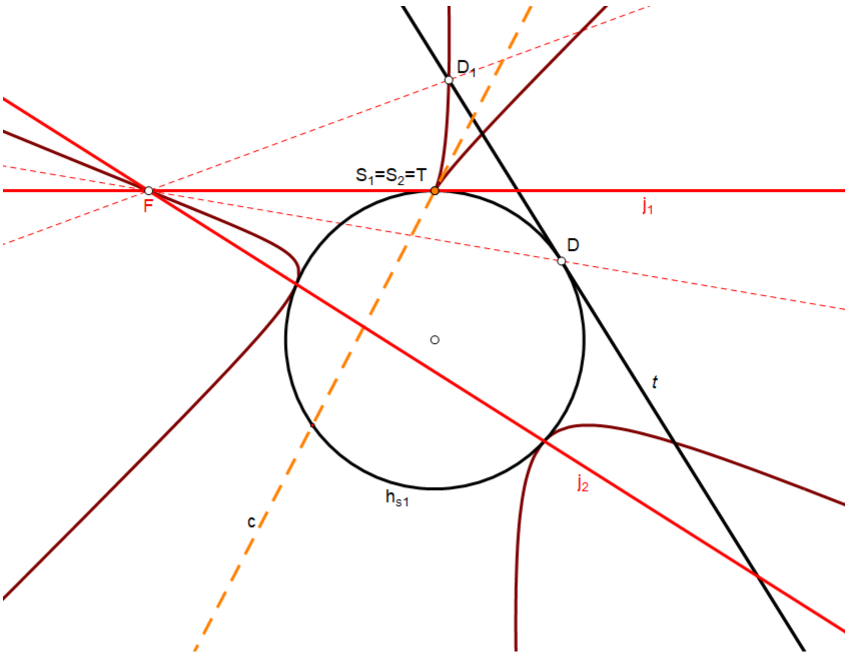
transformacije, F i jedno središte S_2 čvorne su točke. Zaključujemo da evoluta hiperbole h_3 ne odstupa od očekivanog u usporedbi s prethodna dva poglavlja.



Slika 3.8: Evoluta (smeđe) hiperbole h_3 u kvazihiperboličnoj ravnini

Evoluta sljedećih qh-konika raspadnuta je krivulja 4. reda na krivulje nižih redova.

Evoluta specijalne hiperbole h_{s1} je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Dakle, kubika sa šiljkom. Qh-konika h_{s1} na apsolutnom pravcu j_1 ima izotropno dvostruko središte, ista točka odgovara i četverostrukom tjemenu qh-konike h_{s1}, $S_1 = S_2 = T$, ona je šiljak evolute, (vidi sl. 3.9). Budući da specijalna hiperbola h_{s1} dira apsolutni pravac j_1 u točki $S_1 = S_2 = T$, koji je dvostruki pravac hiperbolične cirkularne involucije na pramenu pravaca (F), sve izotropne točke na njemu međusobno su okomite, stoga je pravac j_1 (niz točaka) dio raspada krivulje 4. reda.

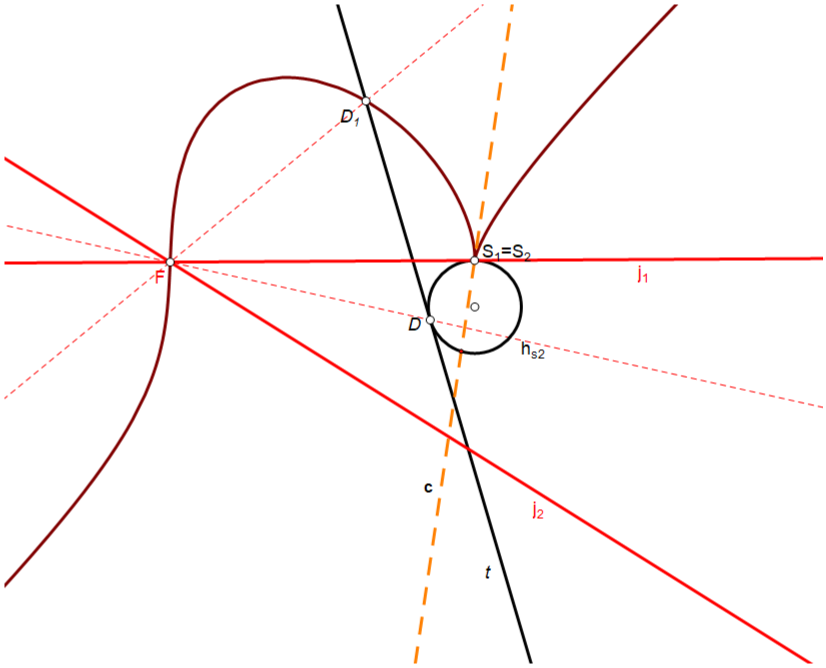


Slika 3.9: Evoluta (smeđe) hiperbole h_{s1} u kvazihiperboličnoj ravnini

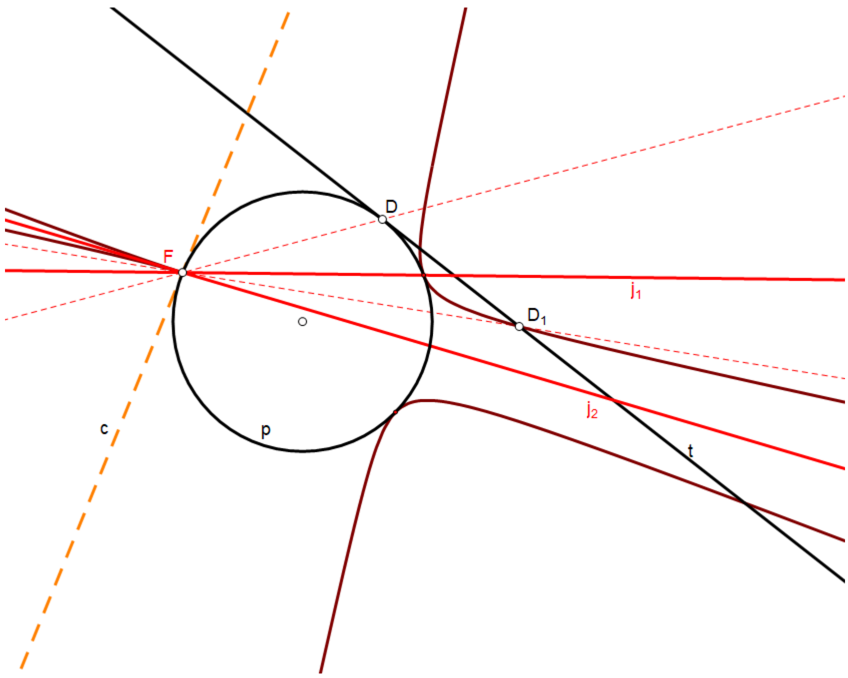
Evoluta specijalne hiperbole h_{s2} je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Dakle, kubika sa šiljkom. Qh-konika h_{s2} ima izotropno dvostruko središta $S_1 = S_2$ i četverostruko tjeme u istoj točki, koja je šiljak evolute, (vidi sl. 3.10). Budući da specijalna hiperbola h_{s2} dira apsolutni pravac j_1 u točki $S_1 = S_2 = T$, koji je dvostruki pravac hiperbolične cirkularne involucije na pramenu pravaca (F), sve izotropne točke na njemu međusobno su okomite, stoga je pravac j_1 (niz točaka) dio raspada krivulje 4. reda.

Evoluta parabole p je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Centrala parabole je njezina izotropna tangenta u apsolutnoj točki F. Oba središta parabole nalaze su u apsolutnoj točki, stoga konika ima beskonačno mnogo sporednih promjera. Apsolutna točka F je šiljak njezine evolute (vidi sl. 3.11).

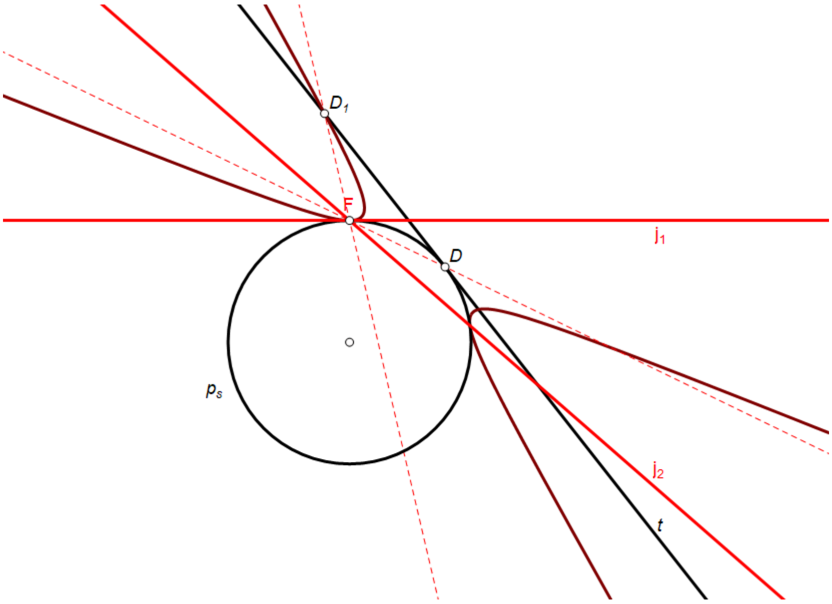
Evoluta specijalne parabole p_s je algebarska krivulja 2. reda i 2. razreda, (vidi sl. 3.12). Apsolutni pravac j_1 centrala je konike. Budući da specijalna parabola dira apsolutni pravac j_1 u apsolutnoj točki F dva puta brojeni niz točaka na pravcu j_1 dio je raspada krivulje 4. reda.



Slika 3.10: Evoluta (smeđe) hiperbole h_{s2} u kvazihiperboličnoj ravnini



Slika 3.11: Evoluta (smeđe) parabole p u kvazihiperboličnoj ravnini



Slika 3.12: Evoluta (smeđe) specijalne parabole p_s u kvazihiperboličnoj ravnini

Tablica 3.1

evoluta koje qh-konike	red	razred	rod	broj dvostrukih točaka	broj šiljaka	broj infleksionih točaka
e	4	6	0	3	0	6
h_1	4	6	0	3	0	6
h_2	4	6	0	3	0	6
h_3	4	6	0	3	0	6
h_{s1}	3	3	0	0	1	1
h_{s2}	3	3	0	0	1	1
p	3	3	0	0	1	1
p_s	2	2	0	0	0	0

Poglavlje 4

Kvazieliptična ravnina

4.1 Osnovni pojmovi

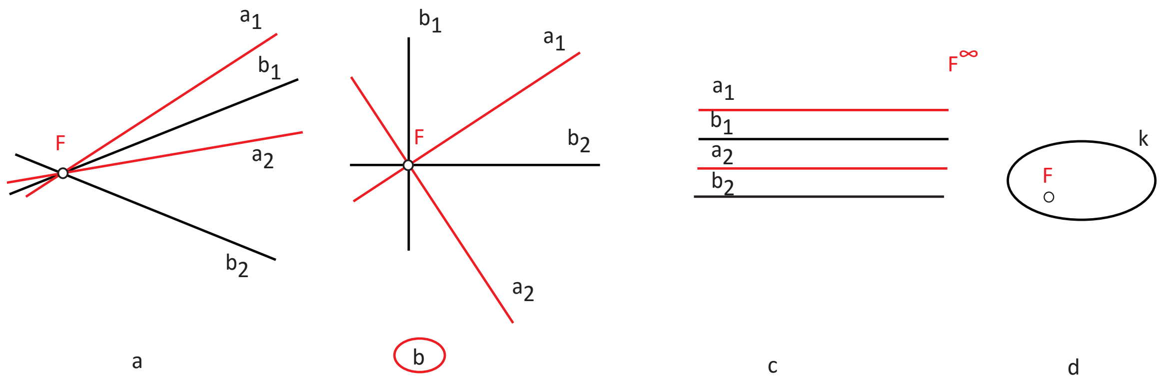
Kvazieliptična ravnina (qe) je projektivna ravnina $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ s eliptičnom metrikom na pravcu i paraboličnom metrikom na pramenu koju inducira apsolutna figura $\mathcal{F}_{\mathbb{QE}} = \{\mathbf{F}, \mathbf{j_1}, \mathbf{j_2}\}$, gdje je F realno sjecište para konjugirano imaginarnih pravaca j_1 i j_2 [26]. Pravci j_1 i j_2 nazivaju se *apsolutnim pravcima*, a točka F *apsolutnom točkom.*

Ova je ravnina dualna euklidskoj ravnini u kojoj apsolutnu figuru $\mathcal{F}_{\mathbb{QE}} = \{\mathbf{F}, \mathbf{j_1}, \mathbf{j_2}\}$ čini par konjugirano-imaginarnih točaka J_1 i J_2 i njihova realna spojnica f. Zbog spomenute dualnosti euklidske i kvazieliptične ravnine (dalje u tekstu e-ravnina i qe-ravnina) pogodno je pravac smatrati osnovnim elementom, a točku pramenom pravaca. Primjerice, krivulja je tvorevina (omotaljka) pravaca, a kvadratnom transformacijom se točka odnosno pramen pravaca preslikava u krivulju drugoga razreda, ovakva dualnost može se primijetiti i u slučaju qh-ravnine i pe-ravnine.

Uređenu trojku $\mathcal{F}_{\mathbb{QE}} = \{\mathbf{F}, \mathbf{j_1}, \mathbf{j_2}\}$, moguće je pomoću eliptičnog involutornog pramena pravaca (F) zadati na sljedeće načine:

1. Pravci j_1 i j_2 dvostruke su zrake eliptičnog involutornog pramena (F) zadanog dvama parovima pridruženih pravaca a_1, a_2; b_1, b_2. Točka F može biti u konačnosti (sl. 4.1 a) pri čemu pridruženi pravci mogu biti međusobno okomiti u euklidskom smislu (sl. 4.1 b) ili beskonačno daleko (sl. 4.1 c).

2. Pravci j_1 i j_2 tangente su po volji odabrane konike položene točkom F koja se nalazi u njezinoj nutrini (sl. 4.1 d).



Slika 4.1: Četiri načina na koja je moguće pomoću eliptičkog involutornog pramena pravaca (F) zadati uređena trojka $\mathcal{F}_{\mathbb{QE}} = \{\mathbf{F}, \mathbf{j_1}, \mathbf{j_2}\}$

Osobito praktičnim pokazat će se takav model qe-ravnine u kojemu su pridruženi parovi pravaca a_1, a_2; b_1, b_2 međusobno okomiti u euklidskom smislu (sl. 4.1 b) jer u tom slučaju apsolutni pravci j_1, j_2 prolaze apsolutnim točkama e-ravnine, taj model koristi se u ovom radu.

Definicija 4.1.1. *Pravci qe-ravnine incidentni s apsolutnom točkom F nazivaju se* ***izotropnim pravcima****. Točke qe-ravnine incidentne s apsolutnim pravcima j_1 i j_2 nazivaju se* ***izotropnim točkama*** *(imaginarne su).*
Dvije točke qe-ravnine nazivaju se ***paralelne točke*** *ako su incidentne s istim izotropnim pravcem. Dvije točke qe-ravnine nazivaju se međusobno* ***okomite točke*** *ako se nalaze na pridruženim pravcima eliptične cirkularne involucije (F).*

Točka F paralelna je sa svim točkama i okomita na sve točke qe–ravnine.
U qe-ravnini nema realnih paralelnih pravaca, a za dva pravca reći ćemo da su međusobno okomiti samo onda ako je jedan od njih izotropan.

Konike qe-ravnine se u projektivnom smislu ne razlikuju od konika euklidske ravnine, (vidi sl. 4.2)[4]. To su krivulje drugoga razreda, koje se prema položaju spram apsolutne figure razvrstavaju u četiri tipa, [26]:

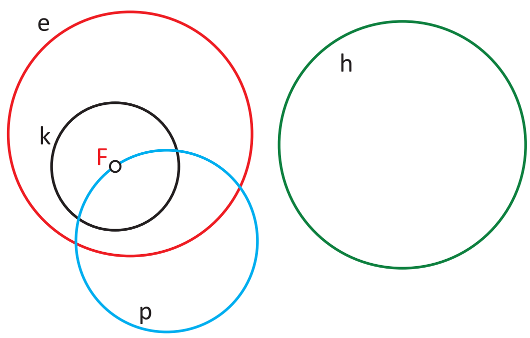
- *Hiperbola h* qe-ravnine je krivulja 2. razreda koja ima par realnih i različitih izotropnih pravaca. Ako su izotropni pravci hiperbole pridruženi pravci apsolutne

[4]Radi preglednosti slike razredne krivulje su prikazane pripadnom dualnom rednom krivuljom.

involucije, radi se o specijalnoj hiperboli koja je dualna tzv. ortogonalnoj hiperboli euklidske ravnine.

- *Elipsa* e qe-ravnine je krivulja 2. razreda koja ima par konjugirano imaginarnih izotropnih pravaca.
- *Parabola* p qe-ravnine je krivulja 2. razreda koja ima samo jedan izotropni pravac, odnosno izotopni pravci se podudaraju.
- *Kružnica* k qe-ravnine je specijalna elipsa, krivulja 2. razreda kojoj su izotropni pravci apsolutni pravci. U ovdje korištenom modelu bit će to sve one konike kojima je apsolutna točka F (euklidski) fokus.

U projektivnom modelu qe-ravnine, bez smanjenja općenitosti, svi oblici euklidskih konika mogu predstavljati pojedinu qe-koniku. Zbog konstruktivnih razloga najčešće se koristi euklidska kružnica.



Slika 4.2: Tipovi krivulja drugog razreda u projektivnom modelu qe-ravnine

Uz konike u kvazieliptičnoj ravnini vezani su i sljedeći pojmovi, [26]:
Glavni promjer ili centrala konike je polara apsolutne točke F. Centrala je dual središta konike u e-ravnini. Elipsa, hiperbola i kružnica imaju realnu neizotropnu centralu. Centrala parabole je njezin izotropni pravac.
Dual euklidskog promjera konike bila bi svaka točka centrale kao pol nekog od izotropnih pravaca. Onaj par točaka na centrali, koji je međusobno okomit i konjugiran u odnosu na koniku zovemo **središtima konike**. Elipsa i hiperbola imaju po dva realna i različita središta, a u slučaju parabole oba središta padaju u točku F. Središta su dualni analogoni osi euklidske konike. Kružnica ima beskonačno mnogo središta jer svaki par konjugiranih točaka na centrali kružnice međusobno su okomite točke. To odgovara dualnoj činjenici

da se svi promjeri kružnice u euklidskoj ravnini smatraju njezinim osima. Osim glavnog promjera ili centrale, elipsa i hiperbola imaju još dva **sporedna (izotropna) promjera**. To su spojnice njezinih središta s apsolutnom točkom F.

Tjemeni pravci konike su pravci koji prolaze njezinim središtima. Tjemeni pravac konike je zajednički pravac konike i njene hiperoskulacijske kružnice.

Tjemene točke konike su dirališta na tjemenim pravcima.

4.2 Evolute konika u kvazieliptičnoj ravnini

Definicija 4.2.1. *Evoluta konike u qe-ravnini je skup točaka na tangentama qe-konika koje su okomite na dirališta oskulacijskih kružnica, istovremeno evoluta je omotaljka centrala oskulacijskih kružnica.*

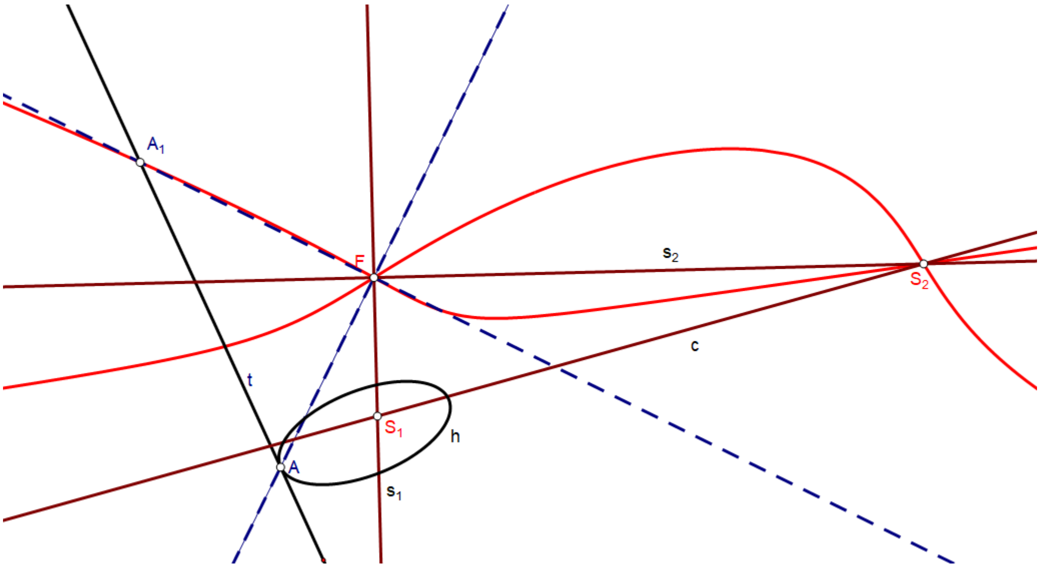
Teorem 4.2.1. *Evoluta konike u kvazieliptičnoj ravnini općenito je krivulja četvrtog reda i šestog razreda.*

Apsolutna točka F i središta konike S_1, S_2 dvostruke su točke evolute. Dvostruke točke vrhovi su autopolarnog trovrha, (vidi Tablicu 4.1).

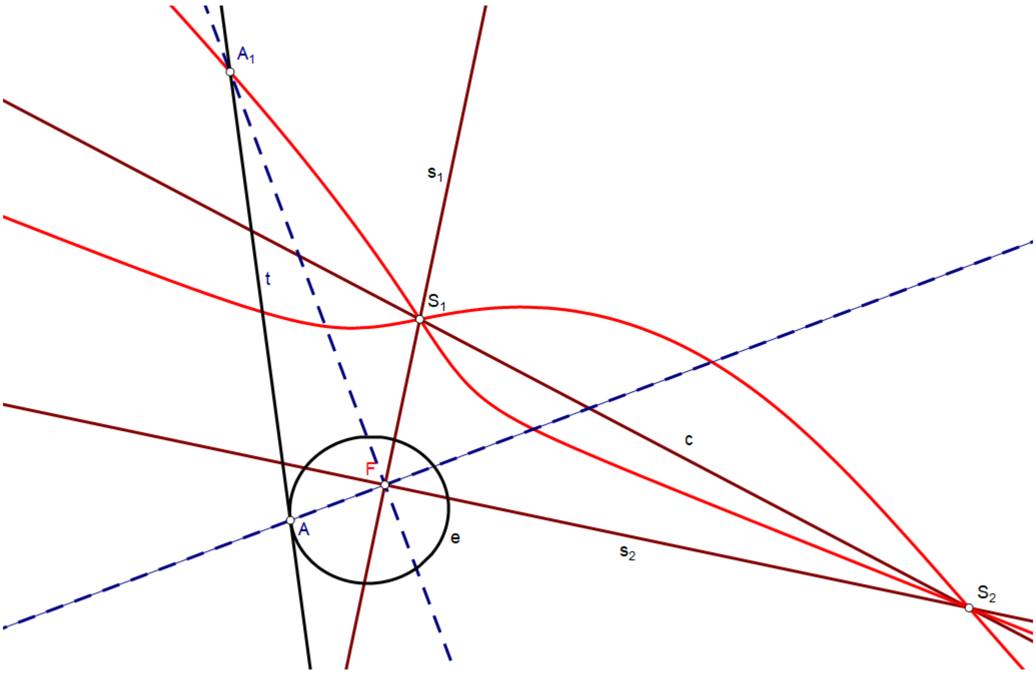
Dobiveni rezultati ne odstupaju od rezultata dobivenih u prethodnim poglavljima, u nastavku je njihov pregled (vidi slike 4.3, 4.4, 4.5).

Tablica 4.1

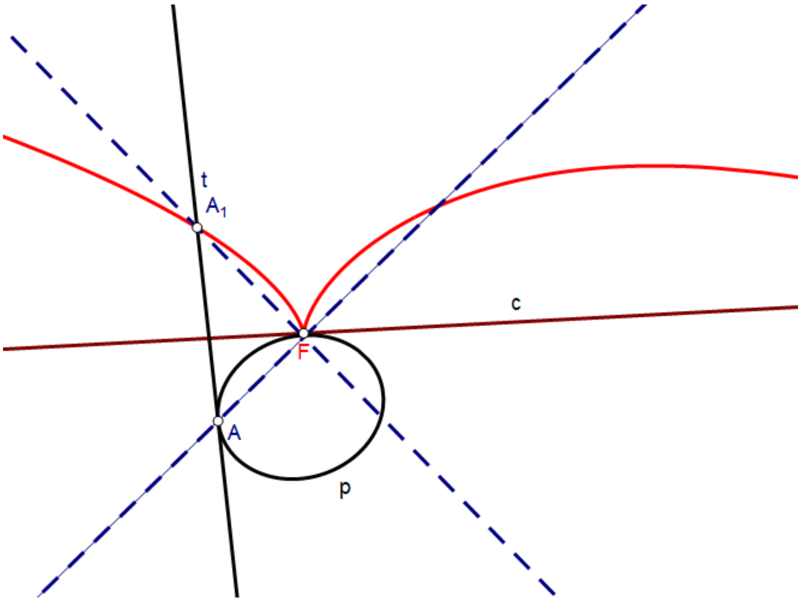
evoluta koje qe-konike	red	razred	rod	broj dvostrukih točaka	broj šiljaka	broj infleksionih točaka
e	4	6	0	3	0	6
h	4	6	0	3	0	6
p	3	3	0	0	1	1



Slika 4.3: Evoluta hiperbole h (crveno) qe-ravnine



Slika 4.4: Evoluta elipse e (crveno) qe-ravnine



Slika 4.5: Evoluta parabole p (crveno) qe-ravnine

Poglavlje 5

Hiperbolična ravnina

Hiperbolična geometrija nastala je sumnjom matematičara u V. Euklidov postulat. Kao geometrija potpuno ravnopravna euklidskoj postala je dokazom njezine neproturječnosti. Neproturječje hiperbolične geometrije posljedica je neproturječnosti euklidske geometrije. Autori hiperbolične geometrije su Gauss, Lobačevski i Bolyaj. Postoje nekoliko modela hiperbolične geometrije, a najpoznatiji su: model gornje poluravnine, Poincaréov model diska, Kleinov model, Loidov model. U ovom radu koristi se Kleinov model projektivno proširene hiperbolične ravnine. Istaknimo da je hiperbolična ravnina proučavana tako da se promatraju sve točke projektivne ravnine bez obzira nalaze li se unutar apsolutne konike, izvan nje ili na njoj, kao i svi pravci koji apsolutnu koniku sijeku realno, imaginarno ili je dodiruju. Stoga je proučavanje hiperbolične ravnine obuhvatilo ne samo hiperbolično-eliptičnu ravninu, već i hiperbolično-hiperboličnu i eliptično-hiperboličnu ravninu.

5.1 Osnovni pojmovi

Hiperbolična ravnina $\mathbb{H}^2$ je projektivna ravnina $\mathbb{P}^2$ u kojoj je metrika inducirana neraspadnutom krivuljom 2. reda, euklidskom kružnicom a. Na taj način zadana je **apsolutna konika** Kleinovog modela projektivno proširene hiperbolične ravnine.

Definicija 5.1.1 (Točke). *Točke unutar apsolutne konike zovemo* ***pravim točkama****, one izvan apsolutne konike* ***nepravim ili idealnim točkama****, a točke na apsolutnoj konici* ***graničnim točkama*** *hiperbolične ravnine.*

Dvije točke bilo koje vrste u hiperboličnoj ravnini određuju jedan i samo jedan pravac.

Definicija 5.1.2 (Pravac). *Ako pravac apsolutnu koniku siječe realno zovemo ga **pravi pravac**. Ako pravac apsolutnu koniku siječe imaginarno zovemo ga **idealni pravac bez graničnih točaka** (izotropni pravac). Ako pravac tangira apsolutnu koniku zovemo ga **idealni s jednom graničnom točkom**. Za dva pravca koji se sijeku u pravoj točki kaže se da su **ukršteni**. Ako im je sjecište na apsolutnoj konici, **pravci su paralelni**, a ako se sijeku izvan apsolute, kaže se da su **hiperparalelni.***

Definicija 5.1.3 (Okomiti pravci). *H-okomitost pravaca definirana je apsolutnim polaritetom tj. pravci su okomiti, ako svaki od njih prolazi apsolutnim polom drugog. Svake dvije apsolutno konjugirane polare bez obzira da li se sijeku u pravoj, graničnoj ili idealnoj točki, međusobno su okomite.*

U euklidskoj se ravnini smatra da je točka geometrijski točno konstruirana ukoliko je određena kao sjecište dvaju pravaca, pravca s kružnicom ili kao sjecište dviju kružnica. Kako se ovdje radi o euklidskom modelu hiperbolične geometrije, za očekivati je da se i u njemu mogu elementarne geometrijske konstrukcije izvoditi ravnalom i šestarom.
Pokazuje se da je to često doista moguće, uz napomenu da su konstrukcije znatno složenije od analognih konstrukcija u euklidskoj ravnini, [1], [28].
U hipeboličnoj ravnini $\mathbb{H}^2$ razlikujemo 13 vrsta konika. Razlikujemo ih s obzirom na to da li realno ili imaginarno sijeku apsolutnu koniku, ili je diraju odnosno oskuliraju, te s obzirom na to da li su im izotropne tangente realne ili imaginarne, vidi tablicu (5.1)

- **Hipercikl** k_{hc} je svaka konika koja dira apsolutnu koniku u dvije realne i različite točke.

- **Cikl** k_c je svaka konika koja dira apsolutnu koniku u paru konjugirano imaginarnih točaka.

- **Horicikl** k_{ho} je svaka konika kod koje su imaginarna ili realna apsolutna dirališta incidentna.

  Hipercikl, cikl i horicikl tri su tipa **hiperbolične kružnice**.

- **Elipsa** e_1 je svaka konika koja siječe apsolutnu koniku u dva para konjugirano imaginarnih točaka i ima dva para realnih izotropnih tangenata.

- **Elipsa** e_2 je svaka konika koja s apsolutnom konikom ima dva para konjugirano imaginarnih sjecišta i dva para konjugirano imaginarnih tangenata.

- **Konkavna hiperbola** h_{1ko} je svaka konika koja siječe apsolutnu koniku u 4 realne i različite točke i s njom ima dva para realnih izotropnih tangenata.

- **Konveksna hiperbola** h_{2kv} je svaka konika koja siječe apsolutnu koniku u 4 realne i različite točke i s njom ima dva para konjugirano imaginarnih izotropnih tangenata.

- **Eliptična hiperbola** eh je svaka konika koja siječe apsolutnu koniku u paru realnih i različitih točaka i paru konjugirano imaginarnih točka, s njom ima par realnih i različitih izotropnih tangenta i par konjugirano imaginarnih izotropnih tangenta.

- **Konkavna hiperbolična parabola** hp_{1ko} je svaka konika koja dira apsolutnu koniku (2 realna apsolutna dirališta su incidentna), siječe ju u paru realnih i različitih točka, i ima s njom par *realnih* izotropnih tangenta i jednu realnu dvostruku izotropnu tangentu.

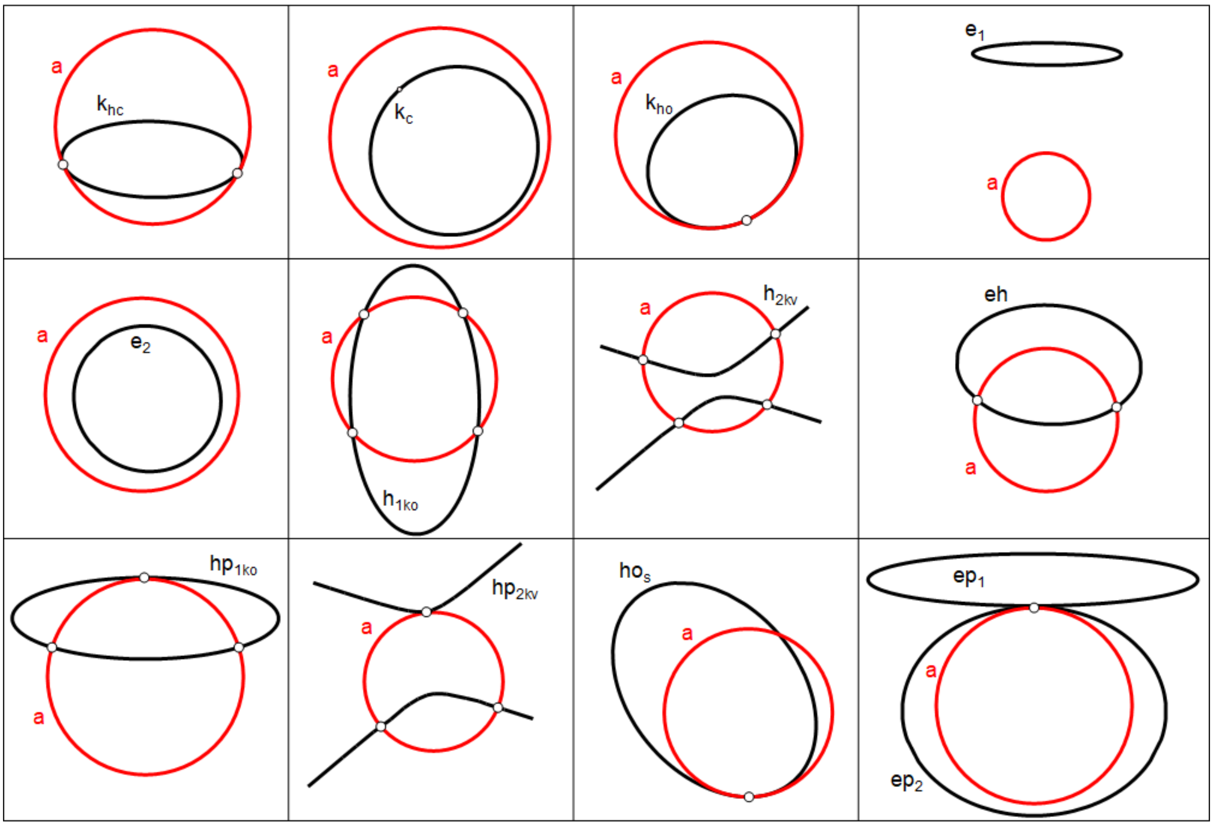
- **Konveksna hiperbolična parabola** hp_{2kv} je svaka konika koja dira apsolutnu koniku (2 realna apsolutna dirališta pala su u istu točku), siječe ju u paru realnih i različitih točka, ima s njom par konjugirano *imaginarnih* izotropnih tangenta i jednu realnu dvostruku izotropnu tangentu.

- **Specijalna (oskulacijska) hiperbola** ho_s je svaka konika koja oskulira apsolutnu koniku i s njom ima par realnih i različitih izotropnih tangenta.

- **Eliptična parabola** ep_1 je svaka konika koja dira apsolutnu koniku i siječe ju u paru konjugirano imaginarnih točka, s njom ima par *realnih* i različitih izotropnih tangenta i jednu realnu dvostruku izotropnu tangentu.

- **Eliptična parabola** ep_2 je svaka konika koja dira apsolutnu koniku i siječe ju u paru konjugirano imaginarnih točka, s njom ima par konjugirano *imaginarnih* izotropnih tangenta i jednu realnu dvostruku izotropnu tangentu.

Tablica 5.1



Prilikom konstrukcije hiperboličnih konika upotrebljene se sljedeće činjenice, [24]: Konika k i njoj pridružena konika k' sijeku se u 4 točke, koje mogu sve biti realne ili u parovima konjugirano imaginarne, mogu po dvije, tri ili sve četiri pasti u istu točku. Neka su A, B, C, D sjecišta pridruženih konika k i k'. Postoji beskonačno mnogo konika koje prolaze tim sjecištima i sve one čine pramen konika s temeljnim točkama A, B, C, D. Ukoliko dvije temeljne točke pramena padnu skupa, kažemo da je pramen konika dirni, a ako dva puta po dvije temeljne točke padnu zajedno, pramen je dvostruko dirni.

Korisno je napomenuti da dirališta svih konika dvostruko dirnog pramena mogu biti dvije realne ili konjugirano imaginarne točke. Ako tri temeljne točke pramena padnu skupa, govorimo o oskulacijskom, a ako sve četiri temeljne točke padnu u istu točku, radi se o hiperoskulacijskom pramenu konika.

Prilikom konstruiranja konika u tablici 5.1 posebno će nas zanimati koji se uvjeti trebaju postaviti na temeljne elemente perspektivne kolineacije u odnosu na neku koniku, da bi se ona sa svojom pridruženom konikom dirala, oskulirala odnosno hiperoskulirala, [24]. Ukoliko konika k dira os ili prolazi središtem perspektivne kolineacije (pri čemu središte S ne leži na osi o), *konike* k i njoj pridružena konika k' *se diraju* na osi odnosno u točki S.

Ako konika prolazi kroz točku S i dira os o u nekoj točki O ($S \notin o$), konike k i k' se diraju u dvije točke S i O i određuju dvostruko dirni pramen konika. Ovaj tip pramena može nastati i u slučaju kada su S i o pol i polara u odnosu na koniku k. U tom su slučaju sjecišta konike k s osi zajednička dirališta svih konika pramena. Ta će sjecišta činiti konjugirano imaginaran par točaka ukoliko se centar kolineacije nalazi unutar konike.
Da bi se *konike* k i k' *oskulirale* u nekoj točki, potrebno je na početnu koniku djelovati elacijom. Koniku k treba postaviti tako da dodiruje os elacije u točki različitoj od središta S elacije. Oskulacija konika k i k' može se postići i u slučaju kada k prolazi središtem elacije ali ne dira os.
Ukoliko konika k dira os elacije upravo u središtu elacije S, ona se preslikava u koniku k' s kojom se u točki S *hiperoskulira.*
Sve ove nabrojene činjenice omogućile su da se iz apsolutne konike povoljno odabranim elementima perspektivne kolineacije konstruira pramen hiperboličnih konika, koji će prema potrebi biti dirni, oskulacijski ili hiperoskulacijski.

Uz konike u hiperboličnoj ravnini $\mathbb{H}^2$ vezani su i sljedeći pojmovi:

• *Središte* konike je pol jednog nepravog/beskonačno dalekog (apsolutnog) pravca.
U hiperboličnoj ravnini je beskonačno mnogo takvih pravaca (idealnih i graničnih). Središte neke konike je pol samo jednoga od njih. To je pol onoga pravca (ne nužno idealnoga), za kojega je ujedno i apsolutni pol. On je jedan od vrhova zajedničkog autopolarnog trovrha konike i apsolute.

• *Fokusi* su sjecišta izotropnih tangenata konike. Konstrukcija fokusa nije uvijek elementarna, pogotovo kada su izotropne tangente imaginarni pravci.

• *Osi* konike su spojnice njezinih fokusa.

5.2 Evoluta konike u hiperboličnoj ravnini

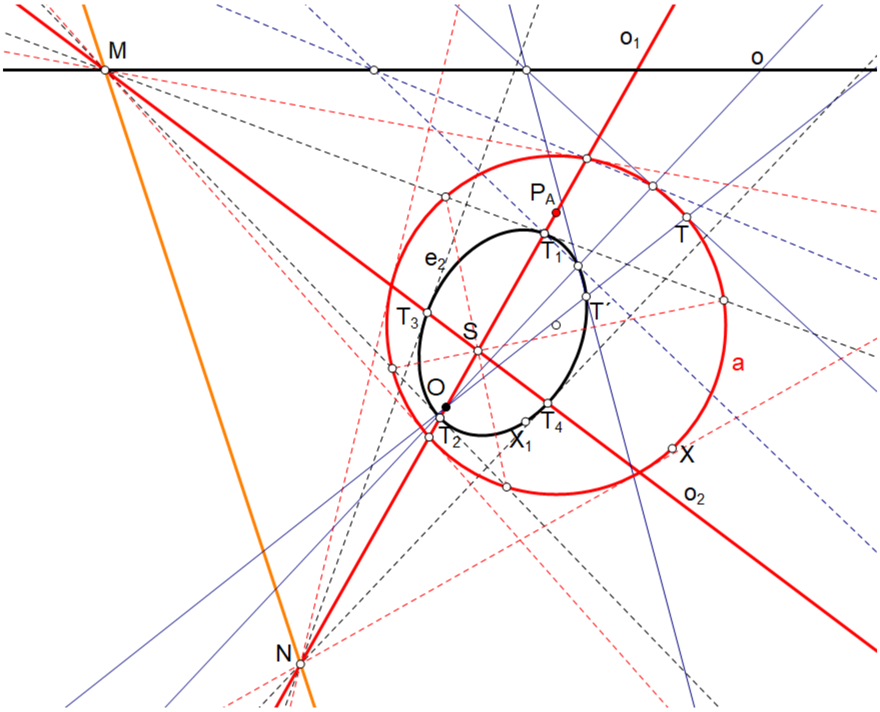
Znamo da je evoluta dane krivulje je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, istovremeno i omotaljka njezinih normala, [23].

Teorem 5.2.1. *Evoluta konike u hiperboličnoj ravnini* $\mathbb{H}^2$ *općenito je krivulja šestoga reda i četvrtog razreda.*

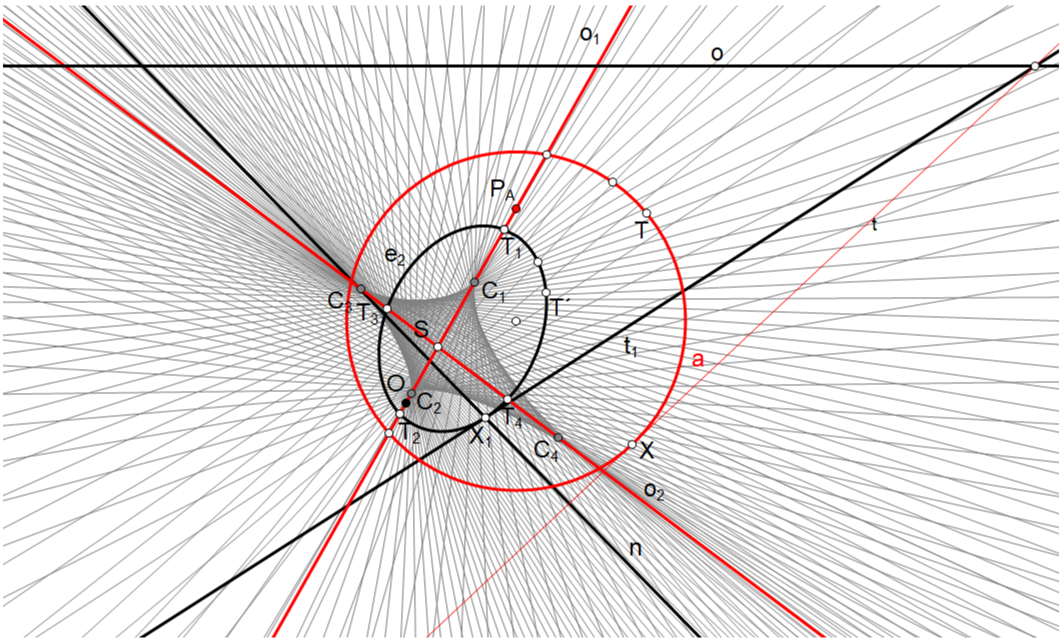
Dokaz. Neka je k konika hiperbolične ravnine. Pridružimo konici k koniku k_1 koju čine apsolutni polovi svih njezinih tangenata na sljedeći način.
Neka je t tangenta konike k u po volji odabranoj točki T. Točki T pridružena je ona točka T_1 konike k_1 koja je apsolutni pol tangente t. Pri tome je svakoj točki T_1 konike k_1 pridruženo diralište T na jedinstvenoj polari t, koja je tangenta konike k. Konike k i k_1 nazivaju se recipročnim polarama s obzirom na apsolutnu koniku, [5].
Zaključujemo, riječ je o 1-1 pridruženju dvaju nizova drugoga reda (k) i (k_1), a rezultat toga pridruženja prema Chaslesovoj relaciji je omotaljka četvrtoga razreda, [6], [30]. $\square$

Kao i u prethodnim poglavljima istaknuti će se one konike hiperbolične ravnine kod kojih je evoluta raspadnuta krivulja 4. razreda na krivulje nižih razreda.

Perspektivnom kolineacijom (O, o, T, T') konstruira se konika hiperbolične ravnine kao slika apsolutne konike a. Jedna os konike je zraka kolineacije $o_1 = OP_A$, gdje je P_A apsolutni pol osi kolineacije o. Os o_1 je zajednička polara apsolutne konike a i konike hiperbolične ravnine. Neka je M pol osi o_1 u odnosu na apsolutnu koniku.
Os o_1 siječe koniku u tjemenima T_1 i T_2. Središte konike je polovište promjera $\overline{T_1T_2}$, konstruira se kao u [1]. Os o_2 incidentna je sa središtem S i polom M.
Osi konike o_1 i o_2 su apsolutno konjugirane polare i međusobno su okomite. Neka su M, N polovi pravaca o_1, o_2 u odnosu na apsolutnu koniku a.
Osi konike $o_1 = SN$, $o_2 = SM$ i pravac MN stranice su autopolarnog trostrana i dvostruki pravci evolute, (vidi sliku 5.1). Pravac MN ima ulogu beskonačno dalekog pravaca za koniku e_2. Središta zakrivljenosti C_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ oskulacijskih kružnica u tjemenima T_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ dane konike konstruiraju se kao u [31], (vidi sliku 5.2). Točke C_i šiljci su evolute konike u hiperboličnoj ravnini. Preostala dva šiljka su imaginarna i incidentana s pravcem MN.



Slika 5.1: Osi o_1, o_2 konike

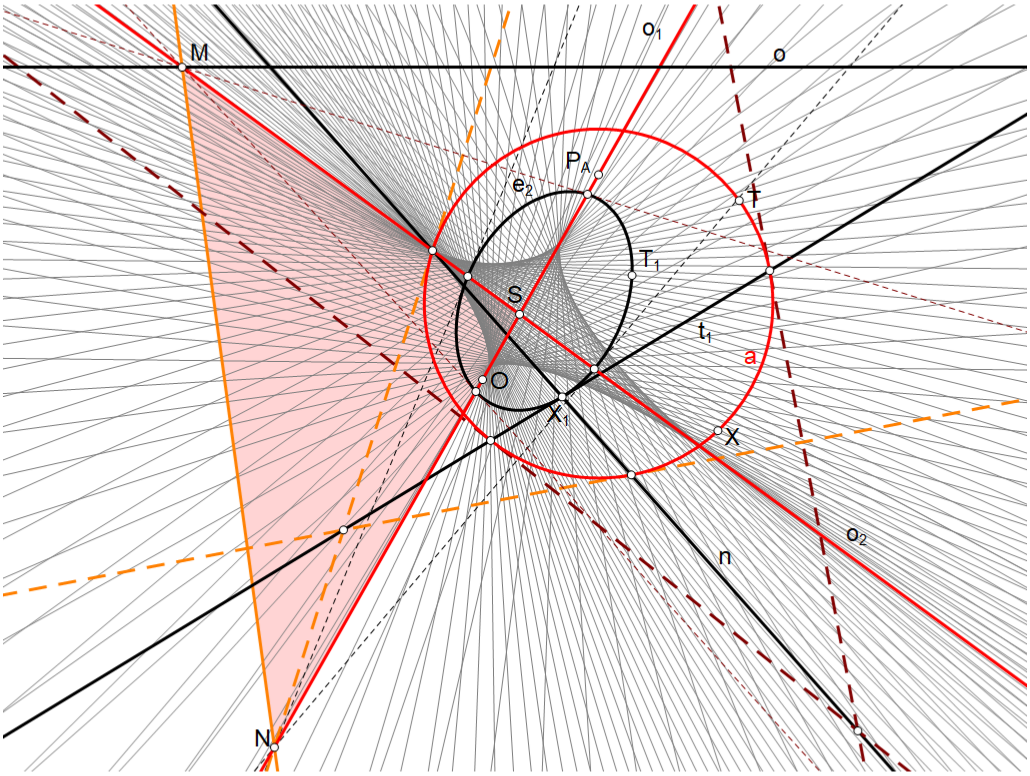


Slika 5.2: Središta zakrivljenosti C_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ oskulacijskih kružnica u tjemenima T_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

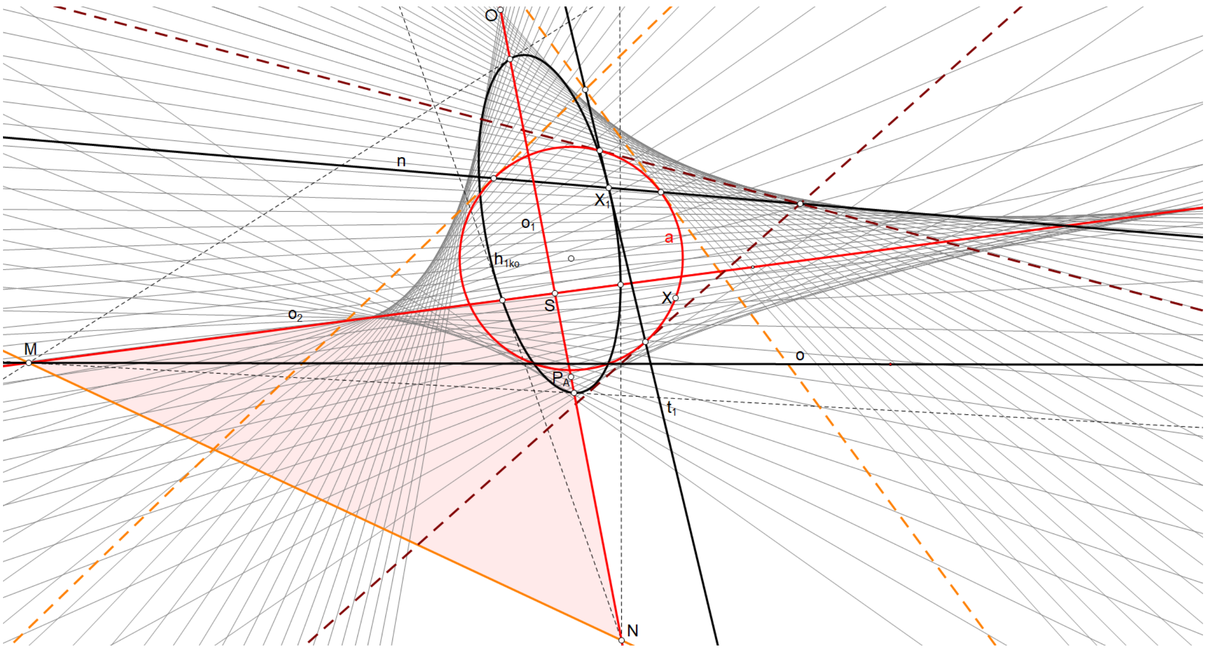
Krivulja hiperbolične ravnine je *cirkularna* ako dodiruje apsolutu u barem jednoj točki. Ukoliko krivulja i apsoluta imaju zajedničku tangentu u svakoj zajedničkoj točki, kažemo da je krivulja *potpuno cirkularna.* Dakle, potpuno cirkularne krivulje hiperbolične ravnine u graničnim točkama dodiruju, oskuliraju ili hiperoskuliraju apsolutnu koniku.
Za krivulje višeg reda od dva te točke mogu biti jednostruke, dvostruke ili višestruke točke krivulje, [10], [29].
U hiperboličnoj ravnini kružnice su potpuno cirkularne krivulje. Cirkularne konike su: konkavna i konveksna hiperbolična parabola (hp_{1ko}, hp_{2kv}), eliptične parabole (ep_1 i ep_2) i specijalna (oskulacijska) hiperbola ho_s.
Evolute cirkularnih konika, hp_{1ko}, hp_{2kv}, ep_1 i ep_2, raspadnute su krivulje 4. razreda na krivulje 3. razreda i pramen pravaca s vrhom u diralištu konike i apsolute, dok je evoluta specijalne (oskulacijske) hiperbole ho_s raspadnuta na krivulju 2. razreda i dva puta brojeni pramen pravaca s vrhom u diralištu specijalne (oskulacijske) hiperbole i apsolutne konike, spomenute evolute konstruirane su na slikama 5.3 - 5.9.

Tablica 5.2

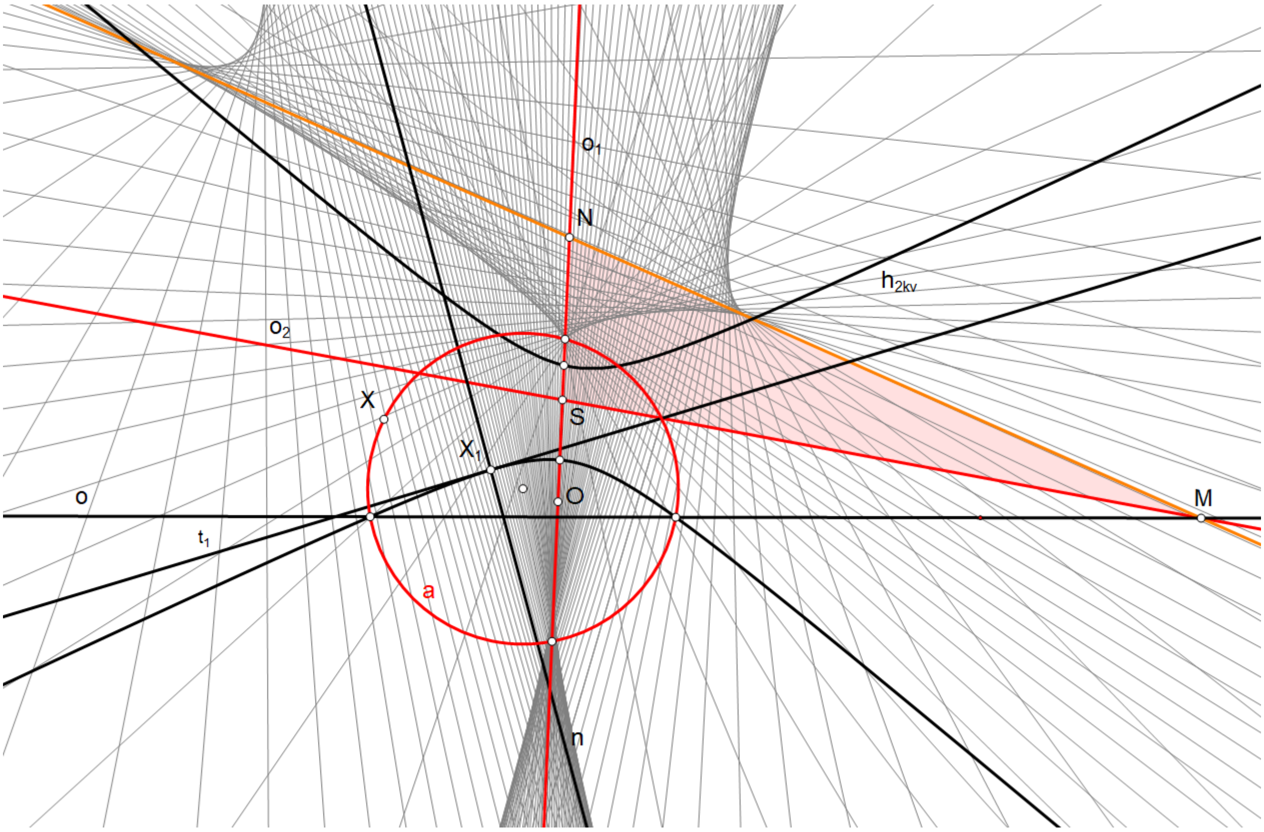
evoluta koje h-konike	razred	red	rod	broj dvostrukih pravaca	broj infleksionih pravaca	broj šiljaka
e_1	4	6	0	3	0	6
e_2	4	6	0	3	0	6
h_{1ko}	4	6	0	3	0	6
h_{2kv}	4	6	0	3	0	6
eh	4	6	0	3	0	6
hp_{1ko}	3	3	0	0	1	1
hp_{2kv}	3	3	0	0	1	1
ep_1	3	3	0	0	1	1
ep_2	3	3	0	0	1	1
ho_s	2	2	0	0	0	0



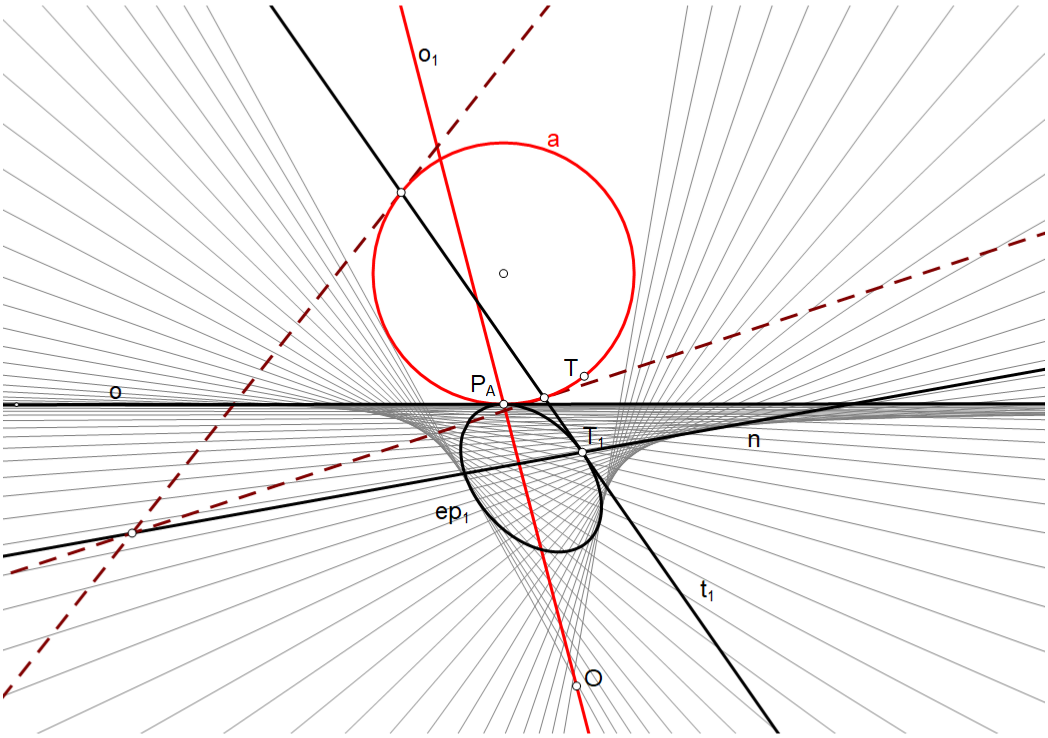
Slika 5.3: Evoluta elipse e_2 u hiperboličnoj ravnini u hiperboličnoj ravnini,



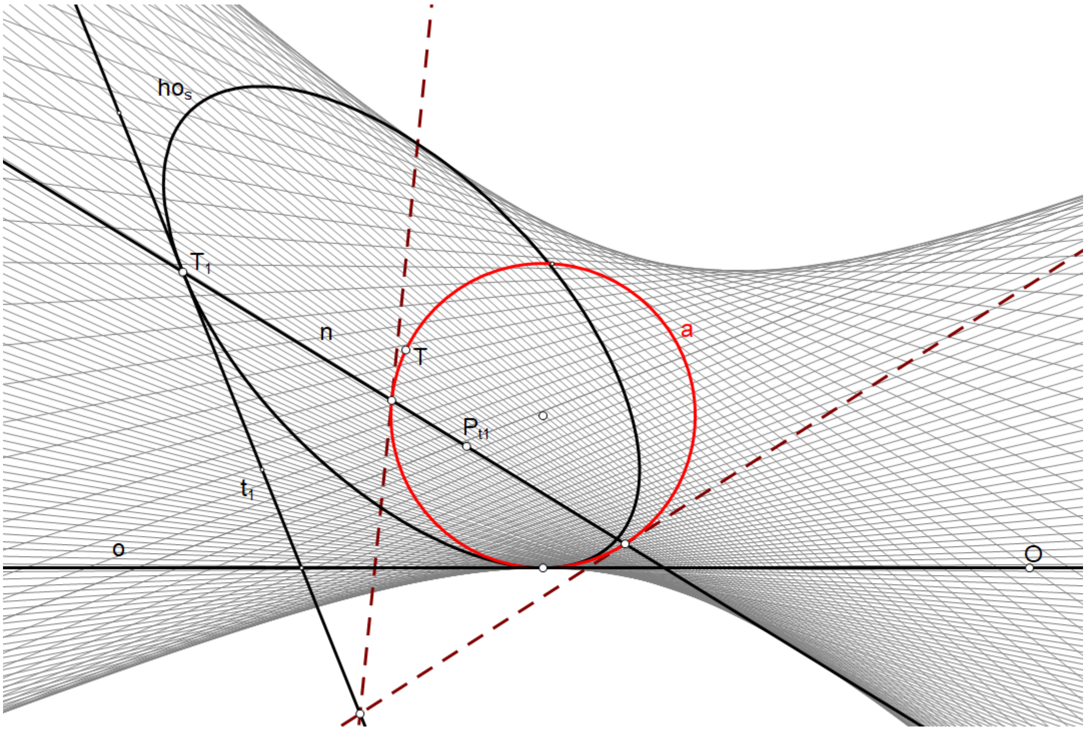
Slika 5.4: Evoluta konkavne hiperbole h_{1ko} u hiperboličnoj ravnini,



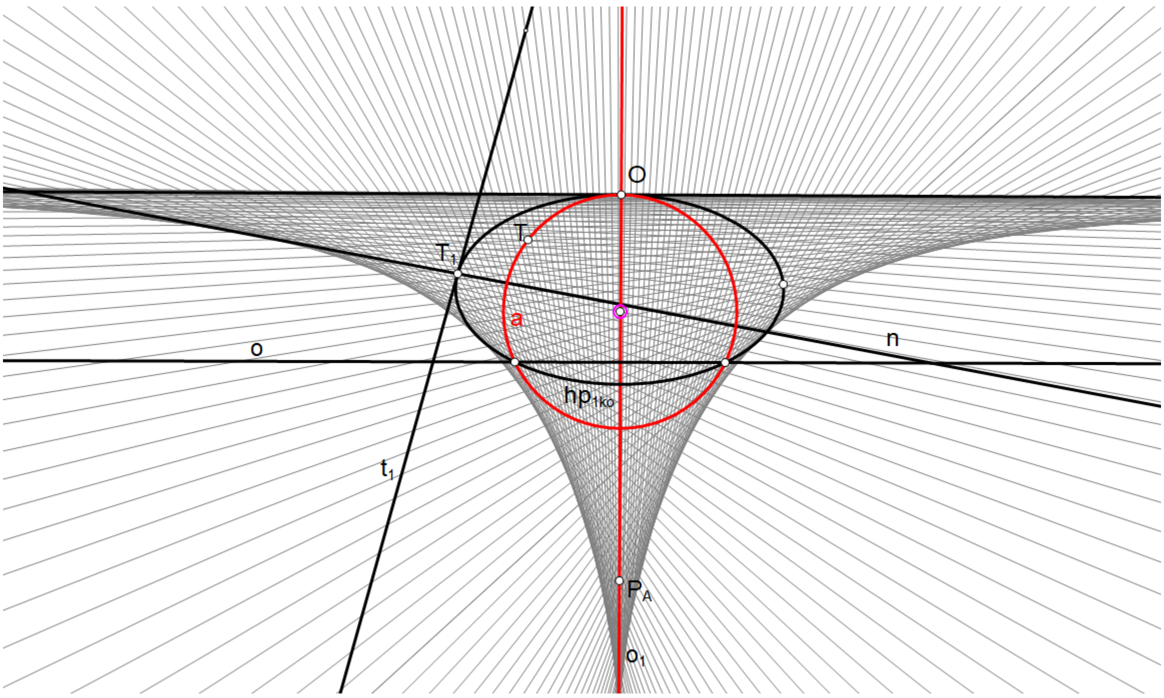
Slika 5.5: Evoluta konveksne hiperbole h_{2kv} u hiperboličnoj ravnini,



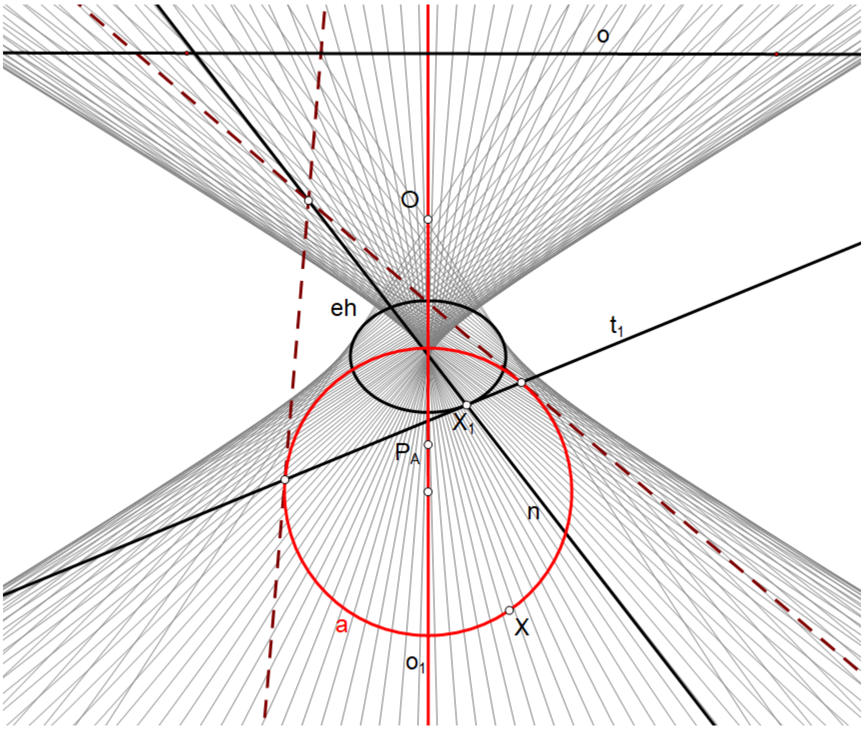
Slika 5.6: Evoluta eliptične parabole ep_1 u hiperboličnoj ravnini,



Slika 5.7: Evoluta specijalne (oskulacijske) hiperbole ho_s u hiperboličnoj ravnini,



Slika 5.8: Evoluta konkavne hiperbolične parabole hp_{1ko} u hiperboličnoj ravnini,



Slika 5.9: Evoluta eliptične hiperbole *eh* u hiperboličnoj ravnini,

Zaključak

U ovom radu kroz pet poglavlja dana je sistematizacija činjenica vezanih za konike u sedam projektivno-metričkih ravnina, euklidskoj, pseudoeuklidskoj, kvazihiperboličnoj, kvazieliptičnoj i hiperboličnoj (s naglaskom da se u poglavlju hiperbolična ravnina proučavala ne samo hiperbolično-eliptična ravnina, već i hiperbolično-hiperbolična i eliptično-hiperbolična ravnina).
Detaljno su opisana osnovna svojstva istaknutih projektivno-metričkih ravnina i vrste konika u odnosu na apsolutnu figuru. Proučavana su svojstava evoluta u svakoj od navedenih projektivno-metričkih ravnina uz isticanje njihovih karakteristika vezanih za Plückerove formule (red, razred, broj dvostrukih točaka/tangenata, broj šiljaka, infleksionih točaka/pravaca) koja do sada nisu bila proučavana.
Kako su pseudoeuklidska, kvazihiperbolična i projektivno proširena hiperbolična ravnina bogatije i brojem konika raznovrsnije u odnosu na euklidsku ravninu istaknute su posebnosti kojih nema u euklidskoj ravnini i uočeno je kako cirkularnost konike utječe na raspad reda i razreda njezine evolute.
U afinom modelu pseudoeuklidske ravnine dobiveni rezultati potvrđeni su i analitičkom metodom. Na posebno odabranom modelu kvazieliptične ravnine, koja je dualna euklidskoj ravnini, dobiveni su očekivani rezultati vezani za numeričke invarijante evolute konike.

Literatura

[1] I. Babić, *Neke kolineacije H-ravnine*, KoG **9** (2005), 39-43;

[2] T. Berić, *Konika devet točaka*, Diplomski rad, Zagreb, 2019;

[3] M. Božek, *On Geometry of differentiable curves in the pseudo-Euclidean plane*, Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG2011;

[4] V. Buraková, *On osculating pseudo-circles of curves in the pseudo-Euclidean plane*, Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG2011;

[5] R. Cesarec, *Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja*, Školska knjiga, Zagreb, 1957;

[6] J. L. Coolidge, *A Treatise on Algebraic Plane Curves*, New York: Dover, p. 436, 1959.

[7] I. Čatipović, *Geometrija izotropne ravnine*, Diplomski rad, Zagreb, 2018;

[8] G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal, *The Universe of conics*, Springer, Berlin 2016;

[9] H. Halas, *Klasifikacija cirkularnih krivulja 3. razreda u kvazihiperboličkoj ravnini*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2015;

[10] E. Jurkin, *Potpuno cirkularne krivulje četvrtog reda u hiperboličkoj i izotropnoj ravnini*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2008;

[11] E. Jurkin, N. Kovačević, *Entirely Circular Quartics in the pseudo-Euclidean Plane*, Acta Math. Hung. **134**(4) (2012), 571-582;

[12] M. Katić-Žlepalo, *Krivulje žarišta, središta i ravnalica pramenova konika u pseudo-Euklidskoj ravnini*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2014;

[13] M. Katić Žlepalo, E. Jurkin, *Circular cubics and quatics obtained as pedal curves of conics in pseudo-Euclidean plane*, The 15th International Conference on Geometry and Graphics Proceedings, Montreal, 2012, 341-347;

[14] N. Kovačević, E. Jurkin, *Circular Cubics and Quartics in pseudo-Euclidean Plane obtained by inversion*, Math. Pannon. **22** (2011), 199-218;

[15] N. Kovačević, V. Szirovicza, *Inversion in Minkowskischer Geometrie*, Mathematica Pannonica 21/1 (2010), 89-113;

[16] N. M. Makarova, *On the projective metrics in plane*, Učenye zap. Mos. Gos. Ped. in-ta **243** (1965), 274-290 (ruski);

[17] V. Niče, *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956;

[18] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Element, Zagreb, 1984;

[19] I. Protrka, *Plohe konstantne srednje zakrivljenosti i njima pridružene fokalne krivulje i plohe u Minkowskijevom prostoru*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2019;

[20] H. Sachs, *Ebene Isotrope Geometrie*, Friedr. Vieweg&Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1987;

[21] S. Salmon, *Higher plane curves*, Chelsea Publishing Company, New York, 1879;

[22] A. Saloom, F. Tari, *Curves in the Minkowski plane and their contact with pseudo-circles*, https://www.researchgate.net/publication/226942313;

[23] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979;

[24] A. Sliepčević, I. Božić, *Perspective Collineation and Osculating Circle of Conic in PE-plane and I-plane.*, KoG **15** (2011), 63-66;

[25] A. Sliepčević, I. Božić, H. Halas, *Introduction to the Planimetry of the Quasi-Hyperbolic Plane*, KoG **17** (2013), 58-64;

[26] A. Sliepčević, I. Božić Dragun, *Introduction to Planimetry of Quasi-Elliptic Plane.*, KoG **20** (2016), 16-21;

[27] A. Sliepčević, M. Katić Žlepalo, *Pedal curves of conics in pseudo-Euclidean plane*, Math. Pannon. **23** (2012), 75-84;

[28] A. Sliepčević, J. Kos-Modor, *Neke planimetrijske konstrukcije u H-ravnini*, KoG **9** (2005), 35-37;

[29] A. Sliepčević, V. Szirovicza, *A classification and construction of entirely circular cubics in the hyperbolic plane*, Acta Math. Hungar. **104**(3) (2004), 185-201;

[30] H. Wieleitner, *Theorie der ebenen algebraischen Kurven hoherer Ordnung*, G. J. Gschen, Leipzig, 1905;

[31] G. Weiss, A. Sliepčević, *Osculating Circles of Conics in Cayley-Klein Planes*, KoG **13** (2009), 7-12;

Životopis

Ivana Božić Dragun rođena je 29. 8. 1985. u Vinkovcima gdje je završila osnovnu školu i gimnaziju. Godine 2009. diplomirala je na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu i stekla zvanje profesor matematike.

Od rujna 2009. godine do danas radi na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu.
Od 2009. drži vježbe iz kolegija Nacrtna geometrija u graditeljstvu I i II.
U akademskoj godini 2014./15. pored spomenutih vježbi držala je vježbe iz kolegija Matematika I na stručnom studiju graditeljstva, Matematika II na stručnom studiju informatike i računarstva, te vježbe iz kolegija Matematički alati u elektrotehnici na stručnom studiju elektrotehnike.
Od rujna 2015. u zvanju predavača izvodi predavanja i vježbe iz kolegija Matematika I i II na stručnim i izvanrednim studijima graditeljstva i informatike.
Od siječnja 2020. u zvanju višeg predavača drži predavanja i vježbe iz kolegija Nacrtna geometrija u graditeljstvu I i II, Matematika I na stručnim i izvanrednim studijima graditeljstva i informatike.
U ljetnom semestru 2012. godine, kao vanjski suradnik, izvodila je vježbe iz kolegija Osnove inženjerske informatike 2, na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.
2012. godine sudjelovala je na DAAD projektu Geometry education for future architects, koji je okupi nastavnike i studente iz šest zemalja, sa ciljem razmjene znanja iz geometrije, matematike i vizualizacije te unapređenja metoda podučavanja u navedenim područjima.

Koautorica je skripte za vježbe Nacrtna geometrija u graditeljstvu 1. Objavljivanje je odobrilo Stručno vijeće Tehničkog veleučilišta u Zagrebu odlukom broj: 1760-1/14 od 21. 10. 2014. godine. CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 891343. ISBN 978-953-7048-42-6
Autorica je udžbenika Matematika 1. Objavljivanje je odobrilo Stručno vijeće Tehničkog veleučilišta u Zagrebu odlukom broj: 2831-1/18 od 23. 10. 2018. godine.

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 001016799. ISBN 978-953-7048-80-8

Ivana Božić Dragun objavila je 7 stručnih radova i 4 znanstvena rada.

Govori aktivno engleski i talijanski jezik.

Članica je Hrvatskog društva za geometriju i grafiku i Stručne sekcije Hrvatskog matematičkog društva

Udana je i ima dvoje djece. U slobodno vrijeme bavi se sportskim aktivnostima.