

# Evolute konika u projektivno-metričkim ravninama

---

**Božić, Ivana**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:929004>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-29**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET  
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Božić Dragun

**Evolute konika u projektivno-metričkim  
ravninama**

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2021.



University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ivana Božić Dragun

**The evolute of conics in  
projective-metric planes**

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2021



Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET  
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Božić Dragun

**Evolute konika u projektivno-metričkim  
ravninama**

DOKTORSKI RAD

Mentor:

doc. dr. sc. Helana Koncul

Zagreb, 2021.





University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ivana Božić Dragun

**The evolute of conics in  
projective-metric planes**

DOCTORAL THESIS

Supervisor:  
doc. dr. sc. Helana Koncul

Zagreb, 2021

## IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, \_\_\_\_\_, student/ica Prirodoslovno-matematičkog  
fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi  
\_\_\_\_\_, OIB \_\_\_\_\_,

JMBAG \_\_\_\_\_, ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom  
odgovornošću da je moj završni/diplomski/doktorski rad pod naslovom:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_, isključivo moje autorsko djelo, koje je u  
potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Potpis

---

*Ovom prilikom željela bih izraziti zahvalnost Prof. dr. sc. Ani Sliepčević.*

*Hvala prije svega na nesebičnom mentoriranju, dijeljenju znanja i ideja, sretna sam da sam imala priliku raditi s Vama. Hvala na svakoj kritici, pohvali, sugestiji, majčinskom i prijateljskom odnosu. Za mene ćete uvijek biti Mentor uz čiju podršku su nastali i prvi koraci mog znanstvenog puta i ovaj rad.*

*Zahvaljujem se Izv. prof. dr. sc. Emi Jurkin na svim sugestijama i svesrdnoj podršci.*

*Najtoplije zahvaljujem i Izv. prof. dr. sc. Vedranu Krčadinac, Prof. dr.sc. Zdenki Kolar Begović i članovima geometrijskog seminara, čije je poticajno okruženje doprinijelo kvaliteti ovog rada. Zahvaljujem se na svemu svojoj prijateljici Doc. dr. sc. Heleni Koncul i njezinoj obitelji. Hvala Kruni za svu tehničku podršku.*

*Na samom kraju zahvaljujem se svojoj obitelji, Roditeljima, mojoj Zrinki, mom Hrci i to na podršci i povjerenju.*

*Ovaj rad posvećujem našoj djeci, Mati (koji je bio najveći poticaj kad bih htjela posustati), Evi i našoj maloj curici.*

# Sažetak

Evoluta dane krivulje je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, a istovremeno to je i omotaljka njezinih normala. Od 1665. godine kada je matematičar Huygens uveo pojam evolute, do danas o evolutama konika u euklidskoj ravnini napisani su brojni radovi. U ovom doktorskom radu proučavaju se svojstva evoluta uz isticanje njihovih karakteristika vezanih za Plückerove formule (red, razred, broj dvostrukih točaka/tangenata, broj šiljaka, infleksionih točaka/pravaca) u sedam od ukupno devet projektivno-metričkih ravnina. Rad je podijeljen na pet poglavlja u kojima je napravljen opsežan pregled osnovnih pojmova i svojstava evoluta konika u euklidskoj, pseudoeuclidskoj, kvazihiperboličnoj, kvazieliptičnoj i projektivno proširenoj hiperboličnoj ravnini. U radu je detaljno proučeno kako položaj konike prema apsolutnoj figuri utječe na red i razred njezine evolute. Pri istraživanju u projektivnim modelima projektivno-metričkih ravnina koriste se metode sintetičke geometrije koje omogućuju konstruktivnu obradu krivulja u dinamičkim računalnim programima *The Geometer's Sketchpad* i *Geogebra*. Pri analitičkom istraživanju evoluta koriste se programi *Wolfram Mathematica* i *Demos*. Cilj je rada sistematizacija činjenica vezanih za istaknute projektivno-metričke ravnine te znanstveni doprinos pri klasifikaciji evoluta i njihovoj konstruktivnoj obradi.

**Ključne riječi:** evoluta, oskulacijska kružnica konike, euklidska ravnina, pseudoeuclidaska ravnina, kvazieliptična ravnina, kvazihiperbolična ravnina, hiperbolična ravnina

# Summary

The locus of centers of osculating circles is called the evolute of a curve. The evolute is also the envelope of the family of normal lines to the curve. From 1665, when the mathematician Huygens introduced the notion of the evolute of a conic in the Euclidean plane, to the present day numerous papers have been written. In this doctoral thesis, the properties of evolutes are studied with emphasis on their characteristics related to Plücker formulas (order, class, number of double points/tangents, number of cups, inflection points/lines) in seven out of a total of nine projective-metric planes. The thesis is divided into five chapters in which an extensive review about basic concepts and properties of the evolute of a conic is made in the Euclidean plane, pseudo-Euclidean plane, quasi-hyperbolic plane, quasi-elliptic plane and projective extended hyperbolic plane. The thesis studies in detail how the position of the conic towards the absolute figure affects the order and class of its evolute. The synthetic and analytical methods have been used in the studies. The computer programs used in the research are *The Geometer's Sketchpad*, *Geogebra*, *Wolfram Mathematica* and *Demos*. The main aim of this thesis is to systematize the facts related to prominent projective-metric planes and scientific contribution to the classification of evolutes and their constructive processing.

**Keywords:** The evolute, the osculating circle of a conic, the Euclidean plane, the pseudo-Euclidean plane, quasi-hyperbolic plane, quasi-elliptic plane, the hyperbolic plane.

# Sadržaj

Uvod	1
<b>1 Evolute u euklidskoj ravnini</b>	<b>4</b>
1.1 Algebarske krivulje . . . . .	4
1.2 Koordinatizacija i analitički model projektivne ravnine . . . . .	6
1.3 Polariteti konika . . . . .	8
1.4 Oskulacijske kružnice i evolute konika u euklidskoj ravnini . . . . .	10
<b>2 Pseudoeuklidska ravnina</b>	<b>18</b>
2.1 Osnovni pojmovi . . . . .	18
2.2 Oskulacijske kružnice i evolute konika u pseudoeuklidskoj ravnini . . . . .	22
2.2.1 Konstrukcija oskulacijske kružnice konike . . . . .	22
2.2.2 Evolute konika u pseudoeuklidskoj ravnini . . . . .	23
2.3 Jednadžba evolute . . . . .	31
<b>3 Kvazihiperbolična ravnina</b>	<b>43</b>
3.1 Osnovni pojmovi . . . . .	43
3.2 Oskulacijske kružnice i evolute konika u kvazihiperboličnoj ravnini . . . . .	47
3.2.1 Konstrukcija oskulacijske kružnice konike . . . . .	47
3.2.2 Evolute konika u kvazihiperboličnoj ravnini . . . . .	49
<b>4 Kvazieliptična ravnina</b>	<b>56</b>
4.1 Osnovni pojmovi . . . . .	56

---

4.2	Evolute konika u kvazieliptičnoj ravnini . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Hiperbolična ravnina</b>	<b>62</b>
5.1	Osnovni pojmovi . . . . .	62
5.2	Evoluta konike u hiperboličnoj ravnini . . . . .	67
<b>Zaključak</b>		<b>74</b>
	Literatura . . . . .	75
<b>Životopis</b>		<b>78</b>

# Uvod

Razlikujemo devet projektivno-metričkih ravnina ovisno o vrsti metrike na pravcu i na pramenu pravaca, koja može biti eliptična, hiperbolična ili parabolična. Često se nazivaju i Cayley-Kleinovim projektivnim ravninama, u počast Felixu Kleinu koji je klasificirao geometrije u svom „Erlangenskom programu” te inducirao metriku u neke modele projektivne ravnine i Arthuru Cayleyju koji je uvođenjem metrike u projektivnu ravninu napravio nekoliko modela neeuclidiske ravnine.

Svaka od tih ravnina može se „uroniti” u proširenu projektivnu realnu ravninu  $PG(2, \mathbb{R})$ . To su četiri ravnine čija je apsolutna figura neraspadnuta konika: eliptično-eliptična ravnina (eliptična ravnina), hiperbolično-eliptična ravnina (hiperbolična ravnina), hiperbolično-hiperbolična ravnina i eliptično-hiperbolična ravnina, te pet ravnina čija je apsolutna figura raspadnuta konika: parabolično-eliptična ravnina (euklidska ravnina), parabolično-hiperbolična ravnina (pseudoeuklidska ravnina), hiperbolično-parabolična ravnina (kvazihyperbolična ravnina), eliptično-parabolična ravnina (kvazieliptična ravnina) i parabolično-parabolična ravnina (izotropna ravnina), [16].

Evoluta dane krivulje je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, a istovremeno to je i omotaljka njezinih normala. Pojam evolute uveo je 1665. godine Christian Huygens, a od tada do danas o evolutama konika u euklidskoj ravnini napisani su brojni radovi. U ostalim projektivno-metričkim ravninama svojstva evoluta uz isticanje njihovih karakteristika vezanih za Plückerove formule (red, razred, broj dvostrukih točaka/tangenata, broj šiljaka, infleksionih točaka/pravaca) do sada nisu proučavana.

Rad je podijeljen na pet poglavlja u kojima je napravljen opsežan pregled osnovnih pojmova i svojstava evoluta konika u sedam od navedenih devet ravnina.

U izotropnoj ravnini nije definirana okomitost te sve kružnice imaju središte u apsolutnoj točki pa stoga u toj ravnini nema smisla promatrati evolute. U eliptičnoj se ravnini pojam evolute može definirati, ali je njihova konstruktivna obrada izrazito teška jer je



apsolutna figura imaginarna krivulja 2. reda. Iz tog razloga će i ova ravnina biti izuzeta iz promatranja u radu.

U radu je detaljno proučeno kako položaj konike prema apsolutnoj figuri utječe na red i razred njezine evolute.

Pregled rada po poglavljima:

Prvo poglavlje odnosi se na euklidsku ravninu gdje se daje pregled brojnih poznatih činjenica o evolutama konika.

Drugo poglavlje bavi se evolutama konika u pseudoeuklidskoj ravnini, promatraju se i konstruiraju evolute kao pravčaste omotaljke krivulja 2. reda.

U prvom dijelu drugog poglavlja istraživanje je provedeno sintetičkom i konstruktivnom metodom na projektivnom modelu pseudoeuklidske ravnine. Drugi dio drugog poglavlja posvećen je analitičkoj obradi istraživanja, gdje se na afinom modelu pseudoeuklidske ravnine potvrđuje točnost tvrdnji iz prvog dijela drugog poglavlja.

U poglavlju se posebno ističu rezultati koji se razlikuju od onih u euklidskoj ravnini.

Treće poglavlje bavi se evolutama konika u kvazihiperboličnoj ravnini.

Evoluta se promatra kao točkovna krivulja za krivulju 2. razreda i bez obzira što se do spoznaje o evolutama u kvazihiperboličnoj ravnini može doći koristeći princip dualiteta iz pseudoeuklidske ravnine, ovdje su one originalno konstruirane na pogodno odabranom modelu te ravnine.

Četvrto poglavlje odnosi se na kvazieliptičnu ravninu gdje se daje pregled osnovnih svojstava ravnine i činjenica vezanih za evolute konika u toj ravnini.

Peto poglavlje odnosi se na hiperboličnu ravninu u kojoj je metrika inducirana realnom krivuljom 2. reda. Istaknimo da je hiperbolična ravnina proučavana tako da se promatraju sve točke projektivne ravnine bez obzira nalaze li se unutar apsolutne konike, izvan nje ili na njoj, kao i svi pravci koji apsolutnu koniku sijeku realno, imaginarno ili je dodiruju. Stoga je proučavanje hiperbolične ravnine obuhvatilo ne samo hiperbolično-eliptičnu ravninu, već i hiperbolično-hiperboličnu i eliptično-hiperboličnu ravninu.

U hiperboličnoj ravnini konstruiraju se evolute kao pravčaste omotaljke krivulja 2. reda.

Pri istraživanju u projektivnim modelima projektivno-metričkih ravnina koriste se metode sintetičke geometrije koje omogućuju konstruktivnu obradu krivulja u dinamičkim računalnim programima *The Geometer's Sketchpad* i *Geogebra*.

Pri analitičkom istraživanju evoluta koriste se programi *Wolfram Mathematica* i *Demos*.

Cilj je rada sistematizacija činjenica vezanih za projektivno-metričke ravnine te znanstveni doprinos pri klasifikaciji evoluta i njihovoj konstruktivnoj obradi.

Rezultati ovog doktorskog rada doprinjet će boljem shvaćanju sličnosti i razlika između evoluta konika u istaknutim projektivno-metričkim ravninama i euklidskoj ravnini.

# Poglavlje 1

## Evolute u euklidskoj ravnini

### 1.1 Algebarske krivulje

Ravninska algebarska krivulja  $n$ -tog reda je skup svih točaka  $T(x, y)$  čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu  $f^n(x, y) = 0$ , gdje je  $f^n(x, y)$  polinom  $n$ -tog stupnja.

*Red* ravninske algebarske krivulje jednak je broju njezinih sjecišta s bilo kojim pravcem ravnine. Ta sjecišta mogu biti realna, u parovima konjugirano imaginarna, jednostruka i višestruka.

*Razred* ravninske algebarske krivulje jednak je broju tangenata (realnih i imaginarnih), koje možemo povući na tu krivulju iz po volji odabrane točke koja ne leži na toj krivulji. Skup svih tangenata u svim točkama algebarske krivulje reda  $n$  čini algebarsku krivulju nekog razreda  $k$ , pri čemu je općenito  $n \neq k$ .

Točke krivulje u kojima postoji jedinstvena tangenta, nazivamo regularnim točkama krivulje. Takve su gotovo sve točke algebarske krivulje. Pored regularnih, na algebarskim krivuljama mogu postojati i singularne točke u kojima krivulja ima više tangenata. To su na primjer višestruke točke u kojima krivulja samu sebe siječe. Broj takvih točaka algebarske krivulje je ograničen.

Dvostruki elementi algebarske krivulje  $n$ -tog reda su dvostruke točke (čvorovi, šiljci ili izolirane dvostruke točke), dok su za algebarsku krivulju  $n$ -tog razreda dvostruki elementi, dvostruki pravci (dvostruke tangente, infleksioni pravci ili izolirani dvostruki pravci).

Nedegenerirana algebarska krivulja reda  $n$  može imati najviše  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  dvostrukih točaka, analogno nedegenerirana algebarska krivulja razreda  $n$  može imati najviše  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  dvostrukih pravaca.

Povezanost karakterističnih osobina algebarske krivulje dane su sljedećim relacijama koje se zovu *Plückerove formule* i prvi puta su objavljene u njegovu „Sustavu analitičke geometrije u ravnini” 1834. godine:

$$\begin{aligned}k &= n(n - 1) - 2d - 3r, \\n &= k(k - 1) - 2t - 3w, \\w &= 3n(n - 2) - 6d - 8r, \\r &= 3k(k - 2) - 6t - 8w,\end{aligned}$$

gdje je  $n$  red krivulje,  $k$  razred krivulje,  $d$  broj dvostrukih točaka (čvorova i izoliranih dvostrukih točaka),  $r$  broj šiljaka,  $t$  broj dvostrukih pravaca (dvostrukih tangenata i izoliranih dvostrukih pravaca) i  $w$  broj infleksionih točaka (infleksionih pravaca) krivulje, [21], [23]. Iz prve formule vidljivo je da ako krivulja  $n$ -tog reda nema singularnih točaka, onda je njezin razred  $n(n - 1)$ , a broj infleksionih točaka takve krivulje određuje se relacijom  $w = 3n(n - 2)$ , pri čemu neke od tih infleksionih točaka mogu biti i imaginarne. Formulu za određivanje samo realnih infleksionih točaka dao je F. Klein. Ona ima oblik

$$w_1 = k + r_1 + 2d_1 - 2t_1 - n$$

pri čemu je  $d_1$  broj realnih dvostrukih točaka,  $r_1$  broj realnih šiljaka,  $t_1$  broj izoliranih dvostrukih pravaca i  $w_1$  broj realnih infleksionih točaka takve krivulje.

*Rod* algebarske krivulje  $n$ -tog reda jednak je broju  $p$  koji je razlika između najvećeg mogućeg broja dvostrukih točaka koje može imati nedegenerirana krivulja toga reda, odnosno razreda, i stvarnog broja dvostrukih točaka koje ima promatrana krivulja. Veza ostalih karakterističnih osobina algebarske krivulje roda  $p$  prikazan je sljedećim relacijama:

$$\begin{aligned}p &= \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - d - r, \\p &= \frac{(k - 1)(k - 2)}{2} - t - w.\end{aligned}$$

Ako je krivulja roda 0 tada se može izraziti racionalnim funkcijama nekog parametra. Takve se algebarske krivulje nazivaju *racionalnim krivuljama*, [21], [23], [17]. Međutim obratno ne vrijedi, nije svaka racionalna krivulja roda 0.

## 1.2 Koordinatizacija i analitički model projektivne ravnine

Neka su  $\mathcal{P}$  i  $\mathcal{L}$  neprazni disjunktni skupovi. Elemente od  $\mathcal{P}$  nazivat ćemo točkama i označavati  $A, B, C, \dots$ , a elemente od  $\mathcal{L}$  nazivat ćemo pravcima i označavati  $a, b, c, \dots$ . Neka je  $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$  relacija koju ćemo zvati relacijom incidencije, [18], [7].

**Definicija 1.2.1.** *Uređena trojka  $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$  se naziva projektivna ravnina ako vrijede sljedeći aksiomi:*

- (P1) *Za svake dvije različite točke postoji jedinstveni pravac incidentan s njima.*
- (P2) *Za svaka dva različita pravca postoji točka incidentna s njima.*
- (P3) *Postoje četiri točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne.*

Poznato je da projektivna ravnina ima različite modele tj. realizacije, [18], [7]. Neka je  $F$  polje, a  $V$  trodimenzionalni vektorski prostor nad  $F$ , ( $V \cong F^3$ ). Označimo sa  $\mathcal{P}$  skup svih jednodimenzionalnih potprostora od  $V$ , sa  $\mathcal{L}$  skup svih dvodimenzionalnih potprostora od  $V$  te neka je  $I$  relacija inkluzije. Uređena trojka  $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$  je projektivna ravnina koju označavamo  $PG(2, F)$ .

Projektivna ravnina konstruirana pomoću potprostora vektorskog prostora  $\mathbb{R}^3$  označava se s  $PG(2, \mathbb{R})$  (kao projektivna geometrija dimenzije 2 nad poljem  $\mathbb{R}$ ).

U analitičkom modelu realne projektivne ravnine  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = PG(2, \mathbb{R})$  točke, odnosno pravci, su klase uređenih trojki realnih brojeva koje se nazivaju homogenim koordinatama točke, odnosno homogenim koordinatama pravca

$$\begin{aligned}\lambda(x_0, x_1, x_2) &= (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}/\{0\}, \\ \mu[u_0, u_1, u_2] &= [\mu u_0, \mu u_1, \mu u_2], \quad \mu \in \mathbb{R}/\{0\},\end{aligned}$$

s tim što je isključena trojka  $(0, 0, 0)$ , odnosno  $[0, 0, 0]$ .

Dvije trojke  $(x_0, x_1, x_2)$  i  $(y_0, y_1, y_2)$  predstavljaju istu točku ako pripadaju istoj klasi, tj. ako postoji realan broj  $\lambda \neq 0$  takav da je  $x_i = \lambda y_i$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Analogno, dvije trojke  $[u_0, u_1, u_2]$  i  $[v_0, v_1, v_2]$  predstavljaju isti pravac ako pripadaju istoj klasi, tj. ako postoji realan broj  $\mu \neq 0$  takav da je  $u_i = \mu v_i$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ , [18].

**Napomena.** Zbog praktičnih razloga uređena trojka u oblim zagradama označava točku, a trojka u uglatim zagradama označava pravac.

Točka  $X(x_0, x_1, x_2)$  i pravac  $u[u_0, u_1, u_2]$  su incidentni ako i samo ako vrijedi

$$x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 = 0, \text{ tj. } X^T u = 0.$$

Koordinate pravca  $u[\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2]$  zadanog točkama  $X(x_0, x_1, x_2)$  i  $Y(y_0, y_1, y_2)$ , u oznaci  $u \sim X \wedge Y$  [9], računaju se kao vektorski produkt iz homogenih koordinata točaka

$$[\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2] \sim (x_0, x_1, x_2) \wedge (y_0, y_1, y_2) = [x_1y_2 - x_2y_1, x_2y_0 - x_0y_2, x_0y_1 - x_1y_0],$$

pri čemu jednadžba pravca  $u$  ima oblik

$$\begin{vmatrix} \hat{x}_0 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (x_1y_2 - x_2y_1)\hat{x}_0 + (x_2y_0 - x_0y_2)\hat{x}_1 + (x_0y_1 - x_1y_0)\hat{x}_2 = 0.$$

Analogno koordinate točke  $X(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$  zadane kao sjecište pravaca  $u[u_0, u_1, u_2]$  i  $v[v_0, v_1, v_2]$ , u oznaci  $X \sim u \wedge v$ , računaju se kao vektorski produkt iz homogenih koordinata pravaca

$$(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2) \sim [u_0, u_1, u_2] \wedge [v_0, v_1, v_2] = (u_1v_2 - u_2v_1, u_2v_0 - u_0v_2, u_0v_1 - u_1v_0),$$

pri čemu jednadžba točke  $X$  ima oblik

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_0 & \hat{u}_1 & \hat{u}_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{u}_0 + (u_2v_0 - u_0v_2)\hat{u}_1 + (u_0v_1 - u_1v_0)\hat{u}_2 = 0.$$

Neka je  $f(x_0, x_1, x_2)$  homogeni polinom stupnja  $n$  nad poljem  $\mathbb{R}$ . Skup svih točaka projektivne ravnine  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0 \tag{1.1}$$

naziva se *algebarskom krivuljom  $n$ -tog reda*, dok se skup svih pravaca projektivne ravnine  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu

$$f(u_0, u_1, u_2) = 0 \tag{1.2}$$

naziva *algebarskom krivuljom (omotaljkom)  $n$ -tog razreda*. Algebarska krivulja prikazana jednadžbom (1.1) ili (1.2) je nedegenerirana ili neraspadnuta ako je pripadni homogeni polinom ireducibilan nad poljem  $\mathbb{R}$ . Ako je homogeni polinom reducibilan, odnosno može se rastaviti na dva ili više ireducibilnih polinoma stupnja nižeg od  $n$  nad poljem  $\mathbb{R}$ , tada je krivulja degenerirana ili raspadnuta, [9], [18].

### 1.3 Polariteti konika

Jednadžba konike u matricnom obliku glasi  $X^T C X = 0$ , što se može napisati i u obliku  $(CX)^T X = 0$ , jer je  $C$  simetrična matrica 3. reda pridružena krivulji koja se naziva *matricom konike*, a  $X$  jednostupčana koordinatna matrica. Ako je krivulja nede-generirana tada je pripadna matrica konike  $C$  regularna matrica, u suprotnom je matrica konike singularna matrica. Neka je  $C$  regularna matrica,  $CX$  se može predstaviti kao slika točke  $X$  u polaritetu zadanom matricom  $C$ , stoga jednadžba  $X^T C X = 0$  izražava incidenciju točke  $X$  i njezine polare, pravca koji joj je pridružen u tom preslikavanju. Dakle, nesingularna konika zadaje polaritet, a točke konike su one točke ravnine koje su incidentne s vlastitom polarom. Polara točke na konici je tangenta konike u toj točki. Obrnuto, ako je zadan polaritet ravnine, konika se može zadati kao skup točaka koje su incidentne sa svojom polarom, [18].

**Definicija 1.3.1.** *Autopolarni trouh je trouh, ujedno i trostran, takav da su svaki vrh i nasuprotna stranica uzajamno pridruženi kao pol i polara u zadanom polaritetu.*

**Definicija 1.3.2.** *Točke  $X$  i  $Y$  su konjugirane u nekom polaritetu (tj. u odnosu na neku koniku) ako jedna od njih leži na polari druge.*

Točka konike je incidentna s vlastitom polarom, tj. sama sebi je konjugirana. Također, i svaka druga točka tangente konjugirana je s diralištem tangente.

Dualno vrijedi i za dva pravca.

**Definicija 1.3.3.** *Pravci  $u$  i  $v$  su konjugirana u nekom polaritetu ako svaki od njih prolazi polom drugog.*

Tangenta konike je pravac koji je sam sebi konjugiran [2], [18].

**Teorem 1.3.1.** *Neka pravac  $o$  siječe koniku  $c$  u dvjema različitim točkama,  $T_1$  i  $T_2$ . Ako je  $P$  bilo koja točka pravca  $o$  različita od sjecišta s konikom, a  $Q$  točka na pravcu  $o$  koja je konjugirana s  $P$ , onda vrijedi  $H(T_1 T_2, PQ)$ . Dakle, konjugirane točke na pravcu  $o$  ujedno su i harmonički pridružene s obzirom na sjecišta pravca s konikom.*

Uočimo,  $Q$  je sjecište pravca  $o$  i polare od  $P$ .

Nesingularnom konikom, danom jednađbom  $X^T C X = 0$  određen je prema dosadašnjem razmatranju, jedan polaritet pri kojemu je nekoj čvrstoj točki  $X'$  pridružena polara  $U' = C X'$ . Jednađba te polare, čija je koordinatna matrica  $U'$ , ima oblik  $(U')^T X = 0$ . Ako u tu jednađbu uvrstimo pravčaste koordinate promatrane čvrste polare  $U' = C X'$ , dobijemo jednađbu polare točke  $X'$  u obliku  $(X')^T C X = 0$ , [18].



## 1.4 Oskulacijske kružnice i evolute konika u euklidskoj ravnini

U regularnoj točki  $T$  krivulje  $k$  promatramo tangentu i normalu. Bilo koja kružnica koja prolazi točkom  $T$ , a središte joj leži na normali, ima istu tangentu u  $T$  kao i krivulja  $k$ . Svaka takva kružnica ima s krivuljom  $k$  dvije zajedničke točke podudarne s točkom  $T$  pa kažemo da kružnica i krivulja imaju u točki  $T$  *dodir 1. reda*, a kružnicu nazivamo *dirnom kružnicom* krivulje  $k$  u točki  $T$ . Dirnih kružnica krivulje  $k$  u točki  $T$  ima beskonačno mnogo (isto koliko i točaka na normali), i one čine pramen dirnih kružnica krivulje  $k$  u točki  $T$ . Ako je  $k$  algebarska krivulja reda  $n$ , svaka dirna kružnica imat će s njom, osim dodirne točke  $T$  koju brojimo kao 2 sjecišta, još  $2(n - 1)$  zajedničkih točaka. U pramenu dirnih kružnica krivulje  $k$  u regularnoj točki  $T$  uvijek postoji jedna kružnica kojoj se još jedno od preostalih  $2(n - 1)$  sjecišta podudara s točkom  $T$ . Ta kružnica i krivulja  $k$  imaju 3 zajedničke točke podudarne s točkom  $T$  i kažemo da u  $T$  imaju *dodir 2. reda*. Ovu kružnicu nazivamo *oskulacijskom kružnicom* krivulje  $k$  u točki  $T$  ili *kružnicom zakrivljenosti* krivulje  $k$  u točki  $T$ .

Ako je krivulja  $k$  u okolini točke  $T$  simetrična u odnosu na normalu, tada će ona sa svojom oskulacijskom kružnicom imati 4 zajedničke točke u  $T$ . U takvim slučajevima kažemo da krivulja i kružnica imaju *dodir 3. reda* ili da se hiperoskuliraju, a kružnicu nazivamo *hiperoskulacijskom kružnicom* krivulje  $k$ .

Oskulacijska kružnica konike jedinstvena je za svaku njezinu točku  $T$ . Budući da u točki  $T$  ove dvije krivulje imaju dodir 2. reda, tj. tri sjecišta koja su pala u istu točku  $T$ , svaka oskulacijska kružnica siječe koniku još u jednoj realnoj točki. Zakrivljenost krivulje  $k$  u točki  $T$  jednaka je zakrivljenosti njezine oskulacijske kružnice u  $T$ .

Jedan od načina da se odredi jednadžba oskulacijske kružnice u proizvoljnoj točki  $T(x_1, y_1)$  krivulje drugog stupnja je sljedeći, [5]:

Neka je elipsa zadana jednadžbom  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  i  $T(x_1, y_1)$  neka je proizvoljna točka elipse. Parametarska jednadžba normale elipse u točki  $T$  zadana je jednadžbom

$$x(\tau) = x_1(1 + b^2\tau), \quad y(\tau) = y_1(1 + a^2\tau), \quad (1.3)$$

gdje je  $\tau$  parametar pomične točke  $S$  na normali.

Jednadžba kružnice koja dira elipsu u točki  $T(x_1, y_1)$ :

$$[x - x_1(1 + b^2\tau)]^2 + [y - y_1(1 + a^2\tau)]^2 = (b^4x_1^2 + a^4y_1^2)\tau^2 \quad (1.4)$$

Ako iz jednadžbe kružnice (1.4) i jednadžbe elipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  eliminiramo npr. koordinatu  $y$ , dobivamo bikvadratnu jednadžbu u  $x$ , koja je djeljiva faktorom  $(x - x_1)^2$ . Nakon djeljenja dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$e^4x^2 - 2e^2(a^2 + b^2 + 2a^2b^2\tau)x_1x + [e^4x_1^2 + 4a^4b^2(1 + a^2\tau)(1 + b^2\tau)] = 0 \quad (1.5)$$

s korijenima  $x_3, x_4$ , koji se mogu izračunati. Oskulacijska kružnica ima s elipsom četiri sjecišta, od kojih su tri pala u točku  $T$ , tj. mora osim već ispunjenog uvjeta  $x_2 = x_1$  biti ispunjen još i uvjet  $x_3 = x_1$ . Ta jednakost daje nam za  $\tau$  vrijednost:

$$\tau = \frac{e^2x_1^2 - a^4}{a^4b^2}. \quad (1.6)$$

Sada uvrštavanjem  $\tau$  u jednadžbe (1.3) dobivamo središte oskulacijske kružnice. Formula za udaljenostu dviju točaka dati će nam polumjer oskulacijske kružnice. Tako dobivamo formule:

$$x = \frac{e^2}{a^4}x_1^3, \quad y = -\frac{e^2}{b^4}y_1^3, \quad r^2 = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^3}{a^8b^8}. \quad (1.7)$$

Sad možemo zapisati jednadžbu oskulacijske kružnice.

Giba li se točka  $T$  neprekinuto po konici, tada će središta pripadnih oskulacijskih kružnica opisivati algebarsku krivulju kojoj će tangente biti odgovarajuće normale konike.

Tu krivulju nazivamo **evolutom** konike.

**Definicija 1.4.1.** *Evoluta dane krivulje je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, istovremeno to je i omotaljka njezinih normala, [23].*

Prema tome su prve dvije jednadžbe iz (1.7) parametarske jednadžbe evolute elipse za parametre  $x_1, y_1$  i vezane su relacijom  $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$ . A eliminiramo li ih iz odnosa tri jednadžbe, proizlazi poznata jednadžba evolute elipse, **kao geometrijskog mjesta središta oskulacijskih kružnica elipse**,

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}. \quad (1.8)$$

Iste formule (1.7) vrijede i u slučaju elemenata oskulacijske kružnice hiperbole u njezinoj točki  $T(x_1, y_1)$ , dok se jednadžba evolute razlikuje od jednadžbe (1.8) samo po tome što na lijevoj strani stoji razlika,  $(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}$ .

Za oskulacijsku kružnicu parabole u točki  $T(x_1, y_1)$  imamo:

$$x = 3x_1 + p, \quad y = -\frac{2x_1y_1}{p}, \quad r^2 = \frac{(2x_1 + p)^3}{p}. \quad (1.9)$$

Eliminacijom  $x_1$ ,  $y_1$  iz prve dvije jednadžbe i jednadžbe  $y_1^2 = 2px_1$  slijedi jednadžba evolute parabole

$$27py^2 = 8(x - p)^3. \quad (1.10)$$

**Teorem 1.4.1.** *Evoluta konike općenito je krivulja šestoga reda i četvrtog razreda.*

Teorem je dokazan u velikom broju radova, na različite načine, istaknimo [8].

Činjenicu da je evoluta konike krivulja četvrtog razreda možemo pokazati i tako da promatramo pridruženje između svih točaka konike kao niza drugog reda i svih točaka na beskonačno dalekom pravcu ravnine kao niza prvog reda.

*Dokaz.* Neka je  $x$  tangenta u točki  $X$  konike, koja siječe beskonačno daleki pravac u točki  $X'$ . Tada se točki  $X$  konike pridružuje ona točka  $X''$  beskonačno dalekog pravca, koja je u apsolutnoj (cirkularnoj) involuciji na tom pravcu pridružena točki  $X'$ . Obrnuto: bilo kojoj točki  $Y''$  beskonačno dalekog pravca pridružuju se one dvije točke konike, koje su dirališta tangenata položenih na koniku iz točke  $Y'$ , koja je u apsolutnoj involuciji pridružena točki  $Y''$ . Primjenom Chaslesove relacije [6], [30], zaključuje se da je rezultat ovoga 1 – 2 pridruženja spomenutih nizova točaka omotaljka četvrtog razreda.  $\square$

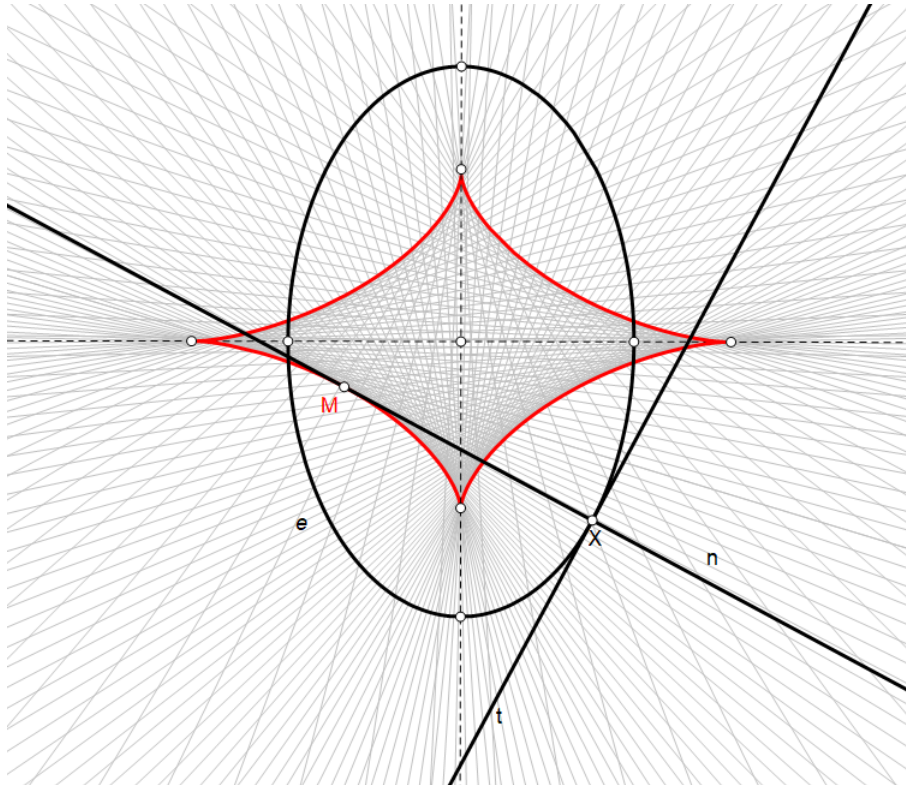
Poznati su i sljedeći odnosi dane krivulje i njezine evolute:

Točki ekstrema polumjera zakrivljenosti dane krivulje (tj. tjemenu dane krivulje) odgovara, općenito, šiljak evolute. Točki krivulje u kojoj je njezina zakrivljenost jednaka nuli, odgovara beskonačno daleka točka evolute, [23].

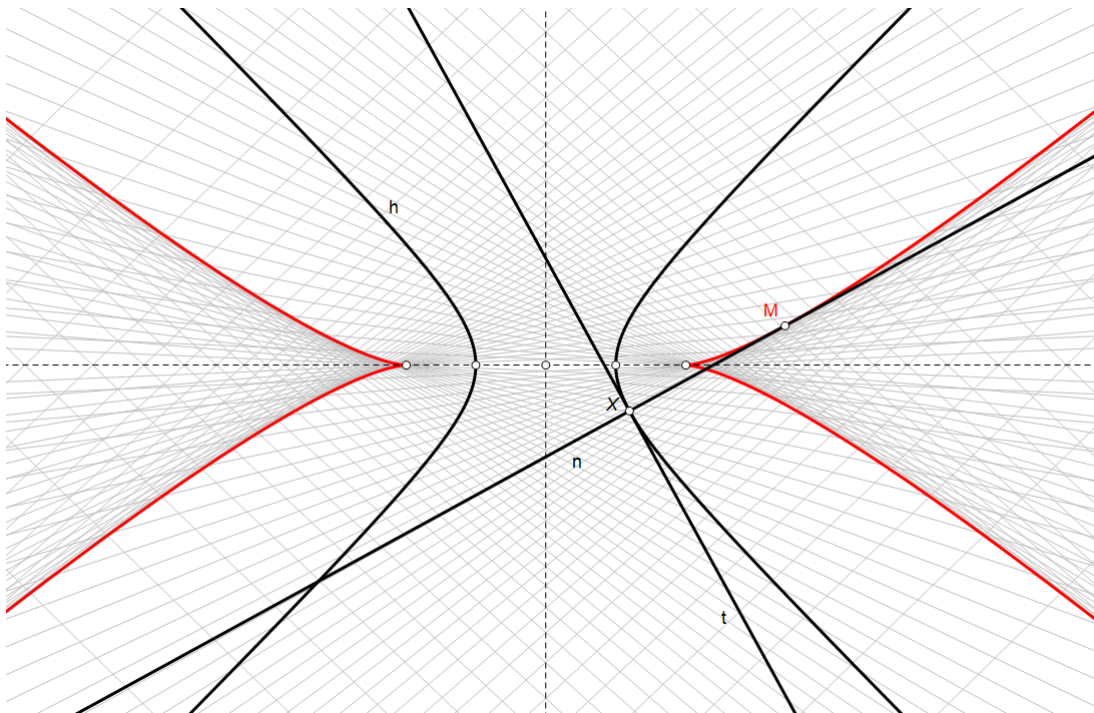
Kao što je poznato i iz gornjih jednadžbi vidljivo u euklidskoj ravnini za evolutu elipse, hiperbole i parabole zaključuje se sljedeće, (vidi Tablicu 1.1.):

- Evoluta elipse je algebarska krivulja 6. reda i 4. razreda, koja ima 4 realna šiljka koji su središta zakrivljenosti u tjemenu elipse i 2 imaginarna šiljka na beskonačno dalekom pravcu, koji odgovaraju središtima zakrivljenosti u imaginarnim beskonačno dalekim točkama elipse, (vidi sl. 1.1).
- Evoluta hiperbole je krivulja 6. reda i 4. razreda. Ima 2 realna šiljka koji odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u realnim tjemenu hiperbole, 2 imaginarna šiljka su središta zakrivljenosti u imaginarnim tjemenu, te 2 šiljka beskonačno daleko na apsolutnom pravcu, koji su središta zakrivljenosti u beskonačno dalekim točkama hiperbole, (vidi sl. 1.2).

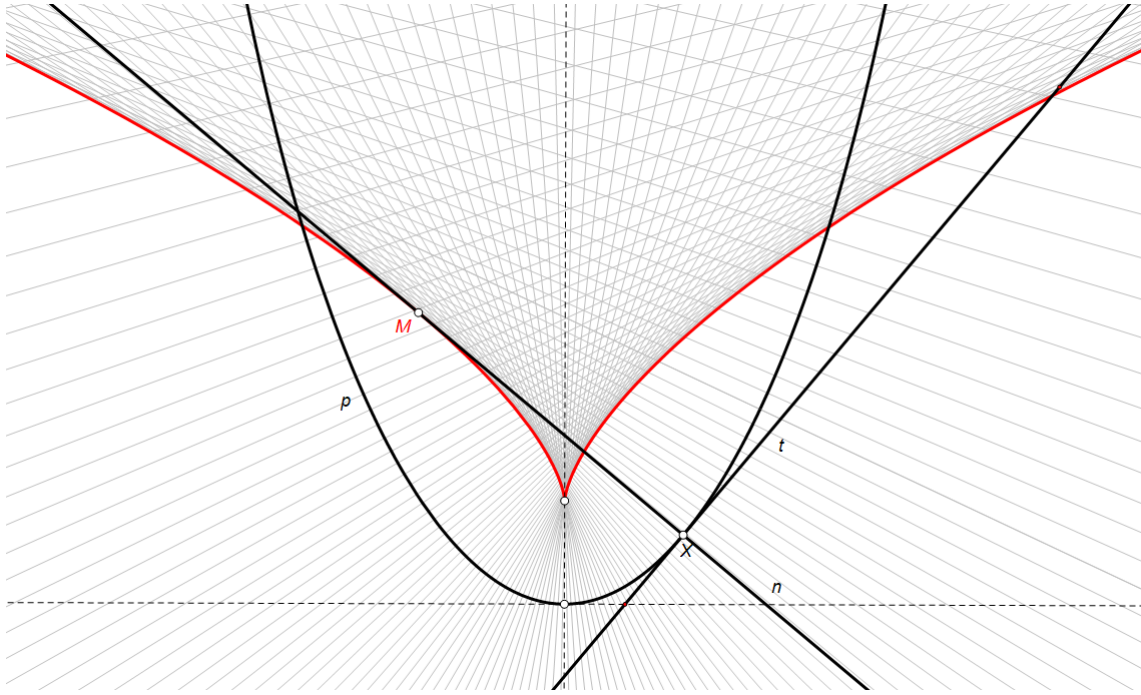
- Evoluta parabole je krivulja 3. reda i 3. razreda. Ima jedan realan šiljak koji odgovara središtu zakrivljenosti osculacijske kružnice u tjemenu parabole, (vidi sl. 1.3).



Slika 1.1: Evoluta elipse  $e$  u euklidskoj ravnini



Slika 1.2: Evoluta hiperbole  $h$  u euklidskoj ravnini


 Slika 1.3: Evoluta parabole  $p$  u euklidskoj ravni

Tablica 1.1

evoluta koje e-konike	razred	red	rod	broj dvostrukih pravaca	broj infleksionih pravaca	broj šiljaka
$e$	4	6	0	3	0	6
$h$	4	6	0	3	0	6
$p$	3	3	0	0	1	1

Do jednađbe evolute moguće je doći i na sljedeći način:

Neka je zadana krivulja predočena parametarskim jednađbama

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

Označimo s  $C(\xi, \eta)$  središte zakrivljenosti dane krivulje u točki  $(x, y)$ .

Njezine parametarske jednađbe imat će oblik

$$\xi = x - y' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}, \quad \eta = y + x' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}. \quad (1.11)$$

Služeći se tim jednađbama, određuju se evolute konika u euklidskoj ravni.

**Primjer 1.4.1.** *Odredimo evolutu elipse zadane parametarskom jednadžbom*

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Kako bismo izračunali koordinate središta zakrivljenosti  $C$  koristimo formule (1.11):

$$x' = (a \cos t)' = -a \sin t, \quad y' = (b \sin t)' = b \cos t,$$

$$x'' = (-a \sin t)' = -a \cos t, \quad y'' = (b \cos t)' = -b \sin t.$$

$$\begin{aligned} \xi &= x - y' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'} = a \cos t - b \cos t \cdot \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t} \\ &= a \cos t - \cos t \cdot \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{a} = \frac{a^2 \cos t - a^2 \sin^2 t \cos t - b^2 \cos^3 t}{a} \\ &= \frac{a^2 \cos t (1 - \sin^2 t) - b^2 \cos^3 t}{a} = \frac{1}{a} (a^2 \cos^3 t - b^2 \cos^3 t) = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= y + x' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'} = b \sin t - a \sin t \cdot \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t} \\ &= b \sin t - \sin t \cdot \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{b} = \frac{b^2 \sin t - a^2 \sin^3 t - b^2 \cos^2 t \sin t}{b} \\ &= \frac{b^2 \sin t (1 - \cos^2 t) - a^2 \sin^3 t}{b} = \frac{1}{b} (b^2 \sin^3 t - a^2 \sin^3 t) = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t. \end{aligned}$$

Iz čega slijedi

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t = \left( a - \frac{b^2}{a} \right) \cos^3 t, \quad \eta = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t = \left( b - \frac{a^2}{b} \right) \sin^3 t.$$

Eliminacijom parametra  $t$ , postizemo jednadžbu

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t \Rightarrow a\xi = (a^2 - b^2) \cos^3 t \Rightarrow \frac{a\xi}{a^2 - b^2} = \cos^3 t \Rightarrow \frac{(a\xi)^{\frac{2}{3}}}{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}} = \cos^2 t;$$

$$\eta = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \Rightarrow b\eta = (b^2 - a^2) \sin^3 t \Rightarrow \frac{b\eta}{[-(a^2 - b^2)]} = \sin^3 t \Rightarrow \frac{(b\eta)^{\frac{2}{3}}}{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}} = \sin^2 t.$$

$$\frac{(a\xi)^{\frac{2}{3}}}{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}} + \frac{(b\eta)^{\frac{2}{3}}}{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}} = 1 \Rightarrow (a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Ako je  $a\xi = X$ ,  $b\eta = Y$ ,  $a^2 - b^2 = A$ , jednažba evolute ima oblik

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}},$$

iz kojeg je vidljivo da je evoluta algebarska krivulja 6. reda.

U posebnom slučaju, pokazat će se da je evoluta kružnice točka tj. središte kružnice.

**Primjer 1.4.2.** *Odredimo evolutu kružnice zadane parametarskom jednadžbom*

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$

Koristimo formule (1.11):

$$x' = (r \cos t)' = -r \sin t, \quad y' = (r \sin t)' = r \cos t,$$

$$x'' = (-r \sin t)' = -r \cos t, \quad y'' = (r \cos t)' = -r \sin t.$$

$$\xi = x - y' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'} = r \cos t - r \cos t \cdot \frac{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r \cos t - r \cos t = 0;$$

$$\eta = y + x' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'} = r \sin t - r \sin t \cdot \frac{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r \sin t - r \sin t = 0.$$

Za evolute krivulja drugog stupnja možemo odrediti i njihove jednadžbe u pravčastim koordinatama, [5].

Jednadžba normale u zadanoj točki  $T(x_1, y_1)$  elipse glasi:

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2) x_1 y_1, \tag{1.12}$$

hiperbole,

$$a^2 y_1 x + b^2 x_1 y = (a^2 + b^2) x_1 y_1, \tag{1.13}$$

odnosno parabole,

$$y_1 x + p y = (p + x_1) y_1. \tag{1.14}$$

Ako se naime jednadžba normale elipse (1.12) identificira s jednadžbom pravca u pravčastim koordinatama  $ux + vy + 1 = 0$  slijedi relacija:

$$a^2 y_1 : -b^2 x_1 : -e^2 x_1 y_1 = u : v : 1,$$

odakle je

$$x_1 = -\frac{a^2}{e^2 u}, \quad y_1 = \frac{b^2}{e^2 v}.$$

Točka  $T(x_1, y_1)$  je ona točka elipse u kojoj se konstruirala normala, stoga njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu elipse,

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = e^4$$

odnosno,

$$e^4 u^2 v^2 - b^2 u^2 - a^2 v^2 = 0. \quad (1.15)$$

Jednadžba (1.15) predstavlja skup svih normala elipse, dakle evolutu elipse **kao oмотaljku normala**. Iz nje se može zaključiti da je evoluta elipse krivulja 4. razreda.

Istim postupkom dobiva se jednadžba evolute hiperbole u pravčastim koordinatama

$$e^4 u^2 v^2 + b^2 u^2 - a^2 v^2 = 0, \quad (1.16)$$

i jednadžba evolute parabole u pravčastim koordinatama

$$pu^3 + 2puv^2 + 2v^2 = 0, \quad (1.17)$$

iz koje možemo zaključiti da je evoluta parabole 3. razreda.



# Poglavlje 2

## Pseudoeuklidska ravnina

### 2.1 Osnovni pojmovi

Pseudoeuklidska ravnina (pe) je realna projektivna ravnina  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  u kojoj je metrika inducirana realnim pravcem  $f$  i dvjema realnim točkama  $J_1$  i  $J_2$  koje mu pripadaju. Apsolutna figura označava se s  $\mathcal{F}_{\text{PE}} = \{\mathbf{f}, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2\}$ , pri čemu pravac  $f$  nazivamo *apsolutnim pravcem*, a točke  $J_1$  i  $J_2$  *apsolutnim točkama*.

**Definicija 2.1.1.** *Točke koje pripadaju apsolutnom pravcu  $f$  nazivaju se **izotropnim točkama**. Pravci koji prolaze apsolutnom točkom  $J_1$  ili  $J_2$  nazivaju se **izotropnim pravcima**.*

*Dva pravca su **paralelna** ako je njihovo sjecište izotropna točka.*

*Dva su pravca **okomita** ukoliko s dva izotropna pravca koja spajaju njihovo sjecište s apsolutnim točkama  $J_1$  i  $J_2$  čine harmonijsku četvorku.*

Uobičajno je prema [11], [12], [13], [14], [20], [27] da se konstrukcije izvode na tzv. projektivnom modelu pseudoeuklidske ravnine s apsolutnom figurom  $\mathcal{F}_{\text{PE}} = \{\mathbf{f}, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2\}$  u konačnosti, a analitički izračuni uobičajno se izvode na tzv. afinom modelu pseudoeuklidske ravnine gdje je apsolutni pravac  $f$  određen jednadžbom  $x_0 = 0$ , a apsolutne točke  $J_1, J_2$  koordinatama  $(0, 1, \pm 1)$ .

Dvostrukim točkama  $J_1, J_2$  definirana je hiperbolička involucija na apsolutnom pravcu  $f$ , koja je analogon cirkularne involucije na nepravom ili beskonačno dalekom pravcu euklidske ravnine. Parovima pridruženih točaka te involucije prolaze međusobno okomiti pravci pseudoeuklidske ravnine. Konstrukcija okomitih pravaca se temelji na svojstvima potpunog četverovrha i na sljedećem poznatom teoremu o involucijama [18]:

**Teorem 2.1.1.** *Dvostruki elementi i par pridruženih elemenata neke involucije čine harmonijsku četvorku.*

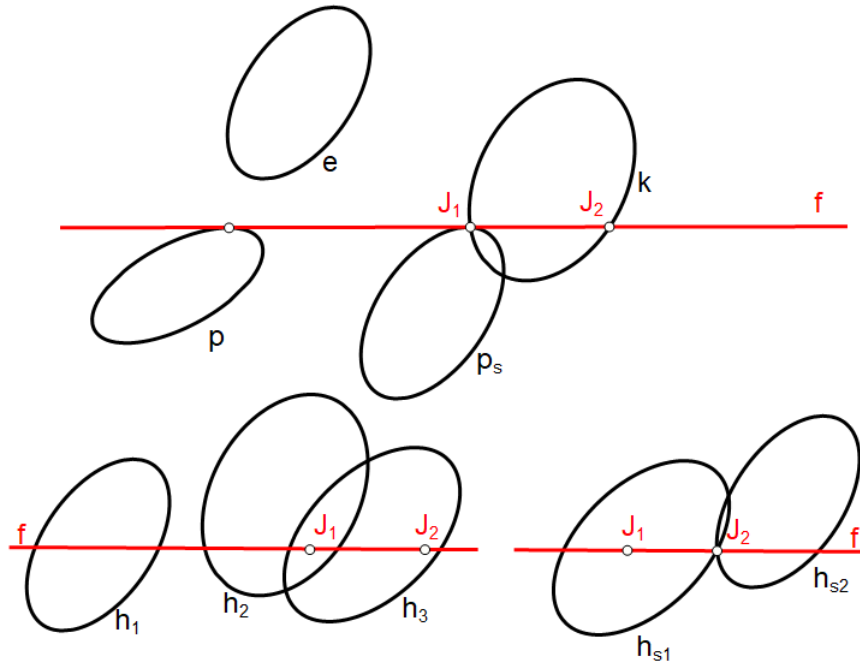
**Definicija 2.1.2.** *Algebarska krivulja reda  $n$  je **cirkularna** u pseudoeuklidskoj ravnini ako prolazi barem jednom apsolutnom točkom. Za krivulju  $k$  kažemo da ima **tip cirkularnosti**  $(r, t)$  ako je apsolutna točka  $J_1$  presjek krivulje  $k$  s apsolutnim pravcem  $f$  multipliciteta  $r$ , a apsolutna točka  $J_2$  presjek krivulje  $k$  s apsolutnim pravcem  $f$  multipliciteta  $t$ . Zbroj  $r + t$  definira se kao **stupanj cirkularnosti**.*

*Za krivulju reda  $n$  kažemo da je **potpuno cirkularna** ako je red krivulje jednak stupnju cirkularnosti, tj.  $n = r + t$ , [15], [12].*

Zbog realnosti apsolutnih točaka, konike se s obzirom na položaj prema apsolutnoj figuri, dijele na 9 različitih tipova (vidi sl. 2.1), [12]:

- *elipse*  $e$  koje sijeku apsolutni pravac  $f$  u dvije imaginarne točke,
- *hiperbole*  $h_1, h_2$  i  $h_3$  koje sijeku apsolutni pravac  $f$  u dvije realne točke,
  - hiperbola je tipa  $h_1$  ako iz apsolutnih točaka  $J_1$  i  $J_2$  postoje 2 para realnih i različitih izotropnih tangenta,
  - hiperbola je tipa  $h_2$  ako iz apsolutnih točaka postoje par realnih i različitih izotropnih tangenta i par konjugirano imaginarnih izotropnih tagenata,
  - hiperbola je tipa  $h_3$  ako iz apsolutnih točaka postoje dva para konjugirano imaginarne izotropnih tangenta,
- *specijalne hiperbole*  $h_{s1}, h_{s2}$  kod kojih je jedan od realnih presjeka s apsolutnim pravcem  $f$  jedna od apsolutnih točaka  $J_1$  ili  $J_2$ ,
  - hiperbola je tipa  $h_{s1}$  ako iz apsolutnih točaka  $J_1$  i  $J_2$  postoji par konjugirano imaginarnih izotropnih tangenta i dvostruka realna izotropna tangenta,
  - hiperbola je tipa  $h_{s2}$  ako iz apsolutnih točaka  $J_1$  i  $J_2$  postoji par realnih i različitih izotropnih tangenta i dvostruka realna izotropna tangenta,
- *parabole*  $p$  koje dodiruju apsolutni pravac  $f$ ,
- *specijalne parabole*  $p_s$  koje dodiruju apsolutni pravac  $f$  upravo u jednoj od apsolutnih točaka  $J_1$  ili  $J_2$ ,
- *kružnice*  $k$  koje sijeku apsolutni pravac  $f$  u obje apsolutne točke  $J_1$  i  $J_2$ .

Važno je istaknuti da u projektivnom modelu pseudoeuklidske ravnine, bez smanjenja općenitosti, svaka od konika pseudoeuklidske ravnine može se prikazati euklidskom kružnicom, što u mnogome olakšava konstrukcije alatima euklidske ravnine.



Slika 2.1: Tipovi konika u pseudoeuklidskoj ravnini

Za razliku od euklidske ravnine u kojoj egzistiraju samo kružnice kao cirkularne konike, u pseudoeuklidskoj ravnini u smislu cirkularnosti konike se dijele na, [12]:

- *necirkularne* (elipse  $e$ , parabole  $p$  i hiperbole  $h_1$ ,  $h_2$  i  $h_3$ ),
- *1-cirkularne* (specijalne hiperbole  $h_{s1}$ ,  $h_{s2}$ ),
- *potpuno cirkularne* (kružnice  $k$  i specijalne parabole  $p_s$ ).

Uz konike u pseudoeuklidskoj ravnini vezani su i sljedeći pojmovi, [12]:

- *Fokusi* konike su sjecišta njezinih izotropnih tangenata.

Konika općenito ima četiri fokusa, koji mogu biti realni i različiti, konjugirano imaginarni ili padaju zajedno (dvostruki i četverostruki). Sva četiri fokusa kružnice  $k$  padaju u istu točku tzv. četverostruki fokus ili središte kružnice. Parabola  $p$  ima četiri fokusa od kojih je jedan u neizotropnoj točki, drugi u izotropnom diralištu s apsolutnim pravcem, a preostala dva u apsolutnim točkama. Specijalna parabola  $p_s$  ima dvostruke fokuse u svakoj apsolutnoj točki. Elipsa  $e$  i hiperbola  $h_1$  imaju četiri realna fokusa. Hiperbole  $h_2$  i  $h_3$  imaju četiri imaginarna fokusa, dok specijalna hiperbola  $h_{s1}$  ima dva dvostruka realna, odnosno  $h_{s2}$  dva dvostruka imaginarna fokusa.

- *Središte* konike je pol apsolutnog pravca  $f$ .

Središte elipse  $e$  leži unutar krivulje, središte parabole  $p$  je na krivulji, a sve ostale konike imaju središte izvan krivulje.

- *Promjer* konike je svaki pravac kroz njezino središte (polara izotropne točke).
- *Konjugirani promjeri*  $p_1$  i  $p_2$  konike koji sijeku apsolutni pravac  $f$  u točkama  $P_1$  i  $P_2$  redom su takvi promjeri konike za koje vrijedi da je točka  $P_1$  pol pravca  $p_2$ , a točka  $P_2$  pol pravca  $p_1$  u odnosu na danu koniku.
- *Osi* konike su dva međusobno okomita konjugirana promjera konike.
- *Tjemena* konike su sjecišta konike sa svojim osima.

Elipse  $e$  imaju četiri realna i različita tjemena. Hiperbole  $h_1$  i  $h_3$  imaju dva realna i različita tjemena, te dva konjugirano imaginarna. Hiperbole  $h_2$  imaju četiri konjugirano imaginarna tjemena. Specijalne hiperbole  $h_{s1}$  i  $h_{s2}$  te specijalne parabole  $p_s$  imaju realno četverostruko tjeme u apsolutnoj točki. Parabole  $p$  imaju jedno realno jednostruko tjeme i jedno trostruko na apsolutnom pravcu. Kružnice  $k$  nemaju tjemena.

- *Ravnalice* konike su polare fokusa.

Krivulja 2. reda  $c$  može se zapisati u homogenim točkovnim koordinatama, [14], [12], [9]

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \quad (2.1)$$

odnosno u afinim koordinatama

$$a_{00} + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{12}xy = 0. \quad (2.2)$$

Konika  $c$  siječe apsolutni pravac  $f$  u točkama čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0. \quad (2.3)$$

Uvjeti za koeficijente pojedinog tipa krivulje 2. reda dani su u sljedećoj tablici:

Tablica 2.1

hiperbola	$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$
parabola	$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
elipsa	$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$
specijalna hiperbola	$a_{11} + a_{22} + 2a_{12} = 0$ ili $a_{11} + a_{22} - 2a_{12} = 0$
specijalna parabola	$a_{11} = a_{22} = -a_{12}$ ili $a_{11} = a_{22} = a_{12}$
kružnica	$a_{12} = 0$ i $a_{11} = -a_{22}$

## 2.2 Oskulacijske kružnice i evolute konika u pseudoeuklidskoj ravnini

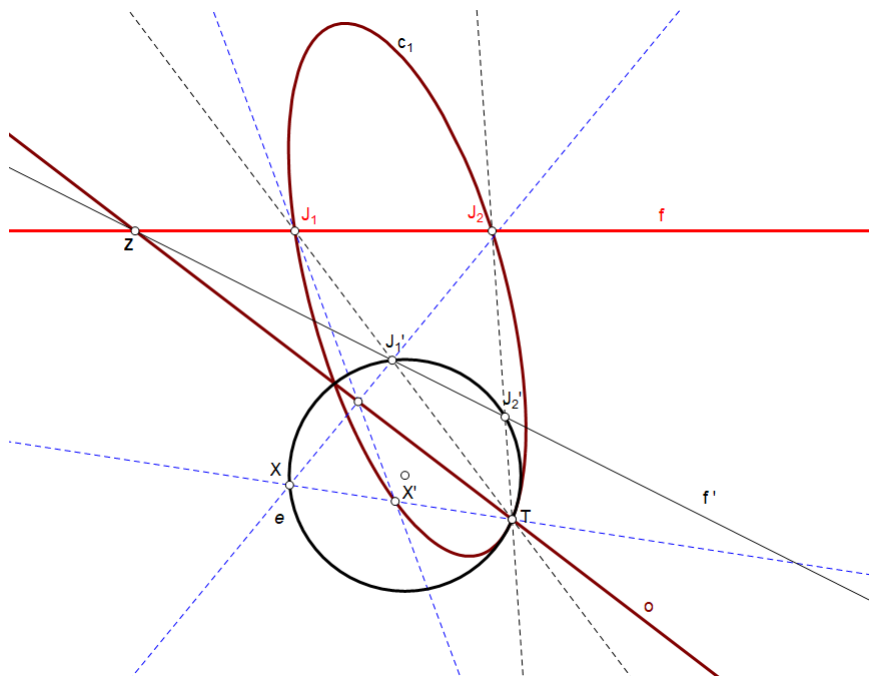
### 2.2.1 Konstrukcija oskulacijske kružnice konike

U poglavlju 1.4 objašnjeno je značenje pojma oskulacijska kružnica konike.

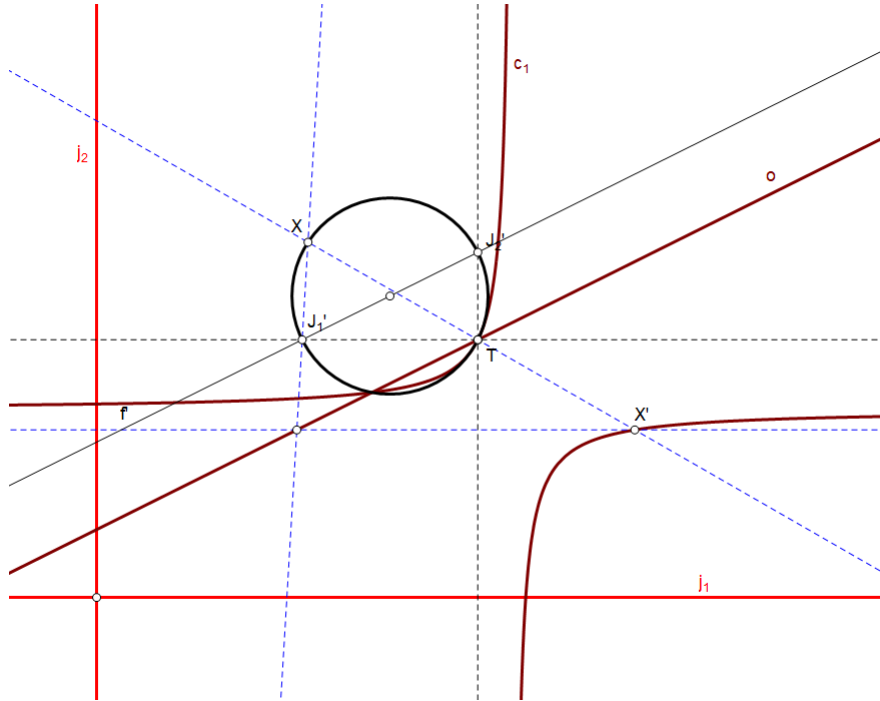
Koristeći se elacijama, pokazat će se konstrukcija oskulacijske kružnice konike u po volji odabranoj točki konike, [24], [31].

Potrebno je odrediti takvu elaciju, koja će danu koniku  $c$  preslikati u oskulacijsku kružnicu  $c_1$  u točki  $T$  konike. Točka  $T$  izabere se za centar jedne elacije, kojoj treba odrediti os i par pridruženih točaka. Neka su spojnice  $TJ_1$  i  $TJ_2$  dane točke  $T$  s apsolutnim točkama zrake takve elacije, a njihova sjecišta  $J_1'$  i  $J_2'$  s konikom  $c$  bit će pridružene apsolutnim točkama. Dakle, parovi su pridruženih točaka  $J_1, J_1'$  i  $J_2, J_2'$ . Apsolutnom pravcu  $f$  je tada pridružena spojnica  $f' = J_1'J_2'$ , dakle,  $f'$  je nedogledni pravac elacije.

Pravci  $f$  i  $f'$  moraju se sjeći na osi elacije, pa os elacije prolazi tim sjecištem i točkom  $T$ . Elacija  $(T, o, J_1, J_1')$  preslikava zadanu koniku  $c$  u traženu oskulacijsku kružnicu  $c_1$  u točki  $T$ , (vidi slike 2.2, 2.3).



Slika 2.2: Konstrukcija oskulacijske kružnice elipse  $e$  na projektivnom modelu p-ravnine



Slika 2.3: Konstrukcija oskulacijske kružnice elipse  $e$  na afinom modelu pe-ravnine;  $f$  je beskonačno daleki pravac, apsolutne točke  $J_1, J_2$  incidentne su s međusobno okomitim pravcima  $j_1$  i  $j_2$  u euklidskom smislu

## 2.2.2 Evolute konika u pseudoeuklidskoj ravnini

Evoluta dane krivulje je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, istovremeno to je i omotaljka njezinih normala, [23].

**Teorem 2.2.1.** *Evoluta konike u pseudoeuklidskoj ravnini općenito je krivulja šestoga reda i četvrtog razreda.*

*Dokaz.* Neka je  $x$  tangenta u točki  $X$  konike, koja siječe apsolutni pravac  $f$  u točki  $X'$ . Tada se točki  $X$  konike pridružuje ona točka  $X''$  apsolutnog pravca, koja je u apsolutnoj involuciji na tom pravcu pridružena točki  $X'$ . Obrnuto: bilo kojoj točki  $Y''$  apsolutnog pravca pridružuju se one dvije točke konike, koje su dirališta tangenata položenih na koniku iz točke  $Y'$ , koja je u apsolutnoj involuciji pridružena točki  $Y''$ .

Primjenom Chaslesove relacije [6], [30], zaključuje se da je rezultat ovoga 1 – 2 pridruženja spomenutih nizova točaka omotaljka četvrtog razreda.  $\square$

Zbog realnosti apsolutnih točaka u pseudoeuklidskoj ravnini postoji čak 9 vrsta različitih konika pa postoji i veći broj različitih tipova njihovih evoluta čije će se karakteristike istaknuti u ovome poglavlju.

- Osi konike  $o_1, o_2$  i apsolutni pravac  $f$  stranice su autopolarnog trostrana i dvostruki pravci evolute.
- Šiljci evolute na apsolutnom pravcu  $f$  nalaze se u točkama koje su u apsolutnoj involuciji pridružene točkama u kojima konika siječe apsolutni pravac  $f$ .
- Šiljci na osima odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u tjemenu dana konike i konstruiraju se elacijom, [24] (str. 65, poglavlje 3.1). Istom elacijom može se konstruirati bilo koje središte zakrivljenosti dane konike.

Evoluta elipse  $e$  i hiperbola tipa  $h_1, h_2$  i  $h_3$  neraspadnuta je krivulja četvrtog razreda s tri dvostruka pravca, dok u slučaju parabole  $p$  i cirkularnih konika tj. specijalnih hiperbola<sup>1</sup>  $h_{s1}, h_{s2}$ , i specijalne parabole<sup>2</sup>  $p_s$ , evoluta je raspadnuta krivulja 4. razreda na krivulje nižih razreda, (vidi Tablicu 2.2).

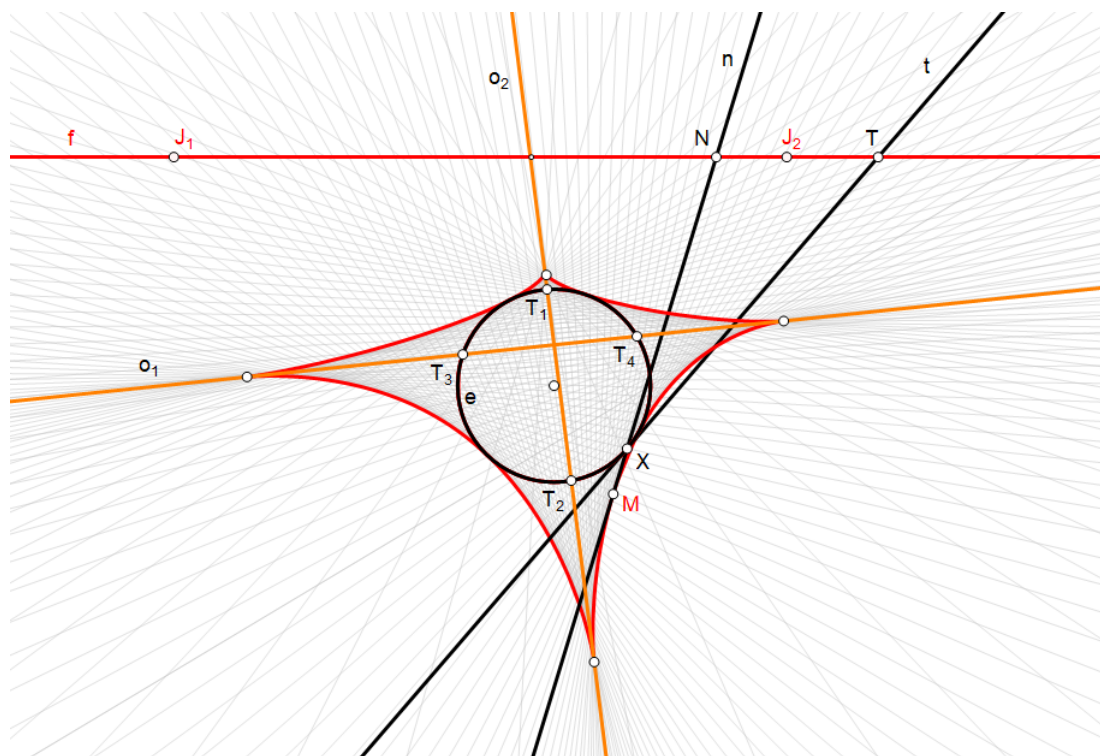
Tablica 2.2

evoluta koje pe-konike	razred evolute	red evolute	rod evolute	broj dvostrukih pravaca	broj infleksionih pravaca	broj šiljaka Re+Im
$e$	4	6	0	3	0	4+2
$h_1$	4	6	0	3	0	4+2
$h_2$	4	6	0	3	0	2+4
$h_3$	4	6	0	3	0	4+2
$h_{s1}$	3	3	0	0	1	1
$h_{s2}$	3	3	0	0	1	1
$p$	3	3	0	0	1	1
$p_s$	2	2	0	0	0	0

<sup>1</sup>1-cirkularne

<sup>2</sup>potpuno cirkularne

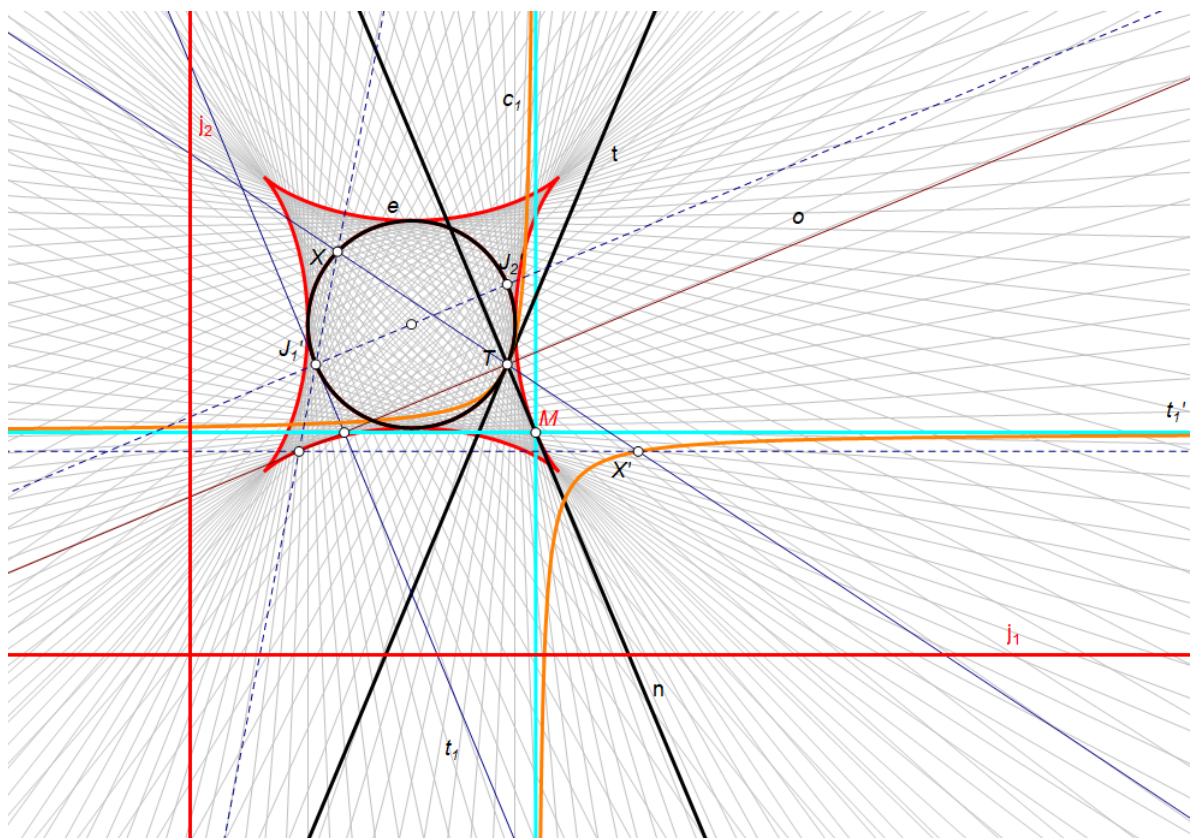
*Evoluta elipse*  $e$  je algebarska krivulja 6. reda i 4. razreda. Apsolutni pravac  $f$  i osi  $o_1$  i  $o_2$  konike  $e$  dvostruki su pravci evolute. Apsolutni pravac  $f$  je izolirani dvostruki pravac, šiljci na  $f$  su imaginarni. Šiljci na osima odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u četiri realna tjemena, (vidi sl. 2.4, 2.5). Zaključujemo da evoluta pseudoeuklidske elipse  $e$  ima četiri realna i dva imaginarna šiljka kao i u slučaju euklidske ravnine.



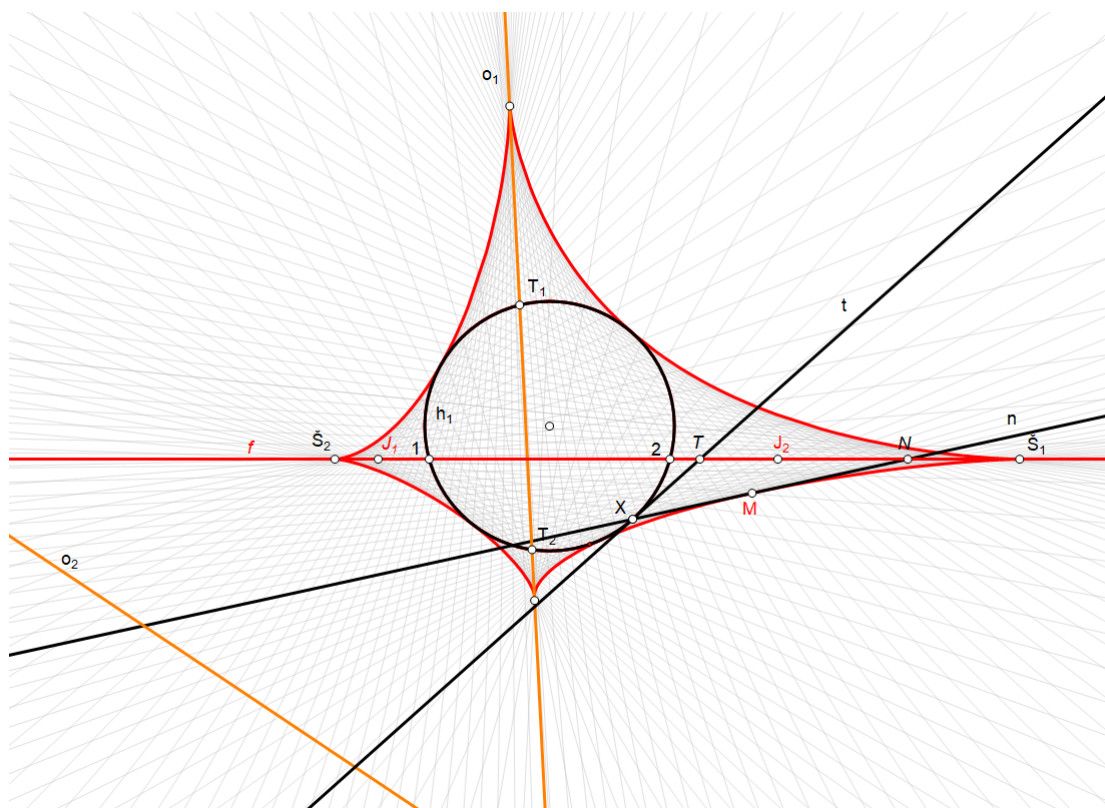
Slika 2.4: Evoluta elipse  $e$  u pe-ravnini

*Evoluta hiperbole*  $h_1$  je algebarska krivulja 6. reda i 4. razreda. Apsolutni pravac  $f$  i osi  $o_1$  i  $o_2$  konike  $h_1$  dvostruki su pravci evolute. Šiljci na apsolutnom pravcu  $f$  nalaze se u točkama  $\check{S}_1, \check{S}_2$  koje su u apsolutnoj involuciji pridružene točkama u kojima hiperbola  $h_1$  siječe apsolutni pravac  $f$ , (točke 1, 2). Šiljci na osi  $o_1$  odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u dva realna tjemenima. Šiljci na osi  $o_2$  su imaginarni, odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u dva konjugirano imaginarna tjemena, (vidi sl. 2.6). Zaključujemo da evoluta pseudoeuklidske hiperbole  $h_1$  ne odstupa od očekivanog slučaja evolute hiperbole u euklidskoj ravnini, ima 4 realna i 2 konjugirano imaginarna šiljka.



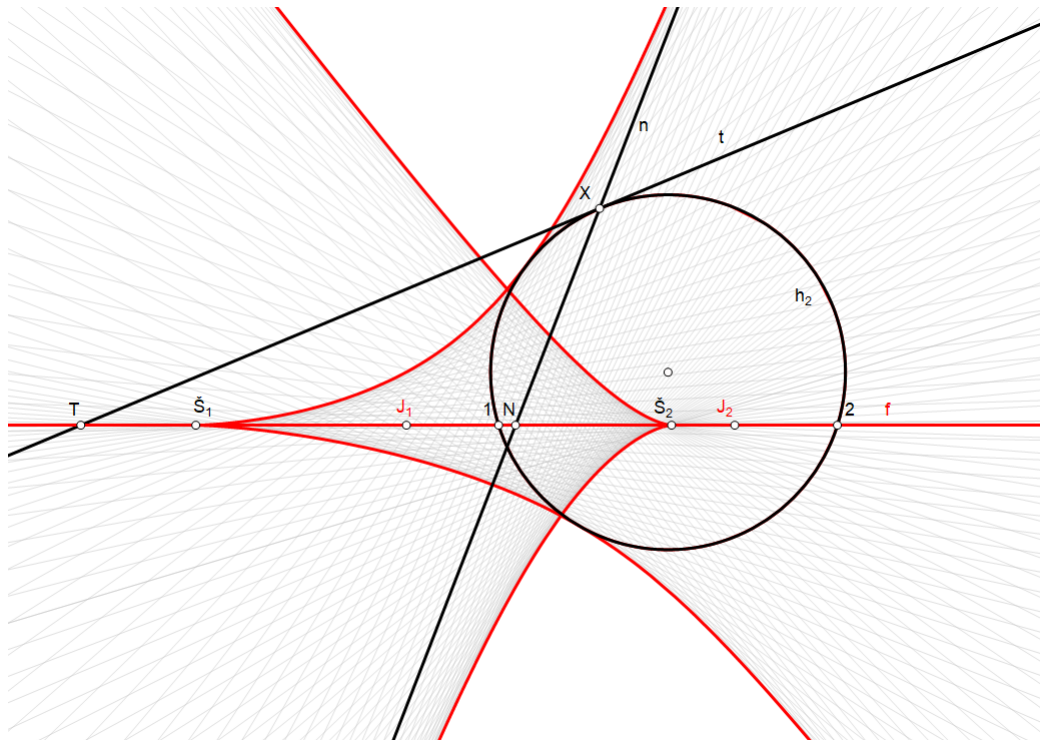


Slika 2.5: Afin model - Oskulacijska kružnica (narančasta) u točki T i evoluta elipse e



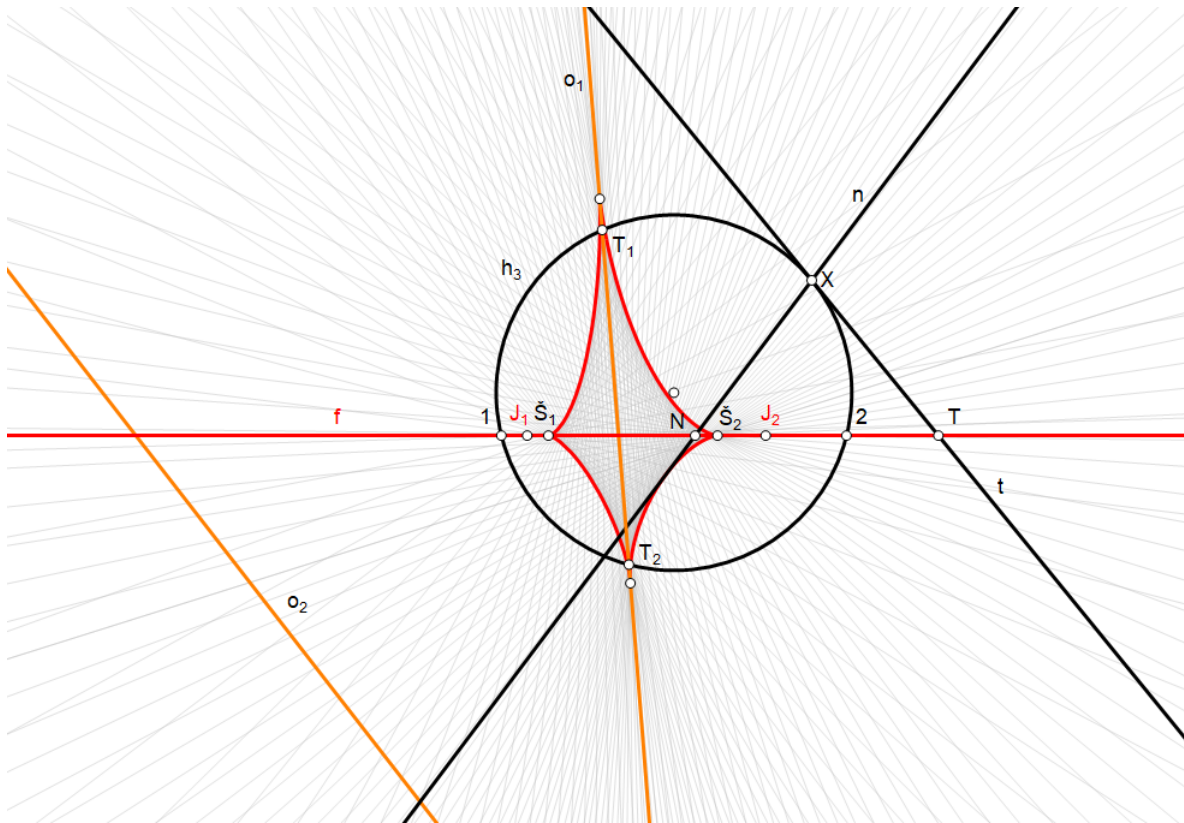
Slika 2.6: Evoluta hiperbole  $h_1$  u pe-ravnini

*Evoluta hiperbole*  $h_2$  je algebarska krivulja 6. reda i 4. razreda. Apsolutni pravac  $f$  i imaginarne osi  $o_1$  i  $o_2$  konike  $h_2$  dvostruki su pravci evolute. Šiljci na apsolutnom pravcu  $f$  nalaze se u točkama  $\check{S}_1, \check{S}_2$  koje su u apsolutnoj involuciji pridružene točkama u kojima konika siječe apsolutni pravac  $f$ . Šiljci na osima  $o_1$  i  $o_2$  su u parovima konjugirano imaginarni, jer ova konika nema realnih tjemena niti hiperoskulacijskih kružnica, (vidi sl. 2.7). Zaključujemo da evoluta pseudoeuclidiske hiperbole  $h_2$  ima 6 šiljaka od kojih su 2 realna i 4 konjugirano imaginarna, što ne odstupa od očekivanog i usporedbe s euclidskom ravninom.



Slika 2.7: Evoluta hiperbole  $h_2$  u pe-ravnini

*Evoluta hiperbole*  $h_3$  je algebarska krivulja 6. reda i 4. razreda. Apsolutni pravac  $f$  i osi  $o_1$  i  $o_2$  konike  $h_3$  dvostruki su pravci evolute. Šiljci na apsolutnom pravcu  $f$  nalaze se u točkama  $\check{S}_1, \check{S}_2$  koje su u apsolutnoj involuciji pridružene točkama u kojima hiperbola  $h_3$  siječe apsolutni pravac  $f$ . Šiljci na osi  $o_1$  odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u dva realna tjemena. Šiljci na osi  $o_2$  su imaginarni, odgovaraju središtima zakrivljenosti oskulacijskih kružnica u dva konjugirano imaginarna tjemena, (vidi sl. 2.8). Zaključujemo da evoluta pseudoeuclidiske hiperbole  $h_3$  ne odstupa od očekivanog slučaja evolute hiperbole u euclidskoj ravnini, ima 4 realna i 2 konjugirano imaginarna šiljaka.

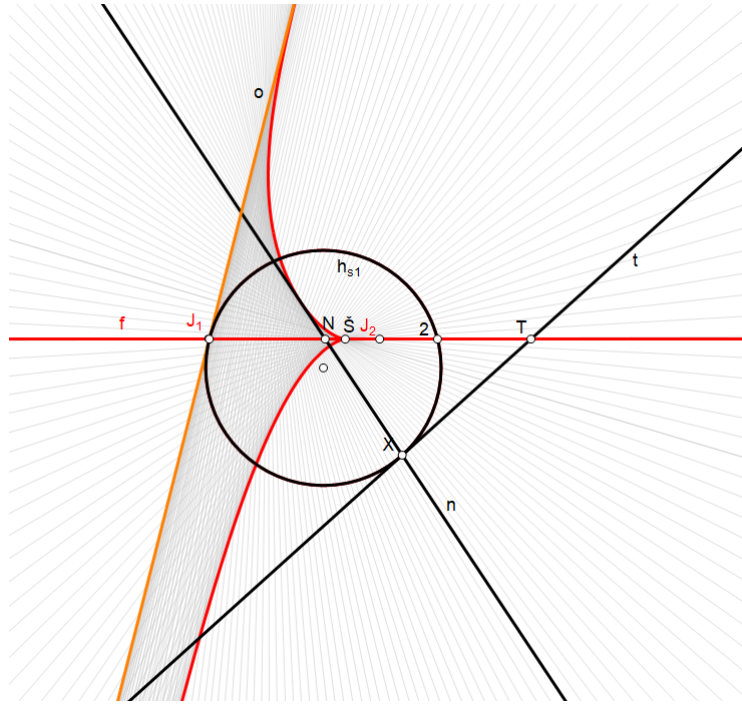

 Slika 2.8: Evoluta hiperbole  $h_3$  u pe-ravnini

Evoluta cirkularnih konika raspadnuta je krivulja 4. razreda na krivulju 3. razreda i pramen izotropnih pravaca odgovarajućom apsolutnom točkom, (na slikama je to  $J_1$ ).

*Evoluta specijalne hiperbole  $h_{s1}$*  je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Nema dvostrukih pravaca. Krivulja  $h_{s1}$  ima realno četverostruko tjeme u apsolutnoj točki  $J_1$ . Jedan šiljak evolute nalazi se na apsolutnom pravcu  $f$  i u apsolutnoj involuciji pridružen je točki 2 u kojoj konika siječe apsolutni pravac (različitoj od apsolutne točke). Šiljak se nalazi unutar konike. Os  $o$  ( $o_1 = o_2$ ) konike je infleksioni pravac evolute, (vidi sl. 2.9). Budući da specijalna hiperbola  $h_{s1}$  prolazi apsolutnom točkom  $J_1$ , koja je i dvostruka točka hiperbolične (cirkularne) involucije na  $f$ , postoji beskonačno mnogo normala okomitih na tangentu u točki  $J_1$ . Ti pravci čine pramen izotropnih pravaca i dio su raspada krivulje 4. razreda. Zaključujemo da evoluta specijalne hiperbole  $h_{s1}$  odstupa od očekivanja i ne postoji usporedba s euklidskom ravninom.

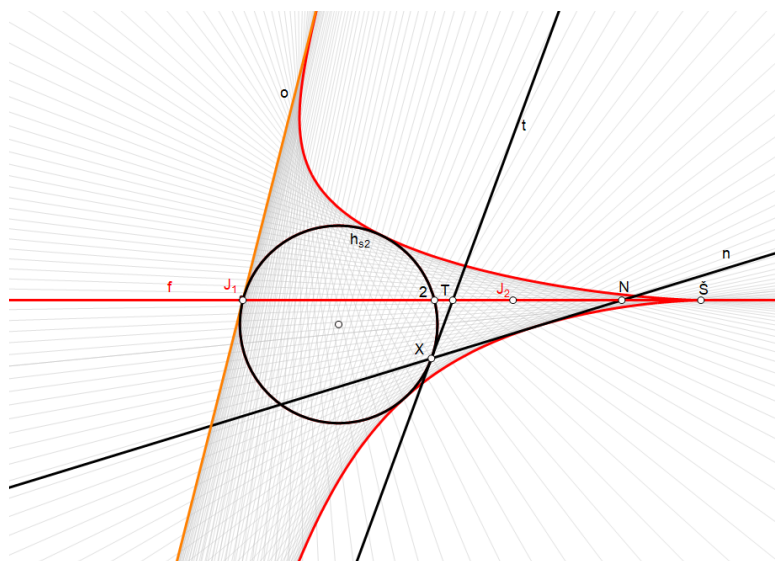
*Evoluta specijalne hiperbole  $h_{s2}$*  je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Nema dvostrukih pravaca. Konika  $h_{s2}$  ima realno četverostruko tjeme u apsolutnoj točki  $J_1$ . Jedan šiljak nalazi se na apsolutnom pravcu  $f$  i u apsolutnoj involuciji pridružen je točki 2 u kojoj konika siječe apsolutni pravac (različitoj od apsolutne točke). Šiljak se nalazi





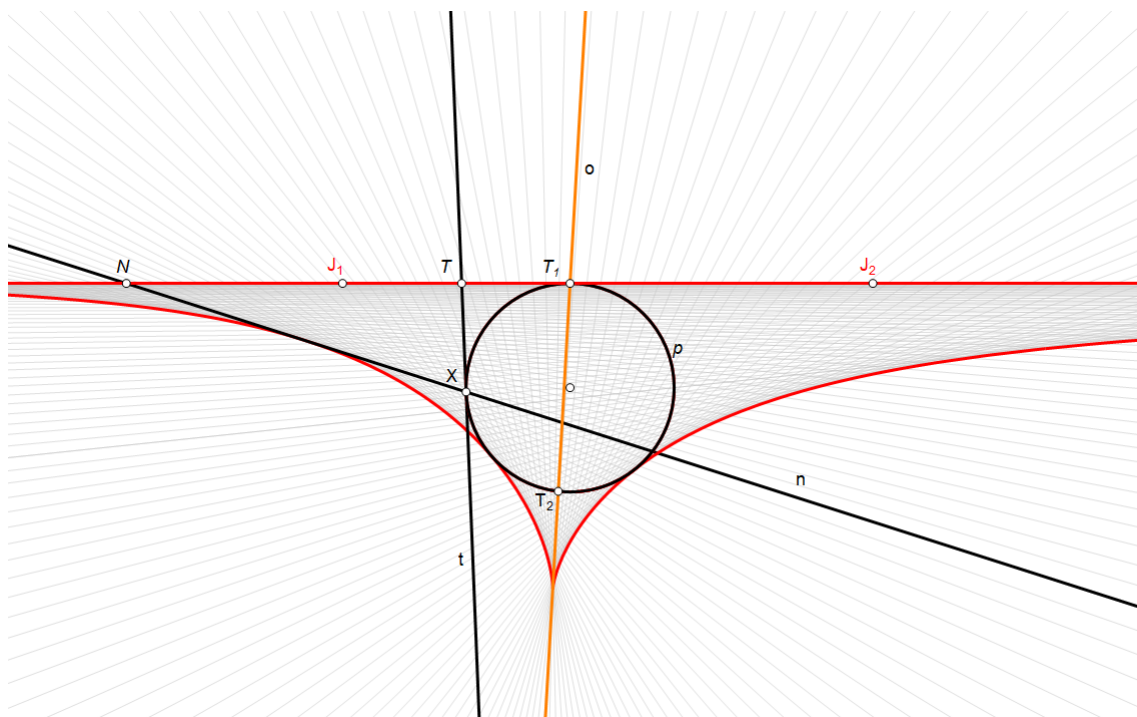
Slika 2.9: Evoluta hiperbole  $h_{s1}$  u pe-ravnini

izvan konike. Os ( $o_1 = o_2$ ) konike je infleksioni pravac evolute, (vidi sl. 2.10). Budući da specijalna hiperbola  $h_{s2}$  prolazi apsolutnom točkom  $J_1$ , koja je i dvostruka točka hiperbolične (cirkularne) involucije na  $f$ , postoji beskonačno mnogo normala okomitih na tangentu u točki  $J_1$ . Ti pravci čine pramen izotropnih pravaca i dio su raspada krivulje 4. razreda. Zaključujemo da evoluta specijalne hiperbole  $h_{s2}$  odstupa od očekivanja i ne postoji usporedba s euklidskom ravninom.



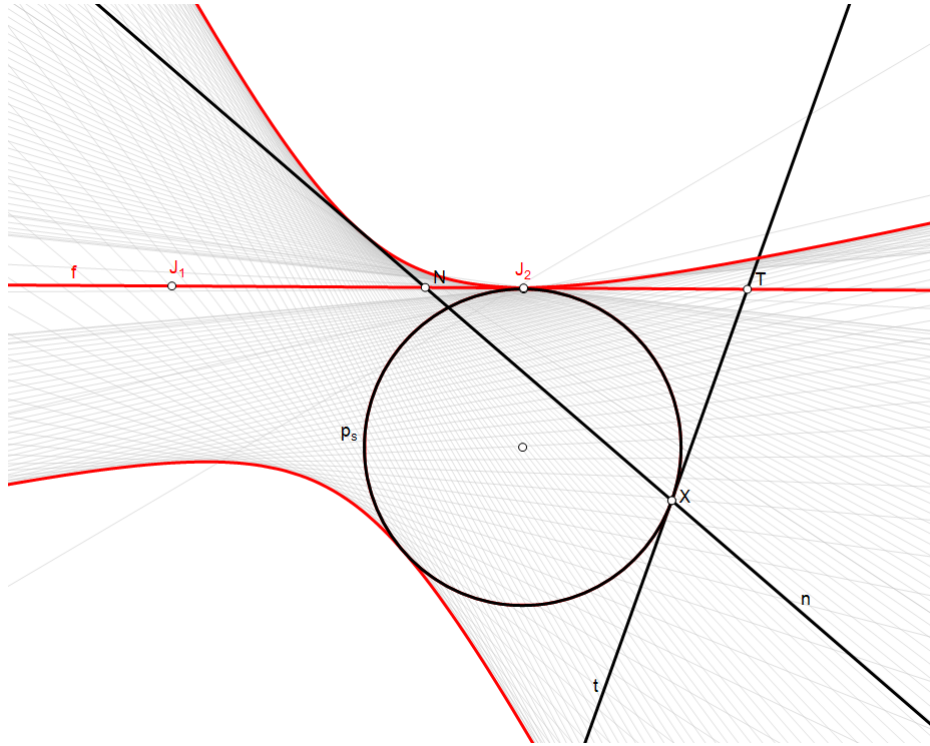
Slika 2.10: Evoluta hiperbole  $h_{s2}$  u pe-ravnini

*Evoluta parabole  $p$*  je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Nema dvostrukih pravaca. Parabola  $p$  ima realno trostruko tjeme  $T_1$  na apsolutnom pravcu i jedno jednostruko tjeme  $T_2$ . Jedan šiljak evolute nalazi se na osi parabole  $o$  i odgovara središtu zakrivljenosti u njezinom jednostukom tjemenu  $T_2$ . Apsolutni pravac je infleksioni pravac evolute, (vidi sl. 2.11). Zaključujemo da evoluta pseudoeuklidske parabole  $p$  ne odstupa od očekivanja u usporedbi s euklidskom ravninom.



Slika 2.11: Evoluta parabole  $p$  u pe-ravnini

*Evoluta specijalne parabole  $p_s$*  je algebarska krivulja 2. reda i 2. razreda, (vidi sl. 2.12). Budući da specijalna parabola dira apsolutni pravac u točki  $J_2$ , dva puta brojeni pramen pravaca u toj točki dio je raspada krivulje četvrtog razreda. Zaključujemo da evoluta pseudoeuklidske specijalne parabole  $p_s$  odstupa od očekivanja i ne postoji usporedba s euklidskom ravninom. Specijalna parabola je potpuno cirkularna konika, a zanimljivo je da je i njezina evoluta također potpuno cirkularna i to specijalna parabola.



Slika 2.12: Evoluta specijalne parabole  $p_s$  u pe-ravnini

## 2.3 Jednadžba evolute

Poznato je da je pseudoeuklidska ravnina realna afina ravnina  $\mathbb{R}_1^2$  zadana nesingularnom indefinitnom kvadratnom formom  $q(x) = \langle x, x \rangle$ , pri čemu je metrika  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (*pseudo-skalarni produkt*) definirana s

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_2y_2, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

*Duljina* vektora (*pseudo-skalarna norma*)  $x \in \mathbb{R}_1^2$  definirana je s

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}.$$

Za vektor  $x$  u pe-ravnini definiramo funkciju predznaka  $sgn$  kao  $sgn x = sgn(\langle x, x \rangle)$ , [3]. S obzirom na definiranu pseudo-metrik u pseudoeuklidskoj ravnini razlikujemo tri vrste vektora koje definiramo kako slijedi:

**Definicija 2.3.1.** Za vektor  $x \in \mathbb{R}_1^2$  kažemo da je:

1. prostorni vektor ako je  $\text{sgn } x = 1$ .
2. vremenski ako je  $\text{sgn } x = -1$ .
3. svjetlosni (nul, izotropni) ako je  $\text{sgn } x = 0$ .

Za koordinate vektora  $x \in \mathbb{R}_1^2$  vrijede sljedeći uvjeti:

1. vektor je prostorni ako je  $|x_1| > |x_2|$ .
2. vektor je vremenski ako je  $|x_1| < |x_2|$ .
3. vektor je svjetlosni (nul, izotropni) ako je  $|x_1| = |x_2|$ .

**Napomena 2.3.1.** Svojstvo biti prostorni (odnosno vremenski, svjetlosni) kraće se naziva kauzalni karakter vektora, [19].

**Definicija 2.3.2.** Dva su vektora  $x, y \in \mathbb{R}_1^2$  okomita (ortogonalna) ako je  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Neka je  $x \rightarrow x^\perp$  operator okomitosti, koji vektoru  $x = (x_1, x_2)$  pridružuje ortogonalan vektor  $x^\perp = (\text{sgn}(\langle x, x \rangle)x_2, \text{sgn}(\langle x, x \rangle)x_1)$  i vrijedi

1.  $(x^\perp)^\perp = x$ ,
2.  $|x^\perp| = |x|$ ,
3.  $\text{sgn}(x^\perp) = -\text{sgn}(x)$ .

Iz zadnjeg svojstva vektora  $x^\perp$  slijedi:

Svaki vektor, različit od nul vektora, okomit na prostorni vektor je vremenski i obrnuto, tj.

$$\text{sgn}(x) = -\text{sgn}(y) \quad \text{ako je } x \perp y, \quad x, y \neq 0.$$

Također, vektor okomit na svjetlosni vektor je svjetlosni.

**Definicija 2.3.3.** Svako glatko preslikavanje  $P : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ , gdje je  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoreni interval, zovemo krivulja (parametrizirana krivulja) u  $\mathbb{R}_1^2$ .

Za točku  $P(t)$  krivulje  $P$  kažemo da je prostorna, vremenska ili svjetlosna točka krivulje, ovisno o vrsti tangencijalnog vektora  $P'(t)$  u točki  $P(t)$ .

**Primjer 2.3.1.** Promotrimo elipsu  $e$  u pseudoeuclidskoj ravnini prikazanu euclidskom kružnicom  $P(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ . Točke  $P(t)$ ,  $t \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \rangle$  su vremenske, točke  $P(t)$ ,  $t \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \rangle$  su prostorne. Točke  $P(-\frac{\pi}{4})$ ,  $P(\frac{\pi}{4})$ ,  $P(\frac{3\pi}{4})$ ,  $P(\frac{5\pi}{4})$  su svjetlosne.

Krivulja  $P : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$  je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna (nul)) ako je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna) u svakoj točki  $P(t)$ ,  $t \in I$ , [22].

**Definicija 2.3.4.** Neka je  $P : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$  krivulja i  $t \in I$ . Za točku  $P(t)$  kažemo da je **regularna** ako je  $P'(t) \neq 0$ . U suprotnom kažemo da je točka  $P(t)$  **singularna**.

Za krivulju  $P$  kažemo da je regularna ako je točka  $P(t)$  regularna za svaki  $t \in I$ . U suprotnom kažemo da je krivulja  $P$  singularna.

Krivulje u pseudoeuklidskoj ravnini parametriziraju se na sličan način kao i u euklidskoj ravnini.

**Definicija 2.3.5.** Za prostornu (vremensku) krivulju  $P : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$  kažemo da je jedinične brzine ili da je parametrizirana duljinom luka ako je  $|P'(t)| = 1$ ,  $\forall t$ .

Svaka regularna krivulja u pseudoeuklidskoj ravnini (bez svjetlosnih točaka) ima parametrizaciju jedinične brzine.

U svakoj regularnoj (ne svjetlosnoj) točki  $P(t)$  krivulje imamo orijentirani Frenetov trobrid koji se sastoji od vektora

$$\mathbf{t}(t) = \frac{P'(t)}{|P'(t)|}, \quad n(t) = \mathbf{t}(t)^\perp$$

i zakrivljenost

$$k(t) = \frac{\det(P'(t), P''(t))}{|P'(t)|^3},$$

štoviše vrijedi i  $\operatorname{sgn} n(t) = \operatorname{sgn} k(t)$ , [3], [4], [22].

Za krivulje parametrizirane duljinom luka u svakoj regularnoj točki (koja nije svjetlosna, ni točka infleksije) vrijedi, [3]

$$k(t) = \det(P'(t), P''(t))$$

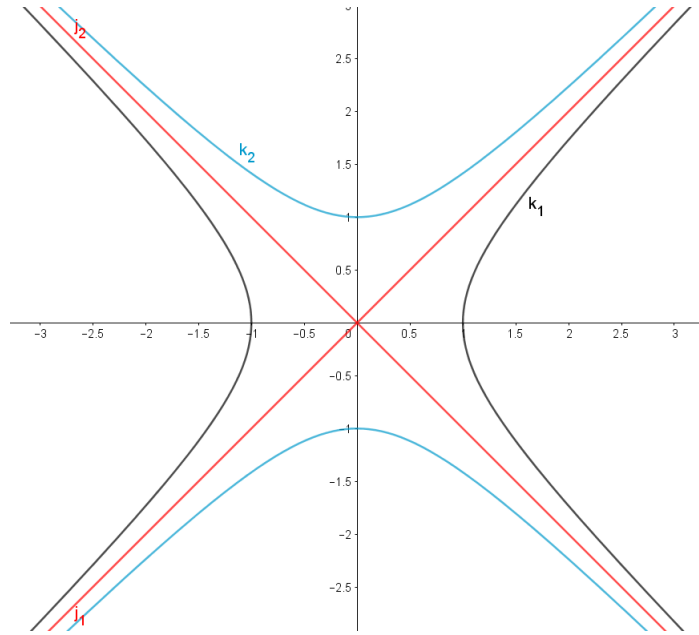
$$\mathbf{t}'(t) = k(t)n(t), \quad n'(t) = k(t)\mathbf{t}(t). \quad (2.4)$$

U afinom modelu pseudoeuklidske ravnine, gdje je  $f$  beskonačno daleki pravac, a  $J_1, J_2$  incidentne s pravcima  $y = x$  i  $y = -x$ , kružnica (predočena kao ortogonalna hiperbola u euklidskom smislu) ima jednadžbu

$$(x_1 - s_1)^2 - (x_2 - s_2)^2 = \delta r^2,$$

gdje je  $S(s_1, s_2)$  središte,  $r$  polumjer,  $\delta \in \{-1, 1\}$ . Ako je  $\delta = 1$  sve točke kružnice u pseudoeuklidskoj ravnini su vremenske, odnosno ako je  $\delta = -1$  prostorne, (vidi sl. 2.13).





Slika 2.13: Crno na slici označena je vremenska kružnica  $k_1$  pe-ravnine,  $P(t) = (\pm r \cosh t, r \sinh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , polumjera 1 s središtem u  $S(0, 0)$ , plavo je označena prostorna kružnica  $k_2$  pe-ravnine,  $P(t) = (r \sinh t, \pm r \cosh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  polumjera 1 s središtem u  $S(0, 0)$

Jednadžba oskulacijske kružnice u proizvoljnoj točki krivulje u pseudoeuklidskoj ravnini određuje se kako slijedi:

Poznato je da ako je  $P(t) = (x(t), y(t))$  parametrizirana krivulja u pe-ravnini i  $P(t_0)$  njezina proizvoljna točka (koja nije svjetlosna, niti točka infleksije), središte i radijus oskulacijske kružnice krivulje u točki  $P(t_0)$  dani su s, [4]

$$S = P(t_0) - \frac{1}{k(t_0)}n(t_0) \quad r = \frac{1}{|k(t_0)|}.$$

**Primjer 2.3.2.** Neka je  $P(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$  elipsa  $e$  u pe-ravnini.

U prostornim i vremenskim točkama (vidi Primjer 2.3.1) vrijedi

$$\mathbf{t} = \left( -\frac{\sin t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}}, \frac{\cos t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$n = \left( \frac{\cos t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}}, -\frac{\sin t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}} \right), \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle$$

$$n = \left( -\frac{\cos t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}}, \frac{\sin t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}} \right), \quad t \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\rangle$$

$$k = \frac{1}{r|\cos 2t|^{\frac{3}{2}}}$$

Središte i radijus oskulacijske pseudo-kružnice dani su s:

$$S_o = (r \cos t, r \sin t) + r \cos 2t(\cos t, -\sin t), \quad t \notin \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$r_o = r |\cos 2t|^{\frac{3}{2}}$$

Slično kao u euklidskoj ravnini do jednadžbe evolute u pseudoeuklidskoj ravnini moguće je doći na sljedeći način:

Neka je  $P(t) = (x(t), y(t))$  parametrizirana krivulja u pe-ravnini, označimo s  $S(a, b)$  središte zakrivljenosti dane krivulje u točki  $P_0 = P(t_0)$ .

Parametarska jednadžba njezine evolute imati će oblik, [4]:

$$a = x(t_0) - y'(t_0) \frac{(x'(t_0))^2 - (y'(t_0))^2}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}, \quad b = y(t_0) - x'(t_0) \frac{(x'(t_0))^2 - (y'(t_0))^2}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} \quad (2.5)$$

odnosno

$$a = x(t_0) - y'(t_0) \frac{\langle P'(t_0), P'(t_0) \rangle}{\det(P'(t_0), P''(t_0))}, \quad b = y(t_0) - x'(t_0) \frac{\langle P'(t_0), P'(t_0) \rangle}{\det(P'(t_0), P''(t_0))} \quad (2.6)$$

Koristeći formule (4.1) ili (2.6) odredi se jednadžba evolute u pe-ravnini.

Prema definiciji 1.4.1 poznato je da je evoluta  $E(t)$  dane krivulje  $P(t)$  geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, iz čega slijedi da jednadžba evolute  $E(t)$  bez svjetlosnih i bez točaka infleksije dana na slijedeći način

$$E(t) = P(t) - \frac{1}{k(t)}n(t). \quad (2.7)$$

Evoluta prostorne (odnosno vremenske) krivulje je vremenska (odnosno prostorna) krivulja, [22].

Primjerima u nastavku, određivanjem jednadžbe evolute konike u afinom modelu pseudoeuklidske ravnine, pri čemu je  $f$  beskonačno daleki pravac, a  $J_1, J_2$  incidentne s pravcima  $y = x$  i  $y = -x$ , potvrditi ćemo tvrdnje o redu evolute iz prethodnog poglavlja.

**Primjer 2.3.3.** *Odredimo jednadžbu evolute elipse u pe-ravnini zadane parametarskom jednadžbom  $P(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ .*

Koristeći se formulama (4.1)

$$x'(t_0) = (r \cos t)' = -r \sin t, \quad y'(t_0) = (r \sin t)' = r \cos t,$$

$$x''(t_0) = (-r \sin t)' = -r \cos t, \quad y''(t_0) = (r \cos t)' = -r \sin t.$$

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos t - r \cos t \cdot \frac{r^2 \sin^2 t - r^2 \cos^2 t}{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r \cos t - r \cos t \cdot (\sin^2 t - \cos^2 t) \\ &= r \cos t + r \cos t \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t) = r \cos t + r \cos t \cdot (2 \cos^2 t - 1) = 2r \cos^3 t; \end{aligned}$$

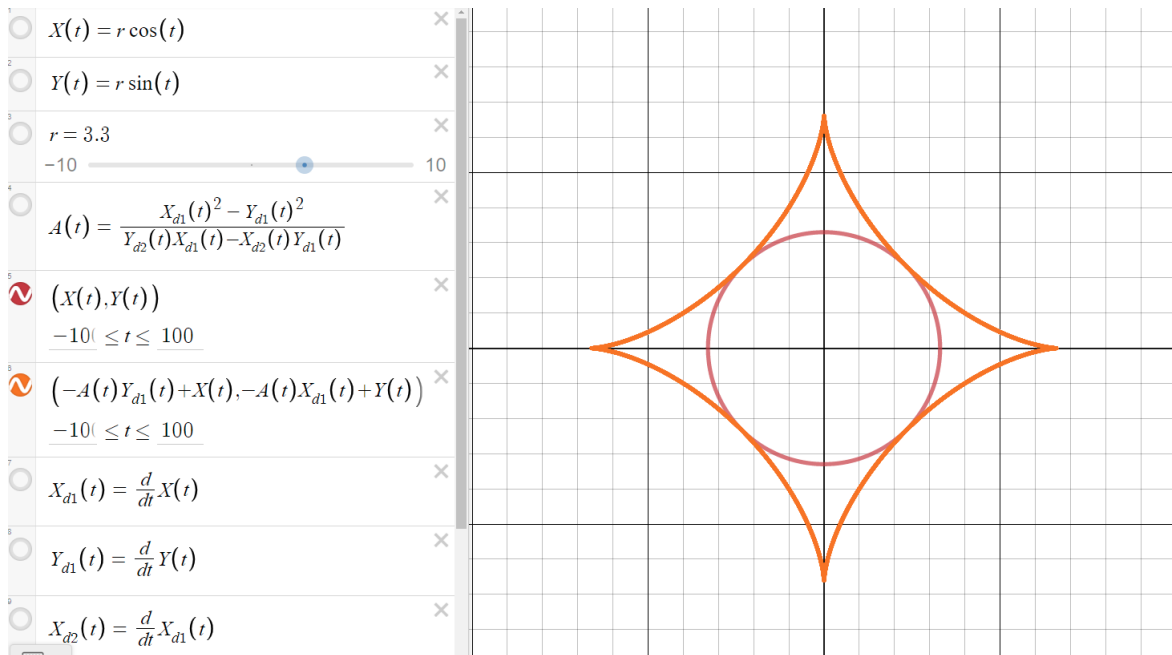
$$\begin{aligned} y(t) &= r \sin t + r \sin t \cdot \frac{r^2 \sin^2 t - r^2 \cos^2 t}{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r \sin t + r \sin t \cdot (\sin^2 t - \cos^2 t) \\ &= r \sin t - r \sin t \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t) = r \sin t - r \sin t \cdot (1 - 2 \sin^2 t) = 2r \sin^3 t \end{aligned}$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje da je riječ o astroidi  $Q(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ,  $x^\sim = 2rx$ ,  $y^\sim = 2ry$ , (vidi sl. 2.14), stoga je očito da je riječ o krivulji 6. reda.

Isključimo li parametar  $t$ , postići ćemo često upotrebljeni oblik iz koje je red evolute još jasnije vidljiv,  $X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}}$ .

Koristimo li se formulom (2.7) jednadžba evolute elipse u pe-ravnini glasi

$$E(t) = (r \cos t, r \sin t) + r \cos 2t (\cos t - \sin t), \quad t \notin \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}.$$



Slika 2.14: Crveno zadana elipsa u afinom modelu pe-ravnine, narančasto njezina evoluta

**Primjer 2.3.4.** *Odredimo jednadžbu evolute specijalne parabole zadane parametarskom jednadžbom*

$$P(t) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

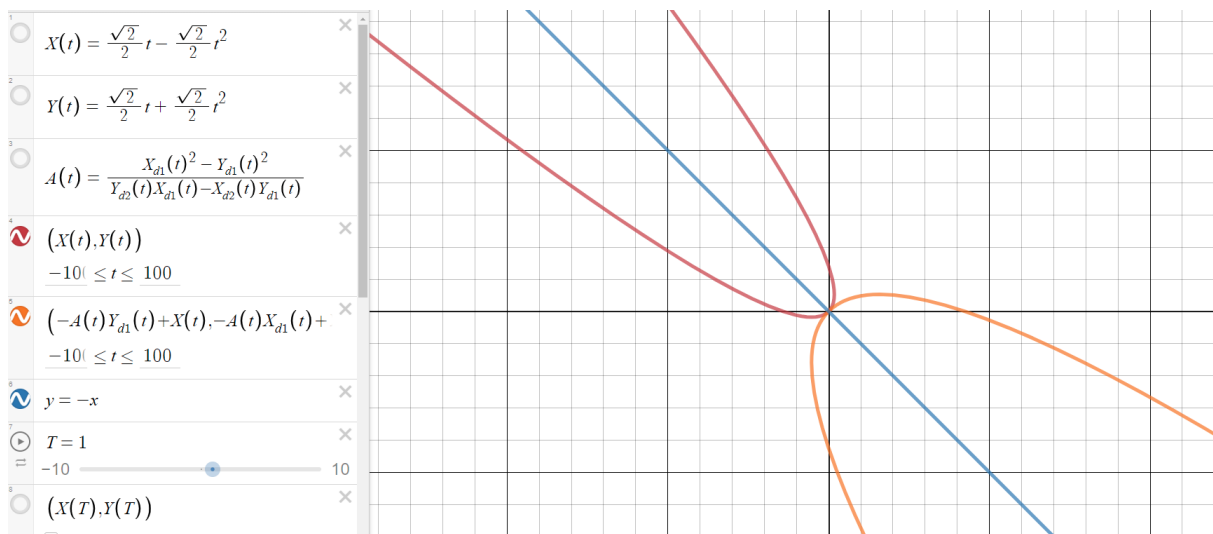
$$x'(t_0) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right)' = \frac{1-2t}{\sqrt{2}}, \quad x''(t_0) = -\sqrt{2},$$

$$y'(t_0) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right)' = \frac{1+2t}{\sqrt{2}}, \quad y''(t_0) = \sqrt{2},$$

$$x(t) = x(t_0) - y'(t_0) \frac{(x'(t_0))^2 - (y'(t_0))^2}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} = \frac{9\sqrt{2}}{2}t + \frac{15\sqrt{2}}{2}t^2$$

$$y(t) = y(t_0) - x'(t_0) \frac{(x'(t_0))^2 - (y'(t_0))^2}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} = \frac{9\sqrt{2}}{2}t - \frac{15\sqrt{2}}{2}t^2$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute specijalne parabole pokazuje da je riječ o krivulji 2. reda. Kako je pravac  $y = -x$  os evolute, zaključujemo da je riječ također o specijalnoj paraboli, (vidi sl. 2.15).



Slika 2.15: Crveno zadana specijalna parabola, narančasto evoluta specijalne parabole

**Primjer 2.3.5.** *Odredimo jednadžbu evolute parabole u pseudoeuklidskoj ravnini zadane parametarskom jednadžbom*

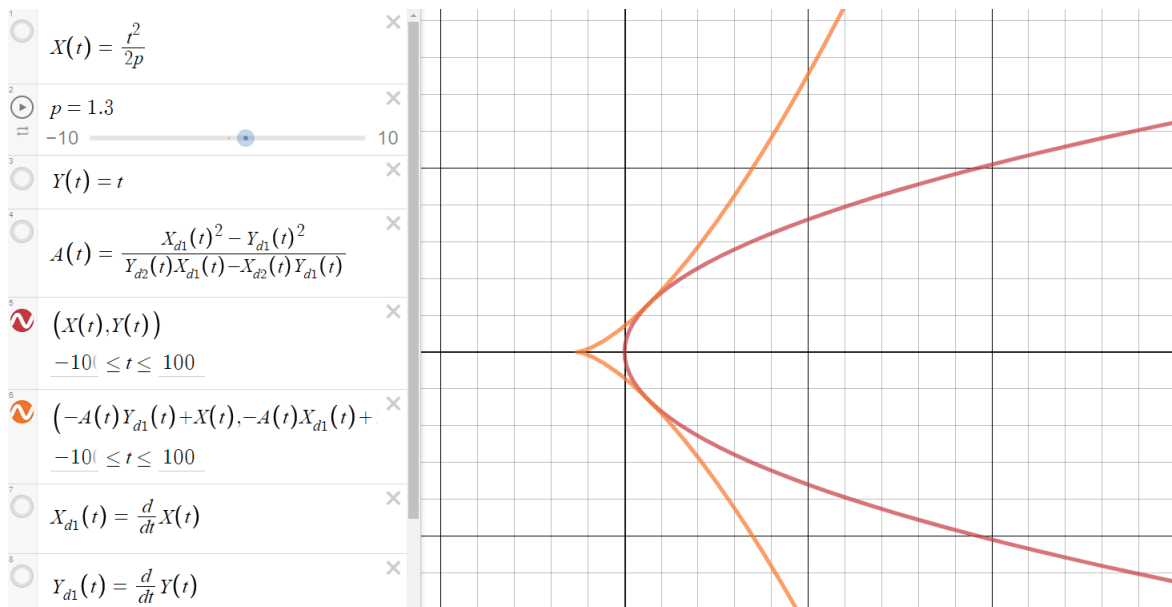
$$P(t) = \left( \frac{t^2}{2p}, t \right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x'(t_0) = \frac{t}{p}, \quad x''(t_0) = \frac{1}{p}, \quad y'(t_0) = 1, \quad y''(t_0) = 0$$

$$x(t) = \frac{3}{2p}t^2 - p, \quad y(t) = \frac{t^3}{p^2}$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o euklidskoj semi-kubnoj paraboli, odnosno krivulji 3. reda, (vidi sl. 2.16).



Slika 2.16: Crveno zadana parabola u pe-ravnini, narančasto evoluta parabole

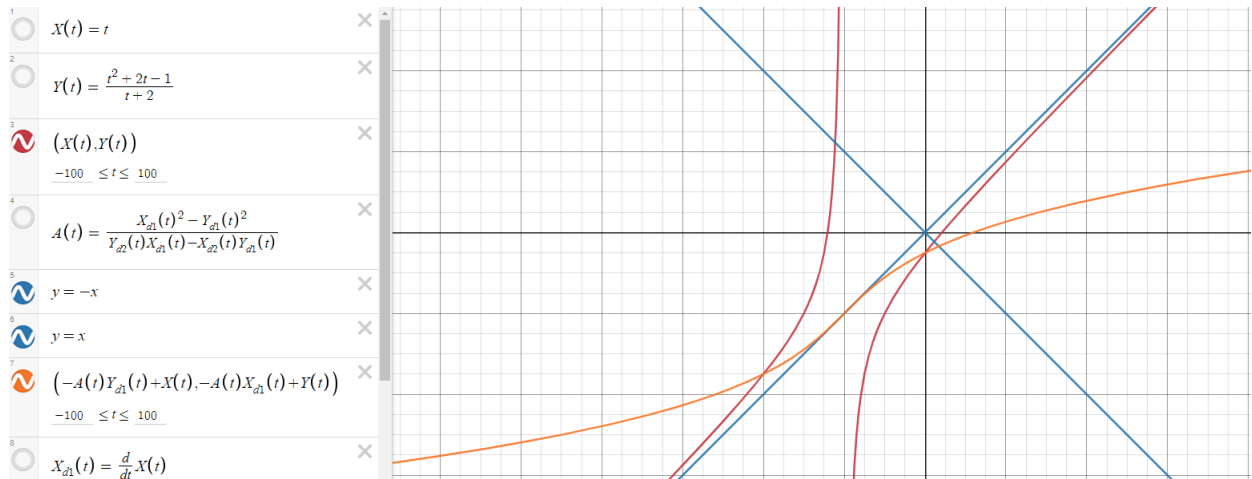
**Primjer 2.3.6.** *Odredimo jednadžbu evolute specijalne hiperbole  $h_{s1}$  zadane parametarskom jednadžbom*

$$P(t) = \left( t, \frac{t^2 + 2t - 1}{t + 2} \right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x(t) = -\frac{4t^3 + 27t^2 + 60t + 45}{2(t + 2)^3}, \quad y(t) = -\frac{4t + 11}{2(t + 2)}$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o krivulji 3. reda, (vidi sl. 2.17).



Slika 2.17: Crveno zadana specijalna hiperbola  $h_{s1}$ , narančasto njezina evoluta

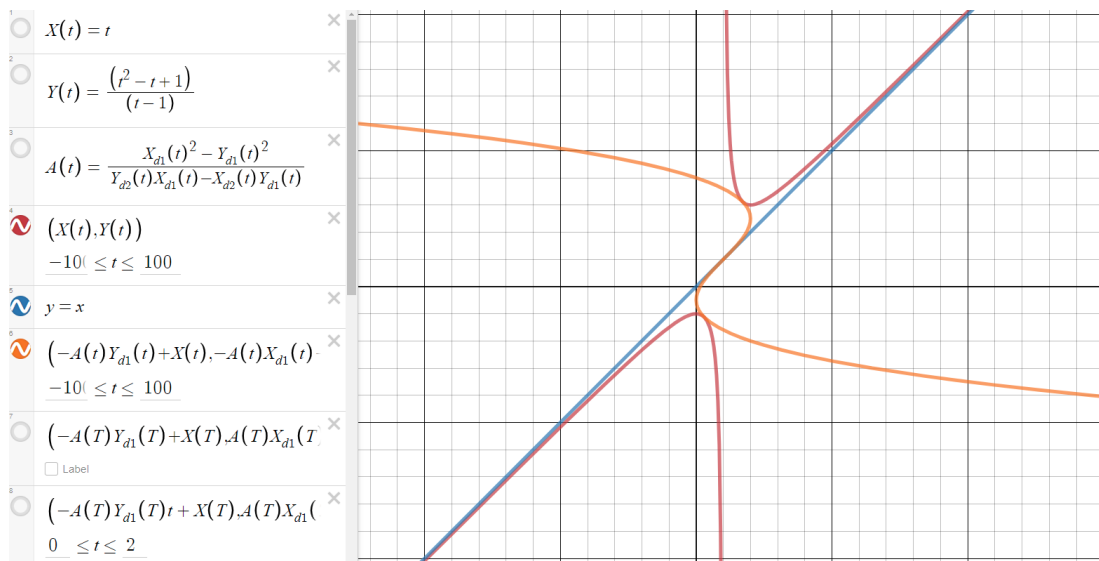
**Primjer 2.3.7.** *Odredimo jednadžbu evolute specijalne hiperbole  $h_{s2}$  zadane parametarskom jednadžbom*

$$P(t) = \left( t, \frac{t^2 - t + 1}{t - 1} \right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x(t) = \frac{2t^3 - 3t^2}{2(t - 1)^3}, \quad y(t) = \frac{2}{(t - 1)^3}$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o krivulji 3. reda, (vidi sl. 2.18).



Slika 2.18: Crveno zadana specijalna hiperbola  $h_{s2}$ , narančasto njezina evoluta

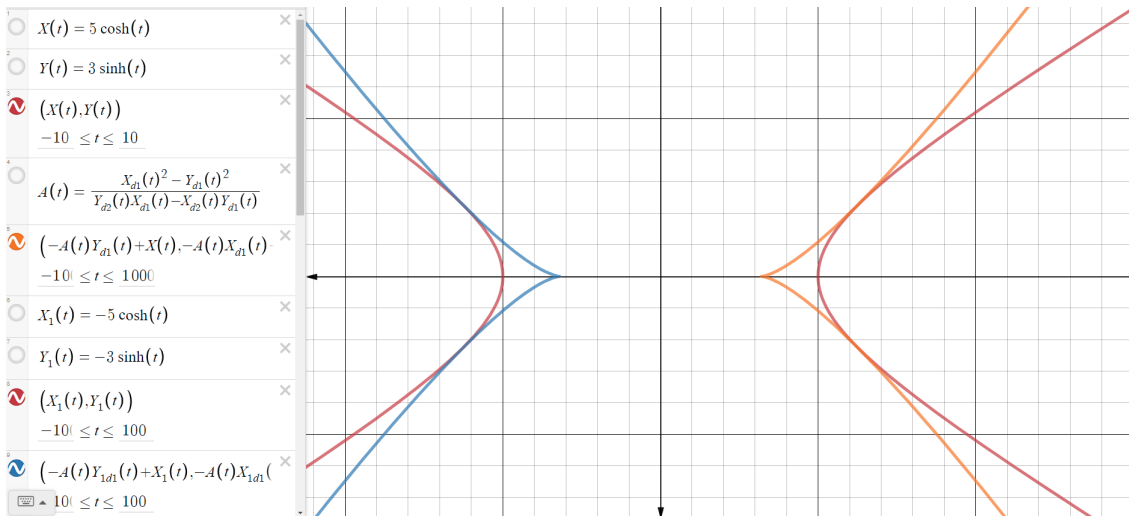
**Primjer 2.3.8.** *Odredimo jednadžbu evolute hiperbole  $h_1$  zadane parametarskom jednadžbom*

$$P(t) = \left( 5 \cosh t, 3 \sinh t \right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x(t) = \frac{16 \cosh^3(t)}{5}, \quad y(t) = \frac{16 \sinh^3(t)}{3}$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o krivulji 6. reda, (vidi sl. 2.19).



Slika 2.19: Crveno zadana hiperbola  $h_1$ , narančasto/plava njezina evoluta

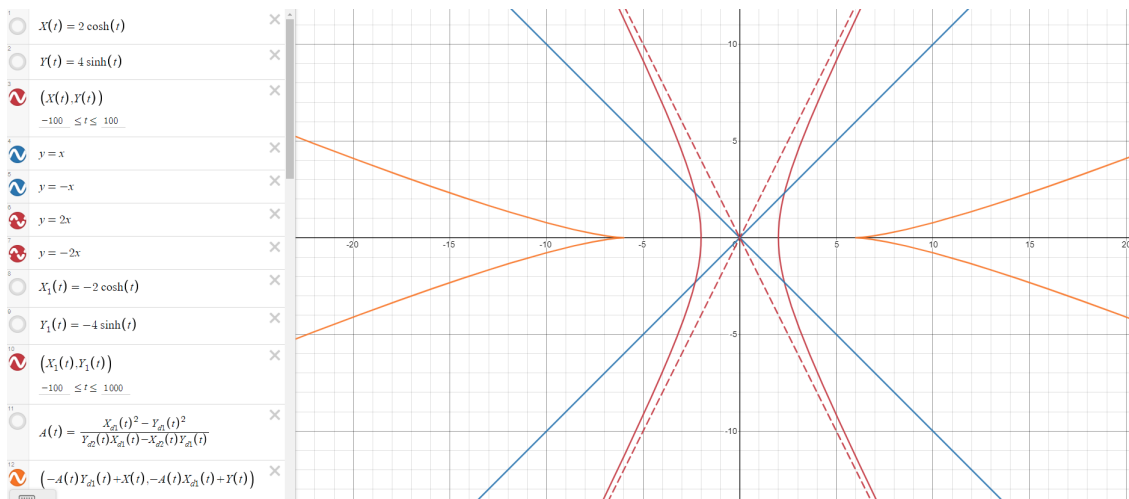
**Primjer 2.3.9.** *Odredimo jednadžbu evolute hiperbole  $h_3$  zadane parametarskom jednadžbom*

$$P(t) = \left( 2 \cosh t, 4 \sinh t \right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x(t) = -6 \cosh^3(t), \quad y(t) = -3 \sinh^3(t)$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o krivulji 6. reda, (vidi sl. 2.20).



Slika 2.20: Crveno zadana hiperbola  $h_3$ , narančasto njezina evoluta

**Primjer 2.3.10.** *Odredimo jednadžbu evolute hiperbole  $h_2$  zadane parametarskom jednadžbom*

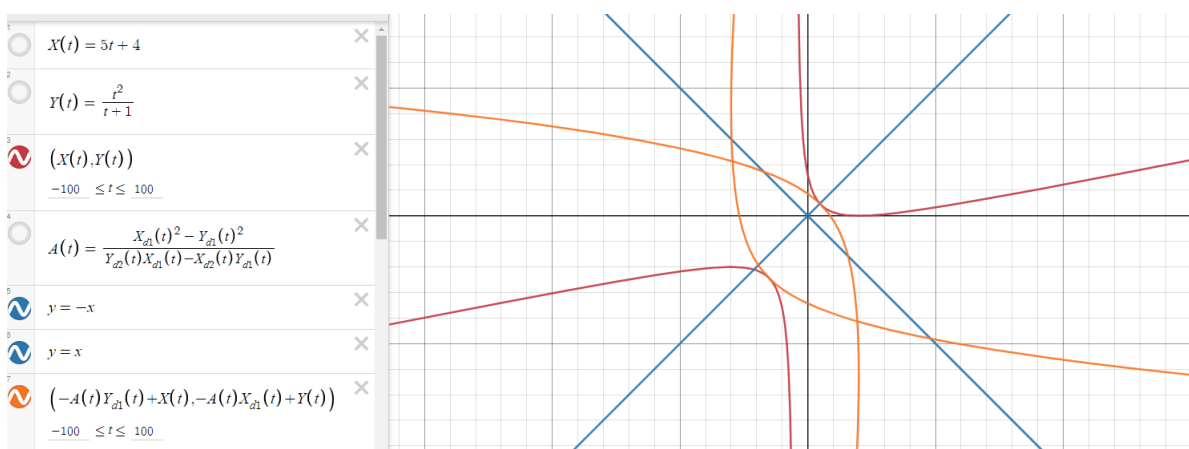
$$P(t) = \left( 5t + 4, \frac{t^2}{t + 1} \right), \quad t \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

Koristeći se formulama (4.1)

$$x(t) = \frac{-24t^6 + 144t^5 + 288t^4 + 202t^3 - 45t^2 - 120t - 40}{10(t - 1)^3},$$

$$y(t) = \frac{-24t^4 + 96t^3 + 144t^2 + 100t + 25}{2(t + 1)}$$

Dobivena parametarska jednadžba evolute pokazuje kako je riječ o krivulji 6. reda, (vidi sl. 2.21).



Slika 2.21: Crveno zadana hiperbola  $h_2$ , narančasto njezina evoluta



**Propozicija 2.3.1.** *Neka je  $P(t)$  parametrizirana krivulja u  $pe$ -ravnini i  $E(t)$  njezina evoluta.*

1. *Točka  $E(t_0)$  evolute je regularna točka ako i samo ako točka  $P(t_0)$  nije tjeme zadane krivulje.*
2. *Ako je točka  $P(t_0)$  tjeme zadane krivulje, tj.  $k'(t_0) = 0$ ,  $k''(t_0) \neq 0$ , tada je točka  $E(t_0)$  šiljak evolute.*

*Dokaz.* Neka je  $E(t) = P(t) - \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t)$ . Koristeći se formulama 2.4, prve tri derivacije evolute su

$$E'(t) = \frac{k'(t)}{k^2(t)}\mathbf{n}(t) \quad (2.8)$$

$$E''(t) = \frac{k'(t)}{k(t)}\mathbf{t}(t) + \left( \frac{k''(t)}{k^2(t)} - 2\frac{(k'(t))^2}{k^3(t)} \right)\mathbf{n}(t) \quad (2.9)$$

$$E'''(t) = \left( 2\frac{k''(t)}{k(t)} - 3\frac{(k'(t))^2}{k^2(t)} \right)\mathbf{t}(t) + \left( k'(t) + \frac{k'''(t)}{k^2(t)} - 6\frac{k'(t)k''(t)}{k^3(t)} + 6\frac{(k'(t))^3}{k^4(t)} \right)\mathbf{n}(t). \quad (2.10)$$

1. Prva tvrdnja slijedi iz 2.8.
2. Iz prve tvrdnje znamo da ako je  $P(t_0)$  tjeme krivulje,  $E(t_0)$  je singularna točka evolute. Iz formula 2.9 i 2.10 druga i treća derivacija evolute u tjemenu  $P(t_0)$  glasi

$$E''(t_0) = \frac{k''(t_0)}{k^2(t_0)}\mathbf{n}(t_0) \neq 0 \quad (2.11)$$

$$E'''(t_0) = 2\frac{k''(t_0)}{k(t_0)}\mathbf{t}(t_0) + \frac{k'''(t_0)}{k^2(t_0)}\mathbf{n}(t_0) \neq 0, \quad (2.12)$$

Iz čega slijedi da su vektori  $E''(t_0)$ ,  $E'''(t_0)$  linearno nezavisni, stoga je  $E(t_0)$  šiljak evolute.

□

Zanimljivo je i primjetiti sljedeću činjenicu vezanu za krivulju i njezinu evolutu.

**Propozicija 2.3.2.** *Neka je  $P : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$  prostorna ili vremenska krivulja. Tada  $P$  ne siječe svoju evolutu.*

*Dokaz.* Propozicija 3.3. [22].

□

Ta činjenica ne vrijedi u euklidskoj ravnini.

# Poglavlje 3

## Kvazihiperbolična ravnina

### 3.1 Osnovni pojmovi

Kvazihiperbolična ravnina (qh) je projektivna ravnina  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  s hiperboličnom metrikom na pravcu i paraboličnom metrikom na pramenu [9], [25], kojoj je apsolutna figura realna degenerirana krivulja 2. stupnja, odnosno par realnih pravaca  $j_1$  i  $j_2$  koji se sijeku u realnoj točki  $F$ . Apsolutna figura označava se s  $\mathcal{F}_{\mathbb{QH}} = \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{F}\}$ , pri čemu se pravci  $j_1$  i  $j_2$  nazivaju *apsolutnim pravcima*, a točka  $F$  *apsolutnom točkom*.

U radu će se promatrati Cayley-Kleinov model kvazihiperbolične ravnine proširen na cijelu ravninu  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  te će se nazivati *projektivno proširena kvazihiperbolična ravnina* i označavat će se s  $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ .

**Definicija 3.1.1.** *Pravci ravnine  $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$  koji su incidentni s apsolutnom točkom  $F$  nazivaju se **izotropnim pravcima**.*

*Točke ravnine  $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$  koje su incidentne s apsolutnim pravcem  $j_1$  ili  $j_2$  nazivaju se **izotropnim točkama**.*

*Dvije točke ravnine  $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$  nazivaju se **paralelnima** ako su incidentne s istim izotropnim pravcem.*

*Dvije točke ravnine  $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$  nazivaju se **okomitima** ako leže na paru izotropnih pravaca koji su u harmonitetu s apsolutnim pravcima  $j_1$  i  $j_2$ .*

Hiperbolična involucija na pramenu pravaca ( $F$ ) kojoj su apsolutni pravci fiksni pravci naziva se *apsolutna involucija*. Kako fiksni pravci neke involucije zajedno s bilo kojim parom pridruženih pravaca čine harmoničku četvorku pravaca, [9], [25], slijedi da je ap-

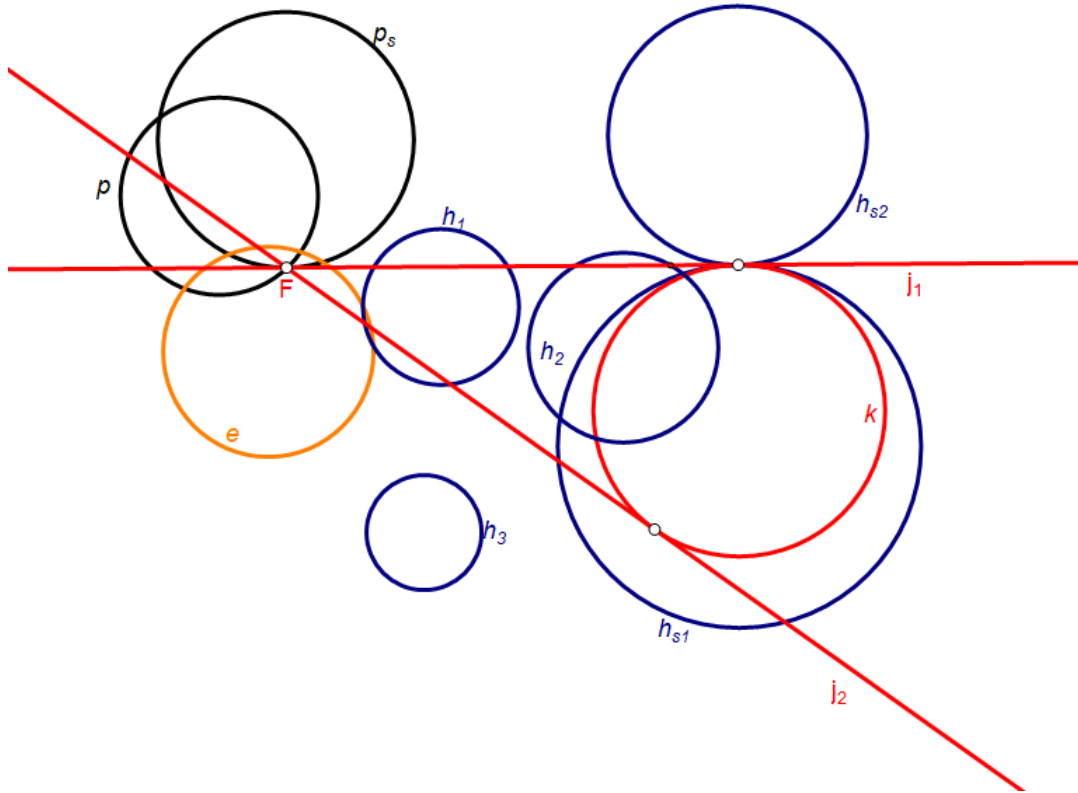
solutnom involucijom određena okomitost točkaka u  $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ . Stoga prema [9], apsolutna involucija je cirkularna involucija kvazihiperbolične ravnine.

S obzirom na položaj krivulje 2. razreda u odnosu na apsolutnu figuru kvazihiperbolične ravnine razlikujemo 9 tipova krivulja 2. razreda (vidi sl. 3.1)<sup>3</sup>, [9], [25]:

- *hiperbola* - krivulja 2. razreda koja ima par realnih i različitih izotropnih pravaca, a s obzirom na njen položaj spram apsolutne figure razlikujemo sljedećih 5 tipova hiperbola:
  - *hiperbola*  $h_1$  - siječe svaki od apsolutnih pravaca u dvije realne i različite točke,
  - *hiperbola*  $h_2$  - siječe jedan apsolutni pravac u dvije realne i različite točke, a drugi u paru konjugirano imaginarnih točkaka,
  - *hiperbola*  $h_3$  - siječe svaki od apsolutnih pravaca u paru konjugirano imaginarnih točkaka,
  - *specijalna hiperbola*  $h_{s_1}$  - hiperbola kojoj je jedan od izotropnih pravaca apsolutan, a drugi ju apsolutni pravac siječe u dvije realne i različite točke,
  - *specijalna hiperbola*  $h_{s_2}$  - hiperbola kojoj je jedan od izotropnih pravaca apsolutan, a drugi ju apsolutni pravac siječe u paru konjugirano imaginarnih točkaka,
- *kružnica*  $k$  - krivulja 2. razreda kojoj su izotropni pravci apsolutni pravci,
- *elipsa*  $e$  - realna ili imaginarna krivulja 2. razreda koja ima par konjugirano imaginarnih izotropnih pravaca,
- *parabola*  $p$  - krivulja 2. razreda koja prolazi apsolutnom točkom, te ima samo jedan izotropni pravac, odnosno njezini izotropni pravci se podudaraju,
  - *specijalna parabola*  $p_s$  - parabola kojoj je izotropni pravac apsolutan.

Zbog specifičnosti apsolutne figure, s apsolutnom točkom  $F$  u konačnosti svaku od devet tipova konika, bez smanjenja općenitosti, moguće je predočiti bilo kojim tipom euklidske konike. Zbog konstruktivnih razloga predočit ćemo je euklidskom kružnicom.

<sup>3</sup>Radi preglednosti slike razredne krivulje su prikazane pripadnom dualnom rednom krivuljom.



Slika 3.1: Tipovi krivulja 2. razreda u projektivnom modelu  $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$

Uz konike u kvazihiperboličnoj ravnini vezani su i sljedeći pojmovi, [25]:

**Centrala ili glavni promjer** krivulje 2. razreda je polara apsolutne točke  $F$  s obzirom na krivulju. Centrala konike je analogon središta konike u euklidskoj ravnini i dual središta konike u pseudoeuklidskoj ravnini. Sve konike, osim parabole imaju realnu neizotropnu centralu. Centrala parabole je njena izotropna tangenta.

Analogon euklidskog promjera konike bila bi svaka točka centrale kao pol nekog od izotropnih pravaca. Parovi konjugiranih točaka na centrali konike čine involutoran niz točaka koji je dualni analogon parova konjugiranih promjera konike pseudoeuklidske ravnine. Onaj par konjugiranih točaka na centrali, koji su međusobno okomiti zovemo **središtima konike**. Konika općenito ima dva središta koja mogu biti realna i različita, konjugirano imaginarna ili padaju zajedno. Središta su dualni analogoni osi euklidske i pseudoeuklidske konike. Oba središta parabole incidentna su s apsolutnom točkom, dok se kod kružnice sve točke na njoj centrali mogu smatrati njenim središtima jer su svi parovi konjugiranih točaka na njezinoj centrali međusobno okomite točke. Dualno je to činjenici

da su svi parovi konjugiranih promjera euklidske i pseudoeuklidske kružnice međusobno okomiti.

Osim centrale, konika ima još dva sporedna **izotropna promjera**. To su spojnice njezinih središta s apsolutnom točkom  $F$ . Dakle, konika općenito ima tri promjera i svi su oni međusobno okomiti. Parabola i kružnica imaju uz centralu i beskonačno mnogo sporednih promjera.

**Direktrise ili ravnalice** konike spojnice su njezinih sjecišta s apsolutnim pravcima. Općenito konika ima četiri ravnalice i one su duali pseudoeuklidskih fokusa konike. Mogu biti sve četiri realne ili u parovima konjugirano imaginarne. Specijalna hiperbola  $h_{s1}$  ima dvije realne dvostruke, a  $h_{s2}$  par imaginarnih dvostrukih direktrisa, dok kružnica ima jednu četverostruku direktrisu.

Pol direktrise nazivamo **fokusom**, a konika ih ima jednako koliko i direktrisa.

**Tjemena** konike sjecišta su konike s njezinim osima kao i u euklidskoj i pseudoeuklidskoj ravnini. Tjeme je takva točka konike u kojoj ona ima hiperoskulacijsku kružnicu, a pokazuje se da konika može imati četiri, dva, jedno ili nijedno realno tjeme.

Središtu zakrivljenosti euklidske konike analogno se definira **centrala zakrivljenosti** konike u qh-ravnini. To je centrala one kružnice, koja oskulira koniku u određenoj točki. Kao što se krivulja središta zakrivljenosti i omotaljka normala euklidske konike podudaraju, u qh-ravnini će se podudarati njihovi analogoni.

**Napomena 3.1.1.** *Iako se u qh-ravnini u osnovi promatraju razredne krivulje, tjemena se definiraju kao karakteristične točke redne konike.*

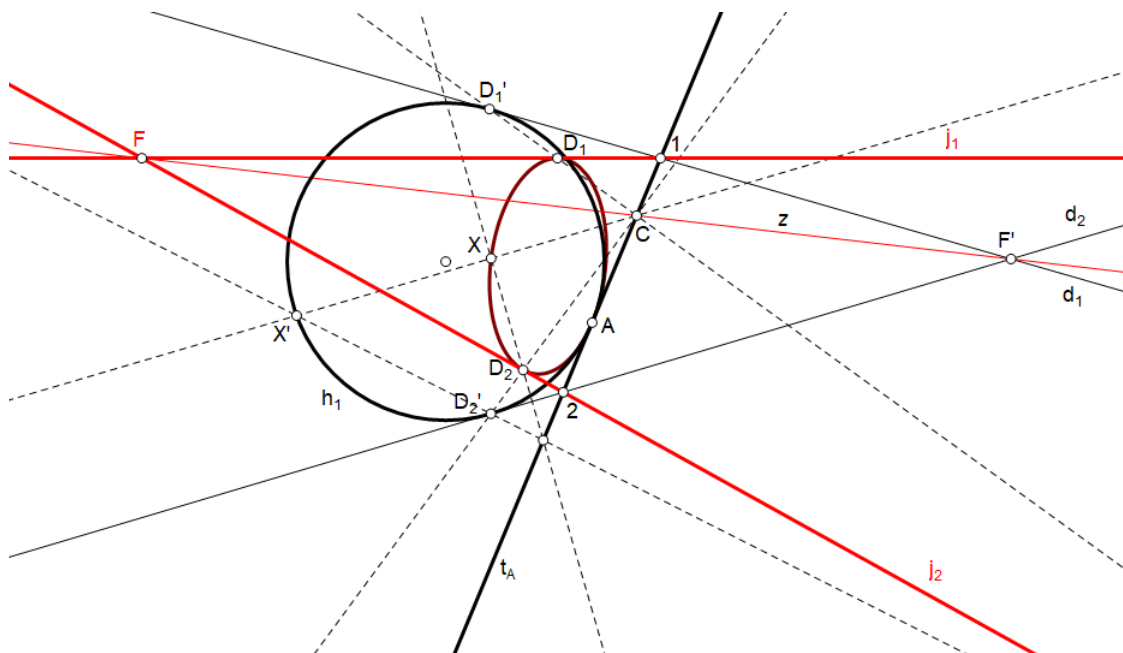
## 3.2 Oskulacijske kružnice i evolute konika u kvazihiperboličnoj ravnini

### 3.2.1 Konstrukcija oskulacijske kružnice konike

Neka je zadana qh-konika  $h_1$ . Koristeći elaciju konstruirat ćemo qh-kružnicu (u nastavku kružnicu) koja oskulira zadanu qh-koniku  $h_1$  u njezinoj proizvoljnoj točki.

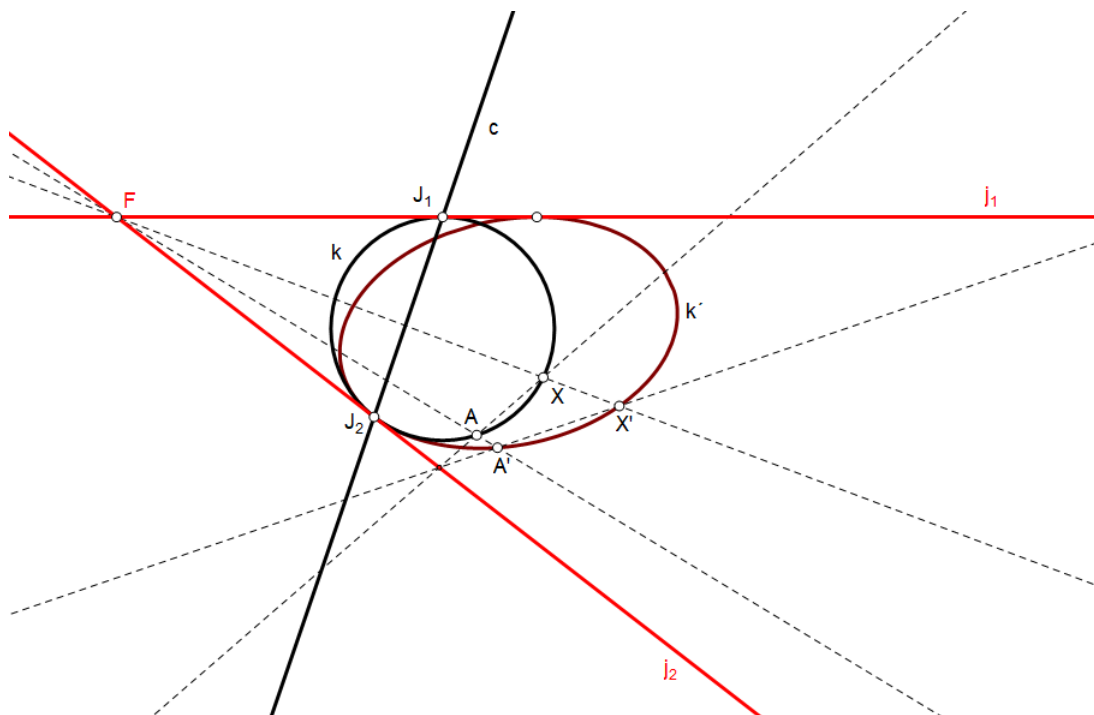
Neka je  $A$  po volji odabrana točka qh-konike  $h_1$  i  $t_A$  tangenta u njoj. Za os perspektivne kolineacije, odnosno elacije izaberemo tangentu  $t_A$ . Neka su točke 1 i 2 sjecišta tangenata  $j_1$  i  $j_2$  tražene kružnice s osi elacije  $t_A$ . Točkama 1 i 2 prolaze tangente  $d_1$  i  $d_2$  zadane qh-konike  $h_1$ . Sjecište  $F'$ , tangenata  $d_1$  i  $d_2$ , u elaciji je pridruženo apsolutnoj točki  $F$ , pa je spojnica  $FF'$  zraka elacije koja siječe os u središtu  $C$  elacije. Diralištima  $D_1'$  i  $D_2'$  pridružene su točke  $D_1$  i  $D_2$ . Točke  $D_1$  i  $D_2$  dirališta su tražene oskulacijske kružnice (vidi sliku 3.2).

Na ovaj način moguće je konstruirati oskulacijsku kružnicu u općoj točki svake konike u qh-ravnini.



Slika 3.2: Konstrukcija oskulacijske kružnice hiperbole  $h_1$

**Napomena 3.2.1.** Posebno je zanimljivo istaknuti da se u  $qh$ -ravnini i dvije  $qh$ -kružnice mogu međusobno oskulirati i to u izotropnom diralištu. Neka je zadana  $qh$ -kružnica  $k$ ,  $qh$ -kružnica  $k'$  koja ju oskulira u izotropnom diralištu  $J_2$  konstruira se perspektivnom kolineacijom (elacijom)  $(F, j_2, A, A')$ , gdje je  $F$  središte kolineacije, apsolutni pravac  $j_2$  os kolineacije, a točki  $A$  na zadanoj kružnici  $k$  po volji je pridružena točka  $A'$  na zruci  $FA$  (vidi sliku 3.3). Uočimo da postoji beskonačno mnogo takvih kružnica i one čine pramen oskulacijskih kružnica. Međusobna oskulacija dviju kružnica ne postoji u euklidskoj niti u pseudoeuklidskoj ravnini.



Slika 3.3: Konstrukcija oskulacijske  $qh$ -kružnice  $k'$   $qh$ -kružnice  $k$

### 3.2.2 Evolute konika u kvazihiperboličnoj ravnini

**Definicija 3.2.1.** *Evoluta konike qh-ravnine je skup točaka na tangentama qh-konika koje su okomite na dirališta oskulacijskih qh-kružnica, istovremeno evoluta je omotaljka centrala oskulacijskih qh-kružnica.*

Neka je u qh-ravnini zadana neka konika  $c$  (krivulja drugog razreda) i njezina proizvoljna tangenta  $t$  s diralištem u točki  $X$ . Neka su  $J_1$  i  $J_2$  sjecišta tangente  $t$  s apsolutnim pravcima  $j_1$  i  $j_2$ . Točke  $X$  i  $X_1$  na tangenti  $t$  međusobno su okomite ako čine harmonijsku četvorku s točkama  $J_1$  i  $J_2$ . Evoluta zadane qh-konike je skup svih točaka  $X_1$  na tangentama qh-konike koje su okomite na odgovarajuće diralište  $X$ .

**Teorem 3.2.1.** *U kvazihiperboličnoj ravnini evoluta konike općenito je krivulja četvrtog reda i šestog razreda.*

*Dokaz.* Evoluta je proizvod pramena 2. razreda, zadane qh-konike  $c$ , i pramena pravaca prvoga razreda s vrhom u apsolutnoj točki  $F$ . Svakoj tangenti  $t$  qh-konike  $c$  pridružen je jedan pravac  $x_1$  iz pramena ( $F$ ) koji prolazi točkom  $X_1$  koja je pridružena diralištu  $X$  tangente  $t$  u harmonitetu  $(J_1 J_2, X X_1)$ . Obrnuto, svakom pravcu  $x_1$  iz ( $F$ ) pridružene su dvije tangente  $t, t'$  qh-konike  $c$  koje diraju tu qh-koniku u njenim sjecištima  $X, X'$  s pravcem  $x$  pridruženom pravcu  $x_1$  u harmonitetu  $(j_1 j_2, x x_1)$ . Primjenom Chaslesove relacije [6], [30], rezultat toga pridruženja je krivulja 4. reda.  $\square$

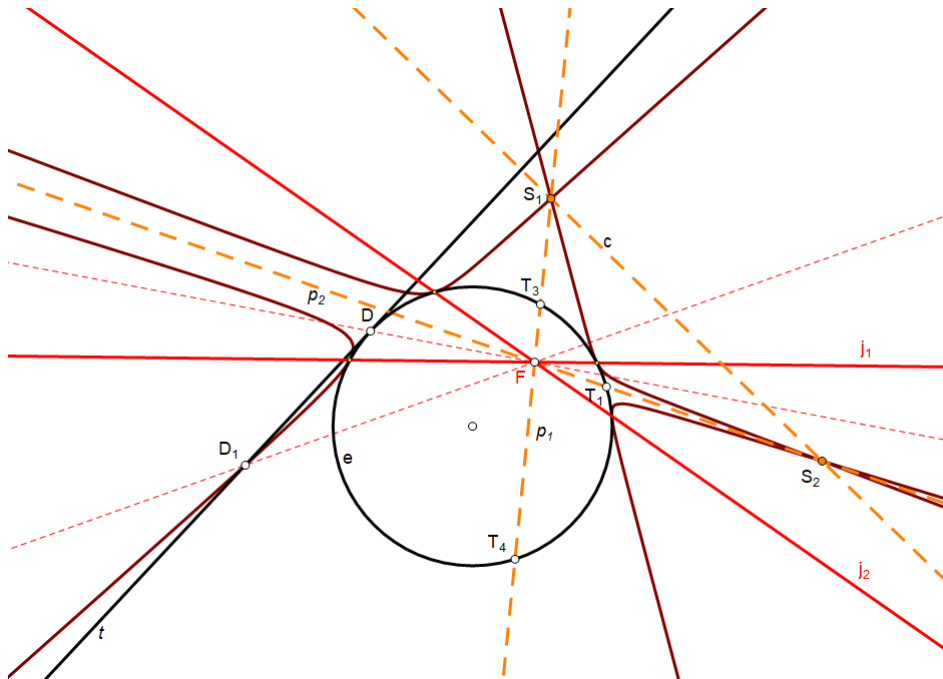
Poznato je da ako racionalnu krivulju 4. reda upišemo u trokut tako da mu se vrhovi poklapaju s tri dvostruke točke te krivulje, kvadratnom transformacijom dobijemo krivulju 2. reda, [23]. Suprotno, ako transformirana krivulja 2. reda, (npr. kružnica) siječe bilo koju stranicu spomenutog trokuta u dvijema točkama, tada odgovarajuća krivulja 4. reda mora imati, prema svojstvu kvadratne transformacije, u suprotnom vrhu tog trokuta dvije tangente, dakle čvornu točku. Ako spomenute dvije točke padnu u jednu, tada padaju zajedno i odgovarajuće tangente, pa prema tome krivulja 4. reda u vrhu trokuta ima šiljak. Ako su sjecišta krivulje 2. reda sa stranicom trokuta imaginarna, suprotni vrh trokuta biti će izolirana dvostruka točka krivulje 4. reda. Osobitosti oblika te krivulje ovise također i o tome da li krivulja 2. reda siječe stranice trokuta ili njihove produžetke [23].

Kod evolute qh-konika, apsolutna točka  $F$  i središta qh-konike  $S_1, S_2$  dvostruke su točke evolute. Dvostruke točke vrhovi su autopolarnog trovrha.



Evoluta elipse  $e$  i hiperbola  $h_1$ ,  $h_2$  i  $h_3$  u kvazihiperboličnoj ravnini neraspadnuta je krivulja četvrtog reda s tri dvostruke točke. Evoluta specijalnih hiperbola  $h_{s1}$  i  $h_{s2}$ , te parabole  $p$  je raspadnuta krivulja 4. reda na krivulje trećeg reda i pravac (niz točaka). U slučaju specijalne parabole  $p_s$  evoluta je raspadnuta krivulja 4. reda na krivulju drugog reda i dva puta brojeni pravac, (vidi Tablicu 3.1).

*Evoluta elipse  $e$*  je algebarska krivulja 4. reda i 6. razreda. Apsolutna točka  $F$  i središta konike  $S_1$ ,  $S_2$  dvostruke su točke evolute, (vidi sl. 3.4). Prema gore opisanom svojstvu kvadratne transformacije  $S_1$ ,  $S_2$  čvorne su točke, dok je  $F$  izolirana dvostruka točka. Zaključujemo da evoluta elipse potvrđuje tvrdnje iz prethodna dva poglavlja.



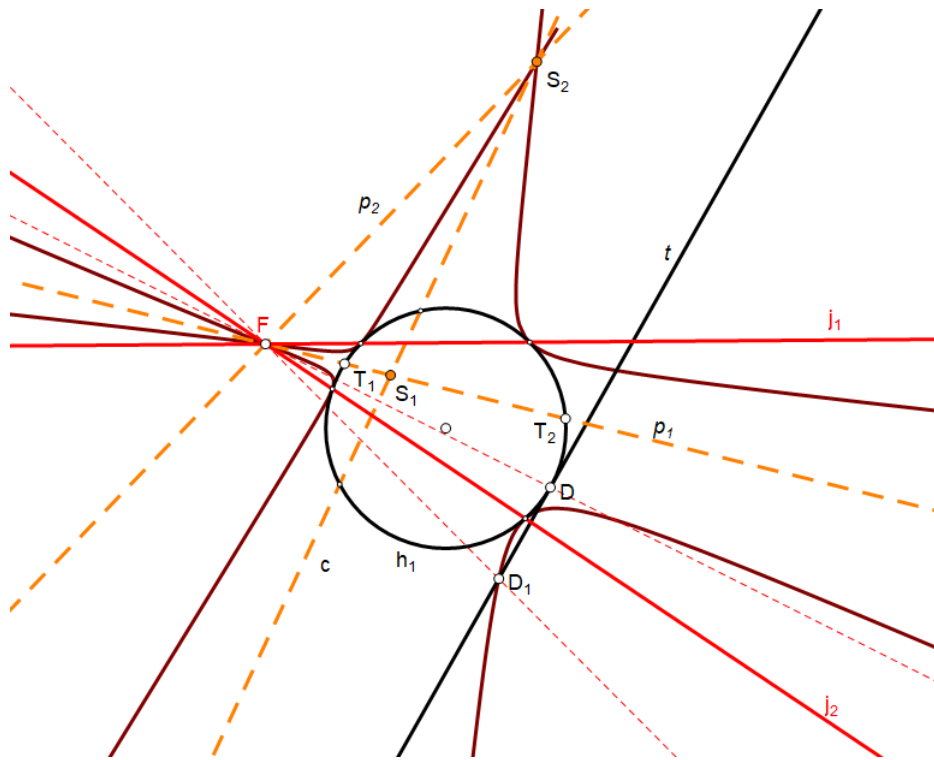
Slika 3.4: Evoluta (smeđe) elipse  $e$  u kvazihiperboličnoj ravnini

*Evoluta hiperbole  $h_1$*  je algebarska krivulja 4. reda i 6. razreda. Apsolutna točka  $F$  i središta konike  $S_1$ ,  $S_2$  dvostruke su točke evolute, (vidi sl. 3.5, 3.6). Prema svojstvu kvadratne transformacije,  $F$  i jedno središte  $S_2$  čvorne su točke. Zaključujemo da evoluta hiperbole  $h_1$  ne odstupa od očekivanog u usporedbi s prethodna dva poglavlja.

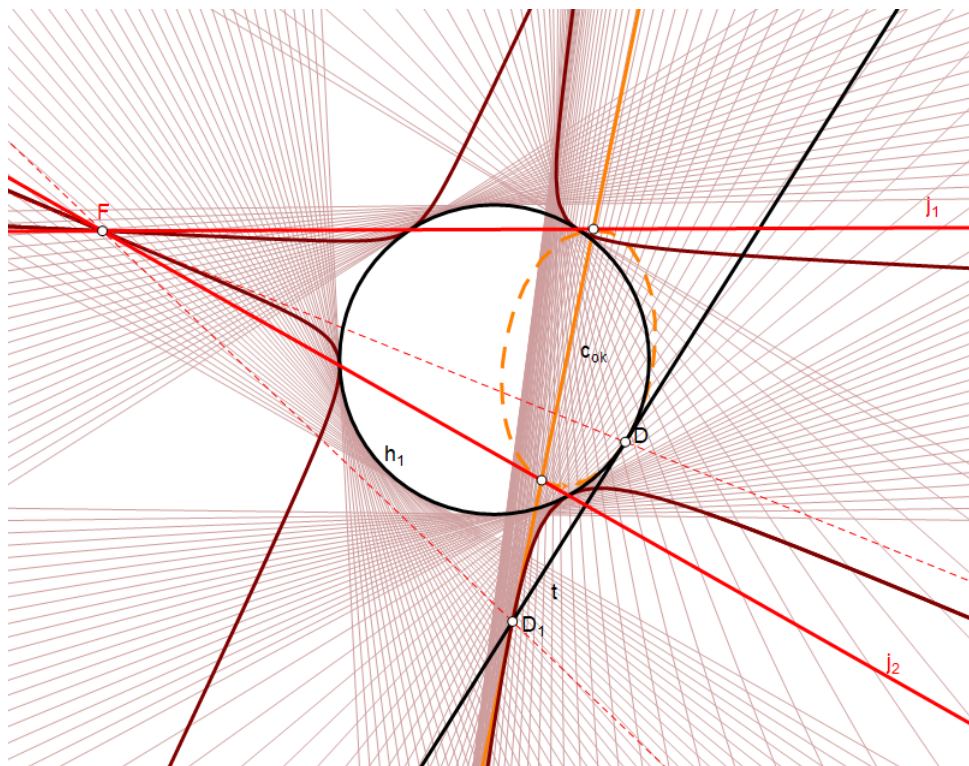
*Evoluta hiperbole  $h_2$*  je algebarska krivulja 4. reda i 6. razreda. Apsolutna točka  $F$  i imaginarna središta konike  $S_1$ ,  $S_2$  dvostruke su točke evolute, (vidi sl. 3.7).

Zaključujemo da evoluta hiperbole  $h_2$  potvrđuje tvrdnje iz prethodna dva poglavlja.

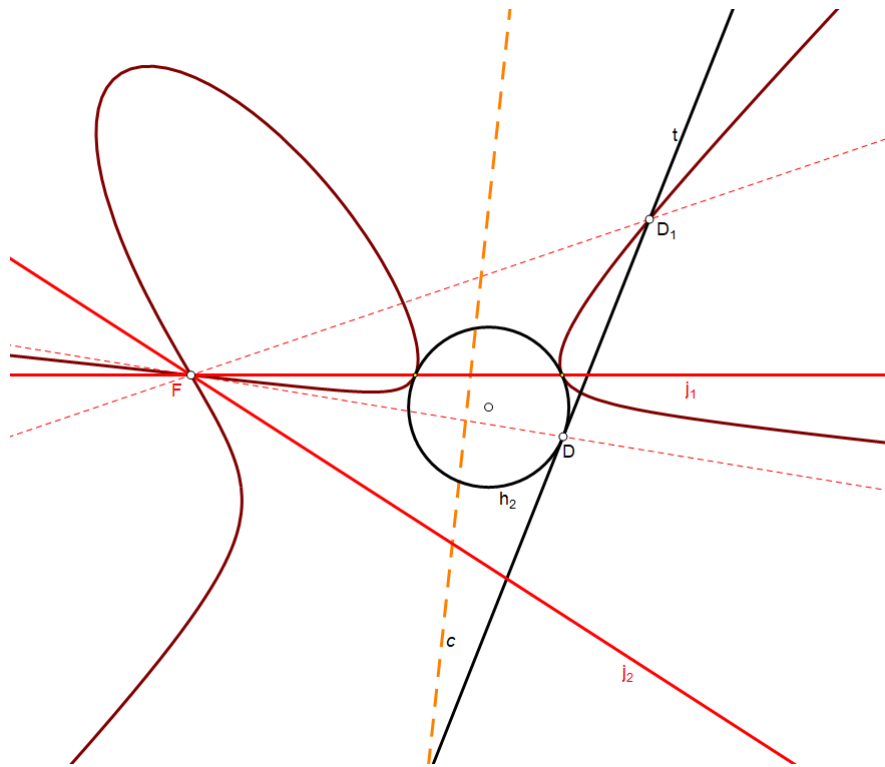
*Evoluta hiperbole  $h_3$*  je algebarska krivulja 4. reda i 6. razreda. Apsolutna točka  $F$  i središta konike  $S_1$ ,  $S_2$  dvostruke su točke evolute, (vidi sl. 3.8). Prema svojstvu kvadratne



Slika 3.5: Evoluta (smeđe) hiperbole  $h_1$  u kvazihiperboličnoj ravnini

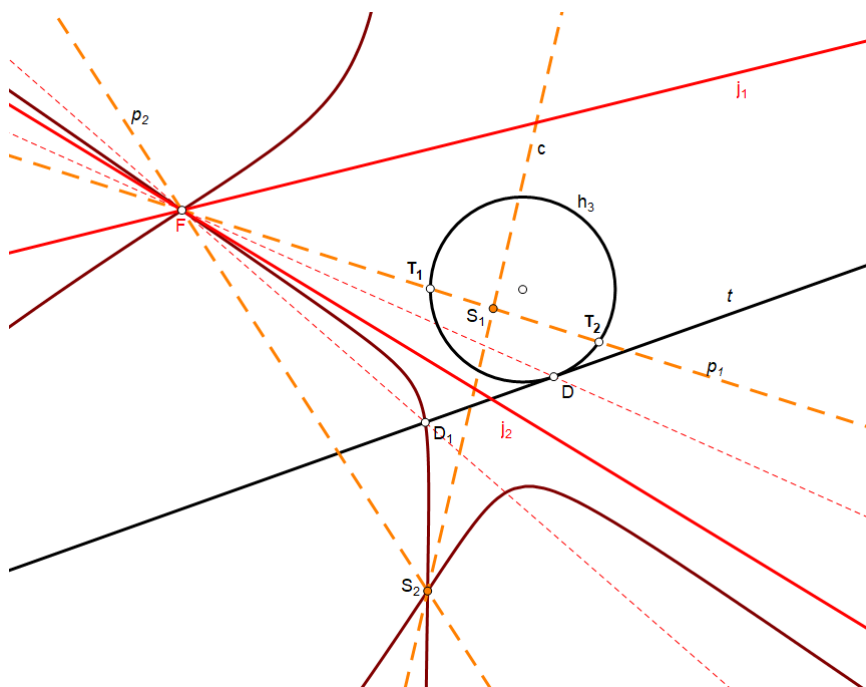


Slika 3.6: Evoluta (smeđe) hiperbole  $h_1$  prikazana i kao omotaljka centrala oskulacijskih kružnica



Slika 3.7: Evoluta (smeđe) hiperbole  $h_2$  u kvazihiperboličnoj ravnini

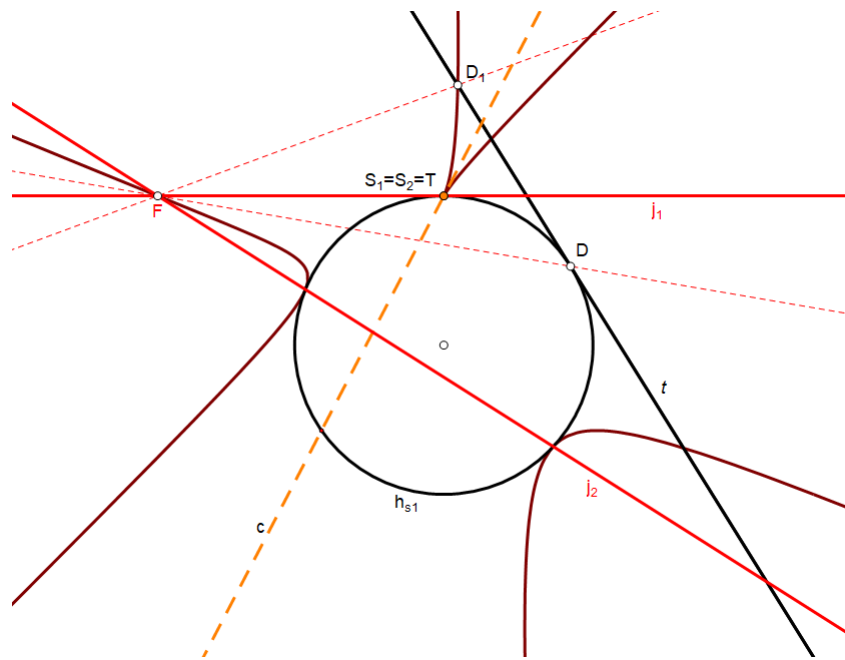
transformacije,  $F$  i jedno središte  $S_2$  čvrne su točke. Zaključujemo da evoluta hiperbole  $h_3$  ne odstupa od očekivanog u usporedbi s prethodna dva poglavlja.



Slika 3.8: Evoluta (smeđe) hiperbole  $h_3$  u kvazihiperboličnoj ravnini

Evoluta sljedećih qh-konika raspadnuta je krivulja 4. reda na krivulje nižih redova.

*Evoluta specijalne hiperbole  $h_{s1}$*  je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Dakle, kubika sa šiljkom. Qh-konika  $h_{s1}$  na apsolutnom pravcu  $j_1$  ima izotropno dvostruko središte, ista točka odgovara i četverostrukom tjemenu qh-konike  $h_{s1}$ ,  $S_1 = S_2 = T$ , ona je šiljak evolute, (vidi sl. 3.9). Budući da specijalna hiperbola  $h_{s1}$  dira apsolutni pravac  $j_1$  u točki  $S_1 = S_2 = T$ , koji je dvostruki pravac hiperbolične cirkularne involucije na pramenu pravaca ( $F$ ), sve izotropne točke na njemu međusobno su okomite, stoga je pravac  $j_1$  (niz točaka) dio raspada krivulje 4. reda.

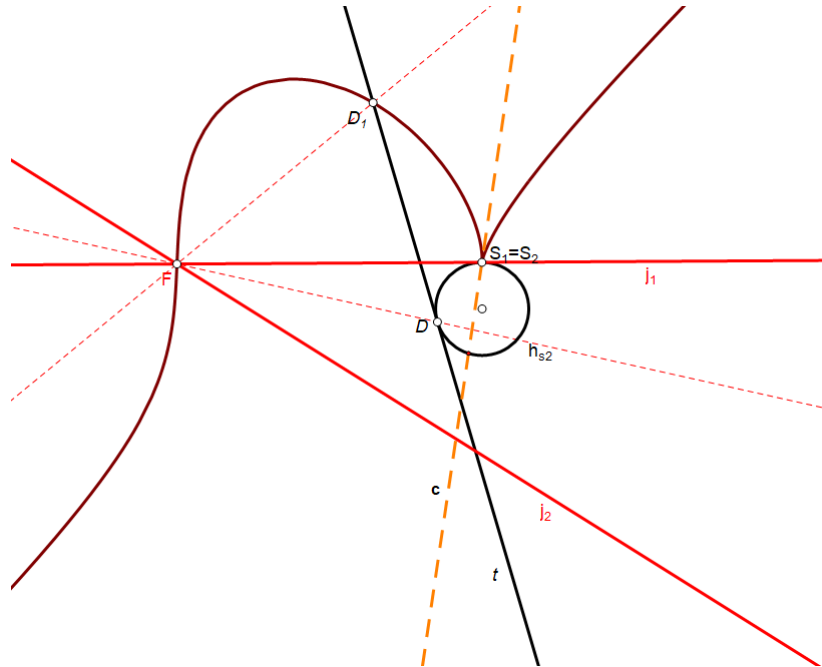


Slika 3.9: Evoluta (smeđe) hiperbole  $h_{s1}$  u kvazihiperboličnoj ravnini

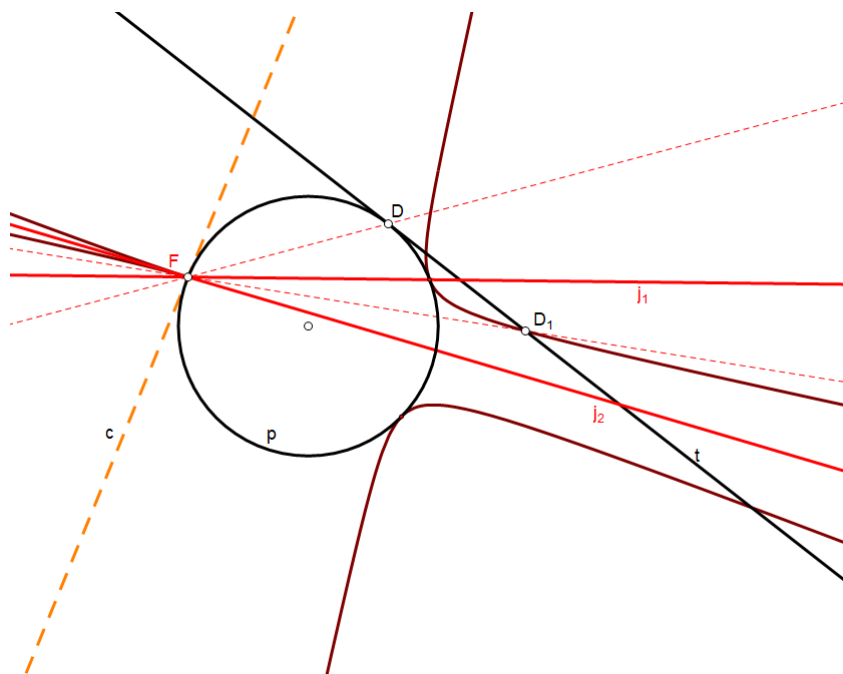
*Evoluta specijalne hiperbole  $h_{s2}$*  je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Dakle, kubika sa šiljkom. Qh-konika  $h_{s2}$  ima izotropno dvostruko središta  $S_1 = S_2$  i četverostruko tjeme u istoj točki, koja je šiljak evolute, (vidi sl. 3.10). Budući da specijalna hiperbola  $h_{s2}$  dira apsolutni pravac  $j_1$  u točki  $S_1 = S_2 = T$ , koji je dvostruki pravac hiperbolične cirkularne involucije na pramenu pravaca ( $F$ ), sve izotropne točke na njemu međusobno su okomite, stoga je pravac  $j_1$  (niz točaka) dio raspada krivulje 4. reda.

*Evoluta parabole  $p$*  je algebarska krivulja 3. reda i 3. razreda. Centrala parabole je njezina izotropna tangenta u apsolutnoj točki  $F$ . Oba središta parabole nalaze su u apsolutnoj točki, stoga konika ima beskonačno mnogo sporednih promjera. Apsolutna točka  $F$  je šiljak njezine evolute (vidi sl. 3.11).

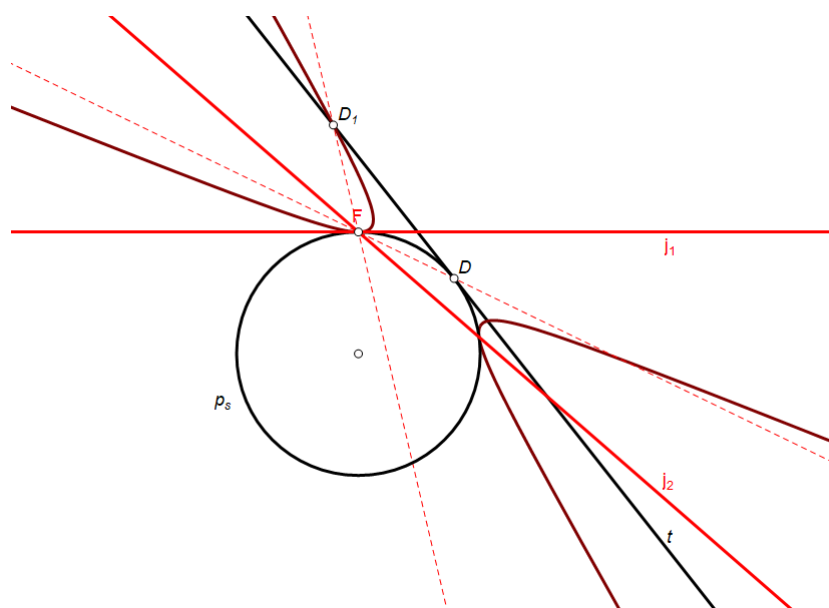
*Evoluta specijalne parabole  $p_s$*  je algebarska krivulja 2. reda i 2. razreda, (vidi sl. 3.12). Apsolutni pravac  $j_1$  centrala je konike. Budući da specijalna parabola dira apsolutni pravac  $j_1$  u apsolutnoj točki  $F$  dva puta brojeni niz točaka na pravcu  $j_1$  dio je raspada krivulje 4. reda.



Slika 3.10: Evoluta (smeđe) hiperbole  $h_{s_2}$  u kvazihiperboličnoj ravnini



Slika 3.11: Evoluta (smeđe) parabole  $p$  u kvazihiperboličnoj ravnini


 Slika 3.12: Evoluta (smeđe) specijalne parabole  $p_s$  u kvazihiperboličnoj ravnini

Tablica 3.1

evoluta koje qh-konike	red	razred	rod	broj dvostrukih točaka	broj šiljaka	broj infleksionih točaka
$e$	4	6	0	3	0	6
$h_1$	4	6	0	3	0	6
$h_2$	4	6	0	3	0	6
$h_3$	4	6	0	3	0	6
$h_{s1}$	3	3	0	0	1	1
$h_{s2}$	3	3	0	0	1	1
$p$	3	3	0	0	1	1
$p_s$	2	2	0	0	0	0

# Poglavlje 4

## Kvazieliptična ravnina

### 4.1 Osnovni pojmovi

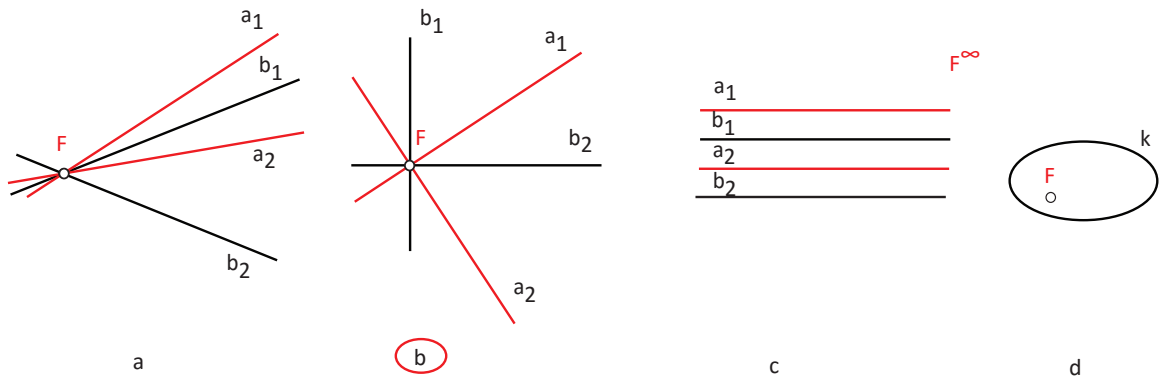
Kvazieliptična ravnina (qe) je projektivna ravnina  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  s eliptičnom metrikom na pravcu i paraboličnom metrikom na pramenu koju inducira apsolutna figura  $\mathcal{F}_{\text{QE}} = \{\mathbf{F}, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2\}$ , gdje je  $F$  realno sjecište para konjugirano imaginarnih pravaca  $j_1$  i  $j_2$  [26].

Pravci  $j_1$  i  $j_2$  nazivaju se *apsolutnim pravcima*, a točka  $F$  *apsolutnom točkom*.

Ova je ravnina dualna euklidskoj ravnini u kojoj apsolutnu figuru  $\mathcal{F}_{\text{QE}} = \{\mathbf{F}, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2\}$  čini par konjugirano-imaginarnih točaka  $J_1$  i  $J_2$  i njihova realna spojnica  $f$ . Zbog spomenute dualnosti euklidske i kvazieliptične ravnine (dalje u tekstu e-ravnina i qe-ravnina) pogodno je pravac smatrati osnovnim elementom, a točku pramenom pravaca. Primjerice, krivulja je tvorevina (omotaljka) pravaca, a kvadratnom transformacijom se točka odnosno pramen pravaca preslikava u krivulju drugoga razreda, ovakva dualnost može se primijetiti i u slučaju qh-ravnine i pe-ravnine.

Uređenu trojku  $\mathcal{F}_{\text{QE}} = \{\mathbf{F}, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2\}$ , moguće je pomoću eliptičnog involutornog pramena pravaca ( $F$ ) zadati na sljedeće načine:

1. Pravci  $j_1$  i  $j_2$  dvostruke su zrake eliptičnog involutornog pramena ( $F$ ) zadanog dvama parovima pridruženih pravaca  $a_1, a_2; b_1, b_2$ . Točka  $F$  može biti u konačnosti (sl. 4.1 a) pri čemu pridruženi pravci mogu biti međusobno okomiti u euklidskom smislu (sl. 4.1 b) ili beskonačno daleko (sl. 4.1 c).
2. Pravci  $j_1$  i  $j_2$  tangente su po volji odabrane konike položene točkom  $F$  koja se nalazi u njezinoj nutrini (sl. 4.1 d).



Slika 4.1: Četiri načina na koja je moguće pomoću eliptičkog involutornog pramena pravaca ( $F$ ) zadati uređena trojka  $\mathcal{F}_{QE} = \{F, j_1, j_2\}$

Osobito praktičnim pokazat će se takav model qe-ravnine u kojemu su pridruženi parovi pravaca  $a_1, a_2; b_1, b_2$  međusobno okomiti u euklidskom smislu (sl. 4.1 b) jer u tom slučaju apsolutni pravci  $j_1, j_2$  prolaze apsolutnim točkama e-ravnine, taj model koristi se u ovom radu.

**Definicija 4.1.1.** *Pravci qe-ravnine incidentni s apsolutnom točkom  $F$  nazivaju se **izotropnim pravcima**. Točke qe-ravnine incidentne s apsolutnim pravcima  $j_1$  i  $j_2$  nazivaju se **izotropnim točkama** (imaginarne su).*

*Dvije točke qe-ravnine nazivaju se **paralelne točke** ako su incidentne s istim izotropnim pravcem. Dvije točke qe-ravnine nazivaju se međusobno **okomite točke** ako se nalaze na pridruženim pravcima eliptične cirkularne involucije ( $F$ ).*

Točka  $F$  paralelna je sa svim točkama i okomita na sve točke qe-ravnine.

U qe-ravnini nema realnih paralelnih pravaca, a za dva pravca reći ćemo da su međusobno okomiti samo onda ako je jedan od njih izotropan.

Konike qe-ravnine se u projektivnom smislu ne razlikuju od konika euklidske ravnine, (vidi sl. 4.2)<sup>4</sup>. To su krivulje drugoga razreda, koje se prema položaju spram apsolutne figure razvrstavaju u četiri tipa, [26]:

- *Hiperbola  $h$  qe-ravnine je krivulja 2. razreda koja ima par realnih i različitih izotropnih pravaca. Ako su izotropni pravci hiperbole pridruženi pravci apsolutne*

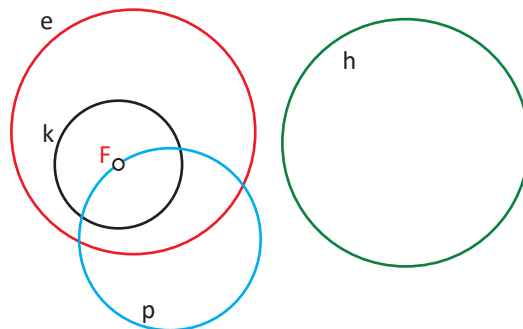
<sup>4</sup>Radi preglednosti slike razredne krivulje su prikazane pripadnom dualnom rednom krivuljom.



involucije, radi se o specijalnoj hiperboli koja je dualna tzv. ortogonalnoj hiperboli euklidske ravnine.

- *Elipsa*  $e$   $q$ e-ravnine je krivulja 2. razreda koja ima par konjugirano imaginarnih izotropnih pravaca.
- *Parabola*  $p$   $q$ e-ravnine je krivulja 2. razreda koja ima samo jedan izotropni pravac, odnosno izotropni pravci se podudaraju.
- *Kružnica*  $k$   $q$ e-ravnine je specijalna elipsa, krivulja 2. razreda kojoj su izotropni pravci apsolutni pravci. U ovdje korištenom modelu bit će to sve one konike kojima je apsolutna točka  $F$  (euklidski) fokus.

U projektivnom modelu  $q$ e-ravnine, bez smanjenja općenitosti, svi oblici euklidskih konika mogu predstavljati pojedinu  $q$ e-koniku. Zbog konstruktivnih razloga najčešće se koristi euklidska kružnica.



Slika 4.2: Tipovi krivulja drugog razreda u projektivnom modelu  $q$ e-ravnine

Uz konike u kvazieliptičnoj ravnini vezani su i sljedeći pojmovi, [26]:

**Glavni promjer ili centrala** konike je polara apsolutne točke  $F$ . Centrala je dual središta konike u  $e$ -ravnini. Elipsa, hiperbola i kružnica imaju realnu neizotropnu centralu. Centrala parabole je njezin izotropni pravac.

Dual euklidskog promjera konike bila bi svaka točka centrale kao pol nekog od izotropnih pravaca. Onaj par točaka na centrali, koji je međusobno okomit i konjugiran u odnosu na koniku zovemo **središtima konike**. Elipsa i hiperbola imaju po dva realna i različita središta, a u slučaju parabole oba središta padaju u točku  $F$ . Središta su dualni analogoni osi euklidske konike. Kružnica ima beskonačno mnogo središta jer svaki par konjugiranih točaka na centrali kružnice međusobno su okomite točke. To odgovara dualnoj činjenici

da se svi promjeri kružnice u euklidskoj ravnini smatraju njezinim osima. Osim glavnog promjera ili centrale, elipsa i hiperbola imaju još dva **sporedna (izotropna) promjera**. To su spojnice njezinih središta s apsolutnom točkom  $F$ .

**Tjemeni pravci** konike su pravci koji prolaze njezinim središtima. Tjemeni pravac konike je zajednički pravac konike i njene hiperoskulacijske kružnice.

**Tjemene točke** konike su dirališta na tjemnim pravcima.

## 4.2 Evolute konika u kvazieliptičnoj ravnini

**Definicija 4.2.1.** *Evoluta konike u  $qe$ -ravnini je skup točaka na tangentama  $qe$ -konika koje su okomite na dirališta oskulacijskih kružnica, istovremeno evoluta je omotaljka centrala oskulacijskih kružnica.*

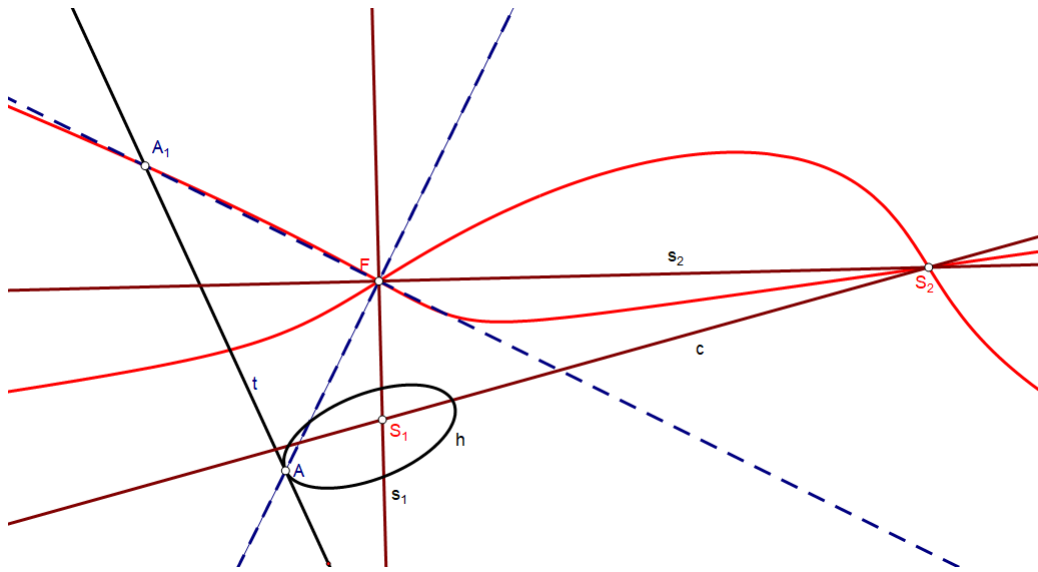
**Teorem 4.2.1.** *Evoluta konike u kvazieliptičnoj ravnini općenito je krivulja četvrtog reda i šestog razreda.*

Apsolutna točka  $F$  i središta konike  $S_1, S_2$  dvostruke su točke evolute. Dvostruke točke vrhovi su autopolarnog trovrha, (vidi Tablicu 4.1).

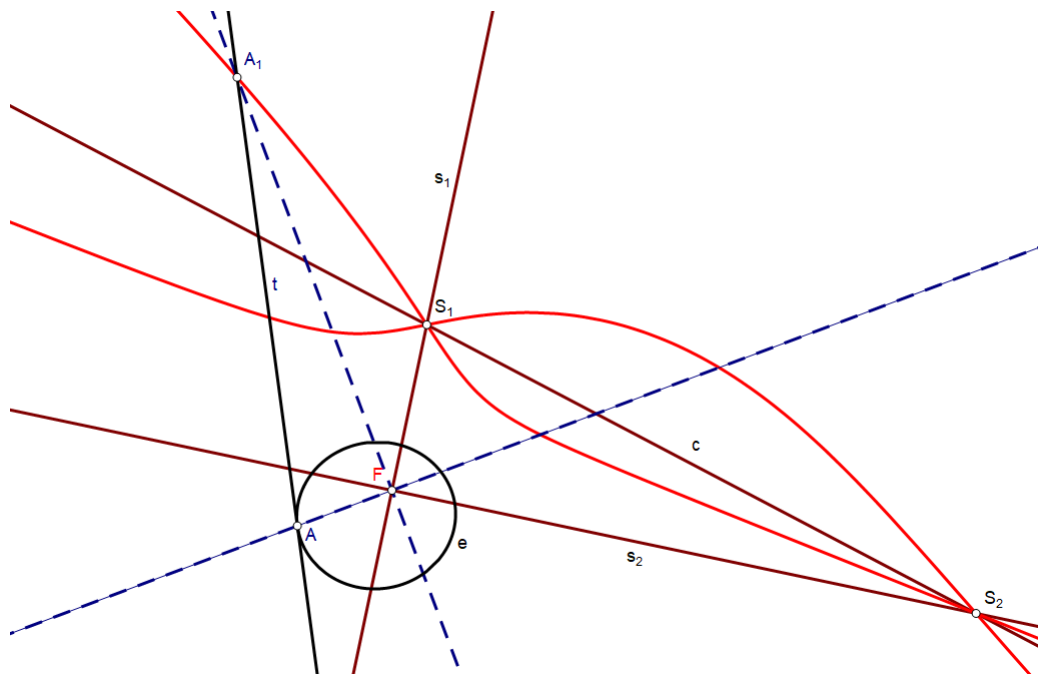
Dobiveni rezultati ne odstupaju od rezultata dobivenih u prethodnim poglavljima, u nastavku je njihov pregled (vidi slike 4.3, 4.4, 4.5).

Tablica 4.1

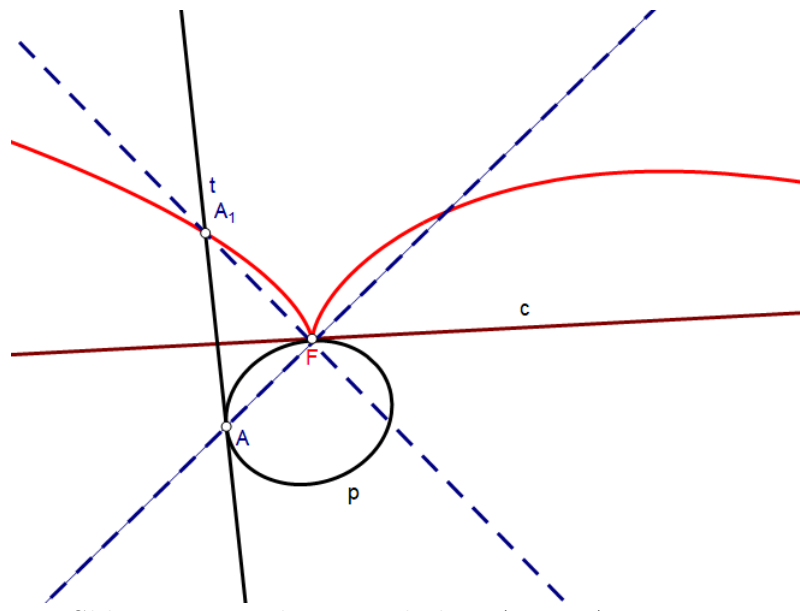
evoluta koje $qe$ -konike	red	razred	rod	broj dvostrukih točaka	broj šiljaka	broj infleksionih točaka
$e$	4	6	0	3	0	6
$h$	4	6	0	3	0	6
$p$	3	3	0	0	1	1



Slika 4.3: Evoluta hiperbole  $h$  (crveno) qe-ravnine



Slika 4.4: Evoluta elipse  $e$  (crveno) qe-ravnine



Slika 4.5: Evoluta parabole  $p$  (crveno) qe-ravnine

# Poglavlje 5

## Hiperbolična ravnina

Hiperbolična geometrija nastala je sumnjom matematičara u V. Euklidov postulat. Kao geometrija potpuno ravnopravna euklidskoj postala je dokazom njezine neproturječnosti. Neproturječje hiperbolične geometrije posljedica je neproturječnosti euklidske geometrije. Autori hiperbolične geometrije su Gauss, Lobačevski i Bolyaj. Postoje nekoliko modela hiperbolične geometrije, a najpoznatiji su: model gornje poluravnine, Poincaréov model diska, Kleinov model, Loidov model. U ovom radu koristi se Kleinov model projektivno proširene hiperbolične ravnine. Istaknimo da je hiperbolična ravnina proučavana tako da se promatraju sve točke projektivne ravnine bez obzira nalaze li se unutar apsolutne konike, izvan nje ili na njoj, kao i svi pravci koji apsolutnu koniku sijeku realno, imaginarno ili je dodiruju. Stoga je proučavanje hiperbolične ravnine obuhvatilo ne samo hiperbolično-eliptičnu ravninu, već i hiperbolično-hiperboličnu i eliptično-hiperboličnu ravninu.

### 5.1 Osnovni pojmovi

Hiperbolična ravnina  $\mathbb{H}^2$  je projektivna ravnina  $\mathbb{P}^2$  u kojoj je metrika inducirana neraspadnutom krivuljom 2. reda, euklidskom kružnicom  $a$ . Na taj način zadana je **apsolutna konika** Kleinovog modela projektivno proširene hiperbolične ravnine.

**Definicija 5.1.1 (Točke).** *Točke unutar apsolutne konike zovemo **pravim točkama**, one izvan apsolutne konike **nepравim ili idealnim točkama**, a točke na apsolutnoj konici **graničnim točkama** hiperbolične ravnine.*

Dvije točke bilo koje vrste u hiperboličnoj ravnini određuju jedan i samo jedan pravac.

**Definicija 5.1.2 (Pravac).** *Ako pravac apsolutnu koniku siječe realno zovemo ga **pravi pravac**. Ako pravac apsolutnu koniku siječe imaginarno zovemo ga **idealni pravac bez graničnih točaka** (izotropni pravac). Ako pravac tangira apsolutnu koniku zovemo ga **idealni s jednom graničnom točkom**. Za dva pravca koji se sijeku u pravoj točki kaže se da su **ukršteni**. Ako im je sjecište na apsolutnoj konici, **pravci su paralelni**, a ako se sijeku izvan apsolute, kaže se da su **hiperparalelni**.*

**Definicija 5.1.3 (Okomiti pravci).** *H-okomitost pravaca definirana je apsolutnim polaritetom tj. pravci su okomiti, ako svaki od njih prolazi apsolutnim polom drugog. Svake dvije apsolutno konjugirane polare bez obzira da li se sijeku u pravoj, graničnoj ili idealnoj točki, međusobno su okomite.*

U euklidskoj se ravnini smatra da je točka geometrijski točno konstruirana ukoliko je određena kao sjecište dvaju pravaca, pravca s kružnicom ili kao sjecište dviju kružnica. Kako se ovdje radi o euklidskom modelu hiperbolične geometrije, za očekivati je da se i u njemu mogu elementarne geometrijske konstrukcije izvoditi ravnalom i šestarom.

Pokazuje se da je to često doista moguće, uz napomenu da su konstrukcije znatno složenije od analognih konstrukcija u euklidskoj ravnini, [1], [28].

U hiperboličnoj ravnini  $\mathbb{H}^2$  razlikujemo 13 vrsta konika. Razlikujemo ih s obzirom na to da li realno ili imaginarno sijeku apsolutnu koniku, ili je diraju odnosno oskuliraju, te s obzirom na to da li su im izotropne tangente realne ili imaginarne, vidi tablicu (5.1)

- **Hipercikl**  $k_{hc}$  je svaka konika koja dira apsolutnu koniku u dvije realne i različite točke.
- **Cikl**  $k_c$  je svaka konika koja dira apsolutnu koniku u paru konjugirano imaginarnih točaka.
- **Horicikl**  $k_{ho}$  je svaka konika kod koje su imaginarna ili realna apsolutna dirališta incidentna.

Hipercikl, cikl i horicikl tri su tipa **hiperbolične kružnice**.

- **Elipsa**  $e_1$  je svaka konika koja siječe apsolutnu koniku u dva para konjugirano imaginarnih točaka i ima dva para realnih izotropnih tangenata.
- **Elipsa**  $e_2$  je svaka konika koja s apsolutnom konikom ima dva para konjugirano imaginarnih sjecišta i dva para konjugirano imaginarnih tangenata.

- **Konkavna hiperbola**  $h_{1ko}$  je svaka konika koja siječe apsolutnu koniku u 4 realne i različite točke i s njom ima dva para realnih izotropnih tangenata.
- **Konveksna hiperbola**  $h_{2kv}$  je svaka konika koja siječe apsolutnu koniku u 4 realne i različite točke i s njom ima dva para konjugirano imaginarnih izotropnih tangenata.
- **Eliptična hiperbola**  $eh$  je svaka konika koja siječe apsolutnu koniku u paru realnih i različitih točaka i paru konjugirano imaginarnih točaka, s njom ima par realnih i različitih izotropnih tangenta i par konjugirano imaginarnih izotropnih tangenta.
- **Konkavna hiperbolična parabola**  $hp_{1ko}$  je svaka konika koja dira apsolutnu koniku (2 realna apsolutna dirališta su incidentna), siječe ju u paru realnih i različitih točaka, i ima s njom par *realnih* izotropnih tangenta i jednu realnu dvostruku izotropnu tangentu.
- **Konveksna hiperbolična parabola**  $hp_{2kv}$  je svaka konika koja dira apsolutnu koniku (2 realna apsolutna dirališta pala su u istu točku), siječe ju u paru realnih i različitih točaka, ima s njom par konjugirano *imaginarnih* izotropnih tangenta i jednu realnu dvostruku izotropnu tangentu.
- **Specijalna (oskulacijska) hiperbola**  $ho_s$  je svaka konika koja oskulira apsolutnu koniku i s njom ima par realnih i različitih izotropnih tangenta.
- **Eliptična parabola**  $ep_1$  je svaka konika koja dira apsolutnu koniku i siječe ju u paru konjugirano imaginarnih točaka, s njom ima par *realnih* i različitih izotropnih tangenta i jednu realnu dvostruku izotropnu tangentu.
- **Eliptična parabola**  $ep_2$  je svaka konika koja dira apsolutnu koniku i siječe ju u paru konjugirano imaginarnih točaka, s njom ima par konjugirano *imaginarnih* izotropnih tangenta i jednu realnu dvostruku izotropnu tangentu.

Tablica 5.1


Prilikom konstrukcije hiperboličnih konika upotrebijene se sljedeće činjenice, [24]:

Konika  $k$  i njoj pridružena konika  $k'$  sijeku se u 4 točke, koje mogu sve biti realne ili u parovima konjugirano imaginarne, mogu po dvije, tri ili sve četiri pasti u istu točku. Neka su  $A, B, C, D$  sjecišta pridruženih konika  $k$  i  $k'$ . Postoji beskonačno mnogo konika koje prolaze tim sjecištima i sve one čine pramen konika s temeljnim točkama  $A, B, C, D$ . Ukoliko dvije temeljne točke pramena padnu skupa, kažemo da je pramen konika dirni, a ako dva puta po dvije temeljne točke padnu zajedno, pramen je dvostruko dirni.

Korisno je napomenuti da dirališta svih konika dvostruko dirnog pramena mogu biti dvije realne ili konjugirano imaginarne točke. Ako tri temeljne točke pramena padnu skupa, govorimo o oskulacijskom, a ako sve četiri temeljne točke padnu u istu točku, radi se o hiperoskulacijskom pramenu konika.

Prilikom konstruiranja konika u tablici 5.1 posebno će nas zanimati koji se uvjeti trebaju postaviti na temeljne elemente perspektivne kolineacije u odnosu na neku koniku, da bi se ona sa svojom pridruženom konikom dirala, oskulirala odnosno hiperoskulirala, [24]. Ukoliko konika  $k$  dira os ili prolazi središtem perspektivne kolineacije (pri čemu središte  $S$  ne leži na osi  $o$ ), konike  $k$  i njoj pridružena konika  $k'$  se diraju na osi odnosno u točki  $S$ .



Ako konika prolazi kroz točku  $S$  i dira os  $o$  u nekoj točki  $O$  ( $S \notin o$ ), konike  $k$  i  $k'$  se diraju u dvije točke  $S$  i  $O$  i određuju dvostruko dirni pramen konika. Ovaj tip pramena može nastati i u slučaju kada su  $S$  i  $o$  pol i polara u odnosu na koniku  $k$ . U tom su slučaju sjecišta konike  $k$  s osi zajednička dirališta svih konika pramena. Ta će sjecišta činiti konjugirano imaginaran par točaka ukoliko se centar kolineacije nalazi unutar konike.

Da bi se konike  $k$  i  $k'$  oskulirale u nekoj točki, potrebno je na početnu koniku djelovati elacijom. Koniku  $k$  treba postaviti tako da dodiruje os elacije u točki različitoj od središta  $S$  elacije. Oskulacija konika  $k$  i  $k'$  može se postići i u slučaju kada  $k$  prolazi središtem elacije ali ne dira os.

Ukoliko konika  $k$  dira os elacije upravo u središtu elacije  $S$ , ona se preslikava u koniku  $k'$  s kojom se u točki  $S$  hiperoskulira.

Sve ove nabrojene činjenice omogućile su da se iz apsolutne konike povoljno odabranim elementima perspektivne kolineacije konstruira pramen hiperboličnih konika, koji će prema potrebi biti dirni, oskulacijski ili hiperoskulacijski.

Uz konike u hiperboličnoj ravnini  $\mathbb{H}^2$  vezani su i sljedeći pojmovi:

- *Središte* konike je pol jednog nepravog/beskonačno dalekog (apsolutnog) pravca. U hiperboličnoj ravnini je beskonačno mnogo takvih pravaca (idealnih i graničnih). Središte neke konike je pol samo jednoga od njih. To je pol onoga pravca (ne nužno idealnoga), za kojega je ujedno i apsolutni pol. On je jedan od vrhova zajedničkog autopolarnog trovrha konike i apsolute.
- *Fokusi* su sjecišta izotropnih tangenata konike. Konstrukcija fokusa nije uvijek elementarna, pogotovo kada su izotropne tangente imaginarni pravci.
- *Osi* konike su spojnice njezinih fokusa.

## 5.2 Evoluta konike u hiperboličnoj ravnini

Znamo da je evoluta dane krivulje je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti te krivulje, istovremeno i omotaljka njezinih normala, [23].

**Teorem 5.2.1.** *Evoluta konike u hiperboličnoj ravnini  $\mathbb{H}^2$  općenito je krivulja šestoga reda i četvrtog razreda.*

*Dokaz.* Neka je  $k$  konika hiperbolične ravnine. Pridružimo konici  $k$  koniku  $k_1$  koju čine apsolutni polovi svih njezinih tangenata na sljedeći način.

Neka je  $t$  tangenta konike  $k$  u po volji odabranoj točki  $T$ . Točki  $T$  pridružena je ona točka  $T_1$  konike  $k_1$  koja je apsolutni pol tangente  $t$ . Pri tome je svakoj točki  $T_1$  konike  $k_1$  pridruženo diralište  $T$  na jedinstvenoj polari  $t$ , koja je tangenta konike  $k$ . Konike  $k$  i  $k_1$  nazivaju se recipročnim polarama s obzirom na apsolutnu koniku, [5].

Zaključujemo, riječ je o 1-1 pridruženju dvaju nizova drugoga reda ( $k$ ) i ( $k_1$ ), a rezultat toga pridruženja prema Chaslesovoj relaciji je omotaljka četvrtoga razreda, [6], [30].  $\square$

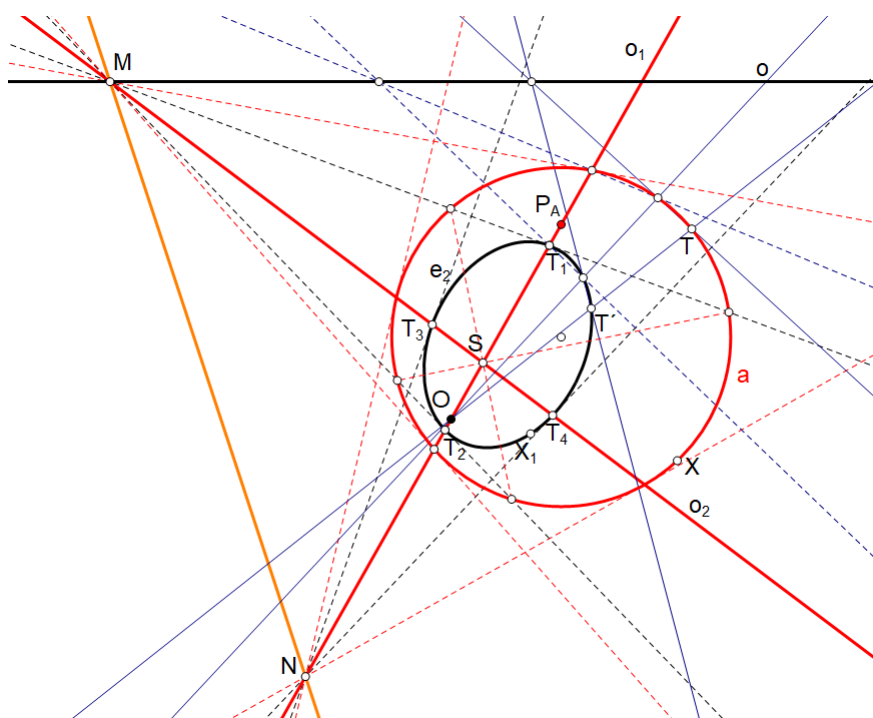
Kao i u prethodnim poglavljima istaknuti će se one konike hiperbolične ravnine kod kojih je evoluta raspadnuta krivulja 4. razreda na krivulje nižih razreda.

Perspektivnom kolineacijom  $(O, o, T, T')$  konstruira se konika hiperbolične ravnine kao slika apsolutne konike  $a$ . Jedna os konike je zraka kolineacije  $o_1 = OP_A$ , gdje je  $P_A$  apsolutni pol osi kolineacije  $o$ . Os  $o_1$  je zajednička polara apsolutne konike  $a$  i konike hiperbolične ravnine. Neka je  $M$  pol osi  $o_1$  u odnosu na apsolutnu koniku.

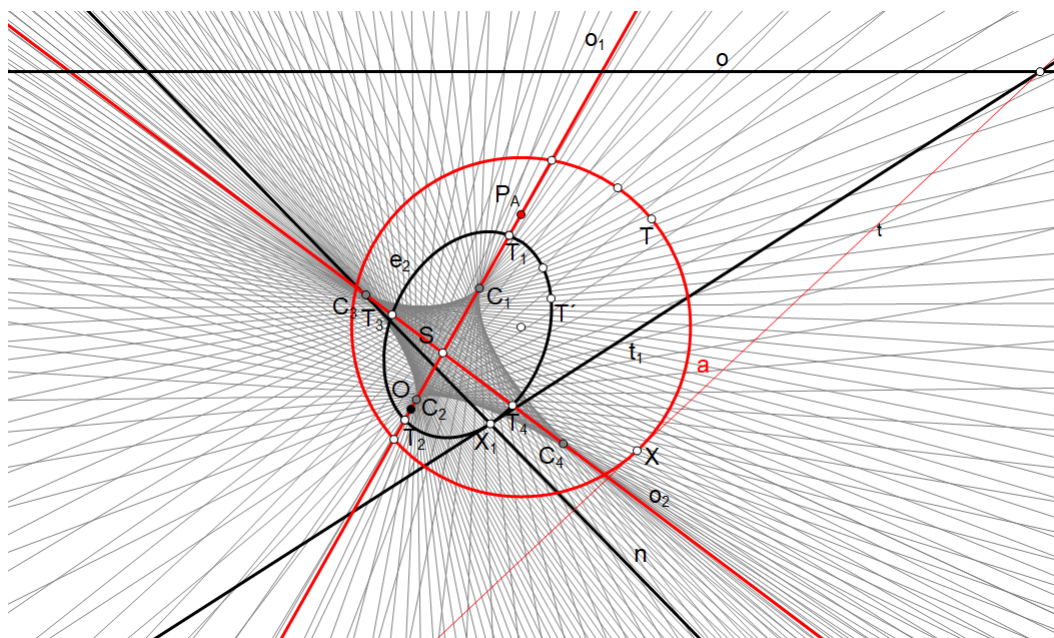
Os  $o_1$  siječe koniku u tjemenu  $T_1$  i  $T_2$ . Središte konike je polovište promjera  $\overline{T_1T_2}$ , konstruira se kao u [1]. Os  $o_2$  incidentna je sa središtem  $S$  i polom  $M$ .

Osi konike  $o_1$  i  $o_2$  su apsolutno konjugirane polare i međusobno su okomite. Neka su  $M$ ,  $N$  polovi pravaca  $o_1$ ,  $o_2$  u odnosu na apsolutnu koniku  $a$ .

Osi konike  $o_1 = SN$ ,  $o_2 = SM$  i pravac  $MN$  stranice su autopolarnog trostrana i dvostruki pravci evolute, (vidi sliku 5.1). Pravac  $MN$  ima ulogu beskonačno dalekog pravaca za koniku  $e_2$ . Središta zakrivljenosti  $C_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  oskulacijskih kružnica u tjemenu  $T_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  dane konike konstruiraju se kao u [31], (vidi sliku 5.2). Točke  $C_i$  šiljci su evolute konike u hiperboličnoj ravnini. Preostala dva šiljka su imaginarna i incidentana s pravcem  $MN$ .



Slika 5.1: Osi  $o_1, o_2$  konike



Slika 5.2: Središta zakrivljenosti  $C_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  oskulacijskih kružnica u tjemenuima  $T_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Krivulja hiperbolične ravnine je *cirkularna* ako dodiruje apsolutu u barem jednoj točki. Ukoliko krivulja i apsoluta imaju zajedničku tangentu u svakoj zajedničkoj točki, kažemo da je krivulja *potpuno cirkularna*. Dakle, potpuno cirkularne krivulje hiperbolične ravnine u graničnim točkama dodiruju, oskuliraju ili hiperoskuliraju apsolutnu koniku.

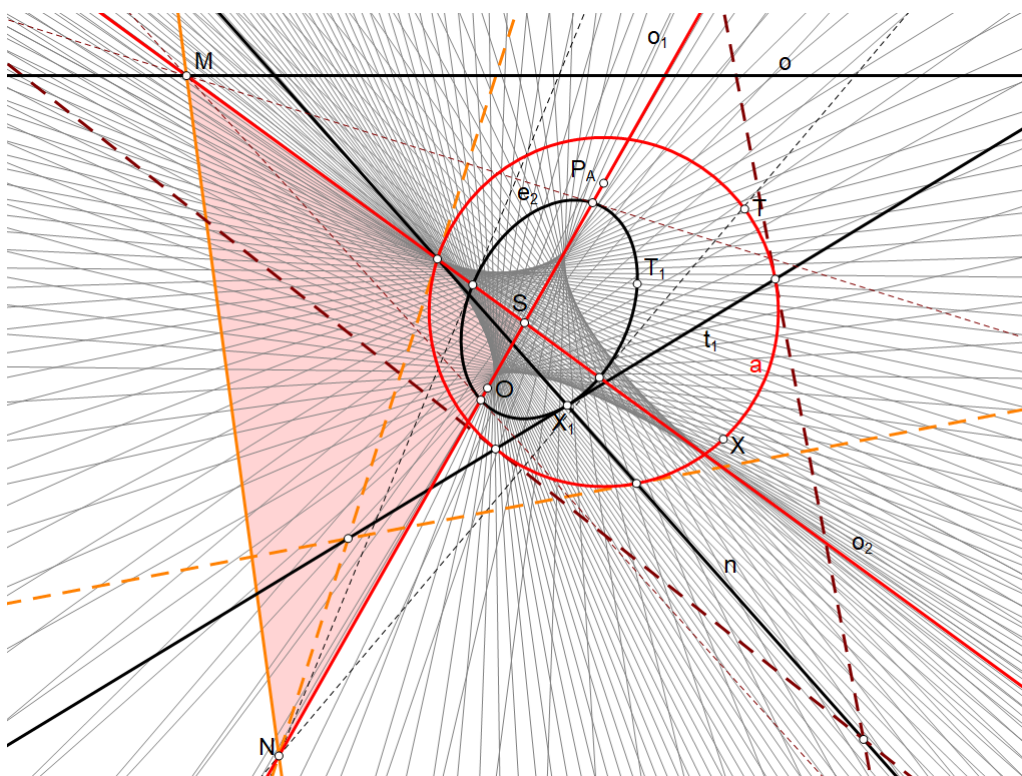
Za krivulje višeg reda od dva te točke mogu biti jednostruke, dvostruke ili višestruke točke krivulje, [10], [29].

U hiperboličnoj ravnini kružnice su potpuno cirkularne krivulje. Cirkularne konike su: konkavna i konveksna hiperbolična parabola ( $hp_{1ko}$ ,  $hp_{2kv}$ ), eliptične parabole ( $ep_1$  i  $ep_2$ ) i specijalna (oskulacijska) hiperbola  $ho_s$ .

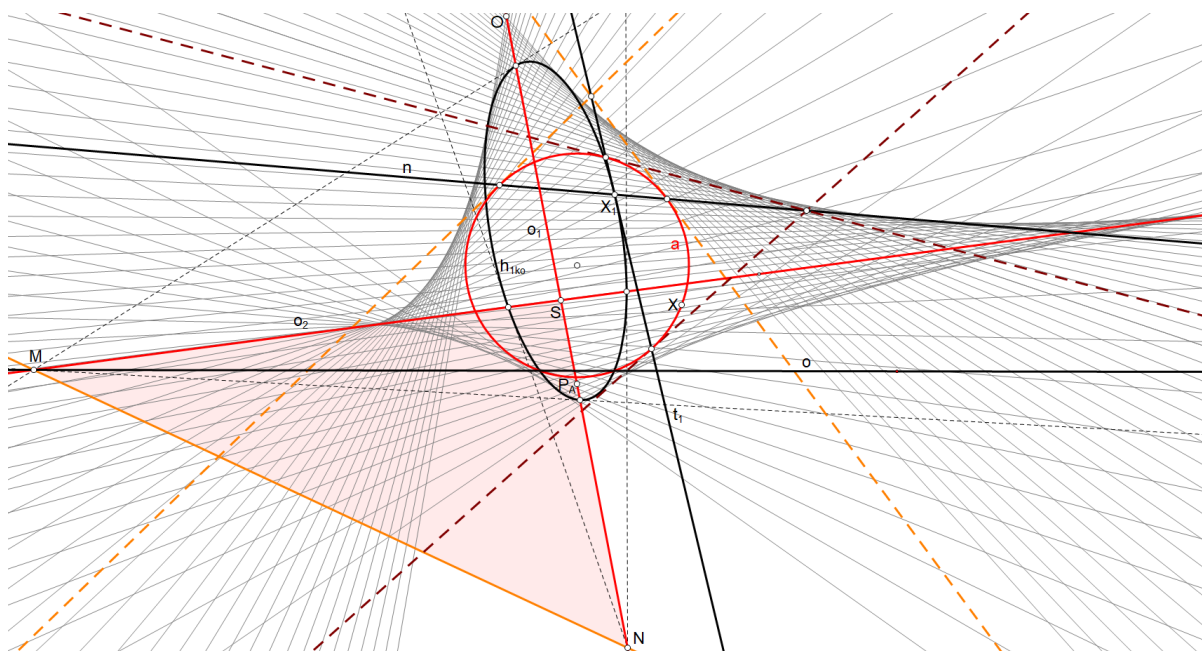
Evolute cirkularnih konika,  $hp_{1ko}$ ,  $hp_{2kv}$ ,  $ep_1$  i  $ep_2$ , raspadnute su krivulje 4. razreda na krivulje 3. razreda i pramen pravaca s vrhom u diralištu konike i apsolute, dok je evoluta specijalne (oskulacijske) hiperbole  $ho_s$  raspadnuta na krivulju 2. razreda i dva puta brojeni pramen pravaca s vrhom u diralištu specijalne (oskulacijske) hiperbole i apsolutne konike, spomenute evolute konstruirane su na slikama 5.3 - 5.9.

Tablica 5.2

evoluta koje h-konike	razred	red	rod	broj dvostrukih pravaca	broj infleksionih pravaca	broj šiljaka
$e_1$	4	6	0	3	0	6
$e_2$	4	6	0	3	0	6
$h_{1ko}$	4	6	0	3	0	6
$h_{2kv}$	4	6	0	3	0	6
$eh$	4	6	0	3	0	6
$hp_{1ko}$	3	3	0	0	1	1
$hp_{2kv}$	3	3	0	0	1	1
$ep_1$	3	3	0	0	1	1
$ep_2$	3	3	0	0	1	1
$ho_s$	2	2	0	0	0	0

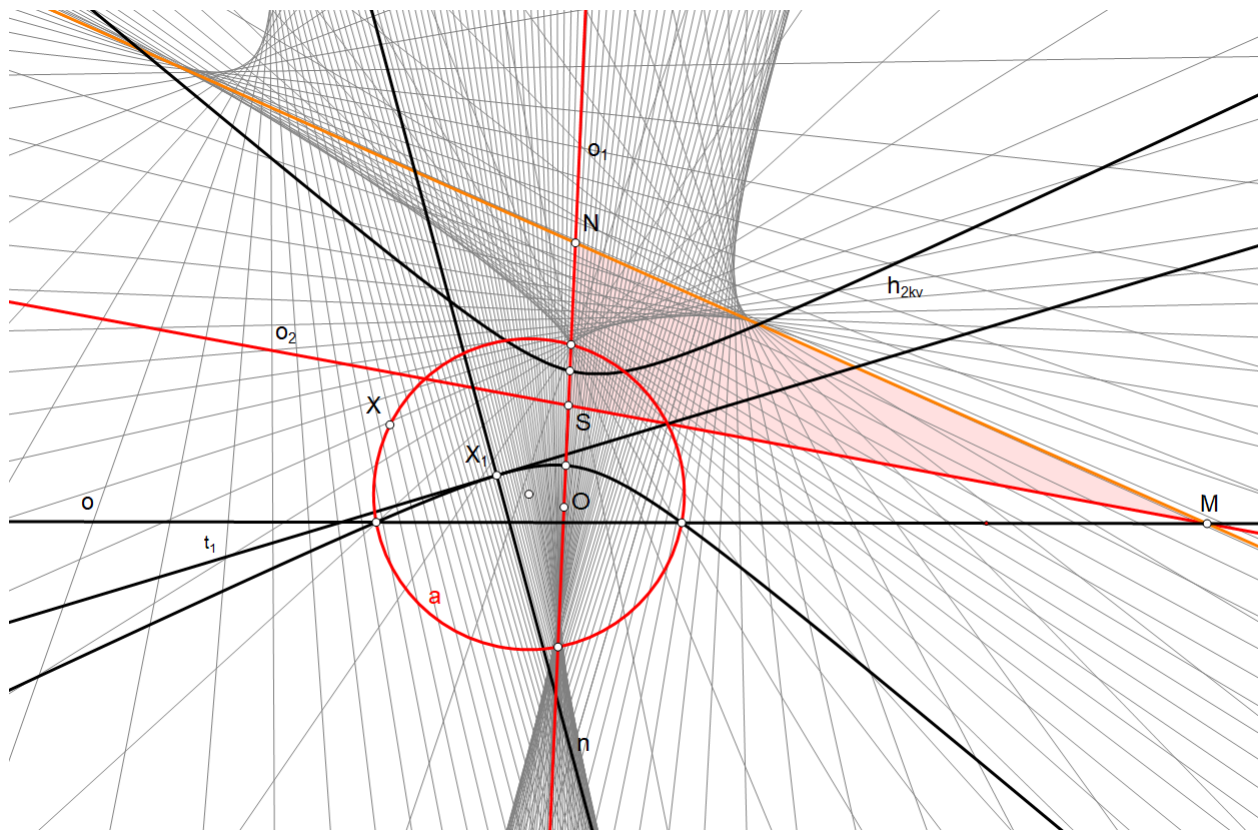


Slika 5.3: Evoluta elipse  $e_2$  u hiperboličnoj ravnini u hiperboličnoj ravnini,

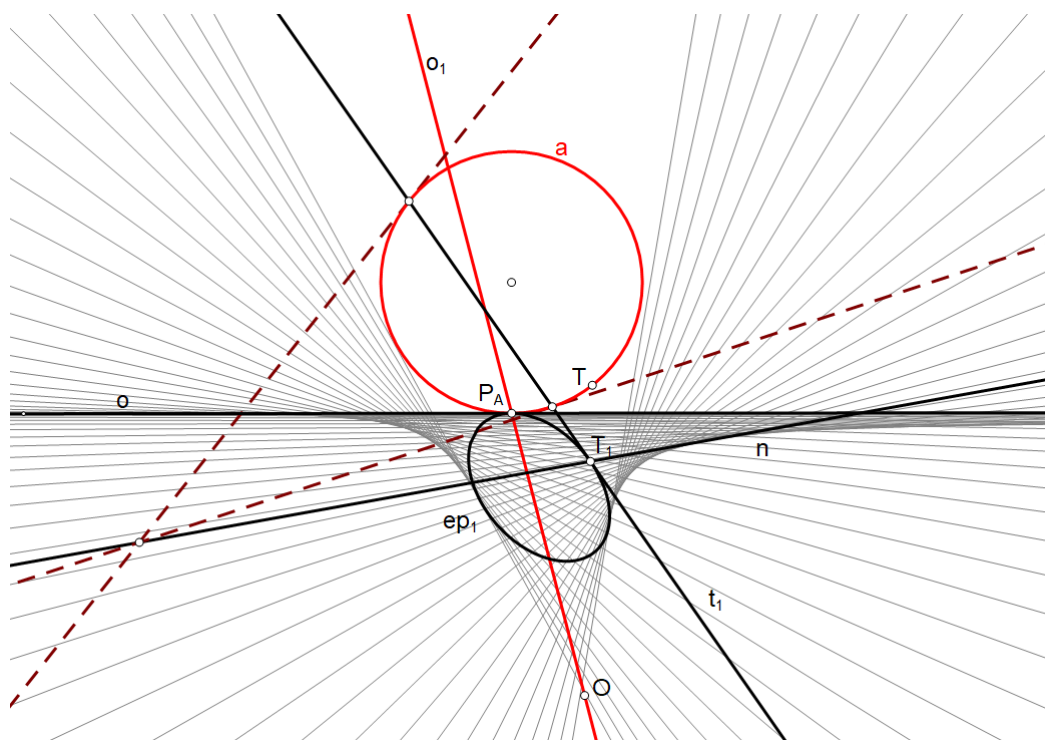


Slika 5.4: Evoluta konkavne hiperbole  $h_{1ko}$  u hiperboličnoj ravnini,

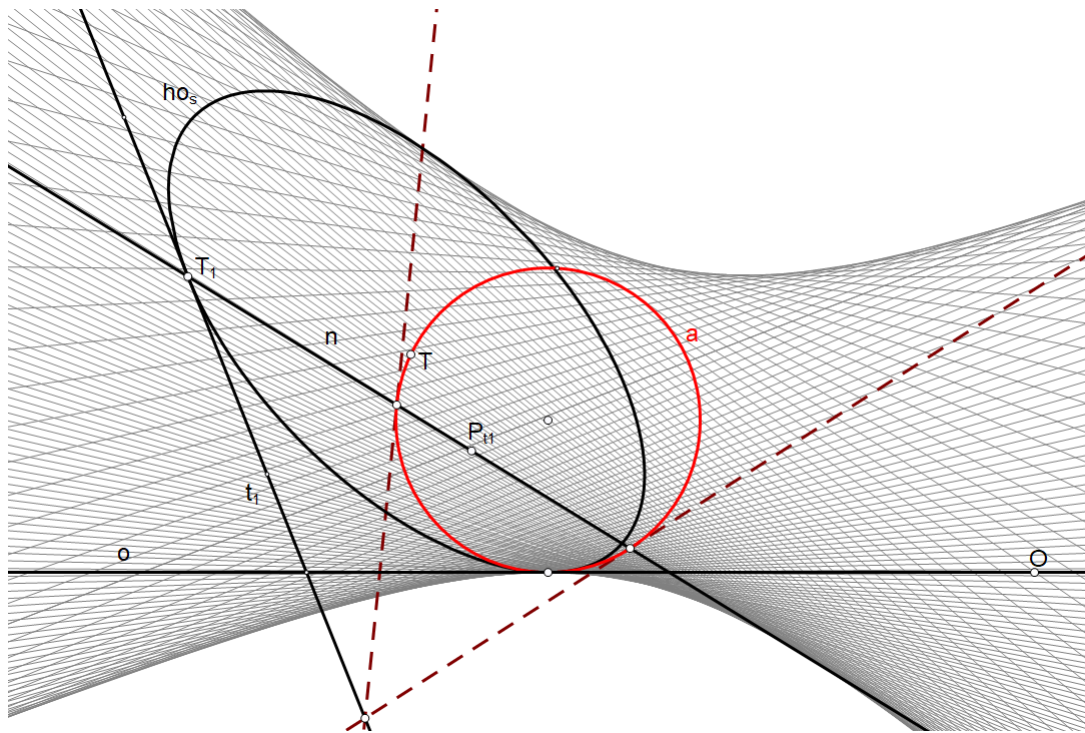




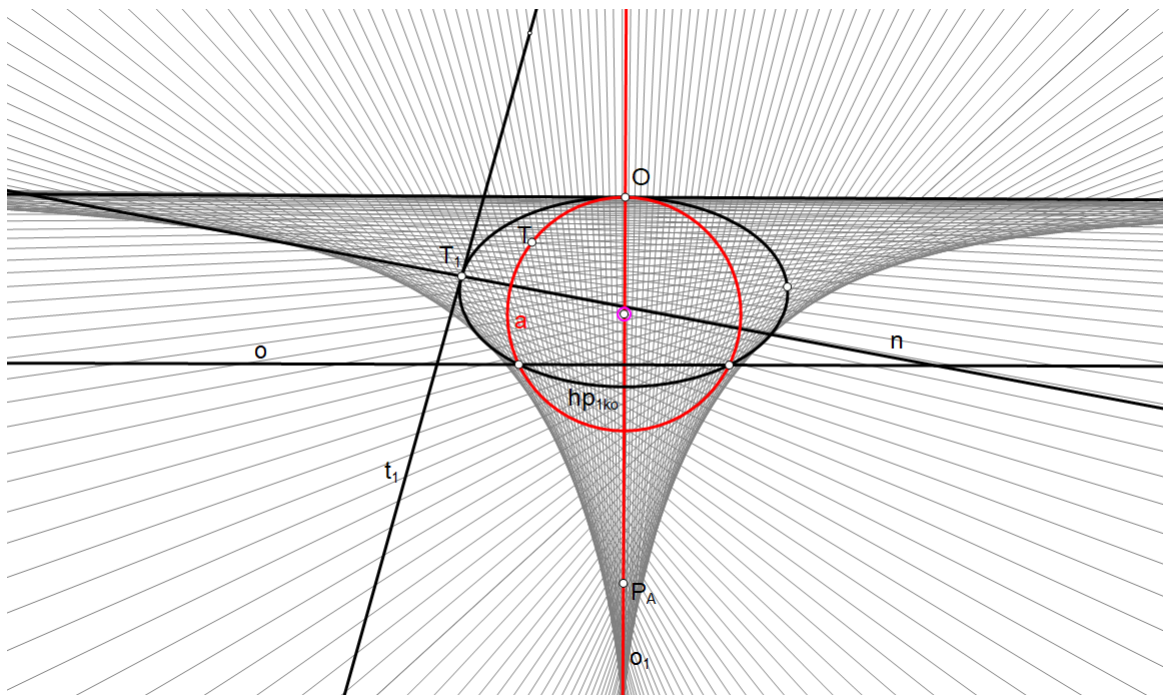
Slika 5.5: Evoluta konveksne hiperbole  $h_{2kv}$  u hiperboličnoj ravnini,



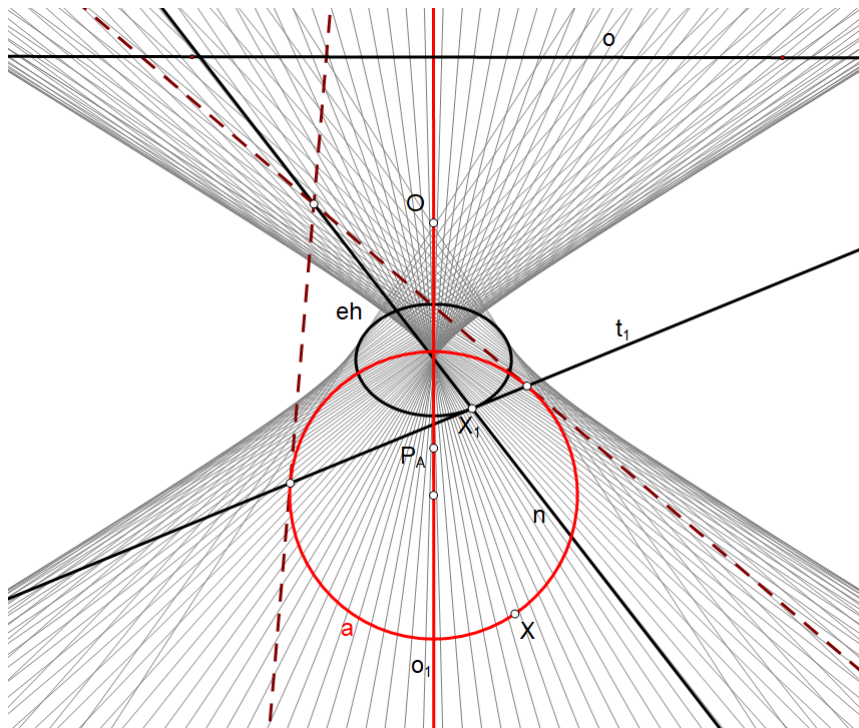
Slika 5.6: Evoluta eliptične parabole  $ep_1$  u hiperboličnoj ravnini,



Slika 5.7: Evoluta specialne (oskulacijske) hiperbole  $ho_s$  u hiperboličnoj ravnini,



Slika 5.8: Evoluta konkavne hiperbolične parabole  $hp_{1ko}$  u hiperboličnoj ravnini,



Slika 5.9: Evoluta eliptične hiperbole  $eh$  u hiperboličnoj ravnini,



# Zaključak

U ovom radu kroz pet poglavlja dana je sistematizacija činjenica vezanih za konike u sedam projektivno-metričkih ravnina, euklidskoj, pseudoeklidskoj, kvazihiperboličnoj, kvazieliptičnoj i hiperboličnoj (s naglaskom da se u poglavlju hiperbolična ravnina proučavala ne samo hiperbolično-eliptična ravnina, već i hiperbolično-hiperbolična i eliptično-hiperbolična ravnina).

Detaljno su opisana osnovna svojstva istaknutih projektivno-metričkih ravnina i vrste konika u odnosu na apsolutnu figuru. Proučavana su svojstva evoluta u svakoj od navedenih projektivno-metričkih ravnina uz isticanje njihovih karakteristika vezanih za Plückerove formule (red, razred, broj dvostrukih točaka/tangenata, broj šiljaka, infleksionih točaka/pravaca) koja do sada nisu bila proučavana.

Kako su pseudoeklidska, kvazihiperbolična i projektivno proširena hiperbolična ravnina bogatije i brojem konika raznovrsnije u odnosu na euklidsku ravninu istaknute su posebnosti kojih nema u euklidskoj ravnini i uočeno je kako cirkularnost konike utječe na raspad reda i razreda njezine evolute.

U afinom modelu pseudoeklidske ravnine dobiveni rezultati potvrđeni su i analitičkom metodom. Na posebno odabranom modelu kvazieliptične ravnine, koja je dualna euklidskoj ravnini, dobiveni su očekivani rezultati vezani za numeričke invarijante evolute konike.

# Literatura

- [1] I. Babić, *Neke kolineacije  $H$ -ravnine*, KoG **9** (2005), 39-43;
- [2] T. Berić, *Konika devet točaka*, Diplomski rad, Zagreb, 2019;
- [3] M. Božek, *On Geometry of differentiable curves in the pseudo-Euclidean plane*, Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG2011;
- [4] V. Buraková, *On osculating pseudo-circles of curves in the pseudo-Euclidean plane*, Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG2011;
- [5] R. Cesarec, *Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja*, Školska knjiga, Zagreb, 1957;
- [6] J. L. Coolidge, *A Treatise on Algebraic Plane Curves*, New York: Dover, p. 436, 1959.
- [7] I. Čatipović, *Geometrija izotropne ravnine*, Diplomski rad, Zagreb, 2018;
- [8] G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal, *The Universe of conics*, Springer, Berlin 2016;
- [9] H. Halas, *Klasifikacija cirkularnih krivulja 3. razreda u kvazihiperboličkoj ravnini*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2015;
- [10] E. Jurkin, *Potpuno cirkularne krivulje četvrtog reda u hiperboličkoj i izotropnoj ravnini*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2008;
- [11] E. Jurkin, N. Kovačević, *Entirely Circular Quartics in the pseudo-Euclidean Plane*, Acta Math. Hung. **134**(4) (2012), 571-582;
- [12] M. Katić-Žlepalo, *Krivulje žarišta, središta i ravnalica pramenova konika u pseudo-Euklidskoj ravnini*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2014;

- 
- [13] M. Katić Žlepalo, E. Jurkin, *Circular cubics and quartics obtained as pedal curves of conics in pseudo-Euclidean plane*, The 15th International Conference on Geometry and Graphics Proceedings, Montreal, 2012, 341-347;
- [14] N. Kovačević, E. Jurkin, *Circular Cubics and Quartics in pseudo-Euclidean Plane obtained by inversion*, Math. Pannon. **22** (2011), 199-218;
- [15] N. Kovačević, V. Szivoczka, *Inversion in Minkowskischer Geometrie*, Mathematica Pannonica 21/1 (2010), 89-113;
- [16] N. M. Makarova, *On the projective metrics in plane*, Učenyje zap. Mos. Gos. Ped. in-ta **243** (1965), 274-290 (ruski);
- [17] V. Niče, *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956;
- [18] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Element, Zagreb, 1984;
- [19] I. Protrka, *Plohe konstantne srednje zakrivljenosti i njima pridružene fokalne krivulje i plohe u Minkowskijevom prostoru*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2019;
- [20] H. Sachs, *Ebene Isotrope Geometrie*, Friedr. Vieweg&Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1987;
- [21] S. Salmon, *Higher plane curves*, Chelsea Publishing Company, New York, 1879;
- [22] A. Saloom, F. Tari, *Curves in the Minkowski plane and their contact with pseudo-circles*, <https://www.researchgate.net/publication/226942313>;
- [23] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979;
- [24] A. Sliepčević, I. Božić, *Perspective Collineation and Osculating Circle of Conic in PE-plane and I-plane.*, KoG **15** (2011), 63-66;
- [25] A. Sliepčević, I. Božić, H. Halas, *Introduction to the Planimetry of the Quasi-Hyperbolic Plane*, KoG **17** (2013), 58-64;
- [26] A. Sliepčević, I. Božić Dragun, *Introduction to Planimetry of Quasi-Elliptic Plane.*, KoG **20** (2016), 16-21;
- [27] A. Sliepčević, M. Katić Žlepalo, *Pedal curves of conics in pseudo-Euclidean plane*, Math. Pannon. **23** (2012), 75-84;

- 
- [28] A. Sliepčević, J. Kos-Modor, *Neke planimetrijske konstrukcije u H-ravnini*, KoG **9** (2005), 35-37;
- [29] A. Sliepčević, V. Szivoczka, *A classification and construction of entirely circular cubics in the hyperbolic plane*, Acta Math. Hungar. **104**(3) (2004), 185-201;
- [30] H. Wieleitner, *Theorie der ebenen algebraischen Kurven hoherer Ordnung*, G. J. Gschchen, Leipzig, 1905;
- [31] G. Weiss, A. Sliepčević, *Osculating Circles of Conics in Cayley-Klein Planes*, KoG **13** (2009), 7-12;

# Životopis

Ivana Božić Dragun rođena je 29. 8. 1985. u Vinkovcima gdje je završila osnovnu školu i gimnaziju. Godine 2009. diplomirala je na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu i stekla zvanje profesor matematike.

Od rujna 2009. godine do danas radi na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu.

Od 2009. drži vježbe iz kolegija Nacrtna geometrija u graditeljstvu I i II.

U akademskoj godini 2014./15. pored spomenutih vježbi držala je vježbe iz kolegija Matematika I na stručnom studiju graditeljstva, Matematika II na stručnom studiju informatike i računarstva, te vježbe iz kolegija Matematički alati u elektrotehnici na stručnom studiju elektrotehnike.

Od rujna 2015. u zvanju predavača izvodi predavanja i vježbe iz kolegija Matematika I i II na stručnim i izvanrednim studijima graditeljstva i informatike.

Od siječnja 2020. u zvanju višeg predavača drži predavanja i vježbe iz kolegija Nacrtna geometrija u graditeljstvu I i II, Matematika I na stručnim i izvanrednim studijima graditeljstva i informatike.

U ljetnom semestru 2012. godine, kao vanjski suradnik, izvodila je vježbe iz kolegija Osnove inženjerske informatike 2, na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

2012. godine sudjelovala je na DAAD projektu Geometry education for future architects, koji je okupi nastavnike i studente iz šest zemalja, sa ciljem razmjene znanja iz geometrije, matematike i vizualizacije te unapređenja metoda podučavanja u navedenim područjima.

Koautorica je skripte za vježbe Nacrtna geometrija u graditeljstvu 1. Objavljivanje je odobrilo Stručno vijeće Tehničkog veleučilišta u Zagrebu odlukom broj: 1760-1/14 od 21. 10. 2014. godine. CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 891343. ISBN 978-953-7048-42-6

Autorica je udžbenika Matematika 1. Objavljivanje je odobrilo Stručno vijeće Tehničkog veleučilišta u Zagrebu odlukom broj: 2831-1/18 od 23. 10. 2018. godine.

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 001016799. ISBN 978-953-7048-80-8

Ivana Božić Dragun objavila je 7 stručnih radova i 4 znanstvena rada.

Govori aktivno engleski i talijanski jezik.

Članica je Hrvatskog društva za geometriju i grafiku i Stručne sekcije Hrvatskog matematičkog društva

Udana je i ima dvoje djece. U slobodno vrijeme bavi se sportskim aktivnostima.