Vanjski i unutarnji pristup konačnom grubom obliku

Jelić, Ivan

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Jelić

Vanjski i unutarnji pristup konačnom grubom obliku

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2021.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Jelić

Vanjski i unutarnji pristup konačnom grubom obliku

DOKTORSKI RAD

Mentor:

prof.dr.sc. Nikola Koceić-Bilan

Zagreb, 2021.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ivan Jelić

External and intrinsic approach to the finite coarse shape

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:

prof.dr.sc. Nikola Koceić-Bilan

Zagreb, 2021.

ZAHVALA

Iskreno sam zahvalan svom mentoru Nikoli na uloženom trudu, znanju, podršci i ukazanom povjerenju. Kao mentor na završnom, diplomskom i doktorskom radu, svojom stručnom i ljudskom širinom pridonio je mojem studentskom i osobnom razvoju.

Hvala članovima Topološkoga seminara u Splitu na svim savjetima i znanju koje su mi prenijeli tijekom (doktorskoga) studija. Posebna hvala profesoru Nikici Uglešiću na svesrdnoj znanstvenoj pomoći za vrijeme istraživanja koje je rezultiralo ovom disertacijom. Hvala i kolegici Ivančici Mirošević na tehničkoj pomoći.

Hvala mojem srednjoškolskom razredniku Jurici Ćudini koji me je svojom strašću i pristupom nastavi zauvijek usmjerio prema matematici.

Velika hvala mojim roditeljima i bratu što su mi tijekom cijeloga života pružali bezuvjetnu potporu i poticaj. Konačno, hvala mojoj supruzi Matei koja je sa mnom svakodnevno proživljavala sve uspone i padove tijekom doktorata i bila najveća podrška kad god mi je to trebalo.

The origin of all knowledge is faith

And from it all truth is revealed

SAŽETAK

U radu definiramo novu oblikovnu kategoriju $Sh^{\circledast}$ koju ćemo nazvati *kategorijom konačnoga gruboga oblika*. Ta će kategorija imati iste objekte kao kategorije oblika i gruboga oblika, ali će morfizmi među tim objektima biti drugačiji. Kategoriju konačnoga gruboga oblika konstruiramo korištenjem teorije inverznih sustava i poliedarskih ekspanzija topoloških prostora, to jest, *vanjskim pristupom*. Definirat ćemo dva odgovarajuća vjerna funktora, jednoga iz kategorije oblika u kategoriju konačnoga gruboga oblika, a drugoga iz kategorije konačnoga gruboga oblika u kategoriju gruboga oblika. Primjerima ćemo pokazati da ti funktori nisu puni, to jest, da je kategorija konačnoga gruboga oblika prava natkategorija kategorije oblika i prava potkategorija kategorije gruboga oblika.

Kategoriju konačnoga gruboga oblika za kompaktne metričke prostore opisat ćemo i *unutarnjim pristupom*. Da bismo to postigli, restringirat ćemo klasu objekata na skup svih zatvorenih podskupova Hilbertove kocke Q, a teoriju inverznih sustava zamijeniti teorijom ε-neprekidnih funkcija. Stoga ćemo prvo detaljno razraditi teoriju ε-neprekidnosti definirajući osnovne pojmove i dokazujući najvažnija svojstva ε-neprekidnih funkcija i relacije ε-homotopije. Potom generaliziramo Borsukove fundamentalne i aproksimativne nizove te Sanjurjove približavajuće nizove definirajući $\circledast$-fundamentalne, $\circledast$-aproksimativne te $\circledast$-približavajuće nizove redom. Na skupovima $\circledast$-fundamentalnih, $\circledast$-aproksimativnih i $\circledast$-približavajućih nizova definirat ćemo odgovarajuće relacije ekvivalencije čije će klase biti morfizmi novih kategorija $Sh^{\circledast}_f$, $Sh^{\circledast}_a$ i $InSh^{\circledast}$ redom. Kategoriju $InSh^{\circledast}$ nazvat ćemo *kategorijom unutarnjega konačnoga gruboga oblika*.

Nadalje, definiramo tri odgovarajuća funktora, jedan među kategorijama $Sh^{\circledast}|_Q$ (restrikcija kategorije $Sh^{\circledast}$ na zatvorene podskupove od Q) i $Sh^{\circledast}_f$, jedan među kategorijama $Sh^{\circledast}_f$ i $Sh^{\circledast}_a$ te jedan među kategorijama $Sh^{\circledast}_a$ i $InSh^{\circledast}$. Dokazat ćemo da će tako definirani funktori biti kategorijski izomorfizmi, što će značiti da je $InSh^{\circledast}$ unutarnja reinterpretacija kategorije konačnoga gruboga oblika zatvorenih podskupova Hilbertove kocke. Uz to, definirat ćemo vjeran funktor među kategorijama *InSh* i $InSh^{\circledast}$ koji objekte drži fiksnima, a svakom morfizmu unutarnjega oblika pridružuje inducirani morfizam unutarnjega konačnoga gruboga oblika. Stoga ćemo postojeću Sanjurjovu kategoriju *InSh* unutarnjega oblika smatrati pravom potkategorijom nove kategorije $InSh^{\circledast}$ unutarnjega konačnoga gruboga oblika.

Konačno, dokazat ćemo da unutarnji konačni grubi oblik ne ovisi o ulaganju metričkoga prostora u Hilbertovu kocku Q, odnosno, da su svaka dva smještenja proizvoljnoga kompaktnoga metričkoga prostora istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika. Time ćemo klasifikaciju po unutarnjem konačnom grubom obliku proširiti na cijelu klasu $\mathscr{MC}pt$ svih kompaktnih metričkih prostora i pritom dokazati da su kompaktni metrički prostori M i M' istoga konačnoga gruboga oblika ako i samo ako su M i M' istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika.

SUMMARY

In this thesis we will define a new shape category $Sh^{\circledast}$ of topological spaces called *the finite coarse shape category*. Category $Sh^{\circledast}$ will have the same class of objects as the categories of shape and coarse shape, but morphisms will be different. We will contruct the finite coarse shape category by using polyhedral expansions and inverse systems theory, i.e., using an *external approach*. Two appropriate faithful functors will be defined, one of them from the shape category Sh to the finite coarse shape category $Sh^{\circledast}$ and the other one from the finite coarse shape category $Sh^{\circledast}$ to the coarse shape category Sh^{*}. We will prove by the examples that those functors are not full, i.e., that the finite coarse shape category is a proper subcategory of the coarse shape category and that it contains the shape category as its proper subcategory.

The coarse shape category of metric compacta will also be given an *intrinsic approach*. To achieve that, we will restrict the class of objects to the set of all closed subsets of the Hilbert cube Q and replace the inverse systems theory by the theory of ε-continuous functions. Therefore we shall give a detailed overview of the ε-continuity theory by defining the main notions and proving the most important properties of the ε-continuous functions and ε-homotopy.

We will generalise Borsuk's fundamental and approximative sequences and Sanjurjo's proximate sequences by defining so called $\circledast$-fundamental, $\circledast$-approximative and $\circledast$-proximate sequences, respectively. On the sets of the $\circledast$-fundamental, $\circledast$-approximative and $\circledast$-proximate sequences between any two closed subsets of the Hilbert cube Q we will define an appropriate equivalence relations, classes of which will be morphisms of the new categories $Sh^{\circledast}_{f}$, $Sh^{\circledast}_{a}$ and $InSh^{\circledast}$, respectively. Category $InSh^{\circledast}$ will be called *the intrinsic finite coarse shape category*.

Futhermore, three new functors will be defined, one of them between the categories $Sh^{\circledast}|_{Q}$ (the restriction of the $Sh^{\circledast}$ category to the set of all closed subsets of Q) and $Sh^{\circledast}_{f}$, the second one between $Sh^{\circledast}_f$ and $Sh^{\circledast}_a$ and the third one between the categories $Sh^{\circledast}_a$ and $InSh^{\circledast}$. We will prove that each of these three functors is an isomorphism, which means that category $InSh^{\circledast}$ is an intrinsic reinterpretation of the finite coarse shape category $Sh^{\circledast}|_Q$ of all closed subsets of Q. We will also define a faithful functor from $InSh$ to $InSh^{\circledast}$ which is an identity on the set of objects and which associates each intrinsic shape morphism with the induced intrinsic finite coarse shape morphism. Hence, Sanjurjo's intrinsic shape category $InSh$ may be considered as a proper subcategory of the constructed intrinsic finite coarse shape category $InSh^{\circledast}$.

In the last section we will prove that the intrinsic finite coarse shape does not depend on the embedding of a compact metric space into the Hilbert cube Q, i.e., that every two embeddings of any compact metric space have the same intrinsic finite coarse shape. That will allow us to extend the classification by the intrinsic finite coarse shape to the whole class $\mathscr{MC}pt$ of metric compacta. Finally, we will prove that two compact metric spaces M and M' have the same finite coarse shape if and only if M and M' have the same intrinsic finite coarse shape.

Sadržaj

UVOD

Osnovna klasifikacija topoloških prostora, utemeljena na homotopskoj teoriji, je klasifikacija po homotopskom tipu. Homotopska teorija riješila je velik broj problema vezanih uz klase prostora s dobrim lokalnim svojstvima (na primjer klase poliedara, CW-kompleksa i apsolutnih okolinskih retrakata), ali je bitno manje korisna kod prostora s lošijim lokalnim svojstvima. Stoga se pojavila potreba za teorijom, općenitijom od homotopske, koja će topološke prostore klasificirati grublje od klasifikacije po homotopskom tipu. U tu svrhu, razvijena je teorija oblika.

Temelje teorije oblika postavio je poljski matematičar K. Borsuk krajem šezdesetih godina 20. stoljeća [1], [2]. U početku, klasifikacija po obliku obuhvaćala je klasu $\mathscr{M}\mathscr{C}pt$ svih kompaktnih metričkih prostora. Borsukova oblikovna kategorija za objekte ima sve zatvorene podskupove Hilbertove kocke Q, a morfizmi oblika među njima su klase ekvivalencije na skupovima fundamentalnih nizova među tim objektima. Iako je i u ovoj teoriji ključnu ulogu imao pojam homotopije (kao veza među komponentnim funkcijama fundamentalnih nizova), rezultirajuća klasifikacija bila je grublja od one po homotopskom tipu. Borsukova oblikovna kategorija bila je tek prvi korak u razvoju teorije oblika, a uskoro su uslijedila brojna proširenja postojeće teorije.

Prvi sljedeći veliki korak u razvoju teorije oblika rezultat je suradnje S. Mardešića i J. Segala [12]. Korištenjem (algebarske) teorije inverznih sustava razvijen je jezik *pro*-kategorija i njime je opisana teorija oblika, pri čemu je do tada postojeća klasifikacija proširena na klasu svih kompaktnih Hausdorffovih prostora. Ovaj pristup dobio je svoju završnu verziju sredinom sedamdesetih godina kada su S. Mardešić [11] i K. Morita [14] razvili teoriju oblika korištenjem inverznih sustava nad kategorijom Top svih topoloških prostora. Ključnu ulogu u ovoj teoriji ima pojam poliedarske ekspanzije topološkoga prostora, a morfizmi oblika su klase ekvivalencije *pro*-morfizama po relaciji *pro*-ekvivalencije među njima.

Nešto kasnije, krajem osamdesetih godina 20. stoljeća, novi pristup teoriji oblika ponudio je španjolski matematičar J.M.R. Sanjurjo [16]. Pristup korištenjem inverznih sustava može se smatrati "vanjskim", dok se Sanjurjov pristup može opisati kao "unutarnji" pristup teoriji oblika. Naime, morfizmi oblika u Mardešićevom pristupu s inverznim sustavima klase su posebnih nizova (*pro*-morfizmi) neprekidnih funkcija koje su definirane među termima poliedarskih ekspanzija promatranih prostora, što znači da su domena i kodomena komponentnih funkcija tih nizova okoline promatranih prostora. Takav pristup prirodno je opisati kao vanjski. S druge strane, Sanjurjo je *pro*-morfizme zamijenio takozvanim približavajućim nizovima kojima su komponente ε-neprekidne funkcije čije su domena i kodomena promatrani prostori (a ne njihove okoline). Iz tog razloga, ovakav pristup smatramo unutarnjim pristupom teoriji oblika.

Unutarnjim pristupom obliku definirana je oblikovna kategorija čiji objekti su svi zatvoreni podskupovi Hilbertove kocke Q, a morfizmi unutarnjega oblika su klase odgovarajuće ekvivalencije približavajućih nizova među tim objektima. U [13] i [16] dokazano je da je, za bilo koji par X, Y zatvorenih podskupova od Q, skup Sanjurjovih morfizama unutarnjega oblika između X i Y u bijektivnoj vezi sa skupom Mardešićevih morfizama oblika između X i Y. Ključnu ulogu pri uspostavljanju izomorfizma između Mardešićeve i Sanjurjove oblikovne kategorije zatvorenih podskupova od Q imali su Borsukovi fundamentalni nizovi, odnosno, pripadajući Borsukovi morfizmi oblika. Uz to, budući da svaki metrički kompakt dopušta smještenje u Q kao zatvoreni podskup, jednakost klasifikacija po obliku vanjskim i unutarnjim pristupom vrijedi na klasi $\mathscr{MC}pt$ svih kompaktnih metričkih prostora.

Novi veliki skok u teoriji oblika napravili su N. Koceić Bilan i N. Uglešić u [8] prije nepunih 15 godina. Na temelju Mardešićeve S-ekvivalencije nastao je pojam općenitije S^*-ekvivalencije metričkih kompakata koji je potom poopćen do potpuno nove klasifikacije svih topoloških prostora po grubom obliku. Klasifikacija po grubom obliku je, općenito, grublja od klasifikacije po obliku, dok se u slučaju prostora s dobrim lokalnim svojstvima (na primjer poliedara, CW-kompleksa i apsolutnih okolinskih retrakata) klasifikacije podudaraju. Štoviše, spomenute se klasifikacije u tom slučaju podudaraju i s klasifikacijom po homotopskom tipu. Teorija gruboga oblika ispričana je jezikom inverznih sustava i *pro**-kategorija, pri čemu su Mardešićevi *pro*-morfizmi zamijenjeni *pro**-morfizmima. Za bilo koja dva topološka prostora, morfizmi gruboga oblika među njima su klase ekvivalencije pro^*-morfizama po relaciji pro^*-ekvivalencije među njima.

Kategorije oblika i gruboga oblika vezane su vjernim funktorom, a s obzirom na to da obje kategorije imaju iste objekte, kategoriju oblika smijemo smatrati pravom potkategorijom kategorije gruboga oblika. Nova teorija gruboga oblika ponudila je i neke zanimljive invarijante, kao na primjer grupu gruboga oblika topološkoga prostora i svojstvo povezanosti putovima gruboga oblika. Grupa gruboga oblika sadrži grupu oblika kao svoju podgrupu te stoga daje više informacija o promatranom prostoru nego grupa oblika. Tako je, recimo, jednodimenzionalna grupa oblika solenoida trivijalna, dok je pripadna grupa gruboga oblika neprebrojiva. Uz to, u [9] je dokazano da svojstvo povezanosti putovima oblika povlači svojstvo povezanosti putovima gruboga oblika, pri čemu se ova dva svojstva podudaraju na klasi kompaktnih metričkih prostora.

Na temelju svega navedenoga, jasno se nameće pitanje mogućnosti unutarnjega pristupa klasifikaciji grubljoj od oblika u kategoriji koja to dopušta. Prva prirodna ideja je pokušati reinterpretirati kategoriju gruboga oblika kompaktnih metričkih prostora unutarnjim pristupom i upravo tako je ovo istraživanje započelo. Međutim, pojavili su se ozbiljni tehnički problemi izvjesnoga uniformnoga proširenja morfizama i njihovih međusobnih ekvivalencija sa zatvorenoga podskupa X od Q (unutarnji pristup) na terme $HANR$-ekspanzija podskupa X (vanjski pristup). Kroz promišljanje o tom problemu pojavila se ideja o korekciji morfizama gruboga oblika koja je iznjedrila novu oblikovnu kategoriju *konačnoga gruboga oblika*. Pokazat će se da je kategorija konačnoga gruboga oblika prava natkategorija postojeće kategorije oblika i prava potkategorija kategorije gruboga oblika te da dopušta unutarnju reinterpretaciju na klasi $\mathscr{MC}pt$ svih kompaktnih metričkih prostora.

Prvo poglavlje rada predstavlja pregled potrebnih predznanja, to jest, osnovnih pojmova i teorema važnih u izgradnji teorije oblika. U drugom poglavlju ćemo konstruirati kategoriju konačnoga gruboga oblika vanjskim pristupom definirajući $inv^{\circledast}$ i $pro^{\circledast}$ kategorije te odgovarajuće razredbene relacije među njihovim morfizmima koje će odrediti morfizme konačnoga gruboga oblika kategorije $Sh^{\circledast}$. Zatim poopćujemo postojeće Borsukove i Sanjurjove kategorije oblika definirajući kategorije $Sh^{\circledast}_f$, $Sh^{\circledast}_a$ i $InSh^{\circledast}$ redom čiji objekti su zatvoreni podskupovi Hilbertove kocke Q. U trećem poglavlju uspostavljamo odgovarajuće izomorfizme među spomenutim kategorijama čime ćemo pokazati da je kategorija $InSh^{\circledast}$ unutarnja reinterpretacija kategorije konačnoga gruboga oblika zatvorenih podskupova od Q. Stoga ćemo kategoriju $InSh^{\circledast}$ nazvati *kategorijom unutarnjega konačnoga gruboga oblika*. Na samom kraju ćemo klasifikaciju po unutarnjem konačnom grubom obliku proširiti sa skupa zatvorenih podskupova od Q na cijelu kategoriju $\mathscr{MC}pt$ svih kompaktnih metričkih prostora i dokazati da su dva kompaktna metrička prostora istoga konačnoga gruboga oblika ako i samo ako su istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika.

1. TEMELJNI POJMOVI I TVRDNJE

U ovom ćemo poglavlju dati pregled potrebnih predznanja za razumijevanje glavnoga dijela rada. Navest ćemo temeljne pojmove i iskazati osnovne teoreme homotopske teorije i teorije (gruboga) oblika. Pregled započinjemo pojmom kategorije i primjerima najvažnijih (topoloških) kategorija.

1.1. PREGLED TEORIJE KATEGORIJA

Definicija 1.1.1 Kategorija C trojka je $(O, M, \circ)$ koja se sastoji od

- klase $O = Ob(C)$ čije elemente nazivamo *objektima* u C
- klase $M = Mor(C)$ koja se sastoji od skupova $C(X,Y)$, pridruženih svakom paru (X,Y) objekata u C, čije elemente nazivamo *morfizmima* u C s domenom X i kodomenom Y
- pridruživanja $\circ$ koje nazivamo *komponiranjem morfizama* i koje svakoj uređenoj trojci (X,Y,Z) objekata u C pridružuje točno jednu funkciju

$$\circ_{(X,Y,Z)} : C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z),$$

  pri čemu sliku para $(f,g) \in C(X,Y) \times C(Y,Z)$ označujemo $g \circ f$ (ili kraće gf) i nazivamo *kompozitom* morfizama f i g,

tako da vrijedi

(1) ako je $X \neq X'$ ili $Y \neq Y'$, onda je $C(X,Y) \cap C(X',Y') = \emptyset$

(2) ako je $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,Z)$ i $h \in C(Z,W)$, onda je $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(3) za svaki objekt X u C postoji morfizam $1_X \in C(X,X)$ kojeg nazivamo *identičkim morfizmom* i za kojega vrijedi

$$f \circ 1_X = f, \text{ za svaki } f \in C(X,Y),$$

$$1_X \circ g = g, \text{ za svaki } g \in C(Z,X).$$

Morfizam $f \in C(X,Y)$ zapisivat ćemo u obliku $f : X \to Y$, a za objekt $X \in Ob(C)$ ćemo kraće pisati $X \in C$. Uz to, lako se pokaže da je, za svaki objekt $X \in C$, identički morfizam 1_X jedinstven i nazivamo ga još i *identitetom* na X.

Definicija 1.1.2 Neka je C kategorija i $X,Y \in C$ objekti u C. Za morfizam $f : X \to Y$ kažemo da je *izomorfizam* ako postoji morfizam $g : Y \to X$ takav da je $f \circ g = 1_Y$ i $g \circ f = 1_X$.

U tom slučaju, morfizam g je jedinstven i nazivamo ga *inverzom* morfizma f. Za objekt $X \in C$ kažemo da je *izomorfan* objektu $Y \in C$ ako postoji izomorfizam $f : X \to Y$. Relacija "biti izomorfan" je razredbena relacija (ekvivalencija) na klasi $Ob(C)$.
S obzirom na neka dodatna svojstva klase objekata $Ob(C)$ ili skupova morfizama $C(X,Y)$, definiramo sljedeće vrste kategorija:

– *Diskretnom kategorijom* nazivamo kategoriju kojoj su jedini morfizmi identitete.

– *Trivijalnom kategorijom* nazivamo kategoriju C koja ima samo jedan objekt, to jest, za koju je $\operatorname{card}(Ob(C)) = 1$.

– *Praznom kategorijom* nazivamo kategoriju C kojoj je $Ob(C) = \emptyset$.

– *Malom kategorijom* nazivamo kategoriju C kojoj je klasa objekata $Ob(C)$ skup.

– *Konkretnom kategorijom* nazivamo kategoriju kojoj su objekti skupovi s nekom dodatnom strukturom, a morfizmi funkcije među njima koje poštuju tu strukturu.

Primjer 1.1.3 Navedimo neke primjere kategorija koje će nam biti od interesa u nastavku rada:

(a) *Set* označuje *kategoriju skupova* kojoj je klasa objekata klasa svih skupova, a za svaki par skupova (X,Y) skup morfizama $Set(X,Y)$ tvore sve funkcije iz X u Y uz standardno funkcijsko komponiranje. Izomorfizmi u *Set* su bijekcije.

(b) Grp označuje *kategoriju grupa* kojoj klasu objekata tvore sve grupe, a za svaki par grupa (G,H) skup morfizama $Grp(G,H)$ tvore svi homomorfizmi iz G u H. Izomorfizmi u Grp su bijektivni homomorfizmi grupa.

(c) *Ab* označuje *kategoriju komutativnih grupa* kojoj klasu objekata tvore sve Abelove grupe, a za svaki par Abelovih grupa (G,H) skup morfizama $Ab(G,H)$ tvore svi homomorfizmi iz G u H. Izomorfizmi u *Ab* su bijektivni homomorfizmi Abelovih grupa.

(d) Top označuje *kategoriju topoloških prostora* objekti koje su svi topološki prostori, a za svaki par prostora (X,Y) skup morfizama $Top(X,Y)$ tvore sve neprekidne funkcije (preslikavanja) iz X u Y. Izomorfizmi u Top su homeomorfizmi.

(e) Top^2 označuje *kategoriju topoloških parova* objekti koje su svi uređeni parovi (X,A) topoloških prostora, pri čemu je $A \subseteq X$ potprostor od X, a za svaki par objekata $((X,A),(Y,B))$ skup morfizama $Top^2((X,A),(Y,B))$ tvore sva preslikavanja $f : X \to Y$ za koja je $f(A) \subseteq B$. Morfizme kategorije Top^2 nazivamo *preslikavanjima parova*. Izomorfizmi u Top^2 su homeomorfizmi parova.

Definicija 1.1.4 Neka su C i D kategorije. Kažemo da je D *potkategorija* kategorije C, u oznaci $D \subset C$, ako vrijedi:

– $Ob(D) \subseteq Ob(C)$

– za sve $X,Y \in D$ je $D(X,Y) \subseteq C(X,Y)$

– ako je $f \in D(X,Y)$ i $g \in D(Y,Z)$, onda se kompozit gf u D podudara s kompozitom gf u C.

Ako je D potkategorija kategorije C i ako je $D(X,Y) = C(X,Y)$, za svaki par objekata (X,Y) u D, onda kažemo da je D *puna potkategorija* kategorije C.

Primjer 1.1.5 Navedimo neke istaknute potkategorije topološke kategorije Top:

(a) $\mathscr{M}$ označuje punu potkategoriju kategorije Top objekti koje su svi metrički prostori

(b) $\mathscr{M}\mathscr{C}pt$ označuje punu potkategoriju kategorije Top objekti koje su svi kompaktni metrički prostori

(c) $\mathscr{N}$ označuje punu potkategoriju kategorije Top objekti koje su svi normalni prostori

(d) $\mathscr{D}$ označuje punu potkategoriju kategorije Top objekti koje su svi diskretni prostori

(e) *ANR* označuje punu potkategoriju kategorije Top objekti koje su svi apsolutni okolinski retrakti

(f) *Pol* označuje punu potkategoriju kategorije Top objekti koje su svi poliedri.

Napomena 1.1.6 Kategorije *Pol* i *ANR* detaljno ćemo razmatrati u odjeljku 1.2.

Definicija 1.1.7 *Kongruencijom* na kategoriji C nazivamo svaku klasu

$$\sim = \left\{\sim_{(X,Y)} : X,Y \in Ob(C)\right\}$$

za koju vrijedi:

(1) relacija $\sim_{(X,Y)}$ je ekvivalencija na $C(X,Y)$, za svaki par objekata $X,Y \in Ob(C)$

(2) ako je $f \sim f'$, $g \sim g'$ i ako kompozicija $g \circ f$ postoji, onda je $g \circ f \sim g' \circ f'$, za sve morfizme f, f', g, g' kategorije C.

Klasu morfizma $f \in C(X,Y)$ s obzirom na kongruenciju $\sim$ označujemo $[f]$.

Neka je $\sim$ kongruencija na kategoriji C. Stavimo:

$$Ob(C|_\sim) = Ob(C),\ C|_\sim(X,Y) = C(X,Y)|_\sim \ \text{ i } \ [g] \circ [f] = [g \circ f]$$

čim kompozicija $g \circ f$ postoji. Tada je $C|_\sim$ kategorija koju nazivamo *kvocijentnom kategorijom* kategorije C s obzirom na kongruenciju $\sim$.

Definicija 1.1.8 Neka su $f, g \in Top(X,Y)$. Kažemo da je f *homotopno* g, u oznaci $f \sim g$, ako postoji preslikavanje $H : X \times I \to Y$ takvo da je

$$H(x,0) = f(x) \ \text{ i } \ H(x,1) = g(x), \ \text{ za svaki } x \in X.$$

Preslikavanje H nazivamo *homotopijom*.

Primjer 1.1.9

(a) Svaka su dva preslikavanja $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homotopna. Homotopija $H : X \times I \to Y$ je eksplicitno dana pravilom

$$H(x,t) = (1-t)\, f(x) + t g(x).$$

Posebno, svako preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *nulhomotopno*, to jest, homotopno je proizvoljnoj konstanti $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Neka je X topološki prostor i $S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\right\}$ jedinična n-sfera u $\mathbb{R}^{n+1}$. Svaka su dva preslikavanja $f, g : X \to S^n$ homotopna čim im slike bilo koje točke $x \in X$ nisu antipodalne. U tom je slučaju homotopija $H : X \times I \to S^n$ eksplicitno dana pravilom

$$H(x,t) = \frac{(1-t)\, f(x) + t g(x)}{\|(1-t)\, f(x) + t g(x)\|}.$$

(c) Neka su $f, g \in Top(X, Y)$ dvije konstante. Tada je $f \sim g$ ako i samo točke $y_0 = f(X)$ i $y_1 = g(X)$ leže u istoj komponenti putovne povezanosti prostora Y.

Pokaže se da su odgovarajuće relacije homotopije zaista kongruencije na kategorijama Top i Top^2. Pripadne kvocijentne kategorije $Top|_\sim$ i $Top^2|_\sim$ redom označujemo $HTop$ i $HTop^2$ te nazivamo *homotopskom kategorijom* i *homotopskom kategorijom parova*. Njihove morfizme nazivamo *homotopskim klasama* odgovarajućih preslikavanja. Posebno, svako preslikavanje f kojemu je homotopska klasa $[f]$ izomorfizam nazivamo *homotopskom ekvivalencijom*.

Primjer 1.1.10 Pune potkategorije kategorije $HTop$ objekti kojih su metrički, kompaktni metrički i normalni prostori označujemo redom $H\mathscr{M}$, $H\mathscr{M}\mathscr{C}pt$ i $H\mathscr{N}$.

Definicija 1.1.11 Za izomorfne objekte X i Y u kategoriji $HTop$ kažemo da imaju isti *homotopski tip* i pišemo $X \simeq Y$.

Homotopski tip jednotočkovnoga prostora u $HTop$ naziva se *trivijalnim* i označuje s 0.

Definicija 1.1.12 Za topološki prostor X kažemo da je *kontraktibilan* ako je identiteta $1_X : X \to X$ nulhomotopna.

Primjetimo da je po primjeru 1.1.9.(a) prostor $\mathbb{R}$ kontraktibilan. Štoviše, vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 1.1.13 Topološki prostor X je kontraktibilan ako i samo ako je svako preslikavanje u Top iz prostora X (ili u prostor X) nulhomotopno.

Drugim riječima, ako je u topološkom prostoru X identiteta nulhomotopna, onda je svako preslikavanje $f : X \to Y$ i svako preslikavanje $g : Z \to X$, gdje su $Y, Z \in Top$ proizvoljni, nulhomotopno.

Propozicija 1.1.14 Objekt $X \in HTop$ je kontraktibilan ako i samo ako ima trivijalni homotopski tip.

Primjer 1.1.15 Prostori $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i S^{n-1}, za svaki $n \in \mathbb{N}$, istoga su homotopskoga tipa. Zaista, promotrimo inkluziju $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i preslikavanje

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1},\ f(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Vrijedi da je $f \circ i = 1_{S^{n-1}}$ pa je pogotovo $f \circ i \sim 1_{S^{n-1}}$. Nadalje, $i \circ f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je homotopno identiteti $1_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ homotopijom

$$H : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ H(x,t) = (1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx.$$

Dakle, promatrana inkluzija i preslikavanje f su homotopske ekvivalencije.

Definicija 1.1.16 Neka su C i D neprazne kategorije. *(Kovarijantni) funktor* iz kategorije C u kategoriju D pridruživanje je koje svakom objektu X u C pridružuje točno jedan objekt $F(X)$ u D, a svakom morfizmu $f : X \to Y$ u C pridružuje točno jedan morfizam $F(f) : F(X) \to F(Y)$ u D tako da vrijedi

$$F(1_X) = 1_{F(X)},\ \text{za svaki } X \in Ob(C),$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f),\ \text{ čim je kompozicija } g \circ f \text{ dobro definirana.}$$

Funktor F iz kategorije C u kategoriju D označujemo $F : C \to D$.

Primjer 1.1.17

(a) Ako je C' potkategorija kategorije C, onda je inkluzija $I : C' \to C$, definirana na prirodan način, kovarijantni funktor. Posebno, identitetu $1_C : C \to C$ nazivamo *identičkim funktorom*.

(b) *Zaboravljivi funktor* je funktor koji objekt s bogatijom strukturom shvaća kao isti taj objekt sa siromašnijom strukturom. Neki od primjera zaboravljivih funktora su $F_1 : Top \to Set$, $F_2 : Grp \to Set$ i $F_3 : HTop^2 \to HTop$.

(c) Funktori $I : Set \to Top$ i $D : Set \to Top$ skupove opskrbljuju redom indiskretnom i diskretnom topologijom.

(d) *Homotopski funktor* $H : Top \to HTop$ drži objekte fiksnima, a svakom preslikavanju $f : X \to Y$ pridružuje njegovu homotopsku klasu $[f] : X \to Y$.

Jedno od ključnih svojstava funktora jest to da "čuvaju izomorfizme".

Propozicija 1.1.18 Neka je $F : C \to D$ funktor. Ako je f izomorfizam u kategoriji C, onda je $F(f)$ izomorfizam u kategoriji D.

Definicija 1.1.19 Za funktor $F : C \to D$ kažemo da je *pun* ako za svaki par objekata $X, Y \in C$ i svaki morfizam $g : F(X) \to F(Y)$ u D postoji morfizam $f : X \to Y$ u C takav da je $F(f) = g$.

Drugim riječima, funktor je pun ako je njegovo djelovanje na skupovima morfizama surjektivno.

Definicija 1.1.20 Za funktor $F : C \to D$ kažemo da je *vjeran* ako za svaka dva morfizma f i g u C iz $F(f) = F(g)$ slijedi $f = g$.

Drugim riječima, funktor je vjeran ako je njegovo djelovanje na skupovima morfizama injektivno.

Primjer 1.1.21 Homotopski funktor $H : Top \to HTop$ je pun i nije vjeran.

Kompoziciju funktora definiramo prirodno. Ako su $F : C \to C'$ i $G : C' \to C''$ funktori, onda je pridruživanje $G \circ F : C \to C''$ definirano pravilima

$$G \circ F(X) = G(F(X)), \text{ za svaki } X \in Ob(C),$$

$$G \circ F(f) = G(F(f)), \text{ za svaki morfizam } f \text{ u } C,$$

funktor kojega nazivamo *kompozicijom funktora* F i G.

Definicija 1.1.22 Kažemo da je funktor $F : C \to D$ *kategorijski izomorfizam* ako postoji funktor $G : D \to C$ takav da je $F \circ G = 1_D$ i $G \circ F = 1_C$.
Za kategorije C i D kažemo da su izomorfne ako postoji barem jedan kategorijski izomorfizam $F : C \to D$.

Ako je F kategorijski izomorfizam, onda je funktor G iz definicije 1.1.22. jedinstven i označuje se F^{-1}. Relacija "biti izomorfan" je razredbena relacija kategorija.

Primjer 1.1.23 Puna potkategorija kategorije Top koja se sastoji od svih diskretnih topoloških prostora je izomorfna punoj potkategoriji kategorije Top koja se sastoji od svih indiskretnih topoloških prostora, a obje su izomorfne kategoriji Set.

Definicija 1.1.24 Neka su $F, G : C \to D$ (kovarijantni) funktori. *Prirodna transformacija* φ funktora F u funktor G, u oznaci $\varphi : F \rightsquigarrow G$, je familija $(\varphi_X : X \in Ob(C))$ morfizama $\varphi_X : F(X) \to G(X)$ u kategoriji D, koje nazivamo *komponentama transformacije*, takva da za svaki morfizam $f : X \to Y$ u C vrijedi

$$G(f) \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ F(f),$$

to jest, da dijagram

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

komutira u D.

Definicija 1.1.25 Prirodnu transformaciju $\varphi : F \rightsquigarrow G$ kojoj je svaka komponenta $\varphi_X : F(X) \to G(X)$ izomorfizam u D nazivamo *prirodnom ekvivalencijom*.

Kažemo da je funktor $F : C \to D$ *prirodno ekvivalentan* funktoru $G : C \to D$, i pišemo $F \approx G$, ako postoji barem jedna prirodna ekvivalencija $\varphi : F \rightsquigarrow G$. Prirodna ekvivalencija je razredbena relacija svih funktora između bilo koje dvije kategorije.

Definicija 1.1.26 Kažemo da je funktor $F : C \to D$ *kategorijska ekvivalencija* ako postoji funktor $G : C \to D$ takav da je $F \circ G \approx 1_D$ i $G \circ F \approx 1_C$.
Za kategorije C i D kažemo da su ekvivalentne ako postoji barem jedna kategorijska ekvivalencija $F : C \to D$.

Relacija "biti ekvivalentan" je razredbena relacija kategorija koja daje klasifikaciju grublju od klasifikacije do na izomorfizam.

Primjer 1.1.27 Kategorija $\mathscr{MC}pt$ je ekvivalentna svojoj punoj potkategoriji čiji objekti su svi zatvoreni podskupovi Hilbertove kocke Q.

Definicija 1.1.28 *Produktom* familije $(X_i : i \in I)$ objekata u kategoriji C nazivamo uređeni par $(X, (\pi_i : X \to X_i : i \in I))$ koji se sastoji od objekta X iz C i familije $(\pi_i : X \to X_i : i \in I)$ morfizama u C za koje vrijedi sljedeće univerzalno svojstvo:
za svaki objekt Y u C i svaku familiju $(f_i : Y \to X_i : i \in I)$ morfizama u C postoji jedinstveni morfizam $f : Y \to X$ u C takav da je $\pi_i \circ f = f_i$, za svaki $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_i"'] & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Ako postoji produkt $(X,(\pi_i : X \to X_i : i \in I))$ familije $(X_i : i \in I)$ objekata u kategoriji C, onda je objekt X jedinstven do na izomorfizam u C i označujemo ga $\prod\limits_{i\in I} X_i$. U slučaju konačnog indeksnog skupa $I = \{i_1,\ldots,i_n\}$ koristimo oznaku $X = X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n}$.

Definicija 1.1.29 Kažemo da kategorija C *dopušta produkte* ako u C postoji produkt bilo koje familije njezinih objekata.

Primjer 1.1.30 Kategorije Set, Grp, Top, $\mathscr{D}$, Cpt i $HTop$ dopuštaju produkte, a kategorija konačnih skupova i kategorija cikličkih grupa ne dopuštaju produkte.

1.2. KATEGORIJE *HANR* I *HPol*

Definicija 1.2.1 Neka je X topološki prostor, A podskup od X i $r : X \to A$ preslikavanje. Kažemo da je r *retrakcija* ako je $r|_A = 1_A$. Podskup A nazivamo *retraktom* od X čim postoji barem jedna retrakcija $r : X \to A$.
Općenitije, podskup A nazivamo *okolinskim retraktom* od X ako postoji okolina U od A u X i retrakcija $r : U \to A$.

Primjer 1.2.2

(a) Svaki jednotočkovni i svaki otvoreno-zatvoreni podskup topološkog prostora je njegov retrakt.

(b) Segment $[-1,1]$ je retrakt euklidskog prostora $\mathbb{R}$. Štoviše, zatvorena jedinična kugla B^n je retrakt euklidskoga prostora $\mathbb{R}^n$, pri čemu je

$$r : \mathbb{R}^n \to B^n$$

$$r(x) = \begin{cases} x, & x \in B^n \\ \dfrac{x}{\|x\|}, & x \in R^n \setminus B^n \end{cases}$$

jedna od mogućih retrakcija.

(c) Jedinična sfera S^{n-1} nije retrakt ni od $\mathbb{R}^n$ ni od B^n, ali je okolinski retrakt za oba prostora.

Definicija 1.2.3 Neka je C potklasa klase svih topoloških prostora. Kažemo da je C *slabo nasljedna* ako vrijedi:

(i) svaki $X \in C$ je Hausdorffov

(ii) ako je A zatvoren podskup od $X \in C$, onda je $A \in C$

(iii) ako su X i X' homeomorfni prostori i $X \in C$, onda je i $X' \in C$.

Neki od primjera slabo nasljednih klasa su $Ob(\mathscr{M})$, $Ob(\mathscr{N})$ i $Ob(Cpt)$.
Od velike će nam važnosti u nastavku rada biti pojam apsolutnoga (okolinskoga) retrakta i njegova dobra svojstva.

Definicija 1.2.4 Neka je C slabo nasljedna klasa i Y topološki prostor. Kažemo da je Y *apsolutni (okolinski) retrakt* za klasu C ako vrijedi:

(i) $Y \in C$

(ii) ako je $Z \in C$ i Y' zatvoren podskup od Z homeomorfan prostoru Y, onda je Y' (okolinski) retrakt od Z.

Punu potkategoriju kategorije Top čiji objekti su svi apsolutni (okolinski) retrakti za klasu C označavat ćemo $AR(C)$ (odnosno, $ANR(C)$).

Primjer 1.2.5

(a) Segment $I = [0,1]$ je apsolutni retrakt za klasu $\mathscr{N}$.

(b) Vrijedi $\mathscr{D} = AR(\mathscr{D})$ jer je svaki potprostor diskretnoga prostora i otvoren i zatvoren.

Primjetimo da za svaku slabo nasljednu klasu C vrijedi $AR(C) \subseteq ANR(C)$.

Definicija 1.2.6 Neka su X i Y topološki prostori i A zatvoren podskup od X. Kažemo da je Y *ekstenzor* za par (X,A) ako svako preslikavanje $f : A \to Y$ dopušta neprekidno proširenje na X, to jest, ako dopušta preslikavanje $g : X \to Y$ takvo da je $g|_A = f$.
Općenitije, kažemo da je Y *okolinski ekstenzor* za par (X,A) ako svako preslikavanje $f : A \to Y$ dopušta neprekidno proširenje na neku okolinu U od A u X, to jest, ako dopušta preslikavanje $g : U \to Y$ takvo da je $g|_A = f$.

Definicija 1.2.7 Neka je C slabo nasljedna klasa. Kažemo da je prostor Y *apsolutni (okolinski) ekstenzor* za klasu C ako je Y (okolinski) ekstenzor za svaki par (X,A), gdje je A zatvoren podskup od $X \in C$.

Punu potkategoriju kategorije Top čiji objekti su svi apsolutni (okolinski) ekstenzori za klasu C označavat ćemo $AE(C)$ (odnosno, $ANE(C)$).

Primjer 1.2.8

(a) Segment $I = [0,1]$ je apsolutni ekstenzor za klasu $\mathscr{N}$.

(b) Svaki indiskretni topološki prostor je apsolutni ekstenzor za svaku klasu C.

Primjetimo da za svaku slabo nasljednu klasu C vrijedi $AE(C) \subseteq ANE(C)$.

Napomena 1.2.9 Neka je C slabo nasljedna klasa. Svojstva "biti $AR(C)$", "biti $ANR(C)$", "biti $AE(C)$" i "biti $ANE(C)$" su topološka svojstva, to jest, ako su Y i Y' homeomorfni topološki prostori i ako je $Y \in AR(C)$ ($Y \in ANR(C)$, $Y \in AE(C)$, $Y \in ANE(C)$), onda je i $Y' \in AR(C)$ ($Y' \in ANR(C)$, $Y' \in AE(C)$, $Y' \in ANE(C)$).

Neka korisna svojstva apsolutnih (okolinskih) retrakata i apsolutnih (okolinskih) ekstenzora daje nam sljedeći teorem.

Teorem 1.2.10 Za svaku slabo nasljednu klasu C vrijedi:

(i) $C \cap AE(C) \subseteq AR(C)$

(ii) $C \cap ANE(C) \subseteq ANR(C)$

(iii) ako je $Y \in ANE(C)$ i U otvoren podskup od Y, onda je $U \in ANE(C)$.

Posebno, u slučaju $C = \mathscr{M}$ vrijedi

(iv) $\mathscr{M} \cap AE(\mathscr{M}) = AR(\mathscr{M})$

(v) $\mathscr{M} \cap ANE(\mathscr{M}) = ANR(\mathscr{M})$.

Teorem 1.2.11 Neka je $(Y_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ familija topoloških prostora. Ako je $Y_\lambda \in AE(C)$, za svaki $\lambda \in \Lambda$, onda je topološki produkt $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \in AE(C)$.
Posebno, ako je indeksni skup Λ konačan i $Y_\lambda \in ANE(C)$, onda je konačni topološki produkt $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \in ANE(C)$.

Primjer 1.2.12

(a) Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je apsolutni okolinski ekstenzor za klasu $\mathscr{N}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Svaki otvoreni podskup od $\mathbb{R}^n$ je apsolutni okolinski ekstenzor za $\mathscr{N}$.

(b) Hilbertova kocka Q je apsolutni ekstenzor i apsolutni retrakt za $\mathscr{N}$. Svaki otvoreni podskup od Q je apsolutni okolinski ekstenzor i apsolutni okolinski retrakt za $\mathscr{N}$.

Kategorije $AR(\mathscr{M})$ i $ANR(\mathscr{M})$ ćemo ubuduće označavati AR i ANR, a njihove objekte nazivati AR-ovima i ANR-ovima, redom.

Definicija 1.2.13 Neka je X topološki prostor, (Y,d) metrički prostor i $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Za preslikavanja $f,g : X \to Y$ kažemo da su *ε-bliska*, u oznaci $d(f,g) < \varepsilon$, ako za svaki $x \in X$ vrijedi $d(f(x),g(x)) < \varepsilon$.

ANR-ovi imaju mnoga dobra homotopska svojstva koja će nam trebati u nastavku rada. Punu potkategoriju homotopske kategorije $HTop$ objekti koje su svi prostori homotopskoga tipa ANR označujemo $HANR$.

Teorem 1.2.14 Neka je X topološki prostor i Y ANR. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da su svaka dva ε-bliska preslikavanja $f, g : X \to Y$ homotopna.

Definicija 1.2.15 Neka su X i Y topološki prostori i A podskup od X. Kažemo da Y ima *svojstvo proširenja homotopije* (HEP) s obzirom na par (X, A) ako za svako preslikavanje $f : X \to Y$ i svaku homotopiju $F : A \times I \to Y$ takvu da je $F_0 = f$ postoji homotopija $H : X \times I \to Y$ takva da je $H_0 = f$ i $H|_{A \times I} = F$.

Primjer 1.2.16 Svaki topološki prostor ima HEP s obzirom na par $\left(B^n, S^{n-1}\right)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zaista, neka je Y topološki prostor i $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Neka su dani homotopija $F : S^{n-1} \times I \to Y$ i preslikavanje $f : B^n \to Y$ takvi da je

$$F(x, 0) = f(x), \text{ za svaki } x \in S^{n-1}.$$

Neka je $D = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| \leq 2\}$. Definirajmo preslikavanje $h : D \to Y$ pravilom

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \|x\| \leq 1 \\ F\left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\| - 1\right), & 1 < \|x\| \leq 2 \end{cases}$$

i neka je

$$G : B^n \times I \to Y$$

$$G(x, t) = h((1 + t)x).$$

Funkcija G je dobro definirana i neprekidna, pri čemu za svaki $x \in B^n$ i svaki $t \in I$ vrijedi

$$G(x, 0) = h(x) = f(x) \text{ i } G(x, t) = h((1 + t)x) = F(x, t).$$

Dakle, proizvoljni topološki prostor Y ima HEP s obzirom na par $\left(B^n, S^{n-1}\right)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Propozicija 1.2.17 Svaki ANR Y ima HEP s obzirom na bilo koji par metričkih prostora (X, A), gdje je A zatvoreni potprostor od X.

Korolar 1.2.18 Neka je X metrički prostor, A zatvoren podskup od X, Y ANR i $f, g : A \to Y$ homotopna preslikavanja. Ako f dopušta neprekidno proširenje $f' : X \to Y$, onda postoji neprekidno proširenje $g' : X \to Y$ od g takvo da je $f' \sim g'$.

Teorem 1.2.19 Neka je X metrički prostor, A zatvoren podskup od X, Y ANR i $f, g : X \to Y$ preslikavanja takva da je $f|_A \sim g|_A$. Tada postoji okolina U od A u X takva da je $f|_U \sim g|_U$.

Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ i neka je $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ kanonska baza euklidskog prostora $\mathbb{R}^{n+1}$. Konveksnu ljusku

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i \ : \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \in [0,1] \right\}$$

skupa $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ nazivamo *standardnim n-simpleksom* i označavamo Δ^n.

Definicija 1.2.20 Neka je V neprazni skup čije elemente nazivamo *vrhovima*. *Apstraktnim simplicijalnim kompleksom* L sa skupom vrhova V nazivamo svaku množinu nepraznih konačnih podskupova $\sigma \in \mathscr{P}(V)$ od V takvu da

(i) za svaki $v \in V$ vrijedi $\{v\} \in L$

(ii) za svaki $\sigma \in \mathscr{P}(V)$ i svaki $\tau \in \mathscr{P}(V)$ takav da je $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma$ vrijedi $\tau \in L$.

Skupove $\sigma \in L$ nazivamo *simpleksima*, a simplekse $\tau \subseteq \sigma$ nazivamo *stranicama* simpleksa σ.

Definicija 1.2.21 *Tijelom* $|L|$ apstraktnoga simplicijalnoga kompleksa L sa skupom vrhova V nazivamo skup svih funkcija $\gamma : V \to I$ za koje vrijedi:

(i) $\sum\limits_{v \in V} \gamma(v) = 1$;

(ii) skup vrhova $\{v \in V \ : \ \gamma(v) \neq 0\}$ je simpleks od L.

Za svaki $\gamma \in |L|$ skup $\{v \in V \ : \ \gamma(v) \neq 0\}$ nazivamo *nosačem* od γ, a za svaki $v \in V$ broj $\gamma(v)$ nazivamo *v-tom baricentričkom koordinatom* točke γ.

Definicija 1.2.22 Neka je $A = \{(A_i, \mathscr{T}_i) : i \in I\}$ množina topoloških prostora takvih da je

(a) za sve $i, j \in I$ potprostor $A_i \cap A_j$ otvoren i u A_i i u A_j ili

(b) za sve $i, j \in I$ potprostor $A_i \cap A_j$ zatvoren i u A_i i u A_j

te da je relativna topologija na $A_i \cap A_j$ kao potprostoru od A_i jednaka relativnoj topologiji na $A_i \cap A_j$ kao potprostoru od A_j, za sve $i, j \in I$. Tada topologiju

$$\mathscr{T}(A) = \{U \subseteq X : U \cap A_i \in \mathscr{T}_i, \text{ za svaki } i \in I\}$$

na skupu $X = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ nazivamo *slabom topologijom* induciranom množinom A.

Neka je $\sigma = \{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}\}$ simpleks apstraktnog simplicijalnog kompleksa L. Tada je funkcija

$$\Phi_\sigma : |\sigma| \to \Delta^n$$
$$\Phi_\sigma(\gamma) = \sum_{j=0}^{n} \gamma\left(v_{i_j}\right) e_{i_j}$$

bijekcija. Za svaki simpleks $\sigma \in L$ uvedimo na $|\sigma|$ topologiju takvu da funkcija Φ_σ bude homeomorfizam. Primjetimo da ta topologija ne ovisi o poretku vrhova simpleksa i da se topologija na $|\sigma \cap \tau|$ podudara s topologijom potprostora $|\sigma| \cap |\tau|$ od $|\sigma|$ i $|\tau|$, za svaka dva simpleksa $\sigma, \tau \in L$.

Definicija 1.2.23 Neka je L apstraktni simplicijalni kompleks. Tijelo $|L|$ sa slabom topologijom induciranom množinom $\{|\sigma| \ : \ \sigma \in L\}$ nazivamo *realizacijom* apstraktnoga simplicijalnoga kompleksa L. Prostor X nazivamo *poliedrom* ako je X realizacija nekoga apstraktnoga simplicijalnoga kompleksa L.

Napomena 1.2.24 Svaki element $\gamma \in |L|$ smijemo promatrati kao element vektorskoga prostora $\prod\limits_{v \in V} \mathbb{R}_v$, gdje je $\mathbb{R}_v = \mathbb{R}$, za svaki vrh $v \in V$. Štoviše, realizaciju $|L|$ apstraktnoga simplicijalnoga kompleksa L sa skupom vrhova V možemo smjestiti u topološki prostor $\prod\limits_{v \in V} \mathbb{R}_v$ snabdjeven slabom topologijom induciranom množinom svih konačnodimenzionalnih afinih potprostora s euklidskom topologijom.

Propozicija 1.2.25 Neka je X poliedar. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) X je parakompaktan

(ii) X je povezan ako i samo ako je putovima povezan

(iii) Svaki otvoreni podskup od X je poliedar.

Teorem 1.2.26 Svaki poliedar ima homotopski tip nekoga objekta kategorije ANR.

Poliedri imaju dobra homotopska svojstva. Punu potkategoriju kategorije $HANR$ (a time i punu potkategoriju kategorije $HTop$) dobivenu restrikcijom klase objekata na sve poliedre označujemo $HPol$.

Teorem 1.2.27 Neka je X prostor, L apstraktni simplicijalni kompleks i $f, g : X \to |L|$ preslikavanja. Ako za svaki $x \in X$ postoji simpleks $\sigma \in L$ takav da je $f(x), g(x) \in \sigma$, onda je f homotopno g.

Poliedri su prostori i s dobrim lokalnim svojstvima. Vrijedi:

– svaki je poliedar lokalno kontraktibilan

– svaki je poliedar lokalno povezan

– svaki je poliedar lokalno putovima povezan.

1.3. KATEGORIJE *inv-C* I *pro-C*

Definicija 1.3.1 *Preduređajem* na skupu Λ nazivamo svaku refleksivnu i tranzitivnu binarnu relaciju $\leq$ na Λ, a uređeni par $(\Lambda, \leq)$ nazivamo *preduređenim skupom*.

Očito je svaki antisimetrični uređaj na Λ uređaj, dok je u tom slučaju $(\Lambda, \leq)$ uređeni skup.

Definicija 1.3.2 Za preduređeni skup $(\Lambda, \leq)$ kažemo da je *usmjeren* ako za sve $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ postoji $\lambda \in \Lambda$ takav da je $\lambda_1 \leq \lambda$ i $\lambda_2 \leq \lambda$.
Za preduređeni skup $(\Lambda, \leq)$ kažemo da je *kofinitan* ako je za svaki $\lambda \in \Lambda$ skup svih njegovih prethodnika $\{\lambda' \in \Lambda : \lambda' \leq \lambda\}$ konačan.

Primjer 1.3.3

(a) Prazan skup, bilo koji jednotočkovni skup i svaki skup X s relacijom $X \times X$ su trivijalni primjeri usmjerenoga i uređenoga skupa.

(b) Skup $\mathscr{U}(X)$ svih pokrivača topološkoga prostora X je usmjeren s obzirom na relaciju $\leq$ definiranu pravilom

$$\mathscr{U}_1 \leq \mathscr{U}_2 \text{ ako i samo ako } \mathscr{U}_2 \text{ profinjuje } \mathscr{U}_1.$$

(c) Skup $\mathscr{O}(x_0)$ svih okolina neke točke x_0 topološkoga prostora X je usmjeren i uređen s obzirom na relaciju $\leq$ definiranu pravilom

$$U \leq V \text{ ako i samo ako je } V \subseteq U.$$

Definicija 1.3.4 Neka je $(\Lambda, \leq)$ preduređeni skup. Za podskup $\Lambda' \subseteq \Lambda$ kažemo da je *kofinalan* u Λ ako za svaki $\lambda \in \Lambda$ postoji $\lambda' \in \Lambda'$ takav da je $\lambda \leq \lambda'$.

Podskup $(\Lambda', \leq)$ usmjerenog skupa $(\Lambda, \leq)$ ne mora biti usmjeren. Međutim, situacija se mijenja uz dodatni uvjet na kofinalnost skupa Λ' u Λ.

Propozicija 1.3.5 Ako je $(\Lambda, \leq)$ usmjeren skup i $\Lambda' \subseteq \Lambda$ kofinalan u Λ, onda je i $(\Lambda', \leq)$ usmjeren skup.

Propozicija 1.3.6 Ako je $(\Lambda, \leq)$ preduređen skup, onda postoji podskup $\Lambda' \subseteq \Lambda$ kofinalan u Λ takav da je $(\Lambda', \leq)$ uređen skup. Štoviše, ako je $(\Lambda, \leq)$ usmjeren (kofinitan), onda je i $(\Lambda', \leq)$ usmjeren (kofinitan).

Temeljni pojam u izgradnji teorije oblika "vanjskim" pristupom je pojam inverznog sustava.

Definicija 1.3.7 Neka je C kategorija. *Inverzni sustav* u C je uređena trojka $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ koja se sastoji od usmjerenog skupa Λ kojeg nazivamo *indeksnim skupom*, objekata X_λ iz C, $\lambda \in \Lambda$, koje nazivamo *članovima* inverznog sustava i, za svaki par indeksa $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\lambda \leq \lambda'$, morfizama $p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \to X_\lambda$ u C, koje nazivamo *veznim morfizmima*, takvih da vrijedi

$$p_{\lambda\lambda} = 1_{X_\lambda}, \text{ za svaki } \lambda \in \Lambda,$$

$$p_{\lambda\lambda'} \circ p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}, \text{ za sve } \lambda \leq \lambda' \leq \lambda'' \in \Lambda.$$

Invezni sustav $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ označavat ćemo $\mathbf{X}$. Ako je skup $\mathbb{N}$ indeksni skup inverznoga sustava $\mathbf{X}$, onda $\mathbf{X}$ nazivamo *inverznim nizom* i pišemo $\mathbf{X} = (X_n, p_{nn+1})$. Inverzni sustav kojemu je indeksni skup jednotočkovan nazivamo *rudimentarnim sustavom* i označujemo (X), gdje je X njegov jedini član. Inverzni sustav kojemu je indeksni skup $\emptyset$ nazivamo *praznim sustavom* i označujemo $\emptyset$.

Definicija 1.3.8 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustavi u kategoriji C i neka je $f : M \to \Lambda$ funkcija. *Morfizam između inverznih sustava* $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ je uređeni par $\left(f, f_\mu\right)$ koji se sastoji od funkcije f i morfizama $f_\mu : X_{f(\mu)} \to Y_\mu$, $\mu \in M$, u C takvih da za svaki par $\mu, \mu' \in M$, $\mu \leq \mu'$ postoji $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu), f(\mu')$, takav da vrijedi

$$f_\mu \circ p_{f(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'} \circ p_{f(\mu')\lambda}.$$

Funkciju $f : M \to \Lambda$ nazivamo *indeksnom funkcijom*.

Ubuduće ćemo morfizam $\left(f, f_\mu\right)$ između sustava $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ označavati $\left(f, f_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Prethodnu jednakost prikazuje komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & X_\lambda \arrow[dl, "p_{f(\mu)\lambda}"'] \arrow[dr, "p_{f(\mu')\lambda}"] & \\
X_{f(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"'] & & X_{f(\mu')} \arrow[d, "f_{\mu'}"] \\
Y_\mu & & Y_{\mu'} \arrow[ll, "q_{\mu\mu'}"]
\end{tikzcd}$$

Neka je

$$M_2 = \left\{ \left(\mu, \mu'\right) \in M^2 : \mu \leq \mu' \right\}.$$

Pridruživanje $(\mu, \mu') \mapsto \lambda$ u smislu definicije 1.3.8. određuje funkciju

$$\alpha : M_2 \to \Lambda,\ \alpha\left(\mu, \mu'\right) = \lambda$$

koju nazivamo *pomakom* morfizma $\left(f, f_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Morfizam između rudimentarnog sustava (X) i inverznog sustava $\mathbf{Y}$ u potpunosti je određen familijom morfizama $\left(f_\mu : X \to Y_\mu : \mu \in M\right)$ pa ga označujemo $\left(f_\mu\right) : (X) \to \mathbf{Y}$.

Definicija 1.3.9 Ako je indeksna funkcija morfizma $\left(f, f_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ uzlazna i ako za sve $(\mu, \mu') \in M_2$ vrijedi $\alpha(\mu, \mu') = f(\mu')$, onda za morfizam $\left(f, f_\mu\right)$ kažemo da je *jednostavan*. Dodatno, ako inverzni sustavi $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ imaju isti indeksni skup Λ, a indeksna funkcija jednostavnog morfizma $(f, f_\lambda) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ je identiteta 1_Λ, onda morfizam (f, f_λ) nazivamo *razinskim*.

Propozicija 1.3.10 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ i $\mathbf{Z} = (Z_\nu, r_{\nu\nu'}, N)$ inverzni sustavi u kategoriji C te neka su $\left(f, f_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $(g, g_\nu) : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ morfizmi. Tada je uređeni par (h, h_ν), gdje je $h = f \circ g$ i $h_\nu = g_\nu \circ f_{g(\nu)}$, za svaki $\nu \in N$, morfizam između $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Z}$.

Definicija 1.3.11 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ i $\mathbf{Z} = (Z_\nu, r_{\nu\nu'}, N)$ inverzni sustavi u kategoriji C. *Kompozicijom* morfizama $\left(f, f_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $(g, g_\nu) : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ nazivamo morfizam

$$(g, g_\nu) \circ \left(f, f_\mu\right) = \left(f \circ g, g_\nu \circ f_{g(\nu)}\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}.$$

Lako se pokaže da je komponiranje morfizama između inverznih sustava asocijativna operacija u kojoj, za svaki inverzni sustav $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, morfizam $\left(1_\Lambda, 1_{X_\lambda}\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ djeluje neutralno u kompoziciji s lijeve i s desne strane. Oznakom *inv-C* označujemo kategoriju kojoj klasu objekata tvore svi inverzni sustavi u kategoriji C, kojoj skup morfizama *inv-C*$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ između bilo koja dva objekta $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ tvore svi morfizmi između inverznih sustava $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ i u kojoj je kategorijsko komponiranje morfizama dano definicijom 1.3.11.

Definicija 1.3.12 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustavi u kategoriji C. Reći ćemo da je morfizam $\left(f, f_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *ekvivalentan* morfizmu $\left(f', f'_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, u oznaci $\left(f, f_\mu\right) \sim \left(f', f'_\mu\right)$, ako za svaki $\mu \in M$ postoji $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu), f'(\mu)$, takav da je

$$f_\mu \circ p_{f(\mu)\lambda} = f'_\mu \circ p_{f'(\mu)\lambda}.$$

Prethodnu jednakost prikazuje komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & X_\lambda \arrow[dl, "p_{f(\mu)\lambda}"'] \arrow[dr, "p_{f'(\mu)\lambda}"] & \\
X_{f(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu"'] & & X_{f'(\mu)} \arrow[dl, "f'_\mu"] \\
 & Y_\mu &
\end{tikzcd}$$

Propozicija 1.3.13 Relacija $\sim$ ekvivalencije morfizama između inverznih sustava je kongruencija na kategoriji *inv-C*.

Kvocijentnu kategoriju *inv-C*$|_{\sim}$ označujemo *pro-C*, a njezine morfizme $\left[\left(f, f_\mu\right)\right]$ (klase ekvivalencije morfizama između inverznih sustava) označujemo $\mathbf{f}$.

Neka je $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ inverzni sustav i $\Lambda' \subset \Lambda$ usmjereni podskup skupa Λ. Tada je $\mathbf{X}' = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda')$ inverzni sustav kojega nazivamo *podsustavom* od $\mathbf{X}$. Morfizam $\mathbf{i} = [(i, i_\lambda)] : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ u *pro-C*, gdje je $i : \Lambda' \hookrightarrow \Lambda$ inkluzija, a $i_\lambda = 1_{X_\lambda}$, za svaki $\lambda \in \Lambda'$, nazivamo *restriktivnim morfizmom*.

Propozicija 1.3.14 Za svaki inverzni sustav $\mathbf{X}$ u kategoriji C postoji podsustav $\mathbf{X}'$ koji je izomorfan s $\mathbf{X}$ u *pro-C* i kojemu je indeksni skup uređen.

Teorem 1.3.15 (Mardešićev trik za *pro-C*) Za svaki inverzni sustav $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ u kategoriji C postoji inverzni sustav $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ koji je izomorfan s $\mathbf{X}$ u *pro-C* i kojemu je indeksni skup M kofinitan, usmjeren i uređen kardinalnosti $\operatorname{card}(M) \leq \operatorname{card}(\Lambda)$. Uz to, svaki član i vezni morfizam sustava $\mathbf{Y}$ je član i vezni morfizam sustava $\mathbf{X}$.

Lema 1.3.16 (Lema o repićima za *inv-C*) Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustavi i neka je $\left(f, f_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ morfizam. Za svaki par indeksa $\mu \leq \mu'$ označimo s $\Lambda_{\mu\mu'}$ skup svih indeksa $\lambda \in \Lambda$ takvih da je

$$f_\mu \circ p_{f(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'} \circ p_{f(\mu')\lambda}.$$

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) ako je $\lambda' \geq \lambda$ i $\lambda \in \Lambda_{\mu\mu'}$, onda je $\lambda' \in \Lambda_{\mu\mu'}$

(ii) za bilo koje indekse $\mu_1, \dots, \mu_n \in M$ takve da je $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, i bilo koji indeks $\lambda \in \Lambda$, iz $\lambda \in \Lambda_{\mu_1\mu_2}, \dots, \Lambda_{\mu_{n-1}\mu_n}$ slijedi $\lambda \in \Lambda_{\mu_1\mu_n}$

(iii) ako je $f' : M \to \Lambda$ indeksna funkcija takva da je $f' \geq f$, onda je $\left(f', f'_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ morfizam ekvivalentan morfizmu $\left(f, f_\mu\right)$, pri čemu je

$$f'_\mu = f_\mu \circ p_{f(\mu)f'(\mu)} : X_{f'(\mu)} \to Y_\mu, \text{ za svaki } \mu \in M.$$

Teorem 1.3.17 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustavi u kategoriji C i neka je indeksni skup M kofinitan. Svaki morfizam $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro-C* dopušta jednostavan morfizam za svoga predstavnika. Štoviše, ako indeksni skup Λ nema maksimum i ako je M uređen skup, onda svaki morfizam $\mathbf{f}$ dopušta jednostavnog predstavnika sa strogo uzlaznom indeksnom funkcijom.

Teorem 1.3.18 (Teorem o reindeksiranju za *pro-C*) Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \big(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\big)$ inverzni sustavi u kategoriji C i neka je $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ morfizam u *pro-C*. Tada postoje inverzni sustavi $\mathbf{X}'$ i $\mathbf{Y}'$ nad istim kofinitnim i uređenim indeksnim skupom kojima su članovi i vezni morfizmi ujedno članovi i vezni morfizmi sustava $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ redom. Nadalje, postoje izomorfizmi $\mathbf{i} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ i $\mathbf{j} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}'$ u *pro-C* i morfizam $\mathbf{f}' : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ u *pro-C* koji dopušta razinskoga predstavnika takvi da vrijedi

$$\mathbf{j} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}' \circ \mathbf{i},$$

to jest, da dijagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{i}"] \arrow[d, "\mathbf{f}"'] & \mathbf{X}' \arrow[d, "\mathbf{f}'"] \\
\mathbf{Y} \arrow[r, "\mathbf{j}"] & \mathbf{Y}'
\end{tikzcd}$$

komutira u *pro-C*.

Teorem 1.3.19 (Moritina lema za *pro-C*) Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = (Y_\lambda, q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ inverzni sustavi u kategoriji C s istim indeksnim skupom Λ i neka je $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ morfizam u *pro-C* koji dopušta razinskoga predstavnika $(1_\Lambda, f_\lambda)$. Tada je $\mathbf{f}$ izomorfizam ako i samo ako za predstavnika $(1_\Lambda, f_\lambda)$ vrijedi da za svaki $\lambda \in \Lambda$ postoje $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda' \geq \lambda$, i morfizam $h_\lambda : Y_{\lambda'} \to X_\lambda$ u C takvi da vrijedi

$$f_\lambda \circ h_\lambda = q_{\lambda\lambda'} \ \text{ i } \ h_\lambda \circ f_{\lambda'} = p_{\lambda\lambda'},$$

to jest, da dijagram

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[d, "f_\lambda"'] & X_{\lambda'} \arrow[l, "p_{\lambda\lambda'}"'] \arrow[d, "f_{\lambda'}"] \\
Y_\lambda & Y_{\lambda'} \arrow[l, "q_{\lambda\lambda'}"] \arrow[ul, "h_\lambda"']
\end{tikzcd}$$

komutira u C.

1.4. Kategorije *inv*-C* i *pro*-C*

Definicija 1.4.1 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustavi u kategoriji C i neka je $f : M \to \Lambda$ funkcija. Za uređeni par $\left(f, f_\mu^m\right)$ koji se sastoji od funkcije f i, za svaki $\mu \in M$, niza morfizama $f_\mu^m : X_{f(\mu)} \to Y_\mu$, $m \in \mathbb{N}$, u C kažemo da je *$*$-morfizam između inverznih sustava* $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ ako za svaki par $\mu, \mu' \in M$, $\mu \leq \mu'$, postoje $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu), f(\mu')$, i $m_{\mu\mu'} \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $m \geq m_{\mu\mu'}$ vrijedi

$$f_\mu^m \circ p_{f(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'}^m \circ p_{f(\mu')\lambda}.$$

Funkciju $f : M \to \Lambda$ nazivamo *indeksnom funkcijom*. Ubuduće ćemo $*$-morfizam $\left(f, f_\mu^m\right)$ između sustava $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ označavati $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Prethodnu jednakost prikazuje komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
& X_\lambda \arrow[dl, "p_{f(\mu)\lambda}"'] \arrow[dr, "p_{f(\mu')\lambda}"] & \\
X_{f(\mu)} \arrow[d, "f_\mu^m"'] & & X_{f(\mu')} \arrow[d, "f_{\mu'}^m"] \\
Y_\mu & & Y_{\mu'} \arrow[ll, "q_{\mu\mu'}"]
\end{tikzcd}$$

Pridruživanje $(\mu, \mu') \mapsto \lambda$ u smislu definicije 1.4.1. određuje funkciju

$$\alpha : M_2 \to \Lambda,\ \alpha\left(\mu, \mu'\right) = \lambda$$

koju nazivamo *pomakom* $*$-morfizma $\left(f, f_\mu^n\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, a pridruživanje $(\mu, \mu') \mapsto m_{\mu\mu'}$ u smislu definicije 1.4.1. određuje funkciju

$$\beta : M_2 \to \mathbb{N},\ \beta\left(\mu, \mu'\right) = m_{\mu\mu'}$$

koju nazivamo *komutativnom razinom* $*$-morfizma $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$.
Ako za $*$-morfizam $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, za svaki $\mu \in M$, vrijedi $f_\mu^m = f_\mu$, za svaki $m \in \mathbb{N}$, onda za $\left(f, f_\mu^m\right)$ kažemo da je *induciran* morfizmom $\left(f, f_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. U slučaju rudimentarnoga sustava (X) i inverznoga sustava $\mathbf{Y}$, $*$-morfizam između (X) i $\mathbf{Y}$ u potpunosti je određen familijom morfizama $\left(f_\mu^m : X \to Y_\mu : \mu \in M, m \in \mathbb{N}\right)$ pa ga označujemo $\left(f_\mu^m\right) : (X) \to \mathbf{Y}$.

Definicija 1.4.2 Ako je indeksna funkcija $*$-morfizma $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ uzlazna i ako za sve $(\mu, \mu') \in M_2$ vrijedi $\alpha(\mu, \mu') = f(\mu')$, onda za $*$-morfizam $\left(f, f_\mu^m\right)$ kažemo da je *jednostavan*.

Dodatno, ako inverzni sustavi $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ imaju isti indeksni skup Λ, a indeksna funkcija jednostavnog $*$-morfizma $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ je identiteta 1_Λ, onda $*$-morfizam $\left(f, f_\mu^m\right)$ nazivamo *razinskim*.

Propozicija 1.4.3 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ i $\mathbf{Z} = (Z_\nu, r_{\nu\nu'}, N)$ inverzni sustavi u kategoriji C te neka su $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $(g, g_\nu^m) : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ $*$-morfizmi. Tada je uređeni par (h, h_ν^m), gdje je $h = f \circ g$ i $h_\nu^m = g_\nu^m \circ f_{g(\nu)}^m$, za sve $\nu \in N, m \in \mathbb{N}$, $*$-morfizam između $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Z}$.

Definicija 1.4.4 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ i $\mathbf{Z} = (Z_\nu, r_{\nu\nu'}, N)$ inverzni sustavi u kategoriji C. *Kompozicijom* $*$-morfizama $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $(g, g_\nu^m) : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ nazivamo $*$-morfizam

$$(g, g_\nu^m) \circ \left(f, f_\mu^m\right) = \left(f \circ g, g_\nu^m \circ f_{g(\nu)}^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}.$$

Lako se pokaže da je komponiranje $*$-morfizama između inverznih sustava asocijativna operacija u kojoj, za svaki inverzni sustav $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, $*$-morfizam $\left(1_\Lambda, 1_{X_\lambda}^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, gdje je $1_{X_\lambda}^m = 1_{X_\lambda}$, za sve $\lambda \in \Lambda, m \in \mathbb{N}$, djeluje neutralno u kompoziciji s lijeve i s desne strane. Oznakom *inv*-C* označujemo kategoriju kojoj klasu objekata tvore svi inverzni sustavi u kategoriji C, kojoj skup morfizama *inv*-C*$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ između bilo koja dva objekta $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ tvore svi $*$-morfizmi između inverznih sustava $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ i u kojoj je kategorijsko komponiranje morfizama dano definicijom 1.4.4.

Definicija 1.4.5 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustavi u kategoriji C. Reći ćemo da je $*$-morfizam $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *ekvivalentan* $*$-morfizmu $\left(f', f_\mu'^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, u oznaci $\left(f, f_\mu^m\right) \sim \left(f', f_\mu'^m\right)$, ako za svaki $\mu \in M$ postoje $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu), f'(\mu)$, i $m_\mu \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $m \geq m_\mu$ vrijedi

$$f_\mu^m \circ p_{f(\mu)\lambda} = f_\mu'^m \circ p_{f'(\mu)\lambda}.$$

Prethodnu jednakost prikazuje komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & X_\lambda \arrow[dl, "p_{f(\mu)\lambda}"'] \arrow[dr, "p_{f'(\mu)\lambda}"] & \\
X_{f(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu^m"'] & & X_{f'(\mu)} \arrow[dl, "f_\mu'^m"] \\
 & Y_\mu &
\end{tikzcd}$$

Propozicija 1.4.6 Relacija $\sim$ ekvivalencije $*$-morfizama između inverznih sustava kongruencija je na kategoriji *inv***-C*.

Kvocijentnu kategoriju *inv**-$C|_\sim$ označujemo *pro***-C*, a njezine morfizme $\left[\left(f, f_\mu^m\right)\right]$ (klase ekvivalencije $*$-morfizama između inverznih sustava) označujemo $\mathbf{f}^*$.
Među kategorijama *pro-C* i *pro***-C* postoji prirodna funktorska veza. Pridruživanje koje inverzne sustave u kategoriji C drži fiksnima, a svakom morfizmu $\mathbf{f} = \left[\left(f, f_\mu\right)\right] : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro-C* pridružuje morfizam $\mathbf{f}^* = \left[\left(f, f_\mu^m\right)\right] : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro***-C* predstavljen $*$-morfizmom koji je induciran morfizmom $\left(f, f_\mu\right)$ dobro je definirano i određuje funktor

$$\mathbf{J}_C : pro - C \to pro^* - C.$$

Za morfizam $\mathbf{f}^* = \mathbf{J}_C(\mathbf{f})$ kažemo da je *induciran* morfizmom $\mathbf{f}$.

Propozicija 1.4.7 Za svaki inverzni sustav $\mathbf{X}$ u kategoriji C postoji podsustav $\mathbf{X}'$ koji je izomorfan s $\mathbf{X}$ u *pro***-C* i kojemu je indeksni skup uređen.

Teorem 1.4.8 (Mardešićev trik za *pro***-C*) Za svaki inverzni sustav $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ u kategoriji C postoji inverzni sustav $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ koji je izomorfan s $\mathbf{X}$ u *pro***-C* i kojemu je indeksni skup M kofinitan, usmjeren i uređen kardinalnosti $\operatorname{card}(M) \leq \operatorname{card}(\Lambda)$. Uz to, svaki član i vezni morfizam sustava $\mathbf{Y}$ je član i vezni morfizam sustava $\mathbf{X}$.

Lema 1.4.9 (Lema o repićima za *inv***-C*) Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustavi i neka je $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ $*$-morfizam. Za svaki par indeksa $\mu \leq \mu'$ označimo s $\Lambda_{\mu\mu'}$ skup svih indeksa $\lambda \in \Lambda$ takvih da je

$$f_\mu^m \circ p_{f(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'}^m \circ p_{f(\mu')\lambda}, \text{ za skoro sve } m \in \mathbb{N}.$$

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) ako je $\lambda' \geq \lambda$ i $\lambda \in \Lambda_{\mu\mu'}$, onda je $\lambda' \in \Lambda_{\mu\mu'}$;

(ii) za bilo koje indekse $\mu_1, \ldots, \mu_n \in M$ takve da je $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, i bilo koji indeks $\lambda \in \Lambda$, iz $\lambda \in \Lambda_{\mu_1\mu_2}, \ldots, \Lambda_{\mu_{n-1}\mu_n}$ slijedi $\lambda \in \Lambda_{\mu_1\mu_n}$;

(iii) ako je $f' : M \to \Lambda$ indeksna funkcija takva da je $f' \geq f$, onda je $\left(f', f_\mu^{\prime m}\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ $*$-morfizam ekvivalentan $*$-morfizmu $\left(f, f_\mu^m\right)$, pri čemu je

$$f_\mu^{\prime m} = f_\mu^m \circ p_{f(\mu)f'(\mu)} : X_{f'(\mu)} \to Y_\mu, \text{ za sve } \mu \in M, m \in \mathbb{N}.$$

Teorem 1.4.10 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustavi u kategoriji C i neka je indeksni skup M kofinitan. Svaki $*$-morfizam $\mathbf{f}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro**-C dopušta jednostavan $*$-morfizam za svoga predstavnika. Štoviše, ako indeksni skup Λ nema maksimum i ako je M uređen skup, onda svaki $*$-morfizam $\mathbf{f}^*$ dopušta jednostavnog predstavnika sa strogo uzlaznom indeksnom funkcijom.

Teorem 1.4.11 (Teorem o reindeksiranju za *pro**-C) Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustavi u kategoriji C i neka je $\mathbf{f}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ $*$-morfizam u *pro**-C. Tada postoje inverzni sustavi $\mathbf{X}'$ i $\mathbf{Y}'$ nad istim kofinitnim i uređenim indeksnim skupom kojima su članovi i vezni morfizmi ujedno članovi i vezni morfizmi sustava $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ redom. Nadalje, postoje izomorfizmi $\mathbf{i} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ i $\mathbf{j} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}'$ u *pro*-C i $*$-morfizam $\mathbf{f}'^* : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ u *pro**-C koji dopušta razinskoga predstavnika takvi da vrijedi

$$\mathbf{J}_C(\mathbf{j}) \circ \mathbf{f}^* = \mathbf{f}'^* \circ \mathbf{J}_C(\mathbf{i}),$$

to jest, da dijagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{J}_C(\mathbf{i})"] \arrow[d, "\mathbf{f}^*"'] & \mathbf{X}' \arrow[d, "\mathbf{f}'^*"] \\
\mathbf{Y} \arrow[r, "\mathbf{J}_C(\mathbf{j})"] & \mathbf{Y}'
\end{tikzcd}$$

komutira u *pro**-C.

Teorem 1.4.12 (Moritina lema za *pro**-C) Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = (Y_\lambda, q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ inverzni sustavi u kategoriji C s istim indeksnim skupom Λ i neka je $\mathbf{f}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ $*$-morfizam u *pro**-C koji dopušta razinskoga predstavnika $\left(1_\Lambda, f_\lambda^m\right)$. Tada je $\mathbf{f}^*$ izomorfizam ako i samo ako za predstavnika $\left(1_\Lambda, f_\lambda^m\right)$ vrijedi da za svaki $\lambda \in \Lambda$ postoje $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda' \geq \lambda$, i $m_\lambda \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $m \geq m_\lambda$ postoji morfizam $h_\lambda^m : Y_{\lambda'} \to X_\lambda$ u C takav da vrijedi

$$f_\lambda^m \circ h_\lambda^m = q_{\lambda\lambda'} \text{ i } h_\lambda^m \circ f_{\lambda'}^m = p_{\lambda\lambda'},$$

to jest, da dijagram

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[d, "f_\lambda^m"'] & X_{\lambda'} \arrow[l, "p_{\lambda\lambda'}"'] \arrow[d, "f_{\lambda'}^m"] \\
Y_\lambda & Y_{\lambda'} \arrow[l, "q_{\lambda\lambda'}"] \arrow[ul, "h_\lambda^m"']
\end{tikzcd}$$

komutira u C.

Napomenimo još da u kategoriji *pro**-C, općenito, ima više izomorfizama nego u pripadnoj *pro*-C kategoriji. Na primjer, postoje dva inverzna niza u Grp (Top) koji su međusobno izomorfni u *pro**-Grp (*pro**-Top), a nisu izomorfni u *pro*-Grp (*pro*-Top).

1.5. INVERZNI LIMESI I EKSPANZIJE

Definicija 1.5.1 Neka je C bilo koja kategorija i $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ inverzni sustav u C. *Inverznim limesom* sustava $\mathbf{X}$ nazivamo uređeni par $(X, \mathbf{p})$ koji se sastoji od objekta $X \in Ob(C)$ i morfizma $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$ u *pro-C* sa svojstvom da za svaki morfizam $\mathbf{g} : (Y) \to \mathbf{X}$ u *pro-C* postoji jedinstveni morfizam $g : Y \to X$ u C takav da je

$$\mathbf{p} \circ [(g)] = \mathbf{g},$$

to jest, da dijagram

$$\begin{tikzcd} (Y) \arrow[r, dashed, "{[(g)]}"] \arrow[dr, "\mathbf{g}"'] & (X) \arrow[d, "\mathbf{p}"] \\ & \mathbf{X} \end{tikzcd}$$

komutira u *pro-C*.

Morfizam $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$ inverznog limesa skraćeno zapisujemo $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$ i nazivamo inverznim limesom sustava $\mathbf{X}$.

Propozicija 1.5.2 Ako postoji, inverzni limes sustava $\mathbf{X}$ jedinstven je do na izomorfizam, odnosno, ako su $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{p}' : (X') \to \mathbf{X}$ inverzni limesi sustava $\mathbf{X}$, onda postoji jedinstveni izomorfizam $g : X' \to X$ u C takav da je $\mathbf{p} \circ [(g)] = \mathbf{p}'$.

Često i objekt X, zbog jedinstvenosti do na izomorfizam, nazivamo inverznim limesom sustava $\mathbf{X}$. Uz to, pišemo $X = \lim \mathbf{X}$ i kažemo da $\mathbf{X}$ ima limes X u C.

Definicija 1.5.3 Ako svaki inverzni sustav u kategoriji C ima limes, onda kažemo da je C kategorija koja *dopušta limese*.

Primjetimo da je inverzni limes sustava $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ zapravo familija $(p_\lambda : X \to X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ morfizama u C takvih da je

$$p_\lambda = p_{\lambda\lambda'} \circ p_{\lambda'} \text{ za sve } \lambda \leq \lambda',$$

takva da za svaki objekt Y u C i svaku familiju $(g_\lambda : Y \to X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ morfizama u C takvih da je

$$g_\lambda = p_{\lambda\lambda'} \circ g_{\lambda'} \text{ za sve } \lambda \leq \lambda',$$

postoji jedinstveni morfizam $g : Y \to X$ u C takav da je

$$p_\lambda \circ g = g_\lambda \ \text{ za svaki } \lambda \in \Lambda,$$

to jest, da dijagram

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\exists! g"] \arrow[dr, "g_\lambda"'] & X \arrow[d, "p_\lambda"] \\ & X_\lambda \end{tikzcd}$$

komutira u C. Posebno, ako je $\mathbf{X} = (X)$ rudimentarni sustav, onda je $1_X : X \to \mathbf{X}$ inverzni limes sustava $\mathbf{X}$.

Napomena 1.5.4 Neka je C kategorija koja dopušta limese te neka su $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y}$ inverzni limesi sustava $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \big(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\big)$ u C, redom. Za svaki morfizam $\big[(\varphi, f_\mu)\big] : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro-C* postoji jedinstveni morfizam $f : \lim \mathbf{X} \to \lim \mathbf{Y}$ u C za kojega vrijedi

$$f_\mu \circ p_{\varphi(\mu)} = q_\mu \circ f, \ \text{ za svaki } \mu \in M.$$

Ako stavimo $\lim \mathbf{f} = f$, onda uz postojeću oznaku $\lim \mathbf{X} = X$ inverzni limes možemo promatrati kao funktor $\lim : \textit{pro-}C \to C$.

Primjer 1.5.5 Navedimo neke primjere inverznih limesa u spomenutim kategorijama.

(a) Neka je $(A_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ familija skupova zatvorena na konačne presjeke. Uvedimo uređaj na skup Λ stavljajući $\lambda \leq \lambda'$ ako i samo ako je $A_{\lambda'} \subseteq A_\lambda$ i neka su $j_{\lambda\lambda'} : A_{\lambda'} \hookrightarrow A_\lambda$, za sve $\lambda \leq \lambda'$, inkluzije. Označimo $A = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Limes inverznog sustava $\mathbf{A} = (A_\lambda, j_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ u kategoriji *Set* je morfizam $[(i_\lambda)] : A \to \mathbf{A}$, gdje su $i_\lambda : A \hookrightarrow A_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, inkluzije.

(b) Neka je A potprostor topološkog T_1 prostora X. Označimo s

$$\mathscr{O}(A) = \{O_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$$

množinu svih okolina skupa A u X. Uvedimo uređaj na skup Λ stavljajući $\lambda \leq \lambda'$ ako i samo ako je $O_{\lambda'} \subseteq O_\lambda$. Neka su $j_{\lambda\lambda'} : O_{\lambda'} \hookrightarrow O_\lambda$, za sve $\lambda \leq \lambda'$, inkluzije. Limes *inkluzijskog sustava* $\mathbf{O} = (O_\lambda, j_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ u kategoriji Top je morfizam $[(i_\lambda)] : A \to \mathbf{O}$, gdje su $i_\lambda : A \hookrightarrow O_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, inkluzije.

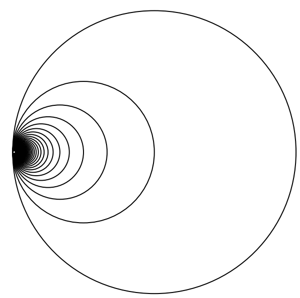
(c) Neka je $(Y_1, y_1) = \big(S^1, s_0\big)$ punktirana kružnica i

$$(Y_n, y_n) = (Y_{n-1}, y_{n-1}) \vee \left(S^1, s_0\right), \ n \geq 2,$$

klin od n punktiranih kružnica. Neka je $p_{nn+1} : Y_{n+1} \to Y_n$ preslikavanje s pravilom pridruživanja

$$p_{nn+1}(y) = \begin{cases} y, & y \in Y_n \\ y_n, & y \in Y_{n+1} \setminus Y_n \end{cases}.$$

Limes inverznog niza $((Y_n, y_n), p_{nn+1})$ u Top nazivamo *havajskom naušnicom.*



Slika 1.1: Havajska naušnica

Propozicija 1.5.6 Kategorije Set, Grp, Ab, Top i Cpt dopuštaju inverzne limese.

Iako limes inverznog sustava diskretnih topoloških prostora u kategoriji Top općenito nije diskretan prostor, kategorija $\mathscr{D}$ diskretnih topoloških prostora dopušta limese. S druge strane, inverzni limes povezanih topoloških prostora ne mora biti povezani prostor pa kategorija povezanih topoloških prostora nije kategorija koja dopušta limese. Isto vrijedi i za kategorije Pol, $HTop$, $\mathscr{M}$.

Napomena 1.5.7 Ubuduće ćemo pod limesom bilo kojeg inverznog sustava topoloških prostora podrazumijevati limes u kategoriji Top.

Neka je $(X_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda)$ familija topoloških prostora i $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ topološki produkt. Neka su

$$\pi_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda,$$

projekcije produkta na odgovarajuću koordinatu. Sliku $\pi_\lambda(x)$ projekcije elementa $x \in \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ označujemo x_λ. Ako su A_{λ_1},..., A_{λ_n} potprostori prostora X_{λ_1},..., X_{λ_n} redom, onda potprostor

$$A_{\lambda_1} \times \cdots \times A_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$$

produkta $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, gdje je $\Lambda' = \Lambda \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, označujemo $\langle A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_n} \rangle$.

Teorem 1.5.8 Neka je $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ inverzni sustav u Top i neka je

$$X = \left\{ x \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \ : \ p_{\lambda\lambda'}(x_{\lambda'}) = x_\lambda, \ \lambda \leq \lambda' \right\}.$$

Označimo

$$p_\lambda = \pi_\lambda|_X : X \to X_\lambda, \ \text{ za svaki } \ \lambda \in \Lambda.$$

Tada je $[(p_\lambda)] : X \to \mathbf{X}$ inverzni limes sustava $\mathbf{X}$. Nadalje, bazu prostora X tvore svi skupovi

$$\langle O_\lambda \rangle \cap X = p_\lambda^{-1}(O_\lambda),$$

gdje su $O_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda$ elementi baze $\mathscr{B}_\lambda$ prostora X_λ, za svaki $\lambda \in \Lambda$.

Ubuduće ćemo prostor $X = \lim \mathbf{X}$ smatrati potprostorom produkta $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ bez naglašavanja "do na homeomorfizam", a preslikavanja p_λ u morfizmu $[(p_\lambda)] : X \to \mathbf{X}$ smatrat ćemo restrikcijama standardnih projekcija. Elemente prostora X nazivamo *nitima*.

Korolar 1.5.9 Limes inverznog sustava $\mathrm{T_i}$ prostora je $\mathrm{T_i}$ prostor, za svaki $i = 0, 1, 2, 3, 3.5$. Limes inverznog niza metrizabilnih prostora je metrizabilan prostor.

Teorem 1.5.10 Neka je $X = \lim (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, pri čemu je X_λ Hausdorffov prostor, za svaki $\lambda \in \Lambda$. Tada je X zatvoren potprostor produkta $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Posebno, ako su svi prostori X_λ kompaktni i neprazni, onda je X kompaktan i neprazan.

Korolar 1.5.11 Limes inverznog niza nepraznih kompaktnih metričkih prostora je neprazan kompaktan metrički prostor.

Propozicija 1.5.12 Limes inverznog niza kontinuuma je kontinuum.

Primjer 1.5.13

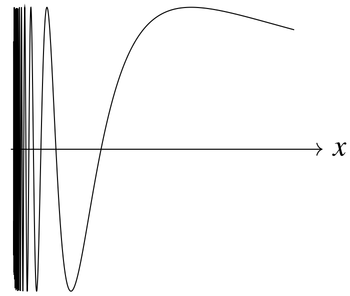
(a) Neka je, za svaki $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \prod_{i=1}^{n} \{0, 2\}$$

i neka su $p_{nn+1} : C_{n+1} \to C_n$, $n \in \mathbb{N}$, projekcije. Tada je je limes inverznog niza (C_n, p_{nn+1}) Cantorov skup.

(b) *Topološka sinusna krivulja*

$$\mathrm{Cl}\left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right), \, x \in \left\langle 0, \frac{1}{\pi} \right] \right\}$$



Slika 1.2: Topološka sinusna krivulja

može se prikazati kao limes inverznog niza (X_n, p_{nn+1}), gdje su, za svaki $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right),\ x \in \left\langle \frac{2}{(2n+3)\,\pi}, \frac{1}{\pi} \right] \right\},$$

a $p_{nn+1} : X_{n+1} \to X_n$, $n \in \mathbb{N}$, projekcije krivulje X_{n+1} na krivulju X_n u smjeru osi x.

Teorem 1.5.14 Svaki kompaktni Hausdorffov prostor limes je inverznoga sustava kompaktnih poliedara.

Korolar 1.5.15 Svaki kompaktni metrički prostor limes je inverznoga niza kompaktnih poliedara.

Definicija 1.5.16 Neka je X topološki prostor i $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ inverzni sustav u kategoriji Top. *Rezolventom* prostora X nazivamo morfizam $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$ u *pro-Top* koji ima sljedeća svojstva:

(R1) Neka je $P \in ANR$, $\mathscr{V}$ otvoreni pokrivač od P i $h : X \to P$ preslikavanje. Tada postoje $\lambda \in \Lambda$ i preslikavanje $f : X_\lambda \to P$ takvi da su h i $f \circ p_\lambda$ $\mathscr{V}$-bliski.

(R2) Neka je $P \in ANR$ i $\mathscr{V}$ otvoreni pokrivač od P. Tada postoji otvoreni pokrivač $\mathscr{V}'$ od P sa svojstvom da za svaki $\lambda \in \Lambda$ i svaka dva preslikavanja $f, f' : X_\lambda \to P$ takva da su $f \circ p_\lambda$ i $f' \circ p_\lambda$ $\mathscr{V}'$-bliski postoji $\lambda' \geq \lambda$ takav da su $f \circ p_{\lambda\lambda'}$ i $f' \circ p_{\lambda\lambda'}$ $\mathscr{V}$-bliski.

Ako je X_λ poliedar (ANR), za svaki $\lambda \in \Lambda$, onda rezolventu $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$ nazivamo *poliedarskom (ANR) rezolventom* prostora X.

Teorem 1.5.17 Svaki topološki prostor X dopušta svoju poliedarsku rezolventu $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$.

U kompaktnom slučaju inverzni limes i rezolventa se podudaraju.

Teorem 1.5.18 Neka je $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$ morfizam u *pro-Cpt*. Tada je $\mathbf{p}$ rezolventa od X ako i samo ako je $\mathbf{p}$ inverzni limes od $\mathbf{X}$.

Primjer 1.5.19 Neka je

$$X_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \cup \langle n, +\infty\rangle, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},$$

i neka su $p_{nn+1} : X_{n+1} \to X_n$ i $p_n : \{0\} \to X_n$, $n \in \mathbb{N}$, inkluzije. Tada je morfizam

$$\mathbf{p} = [(p_n)] : \{0\} \to \mathbf{X} = (X_n, p_{nn+1})$$

u *pro-Top* inverzni limes sustava $\mathbf{X}$, ali nije rezolventa od $\{0\}$.

Propozicija 1.5.20 Svaki podskup X ANR-a M dopušta ANR rezolventu koja je limes inkluzijskog sustava baze otvorenih okolina od X u M.

Rezolventu iz propozicije 1.5.20. nazivamo *inkluzijskom ANR rezolventom* prostora X.

Korolar 1.5.21 Svaki kompaktni Hausdorffov prostor dopušta svoju kompaktnu poliedarsku rezolventu.

Definicija 1.5.22 Neka je C kategorija i D njezina potkategorija. *D-ekspanzijom* objekta $X \in Ob(C)$ nazivamo morfizam $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$ u *pro-C*, gdje je $\mathbf{X}$ inverzni sustav u D, sa svojstvom da za svaki inverzni sustav $\mathbf{Y}$ u D i svaki morfizam $\mathbf{h} : (X) \to \mathbf{Y}$ u *pro-C* postoji jedinstveni morfizam $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro-D* takav da je

$$\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{p},$$

to jest, da dijagram

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Y} & (X) \arrow[l, "\mathbf{h}"'] \arrow[d, "\mathbf{p}"] \\ & \mathbf{X} \arrow[ul, dashed, "\exists!\mathbf{f}"] \end{tikzcd}$$

komutira u *pro-C*.

D-ekspanziju $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$ skraćeno zapisujemo $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$.

Definicija 1.5.23 Za potkategoriju D kategorije C kažemo da je *gusta* (ili *pro-reflektivna*) u C ako za svaki objekt X u C postoji D-ekspanzija $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$.

Propozicija 1.5.24 Neka je C kategorija i D njezina potkategorija. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) Neka su $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{p}' : X \to \mathbf{X}'$ dvije D-ekspanzije istog objekta X. Tada postoji jedinstveni izomorfizam $\mathbf{i} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ u *pro-D* takav da je

$$\mathbf{i} \circ \mathbf{p} = \mathbf{p}'$$

kojega nazivamo *kanonskim izomorfizmom*. Posebno, ako je $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$, onda je $\mathbf{i} = \mathbf{1_X}$.

(ii) Ako je $\mathbf{i} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ izomorfizam u *pro-D* i $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$ D-ekspanzija objekta X, onda je $\mathbf{i} \circ \mathbf{p} : X \to \mathbf{X}'$ također D-ekspanzija od X.

(iii) Morfizam $[(1_X)] : (X) \to (X)$ je D-ekspanzija objekta $X \in Ob(D)$ čim je D puna potkategorija kategorije C.

Sljedeća karakterizacija geometrijski pojašnjuje ideju ekspanzije.

Propozicija 1.5.25 Neka je C kategorija, D njezina potkategorija i $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ inverzni sustav u D. Morfizam $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$ je D-ekspanzija objekta X iz C ako i samo ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

(EXP-1) za svaki objekt P u D i svaki morfizam $h : X \to P$ u C postoje $\lambda \in \Lambda$ i morfizam $f : X_\lambda \to P$ u D takav da je

$$f \circ p_\lambda = h$$

(EXP-2) ako su $f, f' : X_\lambda \to P$ morfizmi u D takvi da je $f \circ p_\lambda = f' \circ p_\lambda$, onda postoji $\lambda' \geq \lambda$ takav da je

$$f \circ p_{\lambda\lambda'} = f' \circ p_{\lambda\lambda'}.$$

$$\begin{tikzcd} P & X \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "p_\lambda"] \\ & X_\lambda \arrow[ul, "f"] \end{tikzcd}$$

(a) svojstvo EXP-1

$$\begin{tikzcd} P & X \arrow[l] \arrow[d, "p_\lambda"] & \\ & X_\lambda \arrow[ul, shift left, "f'"'] \arrow[ul, shift right, "f"] & X_{\lambda'} \arrow[l, "p_{\lambda\lambda'}"'] \end{tikzcd}$$

(b) svojstvo EXP-2

Slika 1.3: Karakterizacijska svojstva ekspanzije

Definicija 1.5.26 Neka je C kategorija i $D \subseteq C$ gusta i puna potkategorija. Neka su $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{p}' : X \to \mathbf{X}'$ D-ekspanzije istoga objekta $X \in Ob(C)$ te $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y}$ i $\mathbf{q}' : Y \to \mathbf{Y}'$ D-ekspanzije istoga objekta $Y \in Ob(C)$. Reći ćemo da su morfizmi $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $\mathbf{f}' : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ u *pro-D ekvivalentni*, u oznaci $\mathbf{f} \sim \mathbf{f}'$, ako vrijedi

$$\mathbf{j} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}' \circ \mathbf{i},$$

to jest, ako dijagram

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{i}"] \arrow[d, "\mathbf{f}"'] & \mathbf{X}' \arrow[d, "\mathbf{f}'"] \\ \mathbf{Y} \arrow[r, "\mathbf{j}"] & \mathbf{Y}' \end{tikzcd}$$

komutira u *pro-D*, pri čemu su $\mathbf{i} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ i $\mathbf{j} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}'$ kanonski izomorfizmi među različitim ekspanzijama objekata X i Y redom.

Propozicija 1.5.27 Relacija $\sim$ *pro-D* ekvivalencije kongruencija je na klasi svih morfizama u *pro-D* između inverznih sustava u D koji su ekspanzije objekata iz C.

Klasu ekvivalencije morfizma $\mathbf{f}$ označujemo $\langle \mathbf{f} \rangle$.

Propozicija 1.5.28 Za bilo koje dvije D-ekspanzije $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$, $\mathbf{p}' : X \to \mathbf{X}'$ i $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y}$, $\mathbf{q}' : Y \to \mathbf{Y}'$ objekata X i Y redom i za svaki morfizam $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro-D* postoji jedinstveni morfizam $\mathbf{f}' : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ u *pro-D* takav da je $\mathbf{f} \sim \mathbf{f}'$. Posebno, ako su $\mathbf{g}, \mathbf{g}' : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ takvi da je $\mathbf{g} \sim \mathbf{g}'$, onda je $\mathbf{g} = \mathbf{g}'$.

Na kategoriji *pro***-D* uvodi se analogna razredbena relacija.

Definicija 1.5.29 Neka je C kategorija i $D \subseteq C$ gusta i puna potkategorija. Neka su $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{p}' : X \to \mathbf{X}'$ D-ekspanzije istoga objekta $X \in Ob(C)$ te $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y}$ i $\mathbf{q}' : Y \to \mathbf{Y}'$ D-ekspanzije istoga objekta $Y \in Ob(C)$. Reći ćemo da su morfizmi $\mathbf{f}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $\mathbf{f}'^* : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ u *pro***-D ekvivalentni*, u oznaci $\mathbf{f}^* \sim \mathbf{f}'^*$, ako vrijedi

$$\mathbf{J}_D(\mathbf{j}) \circ \mathbf{f}^* = \mathbf{f}'^* \circ \mathbf{J}_D(\mathbf{i}),$$

to jest, ako dijagram

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{J}_D(\mathbf{i})"] \arrow[d, "\mathbf{f}^*"'] & \mathbf{X}' \arrow[d, "\mathbf{f}'^*"] \\ \mathbf{Y} \arrow[r, "\mathbf{J}_D(\mathbf{j})"] & \mathbf{Y}' \end{tikzcd}$$

komutira u *pro***-D*, pri čemu su $\mathbf{i} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ i $\mathbf{j} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}'$ kanonski izomorfizmi među različitim ekspanzijama objekata X i Y redom.

Propozicija 1.5.30 Relacija $\sim$ pro^*-D ekvivalencije kongruencija je na klasi svih morfizama u pro^*-D između inverznih sustava u D koji su ekspanzije objekata iz C.

Klasu ekvivalencije morfizma $\mathbf{f}^*$ označujemo $\langle \mathbf{f}^* \rangle$.

Propozicija 1.5.31 Za bilo koje dvije D-ekspanzije $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$, $\mathbf{p}' : X \to \mathbf{X}'$ i $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y}$, $\mathbf{q}' : Y \to \mathbf{Y}'$ objekata X i Y redom i za svaki morfizam $\mathbf{f}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u pro^*-D postoji jedinstveni morfizam $\mathbf{f}'^* : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ u pro^*-D takav da je $\mathbf{f}^* \sim \mathbf{f}'^*$. Posebno, ako su $\mathbf{g}^*, \mathbf{g}'^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ takvi da je $\mathbf{g}^* \sim \mathbf{g}'^*$, onda je $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}'^*$.

1.6. KATEGORIJA OBLIKA

Neka je D gusta i puna potkategorija kategorije C. Na temelju relacije ekvivalencije $\sim$ u *pro-D* paru (C,D) pridružujemo novu kategoriju koju označujemo $Sh_{(C,D)}$ i za koju vrijedi:

- $Ob\left(Sh_{(C,D)}\right) = Ob(C)$
- za bilo koji par objekata $X,Y \in Sh_{(C,D)}$ skup morfizama $Sh_{(C,D)}(X,Y)$ čine sve klase ekvivalencije $\langle \mathbf{f} \rangle$ po relaciji $\sim$ morfizama $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro-D*, gdje su $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y}$ bilo koje D-ekspanzije objekata X i Y redom.

Kategoriju $Sh_{(C,D)}$ nazivamo *kategorijom (apstraktnoga) oblika* za par (C,D), a njezine morfizme $\langle \mathbf{f} \rangle : X \to Y$ nazivamo *morfizmima oblika* i označujemo $F : X \to Y$.

Napomena 1.6.1 Morfizam oblika $F : X \to Y$ dan je dijagramom

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d, "\mathbf{p}"'] & Y \arrow[d, "\mathbf{q}"] \\ \mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{f}"] & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

i vrijedi da je skup $Sh_{(C,D)}(X,Y)$ bijektivno korespodentan sa skupom *pro-D*$(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, za bilo koje D-ekspanzije $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ objekata X i Y redom.

Neka su $F = \langle \mathbf{f} \rangle : X \to Y$ i $G = \langle \mathbf{g} \rangle : Y \to Z$ morfizmi oblika. *Kompoziciju morfizama oblika* F i G definiramo s pomoću predstavnika $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $\mathbf{g} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$, to jest, stavljajući

$$G \circ F := \langle \mathbf{g} \circ \mathbf{f} \rangle : X \to Z.$$

Identitetom oblika $1_X : X \to X$ na objektu X nazivamo klasu $\langle \mathbf{1_X} \rangle$ identičkoga morfizma $\mathbf{1_X} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$.

Teorem 1.6.2 Neka je C kategorija i D njezina potkategorija. Za svaki morfizam $f : X \to Y$ u C i za bilo koje D-ekspanzije $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$, $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y}$ objekata X i Y redom postoji jedinstveni morfizam $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro-D* takav da je

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{p} = \mathbf{q} \circ [(f)],$$

to jest, da dijagram

$$\begin{tikzcd} (X) \arrow[r, "{[(f)]}"] \arrow[d, "\mathbf{p}"'] & (Y) \arrow[d, "\mathbf{q}"] \\ \mathbf{X} \arrow[r, dashed, "\mathbf{f}"] & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

komutira u *pro*-C. Ako su $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}'$ i $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y}'$ neke druge D-ekspanzije objekata X i Y redom i $\mathbf{f}' : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ morfizam u *pro*-D takav da je $\mathbf{f}' \circ \mathbf{p}' = \mathbf{q}' \circ [(f)]$, onda je $\mathbf{f} \sim \mathbf{f}'$.

Po teoremu 1.6.2. svakom morfizmu $f \in C(X,Y)$ možemo pridružiti klasu ekvivalentnih morfizama $\mathbf{f} \in$ *pro*-$D(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, odnosno, morfizam oblika $F \in Sh_{(C,D)}(X,Y)$. Stavljajući

$$S_{(C,D)}(X) = X, \text{ za svaki objekt } X \in C,$$

$$S_{(C,D)}(f) = F, \text{ za svaki morfizam } f \in C(X,Y),$$

dobivamo kovarijantni funktor $S_{(C,D)} : C \to Sh_{(C,D)}$ kojega nazivamo *funktorom oblika*.

Teorem 1.6.3 Neka je C kategorija, D njezina potkategorija i X objekt iz C. Ako je P objekt iz D, onda djelovanje funktora oblika na skupu morfizama $C(X,P)$ inducira bijekciju

$$S_{(C,D)} : C(X,P) \to Sh_{(C,D)}(X,P).$$

Po teoremu 1.6.3. svaki morfizam oblika $F : X \to P$, gdje je P objekt iz D, smijemo identificirati s morfizmom $f : X \to P$ u C.

Korolar 1.6.4 Funktor oblika $S_{(C,D)}$ inducira izomorfizam između D i pune potkategorije od $Sh_{(C,D)}$ sužene na objekte iz D.

Morfizam oblika $F : P \to Q$, gdje su P i Q objekti iz D, jedinstveno je reprezentiran morfizmom $f : P \to Q$ u D pa se stoga identificiraju. Nadalje, budući da funktor oblika $S_{(C,D)}$ drži objekte fiksnima, po korolaru 1.6.4. kategoriju D smijemo smatrati punom potkategorijom kategorije oblika $Sh_{(C,D)}$.

Definicija 1.6.5 Reći ćemo da su objekti X i Y iz C *istoga oblika*, u oznaci $Sh(X) = Sh(Y)$, ako su izomorfni u kategoriji $Sh_{(C,D)}$.

Očito je $F = \langle \mathbf{f} \rangle : X \to Y$ izomorfizam u $Sh_{(C,D)}$ ako i samo ako je $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ izomorfizam u *pro*-D. Drugim riječima, objekti X i Y su istoga oblika ako i samo ako su $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ izomorfni u *pro*-D. Konačno, budući da svaki funktor čuva izomorfizme, vrijedi

$$X \cong Y \text{ u } C \implies Sh(X) = Sh(Y).$$

Teorem 1.6.6 Neka je X topološki prostor i $\mathbf{p} = [(p_\lambda)] : X \to \mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ rezolventa od X. Ako je $X_\lambda \in ANR$, za svaki $\lambda \in \Lambda$, onda je

$$\mathrm{H}\mathbf{p} = [([p_\lambda])] : X \to \mathrm{H}\mathbf{X} = (X_\lambda, [p_{\lambda\lambda'}], \Lambda)$$

$HANR$-ekspanzija prostora X, gdje je $H : Top \to HTop$ homotopski funktor.

Korolar 1.6.7 Kategorije $HANR$ i $HPol$ guste su u kategoriji $HTop$.

Po korolaru 1.6.7. ima smisla promatrati kategorije $Sh_{(HTop,HANR)}$ i $Sh_{(HTop,HPol)}$. Budući da je svaki ANR homotopski ekvivalentan nekom poliedru i, obratno, svaki poliedar homotopski ekvivalentan nekom ANR-u (dokaz u [13]), to su kategorije $Sh_{(HTop,HANR)}$ i $Sh_{(HTop,HPol)}$ međusobno izomorfne. Štoviše, s obzirom na to da su klase objekata ovih kategorija jednake, u nastavku rada ćemo ih poistovjećivati.

Definicija 1.6.8 Kategorije $Sh_{(HTop,HANR)}$ i $Sh_{(HTop,HPol)}$ označujemo Sh i nazivamo *kategorijom (topološkoga) oblika*.

1.7. Kategorija gruboga oblika

Neka je D gusta i puna potkategorija kategorije C. Na temelju relacije ekvivalencije $\sim$ u *pro**-D paru (C,D) pridružujemo novu kategoriju koju označujemo $Sh^*_{(C,D)}$ i za koju vrijedi:

- $Ob\left(Sh^*_{(C,D)}\right) = Ob\,(C)$
- za bilo koji par objekata $X,Y \in Sh^*_{(C,D)}$ skup morfizama $Sh^*_{(C,D)}(X,Y)$ čine sve klase ekvivalencije $\langle \mathbf{f}^* \rangle$ po relaciji $\sim$ morfizama $\mathbf{f}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro**-D, gdje su $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y}$ bilo koje D-ekspanzije objekata X i Y redom.

Kategoriju $Sh^*_{(C,D)}$ nazivamo *kategorijom (apstraktnoga) gruboga oblika* za par (C,D), a njezine morfizme $\langle \mathbf{f}^* \rangle : X \to Y$ nazivamo *morfizmima gruboga oblika* i označujemo $F^* : X \to Y$.

Napomena 1.7.1 Morfizam gruboga oblika $F^* : X \to Y$ dan je dijagramom

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "F^*"] \arrow[d, "\mathbf{p}"'] & Y \arrow[d, "\mathbf{q}"] \\ \mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{f}^*"] & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

i vrijedi da je skup $Sh^*_{(C,D)}(X,Y)$ bijektivno korespodentan sa skupom *pro**-$D\,(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, za bilo koje D-ekspanzije $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ objekata X i Y redom.

Neka su $F^* = \langle \mathbf{f} \rangle : X \to Y$ i $G^* = \langle \mathbf{g} \rangle : Y \to Z$ morfizmi gruboga oblika. *Kompoziciju morfizama gruboga oblika* F^* i G^* definiramo s pomoću predstavnika $\mathbf{f}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $\mathbf{g}^* : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$, to jest, stavljajući

$$G^* \circ F^* := \langle \mathbf{g}^* \circ \mathbf{f}^* \rangle : X \to Z.$$

Identitetom gruboga oblika $1^*_X : X \to X$ na objektu X nazivamo klasu $\langle \mathbf{1_X}^* \rangle$ identičkoga morfizma $\mathbf{1_X}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$.

Definirajmo funktor $J_{(C,D)} : Sh_{(C,D)} \to Sh^*_{(C,D)}$ stavljajući

$$J_{(C,D)}(X) = X, \text{ za svaki objekt } X \in C,$$

$$J_{(C,D)}(F) = F^* = \langle \mathbf{J}_D(\mathbf{f}) \rangle, \text{ za svaki morfizam oblika } F = \langle \mathbf{f} \rangle \in Sh_{(C,D)}(X,Y).$$

Propozicija 1.7.2 Funktor $J_{(C,D)} : Sh_{(C,D)} \to Sh^*_{(C,D)}$ vjeran je funktor koji, općenito, nije pun.

Po propoziciji 1.7.2. kategoriju oblika $Sh_{(C,D)}$ smijemo smatrati potkategorijom kategorije gruboga oblika $Sh^*_{(C,D)}$. Stavljajući

$$S^*_{(C,D)} = J_{(C,D)} \circ S_{(C,D)}$$

dobivamo (kovarijantni) funktor $S^*_{(C,D)} : C \to Sh^*_{(C,D)}$ kojega nazivamo *funktorom gruboga oblika*.

Napomena 1.7.3 Primijetimo da funktor gruboga oblika drži objekte fiksnima, a svakom morfizmu $f : X \to Y$ u C pridružuje morfizam gruboga oblika $F^* : X \to Y$ predstavljen morfizmom $\mathbf{f}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u pro^*-D koji je induciran morfizmom $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u pro-D, pri čemu je $S_{(C,D)}(f) = \langle \mathbf{f} \rangle$, a $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y}$ su D-ekspanzije objekata X i Y redom.

Teorem 1.7.4 Neka je C kategorija, D njezina potkategorija i X objekt iz C. Ako je P objekt iz D, onda djelovanje funktora gruboga oblika na skupu morfizama $C(X,P)$ inducira injektivnu funkciju

$$S^*_{(C,D)} : C(X,P) \to Sh^*_{(C,D)}(X,P).$$

Definicija 1.7.5 Reći ćemo da su objekti X i Y iz C *istoga gruboga oblika*, u oznaci $Sh^*(X) = Sh^*(Y)$, ako su izomorfni u kategoriji $Sh^*_{(C,D)}$.

Očito je $F^* = \langle \mathbf{f}^* \rangle : X \to Y$ izomorfizam u $Sh^*_{(C,D)}$ ako i samo ako je $\mathbf{f}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ izomorfizam u pro^*-D. Drugim riječima, objekti X i Y su istoga gruboga oblika ako i samo ako su $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ izomorfni u pro^*-D. Konačno, budući da funktori čuvaju izomorfizme, vrijedi

$$X \cong Y \text{ u } C \text{ ili } Sh(X) = Sh(Y) \implies Sh^*(X) = Sh^*(Y).$$

Teorem 1.7.6 Neka su P i Q objekti guste i pune potkategorije D kategorije C. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) P i Q su izomorfni u kategoriji D;

(ii) P i Q su istoga oblika;

(iii) P i Q su istoga gruboga oblika.

Po korolaru 1.6.7. ima smisla promatrati kategorije $Sh^*_{(HTop,HANR)}$ i $Sh^*_{(HTop,HPol)}$ koje su međusobno izomorfne. S obzirom na to da su klase objekata ovih kategorija jednake, u nastavku rada ćemo ih poistovjećivati.

Definicija 1.7.7 Kategorije $Sh^*_{(HTop,HANR)}$ i $Sh^*_{(HTop,HPol)}$ označujemo Sh^* i nazivamo *kategorijom (topološkoga) gruboga oblika*.

Teorem 1.7.8 Klasifikacija topoloških prostora po obliku strogo je finija od klasifikacije po grubom obliku, to jest, postoje prostori X i Y koji su istoga gruboga oblika, a nisu istoga oblika.

Teorem 1.7.9 Povezanost je invarijanta gruboga oblika.

Drugim riječima, ako je topološki prostor X povezan i $Sh^*(X) = Sh^*(Y)$, onda je i topološki prostor Y povezan. Posljedično, povezanost je invarijanta oblika.

1.8. DEFINICIJA I OSNOVNA SVOJSTVA ε-NEPREKIDNOSTI

Definicija 1.8.1 [6] Neka je X topološki prostor, (Y,d) metrički postor i $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je ε-*neprekidna u točki* $x_0 \in X$ ako postoji okolina U od x_0 u X takva da je

$$f(U) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon).$$

Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je ε-*neprekidna* ako je ε-neprekidna u svakoj točki $x_0 \in X$.

Grubo govoreći, funkcija je ε-neprekidna ako su joj "skokovi", u svakoj točki prekida, strogo ograničeni odozgo s ε. Primijetimo da, za razliku od neprekidnosti, pojam ε-neprekidnosti funkcije ima smisla samo ako je kodomena metrički prostor.

Propozicija 1.8.2 Neka je X topološki prostor, (Y,d) metrički prostor i $f : X \to Y$ funkcija. Funkcija f je neprekidna ako i samo ako je ε-neprekidna, za svaki $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna i neka su $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Budući da je f neprekidna u x_0, to za okolinu $B(f(x_0), \varepsilon)$ točke $f(x_0)$ u Y postoji okolina U točke x_0 u X takva da je

$$f(U) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon).$$

To znači da je f ε-neprekidna u x_0 pa je, zbog proizvoljnosti točke x_0 iz X i konstante $\varepsilon > 0$, nužnost dokazana.

Pretpostavimo da je, za svaki $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, funkcija $f : X \to Y$ ε-neprekidna i neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka. Neka je V proizvoljna okolina točke $f(x_0)$ u Y. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$ (kugle su baza metričke topologije). Budući da je, po pretpostavci, funkcija f ε-neprekidna u x_0, to postoji okolina U od x_0 u X takva da je

$$f(U) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V,$$

što znači da je f neprekidna u točki x_0. Zbog proizvoljnosti točke $x_0 \in X$ funkcija f je ε-neprekidna. ■

Sljedeći primjer pokazuje da postoje ε-neprekidne funkcije koje nisu neprekidne.

Primjer 1.8.3 Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$, funkcija predznaka. Tada je f funkcija koja je $\frac{4}{3}$-neprekidna, ali nije neprekidna.
Zaista, budući da je restrikcija $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ neprekidna, to je f $\frac{4}{3}$-neprekidna u svakoj točki $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Nadalje, f je prekidna u 0, ali za okolinu $U=\langle -1,1\rangle$ točke 0 vrijedi

$$f(U)=\{-1,0,1\}\subseteq\left\langle -\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\rangle = B\left(f(0),\frac{4}{3}\right)$$

pa je f očito $\frac{4}{3}$-neprekidna u 0.

Općenito, ako za funkciju $f:X\to Y$ vrijedi da je

$$\varepsilon'=\inf\left\{\varepsilon\in\mathbb{R}^+ : f \text{ je } \varepsilon\text{-neprekidna}\right\}>0,$$

onda postoji točka $x_0\in X$ takva da za svaku okolinu U od x_0 u X vrijedi

$$f(U)\nsubseteq B\left(f(x_0),\frac{\varepsilon'}{2}\right)$$

pa f nije neprekidna (u x_0).
Još jedna veza neprekidnosti i ε-neprekidnosti dana je sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.8.4 Neka je X topološki prostor i (Y,d) metrički prostor. Neka je $f:X\to Y$ neprekidna funkcija i $g:X\to Y$ funkcija takva da je $d(f,g)<\varepsilon$, za neki $\varepsilon>0$. Tada je g 3ε-neprekidna.

Dokaz. Neka je $x_0\in X$ proizvoljna točka. Budući da je funkcija f neprekidna u x_0, to postoji okolina U od x_0 u X takva da je

$$f(U)\subseteq B(f(x_0),\varepsilon).$$

Neka je $x\in U$ bilo koja točka. Tada je

$$d(g(x),g(x_0))\leq d(g(x),f(x))+d(f(x),f(x_0))+d(f(x_0),g(x_0))<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

∎

U slučaju da su i domena i kodomena metrički prostori, ε-neprekidnost se može karakterizirati sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.8.5 Neka su (X,d') i (Y,d) metrički prostori. Funkcija $f:X\to Y$ je ε-neprekidna ako i samo ako za svaku točku $x\in X$ postoji $\delta_x>0$ takav da je

$$f(B(x,\delta_x))\subseteq B(f(x),\varepsilon).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f ε-neprekidna i neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Tada postoji okolina U od x u X takva da je

$$f(U) \subseteq B(f(x), \varepsilon).$$

Budući da su kugle baza metričke topologije, to postoji $\delta_x > 0$ takav da je $B(x, \delta_x) \subseteq U$. Stoga je

$$f(B(x, \delta_x)) \subseteq B(f(x), \varepsilon),$$

čime je dokazana nužnost.
Prepostavimo da za svaku točku $x \in X$ postoji $\delta_x > 0$ takav da je

$$f(B(x, \delta_x)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

i neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka. Stavimo $U = B(x_0, \delta_{x_0})$. Tada je

$$f(U) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

pa je funkcija f ε-neprekidna u točki x_0. Zbog proizvoljnosti točke x_0, f je ε-neprekidna. ■

Što se tiče komponiranja, ε-neprekidnost nema posebno dobra svojstva. Na primjer, kompozicija dviju ε-neprekidnih funkcija $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, općenito, nije ε-neprekidna funkcija. Štoviše, ne mora uopće postojati $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ takav da je kompozit $g \circ f : X \to Z$ ε'-neprekidna funkcija, što nam pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1.8.6 Neka je $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{Z}_0^+$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, funkcija koja svakom broju $x \in \mathbb{R}_0^+$ pridružuje najveći cijeli broj manji ili jednak od x i neka je $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = x^2$.
Funkcija f je neprekidna na $\mathbb{R}_0^+ \setminus \mathbb{N}$, a u svakoj točki $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{4}{3}$-neprekidna. Zaista, uzmimo bilo koje $n \in \mathbb{N}$ i $0 < \delta < 1$. Stavimo

$$U_n = \langle n - \delta, n + \delta \rangle.$$

Skup U_n je okolina točke n u $\mathbb{R}_0^+$ i vrijedi

$$f(U_n) = \{n - 1, n\} \subseteq \left\langle n - \frac{4}{3}, n + \frac{4}{3} \right\rangle = B\left(f(n), \frac{4}{3}\right)$$

pa je funkcija f $\frac{4}{3}$-neprekidna u svakoj točki skupa $\mathbb{N}$. Dakle, f je $\frac{4}{3}$-neprekidna na $\mathbb{R}_0^+$. Primijetimo da funkcija f nije ε-neprekidna ni za jedan $\varepsilon \leq 1$. Nadalje, funkcija g je neprekidna na $\mathbb{R}$ pa je, po propoziciji 1.8.2., g također i $\frac{4}{3}$-neprekidna na $\mathbb{R}_0^+$. Neka je

$$h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{Z}_0^+,\ h(x) = g(f(x)) = \lfloor x \rfloor^2.$$

Očito je funkcija h neprekidna na $\mathbb{R}_0^+ \setminus \mathbb{N}$ pa ostaje ispitati ε-neprekidnost na $\mathbb{N}$. Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $0 < \delta < 1$ proizvoljni te U_n ista okolina od n u $\mathbb{R}_0^+$ kao ranije u primjeru. Tada je

$$h(U_n) = \left\{(n-1)^2, n^2\right\} \subseteq \left\langle n^2 - 2n, n^2 + 2n \right\rangle = B(h(n), 2n)$$

jer je

$$n^2 - (n-1)^2 = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1 < 2n,$$

što znači da je funkcija h $2n$-neprekidna u svakoj točki $n \in \mathbb{N}$. Primjetimo da, za svaki $n \in \mathbb{N}$, funkcija h nije ε-neprekidna ni za jedan $\varepsilon \leq 2n - 1$. Budući da je

$$\lim (2n-1) = +\infty,$$

to ne postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ za koji je h neprekidna na $\mathbb{N}$. Dakle, h nije ε-neprekidna na $\mathbb{R}_0^+$ ni za koji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Sljedeća propozicija nam daje jedinu situaciju u nekompaktnom slučaju u kojoj imamo kontrolu nad ε-neprekidnošću kompozita funkcija.

Propozicija 1.8.7 Neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija i $g : Y \to Z$ ε-neprekidna funkcija. Tada je kompozit $g \circ f : X \to Z$ ε-neprekidna funkcija.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka. Budući da je funkcija g ε-neprekidna u točki $f(x_0) \in Y$, to postoji okolina V od $f(x_0)$ u Y takva da je

$$g(V) \subseteq B(g(f(x_0)), \varepsilon).$$

Nadalje, zbog neprekidnosti funkcije f u točki x_0 postoji okolina U od x_0 u X takva da je $f(U) \subseteq V$. Stoga je

$$g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq B(g(f(x_0)), \varepsilon)$$

pa je $g \circ f$ ε-neprekidna funkcija u x_0. ■

Dodajmo još dvije propozicije koje govore o ponašanju ε-neprekidnosti na produktnim prostorima.

Propozicija 1.8.8 Neka je $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ produkt topoloških prostora, $Y = (Y_1 \times \cdots \times Y_n, d_\infty)$ produkt metričkih prostora te $f_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, funkcije. Neka je $f = f_1 \times \cdots \times f_n : X \to Y$ funkcija zadana pravilom $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$. Tada je funkcija $f : X \to Y$ ε-neprekidna ako i samo ako je svaka funkcija $f_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, ε-neprekidna.

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija $f = f_1 \times \ldots \times f_n : X \to Y$ ε-neprekidna i neka je $x^0 = \left(x_1^0, \cdots, x_n^0\right) \in X$ proizvoljna točka. Budući da je f ε-neprekidna u x^0, to postoji okolina

$$U = U_1 \times \cdots \times U_n$$

točke x^0 u X takva da je

$$f(U) = f_1(U_1) \times \cdots \times f_n(U_n) \subseteq B_{d_\infty}\left(f\left(x^0\right), \varepsilon\right) = B\left(f_1\left(x_1^0\right), \varepsilon\right) \times \cdots \times B\left(f_n\left(x_n^0\right), \varepsilon\right).$$

To znači da, za svaki $i = 1, \ldots, n$, postoji okolina U_i od x_i^0 u X_i takva da je

$$f_i(U_i) \subseteq B\left(f_i\left(x_i^0\right), \varepsilon\right)$$

pa je, zbog proizvoljnosti koordinata x_i^0, svaka funkcija $f_i : X_i \to Y_i$ ε-neprekidna.

Obratno, pretpostavimo da je funkcija $f_i : X_i \to Y_i$ ε-neprekidna, za svaki $i = 1, \ldots, n$. Neka je $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in X$ bilo koja točka. Budući da je svaka funkcija f_i ε-neprekidna u x_i^0, to za svaki $i = 1, \ldots, n$ postoji okolina U_i od x_i^0 u X_i takva da je

$$f_i(U_i) \subseteq B\left(f_i\left(x_i^0\right), \varepsilon\right).$$

Neka je $U = U_1 \times \cdots \times U_n$. Tada je U okolina od x^0 u X za koju vrijedi

$$f(U) = f_1(U_1) \times \cdots \times f_n(U_n) \subseteq B\left(f_1\left(x_1^0\right), \varepsilon\right) \times \cdots \times B\left(f_n\left(x_n^0\right), \varepsilon\right) = B_{d_\infty}\left(f\left(x^0\right), \varepsilon\right)$$

pa je, zbog proizvoljnosti točke x^0, funkcija $f = f_1 \times \cdots \times f_n : X \to Y$ ε-neprekidna. ■

Propozicija 1.8.9 Neka je $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ produkt topoloških prostora i $Y = (Y_1 \times \cdots \times Y_n, d_p)$, $p \in \mathbb{N}$, produkt metričkih prostora. Tada vrijedi:

(i) ako je funkcija $f_1 \times \cdots \times f_n : X \to Y$ ε-neprekidna, onda je svaka funkcija $f_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, ε-neprekidna

(ii) ako je svaka funkcija $f_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, ε-neprekidna, onda je $f_1 \times \cdots \times f_n : X \to Y$ $\sqrt[p]{n} \cdot \varepsilon$-neprekidna funkcija.

Dokaz. Dokaz se lako provede kao u prethodnoj propoziciji koristeći definicije produktnih kugala u metrikama d_p, $p \in \mathbb{N}$, te nejednakost

$$d_p \leq \sqrt[p]{n} \cdot d_\infty.$$

■

U slučaju kompaktne metričke domene X, ε-neprekidne funkcije $f : X \to Y$ imaju bolja svojstva, što će se pokazati posebno bitnim pri komponiranju.

Definicija 1.8.10 Neka su (X,d') i (Y,d) metrički prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je *uniformno ε-neprekidna* ako postoji $\delta > 0$ takav da za svake dvije točke $x,x' \in X$ za koje je $d'(x,x') < \delta$ vrijedi $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Broj δ iz definicije 1.8.10. nazivamo *radijusom ε-uniformnosti* funkcije f. Svojstvo uniformne ε-neprekidnosti je bitno jače od svojstva ε-neprekidnosti i, očito, ima smisla samo ako su i domena i kodomena metrički prostori.

Propozicija 1.8.11 Neka su (X,d') i (Y,d) metrički prostori. Ako je funkcija $f : X \to Y$ uniformno ε-neprekidna, onda je i ε-neprekidna.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ bilo koji. Budući da je f uniformno ε-neprekidna, to postoji $\delta > 0$ takav da su slike bilo kojih dviju δ-bliskih točaka u X ε-bliske u Y. Stavimo $U = B(x_0, \delta)$ i neka je $x \in U$ proizvoljna točka. Tada je $d'(x_0,x) < \delta$ pa je $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$, to jest, $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$. Dakle,

$$f(U) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

pa je f ε-neprekidna u x_0. Zbog proizvoljnosti točke $x_0 \in X$ funkcija f je ε-neprekidna. ■

Propozicija 1.8.12 Neka su (X,d') i (Y,d) metrički prostori. Funkcija $f : X \to Y$ uniformno je neprekidna ako i samo ako je uniformno ε-neprekidna, za svaki $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija $f : X \to Y$ uniformno neprekidna i uzmimo bilo koji $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svake dvije točke $x,x' \in X$ za koje je $d'(x,x') < \delta$ vrijedi

$$d\left(f(x), f\left(x'\right)\right) < \varepsilon.$$

To znači da je f uniformno ε-neprekidna pa je, zbog proizvoljnosti konstante $\varepsilon > 0$, nužnost dokazana.
Pretpostavimo da je, za svaki $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $f : X \to Y$ uniformno ε-neprekidna. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svake dvije točke $x,x' \in X$ za koje je $d'(x,x') < \delta$ vrijedi

$$d\left(f(x), f\left(x'\right)\right) < \varepsilon,$$

što znači da je f uniformno neprekidna. ■

Na kompaktnim metričkim prostorima vrijedi svojevrsni analogon Heine-Cantorova teorema za ε-neprekidnost.

Teorem 1.8.13 Neka je (X,d') kompaktni metrički prostor i (Y,d) metrički prostor. Ako je funkcija $f : X \to Y$ ε-neprekidna, onda je i uniformno 2ε-neprekidna.

Dokaz. Budući da je funkcija f ε-neprekidna, po propoziciji 1.8.5. za svaku točku $x \in X$ postoji $\delta_x > 0$ takav da je

$$f(B(x,\delta_x)) \subseteq B(f(x),\varepsilon).$$

Neka je, za svaki $x \in X$,

$$U_x = B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right).$$

Tada je familija

$$\mathscr{U} = \{U_x : x \in X\}$$

otvoreni pokrivač od X koji, zbog kompaktnosti, dopušta konačni potpokrivač

$$\mathscr{U}' = \{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}.$$

Stavimo

$$\delta = \min\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right\} > 0.$$

Neka su $x, x' \in X$ proizvoljne točke za koje je $d'(x,x') < \delta$. Budući da je $\mathscr{U}'$ pokrivač od X, to postoji $i \in \{1,\ldots,n\}$ takav da je $x \in U_{x_i}$ pa je

$$d'(x,x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2}.$$

Sada iz trokutne nejednakosti dobivamo

$$d'\left(x_i,x'\right) \leq d'(x_i,x) + d'\left(x,x'\right) < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \delta \leq \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}.$$

To znači da su obje točke x i x' udaljene najviše δ_{x_i} od x_i, to jest,

$$x, x' \in B(x_i, \delta_{x_i})$$

pa je, po pretpostavci,

$$f(x), f\left(x'\right) \in B(f(x_i),\varepsilon).$$

Konačno, iz trokutne nejednakosti dobivamo

$$d\left(f(x), f\left(x'\right)\right) \leq d(f(x), f(x_i)) + d\left(f(x_i), f\left(x'\right)\right) < 2\varepsilon$$

pa je funkcija f uniformno 2ε-neprekidna. ■

Sada možemo dokazati sljedeću propoziciju koja će nam omogućiti kontrolirano komponiranje ε-neprekidnih funkcija na kompaktnim metričkim prostorima.

Propozicija 1.8.14 Neka su X i Z metrički prostori i Y kompaktan metrički prostor. Neka je $g : Y \to Z$ ε-neprekidna funkcija i neka je δ radijus 2ε-uniformnosti za g. Ako je $f : X \to Y$ δ-neprekidna funkcija, onda je kompozit $g \circ f : X \to Z$ 2ε-neprekidna funkcija.

Dokaz. Budući da je Y kompaktan metrički prostor, po teoremu 1.8.13. funkcija g je uniformno 2ε-neprekidna pa za svake dvije točke $y, y' \in Y$ za koje je $d(y, y') < \delta$ vrijedi

$$d\left(g(y), g\left(y'\right)\right) < 2\varepsilon.$$

Neka je $x_0 \in X$ proizvoljan. Tada, zbog δ-neprekidnosti funkcije f, postoji okolina U točke x_0 u X takva da je

$$f(U) \subseteq B(f(x_0), \delta).$$

Neka je sada $x \in U$ bilo koja točka. Tada je $f(x) \in B(f(x_0), \delta)$, odnosno,

$$d(f(x), f(x_0)) < \delta$$

pa je

$$d(g(f(x)), g(f(x_0))) < 2\varepsilon.$$

To znači da je

$$g(f(x)) \in B(g(f(x_0)), 2\varepsilon),$$

odnosno,

$$g(f(U)) \subseteq B(g(f(x_0)), 2\varepsilon)$$

pa je, zbog proizvoljnosti točke x_0, kompozit $g \circ f$ 2ε-neprekidna funkcija. ∎

Dakle, na kompaktnim metričkim prostorima možemo kontrolirano komponirati ε-neprekidne funkcije, a upravo takvi prostori će nam biti standardni ambijent u ostatku rada.
Opišimo sada poopćenje homotopije na pojam ε-homotopije koja će imati ulogu razredbene relacije među ε-neprekidnim funkcijama. Sljedeća definicija može se pronaći u [7].

Definicija 1.8.15 Neka je X topološki prostor i Y metrički prostor. Svaku ε-neprekidnu funkciju $H : X \times I \to Y$ nazivamo *ε-homotopijom*.
Kažemo da je funkcija $f : X \to Y$ *ε-homotopna* funkciji $g : X \to Y$ ako postoji ε-homotopija $H : X \times I \to Y$ takva da je

$$H(\cdot, 0) = f \text{ i } H(\cdot, 1) = g.$$

U tom slučaju, pišemo: $f \overset{\varepsilon}{\simeq} g$.

Propozicija 1.8.16 Neka je X topološki prostor i Y metrički prostor. Relacija ε-homotopije relacija je ekvivalencije na skupu svih ε-neprekidnih funkcija iz X u Y.

Dokaz.

Refleksivnost: Neka je $f : X \to Y$ ε-neprekidna funkcija. Tada je

$$H : X \times I \to Y,\ H(x, \cdot) = f(x)$$

ε-homotopija pa je $f \overset{\varepsilon}{\simeq} f$.

Simetričnost: Neka su $f, g : X \to Y$ ε-neprekidne funkcije takve da je $f \overset{\varepsilon}{\simeq} g$. Neka je $H : X \times I \to Y$ ε-homotopija takva da je

$$H(\cdot, 0) = f \ \text{ i } \ H(\cdot, 1) = g.$$

Tada je, po propoziciji 1.8.7., funkcija

$$H' = H(x, 1-t) : X \times I \to Y$$

ε-neprekidna funkcija takva da je

$$H'(\cdot, 0) = g \ \text{ i } \ H'(\cdot, 1) = f$$

pa je $g \overset{\varepsilon}{\simeq} f$.

Tranzitivnost: Neka su $f, g, h : X \to Y$ ε-neprekidne funkcije takve da je $f \overset{\varepsilon}{\simeq} g$ i $g \overset{\varepsilon}{\simeq} h$. Neka je $H' : X \times I \to Y$ ε-homotopija takva da je

$$H'(\cdot, 0) = f \ \text{ i } \ H'(\cdot, 1) = g$$

i neka je $H'' : X \times I \to Y$ ε-homotopija takva da je

$$H''(\cdot, 0) = g \ \text{ i } \ H''(\cdot, 1) = h.$$

Definirajmo funkciju $H : X \times I \to Y$ pravilom

$$H(x,t) = \begin{cases} H'(x, 2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H''(x, 2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Primjetimo da je funkcija H dobro definirana jer je

$$H\left(x, \frac{1}{2}\right) = H'(x, 1) = H''(x, 0) = g(x), \ \text{ za svaki } x \in X.$$

Po propoziciji 1.8.7., funkcije

$$H'(x,2t) : X \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \to Y,$$

$$H''(x,2t-1) : X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to Y$$

su ε-neprekidne. Dokažimo da je i funkcija $H : X \times I \to Y$ ε-neprekidna. Neka je $(x_0,t_0) \in X \times I$ proizvoljna točka. Promotrimo tri moguća slučaja:

(1) Pretpostavimo da je $t_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$. Tada da je $(x_0,t_0) \in X \times \left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$ pa zbog ε-neprekidnosti funkcije $H'(x,2t)$ postoji okolina $U \subseteq X \times \left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$ od (x_0,t_0) u $X \times I$ takva da je

$$H(U) = H'(U) \subseteq B\left(H'(x_0,t_0), \varepsilon\right) = B(H(x_0,t_0), \varepsilon)$$

pa je funkcija H ε-neprekidna u (x_0,t_0).

(2) Pretpostavimo da je $t_0 \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right]$. Tada da je $(x_0,t_0) \in X \times \left\langle \frac{1}{2}, 1\right]$ pa zbog ε-neprekidnosti funkcije $H''(x,2t-1)$ postoji okolina $U \subseteq X \times \left\langle \frac{1}{2}, 1\right]$ od (x_0,t_0) u $X \times I$ takva da je

$$H(U) = H''(U) \subseteq B\left(H''(x_0,t_0), \varepsilon\right) = B(H(x_0,t_0), \varepsilon)$$

pa je funkcija H ε-neprekidna u (x_0,t_0).

(3) Pretpostavimo da je $t_0 = \frac{1}{2}$. Tada je

$$\left(x_0, \frac{1}{2}\right) \in X \times \left[0, \frac{1}{2}\right], X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

pa znamo da

(a) zbog ε-neprekidnosti funkcije $H'(x,2t)$ postoje $\delta_1 \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ i okolina

$$U' = U'_{x_0} \times \left\langle \frac{1}{2} - \delta_1, \frac{1}{2}\right]$$

od $\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$ u $X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ takva da je

$$H\left(U'\right) = H'\left(U'\right) \subseteq B\left(H'\left(x_0, \frac{1}{2}\right), \varepsilon\right) = B\left(H\left(x_0, \frac{1}{2}\right), \varepsilon\right).$$

(b) zbog ε-neprekidnosti funkcije $H''(x,2t-1)$ postoje $\delta_2 \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ i okolina

$$U'' = U''_{x_0} \times \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta_2\right\rangle$$

od $\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$ u $X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ takva da je

$$H\left(U''\right) = H''\left(U''\right) \subseteq B\left(H''\left(x_0, \frac{1}{2}\right), \varepsilon\right) = B\left(H\left(x_0, \frac{1}{2}\right), \varepsilon\right).$$

Neka je

$$U_{x_0} = U'_{x_0} \cap U''_{x_0} \ \text{ i } \ \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Tada je U_{x_0} okolina od x_0 u X pa je

$$U = U_{x_0} \times \left\langle \frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta \right\rangle$$

okolina od $\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$ u $X \times I$ za koju iz jednakosti

$$H(U) = H\left(U_{x_0} \times \left\langle \frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}\right]\right) \cup H\left(U_{x_0} \times \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta\right\rangle\right)$$

uz (a) i (b) vrijedi

$$H(U) \subseteq H\left(U'\right) \cup H\left(U''\right) \subseteq B\left(H\left(x_0, \frac{1}{2}\right), \varepsilon\right)$$

pa je funkcija H ε-neprekidna u $\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$.

Dakle, $H : X \times I \to Y$ je ε-neprekidna funkcija za koju vrijedi

$$H(\cdot, 0) = f \ \text{ i } \ H(\cdot, 1) = h$$

pa je $f \overset{\varepsilon}{\simeq} h$. ■

Relacija ε-homotopije nije kongruencija, ali u slučaju kompaktnih metričkih prostora ε-homotopije ipak imaju dovoljno dobra svojstva. Sada ćemo još dokazati vezu između međusobne blizine funkcija i njihove međusobne ε-homotopnosti.

Propozicija 1.8.17 Neka je X topološki prostor i (Y, d) metrički prostor. Neka su $f, g : X \to Y$ ε_1-bliske funkcije takve da je f ε_2-neprekidna i g ε_3-neprekidna. Tada je $f \overset{2\varepsilon}{\simeq} g$, gdje je $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Dokaz. Definirajmo funkciju $H : X \times I \to Y$ pravilom

$$H(x,t) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ g(x), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Tvrdimo da je H 2ε-neprekidna. Neka je $(x_0, t_0) \in X \times I$ proizvoljna točka. Budući da je funkcija f ε_2-neprekidna u x_0, to postoji okolina U_1 od x_0 u X takva da je

$$f(U_1) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon_2).$$

Nadalje, budući da je funkcija g ε_3-neprekidna u x_0, to postoji okolina U_2 od x_0 u X takva da je

$$g(U_2) \subseteq B(g(x_0), \varepsilon_3).$$

Konačno, budući da je $d(f,g) < \varepsilon_1$, to je

$$d(f(x_0), g(x_0)) < \varepsilon_1.$$

Neka je $U = U_1 \cap U_2$. Tada je $U \times I$ okolina od (x_0, t_0) u $X \times I$ takva da za svaku točku $(x,t) \in U \times I$ vrijedi

$$d(H(x,t), H(x_0,t_0)) \leq d(H(x,t), H(x_0,t)) + d(H(x_0,t), H(x_0,t_0)) <$$

$$< \max\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\} + \max\{0, \varepsilon_1\} \leq 2\varepsilon.$$

Prethodne nejednakosti vrijede jer je

$$d(H(x,t), H(x_0,t)) = \begin{cases} d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon_2, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon_3, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

i

$$d(H(x_0,t), H(x_0,t_0)) = \begin{cases} d(f(x_0), f(x_0)) = 0, & 0 \leq t, t_0 < \frac{1}{2} \\ d(g(x_0), g(x_0)) = 0, & \frac{1}{2} \leq t, t_0 \leq 1 \\ d(f(x_0), g(x_0)) < \varepsilon_1, & \text{inače} \end{cases} .$$

Dakle, funkcija $H : X \times I \to Y$ je 2ε-neprekidna i vrijedi

$$H(\cdot, 0) = f \text{ i } H(\cdot, 1) = g$$

pa je $f \overset{2\varepsilon}{\simeq} g$. ■

1.9. KATEGORIJE BORSUKOVA I SANJURJOVA OBLIKA

Definicija 1.9.1 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi Hilbertove kocke Q. Funkciju $\Phi : \mathbb{N} \to C(Q,Q)$ nazivamo *fundamentalnim nizom* iz X u Y ako za svaku okolinu V od Y u Q postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\Phi(n)|_U \simeq \Phi(n+1)|_U \text{ u } V.$$

Napomena 1.9.2 Ako je Φ fundamentalni niz iz X u Y, funkciju $\Phi(n) : Q \to Q$ ćemo ubuduće označavati $\Phi_n : Q \to Q$ i pisati $\Phi = (\Phi_n) : X \to Y$.

Fundamentalne nizove možemo karakterizirati na sljedeći način.

Propozicija 1.9.3 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q. Funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to C(Q,Q)$ je fundamentalni niz iz X u Y ako i samo ako za svaku okolinu V od Y u Q postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za sve $n, n' \geq n_0$ vrijedi

$$\Phi_n|_U \simeq \Phi_{n'}|_U \text{ u } V.$$

Fundamentalne nizove komponiramo prirodno - po koordinatama. Takva kompozicija je asocijativna, a za proizvoljni zatvoreni podskup X od Q, ulogu identitete ima fundametalni niz $1_X = (1_n) : X \to X$, gdje je $1_n = 1_Q : Q \to Q$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. To znači da zatvoreni podskupovi od Q kao objekti i fundamentalni nizovi kao morfizmi među njima tvore kategoriju koju označujemo C_f.
Među fundamentalnim nizovima iz X u Y uvodi se sljedeća relacija ekvivalencije $\sim$.

Definicija 1.9.4 Reći ćemo da je fundamentalni niz $\Phi = (\Phi_n) : X \to Y$ *ekvivalentan* fundamentalnom nizu $\Phi' = (\Phi_n) : X \to Y$ ako za svaku okolinu V od Y u Q postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\Phi_n|_U \simeq \Phi'_n|_U \text{ u } V.$$

U tom slučaju, pišemo: $\Phi \sim \Phi'$.

Propozicija 1.9.5 Relacija $\sim$ je ekvivalencija na skupu svih fundamentalnih nizova iz X u Y.

Klasu ekvivalencije fundamentalnog niza $\Phi = (\Phi_n) : X \to Y$ s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$ označavamo $[\Phi]$, odnosno, $[(\Phi_n)]$. Skup svih klasa ekvivalencije fundamentalnih nizova iz X u Y označujemo $Sh_f(X,Y)$.

Promotrimo kvocijentnu kategoriju $C_f|_\sim$. Među klasama ekvivalencije fundamentalnih nizova kompozicija se definira na prirodan način, stavljajući $[\Psi] \circ [\Phi] := [\Psi \circ \Phi]$ kad god kompozicija $\Psi \circ \Phi$ ima smisla. Lako se pokaže da je komponiranje klasa ekvivalencije fundamentalnih nizova dobro definirano i asocijativno, pri čemu $[1_X]$ djeluje neutralno u kompoziciji. To znači da zatvoreni podskupovi od Q kao objekti i klase ekvivalencije fundamentalnih nizova kao morfizmi među njima tvore kategoriju koju označujemo Sh_f. Dokaz sljedećega teorema može se pronaći u [13].

Teorem 1.9.6 Neka je $\Phi = (\Phi_n) : X \to Y$ fundamentalni niz i neka su $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X} = (X_n, p_{nn+1})$, $\mathbf{q} : X \to \mathbf{Y} = (Y_n, q_{nn+1})$ inkluzijske *HANR*-ekspanzije podskupova X i Y od Q redom. Tada postoje strogo rastuća funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i morfizam $(f, f_n) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *inv-HANR* takvi da je

$$f_n = \Phi_{\varphi(n)}|_{X_{f(n)}}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\omega : C_f(X,Y) \to inv\text{-}HANR(X,Y)$ funkcija koja svakom fundamentalnom nizu $\Phi : X \to Y$ pridružuje morfizam $\omega(\Phi) := (f, f_n) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u smislu teorema 1.9.6 i neka $Sh|_Q$ označuje restrikciju kategorije oblika na zatvorene podskupove Hilbertove kocke Q. Pridruživanje koje klasi $[\Phi]$ fundamentalnog niza $\Phi : X \to Y$ pridružuje morfizam oblika $F = \langle[\omega(\Phi)]\rangle : X \to Y$ dobro je definirano i određuje izomorfizam između kategorija $Sh|_Q$ i Sh_f koji objekte drži fiksnima.

Uvedimo sada pojam aproksimativnog niza čije će se komponentne funkcije pokazati jako bitnom vezom između prekidnih funkcija koje tvore približavajuće nizove i neprekidnih funkcija koje tvore fundamentalne nizove.

Definicija 1.9.7 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q. Funkciju $\alpha : \mathbb{N} \to C(X,Q)$ nazivamo *aproksimativnim nizom* iz X u Y ako za svaku okolinu V od Y u Q postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\alpha(n) \simeq \alpha(n+1) \text{ u } V.$$

Napomena 1.9.8 Ako je α aproksimativni niz, funkciju $\alpha(n) : X \to Q$ ćemo ubuduće označavati $\alpha_n : X \to Q$ i pisati $\alpha = (\alpha_n) : X \to Y$.

Aproksimativne nizove možemo karakterizirati na sljedeći način.

Propozicija 1.9.9 Funkcija $\alpha : \mathbb{N} \to C(X,Q)$ je aproksimativni niz iz X u Y ako i samo ako za svaku okolinu V od Y u Q postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, n' \geq n_0$ vrijedi

$$\alpha_n \simeq \alpha_{n'} \text{ u } V.$$

Definicija 1.9.10 Neka su X i Y kompaktni metrički prostori. Za aproksimativni niz $\alpha = (\alpha_n) : X \to Y$ kažemo da je *ekvivalentan* aproksimativnom nizu $\beta = (\beta_n) : X \to Y$ ako za svaku okolinu V od Y u Q postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\alpha_n^m \simeq \beta_n^m \text{ u } V.$$

U tom slučaju, pišemo: $\alpha \sim \beta$.

Propozicija 1.9.11 Relacija $\sim$ homotopije aproksimativnih nizova relacija je ekvivalencije na skupu svih aproksimativnih nizova iz X u Y.

Klasu ekvivalencije aproksimativnog niza $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ označavamo $[\alpha]$, odnosno, $[(\alpha_n)]$. Skup svih klasa ekvivalencije aproksimativnih nizova iz X u Y označujemo $Sh_a(X,Y)$. Neka su $\alpha : X \to Y$ i $\beta : Y \to Z$ aproksimativni nizovi. Budući da je $\alpha_n : X \to Q$ i $\beta_n : Y \to Q$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, bilo kakva direktna kompozicija komponenti od α i β nije dobro definirana. Stoga se u kompoziciji $[\beta] \circ [\alpha]$ koristimo klasom fundamentalnih nizova koji su proširenja od β.

Propozicija 1.9.12 Neka je $\Phi = (\Phi_n) : X \to Y$ fundamentalni niz. Tada je $\Phi|_X := (\Phi_n|_X)$ aproksimativni niz iz X u Y.

Svakom aproksimativnom nizu može se pridružiti fundamentalni niz jedinstven do na relaciju ekvivalencije $\sim$ fundamentalnih nizova. O tome govore sljedeći teorem i propozicija [10].

Teorem 1.9.13 Neka je $\alpha : X \to Y$ aproksimativni niz. Tada postoji fundamentalni niz $\Phi : X \to Y$ takav je $\Phi|_X \sim \alpha$.

Propozicija 1.9.14 Neka su $\Phi, \Phi' : X \to Y$ fundamentalni nizovi. Tada je $\Phi \sim \Phi'$ ako i samo ako je $\Phi|_X \sim \Phi'|_X$.

Sljedeće propozicije omogućuju dobro definiranje kompozicije klase aproksimativnih nizova s klasom fundamentalnih nizova.

Propozicija 1.9.15 Kompozit (pri komponiranju "po koordinatama") aproksimativnog niza $\alpha = (\alpha_n) : X \to Y$ i fundamentalnog niza $\Phi = (\Phi_n) : Y \to Z$ je aproksimativni niz $\Phi \hat{\circ} \alpha := (\Phi_n \circ \alpha_n) : X \to Z$.

Propozicija 1.9.16 Neka su $\alpha, \alpha' : X \to Y$ aproksimativni nizovi takvi da je $\alpha \sim \alpha'$ i neka su $\Phi, \Phi' : Y \to Z$ fundamentalni nizovi takvi da je $\Phi \sim \Phi'$. Tada je $\Phi \hat{\circ} \alpha \sim \Phi' \hat{\circ} \alpha'$.

Sada se može definirati kompozicija klase $[\alpha] : X \to Y$ aproksimativnih nizova i klase $[\Phi] : Y \to Z$ fundamentalnih nizova pravilom $[\Phi] \hat{\circ} [\alpha] := [\Phi \hat{\circ} \alpha]$. Konačno, može se definirati i kompozicija klasa ekvivalencije aproksimativnih nizova. Neka su $[\alpha]$ i $[\beta]$ klase aproksimativnih nizova $\alpha : X \to Y$ i $\beta : Y \to Z$. Tada postoji jedinstvena klasa $[\Psi] : Y \to Z$ fundamentalnih nizova takva da je $[\Psi|_Y] = [\beta]$. Kompoziciju definiramo pravilom

$$[\beta] \circ [\alpha] = [\Psi|_Y] \circ [\alpha] := [\Psi \hat{\circ} \alpha]$$

Kompozicija klasa aproksimativnih nizova dobro je definirana i asocijativna, a za proizvoljni zatvoreni podskup X od Q, klasa $[1_X]$ aproksimativnog niza $1_X = (1_n) : X \to X$, gdje je $1_n = 1_X : X \to X$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, djeluje neutralno u kompoziciji klasa aproksimativnih nizova pa ima ulogu identitete. To znači da zatvoreni podskupovi od Q kao objekti i klase ekvivalencije aproksimativnih nizova kao morfizmi među njima tvore kategoriju koju označujemo Sh_a. Pridruživanje koje klasi $[\alpha]$ aproksimativnog niza $\alpha : X \to Y$ pridružuje klasu $[\Phi]$ fundamentalnog niza $\Phi : X \to Y$ takvu da je $[\Phi|_X] = [\alpha]$ je dobro definirano i određuje izomorfizam između kategorija Sh_f i Sh_a koji objekte drži fiksnima.

Preostaje nam još opisati Sanjurjovu kategoriju unutarnjega oblika. Pridjev "unutarnji" sugerira da predstavnike morfizama oblika tvore funkcije koje imaju i domenu i kodomenu unutar promatranoga prostora, odnosno, ne izlaze u okoline prostora (terme ekspanzije).

Definicija 1.9.17 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q. Funkciju $a : \mathbb{N} \to Y^X$ nazivamo *približavajućim nizom* iz X u Y ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$a(n) \overset{\varepsilon}{\simeq} a(n+1).$$

Napomena 1.9.18 Ako je a približavajući niz, funkciju $a(n) : X \to Y$ označujemo $a_n : X \to Y$ i pišemo $a = (a_n) : X \to Y$.

Približavajuće nizove možemo karakterizirati na sljedeći način.

Propozicija 1.9.19 Funkcija $a : \mathbb{N} \to Y^X$ je približavajući niz iz X u Y ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, n' \geq n_0$ vrijedi

$$a_n \overset{\varepsilon}{\simeq} a_{n'}.$$

Na skupu svih približavajućih nizova iz X u Y definira se sljedeća razredbena relacija.

Definicija 1.9.20 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q. Reći ćemo da je približavajući niz $a = (a_n) : X \to Y$ *ekvivalentan* približavajućem nizu $b = (b_n) : X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$a_n \overset{\varepsilon}{\simeq} b_n.$$

U tom slučaju, pišemo: $a \sim b$.

Propozicija 1.9.21 Relacija $\sim$ homotopije približavajućih nizova je relacija ekvivalencije na skupu svih približavajućih nizova iz X u Y.

Klasu homotopije približavajućeg niza $a = (a_n) : X \to Y$ označujemo $[a]$, odnosno, $[(a_n)]$. Skup svih klasa ekvivalencije približavajućih nizova iz X u Y označujemo $InSh(X,Y)$.
Neka su $a = (a_n) : X \to Y$ i $b = (b_n) : Y \to Z$ približavajući nizovi. Primjetimo da se kompozicija ne možemo definirati "po koordinatama". Naime, zbog loših svojstava kompozicije ε-neprekidnih funkcija, $(b_n \circ a_n)$, općenito, nije približavajući niz iz X u Z. Kompoziciju približavajućih nizova $a = \left(a_k^m\right) : X \to Y$ i $b = (b_n^m) : Y \to Z$ definiramo na sljedeći način:
Neka je (ε_n) silazni niz pozitivnih realnih brojeva takav da je $\lim \varepsilon_n = 0$ i da, za svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ i za svaki $n \geq n_0$, vrijedi

$$b_{n_0} \overset{\frac{\varepsilon_{n_0}}{2}}{\simeq} b_n.$$

Neka je (δ_n) silazni niz pozitivnih realnih brojeva takav da je $\lim \delta_n = 0$ i da, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $y, y' \in Y$ takve da je $d(y, y') < \delta_n$, vrijedi

$$d\left(b_n(y), b_n\left(y'\right)\right) < \varepsilon_n.$$

Neka je još (k_n) strogo rastući niz indeksa takav da je, za svaki $k \geq k_n$,

$$a_{k_n} \overset{\frac{\delta_n}{2}}{\simeq} a_k.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$c_n = b_n \circ a_{k_n}.$$

Tada je $c = (c_n)$, $c_n = b_n \circ a_{k_n}$, približavajući niz iz X u Z. Lako se pokaže da klasa kompozita približavajućih nizova ne ovisi ni o izboru predstavnika klasa $[a]$ i $[b]$ ni o izboru nizova (ε_n),(δ_n) i (k_n).

Kompozicija klasa $[a] = [(a_k)] : X \to Y$ i $[b] = [(b_n)] : Y \to Z$ definira se s pomoću predstavnika, to jest, $[b] \circ [a] := [b \circ a] = [(b_n \circ a_{k_n})]$. Komponiranje klasa približavajućih nizova je asocijativno, a za proizvoljni zatvoreni podskup X od Q, klasa približavajućeg niza $1_X = (1_n) : X \to X$, gdje je $1_n = 1_X : X \to X$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, djeluje neutralno u kompoziciji klasa približavajućih nizova. To znači da zatvoreni podskupovi od Q kao objekti i klase ekvivalencije približavajućih nizova kao morfizmi među njima tvore kategoriju koju označujemo *InSh*.
Vezu među ε-neprekidnim i neprekidnim funkcijama, a onda i među približavajućim i aproksimativim nizovima, omogućuje sljedeća lema [5].

Lema 1.9.22 (Ho) Neka je X parakompaktan topološki prostor. Tada za svaku ε-neprekidnu funkciju $f : X \to Q$ postoji njoj 2ε-bliska neprekidna aproksimacija $f' : X \to Q$.

Koristeći navedenu lemu, svakom približavajućem nizu može se pridružiti aproksimativni niz koji mu je po koordinatama "sve bliži" i u tom smislu ga neprekidno aproksimira.

Definicija 1.9.23 Kažemo da je aproksimativni niz $\alpha = (\alpha_n) : X \to Y$ *neprekidna aproksimacija* približavajućeg niza $a = (a_n) : X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$d(a_n, \alpha_n) < \varepsilon.$$

Više o vezi približavajućih nizova i njihovih neprekidnih aproksimacija govori sljedeći teorem.

Teorem 1.9.24 Neka je $a = (a_n) : X \to Y$ približavajući niz. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) Postoji aproksimativni niz $\alpha = (\alpha_n) : X \to Y$ koji je neprekidna aproksimacija od a.

(ii) Za svaka dva aproksimativna niza $\alpha, \alpha' : X \to Y$ koji su neprekidne aproksimacije približavajućega niza a vrijedi $\alpha \sim \alpha'$.

Pridruživanje koje klasi $[a]$ približavajućega niza $a : X \to Y$ pridružuje klasu $[\alpha]$ neke njegove neprekidne aproksimacije $\alpha : X \to Y$ dobro je definirano i određuje izomorfizam između kategorija Sh_a i *InSh* koji objekte drži fiksnima. Iz svega navedenoga zaključujemo da vrijedi

$$Sh|_Q \cong Sh_f \cong Sh_a \cong InSh$$

pa je kategorija *InSh* reinterpretacija kategorije oblika na skupu zatvorenih podskupova Hilbertove kocke Q. Stoga kategoriju *InSh* nazivamo *kategorijom unutarnjega oblika*, a postupak njezine izgradnje nazivamo *unutarnjim pristupom teoriji oblika*.

2. KATEGORIJE KONAČNOGA GRUBOGA OBLIKA

2.1. KATEGORIJE $inv^{\circledast}$-C I $pro^{\circledast}$-C

U ovom poglavlju ćemo različitim pristupima konstruirati odgovarajuće kategorije konačnoga gruboga oblika. Prvo ćemo vanjskim pristupom definirati klasifikaciju po konačnom grubom obliku na apstraktnom nivou, to jest, za svaki par (C,D) koji se sastoji od kategorije C i njezine guste i pune potkategorije D. Od posebnoga značaja će nam biti parovi $(HTop, HANR)$ i $(HTop, HPol)$ koji će odrediti kategoriju topološkoga konačnoga gruboga oblika. Unutarnjim pristupom ćemo definirati kategoriju unutarnjega konačnoga gruboga oblika čiji objekti će biti svi zatvoreni podskupovi Hilbertove kocke Q.

Definicija 2.1.1 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustavi u kategoriji C i neka je $f : M \to \Lambda$ funkcija. Za uređeni par $\left(f, f_\mu^m\right)$ koji se sastoji od funkcije f i, za svaki $\mu \in M$, niza morfizama $f_\mu^m : X_{f(\mu)} \to Y_\mu$, $m \in \mathbb{N}$, u C kažemo da je *konačni $*$-morfizam između inverznih sustava* $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$, u oznaci $\circledast$-morfizam, ako vrijedi:

(1) za svaki par $\mu, \mu' \in M$, $\mu \le \mu'$, postoje $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \ge f(\mu), f(\mu')$, i $m_{\mu\mu'} \in \mathbb{N}$ takvi da, za svaki $m \ge m_{\mu\mu'}$, vrijedi

$$f_\mu^m p_{f(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'}^m p_{f(\mu')\lambda}$$

(2) za svaki $\mu \in M$ je

$$\mathrm{card}\left(\left\{f_\mu^m : m \in \mathbb{N}\right\}\right) < \aleph_0.$$

Funkciju $f : M \to \Lambda$ nazivamo *indeksnom funkcijom.* Ubuduće ćemo $\circledast$-morfizam $\left(f, f_\mu^m\right)$ između inverznih sustava $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ označavati $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Prethodnu jednakost prikazuje komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
& X_\lambda \arrow[dl, "p_{f(\mu)\lambda}"'] \arrow[dr, "p_{f(\mu')\lambda}"] & \\
X_{f(\mu)} \arrow[d, "f^m_\mu"'] & & X_{f(\mu')} \arrow[d, "f^m_{\mu'}"] \\
Y_\mu & & Y_{\mu'} \arrow[ll, "q_{\mu\mu'}"]
\end{tikzcd}$$

Pridruživanje $(\mu,\mu') \mapsto \lambda$ u smislu definicije 2.1.1. određuje funkciju

$$\alpha : M_2 \to \Lambda,\ \alpha\left(\mu,\mu'\right) = \lambda$$

koju nazivamo *pomakom* $\circledast$-morfizma $\left(f, f^n_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, a pridruživanje $(\mu,\mu') \mapsto m_{\mu\mu'}$ u smislu definicije 2.1.1. određuje funkciju

$$\beta : M_2 \to \mathbb{N},\ \beta\left(\mu,\mu'\right) = m_{\mu\mu'}$$

koju nazivamo *komutativnom razinom* $\circledast$-morfizma $\left(f, f^m_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$.

Definicija 2.1.2 Ako za $\circledast$-morfizam $\left(f, f^m_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, za svaki $\mu \in M$, vrijedi $f^m_\mu = f_\mu$, za svaki $m \in \mathbb{N}$, onda za $\left(f, f^m_\mu\right)$ kažemo da je *induciran* morfizmom $\left(f, f_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$.

U slučaju rudimentarnoga sustava (X) i inverznoga sustava $\mathbf{Y}$, $\circledast$-morfizam između (X) i $\mathbf{Y}$ u potpunosti je određen familijom morfizama $\left(f^m_\mu : X \to Y_\mu : \mu \in M, m \in \mathbb{N}\right)$ pa ga označujemo $\left(f^m_\mu\right) : (X) \to \mathbf{Y}$.

Napomena 2.1.3 Za niz $\left(f, f^1_\mu\right), \left(f, f^2_\mu\right), \ldots, \left(f, f^k_\mu\right), \ldots$ morfizama između inverznih sustava, općenito, $\left(f, f^m_\mu\right)$ ne tvori $\circledast$-morfizam (osim ako je niz pomaka α_k $\circledast$-morfizama $\left(f, f^k_\mu\right)$ omeđen odozgo u Λ, za svaki usporedivi par $\mu, \mu' \in M_2$). Slično, ako je $\left(f, f^m_\mu\right)$ $\circledast$-morfizam, onda za fiksni $m_0 \in \mathbb{N}$, općenito, $\left(f, f^{m_0}_\mu\right)$ nije morfizam između inverznih sustava (osim ako je komutativna razina β omeđena funkcija čija je gornja međa m_0).

Definicija 2.1.4 Ako je indeksna funkcija $\circledast$-morfizma $\left(f, f^m_\mu\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ uzlazna i, za svaki par $(\mu,\mu') \in M_2$, vrijedi $\alpha(\mu,\mu') = f(\mu')$, onda za $\circledast$-morfizam $\left(f, f^m_\mu\right)$ kažemo da je *jednostavan*.
Dodatno, ako inverzni sustavi $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ imaju isti indeksni skup Λ, a indeksna funkcija jednostavnog $\circledast$-morfizma je identiteta 1_Λ, onda takav $\circledast$-morfizam nazivamo *razinskim*.

Sljedeća propozicija nam omogućuje definiranje kompozicije $\circledast$-morfizama koja će imati svojstva kategorijskoga komponiranja.

Propozicija 2.1.5 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ i $\mathbf{Z} = (Z_\nu, r_{\nu\nu'}, N)$ inverzni sustavi u kategoriji C i neka su $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $(g, f_\nu^m) : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ $\circledast$-morfizmi. Tada je uređeni par (h, h_ν^m), gdje je

$$h = fg \text{ i } h_\nu^m = g_\nu^m f_{g(\nu)}^m, \text{ za sve } m \in \mathbb{N}, \nu \in N,$$

$\circledast$-morfizam između inverznih sustava $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Z}$.

Dokaz. Za svaki $\nu \in N$ je

$$\operatorname{card}\left(\left\{g_\nu^m \circ f_{g(\nu)}^m : m \in \mathbb{N}\right\}\right) \leq \operatorname{card}\left(\{g_\nu^m : m \in \mathbb{N}\}\right) \cdot \operatorname{card}\left(\left\{f_{g(\nu)}^m : m \in \mathbb{N}\right\}\right) < \aleph_0.$$

Uz to, tvrdnja slijedi iz dijagrama, usmjerenosti skupa Λ i definicije inverznog sustava. ■

Definicija 2.1.6 *Kompozicijom* $\circledast$-morfizama $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $(g, f_\nu^m) : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ nazivamo $\circledast$-morfizam

$$(g, g_\nu^m) \circ \left(f, f_\mu^m\right) := \left(f \circ g, g_\nu^m \circ f_{g(\nu)}^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}.$$

Propozicija 2.1.7 Komponiranje $\circledast$-morfizama između inverznih sustava asocijativna je operacija. Nadalje, za svaki inverzni sustav $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ $\circledast$-morfizam

$$\left(1_\Lambda, 1_{X_\lambda}^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{X},\ 1_{X_\lambda}^m = 1_{X_\lambda}, \text{ za sve } \lambda \in \Lambda, m \in \mathbb{N},$$

djeluje neutralno u kompoziciji s lijeve i s desne strane.

Dokaz. Asocijativnost komponiranja $\circledast$-morfizama slijedi iz asocijativnosti funkcijskog komponiranja jer, za svaki $\nu \in N$ i za svaki $m \in \mathbb{N}$, vrijedi:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \text{ i } \left(h_\nu^m \circ g_{h(\nu)}^m\right) \circ f_{gh(\nu)}^m = h_\nu^m \circ \left(g_{h(\nu)}^m \circ f_{gh(\nu)}^m\right).$$

Nadalje, očito je

$$\left(f, f_\mu^m\right) \circ \left(1_\Lambda, 1_{X_\lambda}^m\right) = \left(f, f_\mu^m\right), \text{ za svaki } \left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

$$\left(1_\Lambda, 1_{X_\lambda}^m\right) \circ \left(g, g_\lambda^m\right) \circ = \left(g, g_\lambda^m\right), \text{ za svaki } \left(g, g_\lambda^m\right) : \mathbf{Z} \to \mathbf{X}.$$

■

Oznakom $inv^{\circledast}$-C označujemo kategoriju kojoj klasu objekata $Ob\,(inv^{\circledast}\text{-}C)$ tvore svi inverzni sustavi u kategoriji C, kojoj skup morfizama $inv^{\circledast}$-$C\,(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, između bilo koja dva objekta $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$, tvore svi $\circledast$-morfizmi između inverznih sustava $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ te u kojoj je kategorijsko komponiranje morfizama dano definicijom 2.1.6. Sada ćemo uvesti razredbenu relaciju među $\circledast$-morfizmima.

Definicija 2.1.8 Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustavi u kategoriji C. Reći ćemo da je $\circledast$-morfizam $\left(f, f_\mu^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *ekvivalentan* $\circledast$-morfizmu $\left(f', f_\mu^{\prime m}\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, u oznaci $\left(f, f_\mu^m\right) \sim \left(f', f_\mu^{\prime m}\right)$, ako za svaki $\mu \in M$ postoje $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu), f'(\mu)$, i $m_\mu \in M$ takvi da, za svaki $m \geq m_\mu$, vrijedi

$$f_\mu^m p_{f(\mu)\lambda} = f_\mu^{\prime m} p_{f'(\mu)\lambda}.$$

Prethodnu jednakost prikazuje komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
& X_\lambda \arrow[dl, "p_{f(\mu)\lambda}"'] \arrow[dr, "p_{f'(\mu)\lambda}"] & \\
X_{f(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu^m"'] & & X_{f'(\mu)} \arrow[dl, "f_\mu^{\prime m}"] \\
& Y_\mu &
\end{tikzcd}$$

Propozicija 2.1.9 Relacija $\sim$ ekvivalencije $\circledast$-morfizama između inverznih sustava kongruencija je na kategoriji *inv*$^{\circledast}$-*C*.

Dokaz. Zbog refleksivnosti i simetričnosti relacije jednakosti vrijedi $\left(f, f_\mu^m\right) \sim \left(f, f_\mu^m\right)$ i

$$\left(f, f_\mu^m\right) \sim \left(f', f_\mu^{\prime m}\right) \text{ povlači } \left(f', f_\mu^{\prime m}\right) \sim \left(f, f_\mu^m\right).$$

Tranzitivnost slijedi iz gornjega dijagrama i usmjerenosti skupa Λ za $\lambda'' \geq \lambda, \lambda'$, gdje je

$$\lambda \geq f(\mu), f'(\mu) \text{ i } \lambda' \geq f'(\mu), f''(\mu).$$

$\blacksquare$

Propozicija 2.1.10 Neka je (X) rudimentarni inverzni sustav i $\mathbf{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ inverzni sustav u kategoriji C. Tada, za svaki par $\circledast$-morfizama $\left(f_\mu^m\right), \left(f_\mu^{\prime m}\right) : (X) \to \mathbf{Y}$, vrijedi

$$\left(f_\mu^m\right) \sim \left(f_\mu^{\prime m}\right) \text{ ako i samo ako je } f_\mu^m = f_\mu^{\prime m}, \text{ za skoro sve } m \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz činjenice da postoji jedna jedina funkcija iz M u jednotočkovni indeksni skup rudimentarnoga sustava (X). $\blacksquare$

Kvocijentnu kategoriju *inv*$^{\circledast}$-$C|_\sim$ označavat ćemo *pro*$^{\circledast}$-*C*, a njezine morfizme $\left[\left(f, f_\mu^m\right)\right]$ (klase ekvivalencije $\circledast$-morfizama među inverznim sustavima) označavat ćemo $\mathbf{f}^{\circledast}$.

Propozicija 2.1.11 Pridruživanje koje inverzne sustave u kategoriji C drži fiksnima, a svakom morfizmu $\mathbf{f}=\left[\left(f,f_{\mu}\right)\right]:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ u *pro-C* pridružuje morfizam $\mathbf{f}^{\circledast}=\left[\left(f,f_{\mu}^{m}\right)\right]:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ u *pro*$^{\circledast}$-*C* predstavljen $\circledast$-morfizmom koji je induciran morfizmom $\left(f,f_{\mu}\right)$ dobro je definirano i određuje vjeran funktor $\mathbf{J}_{C}^{\circledast}$: *pro-C* $\to$ *pro*$^{\circledast}$-*C* koji, općenito, nije pun.
Analogno, pridruživanje koje inverzne sustave u kategoriji C drži fiksnima, a svakom morfizmu $\mathbf{f}^{\circledast}=\left[\left(f,f_{\mu}^{m}\right)\right]:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ u *pro*$^{\circledast}$-*C* pridružuje morfizam $\mathbf{f}^{*}=\left[\left(f,f_{\mu}^{m}\right)\right]:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ u *pro**-*C* koji je predstavljen $*$-morfizmom (odnosno, $\circledast$-morfizmom) $\left(f,f_{\mu}^{m}\right)$ dobro je definirano i određuje vjeran funktor $\mathbf{J}_{C}^{*}$: *pro*$^{\circledast}$-*C* $\to$ *pro**-*C* koji, općenito, nije pun.

Dokaz. Lako se provjeri da su $\mathbf{J}_{C}^{\circledast}$ i $\mathbf{J}_{C}^{*}$ zaista funktori. Dokažimo da je $\mathbf{J}_{C}^{\circledast}$ vjeran funktor, to jest, da je za svaki par inverznih sustava $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ u C funkcija $\mathbf{J}_{X,Y}^{\circledast}$: *pro-C* $(\mathbf{X},\mathbf{Y})\to$ *pro*$^{\circledast}$-*C* $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ injekcija. Neka su $\mathbf{f},\mathbf{f}':\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ takvi da je

$$\mathbf{J}_{C}^{\circledast}(\mathbf{f})=\mathbf{f}^{\circledast}=\mathbf{J}_{C}^{\circledast}(\mathbf{f}')$$

i neka su $\left(f,f_{\mu}\right),\left(f',f_{\mu}'\right):\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ morfizmi u *inv-C* takvi da je

$$\mathbf{f}=\left[\left(f,f_{\mu}\right)\right]\ \text{ i }\ \mathbf{f}'=\left[\left(f',f_{\mu}'\right)\right].$$

Po pretpostavci je

$$\left[\left(f,f_{\mu}^{m}\right)\right]=\left[\left(f',f_{\mu}'^{m}\right)\right],$$

gdje su $\left(f,f_{\mu}^{m}\right),\left(f',f_{\mu}'^{m}\right):\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ $\circledast$-morfizmi u *inv*$^{\circledast}$-*C* inducirani morfizmima $\left(f,f_{\mu}\right)$ i $\left(f',f_{\mu}'\right)$ redom. To znači da za svaki $\mu\in M$ postoje $\lambda\in\Lambda$, $\lambda\geq f(\mu),f'(\mu)$, i $m_n\in\mathbb{N}$ takvi da za svaki $m\geq m_n$ vrijedi

$$f_{\mu}^{m}p_{f(\mu)\lambda}=f_{\mu}'^{m}p_{f'(\mu)\lambda},$$

$$f_{\mu}^{m}=f_{\mu}\ \text{ i }f_{\mu}'^{m}=f_{\mu}'.$$

Prethodne relacije znače da za svaki $\mu\in M$ postoji $\lambda\in\Lambda$, $\lambda\geq f(\mu),f'(\mu)$, takav da je

$$f_{\mu}p_{f(\mu)\lambda}=f_{\mu}'p_{f'(\mu)\lambda}$$

pa je $\left(f,f_{\mu}\right)\sim\left(f',f_{\mu}'\right)$, to jest, $\mathbf{f}=\mathbf{f}'$. Dakle, $\mathbf{J}_{C}^{\circledast}$ je vjeran funktor. Vjernost funktora $\mathbf{J}_{C}^{*}$ se dokazuje analogno. Primjerima ćemo pokazati da funktori $\mathbf{J}_{C}^{\circledast}$ i $\mathbf{J}_{C}^{*}$, općenito, nisu puni. Neka su $X,Y\in Ob(C)$ i $g,g':X\to Y$ morfizmi takvi da je $g\neq g'$. Morfizam

$$(f^{m}):(X)\to(Y)$$

$$f^{2k} = g,\ f^{2k-1} = g',\ \text{ za svaki } k \in \mathbb{N},$$

u *inv*$^{\circledast}$-*C*, između rudimentarnih sustava (X) i (Y), nije induciran ni sa jednim morfizmom iz *inv*-*C* pa

$$[(f^m)] \notin \mathbf{J}^{\circledast}_{X,Y}\,(pro - C\,((X)\,,(Y)))\,,$$

odnosno, $\mathbf{J}^{\circledast}_C$, općenito, nije pun. Slično dokazujemo da $\mathbf{J}^{*}_C$, općenito, nije pun. Neka su $X, Y \in Ob\,(C)$ i (g_m) niz morfizama $g_m : X \to Y$, $m \in \mathbb{N}$, takav da je $g_m \neq g_{m'}$, čim je $m \neq m'$. Morfizam

$$(f^m) : (X) \to (Y)$$

$$f^m = g_m,\ \text{ za svaki } m \in \mathbb{N},$$

u *inv**-*C*, između rudimentarnih sustava (X) i (Y), nije induciran ni sa jednim morfizmom iz *inv*$^{\circledast}$-*C* pa

$$[(f^m)] \notin \mathbf{J}^{*}_{X,Y}\left(pro^{\circledast} - C\,((X)\,,(Y))\right),$$

odnosno, $\mathbf{J}^{*}_C$, općenito, nije pun. ■

Za morfizam $\mathbf{f}^{\circledast} = \mathbf{J}^{\circledast}_C\,(\mathbf{f})$, odnosno, $\mathbf{f}^{*} = \mathbf{J}^{*}_C\,(\mathbf{f}^{\circledast})$, kažemo da je *induciran* morfizmom $\mathbf{f}$, odnosno $\mathbf{f}^{\circledast}$. Po propoziciji 2.1.11. kategoriju *pro*-*C* smijemo smatrati pravom potkategorijom kategorije *pro*$^{\circledast}$-*C*, dok je *pro*$^{\circledast}$-*C* prava potkategorija kategorije *pro**-*C*.

Teorem 2.1.12 (Moritina lema za *pro*$^{\circledast}$-*C*) Neka su $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\mathbf{Y} = (Y_\lambda, q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ inverzni sustavi u kategoriji C s istim indeksnim skupom Λ i neka je $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ morfizam u *pro*$^{\circledast}$-*C* koji dopušta razinskoga predstavnika $\left(1_\Lambda, f^m_\lambda\right)$. Tada je $\mathbf{f}^{\circledast}$ izomorfizam ako i samo ako za predstavnika $\left(1_\Lambda, f^m_\lambda\right)$ vrijedi da za svaki $\lambda \in \Lambda$ postoje $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda' \geq \lambda$, $m_\lambda \in \mathbb{N}$ i, za svaki $m \geq m_\lambda$, morfizam $h^m_\lambda : Y_{\lambda'} \to X_\lambda$ u C tako da vrijedi:

(*i*) $\mathrm{card}\left(\left\{\mathrm{h}^{\mathrm{m}}_\lambda : \mathrm{m} \geq \mathrm{m}_\lambda\right\}\right) < \aleph_0$

(*ii*) $f^m_\lambda \circ h^m_\lambda = q_{\lambda\lambda'}$ i $h^m_\lambda \circ f^m_{\lambda'} = p_{\lambda\lambda'}$, to jest, dijagram

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[d, "f^m_\lambda"'] & X_{\lambda'} \arrow[l, "p_{\lambda\lambda'}"'] \arrow[d, "f^m_{\lambda'}"] \\
Y_\lambda & Y_{\lambda'} \arrow[l, "q_{\lambda\lambda'}"] \arrow[ul, "h^m_\lambda"']
\end{tikzcd}$$

komutira u C.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbf{f}^{\circledast} = \left[\left(1_{\Lambda}, f_{\lambda}^{m}\right)\right]$ izomorfizam u $pro^{\circledast}$-C i neka je $\beta : \Lambda_2 \to \mathbb{N}$ komutativna razina za predstavnika $\left(1_{\Lambda}, f_{\lambda}^{m}\right)$. Tada postoji $\circledast$-morfizam $\left(g, g_{\lambda}^{m}\right) : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ takav da je

$$\left(1_{\Lambda}, f_{\lambda}^{m}\right) \circ \left(g, g_{\lambda}^{m}\right) \sim \left(1_{\lambda}, 1_{Y_{\lambda}}^{m}\right)$$
$$\left(g, g_{\lambda}^{m}\right) \circ \left(1_{\Lambda}, f_{\lambda}^{m}\right) \sim \left(1_{\lambda}, 1_{X_{\lambda}}^{m}\right)$$

Neka su σ i η, odnosno, σ' i η' pomak i komutativna razina, redom, za prethodne dvije ekvivalencije, redom. Za svaki $\lambda \in \Lambda$ neka je $\lambda' = \max\left\{\sigma(\lambda), \sigma'(\lambda)\right\}$ i neka je

$$m_{\lambda} = \max\left\{\eta(\lambda), \eta'(\lambda), \beta\left(g(\lambda), \lambda'\right)\right\}.$$

Za svaki $\lambda \in \Lambda$ i za svaki $m \geq m_{\lambda}$ stavimo

$$h_{\lambda}^{m} = g_{\lambda}^{m} \circ q_{g(\lambda)\lambda'}.$$

Primjetimo da za svaki $\lambda \in \Lambda$ vrijedi

$$\operatorname{card}\left(\left\{h_{\lambda}^{m} : m \geq m_{\lambda}\right\}\right) = \operatorname{card}\left(\left\{g_{\lambda}^{m} \circ q_{g(\lambda)\lambda'} : m \geq m_{\lambda}\right\}\right) \leq \operatorname{card}\left(\left\{g_{\lambda}^{m} : m \geq m_{\lambda}\right\}\right) < \aleph_0.$$

Budući da je $\left[\left(g, g_{\lambda}^{m}\right)\right]$ inverz od $\left[\left(1_{\lambda}, f_{\lambda}^{m}\right)\right]$ i da je $\left(1_{\lambda}, f_{\lambda}^{m}\right)$ razinski $\circledast$-morfizam, to za svaki $\lambda \in \Lambda$ i za svaki $m \geq m_{\lambda}$ vrijedi

$$f_{\lambda}^{m} \circ h_{\lambda}^{m} = f_{\lambda}^{m} \circ g_{\lambda}^{m} \circ q_{g(\lambda)\lambda'} = q_{\lambda\lambda'} \text{ i}$$

$$h_{\lambda}^{m} \circ f_{\lambda'}^{m} = g_{\lambda}^{m} \circ q_{g(\lambda)\lambda'} \circ f_{\lambda'}^{m} = g_{\lambda}^{m} \circ f_{g(\lambda)}^{m} \circ p_{g(\lambda)\lambda'} = p_{\lambda\lambda'}$$

pa je nužnost dokazana.

Obratno, pretpostavimo da razinski predstavnik $\left(1_{\lambda}, f_{\lambda}^{m}\right)$ morfizma $\mathbf{f}^{\circledast}$ udovoljuje uvjetu teorema i neka je $\beta : \Lambda_2 \to \mathbb{N}$ njegova komutativna razina. Neka su

$$\varphi : \Lambda \to \Lambda,\ \varphi(\lambda) = \lambda' \text{ i}$$

$$\omega : \Lambda \to \mathbb{N},\ \omega(\lambda) = m_{\lambda}$$

funkcije u smislu uvjeta teorema. Konstruirajmo $\circledast$-morfizam $\left(g, g_{\lambda}^{m}\right) : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ takav da $\left[\left(g, g_{\lambda}^{m}\right)\right] : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ bude inverz od $\mathbf{f}^{\circledast}$. Za indeksnu funkciju $g : \Lambda \to \Lambda$ uzmimo funkciju φ. Nadalje, za svaki $\lambda \in \Lambda$ i za svaki $m \in \mathbb{N}$ definirajmo morfizam $g_{\lambda}^{m} : Y_{g(\lambda)} \to X_{\lambda}$ pravilom

$$g_{\lambda}^{m} = \begin{cases} h_{\lambda}^{\omega(\lambda)}, & m < \omega(\lambda) \\ h_{\lambda}^{m}, & m \geq \omega(\lambda) \end{cases}.$$

Primjetimo da, za svaki $\lambda \in \Lambda$, vrijedi

$$\operatorname{card}\left(\left\{g_\lambda^m : m \in \mathbb{N}\right\}\right) = \operatorname{card}\left(\left\{h_\lambda^m : m \geq \omega(\lambda)\right\}\right) = \operatorname{card}\left(\left\{h_\lambda^m : m \geq m_\lambda\right\}\right) < \aleph_0.$$

Dokažimo da je $\left(g, g_\lambda^m\right)$ $\circledast$-morfizam. Neka su $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ takvi da je $\lambda_1 \leq \lambda_2$ i neka je

$$\lambda_0 = \max\left\{g(\lambda_1), g(\lambda_2)\right\}.$$

Stavimo $\lambda = g(\lambda_0)$ i

$$m_{\lambda_1\lambda_2} = \max\left\{\omega(\lambda_1), \omega(\lambda_2), \omega(\lambda_0), \beta(g(\lambda_1), \lambda_0), \beta(g(\lambda_2), \lambda_0)\right\}.$$

Direktnim uvrštavanjem se lako provjeri da je

$$g_{\lambda_1}^m \circ q_{g(\lambda_1)\lambda} = p_{\lambda_1\lambda_2} \circ g_{\lambda_2}^m \circ q_{g(\lambda_2)\lambda}, \text{ za svaki } m \geq m_{\lambda_1\lambda_2}$$

pa je $\left(g, g_\lambda^m\right) : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ zaista $\circledast$-morfizam. Nadalje, za svaki $\lambda \in \Lambda$ vrijedi

$$f_\lambda^m \circ g_\lambda^m = f_\lambda^m \circ h_\lambda^m = q_{\lambda\lambda'} = q_{\lambda g(\lambda)}, \text{ za svaki } m \geq m_\lambda,$$

to jest,

$$f_\lambda^m \circ g_\lambda^m \circ q_{g(\lambda)g(\lambda)} = 1_{Y_\lambda}^m \circ q_{\lambda g(\lambda)}, \text{ za svaki } m \geq m_\lambda,$$

što znači da je

$$\left(1_\lambda, f_\lambda^m\right) \circ \left(g, g_\lambda^m\right) \sim \left(1_\lambda, 1_{Y_\lambda}^m\right).$$

Slično, za svaki $\lambda \in \Lambda$ vrijedi

$$g_\lambda^m \circ f_{g(\lambda)}^m = h_\lambda^m \circ f_{g(\lambda)}^m = p_{\lambda g(\lambda)} = p_{\lambda\lambda'}, \text{ za svaki } m \geq m_\lambda,$$

to jest,

$$g_\lambda^m \circ f_{g(\lambda)}^m \circ p_{g(\lambda)g(\lambda)} = 1_{X_\lambda}^m \circ p_{\lambda g(\lambda)}, \text{ za svaki } m \geq m_\lambda,$$

što znači da je

$$\left(g, g_\lambda^m\right) \circ \left(1_\lambda, f_\lambda^m\right) \sim \left(1_\lambda, 1_{X_\lambda}^m\right).$$

Dakle, $\left[\left(g, g_\lambda^m\right)\right] : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ je inverz od $\mathbf{f}^{\circledast}$ u *pro*$^{\circledast}$-C pa je $\mathbf{f}^{\circledast}$ izomorfizam. ■

2.2. Kategorija konačnoga gruboga oblika

Neka je C kategorija i $D \subseteq C$ njezina gusta i puna potkategorija. Na klasi morfizama u $pro^{\circledast}$-D između inverznih sustava u D koji su ekspanzije objekata iz C definiramo razredbenu relaciju na sljedeći način:

Definicija 2.2.1 Neka je C kategorija i $D \subseteq C$ gusta i puna potkategorija. Neka su $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{p}' : (X) \to \mathbf{X}'$ D-ekspanzije istoga objekta $X \in Ob(C)$ te $\mathbf{q} : (Y) \to \mathbf{Y}$ i $\mathbf{q}' : (Y) \to \mathbf{Y}'$ D-ekspanzije istoga objekta $Y \in Ob(C)$. Reći ćemo da su morfizmi $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $\mathbf{f}'^{\circledast} : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ u *$pro^{\circledast}$-D ekvivalentni*, u oznaci $\mathbf{f}^{\circledast} \sim \mathbf{f}'^{\circledast}$, ako vrijedi

$$\mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j}) \circ \mathbf{f}^{\circledast} = \mathbf{f}'^{\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{i}),$$

to jest, ako dijagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{\mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{i})} & \mathbf{X}' \\ {\scriptstyle \mathbf{f}^{\circledast}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{f}'^{\circledast}} \\ \mathbf{Y} & \xrightarrow{\mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j})} & \mathbf{Y}' \end{array}$$

komutira u $pro^{\circledast}$-D, pri čemu su $\mathbf{i} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ i $\mathbf{j} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}'$ kanonski izomorfizmi među različitim ekspanzijama objekata X i Y redom.

Propozicija 2.2.2 Relacija $\sim$ *$pro^{\circledast}$-D* ekvivalencije kongruencija je na klasi svih morfizama u $pro^{\circledast}$-D između inverznih sustava u D koji su ekspanzije objekata iz C.

Dokaz.
Refleksivnost: Neka je $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ proizvoljni morfizam među D-ekspanzijama objekata X i Y. Tada je

$$\mathbf{f}^{\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{1_X}) = \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{1_Y}) \circ \mathbf{f}^{\circledast},$$

gdje su $\mathbf{1_X} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{1_Y} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ identički morfizmi na $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ redom. Stoga je $\mathbf{f}^{\circledast} \sim \mathbf{f}^{\circledast}$.
Simetričnost: Neka su $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $\mathbf{f}'^{\circledast} : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ morfizmi takvi da je $\mathbf{f}^{\circledast} \sim \mathbf{f}'^{\circledast}$. To znači da je

$$\mathbf{f}'^{\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{i}) = \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j}) \circ \mathbf{f}^{\circledast},$$

gdje su $\mathbf{i} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ i $\mathbf{j} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}'$ kanonski izomorfizmi među različitim ekspanzijama objekata X i Y redom. Budući da funktori čuvaju inverze izomorfizama i kompoziciju, djelovanjem s odgovarajućim inverzima slijeva, odnosno, zdesna, dobivamo

$$\mathbf{f}^{\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}\left(\mathbf{i}^{-1}\right) = \mathbf{J}_D^{\circledast}\left(\mathbf{j}^{-1}\right) \circ \mathbf{f}'^{\circledast},$$

to jest, $\mathbf{f}^{'\circledast} \sim \mathbf{f}^{\circledast}$.

Tranzitivnost: Neka su $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $\mathbf{f}^{'\circledast} : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ i $\mathbf{f}^{''\circledast} : \mathbf{X}'' \to \mathbf{Y}''$ morfizmi takvi da je $\mathbf{f}^{\circledast} \sim \mathbf{f}^{'\circledast}$ i $\mathbf{f}^{'\circledast} \sim \mathbf{f}^{''\circledast}$. To znači da je

$$\mathbf{f}^{'\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{i}) = \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j}) \circ \mathbf{f}^{\circledast} \text{ i}$$

$$\mathbf{f}^{''\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{i}') = \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j}') \circ \mathbf{f}^{'\circledast},$$

gdje su $\mathbf{i} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$, $\mathbf{i}' : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}''$ i $\mathbf{j} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}'$, $\mathbf{j}' : \mathbf{Y}' \to \mathbf{Y}''$ kanonski izomorfizmi među različitim ekspanzijama objekata X i Y redom. Tada vrijedi

$$\mathbf{f}^{''\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{i}' \circ \mathbf{i}) = \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j}') \circ \mathbf{f}^{'\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{i}) = \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j}' \circ \mathbf{j}) \circ \mathbf{f}^{\circledast},$$

odnosno,

$$\mathbf{f}^{''\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{i}'') = \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j}'') \circ \mathbf{f}^{\circledast},$$

gdje su $\mathbf{i}'' = \mathbf{i}' \circ \mathbf{i} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}''$ i $\mathbf{j}'' = \mathbf{j}' \circ \mathbf{j} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}''$ kanonski izomorfizmi među različitim ekspanzijama objekata X i Y redom. Dakle, $\mathbf{f}^{\circledast} \sim \mathbf{f}^{''\circledast}$. ∎

Klasu ekvivalencije morfizma $\mathbf{f}^{\circledast}$ označujemo $\langle \mathbf{f}^{\circledast} \rangle$.

Teorem 2.2.3 Neka je C kategorija i $D \subseteq C$ njezina gusta i puna potkategorija. Neka su $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{p}' : (X) \to \mathbf{X}'$ D-ekspanzije objekta $X \in Ob(C)$ te $\mathbf{q} : (Y) \to \mathbf{Y}$ i $\mathbf{q}' : (Y) \to \mathbf{Y}'$ D-ekspanzije objekta $Y \in Ob(C)$. Za svaki morfizam $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro*$^{\circledast}$-D postoji jedinstveni morfizam $\mathbf{f}^{'\circledast} : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ takav da je $\mathbf{f}^{\circledast} \sim \mathbf{f}^{'\circledast}$.
Posebno, ako su $\mathbf{g}^{\circledast}, \mathbf{g}^{'\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ takvi da je $\mathbf{g}^{\circledast} \sim \mathbf{g}^{'\circledast}$, onda je $\mathbf{g}^{\circledast} = \mathbf{g}^{'\circledast}$.

Dokaz. Neka su $\mathbf{i} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ i $\mathbf{j} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}'$ kanonski izomorfizmi među različitim ekspanzijama objekata X i Y redom. Za proizvoljni morfizam $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, stavljajući

$$\mathbf{f}^{'\circledast} := \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j}) \circ \mathbf{f}^{\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}\left(\mathbf{i}^{-1}\right)$$

dobivamo morfizam $\mathbf{f}^{'\circledast} : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ za koji vrijedi

$$\mathbf{f}^{'\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{i}) = \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j}) \circ \mathbf{f}^{\circledast},$$

to jest, $\mathbf{f}^{\circledast} \sim \mathbf{f}^{'\circledast}$, čime je dokazana egzistencija.
Ako bi $\mathbf{f}^{''\circledast} : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ bio morfizam takav da je

$$\mathbf{f}^{''\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{i}) = \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j}) \circ \mathbf{f}^{\circledast},$$

vrijedilo bi

$$\mathbf{f}^{''\circledast} = \mathbf{J}_D^{\circledast}(\mathbf{j}) \circ \mathbf{f}^{\circledast} \circ \mathbf{J}_D^{\circledast}\left(\mathbf{i}^{-1}\right) = \mathbf{f}^{'\circledast}$$

pa je dokazana i jedinstvenost. ■

Sada možemo definirati kategoriju (apstraktnoga) konačnoga gruboga oblika. Neka je D gusta i puna potkategorija kategorije C. Na temelju relacije ekvivalencije $\sim$ u $pro^{\circledast}$-D paru (C,D) pridružujemo novu kategoriju koju označujemo $Sh^{\circledast}_{(C,D)}$ i za koju vrijedi:

- $Ob\left(Sh^{\circledast}_{(C,D)}\right) = Ob(C)$
- za bilo koji par objekata $X,Y \in Sh^{\circledast}_{(C,D)}$ skup morfizama $Sh^{\circledast}_{(C,D)}(X,Y)$ tvore sve klase ekvivalencije $\langle \mathbf{f}^{\circledast}\rangle$ po relaciji $\sim$ morfizama $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u $pro^{\circledast}$-D, gdje su $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y}$ bilo koje D-ekspanzije objekata X i Y redom.

Kategoriju $Sh^{\circledast}_{(C,D)}$ nazivamo *kategorijom (apstraktnoga) konačnoga gruboga oblika* za par (C,D), a njezine morfizme $\langle \mathbf{f}^{\circledast}\rangle : X \to Y$ nazivamo *morfizmima konačnoga gruboga oblika* i označujemo $F^{\circledast} : X \to Y$.

Napomena 2.2.4 Morfizam konačnoga gruboga oblika $F^{\circledast} : X \to Y$ dan je dijagramom

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "F^{\circledast}"] \arrow[d, "\mathbf{p}"'] & Y \arrow[d, "\mathbf{q}"] \\ \mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{f}^{\circledast}"] & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

i vrijedi da je skup $Sh^{\circledast}_{(C,D)}(X,Y)$ bijektivno korespodentan sa skupom $pro^{\circledast}$-$D(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, za bilo koje D-ekspanzije $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ objekata X i Y redom.

Neka su $F^{\circledast} = \langle \mathbf{f}\rangle : X \to Y$ i $G^{\circledast} = \langle \mathbf{g}\rangle : Y \to Z$ morfizmi konačnoga gruboga oblika. *Kompoziciju morfizama konačnoga gruboga oblika* $F^{\circledast}$ i $G^{\circledast}$ definiramo s pomoću predstavnika $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ i $\mathbf{g}^{\circledast} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$, to jest, stavljajući

$$G^{\circledast} \circ F^{\circledast} := \left\langle \mathbf{g}^{\circledast} \circ \mathbf{f}^{\circledast}\right\rangle : X \to Z.$$

Identitetom konačnoga gruboga oblika $1^{\circledast}_X : X \to X$ na objektu X nazivamo klasu $\left\langle \mathbf{1_X}^{\circledast}\right\rangle$ identičkoga morfizma $\mathbf{1_X}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$.

Definirajmo funktore $J^{\circledast}_{(C,D)} : Sh_{(C,D)} \to Sh^{\circledast}_{(C,D)}$ i $J^{*}_{(C,D)} : Sh^{\circledast}_{(C,D)} \to Sh^{*}_{(C,D)}$ stavljajući

$$J^{\circledast}_{(C,D)}(X) = J^{*}_{(C,D)}(X) = X, \text{ za svaki objekt } X \in C,$$

$$J^{\circledast}_{(C,D)}(F) = F^{\circledast} = \left\langle \mathbf{J}^{\circledast}_D(\mathbf{f})\right\rangle, \text{ za svaki morfizam oblika } F = \langle \mathbf{f}\rangle,$$

$$J^{*}_{(C,D)}\left(F^{\circledast}\right) = F^{*} = \left\langle \mathbf{J}^{*}_D\left(\mathbf{f}^{\circledast}\right)\right\rangle, \text{ za svaki morfizam konačnoga gruboga oblika } F^{\circledast} = \left\langle \mathbf{f}^{\circledast}\right\rangle.$$

Propozicija 2.2.5 Funktori $J^{\circledast}_{(C,D)} : Sh_{(C,D)} \to Sh^{\circledast}_{(C,D)}$ i $J^{*}_{(C,D)} : Sh^{\circledast}_{(C,D)} \to Sh^{*}_{(C,D)}$ vjerni su funktori koji, općenito, nisu puni.

Dokaz. Vjernost funktora $J^{\circledast}_{(C,D)}$ i $J^{*}_{(C,D)}$ slijedi iz vjernosti funktora $\mathbf{J}^{\circledast}_{D}$ i $\mathbf{J}^{*}_{D}$, redom. Dokažimo da $J^{\circledast}_{(C,D)}$, općenito, nije pun. Neka su $P,Q \in Ob(D)$ i $g,g' : P \to Q$ morfizmi takvi da je $g \neq g'$. Morfizam

$$[(f^m)] : (P) \to (Q)$$

$$f^{2k} = g,\ f^{2k-1} = g', \text{ za svaki } k \in \mathbb{N},$$

u *pro*$^{\circledast}$-*D*, između ekspanzija $\mathbf{1}_P : (P) \to (P)$ i $\mathbf{1}_Q : (Q) \to (Q)$, nije induciran ni sa jednim morfizmom iz *pro-D* pa

$$\langle[(f^m)]\rangle \notin J^{\circledast}_{(C,D)}\left(Sh_{(C,D)}(P,Q)\right).$$

Slično dokazujemo da $J^{*}_{(C,D)}$, općenito, nije pun. Neka su $P,Q \in Ob(D)$ i (g_m) niz morfizama $g_m : P \to Q$, $m \in \mathbb{N}$, takav da je $g_m \neq g_{m'}$, čim je $m \neq m'$. Morfizam

$$[(f^m)] : (P) \to (Q)$$

$$f^m = g_m, \text{ za svaki } m \in \mathbb{N},$$

u *pro**-*D*, između ekspanzija $\mathbf{1}_P : (P) \to (P)$ i $\mathbf{1}_Q : (Q) \to (Q)$, nije induciran ni sa jednim morfizmom iz *pro*$^{\circledast}$-*D* pa

$$\langle[(f^m)]\rangle \notin J^{*}_{(C,D)}\left(Sh^{\circledast}_{(C,D)}(P,Q)\right).$$

■

Po propoziciji 2.2.5., kategoriju $Sh_{(C,D)}$ smijemo smatrati pravom potkategorijom kategorije konačnoga (apstraktnoga) gruboga oblika $Sh^{\circledast}_{(C,D)}$, dok je kategorija konačnoga (apstraktnoga) gruboga oblika $Sh^{\circledast}_{(C,D)}$ prava potkategorijom kategorije (apstraktnoga) gruboga oblika $Sh^{*}_{(C,D)}$. Kompoziciju funktora oblika $S_{(C,D)}$ i funktora $J^{\circledast}_{(C,D)}$ označimo $S^{\circledast}_{(C,D)}$, to jest, neka je

$$S^{\circledast}_{(C,D)} = J^{\circledast}_{(C,D)} \circ S_{(C,D)}.$$

Definicija 2.2.6 Funktor $S^{\circledast}_{(C,D)} : C \to Sh^{\circledast}_{(C,D)}$ nazivamo *funktorom konačnoga gruboga oblika*.

Napomena 2.2.7 Primjetimo da funktor konačnoga gruboga oblika drži objekte fiksnima, a svakom morfizmu $f : X \to Y$ u C pridružuje morfizam konačnoga gruboga oblika $F^{\circledast} : X \to Y$ predstavljen morfizmom $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro*$^{\circledast}$-*D* koji je induciran morfizmom $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro-D*, pri čemu je $S_{(C,D)}(f) = \langle \mathbf{f} \rangle$, a $\mathbf{p} : (X) \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{q} : (Y) \to \mathbf{Y}$ su D-ekspanzije objekata X i Y redom.

Definicija 2.2.8 Reći ćemo da su objekti X i Y iz C *istoga konačnoga gruboga oblika*, u oznaci $Sh^{\circledast}(X) = Sh^{\circledast}(Y)$, ako su izomorfni u kategoriji $Sh^{\circledast}_{(C,D)}$.

Očito je $F^{\circledast} = \langle \mathbf{f}^{\circledast} \rangle : X \to Y$ izomorfizam u $Sh^{\circledast}_{(C,D)}$ ako i samo ako je $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ izomorfizam u $pro^{\circledast}$-D. Drugim riječima, objekti X i Y istoga su konačnoga gruboga oblika ako i samo ako su $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ izomorfni u $pro^{\circledast}$-D. Uz to, budući da funktori čuvaju izomorfizme, vrijedi:

(1) ako je $X \cong Y$ C ili $Sh(X) = Sh(Y)$, onda je $Sh^{\circledast}(X) = Sh^{\circledast}(Y)$

(2) ako je $Sh^{\circledast}(X) = Sh^{\circledast}(Y)$, onda je $Sh^{*}(X) = Sh^{*}(Y)$.

Teorem 2.2.9 Neka su P i Q objekti guste i pune potkategorije D kategorije C. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) P i Q su izomorfni u kategoriji D.

(ii) P i Q su istoga oblika.

(iii) P i Q su istoga konačnoga gruboga oblika.

(iv) P i Q su istoga gruboga oblika.

Dokaz. Budući da funktori čuvaju izomorfizme, to vrijedi

$$(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv).$$

Preostaje dokazati da $(iv) \implies (i)$. Neka je $Sh^{*}(P) = Sh^{*}(Q)$. To znači da postoji izomorfizam

$$F^{*} = \langle \mathbf{f}^{*} \rangle : P \to Q$$

u $Sh^{*}_{(C,D)}$, to jest, izomorfizam $\mathbf{f}^{*} : (P) \to (Q)$ u pro^{*}-D koji je reprezentiran $*$-morfizmom $(f^m) : (P) \to (Q)$. Po Moritinoj lemi za pro^{*}-D je $f^m : P \to Q$ izomorfizam, za skoro sve $m \in \mathbb{N}$, pa su P i Q izomorfni u D. ∎

Po korolaru 1.6.7. ima smisla promatrati kategorije $Sh^{\circledast}_{(HTop,HANR)}$ i $Sh^{\circledast}_{(HTop,HPol)}$ koje su međusobno izomorfne. S obzirom na to da su klase objekata ovih kategorija jednake, u nastavku rada ćemo ih poistovjećivati.

Definicija 2.2.10 Kategorije $Sh^{\circledast}_{(HTop,HANR)}$ i $Sh^{\circledast}_{(HTop,HPol)}$ označujemo $Sh^{\circledast}$ i nazivamo *kategorijom (topološkoga) konačnoga gruboga oblika*.

2.3. ⊛-FUNDAMENTALNI NIZOVI

Definicija 2.3.1 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi Hilbertove kocke Q. Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^2 \to C(Q,Q)$ kažemo da je *konačni* $*$*-fundamentalni niz* iz X u Y, u oznaci ⊛-fundamentalni niz, ako vrijedi

(1) za svaku okolinu V od Y u Q postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi(n,m)|_U \simeq \Phi(n+1,m)|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n$$

(2) za svaki $n \in \mathbb{N}$ je

$$\operatorname{card}(\{\Phi(n,m) : m \in \mathbb{N}\}) < \aleph_0.$$

Napomena 2.3.2 Ako je Φ ⊛-fundamentalni niz iz X u Y, funkciju $\Phi(n,m) : Q \to Q$ ubuduće ćemo označavati $\Phi_n^m : Q \to Q$ i pisati $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$.

Ako za ⊛-fundamentalni niz $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $\Phi_n^m = \Phi_n$, za svaki $m \in \mathbb{N}$, onda za Φ kažemo da je *induciran* fundamentalnim nizom $(\Phi_n) : X \to Y$. Karakterizaciju ⊛-fundamentalnih nizova daje sljedeća propozicija.

Propozicija 2.3.3 Funkcija $\Phi : \mathbb{N}^2 \to C(Q,Q)$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\operatorname{card}(\{\Phi_n^m : m \in \mathbb{N}\}) < \aleph_0$$

je ⊛-fundamentalni niz iz X u Y ako i samo ako za svaku okolinu V od Y u Q postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za sve $n, n' \geq n_0$ postoji $m_{nn'} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_{n'}^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{nn'}.$$

Dokaz. Neka je $\Phi : \mathbb{N}^2 \to C(Q,Q)$ ⊛-fundamentalni niz iz X u Y. To znači da za svaku okolinu V od Y u Q postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_{n+1}^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Neka su $n, n' \in \mathbb{N}$ takvi da je $n, n' \geq n_0$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $n \leq n'$. Stavimo $m_{nn'} = \max\{m_n, m_{n+1}, \ldots, m_{n'-1}\}$. Tada, zbog tranzitivnosti homotopije i definicije ⊛-fundamentalnog niza, vrijedi

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_{n+1}^m|_U \simeq \cdots \simeq \Phi_{n'-1}^m|_U \simeq \Phi_{n'}^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{nn'}.$$

Obratno, pretpostavimo da za svaku okolinu V od Y u Q postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za sve $n, n' \geq n_0$ postoji $m_{nn'} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_{n'}^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{nn'}.$$

Za svaki $n \geq n_0$ stavimo $m_n = m_{nn+1}$. Tada je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_{n+1}^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

to jest, $\Phi : \mathbb{N}^2 \to C(Q,Q)$ je $\circledast$-fundamentalni niz iz X u Y. ■

Neka su $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$ i $\Psi = (\Psi_n^m) : Y \to Z$ $\circledast$-fundamentalni nizovi. Stavimo

$$\Theta_n^m = \Psi_n^m \circ \Phi_n^m \text{ za sve } n, m \in \mathbb{N}.$$

Na ovaj je način definirana funkcija $\Theta : \mathbb{N}^2 \to C(Q,Q)$.

Propozicija 2.3.4 Funkcija $\Theta : \mathbb{N}^2 \to C(Q,Q)$ je $\circledast$-fundamentalni niz iz X u Z.

Dokaz. Neka je W proizvoljna okolina od Z u Q. Budući da je $(\Psi_n^m) : Y \to Z$ $\circledast$-fundamentalni niz, to postoje okolina V od Y u Q i $n_0' \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0'$ postoji $m_n' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Psi_n^m|_V \simeq \Psi_{n+1}^m|_V \text{ u } W, \text{ za svaki } m \geq m_n'.$$

Nadalje, budući da je $(\Phi_n^m) : X \to Y$ $\circledast$-fundamentalni niz, za okolinu V od Y u Q postoje okolina U od X u Q i $n_0'' \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0''$ postoji m_n'' takav da je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_{n+1}^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n''.$$

Stavimo $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ i, za svaki $n \geq n_0$, stavimo $m_n = \max\{m_n', m_n''\}$. Neka je $n \geq n_0$ proizvoljan. Tada vrijedi

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_{n+1}^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n \text{ i}$$

$$\Psi_n^m|_V \simeq \Psi_{n+1}^m|_V \text{ u } W, \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

pa je, zbog dobre usklađenosti homotopije s kompozicijom,

$$\Psi_n^m \circ \Phi_n^m|_U \simeq \Psi_{n+1}^m \circ \Phi_{n+1}^m|_U \text{ u } W, \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

to jest,

$$\Theta_n^m|_U \simeq \Theta_{n+1}^m|_U \text{ u } W, \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Uz to, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\operatorname{card}\left(\{\Psi_n^m \circ \Phi_n^m : m \in \mathbb{N}\}\right) \leq \operatorname{card}\left(\{\Psi_n^m : m \in \mathbb{N}\}\right) \cdot \operatorname{card}\left(\{\Phi_n^m : m \in \mathbb{N}\}\right) < \aleph_0$$

pa je $\Theta : \mathbb{N}^2 \to C(Q,Q)$ ⊛-fundamentalni niz iz X u Z. ■

Definicija 2.3.5 Neka su $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$ i $\Psi = (\Psi_n^m) : Y \to Z$ ⊛-fundamentalni nizovi. *Kompozicijom* ⊛-fundamentalnih nizova Φ i Ψ nazivamo ⊛-fundamentalni niz $\Theta = (\Theta_n^m) : X \to Z$ određen preslikavanjima

$$\Theta_n^m = \Psi_n^m \circ \Phi_n^m, \text{ za sve } n,m \in \mathbb{N}.$$

Pišemo: $\Theta = \Psi \circ \Phi$.

Propozicija 2.3.6 Komponiranje ⊛-fundamentalnih nizova je asocijativno, to jest, ako su $\Phi : X \to Y$, $\Psi : Y \to Z$ i $\Theta : Z \to W$ ⊛-fundamentalni nizovi, onda je

$$\Theta \circ (\Psi \circ \Phi) = (\Theta \circ \Psi) \circ \Phi.$$

Dokaz. Stavimo

$$(\Sigma_n^m) = (\Theta_n^m) \circ ((\Psi_n^m) \circ (\Phi_n^m))$$

i

$$\left(\Sigma_n'^m\right) = ((\Theta_n^m) \circ (\Psi_n^m)) \circ (\Phi_n^m).$$

Tvrdimo da je

$$(\Sigma_n^m) = \left(\Sigma_n'^m\right).$$

Neka su $n,m \in \mathbb{N}$ bilo koji. Tada, zbog asocijativnosti komponiranja funkcija, vrijedi

$$\Sigma_n^m = \Theta_n^m \circ (\Psi_n^m \circ \Phi_n^m) = (\Theta_n^m \circ \Psi_n^m) \circ \Phi_n^m = \Sigma_n'^m,$$

što je i trebalo dokazati. ■

Primjetimo da, za proizvoljni zatvoreni podskup X od Q, ulogu identičkog ⊛-fundamentalnog niza na X ima ⊛-fundametalni niz $1_X = (1_n^m) : X \to X$ za kojega je

$$1_n^m = 1_Q : Q \to Q, \text{ za sve } n,m \in \mathbb{N}.$$

Zaista,

$$(\Phi_n^m) \circ (1_n^m) = (\Phi_n^m), \text{ za svaki } (\Phi_n^m) : X \to Y,$$

$$(1_n^m) \circ (\Psi_n^m) = (\Psi_n^m), \text{ za svaki } (\Psi_n^m) : Z \to X.$$

Time je dokazano da zatvoreni podskupovi od Q kao objekti i ⊛-fundamentalni nizovi kao morfizmi među njima tvore kategoriju koju ćemo označavati $C_f^{\circledast}$. Uvedimo na skupu svih ⊛-fundamentalnih nizova iz X u Y definiramo razredbenu relaciju na sljedeći način:

Definicija 2.3.7 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q. Za ⊛-fundamentalni niz $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$ kažemo da je *ekvivalentan* ⊛-fundamentalnom nizu $\Phi' = \left(\Phi_n'^m\right) : X \to Y$ ako za svaku okolinu V od Y u Q postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_n'^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

U tom slučaju, pišemo: $\Phi \sim \Phi'$.

Propozicija 2.3.8 Relacija $\sim$ je ekvivalencija na skupu svih ⊛-fundamentalnih nizova iz X u Y.

Dokaz.
Refleksivnost: Neka je $\Phi = (\Phi_n^m)$ ⊛-fundamentalni niz iz X u Y i neka je V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_{nn} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_n^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{nn},$$

to jest, $\Phi \sim \Phi$.
Simetričnost: Neka su $\Phi = (\Phi_n^m), \Phi' = \left(\Phi_n'^m\right)$ ⊛-fundamentalni nizovi iz X u Y takvi da je $\Phi \sim \Phi'$ i neka je V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_n'^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Zbog simetričnosti relacije homotopije vrijedi

$$\Phi_n'^m|_U \simeq \Phi_n^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

pa je $\Phi \sim \Phi'$.
Tranzitivnost: Neka su $\Phi = (\Phi_n^m), \Phi' = \left(\Phi_n'^m\right)$ i $\Phi'' = \left(\Phi_n''^m\right)$ ⊛-fundamentalni nizovi iz X u Y takvi da je

$$\Phi \sim \Phi' \text{ i } \Phi' \sim \Phi''.$$

Neka je V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoje okolina U' od X u Q i $n'_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n'_0$ postoji $m'_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_{U'} \simeq \Phi_n'^m|_{U'} \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m'_n;$$

Nadalje, postoje okolina U'' od X u Q i $n''_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n''_0$ postoji $m''_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n'^m|_{U''} \simeq \Phi_n''^m|_{U''} \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m''_n.$$

Stavimo $U = U' \cap U''$, $n_0 = \max\left\{n'_0, n''_0\right\}$ i, za svaki $n \geq n_0$, $m_n = \max\left\{m'_n, m''_n\right\}$. Tada, za svaki $n \geq n_0$, vrijedi

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_n'^m|_U \simeq \Phi_n''^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

što znači da je $\Phi \sim \Phi''$. ■

Klasu ekvivalencije ⊛-fundamentalnog niza $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$ s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$ označavat ćemo $[\Phi]$, odnosno, $[(\Phi_n^m)]$. Skup svih klasa ekvivalencije ⊛-fundamentalnih nizova iz X u Y označavat ćemo $Sh_f^{\circledast}(X,Y)$.

Promotrimo sada svojstva kvocijentne kategorije $C_f^{\circledast}|_{\sim}$. *Kompoziciju* klasa ekvivalencije ⊛-fundamentalnih nizova definirajmo na prirodan način, stavljajući

$$[\Psi] \circ [\Phi] := [\Psi \circ \Phi]$$

kad god kompozicija $\Psi \circ \Phi$ postoji.

Propozicija 2.3.9 Komponiranje klasa ekvivalencije ⊛-fundamentalnih nizova je dobro definirano.

Dokaz. Neka su $\Phi, \Phi' : X \to Y$ i $\Psi, \Psi' : Y \to Z$ ⊛-fundamentalni nizovi takvi da je

$$\Phi \sim \Phi' \text{ i } \Psi \sim \Psi'.$$

Neka je

$$\Theta = \Psi \circ \Phi \text{ i } \Theta' = \Psi' \circ \Phi'.$$

Tvrdimo da je

$$\Theta \sim \Theta'.$$

Neka je W proizvoljna okolina od Z u Q. Tada postoje okolina V od Y u Q i $n'_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n'_0$ postoji $m'_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Psi_n^m|_V \simeq \Psi_n'^m|_V \text{ u } W, \text{ za svaki } m \geq m'_n.$$

Nadalje, postoje okolina U od X u Q i $n_0'' \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0''$ postoji $m_n'' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_n'^m|_U \ \text{ u } V, \ \text{ za svaki } m \geq m_n''.$$

Stavimo $n_0 = \max\left\{n_0', n_0''\right\}$ i, za svaki $n \geq n_0$, stavimo $m_n = \max\left\{m_n', m_n''\right\}$. Neka je $n \geq n_0$ proizvoljan. Tada vrijedi

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_n'^m|_U \ \text{ u } V, \ \text{ za svaki } m \geq m_n$$

i

$$\Psi_n^m|_V \simeq \Psi_n'^m|_V \ \text{ u } W, \ \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

pa je, zbog dobre uslađenosti homotopije s kompozicijom,

$$\Psi_n^m \circ \Phi_n^m|_U \simeq \Psi_n'^m \circ \Phi_n'^m|_U \text{ u } W, \ \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

to jest,

$$\Theta_n^m|_U \simeq \Theta_n'^m|_U \text{ u } W, \ \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Dakle, $\Theta \sim \Theta'$ pa je komponiranje klasa dobro definirano. ■

Korolar 2.3.10 Komponiranje klasa ⊛-fundamentalnih nizova je asocijativno, to jest, ako su $\Phi : X \to Y$, $\Psi : Y \to Z$ i $\Theta : Z \to W$ ⊛-fundamentalni nizovi, onda je

$$[\Theta] \circ ([\Psi] \circ [\Phi]) = ([\Theta] \circ [\Psi]) \circ [\Phi].$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz asocijativnosti kompozicije ⊛-fundamentalnih nizova:

$$[\Theta] \circ ([\Psi] \circ [\Phi]) = [\Theta] \circ [\Psi \circ \Phi] = [\Theta \circ (\Psi \circ \Phi)] =$$

$$= [(\Theta \circ \Psi) \circ \Phi] = [\Theta \circ \Psi] \circ [\Psi] = ([\Theta] \circ [\Psi]) \circ [\Phi]$$

■

Primjetimo još da je

$$[\Phi] \circ [1_X] = [\Phi], \ \text{ za svaku klasu } [\Phi] : X \to Y,$$

$$[1_X] \circ [\Psi] = [\Psi], \ \text{ za svaku klasu } [\Psi] : Z \to X.$$

Time je dokazano da zatvoreni podskupovi od Q kao objekti i klase ekvivalencije ⊛-fundamentalnih nizova kao morfizmi među njima tvore kategoriju koju ćemo označavati $Sh_f^{\circledast}$.
Promotrimo pridruživanje $J^f : Sh_f \to Sh_f^{\circledast}$ koje objekte drži fiksnima, a klasi ekvivalencije fundamentalnoga niza $\Phi : X \to Y$ pridružuje klasu ekvivalencije ⊛-fundamentalnoga niza induciranoga s Φ.

Propozicija 2.3.11 Pridruživanje $J^f : Sh_f \to Sh_f^{\circledast}$ vjeran je funktor koji nije pun.

Dokaz. Lako je provjeriti da je J^f zaista funktor. Dokažimo da je J_f vjeran, to jest, da je za svaki par zatvorenih podskupova X, Y od Q funkcija $J^f_{X,Y} : Sh_f(X,Y) \to Sh_f^{\circledast}(X,Y)$ injekcija. Neka su $[\Phi], [\Phi'] \in Sh_f(X,Y)$ klase fundamentalnih nizova $(\Phi_n), (\Phi'_n) : X \to Y$ takve da je

$$J^f_{X,Y}([\Phi]) = [\Psi] = \left[\Psi'\right] = J^f_{X,Y}\left(\left[\Phi'\right]\right),$$

gdje su $\Psi, \Psi' : X \to Y$ ⊛-fundamentalni nizovi inducirani fundamentalnim nizovima Φ i Φ' redom. To znači da je $\Psi \sim \Psi'$ i da vrijedi

$$\Psi_n^m = \Phi_n, \text{ za sve } n, m \in \mathbb{N} \text{ i}$$

$$\Psi_n'^m = \Phi'_n, \text{ za sve } n, m \in \mathbb{N}.$$

Iz definicije relacije $\sim$ na $C_f^{\circledast}(X,Y)$ slijedi da za svaku okolinu V od Y u Q postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m \geq m_n$ vrijedi

$$\Phi_n|_U = \Psi_n^m|_U \simeq \Psi_n'^m|_U = \Phi'_n|_U \text{ u } V.$$

Dakle, $\Phi \sim \Phi'$, to jest, $[\Phi] = [\Phi']$ pa je injektivnost dokazana.
Primjerom ćemo pokazati da funktor J^f nije pun. Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q te $g, g' : Q \to Q$ neprekidne funkcije takve da $g|_X$ nije homotopna $g'|_X$ u Q. Tada ⊛-fundamentalni niz

$$\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$$

$$\Phi_n^{2k} = g,\ \Phi_n^{2k-1} = g', \text{ za svaki } k \in \mathbb{N},$$

nije induciran ni sa jednim fundamentalnim nizom iz X u Y pa

$$[\Phi] \notin J^f_{X,Y}\left(Sh_f(X,Y)\right),$$

odnosno, funktor J^f nije pun. ∎

Po propoziciji 2.3.11. kategoriju Sh_f smijemo smatrati pravom potkategorijom kategorije $Sh_f^{\circledast}$.

2.4. ⊛-APROKSIMATIVNI NIZOVI

Uvedimo sada pojam ⊛-aproksimativnog niza čije će se komponentne funkcije pokazati jako bitnom vezom između prekidnih funkcija koje tvore ⊛-približavajuće nizove i neprekidnih funkcija koje tvore ⊛-fundamentalne nizove.

Definicija 2.4.1 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q. Za funkciju $\alpha : \mathbb{N}^2 \to C(X,Q)$ kažemo da je *konačni ∗-aproksimativni niz* iz X u Y, u oznaci ⊛-aproksimativni niz, ako vrijedi

(1) za svaku okolinu V od Y u Q postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha(n,m) \simeq \alpha(n+1,m) \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n$$

(2) za svaki $n \in \mathbb{N}$ je

$$\operatorname{card}(\{\alpha(n,m) : m \in \mathbb{N}\}) < \aleph_0.$$

Napomena 2.4.2 Ako je α ⊛-aproksimativni niz, funkciju $\alpha(n,m) : X \to Q$ ubuduće ćemo označavati $\alpha_n^m : X \to Q$ i pisati $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$.

Ako za ⊛-aproksimativni niz $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $\alpha_n^m = \alpha_n$, za svaki $m \in \mathbb{N}$, onda za α kažemo da je *induciran* aproksimativnim nizom $(\alpha_n) : X \to Y$. Karakterizaciju ⊛-aproksimativnih nizova daje sljedeća propozicija.

Propozicija 2.4.3 Funkcija $\alpha : \mathbb{N}^2 \to C(Q,Q)$ takva da, za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\operatorname{card}(\{\alpha_n^m : m \in \mathbb{N}\}) < \aleph_0$$

je ⊛-aproksimativni niz iz X u Y ako i samo ako za svaku okolinu V od Y u Q postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, n' \geq n_0$ postoji $m_{nn'} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_{n'}^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{nn'}.$$

Dokaz. Neka je $\alpha : \mathbb{N}^2 \to C(Q,Q)$ ⊛-aproksimativni niz iz X u Y. To znači da za svaku okolinu V od Y u Q postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_{n+1}^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Neka su $n,n' \in \mathbb{N}$ takvi da je $n,n' \geq n_0$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $n \leq n'$. Stavimo $m_{nn'} = \max\{m_n, m_{n+1}, \ldots, m_{n'-1}\}$. Tada, zbog tranzitivnosti homotopije i definicije ⊛-aproksimativnog niza, vrijedi

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_{n+1}^m \simeq \cdots \simeq \alpha_{n'-1}^m \simeq \alpha_{n'}^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{nn'}.$$

Obratno, pretpostavimo da za svaku okolinu V od Y u Q postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n,n' \geq n_0$ postoji $m_{nn'} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_{n'}^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{nn'}.$$

Za svaki $n \geq n_0$ stavimo $m_n = m_{nn+1}$. Tada je

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_{n+1}^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

to jest, $\alpha : \mathbb{N}^2 \to C(Q,Q)$ je ⊛-aproksimativni niz iz X u Y. ■

Na skupu svih ⊛-aproksimativnih nizova iz X u Y definiramo razredbenu relaciju na sljedeći način:

Definicija 2.4.4 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q. Za ⊛-aproksimativni niz $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ kažemo da je *ekvivalentan* ⊛-aproksimativnom nizu $\beta = (\beta_n^m) : X \to Y$ ako za svaku okolinu V od Y u Q postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \beta_n^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

U tom slučaju, pišemo: $\alpha \sim \beta$.

Propozicija 2.4.5 Relacija $\sim$ je ekvivalencija na skupu svih ⊛-aproksimativnih nizova iz X u Y.

Dokaz.
Refleksivnost: Neka je $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ ⊛-aproksimativni niz i V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_{nn} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_{n+1}^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{nn},$$

to jest, $\alpha \sim \alpha$.
Simetričnost: Neka su $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ i $\beta = (\beta_n^m) : X \to Y$ ⊛-aproksimatvni nizovi takvi da

je $\alpha \sim \beta$ i neka je V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \beta_n^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Zbog simetričnosti relacije homotopije vrijedi

$$\beta_n^m \simeq \alpha_n^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

pa je $\beta \sim \alpha$.

Tranzitivnost: Neka su $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$, $\beta = (\beta_n^m) : X \to Y$ i $\gamma = (\gamma_n^m) : X \to Y$ ⊛-aproksimativni nizovi takvi da je

$$\alpha \sim \beta \text{ i } \beta \sim \gamma.$$

Neka je V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0'$ postoji $m_n' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \beta_n^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Nadalje, postoji $n_0'' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0''$ postoji $m_n'' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\beta_n^m \simeq \gamma_n^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n''.$$

Stavimo $n_0 = \max\left\{n_0', n_0''\right\}$ i, za svaki $n \geq n_0$, $m_n = \max\left\{m_n', m_n''\right\}$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\alpha_n^m \simeq \beta_n^m \simeq \gamma_n^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

što znači da je $\alpha \sim \gamma$. ■

Klasu ekvivalencije ⊛-aproksimativnog niza $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ označavat ćemo $[\alpha]$, odnosno, $[(\alpha_n^m)]$. Skup svih klasa ekvivalencije ⊛-aproksimativnih nizova iz X u Y označavat ćemo $Sh_a^{\circledast}(X,Y)$.

Ako u ⊛-aproksimativnom nizu $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ izaberemo proizvoljni podniz niza indeksa n od α, dobit ćemo novi ⊛-aproksimativni niz.

Propozicija 2.4.6 Neka je $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ ⊛-aproksimativni niz i (n_k) bilo koji podniz niza prirodnih brojeva. Tada je $\alpha' = \left(\alpha_{n_k}^m\right) : X \to Y$ ⊛-aproksimativni niz.

Dokaz. Neka je V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki par $n, n' \geq n_0$ postoji $m_{nn'} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_{n'}^m \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{nn'}.$$

Niz (n_k) je neomeđen odozgo pa postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_{k_0} \geq n_0$ te je $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$, za svaki $k \geq k_0$. Neka je $k \geq k_0$ proizvoljan. Tada je

$$n_{k+1} > n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$$

pa po propoziciji 2.4.3. postoji $m'_k = m_{n_k n_{k+1}} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha^m_{n_k} \simeq \alpha^m_{n_{k+1}} \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m'_k,$$

što znači da je α' ⊛-aproksimativni niz. ■

Definicija 2.4.7 Neka je $\alpha = (\alpha^m_n) : X \to Y$ ⊛-aproksimativni niz i (n_k) bilo koji podniz niza prirodnih brojeva. Za ⊛-aproksimativni niz $\alpha' = \left(\alpha^m_{n_k}\right) : X \to Y$ kažemo da je *podniz* od α.

Očekivana svojstva podnizova ⊛-aproksimativnih nizova iskazujemo sljedećim dvjema tvrdnjama.

Propozicija 2.4.8 Neka je $\alpha = (\alpha^m_n) : X \to Y$ ⊛-aproksimativni niz i $\alpha' = \left(\alpha^m_{n_k}\right) : X \to Y$ bilo koji njegov podniz. Tada je $\alpha \sim \alpha'$.

Dokaz. Neka je V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_{n_0 n} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha^m_{n_0} \simeq \alpha^m_n \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{n_0 n}.$$

Odaberimo proizvoljni $k \geq n_0$. Primjetimo da je tada $n_k \geq k \geq n_0$ pa postoje $m_{n_0 k}, m_{n_0 n_k} \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\alpha^m_{n_0} \simeq \alpha^m_k \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{n_0 k}$$

i

$$\alpha^m_{n_0} \simeq \alpha^m_{n_k} \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{n_0 n_k}.$$

Stoga je

$$\alpha^m_k \simeq \alpha^m_{n_0} \simeq \alpha^m_{n_k} \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq \max\left\{m_{n_0 k}, m_{n_0 n_k}\right\},$$

to jest, $\alpha \sim \alpha'$. ■

Korolar 2.4.9 Neka je $\alpha = (\alpha^m_n) : X \to Y$ ⊛-aproksimativni niz i neka su $\alpha' = \left(\alpha^m_{n_k}\right) : X \to Y$ i $\alpha'' = \left(\alpha^m_{n'_k}\right) : X \to Y$ bilo koja dva njegova podniza. Tada je $\alpha' \sim \alpha''$.

Dokaz. Po prehodnoj propoziciji je $\alpha \sim \alpha'$ i $\alpha \sim \alpha''$ pa zbog tranzitivnosti ekvivalencije ⊛-aproksimativnih nizova vrijedi $\alpha' \sim \alpha''$. ■

Da bismo zatvorene podskupove od Q i klase ekvivalencije ⊛-aproksimativnih nizova organizirali u kategoriju, moramo definirati kompoziciju klasa ⊛-aproksimativnih nizova. Neka su $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ i $\beta = (\beta_n^m) : Y \to Z$ ⊛-aproksimativni nizovi. Budući da je

$$\alpha_n^m : X \to Q \ \text{ i } \ \beta_n^m : Y \to Q, \ \text{ za sve } \ n, m \in \mathbb{N},$$

bilo kakva direktna kompozicija komponenti od α i β nije dobro definirana. Stoga ćemo, u kompoziciji $[\beta] \circ [\alpha]$, koristiti ⊛-fundamentalne nizove koji su proširenja od β.

Propozicija 2.4.10 Neka je $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$ ⊛-fundamentalni niz. Tada je $\Phi|_X := (\Phi_n^m|_X)$ ⊛-aproksimativni niz iz X u Y.

Dokaz. Neka je V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_{n+1}^m|_U \ \text{ u } \ V, \ \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Stoga je

$$\Phi_n^m|_X \simeq \Phi_{n+1}^m|_X \ \text{ u } \ V, \ \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Uz to, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\operatorname{card}\left(\{\Phi_n^m|_X : m \in \mathbb{N}\}\right) \leq \operatorname{card}\left(\Phi_n^m : m \in \mathbb{N}\right) < \aleph_0$$

pa je $\Phi|_X = (\Phi_n^m|_X) : X \to Y$ ⊛-aproksimativni niz. ■

Definicija 2.4.11 Neka je $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$ ⊛-fundamentalni niz. Tada ⊛-aproksimativni niz $\Phi|_X = (\Phi_n^m|_X) : X \to Y$ nazivamo *aproksimativnom restrikcijom* od Φ.

Svakom ⊛-aproksimativnom nizu možemo pridružiti, do na ekvivalenciju jedinstveni, ⊛-fundamentalni niz. O tome nam govore sljedeći teorem i propozicija.

Teorem 2.4.12 Neka je $\alpha : X \to Y$ ⊛-aproksimativni niz. Tada postoji ⊛-fundamentalni niz $\Phi : X \to Y$ takav je $\Phi|_X \sim \alpha$.

Dokaz. Neka je (V_k) silazni niz otvorenih okolina od Y u Q takav da je $\cap V_k = V$. Tada, za svaki $k \in \mathbb{N}$, postoji $n_0(k) \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0(k)$ postoji $m_n(k) \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_{n+1}^m \ \text{ u } \ V_k, \ \text{ za svaki } m \geq m_n(k).$$

Primjetimo da indekse $n_0(k)$ možemo birati strogo rastuće, to jest, tako da je $n_0(k) < n_0(k+1)$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Stavimo $n_k := n_0(k)$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Time smo dobili strogo rastući niz indeksa $(n_k)_k$ koji određuje podniz $\alpha' = \left(\alpha_{n_k}^m\right) : X \to Y$ ⊛-aproksimativnog niza α. Po propoziciji 2.4.8. vrijedi $\alpha \sim \alpha'$. Primjetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $m_{n_k} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_{n_k}^m \simeq \alpha_{n_{k+1}}^m \text{ u } V_k, \text{ za svaki } m \geq m_{n_k}.$$

Sada ćemo induktivno konstruirati silazni niz (W_k) zatvorenih okolina od X u Q i ⊛-fundamentalni niz $\Phi = \left(\Phi_k^m\right) : X \to Y$ takav da je

$$\Phi_k^m|_X = \alpha_{n_k}^m, \text{ za sve } k, m \in \mathbb{N},$$

i da je, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i svaki $p \geq k$,

$$\Phi_k^m|_{W_k} \simeq \Phi_p^m|_{W_k} \text{ u } V_k, \text{ za skoro sve } m.$$

Konstrukciju ćemo provesti po svim $k \in \mathbb{N}$, sukcesivno proširujući, za dovoljno velike m, funkcije $\alpha_{n_k}^m$ sa X na okoline $W_k, W_{k-1}, \ldots, W_2, W_1$ od X redom, a potom do funkcija $\Phi_k^m : Q \to Q$.

Za $k = 1$ postoji $m_{n_1} \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m \geq m_{n_1}$ vrijedi

$$\alpha_{n_1}^m \simeq \alpha_{n_2}^m \text{ u } V_1.$$

Neka je, za svaki $m \in \mathbb{N}$, funkcija $\Phi_1^m : Q \to Q$ proizvoljno neprekidno proširenje funkcije $\alpha_{n_1}^m : X \to Q$ (koje postoji jer je Q AR). Pritom, ako je $m, m' \geq m_{n_1}$ i $\alpha_{n_1}^m = \alpha_{n_1}^{m'}$, proširenja biramo tako da bude $\Phi_1^m = \Phi_1^{m'}$ (iste komponentne funkcije $\alpha_{n_1}^m$ uvijek proširujemo istim proširenjem). Primjetimo da, za svaki $m \geq m_{n_1}$, vrijedi

$$\alpha_{n_1}^m : X \to V_1 \subseteq Q$$

pa zbog neprekidnosti postoji okolina U_1^m od X u Q takva da je

$$\Phi_1^m\left(U_1^m\right) \subseteq V_1, \text{ za svaki } m \geq m_{n_1}.$$

Pritom, ako je $m, m' \geq m_{n_1}$ i $\Phi_1^m = \Phi_1^{m'}$, okoline biramo tako da bude $U_1^m = U_1^{m'}$ (istim komponentnim funkcijama uvijek pridružujemo istu okolinu). Budući da je

$$\operatorname{card}\left(\{U_1^m : m \geq m_{n_1}\}\right) < \aleph_0,$$

to je $\bigcap\limits_{m \geq m_{n_1}} U_1^m$ okolina od X. Neka je

$$W_1 \subseteq \bigcap_{m \geq m_{n_1}} U_1^m$$

zatvorena okolina od X (koja postoji zbog normalnosti prostora Q). Tada je

$$\Phi_1^m(W_1) \subseteq V_1, \text{ za svaki } m \geq m_{n_1}.$$

Pretpostavimo da smo konstruirati zatvorene okoline $W_{k-1} \subseteq W_{k-2} \subseteq \cdots \subseteq W_2 \subseteq W_1$ od X u Q i preslikavanja $\Phi_1^m, \ldots, \Phi_{k-1}^m$, $m \in \mathbb{N}$, takva da za sve $i = 1, \ldots, k-1$ vrijedi

$$\Phi_i^m|_X = \alpha_{n_i}^m, \text{ za sve } m \in \mathbb{N},$$

i da za sve $i, p \in \mathbb{N}$ takve da je $1 \leq i \leq p \leq k-1$ vrijedi

$$\Phi_i^m|_{W_i} \simeq \Phi_p^m|_{W_i} \text{ u } V_i, \text{ za skoro sve } m.$$

Provedimo sada korak indukcije. Postoji indeks $m_{n_k} \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m \geq m_{n_k}$ vrijedi

$$\alpha_{n_k}^m \simeq \alpha_{n_{k+1}}^m \text{ u } V_k.$$

Budući da za svaki $m \geq m_{n_{k-1}}$ vrijedi

$$\alpha_{n_{k-1}}^m \simeq \alpha_{n_k}^m \text{ u } V_{k-1}$$

i $\alpha_{n_{k-1}}^m$ ima neprekidno proširenje $\Phi_{k-1}^m|_{W_{k-1}} : W_{k-1} \to V_{k-1}$, za svaki $m \geq m_{n_{k-1}}$, po korolaru 1.2.18. za okolinu V_{k-1} postoji neprekidno proširenje ${}^{k-1}\Phi_k^m : W_{k-1} \to V_{k-1}$ funkcije $\alpha_{n_k}^m$ takvo da je

$${}^{k-1}\Phi_k^m \simeq \Phi_{k-1}^m|_{W_{k-1}} \text{ u } V_{k-1}, \text{ za svaki } m \geq m_{n_{k-1}}.$$

Pritom, ako je $m \neq m'$ i $\alpha_{n_k}^m = \alpha_{n_k}^{m'}$, proširenja biramo tako da bude ${}^{k-1}\Phi_k^m = {}^{k-1}\Phi_k^{m'}$ (iste komponentne funkcije $\alpha_{n_k}^m$ uvijek proširujemo istim proširenjem).
Budući da je $W_{k-1} \subseteq W_{k-2}$, po konstrukciji vrijedi

$$\Phi_{k-2}^m|_{W_{k-1}} \simeq \Phi_{k-1}^m|_{W_{k-1}} \text{ u } V_{k-2}, \text{ za svaki } m \geq m_{n_{k-2}},$$

pa zbog $V_{k-1} \subseteq V_{k-2}$ vrijedi

$${}^{k-1}\Phi_k^m \simeq \Phi_{k-2}^m|_{W_{k-1}} \text{ u } V_{k-2}, \text{ za svaki } m \geq \max\left\{m_{n_{k-1}}, m_{n_{k-2}}\right\}.$$

Stoga, po korolaru 1.2.18. za okolinu V_{k-2} postoji proširenje ${}^{k-2}\Phi_k^m : W_{k-2} \to V_{k-2}$ funkcije ${}^{k-1}\Phi_k^m$ takvo da je

$${}^{k-2}\Phi_k^m \simeq \Phi_{k-2}^m|_{W_{k-2}} \text{ u } V_{k-2}, \text{ za svaki } m \geq \max\left\{m_{n_{k-1}}, m_{n_{k-2}}\right\}.$$

Pritom, ako je $m \neq m'$ i ${}^{k-1}\Phi_k^m = {}^{k-1}\Phi_k^{m'}$, proširenja biramo tako da bude ${}^{k-2}\Phi_k^m = {}^{k-2}\Phi_k^{m'}$ (iste komponentne funkcije ${}^{k-1}\Phi_k^m$ uvijek proširujemo istim proširenjem).

Nastavljajući na ovaj način, pazeći na konačnost ukupnog broja proširenja u svakom koraku, nakon ukupno $k-1$ koraka dobit ćemo preslikavanja ${}^{1}\Phi_k^m : W_1 \to V_1$, za skoro sve $m \in \mathbb{N}$, takva da je

$${}^{1}\Phi_k^m \simeq \Phi_1^m|_{W_1} \text{ u } V_1, \text{ za svaki } m \geq m_k^1 = \max\left\{m_{n_{k-1}}, \ldots, m_{n_1}\right\}.$$

Konačno, neka je za svaki $m \geq m_k^1$ funkcija $\Phi_k^m : Q \to Q$ proizvoljno neprekidno proširenje preslikavanja ${}^{1}\Phi_k^m : W_1 \to V_1$, pri čemu za sve $m \neq m'$ za koje je ${}^{1}\Phi_k^m = {}^{1}\Phi_k^{m'}$ proširenja biramo tako da bude $\Phi_k^m = \Phi_k^{m'}$ (iste komponentne funkcije ${}^{1}\Phi_k^m$ uvijek proširujemo istim proširenjem). Za preostali početni komad skupa $\mathbb{N}$, to jest, za sve $m < m_k^1$, neka je $\Phi_k^m : Q \to Q$ proizvoljno neprekidno proširenje preslikavanja $\alpha_{n_k}^m : X \to Q$. Budući da je

$$\alpha_{n_k}^m : X \to V_k, \text{ za svaki } m \geq m_{n_k} \text{ i}$$

$$\Phi_k^m|_X = \alpha_{n_k}^m, \text{ za sve } m \in \mathbb{N},$$

to za sve $m \geq m_{n_k}$ postoji okolina U_k^m od X u Q takva da je

$$\Phi_k^m\left(U_k^m\right) \subseteq V_k.$$

Pritom, ako je $m \neq m'$ i $\Phi_k^m = \Phi_k^{m'}$, okoline biramo tako da bude $U_k^m = U_k^{m'}$ (istim komponentnim funkcijama Φ_k^m uvijek pridružujemo istu okolinu). Budući da je

$$\operatorname{card}\left(\{U_k^m : m \geq m_{n_k}\}\right) < \aleph_0,$$

to je $\bigcap\limits_{m \geq m_{n_k}} U_k^m$ okolina od X. Neka je

$$W_k \subseteq \bigcap_{m \geq m_{n_k}} U_k^m \cap W_{k-1}$$

zatvorena okolina od X (koja postoji zbog normalnosti prostora Q). Tada je

$$\Phi_k^m\left(W_k\right) \subseteq V_k, \text{ za svaki } m \geq m_{n_k}.$$

Primjetimo da smo ovom konstrukcijom postigli da, za sve $i, p \in \mathbb{N}$ takve da je $1 \leq i \leq p \leq k$, vrijedi

$$\Phi_i^m|_{W_i} \simeq \Phi_p^m|_{W_i} \text{ u } V_i, \text{ za skoro sve } m \in \mathbb{N}.$$

Tvrdimo da je ovako definirani $\Phi = \left(\Phi_k^m\right)$ ⊛-fundamentalni niz iz X u Y. Zaista, neka je V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $V_k \subseteq V$. Po konstrukciji postoji okolina W_k od X u Q takva da za svaki $n \geq k$ postoji $m'_n(k) \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_{W_k} \simeq \Phi_{n+1}^m|_{W_k} \text{ u } V_k \subseteq V, \text{ za svaki } m \geq m'_n(k).$$

Uz to, za svaki $k \in \mathbb{N}$ je

$$\operatorname{card}\left(\{\Phi_k^m : m \in \mathbb{N}\}\right) < \aleph_0,$$

što znači da je $\Phi : X \to Y$ ⊛-fundamentalni niz. Budući da je

$$\Phi_k^m|_X = \alpha_{n_k}^m, \text{ za sve } n, m \in \mathbb{N},$$

to je $\alpha' = \left(\alpha_{n_k}^m\right) = \Phi|_X$ (⊛-aproksimativni niz α' je aproksimativna restikcija od Φ) pa zbog $\alpha' \sim \alpha$ vrijedi $\Phi|_X \sim \alpha$. Time je dokaz gotov. ■

Propozicija 2.4.13 Neka su $\Phi, \Phi' : X \to Y$ ⊛-fundamentalni nizovi. Tada je $\Phi \sim \Phi'$ ako i samo ako je $\Phi|_X \sim \Phi'|_X$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\Phi \sim \Phi'$. Neka je V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoje okolina U od X u Q i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_n'^m|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n$$

pa je, pogotovo,

$$\Phi_n^m|_X \simeq \Phi_n'^m|_X \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Dakle, $\Phi|_X \sim \Phi'|_X$.

Obratno, pretpostavimo da je $\Phi|_X \sim \Phi'|_X$. Neka je V proizvoljna otvorena okolina od Y u Q. Tada postoje okolina U' od X u Q i $n'_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za sve $n, n' \geq n'_0$ postoji $m'_{nn'} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_{n'}^m|_{U'} \simeq \Phi_n^m|_{U'} \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m'_{nn'}.$$

Nadalje, postoje okolina U'' od X u Q i $n''_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, n' \geq n''_0$ postoji $m''_{nn'} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_{n'}'^m|_{U''} \simeq \Phi_n'^m|_{U''} \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m''_{nn'}.$$

Konačno, postoji $n_0''' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0'''$ postoji $m_n' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_X \simeq \Phi_n'^m|_X \ \text{ u } \ V, \ \text{ za svaki } m \geq m_n'.$$

Neka je $n_0 = \max\left\{n_0', n_0'', n_0'''\right\}$ i, za svaki $n \geq n_0$, stavimo $m_n = \max\left\{m_{n_0 n}', m_{n_0 n}'', m_n'\right\}$.
Sada, po teoremu 1.2.19., za svaki $m \geq m_{n_0}$ postoji okolina U^m od X u Q takva da je

$$\Phi_{n_0}^m|_{U^m} \simeq \Phi_{n_0}'^m|_{U^m} \ \text{ u } \ V.$$

Pritom, ako je $m, m' \geq m_{n_0}$ i $\left(\Phi_{n_0}^m, \Phi_{n_0}'^m\right) = \left(\Phi_{n_0}^{m'}, \Phi_{n_0}'^{m'}\right)$, okoline biramo tako da bude $U^m = U^{m'}$ (istim parovima $\left(\Phi_{n_0}^m, \Phi_{n_0}'^m\right)$ uvijek pridružujemo istu okolinu). Budući da je

$$\operatorname{card}\left(\left\{\left(\Phi_{n_0}^m, \Phi_{n_0}'^m\right) : m \geq m_{n_0}\right\}\right) \leq \operatorname{card}\left(\left\{\Phi_{n_0}^m : m \geq m_{n_0}\right\}\right) \cdot \operatorname{card}\left(\left\{\Phi_{n_0}'^m : m \geq m_{n_0}\right\}\right) < \aleph_0,$$

to je i

$$\operatorname{card}\left(\left\{U^m : m \geq m_{n_0}\right\}\right) < \aleph_0$$

pa je $U''' := \bigcap\limits_{m \geq m_{n_0}} U^m$ okolina od X u Q takva da je

$$\Phi_{n_0}^m|_U \simeq \Phi_{n_0}'^m|_U \ \text{ u } \ V, \ \text{ za svaki } m \geq m_{n_0}.$$

Konačno, za $U = U' \cap U'' \cap U'''$ i za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_{n_0}^m|_U \simeq \Phi_{n_0}'^m|_U \simeq \Phi_n'^m|_U \ \text{ u } \ V, \ \text{ za svaki } m \geq \max\left\{m_{n_0}, m_n\right\},$$

što znači da je $\Phi \sim \Phi'$ i tvrdnja je dokazana. ■

Sljedeće propozicije nam omogućuju (prirodno) definiranje kompozicije klase $\circledast$-aproksimativnih nizova s klasom $\circledast$-fundamentalnih nizova.

Propozicija 2.4.14 Kompozit (pri komponiranju "po koordinatama") $\circledast$-aproksimativnog niza $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ i $\circledast$-fundamentalnog niza $\Phi = (\Phi_n^m) : Y \to Z$ je $\circledast$-aproksimativni niz

$$\Phi \hat{\circ} \alpha := (\Phi_n^m \circ \alpha_n^m) : X \to Z.$$

Dokaz. Neka je W proizvoljna okolina od Z u Q. Tada postoje okolina V od Y u Q i $n_0' \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0'$ postoji $m_n' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_V \simeq \Phi_{n+1}^m|_V \ \text{ u } \ W, \ \text{ za svaki } m \geq m_n'.$$

Nadalje, za okolinu V od Y u Q postoji $n_0'' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0''$ postoji $m_n'' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_{n+1}^m \ \text{ u } \ V, \ \text{ za svaki } m \geq m_n''.$$

Stavimo $n_0 = \max\left\{n_0', n_0''\right\}$ i, za svaki $n \geq n_0$, $m_n = \max\left\{m_n', m_n''\right\}$.
Sada, za svaki $n \geq n_0$, budući da je relacija homotopije kongruencija, vrijedi

$$\Phi_n^m \circ \alpha_n^m \simeq \Phi_{n+1}^m \circ \alpha_{n+1}^m \ \text{ u } \ W, \ \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Uz to, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\operatorname{card}\left(\{\Phi_n^m \circ \alpha_n^m : m \in \mathbb{N}\}\right) \leq \operatorname{card}\left(\{\Phi_n^m : m \in \mathbb{N}\}\right) \cdot \operatorname{card}\left(\{\alpha_n^m : m \in \mathbb{N}\}\right) < \aleph_0,$$

što znači da je $(\Phi_n^m \circ \alpha_n^m) : X \to Z$ ⊛-aproksimativni niz. ■

Propozicija 2.4.15 Neka su $\alpha, \alpha' : X \to Y$ ⊛-aproksimativni nizovi takvi da je $\alpha \sim \alpha'$ i $\Phi, \Phi' : Y \to Z$ ⊛-fundamentalni nizovi takvi da je $\Phi \sim \Phi'$. Tada je $\Phi \hat{\circ} \alpha \sim \Phi' \hat{\circ} \alpha'$.

Dokaz. Neka je W proizvoljna okolina od Z u Q. Tada postoje okolina V od Y u Q i $n_0' \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0'$ postoji $m_n' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_V \simeq \Phi_n'^m|_V \ \text{ u } \ W, \ \text{ za svaki } m \geq m_n'.$$

Nadalje, za okolinu V od Y u Q postoji $n_0'' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0''$ postoji $m_n'' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_n'^m \ \text{ u } \ V, \ \text{ za svaki } m \geq m_n''.$$

Stavimo $n_0 = \max\left\{n_0', n_0''\right\}$ i, za svaki $n \geq n_0$, $m_n = \max\left\{m_n', m_n''\right\}$.
Za svaki $n \geq n_0$, budući da je homotopija kongruencija, vrijedi

$$\Phi_n^m \circ \alpha_n^m \simeq \Phi_n'^m \circ \alpha_n'^m \ \text{ u } \ W, \ \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

što znači da je $\Phi \hat{\circ} \alpha \sim \Phi' \hat{\circ} \alpha'$. ■

Sada možemo definirati kompoziciju klase ekvivalencije $[\alpha] : X \to Y$ ⊛-aproksimativnih nizova i klase ekvivalencije $[\Phi] : Y \to Z$ ⊛-fundamentalnih nizova pravilom

$$[\Phi] \hat{\circ} [\alpha] := [\Phi \hat{\circ} \alpha].$$

Konačno, neka su $[\alpha]$ i $[\beta]$ klase ⊛-aproksimativnih nizova $\alpha : X \to Y$ i $\beta : Y \to Z$. Tada postoji jedinstvena klasa $[\Psi] : Y \to Z$ ⊛-fundamentalnih nizova takva da je $[\Psi|_Y] = [\beta]$. Definirajmo

$$[\beta] \circ [\alpha] = [\Psi|_Y] \circ [\alpha] := [\Psi \hat{\circ} \alpha]$$

Po propozicijama 2.4.14. i 2.4.15. kompozicija je dobro definirana.

Propozicija 2.4.16 Neka su $\alpha : X \to Y$ i $\beta : Y \to Z$ ⊛-aproksimativni nizovi te $\Phi : X \to Y$, $\Psi : Y \to Z$ i $\Theta : X \to Z$ ⊛-fundamentalni nizovi takvi da je

$$[\Phi|_X] = [\alpha]\,,\ [\Psi|_Y] = [\beta] \ \text{ i } \ [\Theta|_X] = [\beta] \circ [\alpha] = [\Psi \hat{\circ} \alpha]\,.$$

Tada je $[\Theta] = [\Psi \circ \Phi]$.

Dokaz. Po propoziciji 2.4.13. je

$$\Theta \sim \Psi \circ \Phi \iff \Theta|_X \sim (\Psi \circ \Phi)\,|_X$$

pa je dovoljno dokazati da je

$$\Theta|_X \sim (\Psi \circ \Phi)\,|_X.$$

Primjetimo da po pretpostavci vrijedi

$$\Phi|_X \sim \alpha \ \text{ i } \ \Theta|_X \sim \Psi \hat{\circ} \alpha.$$

Neka je W proizvoljna okolina od Z u Q. Tada postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0'$ postoji $m_n' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Theta_n^m|_X \simeq \Psi_n^m \circ \alpha_n^m \ \text{ u } W, \ \text{ za svaki } m \geq m_n'.$$

Nadalje, budući da je $\Theta : Y \to Z$ ⊛-fundamentalni niz, za okolinu W postoje okolina V od Y u Q i $n_0'' \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0''$ postoji $m_n'' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Psi_n^m|_V : V \to W, \ \text{ za svaki } m \geq m_n''.$$

Konačno, za okolinu V postoji $n_0''' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0'''$ postoji $m_n''' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_X \simeq \alpha_n^m \ \text{ u } V, \ \text{ za svaki } m \geq m_n'''.$$

Stavimo $n_0 = \max\left\{n_0', n_0'', n_0'''\right\}$ i, za svaki $n \geq n_0$, stavimo $m_n = \max\{m_n', m_n'', m_n'''\}$. Sada, za svaki $n \geq n_0$, vrijedi

$$\Psi_n^m \circ \Phi_n^m|_X \simeq \Psi_n^m \circ \alpha_n^m \ \text{ u } W, \ \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

pa za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\Theta_n^m|_X \simeq (\Psi_n^m \circ \Phi_n^m)\,|_X \ \text{ u } W, \ \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Dakle,

$$\Theta|_X \sim (\Psi \circ \Phi)\,|_X.$$

■

Propozicija 2.4.17 Komponiranje klasa ⊛-aproksimativnih nizova je asocijativno, to jest, ako su $\alpha : X \to Y$, $\beta : Y \to Z$ i $\gamma : Z \to W$ ⊛-aproksimativni nizovi, onda je

$$[\gamma] \circ ([\beta] \circ [\alpha]) = ([\gamma] \circ [\beta]) \circ [\alpha].$$

Dokaz. Neka su $\Psi : Y \to Z$, $\Theta : Z \to W$ i $\Sigma : Y \to Z$ ⊛-fundamentalni nizovi takvi da je

$$[\Psi|_Y] = [\beta], \; [\Theta|_Z] = [\gamma] \;\text{ i }\; [\Sigma|_Y] = [\gamma \circ \beta] = [\Theta \circ \beta].$$

Tada vrijedi:

$$[\gamma] \circ ([\beta] \circ [\alpha]) = [\gamma] \circ [\Psi \hat{\circ} \alpha] = [\Theta \hat{\circ} (\Psi \hat{\circ} \alpha)] =$$

$$= [\Theta_n^m \circ (\Psi_n^m \circ \alpha_n^m)] = [(\Theta_n^m \circ \Psi_n^m) \circ \alpha_n^m] = [(\Theta \circ \Psi) \hat{\circ} \alpha] = [\Theta \circ \Psi] \hat{\circ} [\alpha] \;\text{ i}$$

$$([\gamma] \circ [\beta]) \circ [\alpha] = [\Theta \hat{\circ} \beta] \circ [\alpha] = [\Sigma] \hat{\circ} [\alpha],$$

a po propoziciji 2.4.16. je

$$[\Sigma] = [\Theta \circ \Psi]$$

pa je tvrdnja dokazana.

■

Za ⊛-aproksimativni niz $1_X = (1_n^m) : X \to X$, gdje je $1_n^m = 1_X : X \to X$, vrijedi

$$[\alpha] \circ [1_X] = [\alpha], \;\text{ za svaki }\; \alpha : X \to Y,$$

$$[1_X] \circ [\beta] = [\beta], \;\text{ za svaki }\; \beta : Z \to X.$$

Time je dokazano da zatvoreni podskupovi od Q kao objekti i klase ekvivalencije ⊛-aproksimativnih nizova kao morfizmi među njima tvore kategoriju koju ćemo označavati $Sh_a^{\circledast}$.
Promotrimo pridruživanje $J^a : Sh_a \to Sh_a^{\circledast}$ koje objekte drži fiksnima, a klasi ekvivalencije aproksimativnoga niza $\alpha : X \to Y$ pridružuje klasu ekvivalencije ⊛-aproksimativnoga niza induciranoga s α.

Propozicija 2.4.18 Pridruživanje $J^a : Sh_a \to Sh_a^{\circledast}$ vjeran je funktor koji nije pun.

Dokaz. Lako je provjeriti da je J^a zaista funktor. Dokažimo da je J_a vjeran, to jest, da je za svaki par zatvorenih podskupova X, Y od Q funkcija $J_{X,Y}^a : Sh_a(X,Y) \to Sh_a^{\circledast}(X,Y)$ injekcija. Neka su $[\alpha], [\alpha'] \in Sh_a(X,Y)$ klase aproksimativnih nizova $(\alpha_n), (\alpha_n') : X \to Y$ takve da je

$$J_{X,Y}^a([\alpha]) = [\beta] = [\beta'] = J_{X,Y}^a([\alpha']),$$

gdje su $\beta, \beta' : X \to Y$ ⊛-aproksimativni nizovi inducirani aproksimativnim nizovima α i α' redom. To znači da je $\beta \sim \beta'$ i da vrijedi

$$\beta_n^m = \alpha_n, \text{ za sve } n, m \in \mathbb{N} \text{ i}$$

$$\beta_n^{\prime m} = \alpha_n', \text{ za sve } n, m \in \mathbb{N}.$$

Iz definicije relacije $\sim$ među ⊛-aproksimativnim nizovima slijedi da za svaku okolinu V od Y u Q postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m \geq m_n$ vrijedi

$$\alpha_n = \beta_n^m \simeq \beta_n^{\prime m} = \alpha_n' \text{ u } V.$$

Dakle, $\alpha \sim \alpha'$, to jest, $[\alpha] = [\alpha']$ pa je injektivnost dokazana.
Primjerom ćemo pokazati da funktor J^a nije pun. Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q te $g, g' : X \to Q$ neprekidne funkcije takve da g nije homotopna g' u Q. Tada ⊛-aproksimativni niz

$$\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$$

$$\alpha_n^{2k} = g, \; \alpha_n^{2k-1} = g', \text{ za svaki } k \in \mathbb{N},$$

nije induciran ni sa jednim aproksimativnim nizom iz X u Y pa

$$[\alpha] \notin J^a_{X,Y}\left(Sh_a\left(X,Y\right)\right),$$

odnosno, funktor J^a nije pun. ■

Po propoziciji 2.4.18. kategoriju Sh_a smijemo smatrati pravom potkategorijom kategorije $Sh_a^{⊛}$.

2.5. ⊛-PRIBLIŽAVAJUĆI NIZOVI

Preostaje nam još definirati kategoriju klasa ⊛-približavajućih nizova koja će dati opis unutarnjega konačnoga gruboga oblika. Pridjev "unutarnji" sugerira da se predstavnici morfizama sastoje od funkcija koje imaju i domenu i kodomenu unutar promatranog prostora, a ne izlaze u okoline prostora (terme ekspanzije).

Definicija 2.5.1 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q. Za funkciju $a:\mathbb{N}^2\to Y^X$ kažemo da je *konačni ∗-približavajući niz* iz X u Y, u oznaci ⊛-približavajući niz, ako vrijedi

(1) za svaki $\varepsilon>0$ postoji $n_0\in\mathbb{N}$ takav da za svaki $n\geq n_0$ postoji $m_n\in\mathbb{N}$ takav da je

$$a(n,m)\overset{\varepsilon}{\simeq}a(n+1,m),\text{ za svaki } m\geq m_n$$

(2) za svaki $n\in\mathbb{N}$ je

$$\operatorname{card}(\{a(n,m):m\in\mathbb{N}\})<\aleph_0.$$

Napomena 2.5.2 Ako je a ⊛-približavajući niz, funkciju $a(n,m):X\to Y$ ubuduće ćemo označavati $a_n^m:X\to Y$ i pisati $a=(a_n^m):X\to Y$.

Ako za ⊛-približavajući niz $a=(a_n^m):X\to Y$, za svaki $n\in\mathbb{N}$, vrijedi $a_n^m=a_n$, za svaki $m\in\mathbb{N}$, onda za a kažemo da je *induciran* približavajućim nizom $(a_n):X\to Y$. Karakterizaciju ⊛-približavajućih nizova daje sljedeća propozicija.

Propozicija 2.5.3 Funkcija $a:\mathbb{N}^2\to Y^X$ takva da, za svaki $n\in\mathbb{N}$, vrijedi

$$\operatorname{card}(\{a_n^m:m\in\mathbb{N}\})<\aleph_0$$

je ⊛-približavajući niz iz X u Y ako i samo ako za svaki $\varepsilon>0$ postoji $n_0\in\mathbb{N}$ takav da za sve $n,n'\geq n_0$ postoji $m_{nn'}\in\mathbb{N}$ takav da je

$$a_n^m\overset{\varepsilon}{\simeq}a_{n'}^m,\ \text{ za svaki } m\geq m_{nn'}.$$

Dokaz. Neka je $a:\mathbb{N}^2\to Y^X$ ⊛-približavajući niz iz X u Y. To znači da za svaki $\varepsilon>0$ postoji $n_0\in\mathbb{N}$ takav da za svaki $n\geq n_0$ postoji $m_n\in\mathbb{N}$ takav da je

$$a_n^m\overset{\varepsilon}{\simeq}a_{n+1}^m,\ \text{ za svaki } m\geq m_n.$$

Neka su $n, n' \in \mathbb{N}$ takvi da je $n, n' \geq n_0$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $n \leq n'$. Stavimo $m_{nn'} = \max\{m_n, m_{n+1}, \ldots, m_{n'-1}\}$. Tada, zbog tranzitivnosti ε-homotopije i definicije ⊛-približavajućeg niza, vrijedi

$$a_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} a_{n+1}^m \overset{\varepsilon}{\simeq} \cdots \overset{\varepsilon}{\simeq} a_{n'-1}^m \overset{\varepsilon}{\simeq} a_{n'}^m, \text{ za svaki } m \geq m_{nn'}.$$

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, n' \geq n_0$ postoji $m_{nn'} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} a_{n'}^m, \text{ za svaki } m \geq m_{nn'}.$$

Za svaki $n \geq n_0$ stavimo $m_n = m_{nn+1}$. Tada je

$$a_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} a_{n+1}^m, \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

to jest, $a : \mathbb{N}^2 \to Y^X$ je ⊛-približavajući niz iz X u Y. ■

Na skupu svih ⊛-približavajućih nizova iz X u Y definiramo razredbenu relaciju na sljedeći način:

Definicija 2.5.4 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q. Za ⊛-približavajući niz $a = (a_n^m) : X \to Y$ kažemo da je *ekvivalentan* ⊛-približavajućem nizu $b = (b_n^m) : X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} b_n^m, \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

U tom slučaju, pišemo: $a \sim b$.

Propozicija 2.5.5 Relacija $\sim$ je ekvivalencija na skupu svih ⊛-približavajućih nizova iz X u Y.

Dokaz.
Refleksivnost: Neka je $a = (a_n^m) : X \to Y$ ⊛-približavajući niz i $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_{nn} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} a_n^m, \text{ za svaki } m \geq m_{nn},$$

to jest, $a \sim a$.
Simetričnost: Neka su $a = (a_n^m) : X \to Y$ i $b = (b_n^m) : X \to Y$ ⊛-približavajući nizovi takvi da je $a \sim b$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} b_n^m, \text{ za svaki } m \geq m_n.$$

Zbog simetričnosti relacije ε-homotopije vrijedi

$$b_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} a_n^m, \text{ za svaki } m \geq m_n$$

pa je $b \sim a$.

Tranzitivnost: Neka su $a = (a_n^m) : X \to Y$, $b = (b_n^m) : X \to Y$ i $c = (c_n^m) : X \to Y$ ⊛-približavajući nizovi takvi da je

$$a \sim b \text{ i } b \sim c.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0'$ postoji $m_n' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} b_n^m, \text{ za svaki } m' \geq m_n.$$

Nadalje, postoji $n_0'' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0''$ postoji $m_n'' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$b_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} c_n^m, \text{ za svaki } m \geq m_n''.$$

Stavimo $n_0 = \max\left\{n_0', n_0''\right\}$ i, za svaki $n \geq n_0$, $m_n = \max\left\{m_n', m_n''\right\}$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$a_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} b_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} c_n^m, \text{ za svaki } m \geq m_n,$$

što znači da je $a \sim c$. ■

Klasu ekvivalencije ⊛-približavajućeg niza $a = (a_n^m) : X \to Y$ označavat ćemo $[a]$, odnosno, $[(a_n^m)]$. Skup svih klasa ekvivalencije ⊛-približavajućih nizova iz X u Y označavat ćemo $InSh^{\circledast}(X,Y)$. Cilj nam je definirati kategoriju objekti koje će biti svi zatvoreni podskupovi od Q, a morfizmi među njima klase ekvivalencije ⊛-približavajućih nizova. U tu svrhu, trebamo definirati kompoziciju ⊛-približavajućih nizova, a potom i kompoziciju klasa ekvivalencije.

Neka su $a = (a_n^m) : X \to Y$ i $b = (b_n^m) : Y \to Z$ ⊛-približavajući nizovi. Primjetimo da kompoziciju $b \circ a$ ne možemo definirati "po koordinatama". Naime, lako je provjeriti da zbog loših svojstava komponiranja ε-neprekidnih funkcija $(b_n^m \circ a_n^m)$, općenito, nije ⊛-približavajući niz. Stoga, kompoziciju ⊛-približavajućih nizova $a = \left(a_k^m\right) : X \to Y$ i $b = (b_n^m) : Y \to Z$ definiramo na sljedeći način:

Neka je (ε_n) silazni niz pozitivnih realnih brojeva takav da

(1) je $\lim \varepsilon_n = 0$

(2) za svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ i za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$b_{n_0}^m \overset{\frac{\varepsilon_{n_0}}{2}}{\simeq} b_n^m, \text{ za svaki } m \geq m_{n_0 n}.$$

Neka je (δ_n) silazni niz pozitivnih realnih brojeva takav da

(1) je $\lim \delta_n = 0$;

(2) za svaki $n \in \mathbb{N}$, za sve $m \geq m_n$ i sve $y, y' \in Y$ takve da je $d(y, y') < \delta_n$ vrijedi

$$d\left(b_n^m(y), b_n^m\left(y'\right)\right) < \varepsilon_n.$$

Pokažimo da takav niz (δ_n) zaista postoji. Neka je $n \in \mathbb{N}$ bilo koji. Tada postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

(a) b_n^m $\frac{\varepsilon_n}{2}$-neprekidna funkcija, a onda i uniformno ε_n-neprekidna na Y, za svaki $m \geq m_n$

(2) $\operatorname{card}(\{b_n^m : m \geq m_n\}) < \aleph_0$.

Za svaku funkciju $b_n^m, m \geq m_n$, postoji $\delta_n^m > 0$ takav da je

$$d\left(b_n^m(y), b_n^m\left(y'\right)\right) < \varepsilon_n,$$

čim su $y, y' \in Y$ takvi da je $d(y, y') < \delta_n^m$. Birajući, za sve $m, m' \geq m_n$, $\delta_n^m = \delta_n^{m'}$ čim je $b_n^m = b_n^{m'}$ (istim komponentnim funkcijama b_n^m pridružujemo isti δ_n^m), postižemo da je

$$\operatorname{card}(\{\delta_n^m : m \geq m_n\}) < \aleph_0$$

pa postoji

$$\delta_n = \min(\{\delta_n^m : m \geq m_n\} \cup \{\delta_1, \ldots \delta_{n-1}\}) > 0$$

s traženim svojstvima. Neka je još (k_n) strogo rastući niz indeksa takav da je, za svaki $k \geq k_n$, vrijedi

$$a_{k_n}^m \overset{\frac{\delta_n}{2}}{\simeq} a_k^m, \text{ za svaki } m \geq m'_{k_n k}.$$

Za sve $n, m \in \mathbb{N}$ stavimo

$$c_n^m = b_n^m \circ a_{k_n}^m.$$

Propozicija 2.5.6 Neka su X, Y i Z zatvoreni podskupovi od Q te $a = \left(a_k^m\right) : X \to Y$ i $b = (b_n^m) : Y \to Z$ ⊛-približavajući nizovi. Tada je

$$c = (c_n^m),\ c_n^m = b_n^m \circ a_{k_n}^m$$

⊛-približavajući niz iz X u Z.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$. Neka je $n \geq n_0$ proizvoljan. Tada postoji niz $\frac{\varepsilon_{n_0}}{2}$-homotopija $H_n^m : Y \times I \to Z$ takav da je

(1) $H_n^m(\cdot, 0) = b_{n_0}^m$ i $H_n^m(\cdot, 1) = b_n^m$, za svaki $m \geq m_{n_0 n}$;

(2) $\operatorname{card}(\{H_n^m : m \geq m_{n_0 n}\}) < \aleph_0$.

Uvjet (2) je moguće postići jer je

$$\operatorname{card}\left(\left\{\left(b_{n_0}^m, b_n^m\right) : m \geq m_{n_0 n}\right\}\right) \leq \operatorname{card}\left(\left\{b_{n_0}^m : m \geq m_{n_0 n}\right\}\right) \cdot \operatorname{card}(\{b_n^m : m \geq m_{n_0 n}\}) < \aleph_0.$$

Za svaku funkciju H_n^m, $m \geq m_{n_0 n}$, postoji δ_n^m takav da je kompozit funkcije H_n^m i bilo koje δ_n^m-neprekidne funkcije $g : X \times I \to Y \times I$ ε_{n_0}-neprekidna funkcija. Zbog (2) je moguće postići da je

$$\operatorname{card}(\{\delta_n^m : m \geq m_{n_0 n}\}) < \aleph_0$$

pa postoji $\delta = \min\{\delta_n^m : m \geq m_{n_0 n}\}$. Neka je $p \geq n$ takav da je $\delta_p < \delta$. Tada je, po propozicijama 1.8.8. i 1.8.14,

$$b_{n_0}^m \circ a_{k_p}^m \overset{\varepsilon_{n_0}}{\simeq} b_n^m \circ a_{k_p}^m, \text{ za svaki } m \geq \max\left\{m_{n_0 n}, m'_{k_p k_p}\right\}$$

ε_{n_0}-homotopijom $H_n^m \circ \left(a_{k_p}^m, id_I\right) X \times I \to Z$. Budući da je $k_p \geq k_n$ (zbog $p \geq n$), to je

$$a_{k_p}^m \overset{\frac{\delta_n}{2}}{\simeq} a_{k_n}^m, \text{ za svaki } m \geq m'_{k_n k_p}$$

$\frac{\delta_n}{2}$-homotopijom $G_p^m : X \times I \to Y$. Stoga je, po propoziciji 1.8.14.,

$$b_n^m \circ a_{k_p}^n \overset{\varepsilon_n}{\simeq} b_n^m \circ a_{k_n}^m, \text{ za svaki } m \geq \max\left\{m_n, m'_{k_n k_p}\right\}$$

ε_n-homotopijom $b_n^m \circ G_p^m : X \times I \to Z$. Nadalje, budući da je

$$a_{k_p}^m \overset{\frac{\delta_{n_0}}{2}}{\simeq} a_{k_{n_0}}^m, \text{ za svaki } m \geq m'_{k_{n_0} k_p}$$

$\frac{\delta_{n_0}}{2}$-homotopijom $G_p'^m : X \times I \to Y$, to je, po propoziciji 1.8.14.,

$$b_{n_0}^m \circ a_{k_p}^n \overset{\varepsilon_{n_0}}{\simeq} b_{n_0}^m \circ a_{k_{n_0}}^m, \text{ za svaki } m \geq \max\left\{m_{n_0}, m'_{k_{n_0} k_p}\right\}$$

ε_{n_0}-homotopijom $b_{n_0}^m \circ G_p'^m : X \times I \to Z$. Sada, zbog tranzitivnosti ε_{n_0}-homotopije, za svaki $m \geq m''_{n_0 n} = \max\left\{m_{n_0}, m_{n_0 n}, m'_{k_p}, m'_{k_n k_p}, m'_{k_{n_0} k_p}\right\}$ vrijedi

$$b_n^m \circ a_{k_n}^m \overset{\varepsilon_{n_0}}{\simeq} b_{n_0}^m \circ a_{k_{n_0}}^m$$

pa iz $\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$ slijedi

$$c_{n_0}^m \overset{\varepsilon}{\simeq} c_n^m, \text{ za svaki } m \geq m''_{n_0 n}.$$

Konačno, budući da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\operatorname{card}\left(\left\{b_n^m \circ a_{k_n}^m : m \in \mathbb{N}\right\}\right) \leq \operatorname{card}\left(\left\{b_n^m : m \in \mathbb{N}\right\}\right) \cdot \operatorname{card}\left(\left\{a_{k_n}^m : m \in \mathbb{N}\right\}\right) < \aleph_0,$$

to je $c = \left(b_n^m \circ a_{k_n}^m\right)$ ⊛-približavajući niz iz X u Z. ■

Napomena 2.5.7 Lako se pokaže da klasa kompozita ⊛-približavajućih nizova ne ovisi o izboru predstavnika klasa $[a]$ i $[b]$. Nadalje, neka su $c, c' : X \to Z$ kompozicije ⊛-približavajućih nizova $a : X \to Y$ i $b : Y \to Z$ dobivene uz izbore nizova (ε_n),(δ_n) i (k_n) te (ε'_n),(δ'_n) i (k'_n) redom. Definirajmo nizove $\left(\varepsilon''_n\right)$,$\left(\delta''_n\right)$ i $\left(k''_n\right)$ takve da je

$$\varepsilon''_n = \max\left\{\varepsilon_n, \varepsilon'_n\right\},\ \delta''_n = \min\left\{\delta_n, \delta'_n\right\},\ k''_n = \max\left\{k_n, k'_n\right\}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},$$

i neka je $c'' : X \to Z$ kompozicija od a i b dobivena uz izbor nizova $\left(\varepsilon''_n\right)$,$\left(\delta''_n\right)$ i $\left(k''_n\right)$. Tada je $c'' \sim c$ i $c'' \sim c'$ pa je $c \sim c'$.

Kompoziciju klasa $[a] = \left[\left(a_k^m\right)\right] : X \to Y$ i $[b] = [(b_n^m)] : Y \to Z$ definiramo pravilom

$$[b] \circ [a] := [b \circ a] = \left[\left(b_n^m \circ a_{k_n}^m\right)\right].$$

Propozicija 2.5.8 Komponiranje klasa ⊛-približavajućih nizova je asocijativno, to jest, ako su $a : X \to Y$, $b : Y \to Z$ i $c : Z \to W$ ⊛-približavajući nizovi, onda je

$$[c] \circ ([b] \circ [a]) = ([c] \circ [b]) \circ [a].$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz asocijativnosti standardnog funkcijskog komponiranja i napomene 2.5.7. ■

Za ⊛-približavajući niz $1_X = (1_n^m) : X \to X$, gdje je $1_n^m = 1_X : X \to X$, za sve $n, m \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$[a] \circ [1_X] = [a], \text{ za svaki } a : X \to Y,$$

$$[1_X] \circ [b] = [b], \text{ za svaki } b : Z \to X.$$

Time je dokazano da zatvoreni podskupovi od Q kao objekti i klase ekvivalencije ⊛-približavajućih nizova kao morfizmi među njima tvore kategoriju koju ćemo označavati $InSh^{\circledast}$ i nazivati *kategorijom unutarnjega konačnoga gruboga oblika*.

Promotrimo pridruživanje $J^p : InSh \to InSh^{\circledast}$ koje objekte drži fiksnima, a klasi ekvivalencije približavajućega niza $a : X \to Y$ pridružuje klasu ekvivalencije ⊛-približavajućega niza induciranoga s a.

Propozicija 2.5.9 Pridruživanje $J^p : InSh \to InSh^{\circledast}$ vjeran je funktor koji nije pun.

Dokaz. Lako je provjeriti da je J^p zaista funktor. Dokažimo da je J^p vjeran, to jest, da je za svaki par zatvorenih podskupova X,Y od Q funkcija $J^p_{X,Y} : InSh(X,Y) \to InSh^{\circledast}(X,Y)$ injekcija. Neka su $[a], [a'] \in InSh(X,Y)$ klase približavajućih nizova $(a_n), (a'_n) : X \to Y$ takve da je

$$J^p_{X,Y}([a]) = [b] = [b'] = J^p_{X,Y}([a']),$$

gdje su $b, b' : X \to Y$ $\circledast$-približavajući nizovi inducirani približavajućim nizovima a i a' redom. To znači da je $b \sim b'$ i da vrijedi

$$b^m_n = a_n, \text{ za sve } n,m \in \mathbb{N} \text{ i}$$

$$b'^m_n = a'_n, \text{ za sve } n,m \in \mathbb{N}.$$

Iz definicije relacije $\sim$ među $\circledast$-približavajućim nizovima slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m \geq m_n$ vrijedi

$$a_n = b^m_n \overset{\varepsilon}{\simeq} b'^m_n = a'_n.$$

Dakle, $a \sim a'$, to jest, $[a] = [a']$ pa je injektivnost dokazana.
Primjerom ćemo pokazati da funktor J^p nije pun. Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q te $g, g' : X \to Y$ funkcije takve da postoji $\varepsilon > 0$ takav da g nije ε-homotopna g'. Tada $\circledast$-približavajući niz

$$a = (a^m_n) : X \to Y$$

$$a^{2k}_n = g,\ a^{2k-1}_n = g', \text{ za svaki } k \in \mathbb{N},$$

nije induciran ni sa jednim približavajućim nizom iz X u Y pa

$$[a] \notin J^p_{X,Y}(InSh(X,Y)),$$

odnosno, funktor J^p nije pun. ∎

Po propoziciji 2.5.9. kategoriju unutarnjega oblika $InSh$ smijemo smatrati pravom potkategorijom kategorije unutarnjega konačnoga gruboga oblika $InSh^{\circledast}$.

Definicija 2.5.10 Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od Q. Reći ćemo da su X i Y *istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika*, u oznaci $InSh^{\circledast}(X) = InSh^{\circledast}(Y)$, ako su izomorfni u kategoriji $InSh^{\circledast}$.

U nastavku rada dokazat ćemo da se klasifikacije po konačnom grubom obliku i unutarnjem konačnom grubom obliku zatvorenih podskupova od Q podudaraju. Štoviše, dokazat ćemo da su kategorije $InSh^{\circledast}$ i $Sh^{\circledast}|_Q$ (puna potkategorija kategorije $Sh^{\circledast}$ kojoj su objekti svi zatvoreni podskupovi od Q) međusobno izomorfne.

3. IZOMORFIZMI KATEGORIJA KONAČNOGA GRUBOGA OBLIKA

3.1. IZOMORFIZAM KATEGORIJA $Sh^{\circledast}|_Q$ I $Sh^{\circledast}_f$

Neka $Sh^{\circledast}|_Q$ označuje punu potkategoriju kategorije $Sh^{\circledast}$ kojoj su objekti svi zatvoreni podskupovi od Q. Uspostavimo vezu među kategorijama $Sh^{\circledast}_f$ i $Sh^{\circledast}|_Q$, to jest, pridružimo klasi $[\Phi] : X \to Y$ proizvoljnoga $\circledast$-fundamentalnoga niza $\Phi = (\Phi^m_n) : X \to Y$ odgovarajući morfizam konačnoga gruboga oblika $F^{\circledast} : X \to Y$.

Teorem 3.1.1 Neka je $\Phi = (\Phi^m_n) : X \to Y$ $\circledast$-fundamentalni niz i neka su $\mathbf{p} : X \to \mathbf{X} = (X_n, p_{nn+1})$, $\mathbf{q} : Y \to \mathbf{Y} = (Y_k, q_{kk+1})$ inkluzijske *HANR*-ekspanzije podskupova X i Y od Q redom. Tada postoje podniz $\Phi' = \left(\Phi^m_{n_k}\right) : X \to Y$ od Φ i $\circledast$-morfizam $\left(f, f^m_k\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *inv*$^{\circledast}$-*HANR* takvi da je, za svaki $k \in \mathbb{N}$,

$$f^m_k = \Phi^m_{n_k}|_{X_{f(k)}} : X_{f(k)} \to Y_k, \text{ za skoro sve } m \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Indukcijom po $k \in \mathbb{N}$ ćemo konstruirati podniz $\left(\Phi^m_{n_k}\right)$ od (Φ^m_n), strogo rastuću funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i preslikavanja $\left(f^m_k\right)$, $k, m \in \mathbb{N}$, takva da je, za svaki $k \in \mathbb{N}$,

$$f^m_k = \Phi^m_{n_k}|_{X_{f(k)}} : X_{f(k)} \to Y_k, \text{ za skoro sve } m \in \mathbb{N}.$$

Neka je $k = 1$. Za okolinu Y_1 od Y u Q postoje okolina U_1 od X u Q i $n_1 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_1$ postoji $m^1_{n_1 n} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi^m_n|_{U_1} \simeq \Phi^m_{n_1}|_{U_1} \text{ u } Y_1, \text{ za svaki } m \geq m^1_{n_1 n}.$$

Budući da je (X_n) baza okolina, to postoji $n'_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $X_{n'_1} \subseteq U_1$. Stavimo $f(1) = n'_1$. Očito, za svaki $n \geq n_1$ vrijedi

$$\Phi^m_n|_{X_{f(1)}} \simeq \Phi^m_{n_1}|_{X_{f(1)}} \text{ u } Y_1, \text{ za svaki } m \geq m^1_{n_1 n}.$$

Definirajmo

$$f_1^m := \begin{cases} \Phi_{n_1}^m|_{X_{f(1)}} : X_{f(1)} \to Y_1, & m \geq m_{n_1 n_1}^1 \\ f : X_{f(1)} \to Y_1, & m < m_{n_1 n_1}^1 \end{cases},$$

gdje je $f : X_{f(1)} \to Y_1$ proizvoljno preslikavanje.

Pretpostavimo da smo za neki $k \in \mathbb{N}$ definirali konačni niz indeksa $n_1 < \cdots < n_{k-1}$, vrijednosti $f(1) < \cdots < f(k-1)$ i preslikavanja $f_1^m, \ldots, f_{k-1}^m$, $m \in \mathbb{N}$, takva da je, za svaki $i \in \{1, \ldots, k-1\}$,

$$f_i^m = \Phi_{n_i}^m|_{X_{f(i)}} : X_{f(i)} \to Y_i, \text{ za skoro sve } m \in \mathbb{N},$$

i provedimo korak indukcije. Za okolinu Y_k od Y u Q, po definiciji $\circledast$-fundamentalnog niza, postoje okolina U_k od X u Q i $n_k \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_k$ postoji $m_{n_k n}^k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi_n^m|_{U_k} \simeq \Phi_{n_k}^m|_{U_k} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } m \geq m_{n_k n}^k.$$

Nadalje, postoji $n'_k \in \mathbb{N}$ takav da je $n'_k > f(k-1)$ i $X_{n'_k} \subseteq U_k$. Stavimo $f(k) = n'_k$. Očito, za svaki $n \geq n_k$ vrijedi

$$\Phi_n^m|_{X_{f(k)}} \simeq \Phi_{n_k}^m|_{X_{f(k)}} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } m \geq m_{n_k n}^k.$$

Definirajmo

$$f_k^m := \begin{cases} \Phi_{n_k}^m|_{X_{f(k)}} : X_{f(k)} \to Y_k, & m \geq m_{n_k n_k}^k \\ f : X_{f(k)} \to Y_k, & m < m_{n_k n_k}^k \end{cases},$$

gdje je $f : X_{f(k)} \to Y_k$ proizvoljno preslikavanje. Ovim induktivnim postupkom smo, za svaki $k \in \mathbb{N}$, definirali niz preslikavanja $f_k^m : X_{f(k)} \to Y_k$, $m \in \mathbb{N}$, s traženim svojstvima. Uz to, za svaki $k \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$f_k^m \simeq \Phi_n^m|_{X_{f(k)}} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } n \geq n_k \text{ i za svaki } m \geq m_{n_k n}^k.$$

Dokažimo da je $(f, f_k^m) \in inv^{\circledast}\text{-}HANR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Neka su $k, k' \in \mathbb{N}$, $k \leq k'$, proizvoljni. Stavimo $\lambda = \max\{f(k), f(k')\} = f(k')$ i $n_0 = \max\{n_k, n_{k'}\}$. Neka je $n \geq n_0$ proizvoljan. Vrijedi

$$q_{kk'} \circ f_{k'}^m \circ p_{f(k')\lambda} = q_{kk'} \circ f_{k'}^m = q_{kk'} \circ \Phi_{n_{k'}}^m|_{X_\lambda},$$

a po konstrukciji je

$$\Phi_{n_{k'}}^m|_{X_\lambda} \simeq \Phi_n^m|_{X_\lambda} \text{ u } Y_{k'}, \text{ za svaki } m \geq m_{n_{k'} n}^{k'},$$

pa je

$$q_{kk'} \circ \Phi_{n_{k'}}^m|_{X_\lambda} \simeq q_{kk'} \circ \Phi_n^m|_{X_\lambda} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } m \geq m_{n_{k'} n}^{k'}.$$

Nadalje,

$$q_{kk'} \circ \Phi_n^m|_{X_\lambda} \simeq \Phi_n^m|_{X_\lambda} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } m \geq m_{n_{k'}n}^{k'},$$

a po konstrukciji je

$$\Phi_n^m|_{X_\lambda} \underset{\text{u } Y_k}{\simeq} \Phi_{n_k}^m|_{X_\lambda} = f_k^m|_{X_\lambda} = f_k^m \circ p_{f(k)\lambda}, \text{ za svaki } m \geq m_{n_k n}^k.$$

Stavimo $m_{kk'} = \max\left\{m_{n_k n}^k, m_{n_{k'}n}^{k'}\right\}$. Tada je

$$q_{kk'} \circ f_{k'}^m \circ p_{f(k')\lambda} \simeq f_k^m \circ p_{f(k)\lambda}, \text{ za svaki } m \geq m_{kk'},$$

odnosno,

$$[q_{kk'}] \circ [f_{k'}^m] \circ \left[p_{f(k')\lambda}\right] = [f_k^m] \circ \left[p_{f(k)\lambda}\right], \text{ za svaki } m \geq m_{kk'}$$

u kategoriji *HANR*.

Konačno, za svaki $k \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\operatorname{card}\left(\{[f_k^m] : m \in \mathbb{N}\}\right) \leq \operatorname{card}\left(\left\{\Phi_{n_k}^m : m \in \mathbb{N}\right\}\right) < \aleph_0.$$

Time smo dokazali da homotopske klase $\left([f_k^m]\right)$ zajedno s indeksnom funkcijom f tvore $\circledast$-morfizam $\left(f, f_k^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *inv*$^{\circledast}$-*HANR*.

■

Iz teorije konačnoga gruboga oblika znamo da $\circledast$-morfizam $\left(f, f_k^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *inv*$^{\circledast}$-*HANR* određuje morfizam $\mathbf{f}^{\circledast} = \left[\left(f, f_k^m\right)\right] : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro*$^{\circledast}$-*HANR* kojemu je pridružen jedinstveni morfizam konačnoga gruboga oblika $F^{\circledast} : X \to Y$. Neka je $\omega : C_f^{\circledast}(X,Y) \to inv^{\circledast}\text{-}HANR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ funkcija koja svakom $\circledast$-fundamentalnom nizu $\Phi : X \to Y$ pridružuje $\circledast$-morfizam $\omega(\Phi) := \left(f, f_k^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *inv*$^{\circledast}$-*HANR* u smislu teorema 3.1.1. Definirajmo pridruživanje

$$\Omega_{X,Y} : Sh_f^{\circledast}(X,Y) \to Sh^{\circledast}|_Q(X,Y)$$

$$\Omega_{X,Y}([\Phi]) := \langle[\omega(\Phi)]\rangle = F^{\circledast}.$$

Time smo, za svaki par zatvorenih podskupova X, Y od Q, definirali pridruživanje $\Omega_{X,Y}$ koje klasi $[(\Phi)] : X \to Y$ $\circledast$-fundamentalnog niza $\Phi : X \to Y$ pridružuje morfizam konačnoga gruboga oblika $F^{\circledast} : X \to Y$. Dokažimo da je pridruživanje $\Omega_{X,Y}$ dobro definirano, to jest, da ne ovisi o izboru predstavnika klase $\circledast$-fundamentalnih nizova.

Propozicija 3.1.2 Neka su $\Phi, \Phi' : X \to Y$ $\circledast$-fundamentalni nizovi. Ako je $\Phi \sim \Phi'$, onda je

$$\Omega_{X,Y}([\Phi]) = \Omega_{X,Y}\left(\left[\Phi'\right]\right).$$

Dokaz. Neka je

$$\Omega_{X,Y}([\Phi]) = \Omega_{X,Y}([(\Phi_n^m)]) = F^{\circledast} = \langle[(f,f_k^m)]\rangle \text{ i}$$

$$\Omega_{X,Y}([\Phi']) = \Omega_{X,Y}\left(\left[\left(\Phi_n'^m\right)\right]\right) = F'^{\circledast} = \left\langle\left[\left(f',f_k'^m\right)\right]\right\rangle,$$

gdje je $\left(f,f_k^m\right) = \omega(\Phi)$ i $\left(f',f_k'^m\right) = \omega(\Phi')$. Dovoljno je dokazati da su $\circledast$-morfizmi

$$(f,f_k^m), \left(f',f_k'^m\right) : \mathbf{X} = (X_n, p_{nn+1}) \to \mathbf{Y} = (Y_k, q_{kk+1})$$

ekvivalentni u *inv*$^{\circledast}$-*HANR*. Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Zbog $(\Phi_n^m) \sim \left(\Phi_n'^m\right)$, za okolinu Y_k od Y u Q postoje okolina U od X u Q i $n_1 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_1$ postoji m_n^1 takav da je

$$\Phi_n^m|_U \simeq \Phi_n'^m|_U \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } m \geq m_n^1.$$

Nadalje, postoji indeks $n_k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$f_k^m = \Phi_{n_k}^m|_{X_{f(k)}} : X_{f(k)} \to Y_k, \text{ za svaki } m \geq m_{n_k n_k}^k \text{ i}$$

$$\Phi_n^m|_{X_{f(k)}} \simeq \Phi_{n_k}^m|_{X_{f(k)}} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } n \geq n_k \text{ i za svaki } m \geq m_{n_k n}^k.$$

Analogno, postoji indeks $n_k' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$f_k'^m = \Phi_{n_k'}'^m|_{X_{f'(k)}} : X_{f'(k)} \to Y_k, \text{ za svaki } m \geq m_{n_k n_k}'^k \text{ i}$$

$$\Phi_n'^m|_{X_{f'(k)}} \simeq \Phi_{n_k'}'^m|_{X_{f'(k)}} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } n \geq n_k' \text{ i za svaki } m \geq m_{n_k n}'^k.$$

Konačno, postoji indeks $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $X_{n_2} \subseteq U$. Stavimo $\lambda = \max\{f(k), f'(k), n_2\}$, $n_0 = \max\left\{n_1, n_k, n_k'\right\}$ i $m_0 = \max\left\{m_n^1, m_{n_k n_k}^k, m_{n_k n_k}'^k, m_{n_k n_0}^k, m_{n_k n_0}'^k\right\}$. Za svaki $m \geq m_0$ vrijedi

$$f_k^m \circ p_{f(k)\lambda} = f_k^m|_{X_\lambda} = \Phi_{n_k}^m|_{X_\lambda} \text{ i}$$

$$f_k'^m \circ p_{f'(k)\lambda} = f_k'^m|_{X_\lambda} = \Phi_{n_k'}'^m|_{X_\lambda}.$$

Sada dobivamo

$$\Phi_{n_k}^m|_{X_\lambda} \simeq \Phi_{n_0}^m|_{X_\lambda} \simeq \Phi_{n_0}'^m|_{X_\lambda} \simeq \Phi_{n_k'}'^m|_{X_\lambda} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } m \geq m_0,$$

odnosno,

$$f_k^m \circ p_{f(k)\lambda} \simeq f_k'^m \circ p_{f'(k)\lambda}, \text{ za svaki } m \geq m_0,$$

što znači da su $\circledast$-morfizmi $\left(f,f_k^m\right)$ i $\left(f',f_k'^m\right)$ ekvivalentni u *inv*$^{\circledast}$-*HANR*, to jest,

$$F^{\circledast} = \langle[(f,f_n^m)]\rangle = \left\langle\left[\left(f',f_n'^m\right)\right]\right\rangle = F'^{\circledast}.$$

■

Propozicija 3.1.3 Morfizam konačnoga gruboga oblika $F^{\circledast} = \langle [\omega(\Phi)] \rangle$ ne ovisi o izboru baza okolina (X_n) i (Y_n) od X i Y u Q redom.

Dokaz. Neka je $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$ $\circledast$-fundamentalni niz i neka su za početak (X_n) i (X'_n) te (Y_k) i $\left(Y'_k\right)$ silazne baze otvorenih okolina od X i Y u Q redom takve da je $X'_n \subseteq X_n$ i $Y'_k \subseteq Y_k$, za sve $n, k \in \mathbb{N}$. Neka su

$$(f, f_k^m) : \mathbf{X} = (X_n, p_{nn+1}) \to \mathbf{Y} = (Y_k, q_{kk+1}) \text{ i}$$

$$\left(f', f_k'^m\right) : \mathbf{X}' = \left(X'_n, p'_{nn+1}\right) \to \mathbf{Y}' = \left(Y'_k, q'_{kk+1}\right)$$

$\circledast$-morfizmi u *inv*$^{\circledast}$*-HANR* takvi da je

$$\omega(\Phi) = (f, f_k^m) \text{ i } \omega'(\Phi) = \left(f', f_k'^m\right).$$

Dovoljno je dokazati da je

$$\langle [(f, f_k^m)] \rangle = \left\langle \left[\left(f', f_k'^m\right) \right] \right\rangle,$$

to jest, da su morfizmi

$$\mathbf{f}^{\circledast} = [(f, f_k^m)] : \mathbf{X} \to \mathbf{Y} \text{ i } \mathbf{f}'^{\circledast} = \left[\left(f', f_k'^m\right) \right] : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$$

ekvivalentni u *pro*$^{\circledast}$*-HANR* jer će u tom slučaju inducirani morfizmi konačnoga gruboga oblika $F^{\circledast}$ i $F'^{\circledast}$ redom biti isti. Definirajmo morfizme $(1_{\mathbb{N}}, i_n) : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}$ i $(1_{\mathbb{N}}, j_k) : \mathbf{Y}' \to \mathbf{Y}$ takve da su

$$i_n : X'_n \hookrightarrow X_n \text{ i } j_k : Y'_k \hookrightarrow Y_k, \text{ za sve } n, k \in \mathbb{N},$$

inkluzije. Tvrdimo da su $\mathbf{i} = [(1_{\mathbb{N}}, i_n)] : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}$ i $\mathbf{j} = [(1_{\mathbb{N}}, j_k)] : \mathbf{Y}' \to \mathbf{Y}$ izomorfizmi u *pro-HANR*. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada postoji $n' \geq n \in \mathbb{N}$ takav da je $X_{n'} \subseteq X'_n$. Stavimo $i'(n) = n'$. Time je definirana indeksna funkcija $i' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Nadalje, neka je

$$i'_n : X_{i'(n)} \hookrightarrow X'_n, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},$$

inkluzija. Tada je $(i', i'_n) : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ morfizam u *inv-HANR* za kojega vrijedi

$$\mathbf{i} \circ \mathbf{i}' = \mathbf{1}_{\mathbf{X}} \text{ i } \mathbf{i}' \circ \mathbf{i} = \mathbf{1}_{\mathbf{X}'},$$

gdje je $\mathbf{i}' = [(i', i'_n)] : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$. Zaista, neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Stavimo $\lambda = i'(n)$. Tada je

$$i_n \circ i'_{1_{\mathbb{N}}(n)} \circ p_{i'(1_{\mathbb{N}}(n))\lambda} = i_n \circ i'_n \circ p_{\lambda\lambda} = p_{ni'(n)} : X_{i'(n)} \hookrightarrow X_n$$

pa je $\mathbf{i}\circ\mathbf{i}'=\mathbf{1_X}$. Nadalje,

$$i'_n\circ i_{i'(n)}\circ p'_{1_{\mathbb{N}}(i'(n))\lambda}=i'_n\circ i_\lambda\circ p'_{\lambda\lambda}=p'_{ni'(n)}:X'_{i'(n)}\hookrightarrow X'_n$$

pa je $\mathbf{i}'\circ\mathbf{i}=\mathbf{1_{X'}}$, čime je dokazano da je $\mathbf{i}:\mathbf{X}'\to\mathbf{X}$ izomorfizam u *pro-HANR* kojemu je $\mathbf{i}':\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$ inverz. Analogno se dokaže da je $\mathbf{j}=[(1_{\mathbb{N}},j_k)]:\mathbf{Y}'\to\mathbf{Y}$ izomorfizam u *pro-HANR*. Dakle, $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$ su kanonski izomorfizmi među ekspanzijama $\mathbf{X}'$ i $\mathbf{X}$ od X, odnosno, među ekspanzijama $\mathbf{Y}'$ i $\mathbf{Y}$ od Y redom. Tvrdimo da je

$$\mathbf{f}^{*}\circ\mathbf{J}^{\circledast}(\mathbf{i})=\mathbf{J}^{\circledast}(\mathbf{j})\circ\mathbf{f}'^{*}.$$

Treba dokazati da je

$$(f,f_k^m)\circ(1_{\mathbb{N}},i_n^m)\sim(1_{\mathbb{N}},j_k^m)\circ\left(f',f_k'^m\right)$$

u *inv*$^{\circledast}$*-HANR*. Neka je $k\in\mathbb{N}$ proizvoljan. Stavimo

$$\lambda=\max\left\{f(k),f'(k)\right\},\ n'=\max\left\{n_k,n'_k\right\}\ \text{ i }\ m_k=\max\left\{m^k_{n_kn'},m'^k_{n_kn'}\right\}.$$

Tada vrijedi

$$f_k^m\circ i^m_{f(k)}\circ p'_{1_{\mathbb{N}}(f(k))\lambda}=f_k^m\circ i^m_{f(k)}\circ p'_{f(k)\lambda}=\Phi^m_{n_k}|_{X'_\lambda}\simeq\Phi^m_{n'}|_{X'_\lambda}\ \text{ u } Y_k,\ \text{ za svaki } m\geq m^k_{n_kn'}\ \text{ i}$$

$$j_k^m\circ f'^m_{1_{\mathbb{N}}(k)}\circ p'_{f'(1_{\mathbb{N}}(k))\lambda}=j_k^m\circ f_k'^m\circ p'_{f'(k)\lambda}=j_k^m\circ\Phi^m_{n'_k}|_{X'_\lambda}\simeq j_k^m\circ\Phi^m_{n'}|_{X'_\lambda}\ \text{ u } Y_k,\ \text{ za svaki } m\geq m'^k_{n_kn'},$$

pa je, za svaki $m\geq m_k$,

$$f_k^m\circ i^m_{f(k)}\circ p'_{1_{\mathbb{N}}(f(k))\lambda}=j_k^m\circ f'^m_{1_{\mathbb{N}}(k)}\circ p'_{f'(1_{\mathbb{N}}(k))\lambda}$$

u *inv*$^{\circledast}$*-HANR*. Dakle, $\langle\mathbf{f}^{\circledast}\rangle=\left\langle\mathbf{f}'^{\circledast}\right\rangle$ pa je $F^{\circledast}=F'^{\circledast}$.

Neka su sada (X_n) i (X'_n) te (Y_k) i $\left(Y'_k\right)$ proizvoljne silazne baze otvorenih okolina od X i Y u Q redom i neka su

$$(f,f_k^m):\mathbf{X}=(X_n,p_{nn+1})\to\mathbf{Y}=(Y_k,q_{kk+1})\ \text{ i}$$

$$\left(f',f_k'^m\right):\mathbf{X}'=\left(X'_n,p'_{nn+1}\right)\to\mathbf{Y}'=\left(Y'_k,q'_{kk+1}\right)$$

$\circledast$-morfizmi u *inv*$^{\circledast}$*-HANR* takvi da je

$$\omega(\Phi)=(f,f_k^m)\ \text{ i }\ \omega'(\Phi)=\left(f',f_k'^m\right).$$

Neka su $F^{\circledast}=\left\langle\left[\left(f,f_k^m\right)\right]\right\rangle:X\to Y$ i $F'^{\circledast}=\left\langle\left[\left(f',f_k'^m\right)\right]\right\rangle:X\to Y$ inducirani morfizmi konačnoga gruboga oblika. Za sve $n,k\in\mathbb{N}$ stavimo

$$X''_n=X_n\cap X'_n\ \text{ i }\ Y''_k=Y_k\cap Y''_k.$$

Tada su (X_n'') i (Y_k'') silazne baze otvorenih okolina od X i Y u Q redom takve da je $X_n'' \subseteq X_n, X_n'$ i $Y_k'' \subseteq Y_k, Y_k'$, za sve $n, k \in \mathbb{N}$. Neka je

$$\left(f'', f_k''^m\right) : \mathbf{X}'' = \left(X_n'', p_{nn+1}''\right) \to \mathbf{Y}'' = \left(Y_k'', q_{kk+1}''\right)$$

$\circledast$-morfizam u *inv*$^{\circledast}$-*HANR* takav da je

$$\omega''(\Phi) = \left(f'', f_k''^m\right)$$

i neka je $F''^{\circledast} = \left\langle \left[\left(f'', f_k''^m\right)\right] \right\rangle : X \to Y$ inducirani morfizam konačnoga gruboga oblika. Po već dokazanom dijelu propozicije vrijedi

$$\langle [(f, f_k^m)] \rangle = \left\langle \left[\left(f'', f_k''^m\right)\right] \right\rangle \text{ i } \left\langle \left[\left(f', f_k'^m\right)\right] \right\rangle = \left\langle \left[\left(f'', f_k''^m\right)\right] \right\rangle$$

pa je $F^{\circledast} = F'^{\circledast}$. Time je dokaz gotov. ■

Propozicija 3.1.4 Neka su X, Y, Z zatvoreni podskupovi od Q i $[\Phi] \in Sh_f^{\circledast}(X, Y)$, $[\Psi] \in Sh_f^{\circledast}(Y, Z)$ proizvoljni morfizmi. Tada vrijedi

$$\Omega_{X,Z}([\Psi] \circ [\Phi]) = \Omega_{Y,Z}([\Psi]) \circ \Omega_{X,Y}([\Phi]).$$

Dokaz. Neka je $\Omega_{X,Y}([\Phi]) = F^{\circledast}$, $\Omega_{Y,Z}([\Psi]) = G^{\circledast}$ i $\Omega_{X,Z}([\Psi] \circ [\Phi]) = H^{\circledast}$. Treba dokazati da je

$$H^{\circledast} = G^{\circledast} \circ F^{\circledast}.$$

Neka su $\circledast$-fundamentalni nizovi $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$ i $\Psi = (\Psi_n^m) : Y \to Z$ predstavnici klasa $[\Phi]$ i $[\Psi]$ redom. $\circledast$-fundamentalni nizovi (Φ_n^m), (Ψ_n^m) i $\Theta = (\Theta_n^m) = (\Psi_n^m) \circ (\Phi_n^m)$ određuju $\circledast$-morfizme $\omega(\Phi) = \left(f, f_k^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $\omega(\Psi) = \left(g, g_k^m\right) : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ i $\omega(\Theta) = \left(h, h_k^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$ u *inv*$^{\circledast}$-*HANR* redom za koje vrijedi

$$\mathbf{f}^{\circledast} = [(f, f_k^m)] : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

$$\mathbf{g}^{\circledast} = [(g, g_k^m)] : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z},$$

$$\mathbf{h}^{\circledast} = [(h, h_k^m)] : \mathbf{X} \to \mathbf{Z},$$

gdje su $\mathbf{f}^{\circledast}$, $\mathbf{g}^{\circledast}$ i $\mathbf{h}^{\circledast}$ morfizmi u *pro*$^{\circledast}$-*HANR* koji induciraju morfizme konačnoga gruboga oblika $F^{\circledast}$, $G^{\circledast}$ i $H^{\circledast}$ redom. Stavimo

$$(g, g_k^m) \circ (f, f_k^m) = \left(h', h_k'^m\right).$$

Dovoljno je dokazati da je $\left(h,h_k^m\right)\sim\left(h',h_k^{\prime m}\right)$ u *inv*$^{\circledast}$-*HANR*. Neka je $k\in\mathbb{N}$ proizvoljan. Stavimo $\lambda=\max\left\{h(k),h'(k)\right\}$. Za skoro sve $m\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$h_k^{\prime m}\circ p_{h'(k)\lambda}=\left(g_k^m\circ f_{g(k)}^m\right)\circ p_{f(g(k))\lambda}=g_k^m\circ\left(f_{g(k)}^m\circ p_{f(g(k))\lambda}\right)=$$

$$=g_k^m\circ f_{g(k)}^m|_{X_\lambda}=\Psi_{n_k'}^m\circ\Phi_{n_{g(k)}}^m|_{X_\lambda}\text{ i}$$

$$h_k^m\circ p_{h(k)\lambda}=h_k^m|_{X_\lambda}=\Theta_{n_k''}^m|_{X_\lambda}=\Psi_{n_k''}^m\circ\Phi_{n_k''}^m|_{X_\lambda}.$$

Neka je $k_0=\max\left\{n_k',n_k'',n_{g(k)}\right\}$. Tada za skoro sve $m\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$\Phi_{n_{g(k)}}^m|_{X_\lambda}\simeq\Phi_{k_0}^m|_{X_\lambda}\ \text{ u } Y_{g(k)}\ \text{ i}$$

$$\Psi_{n_k'}^m|_{Y_{g(k)}}\simeq\Psi_{k_0}^m|_{Y_{g(k)}}\ \text{ u } Z_k,$$

pa zbog usklađenosti homotopije s kompozicijom, za skoro sve $m\in\mathbb{N}$, vrijedi

$$\Psi_{n_k'}^m\circ\Phi_{n_{g(k)}}^m|_{X_\lambda}\simeq\Psi_{k_0}^m\circ\Phi_{k_0}^m|_{X_\lambda}\ \text{ u } Z_k.$$

Nadalje, za skoro sve $m\in\mathbb{N}$, vrijedi

$$\Theta_{n_k''}^m|_{X_\lambda}\simeq\Theta_{k_0}^m|_{X_\lambda}\ \text{ u } Z_k$$

to jest,

$$\Psi_{n_k''}^m\circ\Phi_{n_k''}^m|_{X_\lambda}\simeq\Psi_{k_0}^m\circ\Phi_{k_0}^m|_{X_\lambda}\ \text{ u } Z_k.$$

Sada, za skoro sve $m\in\mathbb{N}$, iz tranzitivnosti homotopije slijedi

$$\Psi_{n_k''}^m\circ\Phi_{n_k''}^m|_{X_\lambda}\simeq\Psi_{n_k'}^m\circ\Phi_{n_{g(k)}}^m|_{X_\lambda}\ \text{ u } Z_k,$$

odnosno,

$$h_k^m\circ p_{h(k)\lambda}\simeq h_k^{\prime m}\circ p_{h'(k)\lambda},$$

što znači da je

$$\left(h,h_k^m\right)\sim\left(h',h_k^{\prime m}\right)$$

i tvrdnja je dokazana. ■

Po propoziciji 3.1.4, pridruživanje $\Omega:Sh_f^{\circledast}\to Sh^{\circledast}|_Q$ zadano pravilima

$$\Omega(X)=X,\ \text{ za svaki zatvoreni podskup } X\subseteq Q,$$

$$\Omega([\Phi]):=\Omega_{X,Y}([\Phi])=F^{\circledast},\ \text{ za svaki } [\Phi]\in Sh_f^{\circledast}(X,Y),$$

(kovarijantni) je funktor. Sada ćemo dokazati da su kategorije $Sh_f^{\circledast}$ i $Sh^{\circledast}|_Q$ izomorfne, pri čemu je funktor Ω kategorijski izomorfizam.

Teorem 3.1.5 Funktor $\Omega : Sh_f^{\circledast} \to Sh^{\circledast}|_Q$ kategorijski je izomorfizam.

Dokaz. Neka su X i Y proizvoljni zatvoreni podskupovi od Q. Treba dokazati da je

$$\Omega_{X,Y} : Sh_f^{\circledast}(X,Y) \to Sh^{\circledast}|_Q(X,Y)$$

bijekcija. Prvo ćemo dokazati injektivnost. Neka su $[\Phi], [\Phi'] \in Sh_f^{\circledast}(X,Y)$ takvi da je

$$F^{\circledast} = \Omega_{X,Y}([\Phi]) = \Omega_{X,Y}\left([\Phi']\right) = F'^{\circledast}$$

i neka su $\circledast$-fundamentalni nizovi $\Phi = (\Phi_n^m), \Phi' = \left(\Phi_n'^m\right) : X \to Y$ predstavnici klasa $[\Phi]$ i $[\Phi']$ redom. Neka je $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ morfizam u *pro*$^{\circledast}$*-HANR* takav da je

$$F^{\circledast} = \left\langle \mathbf{f}^{\circledast} \right\rangle = F'^{\circledast} \text{ i}$$

$$[(f, f_k^m)] = \mathbf{f}^{\circledast} = \left[\left(f', f_k'^m\right)\right],$$

gdje su $\omega(\Phi) = \left(f, f_k^m\right), \omega(\Phi') = \left(f', f_k'^m\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ $\circledast$-morfizmi u *inv*$^{\circledast}$*-HANR* određeni $\circledast$-fundamentalnim nizovima Φ i Φ' redom. Tvrdimo da je $[\Phi] = [\Phi']$, to jest, da je

$$(\Phi_n^m) \sim \left(\Phi_n'^m\right).$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Vrijedi

$$f_k^m \simeq \Phi_{n'}^m|_{X_{f(k)}} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } n' \geq n_k, \text{ za svaki } m \geq m_{n_k n'}^k \text{ i}$$

$$f_k'^m \simeq \Phi_{n'}'^m|_{X_{f'(n)}} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } n' \geq n_k', \text{ za svaki } m \geq m_{n_k' n'}'^k.$$

Stavimo $n_k' = \max\{f(k), f'(k)\}$, $n_k'' = \max\{n_k, n_k'\}$ i $m_{n'}^k = \max\left\{m_{n_k n'}^k, m_{n_k' n'}'^k\right\}$.
Tada je

$$f_k^m|_{X_{n_k'}} \simeq \Phi_{n'}^m|_{X_{n_k'}} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } n' \geq n_k^2, \text{ za svaki } m \geq m_{n'}^k,$$

$$f_k'^m|_{X_{n_k'}} \simeq \Phi_{n'}'^m|_{X_{n_k'}} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } n' \geq n_k^2, \text{ za svaki } m \geq m_{n'}^k.$$

Nadalje, po pretpostavci je

$$(f, f_k^m) \sim \left(f', f_k'^m\right)$$

pa za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoje $\lambda_k \geq n_k'$ i $m_k' \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$f_k^m \circ p_{f(k)\lambda_k} \simeq f_k'^m \circ p_{f'(k)\lambda_k}, \text{ za svaki } m \geq m_k',$$

to jest,

$$f_k^m|_{X_{\lambda_k}} \simeq f_k'^m|_{X_{\lambda_k}} \text{ u } Y_k, \text{ za svaki } m \geq m_k'.$$

Neka je sada V proizvoljna okolina od Y u Q. Tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $Y_{k_0} \subseteq V$. Stavimo $\lambda = \lambda_{k_0}$, $U = X_{\lambda_{k_0}}$, $n_0 = n''_{k_0}$ i $m_{k_0} = \max\left\{m^{k_0}_{n_0}, m'_{k_0}\right\}$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\Phi^m_n|_U \simeq f^m_{k_0}|_U \simeq f'^m_{k_0}|_U \simeq \Phi'^m_n|_U \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_{k_0},$$

to jest,

$$(\Phi^m_n) \sim \left(\Phi'^m_n\right),$$

čime je dokazana injektivnost. Dokažimo još surjektivnost, to jest, da za svaki morfizam konačnoga gruboga oblika $F^{\circledast} : X \to Y$ postoji $\circledast$-fundamentalni niz $\Phi = (\Phi^m_n) : X \to Y$ takav da je

$$\Omega([\Phi]) = F^{\circledast}.$$

Neka je $F^{\circledast} : X \to Y$ proizvoljni morfizam konačnoga gruboga oblika. Tada postoje $\mathbf{f}^{\circledast} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *pro*$^{\circledast}$-*HANR* i $\left(f, f^m_k\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u *inv*$^{\circledast}$-*HANR* takvi da je

$$\left\langle \mathbf{f}^{\circledast} \right\rangle = \langle [(f, f^m_k)] \rangle = F^{\circledast}.$$

Budući da je indeksni skup $\mathbb{N}$ kofinitan, možemo pretpostaviti da je $\circledast$-morfizam $\left(f, f^m_k\right)$ jednostavan pa je indeksna funkcija f rastuća. Neka je, za svaki $k \in \mathbb{N}$, $f'(k) \geq f(k)$ takav da je

$$\mathrm{Cl}\left(X_{f'(k)}\right) \subseteq X_{f(k)}.$$

Stavimo $X'_k = \mathrm{Cl}\left(X_{f'(k)}\right)$. Time je definirana indeksna funkcija $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koju smijemo pretpostaviti da je rastuća, to jest da je

$$X'_{k+1} \subseteq X'_k, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Očito je $\left(X'_k\right)$ silazni niz zatvorenih okolina od X u Q (koji postoji zbog normalnosti prostora Q) takav da je $\cap X'_k = X$. Neka je

$$f'^m_k := f^m_k \circ p_{f(k)f'(k)} = f^m_k|_{X_{f'(k)}} : X_{f'(k)} \to Y_k$$

Tada je, po Lemi 1.4.9.,

$$\left(f', f'^m_k\right) \sim (f, f^m_k)$$

u *inv*$^{\circledast}$-*HANR* pa su morfizmi konačnoga gruboga oblika inducirani ovim dvama $\circledast$-morfizmima jednaki, to jest,

$$\left\langle \left[\left(f', f'^m_k\right)\right] \right\rangle = F^{\circledast}.$$

Konstruirajmo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ $\circledast$-fundamentalni niz $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$ takav da je

$$\omega(\Phi) = \left(f', f_k'^m\right).$$

Neka je, za svaki $m \in \mathbb{N}$, $\Phi_1^m : Q \to Q$ proizvoljno neprekidno proširenje preslikavanja $f_1^m|_{X_1'} : X_1' \to Y_1$. To znači da je

$$\Phi_1^m|_{X_1'} = f_1^m|_{X_1'}, \text{ za svaki } m \in \mathbb{N},$$

pa je

$$\Phi_1^m\left(X_1'\right) \subseteq Y_1, \text{ za svaki } m \in \mathbb{N}.$$

Pritom, ako je $m \neq m'$ i $f_1^m = f_1^{m'}$, proširenja biramo tako da bude $\Phi_1^m = \Phi_1^{m'}$ (iste komponentne funkcije f_1^m uvijek proširujemo istim proširenjem) pa će vrijedi

$$\operatorname{card}\left(\{\Phi_1^m : m \in \mathbb{N}\}\right) < \aleph_0.$$

Pretpostavimo da su preslikavanja $\Phi_1^m, \ldots, \Phi_{n-1}^m : Q \to Q$ definirana tako da je

$$\Phi_1^m|_{X_1'} = f_1^m|_{X_1'}, \text{ za svaki } m \in \mathbb{N},$$

$$\Phi_2^m|_{X_2'} = f_2^m|_{X_2'}, \text{ za svaki } m \in \mathbb{N},$$

$$\ldots$$

$$\Phi_{n-1}^m|_{X_{n-1}'} = f_{n-1}^m|_{X_{n-1}'}, \text{ za svaki } m \in \mathbb{N}$$

i da je, za sve $n', n'' \in \mathbb{N}$ takve da je $1 \leq n' \leq n'' \leq n-1$,

$$\Phi_{n''}^m|_{X_{n'}'} \simeq \Phi_{n'}^m|_{X_{n'}'} \text{ u } Y_{n'}, \text{ za svaki } m \geq m_{n'n''}^{n'}.$$

U oznaci $m_{n',n''}^{n'}$, potencija n' označuje da se homotopska veza uspostavila unutar okoline $Y_{n'}$, a indeks $n'n''$ označuje da se promatrane homotopije odnose na skoro sve parove funkcija $\Phi_{n'}^m, \Phi_{n''}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Pritom, ako je $1 \leq n' \leq n-1$, $m \neq m'$ i $f_{n'}^m = f_{n'}^{m'}$, proširenja smo birali tako da bude $\Phi_{n'}^m = \Phi_{n'}^{m'}$ (iste komponentne funkcije $f_{n'}^m$, za svaki fiksni n', uvijek proširujemo istim proširenjem).

Definirajmo sada preslikavanja $\Phi_n^m : Q \to Q$ tako da je

$$\Phi_n^m|_{X_n'} = f_n^m|_{X_n'}, \text{ za svaki } m \in \mathbb{N} \text{ i}$$

$$\Phi_n^m|_{X_1'} \simeq \Phi_1^m|_{X_1'} \text{ u } Y_1, \text{ za svaki } m \geq m_{1n}^1,$$

$$\Phi_n^m|_{X_2'} \simeq \Phi_2^m|_{X_2'} \text{ u } Y_2, \text{ za svaki } m \geq m_{2n}^2,$$

$$\ldots$$

$$\Phi^m_n|_{X'_{n-1}} \simeq \Phi^m_{n-1}|_{X'_{n-1}} \text{ u } Y_{n-1}, \text{ za svaki } m \geq m^{n-1}_{n-1n}.$$

To ćemo postići sukcesivno proširujući, za skoro sve $m \in \mathbb{N}$, preslikavanje $f^m_n|_{X'_n}$ na skupove

$$X'_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq X'_2 \subseteq X'_1 \subseteq Q.$$

Budući da je $\left(f, f^m_k\right) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ jednostavni $\circledast$-morfizam, vrijedi

$$q_{n-1n} \circ f^m_n \simeq f^m_{n-1}|_{X_{f(n)}} \text{ u } Y_{n-1}, \text{ za svaki } m \geq m'_{n-1n},$$

pa je

$$f^m_n|_{X'_n} \simeq f^m_{n-1}|_{X'_n} \text{ u } Y_{n-1}, \text{ za svaki } m \geq m'_{n-1n}.$$

Koristeći korolar 1.2.18. proširimo, za svaki $m \geq m^{n-1}_{n-1n} = m'_{n-1n}$, preslikavanje $f^m_n|_{X'_n}$ do preslikavanja ${}^{n-1}\Phi^m_n : X'_{n-1} \to Y_{n-1}$ tako da je

$${}^{n-1}\Phi^m_n \simeq \Phi^m_{n-1}|_{X'_{n-1}} \text{ u } Y_{n-1}, \text{ za svaki } m \geq m^{n-1}_{n-1n}.$$

Pritom, ako je $m \neq m'$ i $f^m_n|_{X'_n} = f^{m'}_n|_{X'_n}$, proširenja biramo tako da bude ${}^{n-1}\Phi^m_n ={}^{n-1} \Phi^{m'}_n$ (iste komponentne funkcije $f^m_n|_{X'n}$ uvijek proširujemo istim proširenjem). Po pretpostavci je

$$\Phi^m_{n-1}|_{X'_{n-2}} \simeq \Phi^m_{n-2}|_{X'_{n-2}} \text{ u } Y_{n-2}, \text{ za svaki } m \geq m^{n-2}_{n-2n-1}$$

pa zbog $X'_{n-1} \subseteq X'_{n-2}$ vrijedi

$$\Phi^m_{n-1}|_{X'_{n-1}} \simeq \Phi^m_{n-2}|_{X'_{n-1}} \text{ u } Y_{n-2}, \text{ za svaki } m \geq m^{n-2}_{n-2n-1}.$$

Stavimo $m^{n-2}_{n-2n} = \max\left\{m^{n-1}_{n-1n}, m^{n-2}_{n-2n-1}\right\}$. Iz tranzitivnosti homotopije slijedi

$${}^{n-1}\Phi^m_n \simeq \Phi^m_{n-2}|_{X'_{n-1}} \text{ u } Y_{n-2} \text{ za svaki } m \geq m^{n-2}_{n-2n}.$$

Sada, ponovnom korolara 1.2.18. na preslikavanje ${}^{n-1}\Phi^m_n$, za svaki $m \geq m^{n-2}_{n-2n}$, pazeći na konačnost ukupnog broja proširenja, dobivamo preslikavanje ${}^{n-2}\Phi^m_n : X'_{n-2} \to Y_{n-2}$ takvo da je

$${}^{n-2}\Phi^m_n \simeq \Phi^m_{n-2}|_{X'_{n-2}} \text{ u } Y_{n-2}, \text{ za svaki } m \geq m^{n-2}_{n-2n}.$$

Nastavljajući na ovaj način, pazeći na konačnost ukupnog broja proširenja u svakom koraku, nakon $n-1$ koraka dobit ćemo preslikavanja ${}^{1}\Phi^m_n : X'_1 \to Y_1$, za skoro sve $m \in \mathbb{N}$, i indeks

$$m^1_{1n} = \max\left\{m^{n-1}_{n-1n}, m^{n-2}_{n-2n-1}, m^{n-3}_{n-3n-2}, \ldots, m^1_{12}\right\}$$

tako da vrijedi

$$^1\Phi_n^m|_{X_1'} \simeq \Phi_1^m|_{X_1'} \ \text{ u } Y_1, \ \text{ za svaki } m \geq m_{1n}^1.$$

Konačno, neka je za svaki $m \geq m_{1n}^1$, $\Phi_n^m : Q \to Q$ proizvoljno neprekidno proširenje preslikavanja $^1\Phi_n^m$, pri čemu smo, ako je $m \neq m'$ i $^1\Phi_n^m = ^1\Phi_n^{m'}$, proširenja birali tako da bude $\Phi_n^m = \Phi_n^{m'}$ (iste komponentne funkcije $^1\Phi_n^m$ proširujemo istim proširenjem). Za preostali početni komad skupa $\mathbb{N}$, to jest, za sve $m < m_{1n}^1$, neka je $\Phi_n^m : Q \to Q$ proizvoljno neprekidno proširenje preslikavanja $f_n^m|_{X_n'}$. Po konstrukciji je

$$\Phi_n^m|_{X_n'} = f_n^m|_{X_n'}, \ \text{ za svaki } m \in \mathbb{N},$$

$$\Phi_n^m|_{X_1'} \simeq \Phi_1^m|_{X_1'} \ \text{ u } Y_1, \ \text{ za svaki } m \geq m_{1n}^1,$$

$$\Phi_n^m|_{X_2'} \simeq \Phi_2^m|_{X_2'} \ \text{ u } Y_2, \ \text{ za svaki } m \geq m_{2n}^2,$$

$$\dots$$

$$\Phi_n^m|_{X_{n-1}'} \simeq \Phi_{n-1}^m|_{X_{n-1}'} \ \text{ u } Y_{n-1}, \ \text{ za svaki } m \geq m_{n-1n}^{n-1},$$

pri čemu vrijedi

$$\operatorname{card}\left(\{\Phi_n^m : m \in \mathbb{N}\}\right) < \aleph_0.$$

Dakle, ovim postupkom smo, za sve $n, m \in \mathbb{N}$, definirali preslikavanje

$$\Phi_n^m : Q \to Q$$

pri čemu vrijedi

$$\Phi_n^m|_{X_{f'(n)}} = f_n^{'m}, \ \text{ za sve } n, m \in \mathbb{N},$$

$$\Phi_{n'}^m|_{X_n'} \simeq \Phi_n^m|_{X_n'} \ \text{ u } Y_n, \ \text{ za sve } n \leq n', \ \text{ i svaki } m \geq m_{nn'}^n,$$

$$\operatorname{card}\left(\{\Phi_n^m : m \in \mathbb{N}\}\right) < \aleph_0, \ \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},$$

što znači da je $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$ $\circledast$-fundamentalni niz za takav da je $\omega(\Phi) = \left(f', f_n^{'m}\right)$ pa je

$$\Omega([\Phi]) = \langle [\omega(\Phi)] \rangle = F^{\circledast}.$$

Time je dokazano da je $\Omega : Sh_f^{\circledast} \to Sh^{\circledast}|_Q$ kategorijski izomorfizam. ■

3.2. Izomorfizam kategorija $Sh_f^{\circledast}$ i $Sh_a^{\circledast}$

U konstrukciji ovoga izomorfizma od koristi će nam biti veze dokazane u poglavlju 2.4. Neka je π funkcija koja svakom $\circledast$-aproksimativnom nizu $\alpha : X \to Y$ pridružuje neki $\circledast$-fundamentalni niz $\Phi : X \to Y$ takav da je $\Phi|_X \sim \alpha$. Po teoremu 2.4.12. takav $\circledast$-fundamentalni niz Φ postoji, a po propoziciji 2.4.13. klasa ekvivalencije $[\Phi]$ $\circledast$-fundamentalnoga niza $\Phi = \pi(\alpha)$ ne ovisi o izboru funkcije π. Stoga ima smisla, za proizvoljni par zatvorenih podskupova X, Y od Q, definirati pridruživanje

$$\Pi_{X,Y} : Sh_a^{\circledast}(X,Y) \to Sh_f^{\circledast}(X,Y)$$

$$\Pi_{X,Y}([\alpha]) = [\pi(\alpha)].$$

Teorem 3.2.1 Funkcija $\Pi_{X,Y}$ je bijekcija, za svaki par zatvorenih podskupova X, Y od Q.

Dokaz. Dokažimo prvo da je $\Pi_{X,Y}$ dobro definirana funkcija. Neka su $\alpha, \alpha' : X \to Y$ $\circledast$-aproksimativni nizovi takvi da je $\alpha \sim \alpha'$. Neka je $\Phi = \pi(\alpha)$ i $\Phi' = \pi(\alpha')$. Budući da je

$$\Phi|_X \sim \alpha \sim \alpha' \sim \Phi'|_X,$$

to je, po propoziciji 2.4.13., $\Phi \sim \Phi'$.

Injektivnost: Neka su $\alpha, \alpha' : X \to Y$ $\circledast$-aproksimativni nizovi takvi da je

$$\pi(\alpha) = \Phi \sim \Phi' = \pi\left(\alpha'\right).$$

Budući da je

$$\Phi|_X \sim \alpha \ \text{ i } \ \Phi'|_X \sim \alpha'$$

to je, po propoziciji 2.4.13., $\alpha \sim \alpha'$.

Surjektivnost: Neka je $[\Phi] \in Sh_f^{\circledast}(X,Y)$ proizvoljna klasa ekvivalencije $\circledast$-fundamentalnih nizova i $\Phi = (\Phi_n^m) : X \to Y$ njezin predstavnik. Treba dokazati da postoji $\circledast$-aproksimativni niz $\alpha : X \to Y$ takav da je

$$\Pi_{X,Y}([\alpha]) = [\pi(\alpha)] = [\Phi].$$

Po propoziciji 2.4.10., stavljajući $\alpha = \Phi|_X : X \to Y$ (aproksimativna restrikcija od Φ) dobivamo $\circledast$-aproksimativni niz s traženim svojstvom. ■

Definirajmo sada pridruživanje $\Pi : Sh_a^{\circledast} \to Sh_f^{\circledast}$ među objektima i morfizmima kategorija $Sh_a^{\circledast}$ i $Sh_f^{\circledast}$ na sljedeći način:

· neka je, za svaki zatvoreni podskup $X \subseteq Q$,

$$\Pi(X) = X;$$

· neka je, za svaki par zatvorenih podskupova $X, Y \subseteq Q$ i za svaki $[\alpha] \in Sh_a^{\circledast}(X, Y)$,

$$\Pi([\alpha]) := \Pi_{X,Y}([\alpha]) = [\pi(\alpha)].$$

Teorem 3.2.2 Pridruživanje $\Pi : Sh_a^{\circledast} \to Sh_f^{\circledast}$ je funktor.

Dokaz. Dokažimo da Π čuva kompoziciju, to jest, da za svaka tri zatvorena podskupa X, Y i Z od Q te za svake dvije klase $[\alpha] \in Sh_a^{\circledast}(X, Y)$ i $[\beta] \in Sh_a^{\circledast}(Y, Z)$ vrijedi

$$\Pi_{X,Z}([\beta] \circ [\alpha]) = \Pi_{Y,Z}([\beta]) \circ \Pi_{X,Y}([\alpha]).$$

Neka su $\circledast$-aproksimativni nizovi $\alpha : X \to Y$ i $\beta : Y \to Z$ predstavnici klasa $[\alpha]$ i $[\beta]$ redom te neka su $\Phi : X \to Y$, $\Psi : Y \to Z$ i $\Theta : X \to Z$ $\circledast$-fundamentalni nizovi takvi da je

$$\Pi([\alpha]) = [\Phi],\ \Pi([\beta]) = [\Psi] \ \text{ i } \ \Pi([\beta] \circ [\alpha]) = [\Theta].$$

To znači da je

$$[\Phi|_X] = [\alpha],\ [\Psi|_X] = [\beta] \ \text{ i } \ [\Theta|_X] = [\beta] \circ [\alpha],$$

pa po propoziciji 2.4.16. vrijedi

$$\Pi([\beta] \circ [\alpha]) = [\Theta] = [\Psi \circ \Phi] = [\Psi] \circ [\Phi] = \Pi([\beta]) \circ \Pi([\alpha]).$$

■

Korolar 3.2.3 Funktor $\Pi : Sh_a^{\circledast} \to Sh_f^{\circledast}$ kategorijski je izomorfizam.

Dokaz. Tvrdnja je neposredna posljedica teorema 3.2.1. i 3.2.2. ■

3.3. Izomorfizam kategorija $Sh_a^{\circledast}$ i $InSh^{\circledast}$

Vezu među $\circledast$-približavajućim i $\circledast$-aproksimativim nizovima, a onda i među njihovim klasama ekvivalencije, omogućuje nam lema 1.9.22. Koristeći spomenutu lemu, svakom $\circledast$-približavajućem nizu možemo pridružiti $\circledast$-aproksimativni niz koji mu je "po koordinatama sve bliži i bliži" i u tom ga smislu neprekidno aproksimira.

Definicija 3.3.1 Kažemo da je $\circledast$-aproksimativni niz $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ *neprekidna aproksimacija* $\circledast$-približavajućeg niza $a = (a_n^m) : X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d\left(a_n^m, \alpha_n^m\right) < \varepsilon, \quad \text{za svaki } m \geq m_n.$$

Više o vezi $\circledast$-približavajućih nizova i njihovih neprekidnih aproksimacija nam govori sljedeći teorem.

Teorem 3.3.2 Neka je $a = (a_n^m) : X \to Y$ $\circledast$-približavajući niz. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) Postoji $\circledast$-aproksimativni niz $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ koji je neprekidna aproksimacija od a.

(ii) Za svaka dva $\circledast$-aproksimativna niza $\alpha, \alpha' : X \to Y$ koji su neprekidne aproksimacije $\circledast$-približavajućega niza a vrijedi $\alpha \sim \alpha'$.

Dokaz.

(i) Neka je $a = (a_n^m) : X \to Y$ $\circledast$-približavajući niz i neka je (ε_n) silazni niz pozitivnih realnih brojeva takav da

(1) je $\lim \varepsilon_n = 0$;

(2) za svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ i za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$a_{n_0}^m \overset{\frac{\varepsilon_{n_0}}{2}}{\simeq} a_n^m, \quad \text{za svaki } \; m \geq m_{n_0 n}.$$

Sada, za svaki $n \in \mathbb{N}$, stavimo

$$\alpha_n^m = \begin{cases} g_n^m : X \to Q, & m < m_{nn} \\ a_n^{\prime m} : X \to Q, & m \geq m_{nn} \end{cases},$$

gdje je g_n^m proizvoljno preslikavanje, a $a_n^{'m}$ neprekidna ε_n-bliska aproksimacija $\frac{\varepsilon_n}{2}$-neprekidne funkcije a_n^m. Postojanje funkcije $a_n^{'m}$ slijedi iz leme 1.9.22. Pritom, ako je $m, m' \geq m_{nn}$ i $a_n^m = a_n^{m'}$, neprekidne aproksimacije biramo tako da bude $a_n^{'m} = a_n^{'m'}$ (iste komponentne funkcije a_n^m uvijek aproksimiramo istom neprekidnom aproksimacijom).

Tvrdimo da je $\alpha = (\alpha_n^m)$ $\circledast$-aproksimativni niz iz X u Y. Neka je V proizvoljna otvorena okolina od Y u Q i neka je $\varepsilon > 0$ takav da

(1) je $B(Y, \varepsilon) \subseteq V$

(2) su svaka dva ε-bliska preslikavanja u V homotopna.

Primjetimo da uvjet (2) ima smisla jer je V ANR. Budući da je $\lim \varepsilon_n = 0$, to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Neka je $n \geq n_0$ proizvoljan. Tada postoji $m'_n := m_{n_0 n} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_{n_0}^m \overset{\frac{\varepsilon_{n_0}}{2}}{\simeq} a_n^m, \text{ za svaki } m \geq m'_n.$$

To znači da za svaki $n \geq n_0$ i za svaki $m \geq m'_n$ postoji $\frac{\varepsilon_{n_0}}{2}$-homotopija

$$H_n^m : X \times I \to Y$$

$$H_n^m(\cdot, 0) = a_{n_0}^m, \; H_n^m(\cdot, 1) = a_n^m.$$

Nadalje, po lemi 1.9.22., postoji neprekidna ε_{n_0}-bliska aproksimacija

$$H_n^{'m} : X \times I \to B(Y, \varepsilon_{n_0}) \subseteq V$$

funkcije H_n^m. Sada vrijedi:

$$d\left(\alpha_{n_0}^m, H_n^{'m}(\cdot, 0)\right) \leq d\left(\alpha_{n_0}^m, a_{n_0}^m\right) + d\left(a_{n_0}^m, H_n^{'m}(\cdot, 0)\right) =$$

$$d\left(\alpha_{n_0}^m, a_{n_0}^m\right) + d\left(H_n^m(\cdot, 0), H_n^{'m}(\cdot, 0)\right) < \varepsilon_{n_0} + \varepsilon_{n_0} = 2 \cdot \varepsilon_{n_0} < \varepsilon,$$

pa je

$$\alpha_{n_0}^m \simeq H_n^{'m}(\cdot, 0) \text{ u } V.$$

Analogno je

$$d\left(\alpha_n^m, H_n^{'m}(\cdot, 1)\right) \leq d\left(\alpha_n^m, a_n^m\right) + d\left(a_n^m, H_n^{'m}(\cdot, 1)\right) =$$

$$d\left(\alpha_n^m, a_n^m\right) + d\left(H_n^m(\cdot, 1), H_n^{'m}(\cdot, 1)\right) < \varepsilon_{n_0} + \varepsilon_{n_0} = 2 \cdot \varepsilon_{n_0} < \varepsilon,$$

pa je

$$\alpha_n^m \simeq H_n^{'m}(\cdot, 1) \text{ u } V.$$

Stoga je

$$\alpha_{n_0}^m \simeq H_n^{'m}(\cdot,0) \simeq H_n^{'m}(\cdot,1) \simeq \alpha_n^m \text{ u } V.$$

Konačno, budući da za svaki $n \in \mathbb{N}$ po konstrukciji vrijedi

$$\operatorname{card}(\{\alpha_n^m : m \in \mathbb{N}\}) < \aleph_0,$$

to je $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ $\circledast$-aproksimativni niz.

(ii) Neka su $\alpha = (\alpha_n^m), \alpha' = \left(\alpha_n^{'m}\right) : X \to Y$ neprekidne aproksimacije $\circledast$-približavajućeg niza $a = (a_n^m) : X \to Y$. Tvrdimo da je $\alpha \sim \alpha'$. Neka je V proizvoljna otvorena okolina od Y u Q i neka je $\varepsilon > 0$ takav da

(1) je $B(Y,\varepsilon) \subseteq V$

(2) su svaka dva ε-bliska preslikavanja u V homotopna.

Tada postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0'$ postoji $m_n' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(a_n^m, \alpha_n^m) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ za svaki } m \geq m_n'.$$

Analogno, postoji $n_0'' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0''$ postoji $m_n'' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d\left(a_n^m, \alpha_n^{'m}\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ za svaki } m \geq m_n''.$$

Stavimo $n_0 = \max\left\{n_0', n_0''\right\}$, i svaki $n \geq n_0$, $m \geq m_n = \max\{m_n', m_n''\}$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$d\left(\alpha_n^m, \alpha_n^{'m}\right) \leq d(\alpha_n^m, a_n^m) + d\left(a_n^m, \alpha_n^{'m}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a zbog $d(a_n^m, \alpha_n^m), d\left(a_n^m, \alpha_n^{'m}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ vrijedi

$$\alpha_n^m(X), \alpha_n^{'m}(X) \subseteq B\left(Y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq V$$

pa je $\alpha_n^m \simeq \alpha_n^{'m}$ u V. Dakle, $\alpha \sim \alpha'$.

■

Neka je λ funkcija koja svakom $\circledast$-približavajućem nizu $a : X \to Y$ pridružuje neku neprekidnu aproksimaciju $\alpha : X \to Y$ od a. Po tvrdnji (ii) teorema 3.3.2. klasa ekvivalencije $[\alpha]$ $\circledast$-aproksimativnoga niza $\alpha = \lambda(a)$ ne ovisi o izboru funkcije λ. Stoga ima smisla, za proizvoljni par zatvorenih podskupova X, Y od Q, definirati pridruživanje

$$\Lambda_{X,Y} : InSh^{\circledast}(X,Y) \to Sh_a^{\circledast}(X,Y)$$

$$\Lambda_{X,Y}([a]) = [\lambda(a)].$$

Teorem 3.3.3 Funkcija $\Lambda_{X,Y}$ je bijekcija, za svaki par zatvorenih podskupova X,Y od Q.

Dokaz. Dokažimo prvo da je $\Lambda_{X,Y}$ dobro definirana funkcija. Neka su $a,a' : X \to Y$ $\circledast$-približavajući nizovi takvi da je $a \sim a'$. Neka je $\alpha = \lambda(a)$ i $\alpha' = \lambda(a')$. Treba dokazati da je $\alpha \sim \alpha'$. Neka je V proizvoljna otvorena okolina od Y u Q i neka je $\varepsilon > 0$ takav da

(1) je $B(Y,\varepsilon) \subseteq V$

(2) su svaka dva ε-bliska preslikavanja u V homotopna.

Tada postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0'$ postoji $m_n' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(a_n^m, \alpha_n^m) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ za svaki } m \geq m_n'.$$

Nadalje, postoji $n_0'' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0''$ postoji $m_n'' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d\left(a_n'^m, \alpha_n'^m\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ za svaki } m \geq m_n''.$$

Konačno, postoji $n_0''' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0'''$ postoji $m_n''' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n^m \overset{\frac{\varepsilon}{4}}{\simeq} a_n'^m, \text{ za svaki } m \geq m_n'''.$$

Stavimo $n_0 = \max\{n_0', n_0'', n_0'''\}$ i, za svaki $n \geq n_0$, $m_n = \max\{m_n', m_n'', m_n'''\}$. Neka su $n \geq n_0$ i $m \geq m_n$ proizvoljni. Tada postoji $\frac{\varepsilon}{4}$-homotopija $H_n^m : X \times I \to Y$ takva da je

$$H_n^m(\cdot,0) = a_n^m \text{ i } H_n^m(\cdot,1) = a_n'^m.$$

Po lemi 1.9.22. postoji neprekidna i funkciji H_n^m $\frac{\varepsilon}{2}$-bliska funkcija

$$H_n'^m : X \times I \to B\left(Y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq V.$$

Tada vrijedi

$$d\left(\alpha_n^m, H_n'^m(\cdot,0)\right) \leq d\left(\alpha_n^m, H_n^m(\cdot,0)\right) + d\left(H_n^m(\cdot,0), H_n'^m(\cdot,0)\right) =$$

$$= d\left(\alpha_n^m, a_n^m\right) + d\left(H_n^m(\cdot,0), H_n'^m(\cdot,0)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

i, analogno,

$$d\left(\alpha_n'^m, H_n'^m(\cdot,1)\right) \leq d\left(\alpha_n'^m, H_n^m(\cdot,1)\right) + d\left(H_n^m(\cdot,1), H_n'^m(\cdot,1)\right) =$$

$$= d\left(\alpha_n'^m, a_n'^m\right) + d\left(H_n^m(\cdot,1), H_n'^m(\cdot,1)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pa je

$$\alpha_n^m \simeq H_n^{\prime m}(\cdot,0) \simeq H_n^{\prime m}(\cdot,1) \simeq \alpha_n^{\prime m} \text{ u } V.$$

Dakle, $\alpha \sim \alpha'$.

Injektivnost: Neka su $a, a' : X \to Y$ $\circledast$-približavajući nizovi takvi da je

$$\lambda(a) = \alpha \sim \alpha' = \lambda(a').$$

Treba dokazati da je $a \sim a'$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i $V = B\left(Y, \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Tada postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0'$ postoji $m_n' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_n^{\prime m} \text{ u } V, \text{ za svaki } m \geq m_n'.$$

Nadalje, postoji $n_0'' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0''$ postoji $m_n'' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(a_n^m, \alpha_n^m) < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ za svaki } m \geq m_n''.$$

Konačno, postoji $n_0''' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0'''$ postoji $m_n''' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d\left(a_n^{\prime m}, \alpha_n^{\prime m}\right) < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ za svaki } m \geq m_n'''.$$

Stavimo $n_0 = \max\left\{n_0', n_0'', n_0'''\right\}$ i, za svaki $n \geq n_0$, $m_n = \max\left\{m_n', m_n'', m_n'''\right\}$. Neka su $n \geq n_0$ i $m \geq m_n$ proizvoljni. Tada postoji homotopija $H_n^m : X \times I \to V$ takva da je

$$H_n^m(\cdot,0) = \alpha_n^m \text{ i } H_n^m(\cdot,1) = \alpha_n^{\prime m}.$$

Neka je $G_n^m : X \times I \to Y$ funkcija takva da je

$$d(G_n^m, H_n^m) < \frac{\varepsilon}{3},\ G_n^m(\cdot,0) = a_n^m \text{ i } G_n^m(\cdot,1) = a_n^{\prime m}.$$

Po propoziciji 1.8.4. funkcija G_n^m je ε-neprekidna pa je $a_n^m \overset{\varepsilon}{\simeq} a_n^{\prime m}$. Dakle, $a \sim a'$.

Surjektivnost: Neka je $[\alpha] \in Sh_a^{\circledast}(X,Y)$ proizvoljna klasa $\circledast$-aproksimativnih nizova i $\alpha = (\alpha_n^m) : X \to Y$ njezin predstavnik. Treba dokazati da postoji $\circledast$-približavajući niz $a = (a_n^m) : X \to Y$ takav da je

$$\Lambda_{X,Y}([a]) = [\lambda(a)] = [\alpha].$$

Neka je, za svaki $k \in \mathbb{N}$, $V_k = B\left(Y, \frac{1}{k}\right)$. Tada, za svaki $k \in \mathbb{N}$, postoji $n_0^k \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0^k$ postoji m_n^k takav da je

$$\alpha_n^m \simeq \alpha_{n+1}^m \text{ u } V_k, \text{ za svaki } m \geq m_n^k.$$

Primjetimo da to znači da je $\alpha_{n_0^k}^m : X \to V_k$, za svaki $m \geq m_k' := m_{n_0^k}^k$, i da indekse n_0^k možemo birati strogo rastuće, to jest, tako da je $n_0^k < n_0^{k+1}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Definirajmo

$$\alpha_k^{\prime m} = \alpha_{n_0^k}^m, \text{ za sve } k, m \in \mathbb{N}.$$

Tada je $\alpha' = \left(\alpha_k^{\prime m}\right) : X \to Y$ podniz $\circledast$-aproksimativnog niza α pa je $[\alpha'] = [\alpha]$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka je:

- $a_k^m : X \to Y$ $\frac{3}{k}$-neprekidna funkcija takva da je $d\left(a_k^m, \alpha_k^{\prime m}\right) < \frac{1}{k}$, za svaki $m \geq m_k'$. Pritom, ako je $m, m' \geq m_k'$ i $\alpha_k^{\prime m} = \alpha_k^{\prime m'}$, $\frac{3}{k}$-neprekidne funkcije a_k^m biramo tako da bude $a_k^m = a_k^{m'}$ (istim komponentnim funkcijama $\alpha_k^{\prime m}$ uvijek pridružujemo istu $\frac{3}{k}$-neprekidnu funkciju).

- $a_k^m : X \to Y$ bilo koja funkcija, za svaki $m < m_k'$.

Dokažimo da je ovako konstruirani $a = \left(a_k^m\right)$ $\circledast$-približavajući niz iz X u Y. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{4}$ i neka je $k \geq k_0$ bilo koji. Po konstrukciji i zbog $n_0^k < n_0^{k+1}$ postoji $m_0 := m_{n_0^k n_0^{k+1}}$ takav da je

$$\alpha_{n_0^k}^m \simeq \alpha_{n_0^{k+1}}^m \text{ u } V_k, \text{ za svaki } m \geq m_0,$$

to jest, da je

$$\alpha_k^{\prime m} \simeq \alpha_{k+1}^{\prime m} \text{ u } V_k, \text{ za svaki } m \geq m_0.$$

To znači da za svaki $m \geq m_0$ postoji homotopija $H_k^m : X \times I \to V_k$ takva da je

$$H_k^m(\cdot, 0) = \alpha_k^{\prime m} \text{ i } H_k^m(\cdot, 1) = \alpha_{k+1}^{\prime m}.$$

Neka je $H_k^{\prime m} : X \times I \to Y$ $\frac{3}{k}$-neprekidna funkcija takva da je $d\left(H_k^m, H_k^{\prime m}\right) < \frac{1}{k}$. Tada, za svaki $m \geq m_0' = \max\left\{m_0, m_k', m_{k+1}'\right\}$, vrijedi

$$d\left(a_k^m, H_k^{\prime m}(\cdot, 0)\right) \leq d\left(a_k^m, \alpha_k^{\prime m}\right) + d\left(\alpha_k^{\prime m}, H_k^{\prime m}(\cdot, 0)\right) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \text{ i}$$

$$d\left(a_{k+1}^m, H_k^{\prime m}(\cdot, 1)\right) \leq d\left(a_{k+1}^m, \alpha_{k+1}^{\prime m}\right) + d\left(\alpha_{k+1}^{\prime m}, H_k^{\prime m}(\cdot, 1)\right) < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sada, po propoziciji 1.8.17., za svaki $m \geq m_0'$ vrijedi

$$a_k^m \overset{\varepsilon}{\simeq} H_k^{\prime m}(\cdot, 0) \overset{\varepsilon}{\simeq} H_k^{\prime m}(\cdot, 1) \overset{\varepsilon}{\simeq} a_{k+1}^m,$$

što znači da je $a = \left(a_k^m\right)$ $\circledast$-približavajući niz iz X u Y. Iz konstrukcije je očito da je α' neprekidna aproksimacija od a, to jest, da je $\lambda(a) = \alpha'$. Dakle,

$$\Lambda_{X,Y}([a]) = [\lambda(a)] = \left[\alpha'\right] = [\alpha].$$

Time je dokaz gotov. ■

Definirajmo sada pridruživanje $\Lambda : InSh^{\circledast} \to Sh_a^{\circledast}$ među objektima i morfizmima kategorija $InSh^{\circledast}$ i $Sh_a^{\circledast}$ na sljedeći način:

· neka je, za svaki zatvoreni podskup $X \subseteq Q$,

$$\Lambda(X) = X$$

· neka je, za svaki par zatvorenih podskupova $X, Y \subseteq Q$ i za svaki $[a] \in InSh^{\circledast}(X,Y)$,

$$\Lambda([a]) := \Lambda_{X,Y}([a]) = [\lambda(a)].$$

Teorem 3.3.4 Pridruživanje $\Lambda : InSh^{\circledast} \to Sh_a^{\circledast}$ je funktor.

Dokaz. Dokažimo da Λ čuva kompoziciju, to jest, da za svaka tri zatvorena podskupa X, Y i Z od Q te za svake dvije klase $[a] \in InSh^{\circledast}(X,Y)$ i $[b] \in InSh^{\circledast}(Y,Z)$ vrijedi

$$\Lambda_{X,Z}([b] \circ [a]) = \Lambda_{Y,Z}([b]) \circ \Lambda_{X,Y}([a]).$$

Neka su $a : X \to Y$ i $b : Y \to Z$ $\circledast$-približavajući nizovi koji su predstavnici klasa $[a]$ i $[b]$ redom i neka je $\beta : X \to Y$ neprekidna aproksimacija od b. Tada postoji $\circledast$-fundamentalni niz $\Psi : Y \to Z$ takav da je $\Psi|_Y \sim \beta$. Neka je $b' : Y \to Z$ $\circledast$-približavajući niz kojemu je $\Psi|_Y$ neprekidna aproksimacija. Budući da je $\Lambda_{Y,Z}$ injekcija, to iz $\Psi|_Y \sim \beta$ slijedi $b \sim b'$. Neka je (ε_n) silazni niz pozitivnih realnih brojeva takav da

(1) je $\lim \varepsilon_n = 0$

(2) za svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ i za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$b_{n_0}^m \overset{\frac{\varepsilon_{n_0}}{2}}{\simeq} b_n^m, \text{ za svaki } m \geq m_{n_0 n}$$

(3) za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $m \geq m_{nn}$ vrijedi

$$d\left(\Psi_n^m, b_n'^m\right) < \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

Neka je (δ_n) silazni niz pozitivnih realnih brojeva takav da

(1′) je $\lim \delta_n = 0$

(2′) za svaki $n \in \mathbb{N}$, za sve $m \geq m_{nn}$ i sve $y, y' \in Y$ takve da je $d(y, y') < \delta_n$ vrijedi

$$d\left(b_n^m(y), b_n^m(y')\right) < \varepsilon_n$$

$(3')$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, za sve $m \geq m_{nn}$ i sve $y, y' \in Q$ takve da je $d(y, y') < \delta_n$ vrijedi

$$d\left(\Psi_n^m(y), \Psi_n^m(y')\right) < \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

Primjetimo da se uvjet $(2')$ može ispuniti zbog kompaktnosti od Y i zbog

$$\operatorname{card}\left(\{b_n^m : m \in \mathbb{N}\}\right) < \aleph_0, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},$$

dok se uvjet $(3')$ može ispuniti zbog kompaktnosti od Q i zbog

$$\operatorname{card}\left(\{\Psi_n^m : m \in \mathbb{N}\}\right) < \aleph_0, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Neka je još (k_n) strogo rastući niz indeksa takav da za svaki $k \geq k_n$ vrijedi

$$a_{k_n}^m \overset{\frac{\delta_n}{2}}{\simeq} a_k^m, \text{ za svaki } m \geq m'_{k_n k}.$$

Po Lemi 1.9.22. za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $m \geq m'_{k_n k_n}$ postoji preslikavanje $\alpha_n^{'m} : X \to Q$ takvo da vrijedi

$$d\left(\alpha_n^{'m}, a_{k_n}^m\right) < \delta_n.$$

Pritom, ako je $m \neq m'$ i $a_{k_n}^m = a_{k_n}^{m'}$, preslikavanja $\alpha_n^{'m}$ biramo tako da bude $\alpha_n^{'m} = \alpha_n^{'m'}$ (iste komponentne funkcije $a_{k_n}^m$ uvijek aproksimiramo istim preslikavanjem). Neka su, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $m < m'_{k_n k_n}$, $\alpha_n^{'m} : X \to Q$ bilo koja preslikavanja. Iz konstrukcije je očito da je $\alpha' = \left(\alpha_n^{'m}\right)$ $\circledast$-aproksimativni niz iz X u Y koji je neprekidna aproksimacija podniza $a' = \left(a_{k_n}^m\right)$ od a pa iz $a \sim a'$ slijedi

$$\Lambda([a]) = \Lambda_{X,Y}([a]) = \Lambda_{X,Y}\left(\left[a'\right]\right) = \left[\alpha'\right]$$

Nadalje, $\circledast$-aproksimativni niz $\Psi \circ \alpha' : X \to Z$ ima svojstvo da za svaki $x \in X$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $m \geq \max\left\{m'_{k_n k_n}, m_{nn}\right\}$ vrijedi

$$d\left(\Psi_n^m \alpha_n^{'m}(x), b_n^{'m} a_{k_n}^m(x)\right) \leq d\left(\Psi_n^m \alpha_n^{'m}(x), \Psi_n^m a_{k_n}^m(x)\right) + d\left(\Psi_n^m a_{k_n}^m(x), b_n^{'m} a_{k_n}^m(x)\right) < \varepsilon_n,$$

što znači da je $\circledast$-aproksimativni niz $\Psi \circ \alpha'$ neprekidna aproksimacija $\circledast$-približavajućeg niza $b' \circ a'$. Dakle,

$$\Lambda([b] \circ [a]) = \Lambda_{X,Z}([b] \circ [a]) = \Lambda_{X,Z}\left(\left[b'\right] \circ \left[a'\right]\right) = \Lambda_{X,Z}\left(\left[b' \circ a'\right]\right) =$$

$$= \left[\Psi \circ \alpha'\right] = \left[\Psi|_Y\right] \circ \left[\alpha'\right] = \Lambda_{Y,Z}\left(\left[b'\right]\right) \circ \Lambda_{X,Y}\left(\left[a'\right]\right) = \Lambda([b]) \circ \Lambda([a]),$$

čime je tvrdnja dokazana. ■

Korolar 3.3.5 Funktor $\Lambda : InSh^{\circledast} \to Sh_a^{\circledast}$ kategorijski je izomorfizam.

Dokaz. Tvrdnja je neposredna posljedica teorema 3.3.3. i 3.3.4. ■

Neka Σ označuje kompoziciju dosad promatranih funktora, to jest, neka je

$$\Sigma := \Omega \circ \Pi \circ \Lambda : InSh^{\circledast} \to Sh^{\circledast}|_Q.$$

Posljedica svega do sada dokazanoga sljedeći je teorem po kojemu je konačni grubi oblik na skupu zatvorenih podskupova Hilbertove kocke Q reinterpretiran unutarnjim pristupom kroz kategoriju $InSh^{\circledast}$.

Teorem 3.3.6 Funktor $\Sigma : InSh^{\circledast} \to Sh^{\circledast}|_Q$ kategorijski je izomorfizam.

Dokaz. Kompozicija izomorfizama je izomorfizam. ■

3.4. Proširenje klasifikacije na klasu $\mathscr{MC}pt$

U prethodnim cjelinama dan je kategorološki okvir za klasifikaciju po konačnom grubom obliku različitih klasa objekata. Naime, koristeći inverzne sustave, kroz kategoriju $Sh^{\circledast}$ dana je klasifikacija po konačnom grubom obliku svih topoloških prostora vanjskim pristupom, dok je unutarnjim pristupom kroz kategoriju $InSh^{\circledast}$ dana klasifikacija po unutarnjem konačnom grubom obliku svih zatvorenih podskupova Hilbertove kocke Q. S obzirom na to da za svaki kompaktan metrički prostor postoji smještenje u Q, to ćemo klasifikaciju unutarnjim pristupom proširiti na cijelu klasu $\mathscr{MC}pt$ svih kompaktnih metričkih prostora. Ključnu ulogu u tome imat će sljedeći teorem.

Teorem 3.4.1 Neka je M kompaktan metrički prostor i neka su $X, X' \subseteq Q$ dva smještenja od M u Hilbertovu kocku Q. Tada su X i X' istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika.

Dokaz. Neka su $h : M \to X$ i $h' : M \to X'$ dva homeomorfizma kojima je M smješten u Q. Budući da su h i h' neprekidna preslikavanja, to su slike $X = h(M)$ i $X' = h'(M)$ kompaktne, a stoga i zatvorene u Q. Budući da je relacija $\simeq$ ("biti homeomorfan") relacija ekvivalencije, to je $X \simeq X'$ pa postoji homeomorfizam $g : X \to X'$. Definirajmo funkciju $a : \mathbb{N}^2 \to X'^X$ pravilom

$$a(n,m) = g, \ \text{ za sve } n,m \in \mathbb{N}.$$

Očito je a $\circledast$-približavajući niz iz X u X'. Naime, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je

$$\operatorname{card}(\{a(n,m) : m \in \mathbb{N}\}) = 1 < \aleph_0,$$

a za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a(n,m) \simeq a(n+1,m)$$

pa po propoziciji 1.8.2. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = 1$ takav da za svaki $n \geq 1$ postoji $m_n = 1$ takav da je

$$a(n,m) \overset{\varepsilon}{\simeq} a(n+1,m), \ \text{ za svaki } m \geq m_n$$

pa je $a : X \to X'$ $\circledast$-približavajući niz.

Tvrdimo da je $[a] : X \to X'$ izomorfizam. Neka je $g' : X' \to X$ inverz homeomorfizma $g : X \to X'$. Na isti način kao za $\circledast$-približavajući niz $a : X \to X'$ se dokaže da je funkcija $a' : \mathbb{N}^2 \to X^{X'}$ definirana pravilom

$$a'(n,m) = g', \ \text{ za sve } n,m \in \mathbb{N}$$

$\circledast$-približavajući niz iz X' u X. Budući da je

$$a_n^{\prime m} \circ a_n^m = g' \circ g = id_X, \text{ za sve } n,m \in \mathbb{N} \text{ i}$$

$$a_n^m \circ a_n^{\prime m} = g' \circ g = id_{X'}, \text{ za sve } n,m \in \mathbb{N},$$

to je

$$\left[a'\right] \circ [a] = [1_X] \text{ i } [a] \circ \left[a'\right] = [1_{X'}].$$

Dakle, $[a] : X \to X'$ je izomorfizam u kategoriji $InSh^{\circledast}$ pa su X i X' istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika. ■

Po teoremu 3.4.1. sva smještenja kompaktnoga metričkoga prostora u Hilbertovu kocku su istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika pa ima smisla uvesti sljedeću definiciju.

Definicija 3.4.2 Neka su $M, M' \in \mathscr{MC}pt$ kompaktni metrički prostori i neka su $X, X' \subseteq Q$ proizvoljna smještenja od M i M' u Q redom. Kažemo da su M i M' *istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika* ako su X i X' istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika.

Drugim riječima, dva kompaktna metrička prostora su istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika ako i samo ako su svaka dva njihova smještenja u Q međusobno izomorfni objekti u kategoriji $InSh^{\circledast}$. Prethodnom definicijom je klasifikacija po unutarnjem konačnom grubom obliku proširena na klasu $\mathscr{MC}pt$ svih kompaktnih metričkih prostora. Konačno, vrijedi sljedeći teorem koji kaže da se klasifikacija po konačnom grubom obliku i unutarnjem konačnom grubom obliku podudaraju na klasi $\mathscr{MC}pt$.

Teorem 3.4.3 Neka su $M, M' \in \mathscr{MC}pt$ kompaktni metrički prostori. Tada su M i M' istoga konačnoga gruboga oblika ako i samo ako su istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika.

Dokaz. Neka su X i X' smještenja od M i M' u Q, redom i neka su $h : M \to X$ i $h' : M' \to X'$ odgovarajući homeomorfizmi. Po definiciji 3.4.2. M i X te M' i X' su u parovima istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika. Budući da funktori čuvaju izomorfizme, to su

$$S^{\circledast}(h) : M \to X \text{ i } S^{\circledast}\left(h'\right) : M' \to X'$$

izomorfizmi u $Sh^{\circledast}$, odnosno, M i X te M' i X' su u parovima istoga konačnoga gruboga oblika. Pretpostavimo da su M i M' istoga konačnoga gruboga oblika. Tada su X i X' istoga konačnoga gruboga oblika pa su po teoremu 3.3.6. X i X' istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika, što po definiciji 3.4.2. znači da su M i M' istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika.

Obratno, pretpostavimo da su M i M' istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika. To znači da su X i X' istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika pa su po teoremu 3.3.6. X i X' istoga konačnoga gruboga oblika, odnosno, M i M' su istoga konačnoga gruboga oblika. ■

ZAKLJUČAK

Glavni rezultat ovoga rada nova je klasifikacijska kategorija topoloških prostora po *konačnom grubom obliku*. Klasifikacija je realizirana kroz kategoriju $Sh^{\circledast}$ čiji objekti su svi topološki prostori, a morfizmi među njima su klase ekvivalencije po relaciji $\sim$ $pro^{\circledast}$-ekvivalencije morfizama između inverznih sustava u kategoriji *HANR* koji su *HANR*-ekspanzije topoloških prostora. Dakle, kategoriju konačnoga gruboga oblika konstruirali smo *vanjskim pristupom*. Uz to, klasifikaciju po konačnom grubom obliku definirali smo i općenitije, to jest, za svaki par (C,D) koji se sastoji od kategorije C i njezine guste i pune potkategorije D.

Definirali smo vjerne funktore između kategorija Sh i $Sh^{\circledast}$, odnosno, između kategorija $Sh^{\circledast}$ i Sh^{*}. Primjerima smo pokazali da ti funktori nisu puni, to jest, da kategoriju konačnoga gruboga oblika smijemo smatrati pravom natkategorijom kategorije oblika i pravom potkategorijom kategorije gruboga oblika.

Konstrukciji kategorije konačnoga gruboga oblika za kompaktne metričke prostore pristupili smo i *unutarnjim pristupom*, što znači da predstavnike novih morfizama unutarnjega konačnoga gruboga oblika tvore funkcije čije su domena i kodomena promatrani prostori, a ne njihove okoline. Teoriju inverznih sustava i poliedarskih ekspanzija zamijenili smo teorijom ε-neprekidnih funkcija. U tu svrhu, uveli smo pojmove ε-neprekidnosti i ε-homotopije te dokazali najvažnija svojstva ε-neprekidnih funkcija. Potom smo generalizirali Borsukove i Sanjurjove oblikovne kategorije definirajući kategorije $\circledast$-fundamentalnih, $\circledast$-aproksimativnih i $\circledast$-približavajućih nizova redom. Na skupovima $\circledast$-fundamentalnih, $\circledast$-aproksimativnih i $\circledast$-približavajućih nizova između zatvorenih podskupova Hilbertove kocke Q definirali smo odgovarajuće relacije ekvivalencije čije su klase morfizmi konačnoga gruboga oblika novih kategorija $Sh_f^{\circledast}$, $Sh_a^{\circledast}$ i $InSh^{\circledast}$ redom. Kategoriju $InSh^{\circledast}$ nazvali smo *kategorijom unutarnjega konačnoga gruboga oblika*.

Definirali smo odgovarajuće funktore $\Omega : Sh_f^{\circledast} \to Sh^{\circledast}|_Q$, $\Pi : Sh_a^{\circledast} \to Sh_f^{\circledast}$ i $\Lambda : InSh^{\circledast} \to Sh_a^{\circledast}$ među dobivenim kategorijama konačnoga gruboga oblika i dokazali da su ti funktori kategorijski izomorfizmi. Definirali smo i vjeran funktor $J^p : InSh \to InSh^{\circledast}$ koji objekte drži fiksnima, a svakom morfizmu unutarnjega oblika pridružuje inducirani morfizam unutarnjega konačnoga gruboga oblika. Time smo pokazali da postojeću Sanjurjovu kategoriju $InSh$ unutarnjega oblika smijemo smatrati pravom potkategorijom kategorije $InSh^{\circledast}$ unutarnjega konačnoga gruboga oblika

Na samom smo kraju dokazali da unutarnji konačni grubi oblik ne ovisi o ulaganju metričkoga prostora u Hilbertovu kocku Q, odnosno, da su svaka dva smještenja proizvoljnoga kompaktnoga metričkoga prostora istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika. Time smo klasifikaciju po unutarnjem konačnom grubom obliku proširili na cijelu klasu $\mathscr{MC}pt$ svih kompaktnih metričkih prostora. Na kraju smo dokazali da su kompaktni metrički prostori M i M' istoga konačnoga gruboga oblika ako i samo ako su M i M' istoga unutarnjega konačnoga gruboga oblika.

Dobiveni rezultati otvaraju brojna nova pitanja zanimljiva za istraživanje. Na primjer, ostaje do kraja ispitati odnos klasifikacije po konačnom grubom obliku prema klasifikacijama po obliku i grubom obliku. Za vjerovati je da je nova klasifikacija po konačnom grubom obliku strogo grublja od klasifikacije po obliku i strogo finija od klasifikacije po grubom obliku, a odgovarajuće primjere koji bi to potvrdili tek treba pronaći. Nadalje, planiramo definirati grupe konačnoga gruboga oblika punktiranih topoloških prostora i grupe unutarnjega (konačnoga gruboga) oblika punktiranih kompaktnih metričkih prostora te ispitati njihove odnose prema postojećim grupama (gruboga) oblika. Konačno, ima smisla pokušati definirati putove konačnoga gruboga oblika i putove unutarnjega (konačnoga gruboga) oblika te ispitati svojstva povezanosti putovima konačnoga gruboga oblika topoloških prostora i povezanosti putovima unutarnjega (konačnoga gruboga) oblika kompaktnih metričkih prostora.

BIBLIOGRAFIJA

[1] Borsuk, K.: *Concerning homotopy properties of compacta*. Fund. Math., 62:223–254, 1967. ↑ 1.

[2] Borsuk, K.: *Theory of Shape*. Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1975. ↑ 1.

[3] Dugundji, J.: *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[4] Felt, J.E.: *ε-continuity and shape*. Proc. Amer. Math. Soc., 46:426–430, 1974.

[5] Ho, C.: *On a stability theorem for the fixed point property*. Fund. Math., 64:181–188, 1969. ↑ 63.

[6] Klee, V.L.: *Stability of the fixed point property*. Colloq. Math., 8:43–46, 1961. ↑ 46.

[7] Klee, V.L. i Yandl, A.: *Some proximate concepts in topology*. Publ. Inst. Naz. di Alta Matematica, Academic Press, 16:21–39, 1974. ↑ 53.

[8] Koceić-Bilan, N. i Uglešić, N.: *The coarse shape*. Glas. Mat., 42:145–187, 2007. ↑ 2.

[9] Koceić-Bilan, N. i Uglešić, N.: *The coarse shape path connectedness*. Glas. Mat., 46:489–503, 2011. ↑ 3.

[10] Mardešić, S.: *On Borsuk's shape theory for compact pairs*. Bull. Acad. Polon. Sci., 21:1131–1136, 1973. ↑ 60.

[11] Mardešić, S.: *Shapes for topological spaces*. General Topology Appl., 3:265–282, 1973. ↑ 1.

[12] Mardešić, S. i Segal, J.: *Shapes of compacta and ANR-systems*. Fund. Math., 72:41–59, 1971. ↑ 1.

[13] Mardešić, S. i Segal, J.: *Shape Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1982. ↑ 2, 42, 59.

[14] Morita, K.: *On shapes of topological spaces*. Fund. Math., 86:251–259, 1975. ↑ 1.

[15] Munkres, J.R.: *Topology*. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, 2000.

[16] Sanjurjo, J.M.R.: *A non-continuous description of the shape category of compacta*. Quart. J. Math. Oxford, 40:351–359, 1989. ↑ 2.

ŽIVOTOPIS

Ivan Jelić je rođen 21. studenoga 1991. godine u Splitu. Završio je 3. gimnaziju u Splitu 2010. godine. Iste godine upisuje preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu Sveučilišta u Splitu, a završava ga 2013. godine obranom završnoga rada *Presjeci logaritamskih i eksponencijalnih krivulja* pod mentorstvom prof.dr.sc. Nikole Koceić-Bilana. Na istoj ustanovi 2015. godine završava diplomski studij teorijske matematike obranom diplomskoga rada *Inverzni limesi i rezolvente* također pod mentorstvom prof.dr.sc. Nikole Koceić-Bilana te tako stječe zvanje magistra matematike.

Godine 2015. upisuje Zajednički sveučilišni poslijediplomski doktorski studij matematike Sveučilišta u Osijeku, Sveučilišta u Rijeci, Sveučilišta u Splitu te Sveučilišta u Zagrebu. Član je Topološkoga seminara u Splitu. Trenutno radi kao asistent na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu Sveučilišta u Splitu.

Znanstveni rad:

· Koceić-Bilan, N. i Jelić, I., *On intersections of the exponential and logarithmic curves*, Annales Mathematicae et Informaticae, 43 (2014), 159-170 (međunarodna recenzija, članak, znanstveni)

Sudjelovanja na konferencijama:

· *2018 International Conference on Topology and its Applications*, Patras (Grčka), 7.-11.07.2018. (Usmeno izlaganje)

· *The scientific meeting – 25 years of Topology seminar in Split*, Split, 8.-9.06.2018. (bez priopćenja)

· *6th Croatian Mathematical Congress*, Zagreb, 14.-17.06.2016. (bez priopćenja)