Reducibilnosti i kompozicioni nizovi nekih važnih induciranih reprezenacija klasičnih p-adskih grupa

Bošnjak, Barbara

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Bošnjak

Reducibilnosti i kompozicioni nizovi nekih važnih induciranih reprezentacija klasičnih p-adskih grupa

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2022.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Bošnjak

Reducibilnosti i kompozicioni nizovi nekih važnih induciranih reprezentacija klasičnih p-adskih grupa

DOKTORSKI RAD

Mentori:

prof.dr.sc. Marcela Hanzer, prof.dr.sc. Ivan Matić

Zagreb, 2022.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Barbara Bošnjak

Reducibility and composition series of some important induced representations of classical p-adic groups

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisors:

prof.dr.sc. Marcela Hanzer, prof.dr.sc. Ivan Matić

Zagreb, 2022.

ZAHVALA

Zahvaljujem se svojim mentorima, Marceli Hanzer i Ivanu Matiću, na usmjeravanju kroz doktorski studij, brojnim pojašnjenjima matematike i provjerama rezultata te velikoj strpljivosti.

Također se zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima što su mi i u ovom poglavlju života bili podrška i čvrsti oslonac.

Zahvaljujem se i kolegama na ugodnoj radnoj atomosferi na fakultetu. Posebno se zahvaljujem uredskim kolegama, Matiji Bašiću i Vanji Wagner, što su podijelili svoje iskustvo sa mnom i uvelike mi olakšali doktorski studij.

SAŽETAK

U ovoj disertaciji proučavaju se reprezentacije inducirane ireducibilnim reprezentacijama maksimalnih paraboličkih podgrupa simplektičke ili specijalne ortogonalne grupe neparnog reda nad nearhimedskim lokalnim poljem F karakteristike različite od 2. Određuju se njihovi kompozicioni nizovi te posljedično točke reducibilnosti, duljina i primjeri unitarnih reprezentacija.

Ireducibilni subkvocijenti promatrane reprezentacije su opisani u terminima Langlandsove klasifikacije, pri čemu je temperirani parametar opisan klasifikacijom koju su odredili C. Mœglin i M. Tadić. Važnu ulogu pri određivanju ireducibilnih subkvocijenata induciranih reprezentacija imaju njihovi Jacquetovi moduli, čiji su konstituenti, u slučaju promatranih grupa, određeni strukturnom formulom M. Tadića. Dodatno, kompozicioni niz generalizirane osnovne serije, kojeg je odredio G. Muić, predstavlja temeljni korak u rješavanju opisanih problema.

Na općem linearnom dijelu se inducira iz ljestvičaste reprezentacije koju su definirali E. Lapid i A. Mínguez te njome pojednostavili dokaz klasifikacije unitarnog duala opće linearne grupe. Jacquetovi moduli ljestvičastih reprezentacija su također poznati prema rezultatu A. Kreta i E. Lapida. Kroz disertaciju često koristimo rezultate A. Zelevinskog o reducibilnosti induciranih reprezentacija opće linearne grupe.

Koristeći činjenicu da su krajevi komplementarnih serija unitarizabilni, među promatranim reprezentacijama su dani primjeri unitarnih.

Ključne riječi: teorija reprezentacija p-adskih grupa; kompozicioni niz; ljestvičasta reprezentacija; klasične grupe

SUMMARY

In this thesis we study representations induced by irreducible representations of maximal parabolic subgroups of symplectic or special odd orthogonal group over a local non-archimedean field F of characteristics different than 2. We determine their composition series and, as a consequence, reducibility points, length and examples of unitary representations.

Irreducible subquotients of the considered representation are determined in terms of Langlands classification, while we describe the tempered parameter by the classification of C. Mœglin and M. Tadić. Jacquet modules play an important role in the determination of irreducible subquotients of induced representations. Their constituents are determined by M. Tadić's structural formula. Moreover, a composition series of a generalized principal series, established by G. Muić, is the essential step in solving described problems.

We induce by ladder representations on a general linear part, which were defined by E. Lapid and A. Mínguez and used to simplify the proof of the classification of unitary dual of general linear groups. The Jacquet modules of ladder representations are also known by the results of A. Kret and E. Lapid. Throughout the thesis, we often use the results on reducibility of induced representations of a general linear group obtained by A. Zelevinsky.

Using the fact that the ends of complementary series are unitarizable, we single out examples of unitary ones among considered representations.

Keywords: representation theory of p-adic groups; composition series; ladder representation; classical groups

Extended summary

In this thesis we study representations induced by irreducible representations of maximal parabolic subgroups of symplectic or special odd orthogonal group over a local non-archimedean field F of characteristics different than 2. We determine their composition series and, as a consequence, reducibility points, length and examples of unitary representations.

To describe the considered induced representations, we fix one of the series of classical groups $SO_{2n'+1}(F)$ and $Sp_{2n'}(F)$ and denote by $G_{n'}$ a rank n' group belonging to this fixed series. Let us also fix irreducible cuspidal representations $\rho \in \mathrm{Irr}(GL_n(F))$ and $\sigma_c \in \mathrm{Irr}(G_{n'})$. The character $|det(g)|_F$ of $GL_n(F)$ is denoted by ν, where $|\ |_F$ is the normalized absolute value on F. Since the irreducible representation on a general linear part of the considered induced representations is described in terms of Langlands classification, we recall it in the sequel. For the irreducible essentially square-integrable representations $\delta_i = \delta([\nu^{x_i}\rho, \nu^{y_i}\rho]) \in \mathrm{Irr}(GL_{n_i}(F))$, $i = 1, \ldots, l$ such that $x_1 + y_1 \leq \ldots \leq x_l + y_l$, the induced representation $\delta_1 \times \ldots \times \delta_l$ has the unique irreducible (Langlands) subrepresentation which we denote by $L(\delta_1, \ldots, \delta_l)$. We consider an important class of ladder representations, which were defined by E. Lapid and A. Mínguez and used to simplify the proof of the classification of unitary dual of general linear groups. A ladder representation is a representation of the form $L(\delta_1, \ldots, \delta_l)$ for $x_1 < \ldots < x_l$ and $y_1 < \ldots < y_l$. The subclass of essentially Speh representations is obtained by taking $x_{i+1} = x_i + 1$ and $y_{i+1} = y_i + 1$ for $i = 1, \ldots, l-1$. In the thesis, we have determined the composition series of the following induced representations:

(i) $\pi_L \rtimes \sigma_c$, for a ladder representation π_L with positive exponents in its cuspidal support,

(ii) $L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$, for real numbers a and b such that $a \leq 0$ and $a \leq b$,

(iii) $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$, for an essentially Speh representation π_S with positive exponents in its cuspidal support and strongly positive non-cuspidal representation σ_{sp}.

In the first problem, the reducibility of representation $\pi_L \rtimes \sigma_c$ follows directly from the results of the paper [19]. The tempered subquotients of $\pi_L \rtimes \sigma_c$ are necessarily strongly positive discrete series. Their description, together with some tehnical calculation with Jacquet modules relying on results of A. Kret and E. Lapid in [15] and M. Tadić in [40], produces the classification of the non-tempered subquotients of $\pi_L \rtimes \sigma_c$. Also, there is an elegant formula for the length of the representation $\pi_L \rtimes \sigma_c$. If m is the number of indices $i \in \{1,\dots,l\}$ for which there exists $x \in \{x_i, x_i+1,\dots,y_i\}$ such that $\nu^x\rho \rtimes \sigma_c$ reduces, then $\pi_L \rtimes \sigma_c$ is of the length $m+1$.

In the second problem, we extensively use the classifications of discrete series by C. Mœglin and M. Tadić in [28] and tempered representations which are not discrete series by M. Tadić in [42]. The study of embeddings is the main method used to determine tempered subquotients of the considered induced representations. It is enabled by the simple, yet useful lemma of C. Jantzen from [14] and the embeddings which describe tempered representations. To determine the irreducible subquotiens of representation $L(\delta([\nu^a\rho,\nu^b\rho]),\delta([\nu^{a+1}\rho,\nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$, it was neccessary to classify the irreducible tempered subquotients of the representation of the form

$$L(\delta([\nu^a\rho,\nu^b\rho]),\delta([\nu^{x+1}\rho,\nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

for $0 \le x \le b$ and $-a \le b$. Moreover, we have used the first part of the proof of Theorem 3.1 from G. Muić's paper [30] to show that certain irreducible representation is a subquotient of the considered induced representation. Results obtained from the first and second problem produce examples of irreducible unitary representations through the study of the ends of complementary series, which is a well-known method described in [39, §3c].

In the third problem, the main part is to classify irreducible tempered subquotients of representation of the form

$$L(\delta([\nu^{x_1}\rho,\nu^{y}\rho]),\delta([\nu^{x_2}\rho,\nu^{y+1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{x_l}\rho,\nu^{y+l-1}\rho])) \rtimes \sigma_{sp}$$

for real numbers $x_1,\dots,x_l$ such that $0 < x_1 < \dots < x_l$. Furthermore, a technical lemma is proved and used as the main tool to show that certain constituents of Jacquet modules are of the multiplicity one. It serves to prove that an obtained candidate for a subquotient is the subquotient of $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$. Also, some inductive arguments are applied using the description of a composition series of a generalized principal series obtained by G. Muić in [29]. Solutions of both second and third problem use two lemmas on ladder representations. They are proved using representation theory of general linear groups established by A. Zelevinsky [43].

SADRŽAJ

Uvod

Ireducibilne unitarne reprezentacije imaju ulogu fundamentalnih harmonika u harmonijskoj analizi na lokalno kompaktnoj grupi. Prema klasifikaciji M. Tadića u [38], esencijalno Speh reprezentacije su osnovni gradivni blokovi unitarnog duala opće linearne grupe. E. Lapid i A. Mínguez su u [18] pojednostavili dokaz klasifikacije proučavajući klasu ljestvičastih reprezentacija koja sadrži esencijalno Speh reprezentacije. Osim u slučajevima niskog ranga, klasifikacija unitarnog duala klasičnih grupa $Sp_{2n}(F)$ ili $SO_{2n+1}(F)$ nije poznata. Time se prirodno nameće pitanje poveznice strukture unitarnog duala klasičnih grupa i reprezentacija induciranih iz ljestvičaste reprezentacije na dijelu opće linearne grupe i unitarne reprezentacije na klasičnom dijelu. Motivaciju za proučavanje lokalne teorije reprezentacija pronalazimo i u Langlandsovom programu kroz dekompoziciju automorfnih reprezentacija, prema članku D. Flatha [8].

U disertaciji proučavamo dopustive reprezentacije konačne duljine grupa G_n, za fiksiranu seriju grupa $Sp_{2n}(F)$ ili $SO_{2n+1}(F)$ za $n \in \mathbb{N}$. Kategoriju svih takvih reprezentacija označimo sa $\mathscr{C}(G)$. Možemo joj pridružiti Grothendieckovu grupu $R(G)$ jer se radi o Abelovoj kategoriji. Kompozicioni niz reprezentacije $(\pi, V) \in \mathscr{C}(G)$ je niz podreprezentacija $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{k-1} \subset V_k = V$ od (π, V) takav da su reprezentacije V_{i+1}/V_i za $i = 0, \ldots, k-1$ ireducibilne. Time u $R(G)$ vrijedi

$$[V] = [V_1] + [V_2/V_1] + \ldots + [V/V_{k-1}].$$

Glavna zadaća disertacije je odrediti kompozicione nizove važnih induciranih reprezentacija iz $\mathscr{C}(G)$. Generalni pristup u teoriji reprezentacija p-adskih grupa se dijeli na dva dijela:

(i) konstrukcija kuspidalnih ireducibilnih reprezentacija u $\mathscr{C}(G)$,

(ii) analiza reprezentacija induciranih ireducibilnim reprezentacijama paraboličkih podgrupi.

Pitanja kojima se bavimo u disertaciji pripadaju drugom dijelu. Grupe G_n sadrže paraboličke podgrupe koje su ključne za definiciju induciranih reprezentacija. Preciznije, imamo Levijevu dekompoziciju paraboličke podgrupe $P = MN$ na reduktivnu grupu M i unipotentni radikal N

od P. Grupu M nazivamo Levijev faktor od P te upravo iz reprezentacija u $\mathscr{C}(M)$ induciramo do reprezentacija u $\mathscr{C}(G_n)$. Reprezentacije iz $\mathscr{C}(M)$ je lako opisati zbog sljedeće bijektivne korespodencije. Za svaku paraboličku podgrupu $P = MN$ od G_n postoji jedinstvena k-torka prirodnih brojeva $(m_1, \dots, m_k)$ takva da vrijedi $|m| = m_1 + \dots + m_k \leq n$ i M je izomorfna grupi

$$GL_{m_1} \times \dots \times GL_{m_k} \times G_{n-|m|}.$$

Maksimalne paraboličke podgrupe odgovaraju k-torkama za $k = 1$ te su reprezentacije njihovih Levijevih faktora oblika $\pi \otimes \sigma$ za $\pi \in \mathrm{Irr}(GL_{m_1})$ i $\sigma \in \mathrm{Irr}(G_{n-m_1})$. Važne inducirane reprezentacije kojima se bavimo u disertaciji inducirane su ireducibilnim reprezentacijama maksimalnih paraboličkih podgrupi, pri čemu je π ljestvičasta reprezentacija s određenim restrikcijama te σ kuspidalna ili strogo pozitivna diskretna serija.

Osvrnimo se na dosadašanje rezultate ostvarene u području. Teorija reprezentacija p-adskih grupa svoje početke zahvaljuje radu F. I. Mautnera i njegovih studenata na pitanjima teorije reprezentacija grupe GL_2 nad p-adskim poljem. Daljnji razvoj teorije su potakli duboki rezultati F. Bruhata i J. Titsa u [5] o strukturi p-adskih grupa. H. Jacquet i R. P. Langlands su u [13] uveli pojam dopustive reprezentacije za opću linearnu grupu, čime je otvoren put čisto algebarskoj teoriji reprezentacija. Među brojnim autorima koji su generalizirali te rezultate i doprinjeli razvoju teorije, važan utjecaj imali su J. Bernstein, Harish-Chandra i W. Casselman. Više o povijesnom pregledu područja može se naći u [32].

Uspješna primjena teorije Jacquetovih modula na rješavanje pitanja reducibilnosti induciranih reprezentacija započela je algebraizacijom Geometrijske leme radom M. Tadića u [40]. Rezultati G. Muića o kompozicionom nizu generalizirane glavne serije u slučaju strogo pozitivne diskretne serije u [29] koriste navedeni princip i polazište su naših istraživanja. Problem je dalje generaliziran radom I. Matića u [23], gdje se uz strogo pozitivnu reprezentaciju na klasičnom dijelu pojavljuju dvije ireducibilne esencijalno kvadratno integrabilne reprezentacije na općem linearnom dijelu. Za opis kompozicionog niza proučavane reprezentacije potrebna je Langlandsova klasifikacija, koju su u slučaju grupe nad nearhimedskim lokalnim poljem dokazali A. Borel i N. R. Wallach u svojoj knjizi [16]. Za opis temperiranog parametra bitne su klasifikacije ireducibilnih temperiranih reprezentacija. Klasifikaciju diskretnih serija pod Osnovnom pretpostavkom ostvarili su C. Mœglin i M. Tadić. Kasnije su J. Arthur, C. Mœglin, W. T. Gan i L. Lomelí pokazali da klasifikacija vrijedi bezuvjetno. M. Tadić je parametrizirao ireducibilne temperirane reprezentacije koje nisu diskretne serije kao prirodnu posljedicu klasifikacije diskretnih serija. Suvremena istraživanja teorije reprezentacija opće linearne grupe nad nearhimedskim lokalnim poljem autora E. Lapid, A. Kret i A. Mínguez [15, 18] također igraju važnu ulogu u analizi reprezentacija klasičnih grupa.

Opišimo sada glavne rezultate ostvarene u disertaciji. Kao prvi od rezultata navodimo opis kompozicionog niza reprezentacije $\pi_L \rtimes \sigma_c$, gdje je π_L ljestvičasta reprezentacija s pozitivnim eksponentima u kuspidalnom nosaču i σ_c ireducibilna kuspidalna reprezentacija u $\mathrm{Irr}(G)$. Preciznije, označimo

$$\pi_L = L(\delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_t}\rho, \nu^{b_t}\rho]))$$

za ireducibilnu kuspidalnu reprezentaciju ρ opće linearne grupe, prirodan broj t i realne brojeve a_i, b_i, za $i = 1, \ldots, t$, takve da $0 < a_1 < \ldots < a_t$, $b_1 < \ldots < b_t$ i $a_i \leq b_i$ za $i = 1, \ldots, t$. Pretpostavimo da je $\alpha > 0$ takav da je reprezentacija $\nu^\alpha\rho \rtimes \sigma_c$ reducibilna. Ako postoji $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ takav da $\alpha \in [a_i, b_i]$, označimo s i_M maksimalan, a s i_m minimalan takav indeks. Primijetimo da ako i_M postoji, onda $\alpha \in [a_i, b_i]$ za svaki $i \in [i_m, i_M]$, jer vrijedi $\alpha \in [a_{i_M}, b_{i_m}] \subseteq [a_i, b_i]$. Nadalje, označimo s k proizvoljan element od $[i_m, i_M]$. Definiramo k_m kao minimalan indeks iz $\{1, 2, \ldots, t\}$ takav da $\alpha - k + k_m \leq b_{k_m}$. Primijetimo da vrijedi $\alpha - k + i \in [a_i, b_i], \forall i \in [k_m, k]$. Definiramo σ_k kao jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju od

$$\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]) \times \ldots \times \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho]) \rtimes \sigma_c$$

i π_k, ukoliko je $k \neq t$ ili $a_i \neq \alpha - t + i$ za neki $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, kao

$$\begin{aligned} &L(\delta([\nu^{-b_t}\rho, \nu^{-a_t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_{k+1}}\rho, \nu^{-a_{k+1}}\rho]), \delta([\nu^{-\alpha+1}\rho, \nu^{-a_k}\rho]), \ldots, \\ &\delta([\nu^{-\alpha+k-k_m+1}\rho, \nu^{-a_{k_m}}\rho]), \delta([\nu^{-b_{k_m-1}}\rho, \nu^{-a_{k_m-1}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho]); \sigma_k). \end{aligned}$$

Sljedeći teorem (2.2.2) opisuje kompozicioni niz od $\pi_L \rtimes \sigma_c$.

Teorem 0.0.1. Pretpostavimo da postoji neki $\nu^x\rho \in [\pi_L]$ takav da je $\nu^x\rho \rtimes \sigma_c$ reducibilna. Tada se inducirana reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ reducira. Nadalje, neka je α jedinstven pozitivan realan broj takav da je $\nu^\alpha\rho \rtimes \sigma_c$ reducibilna. Tada je semisimplifikacija od $\pi_L \rtimes \sigma_c$ jednaka

(i) $\sigma_t + L(\delta([\nu^{-b_t}\rho, \nu^{-a_t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho]); \sigma_c) + \sum_{k \in [i_m, t-1]} \pi_k$,
ako $a_i = \alpha - t + i$ za $i = 1, 2, \ldots, t$,

(ii) $L(\delta([\nu^{-b_t}\rho, \nu^{-a_t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho]); \sigma_c) + \sum_{k \in [i_m, i_M]} \pi_k$, inače.

Rezultati sljedećeg poglavlja bave se određivanjem kompozicionog niza reprezentacije oblika

$$L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

za ireducibilne kuspidalne reprezentacije $\rho \in \mathrm{Irr}(GL)$ i $\sigma_c \in \mathrm{Irr}(G)$ te realne brojeve a, b takve da vrijedi $a \leq 0$ i $a \leq b$. Pokazuje se da je ekvivalentno odrediti kompozicioni niz opisane reprezentacije u slučaju samokontragredijentne reprezentacije ρ i uvjeta $-a \leq b+1$. Neka je α jedinstveni nenegativan realan broj takav da je $\nu^\alpha \rho \rtimes \sigma_c$ reducibilna reprezentacija. Definicije temperiranih reprezentacija koje se javljaju u sljedeća dva teorema se mogu naći u poglavlju 3.

Teorem 0.0.2. Inducirana reprezentacija $L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$ za $0 \leq -a \leq b$ sadrži

(i) ireducibilni temperirani subkvocijent koji nije diskretna serija ako i samo ako $-a = b = \alpha - 1 = 0$ ili $-a = b = \alpha = \frac{1}{2}$ ili $-a = b \geq \alpha + 1$ ili $\alpha = -a \leq b$.

(ii) diskretnu seriju ako i samo ako $a = \alpha - 1 = 0 < b$ ili $-a = \alpha = \frac{1}{2} < b$ ili $b > -a \geq \alpha + 1$.

U tom slučaju ireducibilni temperirani subkvocijenti su podreprezentacije od $\pi_S \rtimes \sigma_c$.
Ako je $-a = b$, za $b = \alpha - 1 = 0$ je temperirani subkvocijent izomorfan s $\tau_{2,-}^{(0)}$, za $b = \alpha = \frac{1}{2}$ s $\tau_{2,-}^{(\frac{1}{2})}$, za $b = \alpha \geq 1$ s τ_4 za $\alpha = 1$ te s τ_5 za $\alpha \geq \frac{3}{2}$, a za $b \geq \alpha + 1$ su dva temperirana subkvocijenta izomorfna s $\tau_{3,-}$ i $\tau_{4,-}$.
Ako je $-a < b$, za $a = \alpha - 1 = 0$ temperirani subkvocijent je izomorfan sa σ_5, za $-a = \alpha = \frac{1}{2}$ sa σ_6, za $-a = \alpha$ sa $\tau_{5,-}$, a za $-a \geq \alpha + 1$ s dvije diskretne serije izomorfne s $\sigma_{3,-}$ i $\sigma_{4,-}$.

Netemperirani subkvocijenti od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ su opisani u Teoremu 3.4.4. Zbog preglednosti, u uvodu navodimo posljedicu dobivenih rezultata kroz primjere unitarnih reprezentacija. Definiramo reprezentacije $\pi_0 = L(\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{-\alpha+2b+1}\rho]), \delta([\nu^{-\alpha+1}\rho, \nu^{-\alpha+2b+2}\rho]); \sigma_c)$ i $\pi_1 = L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-\alpha+2b+1}\rho]), \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-\alpha+2b+2}\rho]); \sigma_{(\alpha-1,\alpha)})$.

Teorem 0.0.3. Inducirana reprezentacija

$$L(\delta([\nu^{\alpha-2b-2}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]), \delta([\nu^{\alpha-2b-1}\rho, \nu^{\alpha}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

za $\alpha - b \in \mathbb{Z}$ i $-\frac{1}{2} \leq b < \alpha - 1$ je unitarna i ima sljedeći kompozicioni niz po slučajevima.

- Ako $\alpha - 2 = b = 0$, onda je jednak $\pi_0 + L(\nu^{-1}\rho; \tau_{1,+}^{(0)}) + L(\delta([\nu^{-1}\rho, \rho]); \sigma_c)$.
- Ako $\alpha - 2 = b \geq \frac{1}{2}$, onda je jednak $\pi_0 + L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-3}\rho]); \tau_{1,-}^{(\alpha-2)})$.
- Ako $\alpha - 2 = 2b \geq 1$, onda je jednak $\pi_0 + \pi_1 + L(\delta([\nu^{-\frac{\alpha}{2}}\rho, \nu^{\frac{\alpha}{2}-1}\rho]); \sigma_c)$.
- Inače je jednak $\pi_0 + \pi_1$.

Posljednja skupina rezultata opisuje kompozicioni niz reprezentacije $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$, gdje je π_S esencijalno Speh reprezentacija s pozitivnim eksponentima u kuspidalnom nosaču te σ_{sp} strogo pozitivna nekuspidalna diskretna serija kojoj je σ_c parcijalni kuspidalni nosač. Ponovno, α je jedinstveni nenegativni broj takav da se $\nu^\alpha \rho \rtimes \sigma_c$ reducira i označimo $r = \lceil \alpha \rceil$. Glavni dio rezultata slijedi iz opisa temperiranih subkvocijenata reprezentacije $\pi \rtimes \sigma_{sp}$, gdje je $\sigma_{sp} = \sigma_{(b_1,\dots,b_r)}$ i

$$\pi = L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])).$$

Analizu rastavljamo na dva slučaja, ovisno o tome je li $\nu^{\frac{1}{2}}\rho$ kratnosti manje ili jednake dva u kuspidalnom nosaču od $[\pi \rtimes \sigma_{sp}]$ ili $[\pi_S \rtimes \sigma_{sp}]$. U svrhu ilustracije rezultata, navodimo teoreme samo u slučaju kratnosti manje od dva.

Teorem 0.0.4. Označimo konstante

$$s = \begin{cases} \max\{i : 1 \le i \le r, b_i = \alpha - r + i - 1\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

$$i_{min} = \begin{cases} \min\{i : s+1 \le i \le r, b_i > b + k - 1\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ r+1, & \text{inače,} \end{cases}$$

i $m = r - i_{min} + 1$.

Inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent ako i samo ako $r - m - k \ge 0$ i $c_i = b_{r-m-k+i}$ za $i = 1, \dots, k$.

Ako $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent, onda je taj subkvocijent strogo pozitivna reprezentacija $\sigma_{(b_1,\dots,b_{r-m-k},b,\dots,b+k-1,b_{r-m+1},\dots,b_r)}$ koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$.

Za $K \ge 2$ definiramo

$$\pi_S = L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{a+K-1}\rho, \nu^{b+K-1}\rho])).$$

Za $k \in \{1, \dots, K\}$ sa m_k definiramo analogon od m iz prethodnog teorema. Ako vrijedi $r - m_k - k \ge 0$, $a - 1 \le b_{r-m_k-k+1}$ i $b_{r-m_k} + 1 \le b + k - 1$, označimo strogo pozitivnu diskretnu seriju $\sigma_k = \sigma_{(b_1,\dots,b_{r-m_k-k},b,\dots,b+k-1,b_{r-m_k+1},\dots,b_r)}$ i

$$\begin{aligned} \pi_k = L(&\delta([\nu^{-b-K+1}\rho, \nu^{-a-K+1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{-b-k}\rho, \nu^{-a-k}\rho]), \\ &\delta([\nu^{-b_{r-m_k}}\rho, \nu^{-a-k+1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{-b_{r-m_k-k+1}}\rho, \nu^{-a}\rho]); \sigma_k). \end{aligned}$$

Za uniforman opis ireducibilnih netemperiranih subkvocijenata od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$, neka $k \in \{1, \ldots, K\}$ također označava maksimalan indeks tako da gornji uvjeti vrijede. Ako takav indeks iz skupa $\{1, \ldots, K\}$ ne postoji, definiramo $k = 0$, $\sigma_0 = \sigma_{sp}$ i

$$\pi_0 = L(\delta([\nu^{-b-K+1}\rho, \nu^{-a-K+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-a}\rho]); \sigma_0).$$

Ako $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent, onda je prema prethodnom teoremu jedinstven i označit ćemo ga sa $\sigma^{(1)}$. Ako označimo s I skup svih indekasa $i \in \{1, \ldots, k\}$ takvih da $b + i - 1 \in \{b_1, \ldots, b_r\}$, dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 0.0.5. Ako $a \neq \frac{1}{2}$ ili $b_1 = -\frac{1}{2}$, inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$ je u $R(G)$ jednaka

(i) $\sum_{i \in \{0, \ldots, k\} \setminus I} \pi_i + \sigma^{(1)}$, ako $k = K$ i $a + i - 1 = b_{r-m_k-k+i} + 1$ za $i = 1, \ldots, k$,

(ii) $\sum_{i \in \{0, \ldots, k\} \setminus I} \pi_i$, inače.

Preostalo je opisati sadržaj prvog poglavlja. Nakon opisa nearhimedskih lokalnih polja, klasičnih grupa i njihovih važnih paraboličkih podgrupa, dajemo pregled rezultata teorije reprezentacija p-adskih grupa s dopustivim reprezentacijama kao centralnim pojmom. Zatim dajemo pregled teorije reprezentacija opće linearne grupe, uz koju je usko vezana teorija reprezentacija ostalih klasičnih grupa. Reprezentacije su parametrizirane Langlandsovom klasifikacijom, a osnovni alat kojim rješavamo pitanja reducibilnosti i kompozicionih nizova određenih induciranih reprezentacija je Geometrijska lema. Sljedeća dva potpoglavlja donose pregled rezultata klasifikacije ireducibilnih temperiranih reprezentacija koje su važna klasa unitarnih reprezentacija. U konačnici opisujemo rezultate članka G. Muića [29] koji su temeljni korak u rješavanju pitanja disertacije.

1. TEORIJA REPREZENTACIJA p-ADSKIH GRUPA

1.1. KLASIČNE GRUPE

Klasične grupe koje proučavamo u disertaciji su primjeri linearnih algebarskih grupa. Umjesto njihove definicije u terminima algebarske geometrije, koja zahtjeva duboku pozadinu, definiramo ih pomoću matrične realizacije. Označimo sa K algebarski zatvoreno polje te sa $\mathbf{GL}_n$ opću linearnu grupu reda n s koeficijentima iz K. Općenito, za linearne algebarske grupe definirane nad algebarski zatvorenim poljem K koristimo podebljanu oznaku $\mathbf{G}$.

Definicija 1.1.1. Za $n \in \mathbb{N}$, skup $K^n = K \times \ldots \times K$ zovemo afin n-prostor, u oznaci $\mathbb{A}^n$.

Definicija 1.1.2. Proizvoljna linearna algebarska grupa je izomorfna zatvorenoj podgrupi od $\mathbf{GL}_n$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.1.3. Navedimo važne primjere linearnih algebarskih grupa. Aditivna grupa $\mathbb{G}_a$ je afin prostor $\mathbb{A}^1$ s operacijom $\mu(x,y) = x + y$. Multiplikativna grupa $\mathbb{G}_m$ je afin prostor $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ s operacijom $\mu(x,y) = xy$. Uz činjenicu da je direktni produkt dvije linearne algebarske grupe ponovno linearna algebarska grupa, dobivamo $\mathbb{A}^n \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{G}_a$ i $\mathbf{T}_n := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{G}_m$. Linearnu algebarsku grupu $\mathbf{T}_n$ nazivamo torus.

Označimo s F polje karakteristike različite od dva s netrivijalnom diskretnom nearhimedskom apsolutnom vrijednosti $|\cdot|_F$. Prsten $\mathscr{O}_F = \{x \in F : |x|_F \leq 1\}$ nazivamo prsten cijelih u F. Radi se o kompaktnom podskupu od F. Lako se pokaže da je $\mathscr{O}_F$ lokalan prsten, to jest sadrži jedinstveni maksimalni ideal, koji je jednak idealu $\mathfrak{p}_F = \{x \in F : |x|_F < 1\}$. Zbog pretpostavke da je apsolutna vrijednost diskretna slijedi da je $\mathfrak{p}_F$ glavni ideal, to jest $\mathfrak{p}_F = \langle \pi \rangle$. Za $x \in F^\times$ postoji jedinstveni $n \in \mathbb{Z}$ i $\varepsilon \in \mathscr{U}_F = \{x \in F : |x|_F = 1\}$ takvi da je $x = \pi^n \varepsilon$. Time je apsolutna vrijednost $|\cdot|_F$ jedinstveno određena s $|\pi|_F$. Prema Poglavlju 7 iz [25], lokalno nearhimedsko polje F je izomorfno s

- konačnim proširenjem polja p-adskih brojeva $\mathbb{Q}_p$ za prosti broj p, ako je $\mathrm{char}(F) = 0$,
- poljem formalnih Laurentovih redova $F_q((T))$ za konačno polje F_q gdje je q potencija prostog broja p, ako je $\mathrm{char}(F) = p$.

Za prirodan broj n označimo s V_n vektorski prostor dimenzije n nad $K := \overline{F}$. Izdvojimo dvije zatvorene podgrupe od $\mathbf{GL}_n$ čije su reprezentacije centralni objekti disertacije.

Neka je $B : V_{2n+1} \times V_{2n+1} \to K$ nedegenerirana simetrična bilinearna forma, to jest $B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1)$ za sve $v_1, v_2 \in V_{2n+1}$. Za linearno preslikavanje $q : V_{2n+1} \to K$ takvo da $q(v) = B(v, v)$, $\forall v \in V_{2n+1}$, definiramo kvadratni prostor (V_{2n+1}, B, q). Specijalna ortogonalna grupa neparnog reda $2n+1$ za $n \in \mathbb{N}$ je grupa

$$\mathbf{SO}_{2n+1} = \{A \in SL(V_{2n+1}) : B(A(v_1), A(v_2)) = B(v_1, v_2), \forall v_1, v_2 \in V_{2n+1}\}$$

Uz kvadratni prostor je usko povezan pojam izotropnih vektora.

Definicija 1.1.4. Kažemo da je vektor $v \in V_{2n+1}$ izotropan ako $q(v) = 0$. Kvadratni prostor je izotropan ako sadrži izotropan vektor, a anizotropan ako nije izotropan.

Definicija 1.1.5. Kažemo da je kvadratni prostor H hiperbolička ravnina ako postoji baza u kojoj $B : H \times H \to K$ ima matricu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Prema [31, Poglavlje 42] imamo sljedeću dekompoziciju od V_{2n+1} :

$$V_{2n+1} = H_1 \perp \ldots \perp H_r \perp W$$

gdje su H_i za $i = 1, \ldots, r$ hiperboličke ravnine i W je maksimalan anizotropan potprostor od V_{2n+1}. U nastavku pretpostavljamo da je W jednodimenzionalan prostor. Tada postoji baza za V_{2n+1} takva da je B dana matricom J_{2n+1}, gdje matrica J_n ima jedinice na sporednoj dijagonali i nule inače. Time dobivamo matričnu realizaciju specijalne ortogonalne grupe neparnog reda:

$$\mathbf{SO}_{2n+1} = \left\{A \in SL(2n+1, K) : A \cdot J_{2n+1} \cdot A^t = J_{2n+1}\right\}.$$

Neka je $B : V \times V \to K$ nedegenerirana alternirajuća bilinearna forma, to jest $B(v, v) = 0$, za sve $v \in V$. Tada $\dim V = 2n$ za $n \in \mathbb{N}$. Simplektička grupa ranga $n \in \mathbb{N}$ je grupa

$$\mathbf{Sp}_{2n} = \{A \in GL(V_{2n}) : B(A(v_1), A(v_2)) = B(v_1, v_2), \forall v_1, v_2 \in V_{2n}\}$$

te imamo i njezinu matričnu realizaciju

$$\mathbf{Sp}_{2n} = \left\{ A \in GL_{2n} : A^t \begin{pmatrix} 0 & J_n \\ -J_n & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & J_n \\ -J_n & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definicija 1.1.6. Torus povezane linearne algebarske grupe je podgrupa od $\mathbf{G}$ izomorfna torusu $\mathbf{T}_n$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Maksimalan torus od $\mathbf{G}$ je onaj koji nije sadržan u drugom (različitom) torusu. Ako je $\mathbf{T} \simeq \mathbf{T}_n$ maksimalan torus od $\mathbf{G}$, onda kažemo da je n rang grupe $\mathbf{G}$.

Zanimaju nas racionalne F-točke opisanih grupa $\{\mathbf{SO}_{2n+1}\}_{n\geq 0}$ ili $\{\mathbf{Sp}_{2n}\}_{n\geq 1}$. Grupe iz fiksirane serije označavamo $\mathbf{G}_n$, a njihove F-racionalne točke s G_n.

Definicija 1.1.7. Kažemo da je maksimalni torus grupe G_n F-rascjepiv ako mu je F-rang jednak rangu grupe $\mathbb{G}_n$. Grupa G_n je F-rascjepiva ako ima F-rascjepivi maksimalni torus.

Pod uvedenim pretpostavkama, grupe G_n su F-rascjepive. To je jasno prema parametrizaciji njihovih maksimalnih torusa T:

- $(F^\times)^n \to T,\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n,1,x_n^{-1},\dots,x_1^{-1})$ za $G_n \simeq SO_{2n+1}(F)$,
- $(F^\times)^n \to T,\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n,x_n^{-1},\dots,x_1^{-1})$ za $G_n \simeq Sp_{2n}(F)$.

1.1.1. Sustavi korijena

U ovom poglavlju definiramo paraboličke podgrupe grupa $\mathbf{GL}_n$ i $\mathbf{G}_n$ pomoću sustava korijena. U nastavku sa $\mathbf{G}$ označavamo neku od navedenih grupa, a sa $\mathbf{T}$ maksimalan torus u $\mathbf{G}$. Opisanu teoriju i šire može se naći u [12].

Definicija 1.1.8. Grupu karaktera $\psi : \mathbf{T} \to \mathbb{G}_m$ označavamo s $X^*(\mathbf{T})$. Grupu homomorfizama algebarskih grupa $\varphi : \mathbb{G}_m \to \mathbf{T}$ koje se nazivaju jednoparametarske podgrupe od $\mathbf{T}$ označavamo s $X_*(\mathbf{T})$.

Za $\mathbf{T} \simeq \mathbb{G}_m$ se može pokazati da vrijedi $X^*(\mathbf{T}) \simeq X_*(\mathbf{T}) \simeq \mathbb{Z}$.

Definicija 1.1.9. Reducirani sustav korijena $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ od $\mathbf{G}$ obzirom na $\mathbf{T}$ je podskup vektorskog prostora $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X^*(\mathbf{T})$ koji zadovoljava sljedeće uvjete:

(1) $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ je konačan, razapinje $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X^*(\mathbf{T})$ i ne sadrži 0,

(2) Ako je $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ te $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\lambda\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$, tada vrijedi $\lambda \in \{1,-1\}$,

(3) Za $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ postoji refleksija τ_α određena s α koja $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ preslikava u $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$,

(4) Za $\alpha,\beta \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ postoji $\lambda \in \mathbb{Z}$ takav da je $\tau_\beta(\alpha)-\beta = \lambda\alpha$.

Grupu generiranu preslikavanjima τ_α za $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ označavamo s $W(\mathbf{G},\mathbf{T})$ i nazivamo Weylova grupa od $\mathbf{G}$ obzirom na $\mathbf{T}$.

Definicija 1.1.10. Kažemo da je podskup $\Delta = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ koji je baza od $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}} X^*(\mathbf{T})$, baza od $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ ako se svaki $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ može na jedinstveni način zapisati kao $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i\alpha_i$ za $\lambda_i \in \mathbb{R}$ istog predznaka. Skup korijena za koje je $\lambda_i > 0$ za svaki $i = 1,\ldots,l$ označavamo $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})^+$ i njegove elemente zovemo pozitivni korijeni.

Ireducibilni reducirani sustav korijena grupe $\mathbf{G}$ ima Dynkinov dijagram tipa A_n, $n \geq 1$, B_n, $n \geq 1$ ili C_n, $n \geq 3$.

Definicija 1.1.11. Kažemo da je podgrupa $\mathbf{B}$ grupe $\mathbf{G}$ Borelova ako je maksimalna zatvorena, povezana i rješiva podgrupa.

Primjer 1.1.12. Podgrupa $\mathbf{B}$ gornjetrokutastih matrica u $\mathbf{GL}_n$ je Borelova podgrupa. Lako se vidi da je $\mathbf{B}$ zatvorena i povezana podgrupa od $\mathbf{GL}_n$, a primjer u 3. poglavlju iz [16] pokazuje da je rješiva.

Fiksirajmo Borelovu podgrupu $\mathbf{B}$ od $\mathbf{G}$. Pokazuje se da je skup Borelovih podgrupi od $\mathbf{G}$ u bijekciji sa skupom baza za reducirani sustav korijena od $\mathbf{G}$ obzirom na $\mathbf{T}$. Označimo sa Δ bazu koja odgovara Borelovoj podgrupi $\mathbf{B}$.

Definicija 1.1.13. Standardna parabolička podgrupa od $\mathbf{G}$, obzirom na fiksiranu Borelovu podgrupu $\mathbf{B}$, je izomorfna s $\mathbf{B}W_I\mathbf{B} =: \mathbf{P}_I$ za neki $I \subseteq \Delta$ i podgrupu Weylove grupe $W_I = \langle s_\alpha : \alpha \in I\rangle$.

Za $I \subseteq \Delta$ i $\mathbf{P}_I$ kao iz prethodne definicije, definiramo sljedeće grupe:

- $\mathbf{T}_I =$ najveća povezana podgrupa od $\bigcap_{\alpha\in I} \mathrm{Ker}\alpha$ koja sadrži identitetu,
- $\mathbf{M}_I =$ centralizator u $\mathbf{G}$ grupe $\mathbf{T}_I$,
- $\mathbf{N}_I =$ unipotentni radikal grupe $\mathbf{P}_I$,

gdje je $\mathbf{M}_\emptyset = \mathbf{T}$ za $\mathbf{P}_\emptyset = \mathbf{B}$.

Teorem 1.1.14. (Levijeva dekompozicija) Za paraboličku podgrupu $\mathbf{P}_I$ vrijedi $\mathbf{P}_I = \mathbf{M}_I\mathbf{N}_I$. Grupu $\mathbf{M}_I$ nazivamo Levijev faktor od $\mathbf{P}_I$.

Primjer 1.1.15. Opisat ćemo glavne pojmove definirane u poglavlju primijenjene na klasične grupe $\mathbf{GL}_n$, $\mathbf{Sp}_{2n}$, $\mathbf{SO}_{2n+1}$.

- $A_{n-1}, n \geq 2$: U grupi $\mathbf{GL}_n$ fiksiramo maksimalni torus

$$\mathbf{T} = \{\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in K^\times \text{ za } i = 1, \ldots, n\}.$$

Preko preslikavanja $(k_1, \ldots, k_n) \mapsto ((x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}))$ dobivamo izomorfizam grupa $\mathbb{Z}^n \simeq X^*(\mathbf{T})$. Označimo $\varepsilon_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ za $i = 1, \ldots, n$. Koristeći aditivnu notaciju, skup korijena $\Phi(\mathbf{GL}_n, \mathbf{T})$ je jednak skupu $\{\varepsilon_i - \varepsilon_j : i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j\}$. S Δ označimo bazu korijenskog sustava $\Phi(\mathbf{GL}_n, \mathbf{T})$ koja je jednaka $\{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} : i = 1, \ldots, n-1\}$. Borelova grupa $\mathbf{B}$ je grupa gornjetrokutastih matrica u $\mathbf{GL}_n$. Za $I \subseteq \Delta$ direktno po definiciji dobivamo

$$\mathbf{T}_I = \{\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_r) : x_1, \ldots, x_r \in K^\times\}$$

gdje se komponenta x_i pojavljuje n_i puta za $i = 1, \ldots, r$ te $n = n_1 + \ldots + n_r$. Time dobivamo da je Levijev faktor $\mathbf{M}_I$ izomorfan s $\mathbf{GL}_{n_1} \times \ldots \times \mathbf{GL}_{n_r}$.

- $C_n, n \geq 1$: U grupi $\mathbf{Sp}_{2n}$ fiksiramo maksimalni torus

$$\mathbf{T} = \{\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n, x_n^{-1}, \ldots, x_1^{-1}) : x_i \in K^\times \text{ za } i = 1, \ldots, n\}.$$

Preko preslikavanja $(k_1, \ldots, k_n) \mapsto ((x_1, \ldots, x_n, x_n^{-1}, \ldots, x_1^{-1}) \mapsto (x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}))$ imamo izomorfizam grupa $\mathbb{Z}^n \simeq X^*(\mathbf{T})$. Označimo $\varepsilon_i(x_1, \ldots, x_n, x_n^{-1}, \ldots, x_1^{-1}) = x_i$ za $i = 1, \ldots, n$. Koristeći aditivnu notaciju, skup korijena $\Phi(\mathbf{Sp}_{2n}, \mathbf{T})$ je jednak skupu

$$\{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j) : 1 \leq i \leq j \leq n\}.$$

Baza od $\Phi(\mathbf{Sp}_{2n}, \mathbf{T})$ je skup $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} : i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{2\varepsilon_n\}$. Borelova podgrupa određena bazom Δ je grupa gornjetrokutastih matrica u $\mathbf{Sp}_{2n}$. Levijevi faktori paraboličkih podgrupa od $\mathbf{Sp}_{2n}$ su izomorfni s $\mathbf{GL}_{n_1} \times \ldots \times \mathbf{GL}_{n_r} \times \mathbf{Sp}_{2n-2|\beta|}$ za $\beta = (n_1, \ldots, n_r)$ tako da je $|\beta| \leq n$.

- $B_n, n \geq 1$: U grupi $\mathbf{SO}_{2n+1}$ fiksiramo maksimalni torus

$$\mathbf{T} = \{\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n, 1, x_n^{-1}, \ldots, x_1^{-1}) : x_i \in K^\times \text{ za } i = 1, \ldots, n\}.$$

Sustav korijena $\Phi(\mathbf{SO}_{2n+1}, \mathbf{T})$ je jednak

$$\{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j) : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i : i = 1, \ldots, n\},$$

a baza Δ je skup $\{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} : i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\varepsilon_n\}$. Borelova podgrupa koja odgovara skupu Δ je podgrupa gornjetrokutastih matrica u $\mathbf{SO}_{2n+1}$. Levijevi faktori imaju analogan opis kao za grupu $\mathbf{Sp}_{2n}$ te ih time opisujemo za grupu $\mathbf{G}_n$ kao

$$\mathbf{GL}_{n_1} \times \ldots \times \mathbf{GL}_{n_r} \times \mathbf{G}_{n'}$$

tako da je $2(n_1 + \ldots + n_r) + n' = n$.

1.2. DOPUSTIVE REPREZENTACIJE

Glavni pojam ovog potpoglavlja su dopustive reprezentacije grupe G_n čija definicija ovisi o topologiji grupe. Prije njihove definicije prisjetimo se osnovnih pojmova teorije reprezentacija.

Definicija 1.2.1. Reprezentacija π grupe G je homomorfizam grupa $\pi : G \to GL(V)$ za kompleksni vektorski prostor V.

Definicija 1.2.2. Podreprezentacija od (π, V) je par $(\pi|_W, W)$ za G-invarijantan potprostor W od V.

Definicija 1.2.3. Kvocijent od (π, V) je par $(\overline{\pi}, V/W)$, gdje je $(\pi|_W, W)$ podreprezentacija od (π, V) i $\overline{\pi}(g)(v+W) = \pi(g)(v) + W$ za svaki $v \in V$ i $g \in G$.

Definicija 1.2.4. Subkvocijent od (π, V) je par $(\overline{\pi|_{W'}}, W'/W)$, gdje su $(\pi|_W, W)$ i $(\pi|_{W'}, W')$ podreprezentacije od (π, V) takve da je $W \subset W'$.

Definicija 1.2.5. Kažemo da je reprezentacija (π, V) ireducibilna ako $V \neq \{0\}$ i ne postoji pravi nenul G-invarijantan potprostor od V.

U nastavku za reprezentaciju (π, V) koristimo kraće oznake π ili V. Neka je (π, V) reprezentacija za koju je $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$ lanac G-invarijantnih potprostora od V takvih da je V_i/V_{i-1} ireducibilan za $i = 1, \ldots, n$. Skup $\{V_i/V_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$ zovemo kompozicioni niz reprezentacije (π, V). Prema Jordan-Hölderovom teoremu kompozicioni niz reprezentacije je dobro definiran. Kažemo da je prirodan broj n duljina reprezentacije π. Kompozicioni niz reprezentacije je temeljni pojam kojeg u disertaciji opisujemo za reprezentacije konačne duljine.

Definicija 1.2.6. Morfizam između reprezentacija (π, V) i (π', V') je linearni operator $\Phi : V \to V'$ takav da za svaki $g \in G$ vrijedi $\Phi \circ \pi(g) = \pi'(g) \circ \Phi$. Ako je morfizam bijekcija, govorimo o izomorfnim reprezentacijama i pišemo $\pi \simeq \pi'$. Ukoliko je Φ injekcija, kažemo da se π ulaže u π' i pišemo $\pi \hookrightarrow \pi'$.

Na skupu svih reprezentacija grupe G promatramo klase ekvivalencije po relaciji $\sim$ za koju su reprezentacije (π_1, V_1) i (π_2, V_2) u relaciji $\sim$ ako i samo ako su izomorfne.

Definicija 1.2.7. Kažemo da je grupa G topološka grupa ako je na G definirana topologija i ako su grupovna operacija $G \times G \to G,\ (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ i uzimanje inverza $G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ neprekidna preslikavanja.

Topologija na grupi G_n je relativna topologija od F^m za $m = (2n)^2$, ako je $G_n \simeq Sp_{2n}$ ili $m = (2n+1)^2$, ako je $G_n \simeq SO_{2n+1}$. Grupa G_n je očito topološka kako su joj preslikavanja iz definicije racionalne funkcije. Reprezentacije definirane pomoću topologije grupe su fundamentalni objekti za opis unitarnog duala grupe G_n kojeg definiramo nakon opisa topologije.

Definicija 1.2.8. Kažemo da je topološka grupa G lokalno kompaktna ako je topologija na G Hausdorffova i lokalno kompaktna.

Kako je F metrički prostor obzirom na apsolutnu vrijednost $|\cdot|_F$, zaključujemo da je topologija na G_n Hausdorffova. Dodatno, grupe $K_t = (e_{G_n} + \mathfrak{p}_F^t \mathscr{O}_F^m) \cap G_n$ za $t \geq 1$ čine fundamentalni sustav okolina od e_{G_n} pa je grupa G_n lokalno kompaktna. Dokaz sljedećeg teorema se može pronaći u potpoglavlju 1.2 u [33].

Teorem 1.2.9. Na lokalno kompaktnoj grupi G postoji jedinstvena, do na pozitivnu multiplikativnu konstantu, netrivijalna desno invarijantna mjera μ. Nazivamo ju desno invarijantna Haarova mjera.

Uočimo da je za lokalno kompaktnu grupu G preslikavanje sa Borelove σ-algebre $S \mapsto \mu(g^{-1}S)$ također desno invarijantna Haarova mjera za svaki $g \in G$. Zbog jedinstvenosti do na pozitivnu multiplikativnu konstantu dobivamo karakter

$$\delta_G : G \to \mathbb{R}_+ \text{ za koji vrijedi } \mu(g^{-1}S) = \delta_G(g)\mu(S).$$

Funkciju δ_G nazivamo modularni karakter grupe G. U nastavku navodimo definicije bitne za teoriju reprezentacija grupa GL_n i G_n. Do kraja potpoglavlja grupa G označava grupu G_n ili GL_n.

Definicija 1.2.10. Kažemo da je reprezentacija (π, V) grupe G glatka ako je za svaki $v \in V$ stabilizator $G_v = \{g \in G : \pi(g)(v) = v\}$ od v otvorena podgrupa od G.

Ekvivalentno, za glatku reprezentaciju V vrijedi $V = \bigcup_K V^K$, gdje K ide po familiji otvorenih kompaktnih podgrupa od G i V^K je potprostor K-invarijantnih vektora, to jest

$$V^K = \{v \in V : \pi(k)v = v, \forall k \in K\}.$$

Skup klasa ekvivalencije ireducibilnih glatkih reprezentacija od G_n ili GL_n označavamo $\widetilde{G_n}$ ili $\widetilde{GL_n}$, redom. Označimo $\widetilde{G} = \bigcup_{n \geq 0} \widetilde{G_n}$ i $\widetilde{GL} = \bigcup_{n \geq 0} \widetilde{GL_n}$. Sljedeća lema opisuje prostor morfizama ireducibilne glatke reprezentacije, a dokaz se može naći u [34, Potpoglavlje III.1.8].

Lema 1.2.11. **(Schur)** Neka je (π, V) ireducibilna glatka reprezentacija od G i $A : V \to V$ netrivijalan morfizam reprezentacije π. Tada je $A = \lambda \mathrm{id}_V$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definicija 1.2.12. Neka je (π, V) glatka reprezentacija grupe G. Na prostoru $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ linearnih funkcionala od V definiramo reprezentaciju (π^*, V^*) grupe G tako da je

$$\pi^*(g)(v^*)(v) = v^*(\pi(g^{-1})(v)) \text{ za svaki } v^* \in V^*,\ v \in V,\ g \in G_n.$$

Reprezentacija (π^*, V^*) ne mora biti glatka po definiciji pa ju restringiramo na vektorski prostor linearnih funkcionala koji imaju otvoreni stabilizator. Definiranu glatku reprezentaciju označavamo s $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V})$ i nazivamo kontragradijent reprezentacije (π, V). Ako vrijedi $\pi \simeq \widetilde{\pi}$, kažemo da je π samokontragradijentna.

Definicija 1.2.13. Kažemo da je glatka reprezentacija (π, V) grupe G unitarna ako postoji skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\langle \pi(g)(v_1), \pi(g)(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ za svaki $g \in G$, $v_1, v_2 \in V$.

Lako se pokaže da su unitarne reprezentacije konačne duljine poluproste. Skup klasa ekvivalencije ireducibilnih unitarnih reprezentacija od G_n ili GL_n nazivamo unitarni dual i označavamo $\widehat{G}_n$ ili $\widehat{GL_n}$, redom. Označimo $\widehat{G} = \bigcup_{n \geq 0} \widehat{G}_n$ i $\widehat{GL} = \bigcup_{n \geq 0} \widehat{GL_n}$. Prema strategiji Harish-Chandre, $\widehat{G}$ klasificiramo po koracima:

1. klasifikacija neunitarnog duala $\widetilde{G}$ (problem neunitarnog duala),

2. identifikacija unitarnih klasa u $\widetilde{G}$ (problem unitarizabilnosti).

Definicija 1.2.14. Kažemo da je glatka reprezentacija (π, V) od G dopustiva ako je V^K konačnodimenzionalan za svaku kompaktnu otvorenu podgrupu K od G.

Bernsteinov teorem povezuje glatke i dopustive reprezentacije na sljedeći način:

Teorem 1.2.15. Svaka ireducibilna glatka reprezentacija od G je dopustiva.

Dokaz prethodnog teorema se nalazi u [34, Potpoglavlje VI.2.2]. Neka je $\mathscr{C}(G)$ kategorija dopustivih reprezentacija konačne duljine grupe G, gdje dodatno dopuštamo da je G i Levijev faktor paraboličke podgrupe od G_n ili GL_n. Lako se vidi da je $\mathscr{C}(G)$ Abelova kategorija.

Definicija 1.2.16. Grothendieckova grupa Abelove kategorije $\mathscr{C}$ je Abelova grupa R generirana klasama ekvivalencije $[A]$ objekata A od $\mathscr{C}$ koji zadovoljavaju relaciju $[A] = [A'] + [A'']$ kada je $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ egzaktni niz u $\mathscr{C}$.

Grothendieckovu grupu od $\mathscr{C}(G)$ označavamo s $R(G)$. Za kompozicioni niz $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{k-1} \subset V_k = V$ od $(\pi, V) \in \mathscr{C}(G)$ i egzaktni niz $0 \to V_1 \to V \to V/V_1 \to 0$ induktivno dobivamo $[V] = [V_1] + [V_2/V_1] + \ldots + [V/V_{k-1}]$. Kada naglasak nije na rangu grupe, koristimo $R(G) = \oplus_{n\geq 0} R(G_n)$, $R(GL) = \oplus_{n\geq 0} R(GL_n)$. Također za ireducibilne reprezentacije definiramo $\mathrm{Irr}(G) = \oplus_{n\geq 0} \mathrm{Irr}(G_n)$, $\mathrm{Irr}(GL) = \oplus_{n\geq 0} \mathrm{Irr}(GL_n)$. Jednakost $\pi = \pi_1 + \ldots + \pi_k$ u Grothendieckovoj grupi nazivamo semisimplifikacija reprezentacije π.

Fundamentalne konstrukcije reprezentacija u $\mathscr{C}(G)$ su parabolički inducirana reprezentacija i Jacquetov modul koje su povezane Frobeniusovim reciprocitetom. Osnove ove teorije su sadržaj članka Bernsteina i Zelevinskog [2].

Definicija 1.2.17. Neka je $P = MN$ parabolička podgrupa od G s odgovarajućom Levijevom dekompozicijom. Za $(\sigma, W) \in \mathscr{C}(M)$ definiramo vektorski prostor $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ koji se sastoji od funkcija $f : G \to W$ takvih da

1. $f(mng) = \delta_P^{\frac{1}{2}}(m)\sigma(m)f(g)$ za sve $m \in M$, $n \in N$ and $g \in G$,
2. postoji otvorena kompaktna podgrupa K_f od G takva da je $f(gk) = f(g)$ za sve $k \in K_f$ i $g \in G$.

Grupa G djeluje na $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ desnim translacijama, to jest $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)(g)(f)(g') = f(g'g), \forall g' \in G$. Reprezentaciju $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ zovemo normalizirana parabolički inducirana reprezentacija iz σ.

Unipotentni radikal N od P je unija kompaktnih podgrupa prema [7, Teorem 2.1]. Modularni karakter je neprekidna funkcija pa kompaktnu grupu od G preslikava u kompaktnu podgrupu od $\mathbb{R}_+$. Time je slika od δ_P na N jednaka $\{1\}$, zbog čega smo u prvom uvjetu ekvivalentno mogli definirati $\delta_P^{\frac{1}{2}}(mn)$.

Za reprezentaciju $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_k \otimes \sigma \in \mathscr{C}(M)$, gdje je Levijev faktor M izomorfan s $GL_{m_1} \times \ldots \times GL_{m_k} \times G_{n-|\beta|}$ za $\beta = (m_1, \ldots, m_k)$, normaliziranu parabolički induciranu reprezentaciju $\mathrm{Ind}_P^{G_n}(\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_k \otimes \sigma)$ od G_n označavamo s $\pi_1 \times \ldots \times \pi_k \rtimes \sigma$. Dokaz sljedećeg teorema može se pronaći u [34, Potpoglavlje IV.2.3].

Teorem 1.2.18. Neka je reprezentacija $(\sigma, W) \in \mathscr{C}(M)$ unitarna, pri čemu je M Levijev faktor paraboličke podgrupe P od G. Tada je $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ unitarna reprezentacija.

Definicija 1.2.19. Neka je $(\pi, V) \in \mathscr{C}(G)$ i $P = MN$ parabolička podgrupa od G. Definiramo skup koinvarijanti $V(N) = \mathrm{span}(\pi(n)(v) - v \mid v \in V, n \in N)$. Normalizirani Jacquetov modul od (π, V) je reprezentacija $(JM_N(\pi), V/V(N))$ Levijevog faktora M definirana s

$$JM_N(\pi)(m)(v + V(N)) = \delta_P^{-\frac{1}{2}}(m)\pi(m)(v) + V(N) \text{ za svaki } m \in M,\ v \in V.$$

Za k-torku $\beta = (m_1, \ldots, m_k)$ koja odgovara paraboličkoj podgrupi P_β od G_n i $(\pi, V) \in \mathscr{C}(G)$, normalizirani Jacquetov modul od π označavamo $r_\beta(\pi)$. Tvrdnja sljedećeg teorema je dobro poznata činjenica, a njezin dokaz se može naći u [34, Poglavlje VI.1].

Teorem 1.2.20. Neka je $P = MN$ parabolička podgrupa od G s Levijevom dekompozicijom. Za reprezentacije $\pi \in \mathscr{C}(G)$ i $\sigma \in \mathscr{C}(M)$ su preslikavanja

$$\sigma \mapsto \operatorname{Ind}_P^G(\sigma) \ \text{ i } \ \pi \mapsto JM_N(\pi)$$

redom funktori $\operatorname{Ind}_P^G : \mathscr{C}(M) \to \mathscr{C}(G)$ i $JM_N : \mathscr{C}(G) \to \mathscr{C}(M)$. Dodatno, navedeni funktori su egzaktni i tranzitivni.

Frobeniusov reciprocitet povezuje opisane konstrukcije u terminima prstena morfizama. Dokaz sljedećeg teorema se može pronaći u [34, Poglavlje 3, Teorem 2.5].

Teorem 1.2.21. **(Frobeniusov reciprocitet)** Neka je $\pi \in \mathscr{C}(G)$ i $\sigma \in \mathscr{C}(M)$. Tada vrijedi

$$\operatorname{Hom}_G(\pi, \operatorname{Ind}_P^G(\sigma)) \simeq \operatorname{Hom}_M(JM_N(\pi), \sigma).$$

Ako se π ulaže u $\operatorname{Ind}_P^G(\sigma)$ i σ je ireducibilna reprezentacija, onda po Frobeniusovom reciprocitetu zaključujemo da je σ kvocijent od $JM_N(\pi)$.

Esencijalno unitarizabilne dopustive reprezentacije u $\hat{G}$ imaju filtraciju s klasama reprezentacija koje su ključne za teoriju reprezentacija p-adskih reduktivnih grupa. Opisujemo ju prema teoriji iz [3].

Definicija 1.2.22. Neka je (π, V) glatka reprezentacija grupe G te $\widetilde{V}$ glatki vektori kontragradijenta V^* od (π, V). Funkciju oblika

$$G \to \mathbb{C}, \ g \mapsto \widetilde{v}(\pi(g)(v))$$

za fiksne $v \in V$ i $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$ nazivamo matrični koeficijent reprezentacije (π, V).

Matričnim koeficijentima definiramo klase reprezentacija koje čine filtraciju dopustivih reprezentacija u $\hat{G}$, od kojih je temeljna klasa kuspidalnih reprezentacija.

Definicija 1.2.23. Za glatku reprezentaciju konačne duljine (π, V) grupe G kažemo da je kuspidalna ako joj svi matrični koeficijenti imaju kompaktne nosače modulo centar $Z(G)$.

Kuspidalne reprezentacije karakteriziramo u terminima Jacquetovih modula.

Teorem 1.2.24. Glatka reprezentacija π grupe G je kuspidalna ako i samo ako je $JM_N(\pi) = 0$ za svaku pravu paraboličku podgrupu $P = MN$ od G.

Kuspidalne i normalizirane parabolički inducirane reprezentacije iz istih iscrpljuju ireducibilne glatke reprezentacije grupe G u smislu sljedećeg teorema.

Teorem 1.2.25. Za nekuspidalnu ireducibilnu reprezentaciju $\pi \in \mathscr{C}(G)$ postoji parabolička podgrupa $P = MN$ i kuspidalna reprezentacija $\rho \in \mathscr{C}(M)$ tako da je π podreprezentacija od $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$.

Primijetimo da prema Schurovoj lemi 1.2.11 za glatku ireducibilnu reprezentaciju (π, V) od G postoji karakter $\omega_\pi : Z(G) \to \mathbb{C}$ za kojeg vrijedi $\pi(z) = \omega_\pi(z)\mathrm{id}_V$, $\forall z \in Z(G)$. Naime, $\pi(z)$ je morfizam reprezentacije (π, V) jer vrijedi $\pi(z)(\pi(g)v) = \pi(zg)(v) = \pi(gz)(v) = \pi(g)(\pi(z)v)$ za svaki $g \in G$, $z \in Z(G)$ i $v \in V$. Nazivamo ga centralni karakter reprezentacije (π, V).

Definicija 1.2.26. Karakter $f : G \to \mathbb{C}^\times$ je unitaran ako je $|f(g)| = 1$ za svaki $g \in G$.

Prisjetimo se, funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ je element L^p prostora ako je integral $\int_G |f(g)|^p d\mu$ obzirom na Haarovu mjeru μ konačan.

Definicija 1.2.27. Kažemo da je reprezentacija (π, V) kvadratno integrabilna ako ima unitarni centralni karakter te su joj svi matrični koeficijenti iz prostora L^2 modulo centar. Ireducibilne kvadratno integrabilne reprezentacije nazivamo diskretne serije.

Kažemo da je reprezentacija (π, V) temperirana ako ima unitarni centralni karakter te su joj svi matrični koeficijenti iz prostora $L^{2+\varepsilon}$ za $\varepsilon > 0$ modulo centar.

Za dobru definiranost integrala

$$\int_{G/Z(G)} |\widetilde{v}(\pi(g)(v))| d\mu$$

je potrebno provjeriti da iz $g_1 Z(G) = g_2 Z(G)$ slijedi $|\widetilde{v}(\pi(g_1)v)| = |\widetilde{v}(\pi(g_2)v)|$. Pod pretpostavkom unitarnog centralnog karaktera reprezentacije π računamo

$$|\widetilde{v}(\pi(g_1)v)| = |\widetilde{v}(\pi(g_2)(\pi(g_2^{-1}g_1)v))| = |\omega_\pi(g_2^{-1}g_1)||\widetilde{v}(\pi(g_2)v)| = |\widetilde{v}(\pi(g_2)v)|.$$

Definicija 1.2.28. Kažemo da je reprezentacija (π, V) od G esencijalno kvadratno integrabilna ako postaje kvadratno integrabilna nakon množenja s nekim karakterom od G. Skup takvih reprezentacija označavamo $D(G)$.

Vrijede sljedeće inkluzije:

$$\{\text{kuspidalne}\} \subset \{\text{kvadratno integrabilne}\} \subset \{\text{temperirane}\} \subset \{\text{dopustive}\}.$$

Opišimo Casselmanov kriterij dokazan u [6] kojim se u terminima Jacquetovih modula karakterizira temperiranost (i kvadratna integrabilnost) glatkih reprezentacija od G_n. Definiramo karakter opće linearne grupe $\nu : GL_m \to \mathbb{R}^{\times},\ g \mapsto |\det(g)|_F$. Neka je π ireducibilna glatka reprezentacija od G_n. Pretpostavimo da je $\nu^{x_1}\rho_1 \otimes \ldots \otimes \nu^{x_k}\rho_k \otimes \sigma$ konstituent od $r_\beta(\pi)$ za neku paraboličku podgrupu P_β tako da su $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$, ρ_i ireducibilne unitarne kuspidalne reprezentacije općih linearnih grupa GL_{m_i} za $i = 1, \ldots, k$ i σ ireducibilna kuspidalna reprezentacija od $G_{n'}$. Ako je π temperirana, onda vrijedi

$$\begin{aligned} m_1x_1 &\geq 0 \\ m_1x_1 + m_2x_2 &\geq 0 \\ &\vdots \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Obratno, ako nejednakosti (1.1) vrijede za svaki takav $\nu^{x_1}\rho_1 \otimes \ldots \otimes \nu^{x_k}\rho_k \otimes \sigma$ u Jacquetovom modulu, onda je π temperirana. Ako su sve nejednakosti stroge, onda su ovim kriterijom okarakterizirane kvadratno integrabilne reprezentacije.

1.3. OPĆA LINEARNA GRUPA

Temelji teorije reprezentacija opće linearne grupe u p-adskom slučaju su postavljeni člancima Bernsteina i Zelevinskog [2, 43]. Uz važnost teorije same po sebi, njezini rezultati imaju velik utjecaj na teoriju reprezentacija grupa G_n. Glavni razlog tome leži u opisu Levijevog faktora paraboličke podgrupe u Primjeru 1.1.15. U smislu klasifikacije unitarnog duala $\widehat{GL}$ u [38], teoriju reprezentacija iz $R(GL)$ razumijemo bolje nego teoriju reprezentacija iz $R(G)$.

Esencijalno kvadratno integrabilne reprezentacije opće linearne grupe su klasificirane pomoću segmenata.

Definicija 1.3.1. Za ireducibilnu kuspidalnu reprezentaciju ρ grupe GL_n skup $\{\rho, \nu\rho, \ldots, \nu^m\rho\}$ za $m \in \mathbb{N}$ zovemo segment i pišemo $[\rho, \nu^m\rho]$. Skup svih segmenata označavamo $\mathscr{S}$.

Teorem 1.3.2. Inducirana reprezentacija $\nu^m\rho \times \cdots \times \nu\rho \times \rho$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju u oznaci $\delta([\rho, \nu^m\rho])$. Vrijedi

$$D(GL) = \{\delta(\Delta) : \text{ za sve } \Delta \in \mathscr{S}\}.$$

Za $\delta \in \mathscr{D}$ postoji jedinstveni $e(\delta) \in \mathbb{R}$ takav da je $\nu^{-e(\delta)}\delta$ unitarizabilna. Konkretno, ako je $\delta \simeq \delta([\nu^x\rho, \nu^y\rho])$, onda je $e(\delta) = \frac{x+y}{2}$. Kako bismo postigli uniformnost rezultata definiramo $\delta([\nu^x\rho, \nu^y\rho]) \simeq 1$ za $y = x - 1$, gdje je 1 jednodimenzionalna reprezentacija trivijalne grupe. Dodatno, $\delta \in D(GL)$ je kvadratno integrabilna ako i samo ako je $e(\delta) = 0$. Skup kvadratno integrabilnih reprezentacija u $D(GL)$ označavamo s $D(GL)^u$.

Paraboličkom indukcijom iz reprezentacija iz $D(GL)$ dobivamo parametrizaciju ireducibilnih reprezentacija općih linearnih grupa. Za parametrizaciju reprezentacija iz $\mathrm{Irr}(G)$ na klasičnom dijelu induciramo iz temperiranih reprezentacija grupa G_n. U disertaciji preferiramo podreprezentacijsku verziju Langlandsove klasifikacije prema kvocijentnoj. Dokaz sljedećeg teorema se nalazi u [4, Poglavlje XIII].

Teorem 1.3.3. (Langlandsova klasifikacija)

- Za $\delta_1, \ldots, \delta_l \in D(GL)$ takve da je $e(\delta_1) \leq \ldots \leq e(\delta_l)$, inducirana reprezentacija

$$\delta_1 \times \cdots \times \delta_l$$

  ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju koju označavamo s $L(\delta_1, \ldots, \delta_l)$. Označimo skup svih takvih ireducibilnih reprezentacija s NT_{GL}. Za svaku netemperiranu reprezentaciju $\pi \in \mathrm{Irr}(GL)$ postoji jedinstvena reprezentacija $L(\delta_1, \dots, \delta_l) \in \mathrm{NT}_{GL}$ takva da vrijedi $\pi \simeq L(\delta_1, \dots, \delta_l)$.

- Za temperiranu reprezentaciju $\tau \in \mathrm{Irr}(G)$ i $\delta_1, \dots, \delta_l \in D(GL)$ takve da je $e(\delta_1) \leq \dots \leq e(\delta_l) < 0$, inducirana reprezentacija

$$\delta_1 \times \cdots \times \delta_l \rtimes \tau$$

ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju koju označavamo s $L(\delta_1, \dots, \delta_l; \tau)$. Označimo skup svih takvih ireducibilnih reprezentacija s NT_G. Za svaku netemperiranu reprezentaciju $\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$ postoji jedinstvena reprezentacija $L(\delta_1, \dots, \delta_l; \tau) \in \mathrm{NT}_G$ takva da vrijedi $\sigma \simeq L(\delta_1, \dots, \delta_l; \tau)$.

Poznavanje kompozicionog niza inducirane reprezentacije $\delta_1 \times \delta_2$ za $\delta_1, \delta_2 \in D(GL)$ je osnovni korak u opisu teorije reprezentacija opće linearne grupe.

Definicija 1.3.4. Za segmente $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathscr{S}$ kažemo da su povezani ako $\Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathscr{S} \setminus \{\Delta_1, \Delta_2\}$.

Izdvojimo važan rezultat dokazan u [43].

Teorem 1.3.5. Neka su $\delta(\Delta_1), \delta(\Delta_2) \in D(GL)$. Inducirana reprezentacija $\delta(\Delta_1) \times \delta(\Delta_2)$ je reducibilna ako i samo ako su Δ_1 i Δ_2 povezani segmenti. U tom slučaju ima kompozicioni niz

$$L(\delta(\Delta_1), \delta(\Delta_2)) + \delta(\Delta_1 \cup \Delta_2) \times \delta(\Delta_1 \cap \Delta_2),$$

gdje pretpostavljamo da je $e(\delta(\Delta_1)) \leq e(\delta(\Delta_2))$.

U Grothendieckovim grupama $R(GL)$ i $R(G)$ vrijede jednakosti među reprezentacijama za koje je veza između njihovih ireducibilnih podreprezentacija i kvocijenata određena u [11, Teorem 2.6]. Jasno, poznavanjem jednakosti među reprezentacijama pojednostavljujemo problem određivanja kompozicionog niza istih.

Teorem 1.3.6. Neka su $\pi, \pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Irr}(GL)$. Tada u $R(GL)$ vrijedi $\pi_1 \times \pi_2 = \pi_2 \times \pi_1$. Neka je $\sigma \in R(G)$. Tada u $R(G)$ vrijedi $\pi_1 \times \pi_2 \rtimes \sigma = \pi_2 \times \pi_1 \rtimes \sigma$ i $\widetilde{\pi} \rtimes \sigma = \pi \rtimes \sigma$.

Za opis unitarnog duala općih linearnih grupa ključne su Speh reprezentacije.

Definicija 1.3.7. Za $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \in \mathbb{N}$ i $\delta \simeq \delta([\nu^{-a}\rho, \nu^{a}\rho])$, reprezentaciju

$$L(\nu^{-\frac{m-1}{2}}\delta, \nu^{\frac{m-1}{2}+1}\delta, \dots, \nu^{\frac{m-1}{2}}\delta)$$

označavamo $u(\delta, m)$ i nazivamo Speh ili Spehina reprezentacija.

Prema [38], klasifikacija unitarnog duala $\widehat{GL}$ je opisana sljedećim teoremom.

Teorem 1.3.8. Neka je

$$S = \{u(\delta,m),\ \nu^{\alpha}u(\delta,m)\times\nu^{-\alpha}u(\delta,m):\ \delta\in D(GL)^u,\ m\in\mathbb{N},\ 0<\alpha<\frac{1}{2}\}.$$

(i) Ako su $\pi_1,\ldots,\pi_k\in S$, tada vrijedi $\pi_1\times\ldots\times\pi_k\in \mathrm{Irr}^u(GL)$.

(ii) Ako je $\pi\in\mathrm{Irr}^u(GL)$, onda postoje $\pi_1,\ldots,\pi_l\in S$ takvi da vrijedi $\pi\simeq\pi_1\times\ldots\times\pi_l$. Dodatno, elementi $\pi_1,\ldots,\pi_l$ su jedinstveni do na permutaciju.

U disertaciji, među ostalim, promatramo reprezentacije inducirane s maksimalnih paraboličkih podgrupa koje na općem linearnom dijelu imaju ljestvičastu reprezentaciju.

Definicija 1.3.9. Za $m\in\mathbb{N}$ i reprezentacije $\delta([\nu^{a_i}\rho,\nu^{b_i}\rho])\in D(GL)$ za $i=1,\ldots,m$ takve da $a_1<\ldots<a_m$ i $b_1<\ldots<b_m$, reprezentaciju

$$L(\delta([\nu^{a_1}\rho,\nu^{b_1}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{a_m}\rho,\nu^{b_m}\rho])) \tag{1.2}$$

nazivamo ljestvičasta reprezentacija.

Ako vrijedi $a_{i+1}=a_i+1$, $b_{i+1}=b_i+1$ za $i=1,\ldots,m-1$ reprezentaciju (1.2) nazivamo esencijalno Speh reprezentacija.

Time vidimo da su esencijalno Speh reprezentacije, u skladu s općenitim značenjem, Speh reprezentacije pomnožene karakterom ν^x za neki $x\in\mathbb{R}$. Prema Teoremu 1.3.8, esencijalno Speh reprezentacije su također bitne za opis unitarnog duala opće linearne grupe. Ljestvičaste reprezentacije su prvotno definirane i proučavane u [17, 18]. Pokazano je da se korištenjem ljestvičastih reprezentacija može pojednostaviti dokaz klasifikacije unitarnog duala, u čemu se očituje njihova važnost. Dodatno, klasa ljestvičastih reprezentacija ima prednost nad klasom esencijalno Speh reprezentacija na nivou Jacquetovih modula. Naime, rezultati iz [15] pokazuju da su konstituenti Jacquetovih modula ljestvičastih reprezentacija tenzorski produkti reprezentacija istog tipa. S druge strane, lako se vidi da analogon općenito ne vrijedi za Jacquetove module esencijalno Speh reprezentacija. Obzirom da nam se pristup određivanju ireducibilnih subkvocijentata induciranih reprezentacija temelji na Geometrijskoj lemi, klasa ljestvičastih reprezentacija je u tom smislu prilagođenija zadatku.

Definicija 1.3.10. Za $\pi\in\mathrm{Irr}(GL)$ definiramo preslikavanje $m^*(\pi)=\sum_{k=0}^{n} r_{(k)}(\pi)$ koje po $\mathbb{Z}$-linearnosti proširujemo na $R(GL)$.

Geometrijska lema implicira da je preslikavanje m^* multiplikativno, to jest za $\pi_1, \pi_2 \in R(GL)$ vrijedi $m^*(\pi_1 \times \pi_2) = m^*(\pi_1) \times m^*(\pi_2)$.

Za ljestvičastu reprezentaciju π je prema [15] određena semisimplifikacija od $m^*(\pi)$.

Teorem 1.3.11. Za ljestvičastu reprezentaciju $\pi = L(\delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_m}\rho, \nu^{b_m}\rho]))$, $m^*(\pi)$ je jednako

$$\sum_{\mathrm{Lad}(\pi)} L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_m+1}\rho, \nu^{b_m}\rho])) \otimes L(\delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{c_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_m}\rho, \nu^{c_m}\rho])), \tag{1.3}$$

gdje $\mathrm{Lad}(\pi)$ označava skup svih m-torki $(c_1, \ldots, c_m)$ realnih brojeva takvih da $c_1 < \ldots < c_m$, $a_i - 1 \leq c_i \leq b_i$ te $c_i - a_i \in \mathbb{Z}$ za $i = 1, \ldots, m$.

Definicija 1.3.12. Za reprezentaciju $\pi \simeq L(\delta(\Delta_1), \ldots, \delta(\Delta_k))$ multiskup $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k$ nazivamo kuspidalni nosač reprezentacije π i označavamo $[\pi]$.

Sljedeće dvije leme su jednostavne tvrdnje o ljestvičastim reprezentacijama koje imaju značajnu ulogu u određivanju kompozicionih nizova reprezentacija proučavanih u disertaciji.

Lema 1.3.13. Neka su $L(\delta_1^{(i)}, \ldots, \delta_{n_i}^{(i)})$ za $i = 1, 2, 3$ ljestvičaste reprezentacije takve da je kuspidalni nosač od

$$\pi_0 = L(\delta_1^{(1)}, \ldots, \delta_{n_1}^{(1)}) \times L(\delta_1^{(2)}, \ldots, \delta_{n_2}^{(2)}) \times L(\delta_1^{(3)}, \ldots, \delta_{n_3}^{(3)})$$

segment Δ. Ako postoji $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ i $j_0 \in \{1, \ldots, n_{i_0} - 1\}$ takav da se $\delta_{j_0}^{(i_0)} \times \delta_{j_0+1}^{(i_0)}$ reducira, onda π_0 ne sadrži esencijalno kvadratno integrabilni subkvocijent.

Dokaz. Uvedimo oznaku $\delta_j^{(i)} = \delta(\Delta_j^{(i)})$. Pretpostavimo da π_0 sadrži esencijalno kvadratno integrabilni subkvocijent. Zbog jednakosti kuspidalnih nosača radi se nužno o $\delta(\Delta)$. Induktivnom primjenom Teorema 1.3.5 postoje jedinstveni $n', n'' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i reprezentacije $\delta_1', \ldots, \delta_{n'}', \delta_1'', \ldots, \delta_{n''}'' \in D(GL)$ koje definiraju $L(\delta_1^{(i)}, \ldots, \delta_{n_i}^{(i)})$ za $i = 1, 2, 3$ tako da vrijedi

$$\delta(\Delta) \hookrightarrow \prod_{j=1}^{n'} \delta_j' \times \delta(\Delta_{j_0}^{(i_0)} \cup \Delta_{j_0+1}^{(i_0)}) \times \prod_{j=1}^{n''} \delta_j''.$$

Frobeniusov reciprocitet sada implicira da vrijedi $\bigotimes_{j=1}^{n'} \delta_j' \otimes \delta(\Delta_{j_0}^{(i_0)} \cup \Delta_{j_0+1}^{(i_0)}) \otimes \bigotimes_{j=1}^{n''} \delta_j'' \leq r_\beta(\pi_0)$ za odgovarajuću paraboličku podgrupu P_β. S druge strane, imamo

$$\delta(\Delta) \leq \pi_0 \leq \prod_{j=1}^{n'} \delta_j' \times L(\delta_{j_0}^{(i_0)}, \delta_{j_0+1}^{(i_0)}) \times \prod_{j=1}^{n''} \delta_j''.$$

Definiramo $\Pi \simeq \prod_{j=1}^{n'} \delta_j' \times L(\delta_{j_0}^{(i_0)}, \delta_{j_0+1}^{(i_0)}) \times \prod_{j=1}^{n''} \delta_j''$. Uočimo da su kuspidalni nosači reprezentacija $L(\delta_{j_0}^{(i_0)}, \delta_{j_0+1}^{(i_0)})$, δ_j', δ_j'' međusobno disjunktni. Koristeći multiplikativnost od m^*, vidimo da je nužno $\delta(\Delta_{j_0}^{(i_0)} \cup \Delta_{j_0+1}^{(i_0)}) \otimes 1 \leq m^*(L(\delta_{j_0}^{(i_0)}, \delta_{j_0+1}^{(i_0)}))$ što nije moguće jer su to neizomorfne reprezentacije. ■

Lema 1.3.14. Označimo sljedeće ljestvičaste reprezentacije

$$\pi \simeq L(\delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_n}\rho, \nu^{b_n}\rho])),\ \pi_1 \simeq \delta([\nu^{a_m}\rho, \nu^{c_m}\rho])$$

i $\pi_2 \simeq L(\delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_m+1}\rho, \nu^{b_m}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_n}\rho, \nu^{b_n}\rho]))$ za neki $m \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je π subkvocijent od $\pi_1 \times \pi_2$ kratnosti jedan.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po m. Za $m = 1$, definiramo induciranu reprezentaciju

$$\Pi \simeq \delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \times \delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{c_1}\rho]) \times L(\delta([\nu^{a_2}\rho, \nu^{b_2}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_n}\rho, \nu^{b_n}\rho])).$$

Očito, $\pi \leq \Pi$ i $\pi_1 \times \pi_2 \leq \Pi$. Pokazat ćemo da se

$$\Pi_0 \simeq \delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \otimes \delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{c_1}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{a_2}\rho, \nu^{b_2}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_n}\rho, \nu^{b_n}\rho]))$$

nalazi u Jacquetovim modulima od Π i $\pi_1 \times \pi_2$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu s kratnosti jedan. To će implicirati da je π subkvocijent od $\pi_1 \times \pi_2$ s kratnosti jedan.

Prvo, lako je vidjeti da se Π_0 nalazi u Jacquetovom modulu od $\pi_1 \times \pi_2$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Definicija od π_2 i Frobeniusov reciprocitet impliciraju

$$\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{a_2}\rho, \nu^{b_2}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_n}\rho, \nu^{b_n}\rho])) \leq m^*(\pi_2).$$

Kako je m^* multiplikativno preslikavanje, vrijedi

$$\delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{c_1}\rho]) \times \delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{a_2}\rho, \nu^{b_2}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_n}\rho, \nu^{b_n}\rho])) \leq m^*(\pi_1 \times \pi_2).$$

Sada tranzitivnost Jacquetovih modula implicira tvrdnju.

Da bismo pokazali da se Π_0 nalazi u Jacquetovom modulu od Π obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu s kratnosti jedan, primijetimo da u $R(GL)$ imamo

$$\Pi = \delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \times L(\delta([\nu^{a_2}\rho, \nu^{b_2}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_n}\rho, \nu^{b_n}\rho])) + \tag{1.4}$$

$$L(\delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{c_1}\rho]), \delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho])) \times L(\delta([\nu^{a_2}\rho, \nu^{b_2}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_n}\rho, \nu^{b_n}\rho])). \tag{1.5}$$

Prema formuli (1.3) lako vidimo da se Π_0 nalazi s kratnosti jedan u Jacquetovom modulu od (1.4) obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. S druge strane, Jacquetov modul od (1.5) obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu ne sadrži ireducibilnu reprezentaciju oblika $\delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{b_1}\rho])\otimes\pi_0$. Naime, ako je $\pi_1'\otimes\pi_2'$ konstituent od

$$m^*(L(\delta([\nu^{a_2}\rho,\nu^{b_2}\rho]),\dots,\delta([\nu^{a_n}\rho,\nu^{b_n}\rho])))$$

takav da $\pi_1'\not\simeq 1$, onda u $[\pi_1']$ postoji neki $\nu^x\rho$ s $x>b_1$. Time tražimo $\delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{b_1}\rho])\otimes\pi_0'$ za neki $\pi_0'\in R(GL)$ u $m^*(L(\delta([\nu^{a_1}\rho,\nu^{c_1}\rho]),\delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{b_1}\rho])))$. Po formuli (1.3) postoje realni brojevi i,j takvi da je $i<j$, $a_1-1\le i\le c_1$, $c_1\le j\le b_1$ i

$$\delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{b_1}\rho])\le L(\delta([\nu^{i+1}\rho,\nu^{c_1}\rho]),\delta([\nu^{j+1}\rho,\nu^{b_1}\rho])).$$

Kako je nužno $j=c_1$, iz $i<j$ slijedi $i\le c_1-1$. To implicira da je $\nu^{c_1}\rho$ u kuspidalnom nosaču od $\delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{b_1}\rho])$, što nije istina.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $1,\dots,m-1$. Za m tvrdnju dokazujemo na sličan način, samo s jednostavnijim ključnim argumentom. Definiramo

$$\Pi_1\simeq\left(\prod_{i=1}^{m-1}\delta([\nu^{a_i}\rho,\nu^{b_i}\rho])\right)\times\delta([\nu^{a_m}\rho,\nu^{c_m}\rho])\times L(\delta([\nu^{c_m+1}\rho,\nu^{b_m}\rho]),\dots,\delta([\nu^{a_n}\rho,\nu^{b_n}\rho])).$$

Prema bazi indukcije i definiciji od π slijedi $\pi\le\Pi_1$. Također $\pi_1\times\pi_2\le\Pi_1$. Primijetimo da se

$$\Pi_2\simeq\bigotimes_{i=1}^{m-1}\delta([\nu^{a_i}\rho,\nu^{b_i}\rho])\otimes L(\delta([\nu^{a_m}\rho,\nu^{b_m}\rho]),\dots,\delta([\nu^{a_n}\rho,\nu^{b_n}\rho]))$$

nalazi u Jacquetovom modulu od Π_1 s kratnosti jedan. Naime, postoji točno jedan konstituent Jacquetovih modula od Π_1 oblika $\bigotimes_{i=1}^{m-1}\delta([\nu^{a_i}\rho,\nu^{b_i}\rho])\otimes\pi'$ za neki $\pi'\in\mathrm{Irr}(GL)$. To lako vidimo po formuli (1.3) i nejednakostima $a_1<\ldots<a_n$. Očito,

$$\pi'\simeq\delta([\nu^{a_m}\rho,\nu^{c_m}\rho])\times L(\delta([\nu^{c_m+1}\rho,\nu^{b_m}\rho]),\dots,\delta([\nu^{a_n}\rho,\nu^{b_n}\rho]))$$

i baza indukcije impliciraju da je $L(\delta([\nu^{a_m}\rho,\nu^{b_m}\rho]),\dots,\delta([\nu^{a_n}\rho,\nu^{b_n}\rho]))$ subkvocijent od π' s kratnosti jedan. ■

1.3.1. Strukturna formula za klasične grupe

Slično kao za opću linearnu grupu, za $\pi\in\mathrm{Irr}(G)$ definiramo $\mu^*(\pi)=\sum_{k=0}^{n}r_{(k)}(\pi)\in R(GL)\otimes R(G)$ te po $\mathbb{Z}$-linearnosti proširimo preslikavanje na $R(G)$. Definiramo preslikavanje

$$M^*:R(GL)\to R(GL)\otimes R(GL),\ M^*=(m\otimes 1)\circ(\sim\otimes m^*)\circ s\circ m^*$$

gdje je m parabolička indukcija $\times : R(GL) \otimes R(GL) \to R(GL)$ i $s : \sum x_i \otimes y_i \mapsto \sum y_i \otimes x_i$. M^* je multiplikativno preslikavanje. Sljedeći teorem je glavni rezultat članka [40].

Teorem 1.3.15. **(Algebraizacija Geometrijske Leme)** Za $\pi \in R(GL)$ i $\sigma \in R(G)$ vrijedi

$$\mu^*(\pi \rtimes \sigma) = M^*(\pi) \rtimes \mu^*(\sigma)$$

pri čemu je desna strana prethodne jednakosti određena s $(\pi_1 \otimes \pi_2) \rtimes (\pi' \otimes \sigma') = (\pi_1 \times \pi') \otimes (\pi_2 \rtimes \sigma')$.

Neka je $\pi = L(\delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_m}\rho, \nu^{b_m}\rho]))$ ljestvičasta reprezentacija. Definiramo $\mathrm{Lad}(\pi)'$ kao skup svih parova $\big((c_1, \ldots, c_m), (d_1, \ldots, d_m)\big)$ iz $\mathrm{Lad}(\pi) \times \mathrm{Lad}(\pi)$ takvih da vrijedi $c_i \leq d_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$. Poznavajući $m^*(\pi)$ prema (1.3), za $\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$ imamo formulu

$$\begin{aligned} \mu^*(\pi \rtimes \sigma) = \sum_{\mathrm{Lad}(\pi)'} & L(\delta([\nu^{-c_m}\widetilde{\rho}, \nu^{-a_m}\widetilde{\rho}]), \ldots, \delta([\nu^{-c_1}\widetilde{\rho}, \nu^{-a_1}\widetilde{\rho}])) \\ & \times L(\delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{d_m+1}\rho, \nu^{b_m}\rho])) \\ & \otimes L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{d_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_m+1}\rho, \nu^{d_m}\rho])) \rtimes \mu^*(\sigma). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Definicija 1.3.16. Za kuspidalnu reprezentaciju $\sigma_c \in \mathrm{Irr}(G)$ i $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ takvu da je $\pi \hookrightarrow \delta(\Delta_1) \times \ldots \times \delta(\Delta_k) \rtimes \sigma_c$, multiskup $\Delta_1 \cup \ldots \Delta_k \cup \widetilde{\Delta}_1 \cup \ldots \cup \widetilde{\Delta}_k \cup \{\sigma_c\}$ nazivamo kuspidalni nosač reprezentacije π i označavamo $[\pi]$. Multiskup $[\pi] \setminus \{\sigma_c\}$ označavamo $[\pi]_{GL}$.

Kuspidalni nosač reprezentacije π je dobro definiran prema Teoremima 1.3.15 i 1.3.

1.4. DISKRETNE SERIJE

U ovom potpoglavlju ćemo opisati klasifikaciju diskretnih serija u $\mathrm{Irr}(G)$ prema rezultatima Mœglin i Tadić u [26, 28]. Pretpostavka Basic Assumption pod kojom je klasifikacija dokazana sada vrijedi prema rezultatima [1], [27, Théorème 3.1.1] i [9, Teorem 7.8]. Dodatno ćemo opisati strogo pozitivne diskretne serije, koje su osnovni gradivni blokovi u klasifikaciji diskretnih serija, te njihove Jacquetove module.

Diskretnoj seriji u $R(G)$ su pridružene tri invarijantne: parcijalni kuspidalni nosač, Jordanov blok i ε-funkcija. Klasifikacija tvrdi da ju upravo one jedinstveno određuju.

Definicija 1.4.1. Neka je $\sigma \in \mathrm{Irr}(G_n)$ diskretna serija. Za kuspidalnu reprezentaciju $\sigma_{cusp} \in \mathrm{Irr}(G)$ kažemo da je parcijalni kuspidalni nosač od σ ako postoji $\pi \in \mathrm{Irr}(GL)$ takva da vrijedi $\sigma \hookrightarrow \pi \rtimes \sigma_{cusp}$.

Primijetimo da je ovom definicijom parcijalni kuspidalni nosač od σ jedinstveno određen. Druga invarijanta od σ je skup $\mathrm{Jord}(\sigma)$ parova (a,ρ), gdje je a pozitivan cijeli broj te $\rho \simeq \widetilde{\rho}$ kuspidalna reprezentacija u $\mathrm{Irr}(GL_{m_\rho})$, takvih da vrijede sljedeći uvjeti:

(i) a je paran ako i samo ako $L(s,\rho,r)$ ima pol u $s=0$. Shahidi je definirao lokalnu L-funkciju $L(s,\rho,r)$ u [35, 36], gdje je $r = \bigwedge^2 \mathbb{C}^{m_\rho}$ reprezentacija kvadratne vanjske algebre za $G_n \simeq Sp_{2n}$ i $r = \mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^{m_\rho}$ simetrična kvadratna reprezentacija za $G_n \simeq SO_{2n+1}$.

(ii) Inducirana reprezentacija $\delta([\nu^{-\frac{a-1}{2}}\rho, \nu^{\frac{a-1}{2}}\rho]) \rtimes \sigma$ je ireducibilna.

Napomena 1.4.2. **(Basic Assumption)** Neka je $\rho \in \mathrm{Irr}(GL)$ samokontragradijentna kuspidalna reprezentacija te $\sigma_{cusp} \in \mathrm{Irr}(G)$ kuspidalna reprezentacija. Prema [37], postoji jedinstveni $\alpha_{\rho,\sigma_{cusp}} \geq 0$ takav da se $\nu^{\alpha_{\rho,\sigma_{cusp}}}\rho \rtimes \sigma_{cusp}$ reducira, a po [27, Théorème 3.1.1] i [9, Teorem 7.8] vrijedi $2\alpha_{\rho,\sigma_{cusp}} \in \mathbb{Z}$. Skup $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{cusp})$ je jednak $\{2(\alpha - \lceil \alpha \rceil + 1) + 1, \ldots, 2(\alpha-1)+1\}$, ako je $2\alpha+1$ paran ili $\{1, 2(\alpha - \lceil \alpha \rceil + 1) + 1, \ldots, 2(\alpha-1)+1\}$, ako je $2\alpha+1$ neparan.

Uz opis skupa Trip svih trojki $(\mathrm{Jord}, \sigma', \varepsilon)$ definiramo i ε-funkciju.

- $\sigma' \in \mathrm{Irr}(G)$ je kuspidalna reprezentacija.
- Jord je konačan skup parova (a,ρ) takvih da je $\rho \simeq \widetilde{\rho}$ kuspidalna reprezentacija u $\mathrm{Irr}(GL)$ i a pozitivan cijeli broj koji je paran ako i samo ako $L(s,\rho,r)$ ima pol u $s=0$. Za fiksnu kuspidalnu reprezentaciju $\rho \in \mathrm{Irr}(GL)$ pišemo $\mathrm{Jord}_\rho = \{a : (a,\rho) \in \mathrm{Jord}\}$. Za $a \in \mathrm{Jord}_\rho$ s $a\_$ označavamo najveći element od Jord_ρ koji je strogo manji od a, ako takav postoji.

- ε je funkcija definirana na podskupu od $\text{Jord} \cup (\text{Jord} \times \text{Jord})$ s kodomenom $\{\pm 1\}$. Za $(a, \rho) \in \text{Jord}$, vrijednost $\varepsilon(a, \rho)$ nije definirana ako i samo ako je a neparan i $(a', \rho) \in \text{Jord}(\sigma')$ za neki pozitivan cijeli broj a'. Nadalje, ε je definirana na paru $((a, \rho), (a', \rho'))$ ako i samo ako $\rho \simeq \rho'$ i $a \neq a'$. Time smo definirali domenu funkcije ε. Za međusobno različite elemente $a, a', a'' \in \text{Jord}_\rho$ mora vrijediti sljedeće:

  (i) Ako je $\varepsilon(a, \rho)$ definirano, čime je i $\varepsilon(a', \rho)$ definirano, vrijednost ε funkcije na paru $((a, \rho), (a', \rho))$ je jednaka $\varepsilon(a, \rho)\varepsilon(a', \rho)^{-1}$. Ako $\varepsilon(a, \rho)$ nije definirano, onda $\varepsilon((a, \rho), (a', \rho))$ također formalno označavamo $\varepsilon(a, \rho)\varepsilon(a', \rho)^{-1}$.

  (ii) $\varepsilon(a, \rho)\varepsilon(a'', \rho)^{-1} = (\varepsilon(a, \rho)\varepsilon(a', \rho)^{-1}) \cdot (\varepsilon(a', \rho)\varepsilon(a'', \rho)^{-1})$.

  (iii) $\varepsilon(a, \rho)\varepsilon(a', \rho)^{-1} = \varepsilon(a', \rho)\varepsilon(a, \rho)^{-1}$.

Neka je $(\text{Jord}, \sigma', \varepsilon)$ i $(a, \rho) \in \text{Jord}$, tako da je $a\_$ definiran, te vrijedi $\varepsilon(a, \rho)\varepsilon(a\_, \rho)^{-1} = 1$. Ako označimo $\text{Jord}' = \text{Jord} \setminus \{(a, \rho), (a\_, \rho)\}$ te s ε' restrikciju ε funkcije na $\text{Jord}' \cup (\text{Jord}' \times \text{Jord}')$, onda je lako za provjeriti da je $(\text{Jord}', \sigma', \rho') \in \text{Trip}$.

Definicija 1.4.3. Za prethodno definiranu trojku $(\text{Jord}', \sigma', \rho')$ kažemo da je podređena trojci $(\text{Jord}, \sigma', \varepsilon)$.

Definicija 1.4.4. Kažemo da je $(\text{Jord}, \sigma', \varepsilon) \in \text{Trip}$ dopustiva trojka alternirajućeg tipa ako vrijedi $\varepsilon(a, \rho)\varepsilon(a\_, \rho)^{-1} = -1$ kada je $a\_$ definiran i ako postoji rastuća bijekcija $\phi_\rho : \text{Jord}_\rho \to \text{Jord}'_\rho(\sigma')$, gdje je

$$\text{Jord}'_\rho(\sigma') = \begin{cases} \text{Jord}_\rho(\sigma') \cup \{0\} & \text{, ako je } a \text{ paran i } \varepsilon(\min \text{Jord}_\rho, \rho) = 1, \\ \text{Jord}_\rho(\sigma') & \text{, inače.} \end{cases}$$

Skup svih dopustivih trojki alternirajućeg tipa označavamo Trip_{alt}.

Definicija 1.4.5. Kažemo da $(\text{Jord}, \sigma', \varepsilon) \in \text{Trip}$ dominira trojku $(\text{Jord}'', \sigma', \varepsilon'') \in \text{Trip}$ ako postoji niz trojki $(\text{Jord}_i, \sigma', \varepsilon_i)$ za $i = 1, \ldots, k$ takvih da vrijedi

- $(\text{Jord}, \sigma', \varepsilon) = (\text{Jord}_1, \sigma', \varepsilon_1)$.
- $(\text{Jord}_{i+1}, \sigma', \varepsilon_{i+1})$ je podređena trojci $(\text{Jord}_i, \sigma', \varepsilon_i)$ za $i = 1, \ldots, k-1$.
- $(\text{Jord}'', \sigma', \varepsilon'') = (\text{Jord}_k, \sigma', \varepsilon_k)$.

Definicija 1.4.6. Kažemo da je trojka $(\text{Jord}, \sigma', \varepsilon) \in \text{Trip}$ dopustiva ako dominira trojku alternirajućeg tipa. Skup svih dopustivih trojki označavamo Trip_{adm}.

Vrijede inkluzije $\mathrm{Trip}_{alt} \subset \mathrm{Trip}_{adm} \subset \mathrm{Trip}$. Time smo definirali sve pojmove potrebne za iskaz teorema koji klasificira diskretne serije.

Teorem 1.4.7. Postoji bijekcija između skupa diskretnih serija u $\mathrm{Irr}(G)$ i skupa svih trojki $(\mathrm{Jord}, \sigma', \varepsilon) \in \mathrm{Trip}_{adm}$ u oznaci

$$\sigma = \sigma_{(\mathrm{Jord}, \sigma', \varepsilon)}$$

tako da vrijedi

(i) $\mathrm{Jord}(\sigma) = \mathrm{Jord}$ and $\sigma_{cusp} \simeq \sigma'$.

(ii) Neka je $(\mathrm{Jord}, \sigma', \varepsilon) \in \mathrm{Trip}_{alt}$. Tada možemo eksplicitno opisati σ. Za svaki ρ takav da je $\mathrm{Jord}_\rho \neq \emptyset$, označimo elemente od Jord_ρ u rastućem poretku $a_1^\rho < a_2^\rho < \ldots < a_{k_\rho}^\rho$. Sada je σ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\times_\rho \times_{i=1}^{k_\rho} \delta([\nu^{(\phi_\rho(a_i^\rho)+1)/2}\rho, \nu^{(a_i^\rho - 1)/2}\rho]) \rtimes \sigma'.$$

(iii) Neka je $(\mathrm{Jord}, \sigma', \varepsilon) \in \mathrm{Trip}_{adm}$ i $(2b+1, \rho) \in \mathrm{Jord}$ takav da je $2b\_+1 := (2b+1)\_$ definiran i $\varepsilon(2b+1, \rho)\varepsilon(2b\_+1, \rho)^{-1} = 1$. Označimo $\mathrm{Jord}'' = \mathrm{Jord} \setminus \{(2b+1, \rho), (2b\_+1, \rho)\}$ te s ε'' restrikciju od ε na $\mathrm{Jord}'' \cup (\mathrm{Jord}'' \times \mathrm{Jord}'')$. Tada je $(\mathrm{Jord}'', \sigma', \varepsilon'') \in \mathrm{Trip}_{adm}$ i

$$\sigma \hookrightarrow \delta([\nu^{-b\_}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma'',$$

gdje je $\sigma'' = \sigma_{(\mathrm{Jord}'', \sigma', \varepsilon'')}$. Dodatno, inducirana reprezentacija

$$\delta([\nu^{-b\_}\rho, \nu^{b\_}\rho]) \rtimes \sigma''$$

je direktna suma dviju međusobno neekvivalentnih ireducibilnih temperiranih reprezentacija $\tau_\pm$ te postoji jedinstveni $\tau \in \{\tau_-, \tau_+\}$ tako da

$$\sigma \hookrightarrow \delta([\nu^{b\_+1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau.$$

Definicija 1.4.8. Za reprezentaciju $\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$ kažemo da je strogo pozitivna diskretna serija ako za svako ulaganje $\sigma \hookrightarrow \nu^{x_1}\rho_1 \times \cdots \times \nu^{x_k}\rho_k \rtimes \sigma_{cusp}$, gdje su $\rho_i \in \mathrm{Irr}(\widehat{GL_{n_i}})$ za $i = 1, \ldots, k$ i $\sigma_{cusp} \in \mathrm{Irr}(G)$ kuspidalne reprezentacije, imamo $x_i > 0$ za svaki i.

Rezultati klasifikacije diskretnih serija obuhvaćaju i sljedeći teorem.

Teorem 1.4.9. Strogo pozitivne diskretne serije iz $\mathrm{Irr}(G)$ su točno one koje odgovaraju alternirajućim trojkama prema Teoremu 1.4.7.

Za reprezentaciju $\sigma = \sigma_{(\mathrm{Jord},\sigma_{cusp},\varepsilon)}$ označimo sa R skup svih reprezentacija $\rho \in \mathrm{Irr}(GL)$ takvih da postoji $a \in \mathbb{Z}$ takav da je $(a,\rho) \in \mathrm{Jord}(\sigma)$. Neka je za $\rho \in R$ nenegativan broj α_ρ jedinstveni takav da se $\nu^{\alpha_\rho}\rho \rtimes \sigma_{cusp}$ reducira. Kroz disertaciju često koristimo slučaj kada je skup R jednočlan. Za $R = \{\rho\}$ jednostavnije označavamo $\alpha = \alpha_\rho$ i $r = \lceil \alpha \rceil$.

Definicija 1.4.10. Za reprezentaciju $\sigma = \sigma_{(\mathrm{Jord},\sigma_{cusp},\varepsilon)}$ kažemo da je uređena r-torka realnih brojeva $(i_1,\ldots,i_r)$ sp-dopustiva ako $i_1 < \ldots < i_r$, $i_j - \alpha \in \mathbb{Z}$ i $\alpha - r + j - 1 \le i_j$ za $j = 1,\ldots,r$.

Za sp-dopustivu r-torku $(x_1,\ldots,x_r)$ označavamo $\sigma = \sigma_{(x_1,\ldots,x_r)}$ ako je σ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho,\nu^{x_1}\rho]) \times \ldots \times \delta([\nu^{\alpha}\rho,\nu^{x_r}\rho]) \rtimes \sigma_{cusp}$$

za ranije fiksiranu kuspidalnu reprezentaciju σ_{cusp}, što će biti jasno u poglavljima. Radi jednostavnosti dodatno za nekuspidalnu $\sigma_{(x_1,\ldots,x_r)}$ koristimo oznaku $\sigma_{(x_t,\ldots,x_r)}$, gdje je t najmanji element skupa $\{1,\ldots,r\}$ takav da vrijedi $\alpha - r - t \le x_t$.

Jacquetovi moduli strogo pozitivne diskretne serije su prvotno opisani u [21, Teorem 4.6], a alternativni dokaz se može pronaći u [24, Poglavlje 7].

Teorem 1.4.11. Neka je $\sigma \simeq \sigma_{(x_1,\ldots,x_r)}$. Tada je

$$\mu^*(\sigma) = \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in \mathrm{Acc}(\sigma)} L(\delta([\nu^{i_1+1}\rho,\nu^{x_1}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{i_r+1}\rho,\nu^{x_r}\rho])) \otimes \sigma_{(i_1,\ldots,i_r)}$$

gdje je $(i_1,\ldots,i_r) \in \mathrm{Acc}(\sigma)$ ako i samo ako je $(i_1,\ldots,i_r)$ sp-dopustiva te vrijedi $i_j \le x_j$ za $j = 1,\ldots,r$.

1.5. KLASIFIKACIJA TEMPERIRANIH REPREZENTACIJA

Goldberg je u [10] pokazao sljedeći fundamentalni teorem o temperiranim reprezentacijama iz $R(G)$ kojim se pitanje klasifikacije ireducibilnih temperiranih reprezentacija svodi na klasifikaciju diskretnih serija i reduciranje reprezentacije oblika $\delta \rtimes \sigma$ za kvadratno integrabilne reprezentacije $\delta \in \mathrm{Irr}(GL)$ i $\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$.

Teorem 1.5.1. Neka su $\delta_i \in \mathrm{Irr}(GL)$ za $i = 1, \ldots, k$ i $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ kvadratno integrabilne reprezentacije. Neka je l broj međusobno neizomorfnih δ_i takvih da se inducirana reprezentacija $\delta_i \rtimes \pi$ reducira. Tada je reprezentacija

$$\delta_1 \times \ldots \times \delta_k \rtimes \pi \tag{1.7}$$

duljine 2^l i svaki subkvocijent se javlja s kratnosti jedan. Dodatno, ako je τ ireducibilna podreprezentacija inducirane reprezentacije oblika (1.7), onda su δ_i za $i = 1, \ldots, k$ i π jedinstveno određene do na permutaciju i uzimanje kontragredijenata.

Pretpostavimo da je $l = k$ i označimo $\delta_i \rtimes \pi \simeq \pi_{\delta_i} \oplus \pi_{-\delta_i}$ za svaki $i = 1, \ldots, k$. Neka su $j_1, \ldots, j_k \in \{\pm\}$. Postoji jedinstvena ireducibilna podreprezentacija τ od $\delta_1 \times \ldots \times \delta_k \rtimes \pi$ koja je podreprezentacija od

$$\delta_1 \times \ldots \times \delta_{i-1} \times \delta_{i+1} \times \ldots \times \delta_k \rtimes \pi_{j_i \delta_i}, \text{ za svaki } i = 1, \ldots, k.$$

Takvu reprezentaciju τ označavamo s $\pi_{j_1\delta_1, \ldots, j_k\delta_k}$. Time je jasno da je pitanje klasifikacije temperiranih reprezentacija svedeno na određivanje koja ireducibilna podreprezentacija od $\delta_i \rtimes \pi$ je π_{δ_i}. Parametrizacija od π_δ je opisana u [42, Teorem 1.2] te ju navodimo u slučajevima koji su zastupljeni u četvrtom poglavlju disertacije.

Teorem 1.5.2. Neka je $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ kvadratno integrabilna, $\rho \in \mathrm{Irr}(GL)$ kuspidalna samokontragradijentna reprezentacija te $b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Pretpostavimo da se za $\delta(\rho, b) \simeq \delta([\nu^{-\frac{b-1}{2}}\rho, \nu^{\frac{b-1}{2}}\rho])$ inducirana reprezentacija $\delta(\rho, b) \rtimes \pi$ reducira.

(i) Pretpostavimo

$$\mathrm{Jord}_\rho(\pi) \cap [1, b] \neq \emptyset.$$

Označimo

$$a = \max(\mathrm{Jord}_\rho(\pi) \cap [1,b]).$$

Tada postoji jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta(\rho,b) \rtimes \pi$, u oznaci π_δ, takva da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(1) π_δ se ulaže u $\delta([\nu^{\frac{a-1}{2}+1}\rho, \nu^{\frac{b-1}{2}}\rho])^2 \times \delta([\nu^{-\frac{a-1}{2}}\rho, \nu^{\frac{a-1}{2}}\rho]) \rtimes \pi$.

(2) π_δ se ulaže u $\delta([\nu^{\frac{a-1}{2}+1}\rho, \nu^{\frac{b-1}{2}}\rho])^2 \rtimes \lambda$ za neku $\lambda \in \mathrm{Irr}(G)$.

(ii) Pretpostavimo

$$\mathrm{Jord}_\rho(\pi) \cap [1,b] = \emptyset.$$

Neka je b paran. Tada postoji jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta(\rho,b) \rtimes \pi$, u oznaci π_δ, takva da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(1) π_δ se ulaže u $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{b-1}{2}}\rho])^2 \rtimes \pi$.

(2) π_δ se ulaže u $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{b-1}{2}}\rho])^2 \rtimes \lambda$ za neku $\lambda \in \mathrm{Irr}(G)$.

Neka je b neparan i $\mathrm{Jord}_\rho \neq \emptyset$. Označimo

$$a := \min(\mathrm{Jord}_\rho(\pi)).$$

Tada postoji jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta(\rho,b) \rtimes \pi$, u oznaci π_δ, takva da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(1) π_δ se ulaže u $\delta([\nu\rho, \nu^{\frac{b-1}{2}}\rho])^2 \times \delta([\nu\rho, \nu^{\frac{a-1}{2}}\rho]) \times \rho \rtimes \pi'$ za kvadratno integrabilnu reprezentaciju $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$.

(2) π_δ se ulaže u $\delta([\nu\rho, \nu^{\frac{b-1}{2}}\rho])^2 \times \delta([\nu\rho, \nu^{\frac{a-1}{2}}\rho]) \rtimes \lambda$ za neku $\lambda \in \mathrm{Irr}(G)$.

Nadalje, vrijedi $\pi \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^{\frac{a-1}{2}}\rho]) \rtimes \pi'$ za neku diskretnu seriju $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$.

Napomena 1.5.3. Reprezentaciju π' iz prethodnog teorema možemo opisati u terminima klasifikacije diskretnih serija prema [42, Teorem 8.2 (5)]. Za π, ρ kao iz teorema, neka je $a \in \mathrm{Jord}_\rho(\pi)$ i $a \geq 3$. Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ takav da

$$[a-2k, a-2] \cap \mathrm{Jord}_\rho(\pi) = \emptyset.$$

Tada se π ulaže u

$$\nu^{\frac{a-1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{a-3}{2}}\rho \times \ldots \times \nu^{\frac{a-2(k-1)-1}{2}}\rho \rtimes \pi' \tag{1.8}$$

za kvadratno integrabilnu $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Neka je $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$ proizvoljna kvadratno integrabilna reprezentacija takva da se π ulaže u (1.8). Ako je $\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$ takva da vrijedi

$$\pi \hookrightarrow \nu^{\frac{a-1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{a-3}{2}}\rho \times \ldots \times \nu^{\frac{a-2(k-1)-1}{2}}\rho \rtimes \sigma,$$

tada vrijedi $\sigma \simeq \pi'$. Posebno, σ je jedinstveno određena sa π.

Standardne oznake za temperirani subkvocijent π_δ koje koristimo u disertaciji su $\tau_+ := \pi_\delta$ i $\tau_- := \pi_{-\delta}$.

1.6. KOMPOZICIONI NIZ GENERALIZIRANE OSNOVNE SERIJE

Muić je u [29] odredio reducibilnost i kompozicioni niz reprezentacije oblika

$$\delta([\nu^{-l_1}\rho, \nu^{l_2}\rho]) \rtimes \sigma \tag{1.9}$$

za $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 + l_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$, kuspidalnu reprezentaciju $\rho \in \mathrm{Irr}(GL)$ i strogo pozitivnu diskretnu seriju $\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$. Reprezentaciju $\delta([\nu^{-l_1}\rho, \nu^{l_2}\rho])$ kratko označavamo δ. Za pitanje reducibilnosti reprezentacije $\delta \rtimes \sigma$ bitni su skupovi $\mathrm{Jord}(\sigma)$, Jord_ρ te epsilon funkcija ε koji su pridruženi reprezentaciji $\sigma \in \mathrm{Trip}_{alt}$. Poznavanje kompozicionog niza reprezentacije (1.9) je osnovni korak prema određivanju istog za reprezentaciju oblika $\pi \rtimes \sigma'$, gdje je $\pi \in \mathrm{Irr}(GL)$ ljestvičasta, a $\sigma' \in \mathrm{Irr}(G)$ kuspidalna ili strogo pozitivna reprezentacija. U ovom potpoglavlju ćemo izdvojiti rezultate navedenog članka.

Na početku reduciramo problem do netrivijalnog slučaja kada vrijedi

$$\begin{cases} \mathrm{Jord}_\rho \neq \emptyset, \\ l_1 - a \in \mathbb{Z}, \quad \forall 2a+1 \in \mathrm{Jord}_\rho. \end{cases} \tag{1.10}$$

Teorem 1.6.1. Pretpostavimo da je $\rho \simeq \widetilde{\rho}$ i $2l_1 + 1 \in \mathbb{Z}$.

(i) Ako $\mathrm{Jord}_\rho \neq \emptyset$ i $l_1 - a \notin \mathbb{Z}$, za $2a+1 \in \mathrm{Jord}_\rho$, onda je $\delta \rtimes \sigma$ ireducibilna.

(ii) Pretpostavimo $\mathrm{Jord}_\rho = \emptyset$. Tada je $\delta \rtimes \sigma$ reducibilna ako i samo ako $l_1 \geq -\frac{1}{2}$ i $2l_1 + 1$ je paran ako i samo ako $L(s, \rho, r)$ ima pol u $s = 0$. Ako je reducibilna, onda u $R(G)$ vrijedi

$$\delta \rtimes \sigma = \begin{cases} \sigma_1 + L(\widetilde{\delta}; \sigma), & \text{ako je } l_1 = \frac{1}{2}, \\ \sigma_1 + \sigma_2 + L(\widetilde{\delta}; \sigma), & \text{ako je } l_1 \geq 0, \end{cases}$$

gdje su σ_i za $i = 1, 2$ diskretne serije takve da je $\mathrm{Jord}(\sigma_i)$ jednak

$$\begin{cases} \mathrm{Jord}(\sigma) \cup \{(2l_2+1, \rho)\}, & \text{ako je } l_1 = -\frac{1}{2}, \\ \mathrm{Jord}(\sigma) \cup \{(2l_1+1, \rho), (2l_2+1, \rho)\}, & \text{ako je } l_1 \geq 0, \end{cases}$$

i njihove epsilon funkcije ε_{σ_i} za $i = 1, 2$ su određene na sljedeći način. Ako je $l_1 \geq 0$, postoje dva proširenja od ε tako da vrijedi $\varepsilon_{\sigma_i}(2l_1+1, \rho)\varepsilon_{\sigma_i}(2l_2+1, \rho)^{-1} = 1$ za $i = 1, 2$. Dodatno, σ_1 i σ_2 su neizomorfne. Ako je $l_1 = -\frac{1}{2}$, onda $\varepsilon_{\sigma_1}(2l_2+1, \rho) = 1$.

Dobro poznati rezultat pod pretpostavkama komplementarnim prethodnom teoremu se može naći u [41].

Teorem 1.6.2. Pretpostavimo da $\rho \not\simeq \widetilde{\rho}$ ili $2l_1 + 1 \notin \mathbb{Z}$. Tada je $\delta \rtimes \sigma$ ireducibilna.

U nastavku pretpostavljamo da vrijedi (1.10).

Teorem 1.6.3. Pretpostavimo da je $\mathrm{Jord}_\rho \cap [2l_1+1, 2l_2+1] = \emptyset$ i $l_1 \geq 0$. Tada u $R(G)$ vrijedi

$$\delta \rtimes \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + L(\widetilde{\delta}; \sigma),$$

gdje su σ_1 i σ_2 diskretne serije dobivene proširenjem trojke od σ po klasifikaciji.

Pretpostavimo da je $l_1 \leq -1$. Tada uvodimo uznake $l_1 = -a-1$ i $l = l_2$ te vrijedi

$$\delta \rtimes \sigma \simeq \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{l}\rho]) \rtimes \sigma.$$

Definiramo $2a_0+1$ kao najveći element od Jord_ρ takav da vrijedi $2a_0+1 \leq 2l+1$, ako takav postoji. Ako je $a_0 < l$, onda definiramo strogo pozitivnu diskretnu seriju σ_0 tako da vrijedi

$$\mathrm{Jord}(\sigma_0) = \mathrm{Jord} \setminus \{(2a_0+1, \rho)\} \cup \{(2l+1, \rho)\}.$$

Propozicija 1.6.4. (i) Pretpostavimo $\mathrm{Jord}_\rho \cap [2a+1, 2l+1] \neq \emptyset$, zbog čega je $2a_0+1 \in \mathrm{Jord}_\rho \cap [2a+1, 2l+1]$. Ako je $a_0 = l$, onda je inducirana reprezentacija $\delta \rtimes \sigma$ ireducibilna. Inače u $R(G)$ vrijedi

$$\delta \rtimes \sigma = L(\delta([\nu^{-a_0}\rho, \nu^{-a-1}\rho]); \sigma_0) + L(\widetilde{\delta}; \sigma).$$

Posebno, ako je $a_0 = a$, onda $\delta \rtimes \sigma = \sigma_0 + L(\widetilde{\delta}; \sigma)$.

(ii) Pretpostavimo $\mathrm{Jord}_\rho \cap [2a+1, 2l+1] = \emptyset$. Tada je $\delta \rtimes \sigma$ ireducibilna.

Pretpostavimo da je $l_1 \geq 0$. Prema Teoremu 1.6.3 možemo pretpostaviti

$$\mathrm{Jord}_\rho \cap [2l_1+1, 2l_2+1] \neq \emptyset.$$

Prije iskaza glavnog teorema pod navedenim pretpostavkama definiramo

$$2a_0 + 1 = \max \mathrm{Jord}_\rho \cap [2l_1+1, 2l_2+1]$$

$$2b_0 + 1 = \min \mathrm{Jord}_\rho \cap [2l_1+1, 2l_2+1].$$

Strogo pozitivnu diskretnu seriju σ_0 definiramo kao i u slučaju $l_1 \leq -1$ uz odgovarajuće oznake

$$\mathrm{Jord}(\sigma_0) = \mathrm{Jord} \setminus \{(2a_0+1,\rho)\} \cup \{(2l_2+1,\rho)\}.$$

Prema Propoziciji 1.6.4 vrijedi $\sigma_0 \hookrightarrow \delta([\nu^{a_0+1}\rho, \nu^{l_2}\rho]) \rtimes \sigma$. Definiramo strogo pozitivnu diskretnu seriju σ_1 sa

$$\mathrm{Jord}(\sigma_1) = \mathrm{Jord} \setminus \{(2b_0+1,\rho)\} \cup \{(2l_1+1,\rho)\}.$$

Prema Propoziciji 1.6.4 vrijedi $\sigma \hookrightarrow \delta([\nu^{l_1+1}\rho, \nu^{b_0}\rho]) \rtimes \sigma_1$. Pomoću reprezentacije σ_1 definiramo strogo pozitivnu diskretnu seriju σ_{10} tako da vrijedi

$$\mathrm{Jord}(\sigma_{10}) = \mathrm{Jord}(\sigma_1) \setminus \{(2a_0+1,\rho)\} \cup \{(2l_2+1,\rho)\}.$$

Prema [22, Propozicija 3.2] razmatramo slučaj kada je $a_0 = b_0$ i $\mathrm{Jord}_\rho \cap \{2l_1+1, 2l_2+1\} = \emptyset$ te rezultate kombiniramo s opisanim u [29]. Označimo jedinstveni element u $\mathrm{Jord}_\rho \cap [2l_1+1, 2l_2+1]$ sa $2c+1$. Konačno, definiramo diskretnu seriju σ_{ds} s odgovarajućom dopustivom trojkom $(\mathrm{Jord}', \sigma_{cusp}, \varepsilon')$ tako da je $\mathrm{Jord}' = \mathrm{Jord} \cup \{(2l_1+1,\rho),(2l_2+1,\rho)\}$, $\varepsilon'((2c+1,\rho),(2l_2+1,\rho)) = \varepsilon'((2l_1+1,\rho),(2c+1,\rho)) = 1$ te je ε' jednaka -1 na svim ostalim parovima.

Teorem 1.6.5. Pretpostavimo da je $l_1 \geq 0$ i $\mathrm{Jord}_\rho \cap [2l_1+1, 2l_2+1] \neq \emptyset$.

(i) Ako je $2l_1+1,\ 2l_2+1 \in \mathrm{Jord}_\rho$, onda je $\delta \rtimes \sigma$ ireducibilna.

(ii) Pretpostavimo da $2l_1+1 \in \mathrm{Jord}_\rho$ i $2l_2+1 \notin \mathrm{Jord}_\rho$. Tada ako je $a_0 = l_1$, u $R(G)$ vrijedi

$$\delta \rtimes \sigma = L(\widetilde{\delta};\sigma) + \sigma_{temp},$$

gdje je σ_{temp} jedinstveni zajednički ireducibilni subkvocijent od $\delta \rtimes \sigma$ i $\delta([\nu^{-l_1}\rho, \nu^{l_1}\rho]) \rtimes \sigma_0$. Ako je $a_0 > l_1$, onda u $R(G)$ vrijedi

$$\delta \rtimes \sigma = L(\widetilde{\delta};\sigma) + L(\delta([\nu^{-l_1}\rho, \nu^{a_0}\rho]);\sigma_0).$$

(iii) Pretpostavimo da $2l_1+1 \notin \mathrm{Jord}_\rho$ i $2l_2+1 \in \mathrm{Jord}_\rho$. Tada ako je $b_0 = l_2$, u $R(G)$ vrijedi

$$\delta \rtimes \sigma = L(\widetilde{\delta};\sigma) + \sigma_{temp},$$

gdje je σ_{temp} jedinstveni zajednički ireducibilni subkvocijent od $\delta \rtimes \sigma$ i $\delta([\nu^{-l_2}\rho, \nu^{l_2}\rho]) \rtimes \sigma_1$. Ako je $b_0 < l_2$, onda u $R(G)$ vrijedi

$$\delta \rtimes \sigma = L(\widetilde{\delta};\sigma) + L(\delta([\nu^{-b_0}\rho, \nu^{l_2}\rho]);\sigma_1).$$

(iv) Pretpostavimo da $2l_1+1 \notin \mathrm{Jord}_\rho$ i $2l_2+1 \notin \mathrm{Jord}_\rho$. Razlikujemo dva slučaja. Ako je $b_0 < a_0$, onda je u $R(G)$ reprezentacija $\delta \rtimes \sigma$ jednaka

$$L(\widetilde{\delta};\sigma)+L(\delta([\nu^{-a_0}\rho,\nu^{l_1}\rho]);\sigma_0)+L(\delta([\nu^{-l_2}\rho,\nu^{b_0}\rho]);\sigma_1)+L(\delta([\nu^{-a_0}\rho,\nu^{b_0}\rho]);\sigma_{10}).$$

Ako je $a_0 = b_0$, onda je u $R(G)$ reprezentacija $\delta \rtimes \sigma$ jednaka

$$L(\widetilde{\delta};\sigma)+L(\delta([\nu^{-c}\rho,\nu^{l_1}\rho]);\sigma_0)+L(\delta([\nu^{-l_2}\rho,\nu^{c}\rho]);\sigma_1)+\sigma_{ds}.$$

Pretpostavimo da je $l_1 = -\frac{1}{2}$ i označimo $l_2 = l$. Želimo opisati kompozicioni niz od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho,\nu^{l}\rho]) \rtimes \sigma.$$

U tu svrhu definiramo $2b_0+1 = \min \mathrm{Jord}_\rho$ i sljedećih pet diskretnih serija. Ako je $\varepsilon(2b_0+1,\rho)=1$, definiramo strogo pozitivnu diskretnu seriju σ_1 tako da vrijedi

$$\mathrm{Jord}(\sigma_1) = \mathrm{Jord} \setminus \{(2b_0+1,\rho)\}.$$

Iz definicije alternirajuće trojke slijedi da je σ_1 dobro definirana. Dodatno,

$$\varepsilon_{\sigma_1}(\min \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_1),\rho) = -1 \text{ i } \sigma \hookrightarrow \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho,\nu^{b_0}\rho]) \rtimes \sigma_1.$$

Pretpostavimo da je $\mathrm{Jord}_\rho \cap [2,2l+1] = \emptyset$ ili $\mathrm{Jord}_\rho \cap [2,2l+1] = \{2b_0+1\}$ i $l \neq b_0$. Definiramo diskretnu seriju σ_2 tako da vrijedi

$$\mathrm{Jord}(\sigma_2) = \mathrm{Jord} \cup \{(2l+1,\rho)\},\ \varepsilon_{\sigma_2}((2l+1,\rho),(2b_0+1,\rho)) = 1$$

te je ε_{σ_2} jednaka -1 na svim ostalim uzastopnim parovima. Štoviše, vrijedi

$$\begin{cases} \sigma_2 \hookrightarrow \delta([\nu^{-l}\rho,\nu^{b_0}\rho]) \rtimes \sigma_1, & b_0 > l, \\ \sigma_2 \hookrightarrow \delta([\nu^{-b_0}\rho,\nu^{l}\rho]) \rtimes \sigma_1, & l > b_0. \end{cases}$$

Ako je $\varepsilon(2b_0+1,\rho) = -1$ i $l \neq b_0$, definiramo strogo pozitivnu diskretnu seriju σ_0 tako da vrijedi

$$\mathrm{Jord}(\sigma_0) = \mathrm{Jord} \setminus \{(2l+1,\rho)\}.$$

Dobra definiranost slijedi prema definiciji alternirajuće trojke te $\varepsilon_{\sigma_0}(\min \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_0),\rho) = 1$. Posebno ako je $l < b_0$, onda $\sigma_0 \hookrightarrow \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho,\nu^{l}\rho]) \rtimes \sigma$. Pretpostavimo da je $\mathrm{Jord}_\rho \cap [2,2l+1[\neq \emptyset$

te neka je $2a_0+1$ najveći element iz tog presjeka. Ako $2l+1 \notin \mathrm{Jord}_\rho$, onda definiramo strogo pozitivnu diskretnu seriju σ_3 tako da vrijedi

$$\mathrm{Jord}(\sigma_3) = \mathrm{Jord} \setminus \{(2a_0+1,\rho)\} \cup \{(2l+1,\rho)\}$$

i strogo pozitivnu diskretnu seriju σ_4 tako da vrijedi

$$\mathrm{Jord}(\sigma_4) = \mathrm{Jord}(\sigma_1) \setminus \{(2a_0+1,\rho)\} \cup \{(2l+1,\rho)\}.$$

Teorem 1.6.6. (i) Pretpostavimo da je $\varepsilon(2b_0+1,\rho) = -1$. Tada je u $R(G)$ inducirana reprezentacija $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^l\rho]) \rtimes \sigma$ je jednaka

$$\begin{cases} L(\widetilde{\delta};\sigma)+\sigma_0, & l < b_0, \\ L(\widetilde{\delta};\sigma)+L(\delta([\nu^{-a_0}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho]);\sigma_3), & l > b_0,\ 2l+1 \notin \mathrm{Jord}_\rho, \\ L(\widetilde{\delta};\sigma), & l = b_0 \text{ ili } l > b_0,\ 2l+1 \in \mathrm{Jord}_\rho. \end{cases}$$

(ii) Pretpostavimo da je $\varepsilon(2b_0+1,\rho) = 1$. Ako je $l = b_0$, onda

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^l\rho]) \rtimes \sigma \text{ i } \delta([\nu^{-b_0}\rho, \nu^{b_0}\rho]) \rtimes \sigma_1$$

imaju jedinstveni zajednički ireducibilni subkvocijent, u oznaci σ_{temp}. Dodatno, u $R(G)$ inducirana reprezentacija $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^l\rho]) \rtimes \sigma$ je jednaka

$$\begin{cases} L(\widetilde{\delta};\sigma)+\sigma_2, & l < b_0, \\ L(\widetilde{\delta};\sigma)+\sigma_{temp}, & l = b_0, \\ L(\widetilde{\delta};\sigma)+L(\delta([\nu^{-l}\rho, \nu^{b_0}\rho]);\sigma_1), & l > b_0,\ 2l+1 \in \mathrm{Jord}_\rho, \\ L(\widetilde{\delta};\sigma)+L(\delta([\nu^{-a_0}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho]);\sigma_3) & \\ +L(\delta([\nu^{-l}\rho, \nu^{b_0}\rho]);\sigma_1)+\sigma_2, & l > b_0,\ a_0 = b_0,\ 2l+1 \notin \mathrm{Jord}_\rho, \\ L(\widetilde{\delta};\sigma)+L(\delta([\nu^{-a_0}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho]);\sigma_3) & \\ +L(\delta([\nu^{-l}\rho, \nu^{b_0}\rho]);\sigma_1)+L(\delta([\nu^{-a_0}\rho, \nu^{b_0}\rho]);\sigma_4), & l > b_0,\ a_0 > b_0,\ 2l+1 \notin \mathrm{Jord}_\rho. \end{cases}$$

2. Reprezentacije inducirane iz ljestvičaste i kuspidalne

Motivirani strukturom reprezentacija u unitarnom dualu opće linearne grupe, proučavamo kompozicioni niz reprezentacija induciranih iz ljestvičastih reprezentacija na općem linearnom dijelu i unitarnih reprezentacija na klasičnom dijelu, što bi trebalo rezultirati uvidom u strukturu unitarnog duala ostalih klasičnih p-adskih grupa. Reducibilnost takvih induciranih reprezentacija je poznata za kuspidalnu reprezentaciju na klasičnom dijelu prema [19]. Cilj nam je opisati njihov kompozicioni niz kada kuspidalni nosač ljestvičaste reprezentacije sadrži samo reprezentacije oblika $\nu^x \rho$ za karakter $\nu(g) = |\det(g)|_F$ opće linearne grupe i $x \geq \frac{1}{2}$.

Korištene metode se temelje na strukturnoj formuli za Jacquetove module induciranih reprezentacija opisanoj u Teoremu 1.3.15. Naime, zajedno s Langlandsovom klasifikacijom, pomoću strukturne formule dobivamo kandidate za subkvocijente promatrane inducirane reprezentacije.

Sve ireducibilne temperirane reprezentacije koje se pojavljuju pri analizi su strogo pozitivne. One imaju veliku ulogu u određivanju koji od dobivenih kandidata su zbilja subkvocijenti promatrane inducirane reprezentacije. U tu svrhu koristimo i neke dovoljne uvjete na određene Jacquetove module, ponajviše pomoću egzaktnosti Jacquetovih modula i paraboličke indukcije.

U prvom poglavlju određujemo ireducibilne temperirane subkvocijente reprezentacije inducirane iz ljestvičaste i kuspidalne reprezentacije, gdje je minimalni eksponent u kuspidalnom nosaču ljestvičaste reprezentacije veći ili jednak $\frac{1}{2}$. U posljednjem potpoglavlju dobivamo kriterij reducibilnosti prema rezultatima iz [19] i opis netemperiranih ireducibilnih subkvocijenata opisane reprezentacije.

Prije toga uvedimo reprezentacije formalno i iskažimo teorem koji opisuje duljinu promatrane reprezentacije, a posljedica je glavnih rezultata (Teoremi 2.1.1 i 2.2.2) koji opisuju ireducibilne subkvocijente. Definiramo reprezentaciju π_L koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \times \ldots \times \delta([\nu^{a_t}\rho, \nu^{b_t}\rho])$$

za ireducibilnu kuspidalnu reprezentaciju ρ opće linearne grupe, prirodan broj t i realne brojeve a_i, b_i, $i = 1, \ldots, t$, takve da $\frac{1}{2} \leq a_1 < \ldots < a_t$, $b_1 < \ldots < b_t$ i $a_i \leq b_i$ za $i = 1, \ldots, t$. Također, definiramo ireducibilnu kuspidalnu reprezentaciju σ_c iz $\mathrm{Irr}(G)$.

Teorem 2.0.1. Neka je m broj indekasa $i \in \{1, \ldots, t\}$ takvih da postoji $x \in \{a_i, a_i + 1, \ldots, b_i\}$ za koji se $\nu^x\rho \rtimes \sigma_c$ reducira. Inducirana reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ je duljine $m + 1$.

2.1. Temperirani subkvocijenti od $\pi_L \rtimes \sigma_c$

U ovom potpoglavlju ćemo odrediti ireducibilne temperirane subkvocijente od $\pi_L \rtimes \sigma_c$. Ti rezultati će biti primijenjeni u sljedećem poglavlju s ciljem određivanja netemperiranih subkvocijenata od $\pi_L \rtimes \sigma_c$. Naime, prema Langlandsovoj klasifikaciji, svaki netemperirani subkvocijent od $\pi_L \rtimes \sigma_c$ je oblika $L(\delta_1, \ldots, \delta_k; \tau)$. Ako $L(\delta_1, \ldots, \delta_k; \tau) \leq \pi_L \rtimes \sigma_c$, onda egzaktnost Jacquetovih modula implicira $L(\delta_1, \ldots, \delta_k) \otimes \tau \leq \mu^*(\pi_L \rtimes \sigma_c)$. Sada (1.6) implicira da postoji $\big((c_1, \ldots, c_t), (d_1, \ldots, d_t)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_L)'$ takav da

$$\tau \leq L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{d_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_t+1}\rho, \nu^{d_t}\rho])) \rtimes \sigma_c.$$

Primijetimo da su eksponenti u kuspidalnom nosaču ljestvičaste reprezentacije na općem linearnom dijelu pozitivni zbog $\frac{1}{2} \leq a_1 \leq c_1 + 1$.

Uočimo da je svaki temperirani subkvocijent od $\pi_L \rtimes \sigma_c$ nužno strogo pozitivan. Da bismo to pokazali, pretpostavimo da $\pi_L \rtimes \sigma_c$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent τ koji nije strogo pozitivan. Tada postoji ireducibilna temperirana reprezentacija τ' i $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq 0$, $a + b \geq 0$ takvi da je τ podreprezentacija od $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau'$. Ako su a i b cijeli brojevi, onda $\rho \in [\pi_L \rtimes \sigma_c]$, što nije moguće. Ako su a i b polucijeli brojevi, onda $[\pi_L \rtimes \sigma_c]$ sadrži multiskup $\{\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho\}$, što ponovno nije moguće.

Sljedeći teorem određuje kada $\pi_L \rtimes \sigma_c$ sadrži temperirani subkvocijent.

Teorem 2.1.1. Inducirana reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent ako i samo ako postoji $\alpha > 0$ takav da se $\nu^\alpha\rho \rtimes \sigma_c$ reducira i $a_i = \alpha - t + i$ za $i = 1, 2, \ldots, t$.

U tom je slučaju temperirani ireducibilni subkvocijent jedinstven; radi se o jedinstvenoj ireducibilnoj podreprezentaciji od $\pi_L \rtimes \sigma_c$ koja je izomorfna strogo pozitivnoj reprezentaciji $\sigma_{(b_1, \ldots, b_t)}$.

Dokaz. Pretpostavimo da inducirana reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ ima temperirani ireducibilni subkvocijent. Označimo ga s τ. Ranije smo vidjeli da je τ nužno strogo pozitivna reprezentacija. Tada vrijedi $\rho \simeq \widetilde{\rho}$ te postoji jedinstveni pozitivan realan broj α takav da se $\nu^{\alpha}\rho \rtimes \sigma_c$ reducira. Označimo $r = \lceil \alpha \rceil$. Tada postoji jedinstveni rastući niz realnih brojeva $x_1, \dots, x_r$ takav da $\alpha - r + i - 1 \leq x_i$ i $x_i - \alpha \in \mathbb{Z}$ za $i = 1, 2, \dots, r$ i τ je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{x_1}\rho]) \times \dots \times \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{x_r}\rho]) \rtimes \sigma_c. \tag{2.1}$$

Time je podreprezentacija od $L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{x_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{x_r}\rho])) \rtimes \sigma_c$. Frobeniusov reciprocitet i egzaktnost Jacquetovih modula impliciraju

$$L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{x_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{x_r}\rho])) \otimes \sigma_c \leq \mu^*(\pi_L \rtimes \sigma_c).$$

Po strukturnoj formuli (1.6) postoji $\big((c_1, \dots, c_t), (d_1, \dots, d_t)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_L)'$ takav da

$$\begin{aligned} &L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{x_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{x_r}\rho])) \leq \\ &L(\delta([\nu^{-c_t}\rho, \nu^{-a_t}\rho]), \dots, \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho])) \times \\ &\times L(\delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{d_t+1}\rho, \nu^{b_t}\rho])) \end{aligned} \tag{2.2}$$

i

$$\sigma_c \leq L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{d_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{c_t+1}\rho, \nu^{d_t}\rho])) \rtimes \sigma_c. \tag{2.3}$$

Primijetimo da su eksponenti u kuspidalnom nosaču reprezentacije s lijeve strane od (2.2) pozitivne i $-a_i, -c_i < 0$ za indekse $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ za koje $\delta([\nu^{-c_i}\rho, \nu^{-a_i}\rho]) \not\simeq 1$. Kako reprezentacije u (2.2) imaju isti kuspidalni nosač, zaključujemo da $c_i = a_i - 1$ za $i = 1, 2, \dots, t$. Iz (2.3) dobivamo $c_i = d_i$ za $i = 1, 2, \dots, t$ jer je σ_c kuspidalna reprezentacija. Time (2.2) implicira

$$L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{x_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{x_r}\rho])) \leq L(\delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{a_t}\rho, \nu^{b_t}\rho])).$$

Kako su ove reprezentacije ireducibilne, dobivamo da su izomorfne. Langlandsova klasifikacija sada implicira jednakost skupova esencijalno kvadratno integrabilnih reprezentacija koje ih definiraju. Time vrijedi $a_i = \alpha - t + i$ i $b_i = x_{r-t+i}$ za $i = 1, 2, \dots, t$.

Obratno, ako je $a_i = \alpha - t + i$ za $i = 1, 2, \dots, t$, onda

$$\pi_L \cong L(\delta([\nu^{\alpha-t+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_t}\rho])).$$

Primijetimo da je $\pi_L \rtimes \sigma_c$ podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\alpha-t+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \times \dots \times \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_t}\rho]) \rtimes \sigma_c. \tag{2.4}$$

Jer postoji $\alpha > 0$ takav da se $\nu^\alpha \rho \rtimes \sigma_c$ reducira, zaključujemo da reprezentacija (2.4) sadrži jedinstveni ireducibilni temeperirani subkvocijent, u oznaci τ. Radi se o strogo pozitivnoj reprezentaciji i jedinstvenoj ireducibilnoj podreprezentaciji od (2.4), zbog čega je podreprezentacija od $\pi_L \rtimes \sigma_c$. Svaki subkvocijent od $\pi_L \rtimes \sigma_c$ je subkvocijent reprezentacije (2.4) pa se τ pojavljuje u kompozicionom nizu od $\pi_L \rtimes \sigma_c$ s istom kratnosti kao i u kompozicionom nizu od (2.4), koja je jednaka jedan. ■

2.2. Netemperirani subkvocijenti od $\pi_L \rtimes \sigma_c$

U ovom poglavlju ćemo odrediti netemperirane sukvocijente od $\pi_L \rtimes \sigma_c$ te na taj način odrediti kompozicioni niz reprezentacije $\pi_L \rtimes \sigma_c$. Prvo ćemo okarakterizirati reducibilnost inducirane reprezentacije $\pi_L \rtimes \sigma_c$ zasnovanu na rezultatima od [19].

Propozicija 2.2.1. Inducirana reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ je reducibilna ako i samo ako postoji neki $\nu^x\rho \in [\pi_L]$ takav da je $\nu^x\rho \rtimes \sigma_c$ reducibilna.

Dokaz. Prema Teoremu 1.1 iz [19], ako se $\nu^x\rho \rtimes \sigma_c$ reducira za neki $\nu^x\rho \in [\pi_L]$, tada je $\pi_L \rtimes \sigma_c$ reducibilna.

Obratno, pretpostavimo da je $\nu^x\rho \rtimes \sigma_c$ ireducibilna za sve $\nu^x\rho \in [\pi_L]$. Prema notaciji iz [19, Definition 3.12.], za reprezentaciju $\pi \simeq L(\delta(\Delta_1), \dots, \delta(\Delta_k))$ s $(\pi)_+$ označavamo reprezentaciju $L(\delta(\Delta_{i_1}), \dots, \delta(\Delta_{i_l}))$, gdje je $\{i_1, \dots, i_l\}$ podskup od $\{1, 2, \dots, k\}$ za sve indekse takve da je suma minimalnog i maksimalnog eksponenta u Δ_i pozitivna. Kako je π_L ljestvičasta reprezentacija, Teorem 1.2 iz [19] implicira da je inducirana reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ ireducibilna ako i samo ako je $(\pi_L)_+ \times (\widetilde{\pi_L})_+$ ireducibilna. Iz pretpostavke $a_1 \geq \frac{1}{2}$ slijedi $(\pi_L)_+ \simeq \pi_L$, a zbog [20, Lema 4.2] imamo

$$\widetilde{\pi_L} \simeq L(\delta([\nu^{-b_t}\widetilde{\rho}, \nu^{-a_t}\widetilde{\rho}]), \dots, \delta([\nu^{-b_1}\widetilde{\rho}, \nu^{-a_1}\widetilde{\rho}]))$$

pa vrijedi $(\widetilde{\pi_L})_+ \simeq 1$. Kako je π_L ireducibilna reprezentacija, zaključujemo da je inducirana reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ ireducibilna, čime dovršavamo dokaz. ■

Jer je $\nu^x\rho \rtimes \sigma_c$ ireducibilna za svaki $\nu^x\rho \in [\pi_L]$ za ρ koja nije samokontragradijentna, inducirana reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ je u tom slučaju ireducibilna i izomorfna s

$$L(\delta([\nu^{-b_t}\rho, \nu^{-a_t}\rho]), \dots, \delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho]); \sigma_c).$$

Za samokontragradijentnu ρ postoji jedinstven nenegativan realan broj x takav da se $\nu^x\rho \rtimes \sigma_c$ reducira i označimo ga s α. Propozicija 2.2.1 implicira da je za $\alpha = 0$ inducirana reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ ireducibilna. Zbog toga u nastavku pretpostavljamo da je ρ samokontragradijentna i $\alpha > 0$.

Prisjetimo se da su netemperirani subkvocijenti induciranih reprezentacija iz $R(G)$, prema Langlandsovoj klasifikaciji, parametrizirani s $L(\delta_1, \dots, \delta_l; \tau)$, gdje su $\delta_1, \dots, \delta_l$ ireducibilne esencijalno kvadratno integrabilne reprezentacije općih linearnih grupa takve da vrijedi $e(\delta_1) \leq$

$\ldots \leq e(\delta_l) < 0$ i $\tau \in \mathrm{Irr}(G_{n'})$ je temperirana reprezentacija. Zbog $L(\delta_1, \ldots, \delta_l; \tau) \leq \pi_L \rtimes \sigma_c$ i $L(\delta_1, \ldots, \delta_l) \otimes \tau \leq \mu^*(L(\delta_1, \ldots, \delta_l; \tau))$, egzaktnost Jacquetovih modula i strukturna formula (1.6) impliciraju da postoji $\big((c_1, \ldots, c_t), (d_1, \ldots, d_t)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_L)'$ takav da

$$L(\delta_1, \ldots, \delta_l) \leq L(\delta([\nu^{-c_t}\rho, \nu^{-a_t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho]))\times \\ \times L(\delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{d_t+1}\rho, \nu^{b_t}\rho])) \tag{2.5}$$

i

$$\tau \leq L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{d_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_t+1}\rho, \nu^{d_t}\rho])) \rtimes \sigma_c. \tag{2.6}$$

Zbog $e(\delta_i) < 0$ za $i = 1, 2, \ldots, l$, iz (2.5) zaključujemo $d_i = b_i$ za $i = 1, 2, \ldots, t$. Naime, promatrajući kuspidalni nosač reprezentacije na desnoj strani od (2.5) vidimo da ne postoji segment koji sadrži i pozitivne i negativne eksponente. Prisjetimo se da pretpostavke na eksponente impliciraju $-a_1 \leq -\frac{1}{2}$ i $d_1 + 1 \geq c_1 + 1 \geq a_1 \geq \frac{1}{2}$. Ako je $d_1 + 1 \geq \frac{3}{2}$, onda je razlika između maksimalnog negativnog i minimalnog pozitivnog eksponenta veća ili jednaka dva. Ako je $d_1 + 1 = \frac{1}{2}$, onda $c_1 + 1 = a_1 = \frac{1}{2}$, pa vrijedi $\delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho]) \simeq 1$. Sada je maksimalni negativni eksponent manji ili jednak $-a_2$, koji je manji ili jednak $-\frac{3}{2}$ pa imamo isti zaključak kao u prvom slučaju. Time je reprezentacija na desnoj strani relacije (2.5) ireducibilna pa ovi zaključci reduciraju (2.5) i (2.6) redom na

$$L(\delta_1, \ldots, \delta_l) = L(\delta([\nu^{-c_t}\rho, \nu^{-a_t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho]))$$

i

$$\tau \leq L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_t+1}\rho, \nu^{b_t}\rho])) \rtimes \sigma_c. \tag{2.7}$$

Ako postoji $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ takav da $\alpha \in [a_i, b_i]$, označimo s i_M maksimalan, a s i_m minimalan takav indeks. Primijetimo da ako i_M postoji, onda $\alpha \in [a_i, b_i]$ za svaki $i \in [i_m, i_M]$, jer vrijedi $\alpha \in [a_{i_M}, b_{i_m}] \subseteq [a_i, b_i]$. Nadalje, označimo s k proizvoljan element od $[i_m, i_M]$. Definiramo k_m kao minimalan indeks iz $\{1, 2, \ldots, t\}$ takav da $\alpha - k + k_m \leq b_{k_m}$. Primijetimo da vrijedi $\alpha - k + i \in [a_i, b_i], \forall i \in [k_m, k]$. To slijedi iz induktivne primijene sljedećih nejednakosti koje su posljedice od $a_1 < \ldots < a_t$ i $b_1 < \ldots < b_t$:

$$b_{k_m+1} \geq b_{k_m} + 1 \geq \alpha - k + (k_m + 1) \text{ i } a_{k-1} \leq a_k - 1 \leq \alpha - 1.$$

Posljedično su $\alpha - k + i$ pozitivni realni brojevi za $i \in [k_m, k]$. Definiramo σ_k kao jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju od

$$\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]) \times \ldots \times \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho]) \rtimes \sigma_c$$

i π_k, ukoliko je $k \neq t$ ili $a_i \neq \alpha - t + i$ za neki $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, kao

$$L(\delta([\nu^{-b_t}\rho, \nu^{-a_t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_{k+1}}\rho, \nu^{-a_{k+1}}\rho]), \delta([\nu^{-\alpha+1}\rho, \nu^{-a_k}\rho]), \ldots,$$
$$\delta([\nu^{-\alpha+k-k_m+1}\rho, \nu^{-a_{k_m}}\rho]), \delta([\nu^{-b_{k_m-1}}\rho, \nu^{-a_{k_m-1}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho]); \sigma_k).$$

Primijetimo da je π_k dobro definirana jer vrijedi $-b_{k+1} < -b_k < -\alpha + 1$, $b_{k_m-1} < \alpha - k + k_m - 1$ zbog definicije indeksa k_m i $-(a_1 + b_1) < 0$.

Teorem 2.2.2. Pretpostavimo da postoji neki $\nu^x\rho \in [\pi_L]$ takav da je $\nu^x\rho \rtimes \sigma_c$ reducibilna. Tada se inducirana reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ reducira. Nadalje, neka je α jedinstven pozitivan realan broj takav da je $\nu^\alpha\rho \rtimes \sigma_c$ reducibilna. Tada je semisimplifikacija od $\pi_L \rtimes \sigma_c$ jednaka

(i) $\sigma_t + L(\delta([\nu^{-b_t}\rho, \nu^{-a_t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho]); \sigma_c) + \sum_{k \in [i_m, t-1]} \pi_k$,
ako $a_i = \alpha - t + i$ za $i = 1, 2, \ldots, t$,

(ii) $L(\delta([\nu^{-b_t}\rho, \nu^{-a_t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho]); \sigma_c) + \sum_{k \in [i_m, i_M]} \pi_k$, inače.

Dokaz. Kao što smo vidjeli u Propoziciji 2.2.1, ako se $\nu^x\rho \rtimes \sigma_c$ reducira za neki $\nu^x\rho \in [\pi_L]$, onda se i inducirana reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ reducira. Postojanje temperiranog subkvocijenta σ_t je opisano u Teoremu 2.1.1 pa se u nastavku bavimo netemperiranim slučajem. Zbog $\nu^\alpha\rho \in [\pi_L]$ postoji $i \in \{1, \ldots, t\}$ takav da $\alpha \in [a_i, b_i]$ pa je $[i_m, i_M] \neq \emptyset$, dok skup $[i_m, t-1]$ može biti prazan.

Prvo pretpostavimo da je $\pi = L(\delta_1, \ldots, \delta_l; \tau)$ netemperirani subkvocijent od $\pi_L \rtimes \sigma_c$. Iz (2.7) možemo vidjeti da je τ, ako nije kuspidalna, izomorfna sa σ_k za neki $k \in [i_m, i_M]$. Naime, po Teoremu 2.1.1 imamo sljedeće uvjete na realne brojeve c_i definirane u diskusiji prije Teorema 2.2.2 jer vrijedi $c_1 + 1 \geq a_1 \geq \frac{1}{2}$:

1. Za fiksni $k \in [i_m, i_M]$ takav da $c_k + 1 = \alpha$, dobivamo $c_i = b_i$ za $i = k+1, \ldots, t$. Slično jer je $\alpha - k + i > b_i$ za $i = 1, 2, \ldots, k_m - 1$, dobivamo $c_i = b_i$ za $i = 1, 2, \ldots, k_m - 1$.

2. Postoji $k_0 \in [k_m, k]$ takav da $c_i = b_i$ za $i = k_m, \ldots, k_0 - 1$ i $c_i + 1 = \alpha - k + i$ za $i = k_0, \ldots, k$. Tvrdimo da je $k_0 = k_m$. Prisjetimo se da vrijedi $\alpha - k + i \in [a_i, b_i], \forall i \in [k_m, k]$. Prema tome, iz $k_0 > k_m$ dobivamo $c_{k_0-1} = b_{k_0-1}$ i $c_{k_0} + 1 = \alpha - k + k_0$ impliciraju

$$\alpha - k + k_0 - 2 = c_{k_0} - 1 \geq c_{k_0-1} = b_{k_0-1} \geq \alpha - k + k_0 - 1,$$

što nije moguće.

Na ovaj način je π izomorfna s $L(\delta([\nu^{-b_t}\rho, \nu^{-a_t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{-a_1}\rho]); \sigma_c)$ ili s π_k za neki $k \in [i_m, i_M]$.

Obratno, pokažimo da je π_k subkvocijent od $\pi_L \rtimes \sigma_c$ za svaki $k \in [i_m, i_M]$. Fiksirajmo neki $k \in [i_m, i_M]$. Definiramo $\delta_i = \delta([\nu^{-b_i}\rho, \nu^{-a_i}\rho])$ za $i = 1, \ldots, k_m - 1, k+1, \ldots, t$, $\delta_i = \delta([\nu^{-\alpha+k-i+1}\rho, \nu^{-a_i}\rho])$ za $i = k_m, \ldots, k$,

$$\pi_k^{(1)} \simeq \delta_t \times \ldots \times \delta_{k+1} \times \delta_k \times \ldots \times \delta_{k_m} \times \delta_{k_m-1} \times \ldots \times \delta_1,$$

$$\Pi \simeq \pi_k^{(1)} \times L(\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

i $\pi_k^{(2)} \simeq L(\delta_t, \ldots, \delta_1)$, to jest Langlandsova podreprezentacija od $\pi_k^{(1)}$.

Cilj nam je pokazati da su π_k i $\pi_L \rtimes \sigma_c$ subkvocijenti od Π, da oba sadrže $\pi_k^{(2)} \otimes \sigma_k$ u Jacquetovom modulu obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu te da se $\pi_k^{(2)} \otimes \sigma_k$ javlja u Jacquetovom modulu od Π obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu s kratnosti jedan. Kako je π_k ireducibilna, iz toga će slijediti $\pi_k \leq \pi_L \rtimes \sigma_c$.

Primijetimo da je $\sigma_k \hookrightarrow L(\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho])) \rtimes \sigma_c$ jer je σ_k jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]) \times \ldots \times \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Koristeći $\pi_k^{(2)} \hookrightarrow \pi_k^{(1)}$ dobivamo $\pi_k \leq \Pi$. Prema Lemi 1.3.14 ljestvičasta reprezentacija

$$L(\delta([\nu^{a_{k_m}}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_k}\rho, \nu^{b_k}\rho]))$$

je subkvocijent od $\widetilde{\delta}_{k_m} \times \ldots \times \widetilde{\delta}_k \times L(\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho]))$. Kako u $R(G)$ vrijedi $\pi_1 \times \pi_2 \rtimes \sigma = \pi_2 \times \pi_1 \rtimes \sigma$ i $\pi \rtimes \sigma = \widetilde{\pi} \rtimes \sigma$ za $\pi, \pi_1, \pi_2 \in R(GL)$ i $\sigma \in R(G)$, imamo $\pi_L \rtimes \sigma_c \leq \Pi$.

Frobeniusov reciprocitet implicira da je $\pi_k^{(2)} \otimes \sigma_k$ ireducibilni konstituent od $\mu^*(\pi_k)$ i $\mu^*(\Pi)$. Također primijetimo da gornja diskusija implicira da možemo izabrati realne brojeve c_i za $i = 1, \ldots, t$ tako da je $\pi_k^{(2)} \otimes \sigma_k$ u $\mu^*(\pi_L \rtimes \sigma_c)$. Tranzitivnost Jacquetovih modula implicira da je $\delta_t \otimes \ldots \otimes \delta_1 \otimes \sigma_k$ subkvocijent od $r_\beta(\pi_k)$, $r_\beta(\pi_L \rtimes \sigma_c)$ i $r_\beta(\Pi)$ za odgovarajuću paraboličku podgrupu P_β.

Da bismo dovršili dokaz preostaje vidjeti da se $\delta_t \otimes \ldots \otimes \delta_1 \otimes \sigma_k$ pojavljuje u $r_\beta(\Pi)$ s kratnosti jedan. Prvo želimo odrediti sve ireducibilne konstituente od $\mu^*(\Pi)$ oblika $\delta_t \otimes \pi$ za neki $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$. Prema definiciji od π_L, $-b_t$ je najmanji eksponent u kuspidalnom nosaču od Π. Također, $\nu^{-b_t}\rho$ se nalazi u $[\Pi]$ s kratnosti jedan. Ako s $\pi_1 \otimes \pi_2$ označimo ireducibilni konstituent od $\mu^*(\Pi)$ takav da je $\nu^{-b_t}\rho \in [\pi_1]$, tada iz multiplikativnosti od M^* slijedi da je $\pi_1 \otimes \pi_2 = \delta_t \otimes 1 \leq M^*(\delta_t)$. Prema tome

$$\delta_t \otimes \delta_{t-1} \times \ldots \times \delta_1 \times L(\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

sadrži sve ireducibilne konstituente od $\mu^*(\Pi)$ oblika $\delta_t \otimes \pi$ za neki $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$. Induktivno, $\delta_t \otimes \ldots \otimes \delta_1 \otimes \sigma_k$ se pojavljuje u $r_\beta(\Pi)$ s istim multiplicitetom kao $\delta_k \otimes \ldots \otimes \delta_1 \otimes \sigma_k$ u Jacquetovom modulu od

$$\Pi' = \delta_k \times \ldots \times \delta_1 \times L(\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu.

Odredimo sada sve ireducibilne konstituente od $\mu^*(\Pi')$ oblika $\delta_k \otimes \pi'$. Primijetimo da $\nu^{-\alpha+1}\rho$ nije element kuspidalnog nosača od $\delta_{k-1} \times \ldots \times \delta_1$ jer su minimalni eksponenti u $[\delta_i]$ za $i = 1, \ldots, k$ u strogo rastućem poretku. Prema formuli (1.6) $\nu^{-\alpha+1}\rho$ tražimo u

$$L(\delta([\nu^{-x_k}\rho, \nu^{-\alpha}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-x_{k_m}}\rho, \nu^{-\alpha+k-k_m}\rho])) \tag{2.8}$$

gdje je $x_{k_m} < \ldots < x_k$ i $\alpha - k + i - 1 \le x_i \le b_i$ za $i = k_m, \ldots, k$. Time je $-x_{i_0} = -\alpha + 1$ za neki $i_0 \in \{k_m, \ldots, k-1\}$ i $x_i = \alpha - k + i - 1$ za $i = i_0 + 1, \ldots, k$. To implicira $-\alpha + 1 = -x_{i_0} > -x_k = -\alpha + 1$ pokazujući da $\nu^{-\alpha+1}\rho$ nije konstituent od (2.8). Ako s $\pi_1' \otimes \pi_2'$ označimo ireducibilni konstituent od $\mu^*(\Pi')$ takav da je $\nu^{-\alpha+1}\rho \in [\pi_1']$, tada iz mulitplikativnosti od M^* slijedi da je $\pi_1' \otimes \pi_2' = \delta_k \otimes 1 \le M^*(\delta_k)$. Induktivno, $\delta_t \otimes \ldots \otimes \delta_1 \otimes \sigma_k$ se pojavljuje u $r_\beta(\Pi)$ s istim multiplicitetom kao $\delta_{k_m-1} \otimes \ldots \otimes \delta_1 \otimes \sigma_k$ u Jacquetovom modulu od

$$\Pi'' = \delta_{k_m-1} \times \ldots \times \delta_1 \times L(\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Primijetimo da je najveći pozitivni eksponent u kuspidalnom nosaču od $\widetilde{\delta}_{k_m-1} \times \ldots \times \widetilde{\delta}_1$ jednak b_{k_m-1}, što je po definiciji od k_m strogo veće od $\alpha - k + k_m - 1$. Time su kuspidalni nosači reprezentacija $\widetilde{\delta}_{k_m-1} \times \ldots \times \widetilde{\delta}_1$ i

$$L(\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho]))$$

disjunktni multiskupovi. Ireducibilni konstituenti od $\mu^*(\Pi'')$ oblika $\pi'' \otimes \sigma_k$ s negativnim eksponentima u $[\pi'']$ su posljedično sadržani u

$$\delta_{k_m-1} \times \ldots \times \delta_1 \otimes L(\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho])) \rtimes \sigma_c.$$

Jer je σ_k jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$L(\delta([\nu^{\alpha-k+k_m}\rho, \nu^{b_{k_m}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_k}\rho])) \rtimes \sigma_c,$$

konačno zaključujemo da se $\delta_t \otimes \ldots \otimes \delta_1 \otimes \sigma_k$ javlja u $r_\beta(\Pi)$ s kratnosti jedan. Time se javlja u $r_\beta(\pi_k)$ i $r_\beta(\pi_L \rtimes \sigma_c)$ s kratnosti jedan pa dolazimo do zaključka da se π_k javlja u $\pi_L \rtimes \sigma_c$ s kratnosti jedan. ■

3. Reprezentacije inducirane iz esencijalno Speh i kuspidalne

Glavna zadaća teorije reprezentacija reduktivnih p-adskih grupa je klasifikacija unitarnih reprezentacija u $\mathrm{Irr}(G)$. Elementarnom činjenicom da su krajevi komplementarnih serija unitarizabilne reprezentacije, u ovom poglavlju određujemo unitarizabilne ireducibilne subkvocijente reprezentacija induciranih iz esencijalno Speh i kuspidalne reprezentacije. Preciznije, ako s π_S označimo Speh reprezentaciju te sa σ_c kuspidalnu reprezentaciju iz $\mathrm{Irr}(G)$ tako da je inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_c$ ireducibilna, onda su prema [39] reprezentacije $\nu^x\pi_S \rtimes \sigma_c$ unitarizabilne za $0 \leq x < x_0$, gdje je x_0 najmanji nenegativan realan broj za koji je inducirana reprezentacija $\nu^{x_0}\pi_S \rtimes \sigma_c$ reducibilna. Štoviše, svi ireducibilni subkvocijenti reprezentacije $\nu^{x_0}\pi_S \rtimes \sigma_c$ su unitarizabilni. U Poglavlju 2 smo odredili ireducibilne subkvocijente od $\nu^x\pi_S \rtimes \sigma_c$ kada su eksponenti u $[\nu^x\pi_S]$ pozitivni. Dakle, određivanjem kompozicionog niza u slučaju kada su eksponenti manji ili jednaki nula možemo primijeniti opisanu metodu. To ćemo učiniti za esencijalno Speh reprezentaciju izomorfnu s

$$L(\delta([\nu^a\rho,\nu^b\rho]),\delta([\nu^{a+1}\rho,\nu^{b+1}\rho]))$$

za kuspidalnu reprezentaciju $\rho \in \mathrm{Irr}(GL)$ te $a \leq 0$ i $b-a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Označimo ju s π_S te za kuspidalnu reprezentaciju $\sigma_c \in \mathrm{Irr}(G)$ odredimo kompozicioni niz inducirane reprezentacije

$\pi_S \rtimes \sigma_c$.

3.1. UVOD

Na kuspidalnu reprezentaciju $\rho \in \mathrm{Irr}(GL)$ i realne brojeve a i b iz definicije od π_S možemo uvesti određene pretpostavke. Uočimo da rezultat [20, Lemma 4.2] implicira da u $R(G)$ vrijedi

$$L(\delta([\nu^x\rho,\nu^y\rho]),\delta([\nu^{x+1}\rho,\nu^{y+1}\rho]))\rtimes\sigma_c = L(\delta([\nu^{-y-1}\widetilde{\rho},\nu^{-x-1}\widetilde{\rho}]),\delta([\nu^{-y}\widetilde{\rho},\nu^{-x}\widetilde{\rho}]))\rtimes\sigma_c. \tag{3.1}$$

Slučaj $|a| \leq b$ prema (3.1) rješava i slučaj $|-b-1| \leq -a-1$. Jer je slučaj $b+1<0$ riješen u poglavlju 2, pretpostavljamo $b+1 \geq 0$. Time je $b+1 \leq -a-1 \Leftrightarrow a \leq -b-2$. Dakle, ekvivalentno je odrediti kompozicioni niz od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ u slučajevima $|a| \leq b$ i $b < -a < b+2$.

Lema 3.1.1. Pretpostavimo da $\rho \not\simeq \widetilde{\rho}$ ili $a,b \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Tada je reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_c$ ireducibilna.

Dokaz. Prema klasifikaciji ireducibilnih temperiranih reprezentacija, opisanoj u potpoglavljima 1.4 i 1.5, zaključujemo da ako vrijedi $a,b \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, onda $\pi_S \rtimes \sigma_c$ ne sadrži temperirani subkvocijent te su netemperirani subkvocijenti oblika $L(\delta_1,\ldots,\delta_k;\sigma_c)$. Ako ρ nije samokontragredijentna, onda su temperirani subkvocijenti ili temperirani parametri u Langlandsovoj podreprezentaciji ireducibilne reprezentacije oblika $\delta_1\times\ldots\times\delta_k\rtimes\sigma_c$ za $\delta_i \simeq \delta([\nu^{-x_i}\rho,\nu^{x_i}\rho])$ ili $\delta([\nu^{-x_i}\widetilde{\rho},\nu^{x_i}\widetilde{\rho}])$ za nenegativan $x_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

U svakom slučaju, ireducibilan subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ implicira da $r_\beta(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ sadrži konstituent oblika $\delta_1\otimes\ldots\otimes\delta_k\otimes\sigma_c$ takav da je $e(\delta_1)\leq\ldots\leq e(\delta_k)\leq 0$ za odgovarajuću paraboličku podgrupu P_β. Dakle, $\delta_1\otimes\ldots\otimes\delta_k$ je konstituent Jacqueteovog modula od

$$L(\delta([\nu^{-c_2}\widetilde{\rho},\nu^{-a-1}\widetilde{\rho}]),\delta([\nu^{-c_1}\widetilde{\rho},\nu^{-a}\widetilde{\rho}]))\times L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{b}\rho]),\delta([\nu^{c_2+1}\rho,\nu^{b+1}\rho]))$$

obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu za $((c_1,c_2),(c_1,c_2)) \in \mathrm{Lad}'(\pi_S)$. Kako smo vidjeli u diskusiji prije leme, ekvivalentno je promatrati slučaj $-b \leq -a < b+2$. Ako $c_2 \neq b+1$, onda postoji $i \in \{1,\ldots,k\}$ takav da je $\delta_i \simeq \delta([\nu^x\rho,\nu^{b+1}\rho])$ za neki $x \leq -b-1$. Prema pretpostavkama leme i Lemi 1.3.13 zaključujemo da je $\delta_i \simeq \pi_1$ za neki $\pi_1\otimes\pi_2 \leq m^*(\delta([\nu^{c_2+1}\rho,\nu^{b+1}\rho]))$. No zbog uvjeta $-b-1 < a+1 \leq c_2+1 \leq x$ vidimo da je pretpostavka kriva te da vrijedi $c_2 = b+1$. Dakle, $\delta_1 \simeq \pi_1$ za konstituent $\pi_1\otimes\pi_2$ od $m^*(L(\delta([\nu^{-b-1}\widetilde{\rho},\nu^{-a-1}\widetilde{\rho}]),\delta([\nu^{-c_1}\widetilde{\rho},\nu^{-a}\widetilde{\rho}]))\times \delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{b}\rho]))$. Prema Lemi 1.3.13 i zbog neopadajućeg poretka od $e(\delta_i)$ za $i=1,\ldots,k$

je δ_1 izomorfna s $\delta([\nu^{-b-1}\widetilde{\rho},\nu^{-a-1}\widetilde{\rho}])$ ili $\delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{b}\rho])$. Ponavljajući argumente dobivamo da je δ_2 izomorfna s $\delta([\nu^{a}\rho,\nu^{b}\rho])$ ili $\delta([\nu^{-b}\widetilde{\rho},\nu^{-a}\widetilde{\rho}])$, ovisno o predznaku od $a+b$. Uočimo da smo ovdje odbacili opciju za koju postoje δ_i, δ_j izomorfni s $\delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{b}\rho])$ i $\delta([\nu^{-c_1}\widetilde{\rho},\nu^{-a}\widetilde{\rho}])$. Iz nejednakosti $-c_1-a\leq 0$ i $c_1+1+b\leq 0$ slijedi $b\leq -1$. Primijenom nejednakosti $b\leq -1$ na $-b\leq -a<b+2$ dobivamo $1\leq -a<1$, što nije moguće. ∎

U nastavku pretpostavljamo $\rho\simeq\widetilde{\rho}$ i $a,b\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Iz Leme 3.1.1 i ranije diskusije zaključujemo da je dovoljno odrediti kompozicioni niz reprezentacije $\pi_S\rtimes\sigma_c$ uz uvjete $|a|\leq b$ ili $b=-a-1$. Prema Napomeni 1.4.2 postoji jedinstveni nenegativni realan broj α takav da je inducirana reprezentacija $\nu^{\alpha}\rho\rtimes\sigma_c$ reducibilna.

Rezultat [14, Lemma 5.5] često koristimo u argumentaciji te ćemo ga zbog potpunosti iskazati.

Lema 3.1.2. Neka je π ireducibilna reprezentacija od G_n te su M i L Levijevi faktori paraboličkih podgrupa od G_n takvi da je $M\subset L$. Neka je λ ireducibilna reprezentacija od M tako da vrijedi $\pi\hookrightarrow\mathrm{Ind}_M^{G_n}(\lambda)$. Tada postoji ireducibilna reprezentacija ρ od L tako da vrijedi

(1) $\pi\hookrightarrow\mathrm{Ind}_L^{G_n}(\rho)$,

(2) ρ je subkvocijent od $\mathrm{Ind}_M^{L}(\lambda)$.

Na kraju istaknimo svojstvo Jacquetovog modula od $\pi_S\rtimes\sigma_c$ kojeg često koristimo u argumentaciji. Kao primjer navodimo slučaj kada je $-a\leq b$. Pretpostavimo da je π_1 subkvocijent od $\pi_S\rtimes\sigma_c$ takav da je $\nu^{b+1}\rho\otimes\pi_1'\leq\mu^*(\pi_1)$ za neki $\pi_1'\in\mathrm{Irr}(G)$. Tada je po egzaktnosti Jacqueteovih modula $\nu^{b+1}\rho\otimes\pi_1'$ konstituent od $\mu^*(\pi_S\rtimes\sigma_c)$. Formula (1.3) implicira da to nije moguće pa π_1 nije subkvocijent od $\pi_S\rtimes\sigma_c$. Argumentaciju ovog tipa označavamo s $(*)$.

3.2. REPREZENTACIJA $\pi \rtimes \sigma_c$

Označimo

$$\pi = L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]))$$

za $0 \leq x \leq b$ i $-a \leq b$. Cilj ovog potpoglavlja je odrediti ireducibilne temperirane subkvocijente inducirane reprezentacije $\pi \rtimes \sigma_c$. Pokazat će se da su rezultati ovog poglavlja ključni za određivanje kompozicionog niza od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Kako je $a \leq 0$ i $b \geq 0$, zaključujemo da $[\pi \rtimes \sigma_c]$ ili sadrži ρ ili sadrži $\nu^{\frac{1}{2}}\rho$ s kratnosti dva, što u oba slučaja implicira da $\pi \rtimes \sigma_c$ ne sadrži strogo pozitivnu diskretnu seriju. Dakle, ako je τ ireducibilni temperirani subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_c$, onda

$$\tau \hookrightarrow \delta([\nu^{-z}\rho, \nu^y\rho]) \rtimes \tau',$$

gdje je τ' ireducibilna temperirana reprezentacija i vrijedi $0 \leq z \leq y$.

3.2.1. Temperirani subkvocijenti od $\pi \rtimes \sigma_c$ koji nisu diskretne serije

Tražimo konstituent od $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ oblika $\delta([\nu^{-y}\rho, \nu^y\rho]) \otimes \pi_1$ za $y \geq 0$ i neki $\pi_1 \in R(G)$. U $R(G)$, $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ je jednak

$$\sum_{\mathrm{Lad}(\pi)'} L(\delta([\nu^{-c_2}\rho, \nu^{-x-1}\rho]), \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a}\rho])) \times L(\delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{d_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \otimes \tag{3.2}$$

$$L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{d_1}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{d_2}\rho])) \rtimes \sigma_c. \tag{3.3}$$

Kako je $\delta([\nu^{-y}\rho, \nu^y\rho])$ subkvocijent reprezentacije (3.2), imamo $y \in \{-a, b, b+1\}$.

Ako je $y = b+1$, onda vrijedi $d_1 + 1 \leq b$ i $d_2 + 1 \leq b+1$ kako bi $\nu^{b+1}\rho$ bio element kuspidalnog nosača reprezentacije (3.2). Po Lemi 1.3.13 znamo da tada reprezentacija (3.2) nema esencijalno kvadratno integrabilni subkvocijent pa zaključujemo da ovaj slučaj nije moguć.

Ako je $y = b$, onda $d_2 = b+1$. Jer je $-a \leq b$, po Lemi 1.3.13 imamo $c_1 = b$ i $c_2 = x$ ili $c_2 = b$ i $c_1 = a-1$. U prvom slučaju vrijedi $b = c_1 < c_2 = x$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $x \leq b$. U drugom slučaju je $d_1 = -x-1$ pa imamo kandidate

$$\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \nu^{b+1}\rho \times \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_c \leq \mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$$

za $x \leq -a$ zbog $a-1 = c_1 \leq d_1 = -x-1$. Ako je $x = -a$, onda je nužno $b+1 = \alpha$. Ako je $0 \leq x \leq -a-1$, onda prema [23, Lema 3.6] imamo kandidate $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \sigma_{(b+1)}$ za

$x = \alpha - 1$ i $-a = b$ te $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes \sigma_{(b,b+1)}$ za $-a = b = \alpha - 1$ i $x = \alpha - 2$. Uočimo da smo time pokazali da se dobiveni konstituenti nalaze u $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ s kratnosti jedan.

Ako je $y = -a$, onda $d_1 = b$ i $d_2 = b+1$. Po Lemi 1.3.13 zaključujemo $c_2 = x$ i $c_1 = -a$ pa dobivamo

$$\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{-a}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c \leq \mu^*(\pi \rtimes \sigma_c).$$

Primijetimo da zbog $c_1 < c_2$, ovi elementi daju kandidate za subkvocijente od $\pi \rtimes \sigma_c$ ako je $-a < x$. Kako je na dijelu opće linearne grupe ljestvičasta reprezentacija, ireducibilne temperirane subkvocijente inducirane reprezentacije

$$L(\delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c \tag{3.4}$$

ćemo odrediti pomoću Teorema 2.1.1. Zaključujemo da se radi o strogo pozitivnoj diskretnoj seriji. Kako je po pretpostavci $x \leq b$, zaključujemo da je $-a+1 = \alpha - 1$ i $x+1 = \alpha$. Time smo dokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.2.1. Ako inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_c$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent koji nije diskretna serija, onda vrijedi jedno od navedenog:

(i) $x = -a$ i $b = \alpha - 1$,

(ii) $x = \alpha - 1 \leq -a - 1$ i $-a = b$,

(iii) $x = -a + 1 = \alpha - 1$,

(iv) $x = \alpha - 2$ i $-a = b = \alpha - 1$.

Definirajmo temperirane reprezentacije potrebne za analizu temperiranih kandidata u slučaju $y = b$. Neka je $1 \leq \alpha \leq b$. Po rezultatima 13. poglavlja u [28] imamo

$$\delta([\nu^{-x_2}\rho, \nu^{x_2}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)} \simeq \tau_{2,+}^{(x_2)} \oplus \tau_{2,-}^{(x_2)} \tag{3.5}$$

za realan broj x_2 takav da $\alpha - 1 \leq x_2 \leq b$. Reprezentacija $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ sadrži točno dva ireducibilna temperirana subkvocijenta σ_+ i σ_- koji su diskretne serije i vrijedi

$$\sigma_\pm \hookrightarrow \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \tau_{2,\pm}^{(\alpha-1)}.$$

Iz Teorema 1.6.5 (ii) znamo da inducirana reprezentacija

$$\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \tag{3.6}$$

ima zajednički temperirani subkvocijent s $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$. Štoviše, reprezentacija (3.6) je duljine dva, pri čemu je drugi subkvocijent Langlandsov kvocijent, jedinstveni ireducibilni kvocijent dane reprezentacije. Kako svaka reprezentacija konačne duljine sadrži ireducibilnu podreprezentaciju te kako zbog jedinstvenosti ireducibilnog kvocijenta znamo da reprezentacija iz (3.6) nije poluprosta, zaključujemo da joj je temperirani subkvocijent jedinstvena ireducibilna podreprezentacija.

Temperirane reprezentacije $\tau_{2,+}^{(x_2)}$ i $\tau_{2,-}^{(x_2)}$ parametriziramo po rezultatima potpoglavlja 1.5. Ako je $\alpha \geq 2$, onda je $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{(b+1)}) \cap [1, 2x_2+1] \neq \emptyset$ pa Teorem 1.5.2 (i) daje parametrizaciju ireducibilnih podreprezentacija od $\delta([\nu^{-x_2}\rho, \nu^{x_2}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$. Točno jedna ireducibilna podreprezentacija od (3.5) je podreprezentacija inducirane reprezentacije

$$\delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^{x_2}\rho]) \times \delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^{x_2}\rho]) \times \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{\alpha-2}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}. \tag{3.7}$$

Označimo ju $\tau_{2,+}^{(x_2)}$. Primijetimo da je za $\alpha \in \{1, \frac{3}{2}\}$ skup $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{(b+1)}) \cap [1, 2x_2+1]$ prazan. Tada parametrizaciju od $\tau_{2,+}^{(x_2)}$ razlikujemo obzirom na parnost elemenata od $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{(b+1)})$. Za $\alpha = \frac{3}{2}$ po Teoremu 1.5.2 (ii) imamo $\tau_{2,+}^{(x_2)} \hookrightarrow \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{x_2}\rho]) \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{x_2}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ pa smo u posebnom slučaju analize za $\alpha \geq 2$. Za $\alpha = 1$ po Teoremu 1.5.2 (ii) imamo

$$\tau_{2,+}^{(x_2)} \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^{x_2}\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^{x_2}\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \rho \rtimes \pi',$$

gdje je $\pi' \in R(G)$ diskretna serija takva da vrijedi $\sigma_{(b+1)} \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \pi'$. Po Napomeni 1.5.3, zbog ulaganja $\sigma_{(b+1)} \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$, zaključujemo da je $\pi' \simeq \sigma_c$. Dakle, parametrizacija daje

$$\tau_{2,+}^{(x_2)} \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^{x_2}\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^{x_2}\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \rho \rtimes \sigma_c.$$

Uočimo da je za $\alpha \geq \frac{3}{2}$ i $x_2 = \alpha - 1$ reprezentacija oblika $\nu^{\alpha-1}\rho \otimes \nu^{\alpha-1}\rho \otimes \pi''$ za $\pi'' \in R(G)$ konstituent Jacqueteovog modula od $\mu^*(\tau_{2,+}^{(\alpha-1)})$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu, dok isto ne vrijedi za Jacqueteove module od $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Tvrdnja lako slijedi po formuli (3.2) i uvjetu $b+1 \geq \alpha$. Time je $\tau_{2,-}^{(\alpha-1)} \hookrightarrow \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$.

Pod uvjetima $b = \alpha - 1$ i $-a = x$ iz Propozicije 3.2.1 (i) smo pri analizi kandidata za temperirane subkvocijente koji nisu diskretne serije vidjeli da je najviše jedna reprezentacija iz skupa $\{\tau_{2,+}^{(\alpha-1)}, \tau_{2,-}^{(\alpha-1)}\}$ subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_c$. Reprezentacija π je izomorfna s

$$L(\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{\alpha}\rho])).$$

Propozicija 3.2.2. Neka je $b = \alpha - 1$ i $-a = x$. Inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_c$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent koji nije diskretna serija ako i samo ako $x = \alpha - 1$. U tom slučaju je jedinstven, ulaže se u $\pi \rtimes \sigma_c$ te je za $\alpha = 1$ izomorfan s $\tau_{2,-}^{(0)}$, a za $\alpha \geq \frac{3}{2}$ s $\tau_{2,+}^{(\alpha-1)}$.

Dokaz. U slučaju $\alpha = 1$ zbog $0 \leq x \leq b = \alpha - 1 = 0$ je $\pi \simeq L(\rho, \nu\rho)$, $\tau_{2,+}^{(0)} \oplus \tau_{2,-}^{(0)} \simeq \rho \rtimes \sigma_{(1)}$ i $\tau_{2,+}^{(0)}$ je parametrizirana ulaganjem u $\nu\rho \times \rho \rtimes \sigma_c$. Dakle, $\tau_{2,-}^{(0)}$ se ulaže u $\delta([\rho, \nu\rho]) \rtimes \sigma_c$ ili $L(\rho, \nu\rho) \rtimes \sigma_c \simeq \pi \rtimes \sigma_c$. Prva opcija nije moguća zbog ulaganja

$$\tau_{2,-}^{(0)} \hookrightarrow \delta([\rho, \nu\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow \nu\rho \times \rho \rtimes \sigma_c$$

i parametrizacije reprezentacije $\tau_{2,+}^{(0)}$. Slijedi da je $\tau_{2,-}^{(0)}$ podreprezentacija od $\pi \rtimes \sigma_c$.

U slučaju $\alpha \geq \frac{3}{2}$, razlikujemo dvije mogućnosti: $x = \alpha - 1$ i $0 \leq x \leq \alpha - 2$. Za $x = \alpha - 1$ je $\pi \rtimes \sigma_c \simeq L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]), \nu^{\alpha}\rho) \rtimes \sigma_c$. Definiramo reprezentaciju

$$\Pi = \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \times \nu^{\alpha}\rho \rtimes \sigma_c.$$

Uočimo kako zbog inkluzija

$$\tau_{2,+}^{(\alpha-1)} \oplus \tau_{2,-}^{(\alpha-1)} \simeq \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_{(\alpha)} \hookrightarrow \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \times \nu^{\alpha}\rho \rtimes \sigma_c$$

prema Lemi 3.1.2 dobivamo da se ireducibilne reprezentacije $\tau_{2,+}^{(\alpha-1)}, \tau_{2,-}^{(\alpha-1)}$ ulažu u neki od sumanada u $R(G)$ od

$$\Pi = \pi \rtimes \sigma_c + \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha}\rho]) \rtimes \sigma_c.$$

Sada činjenica $\tau_{2,+}^{(\alpha-1)} \nleq \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha}\rho]) \rtimes \sigma_c$ implicira da je $\tau_{2,+}^{(\alpha-1)}$ podreprezentacija od $\pi \rtimes \sigma_c$.

Za $0 \leq x \leq \alpha - 2$ ćemo pokazati da $\pi \rtimes \sigma_c$ ne sadrži temperirani subkvocijent iz skupa $\{\tau_{2,+}^{(\alpha-1)}, \tau_{2,-}^{(\alpha-1)}\}$. Naime, ako sadrži $\tau_{2,+}^{(\alpha-1)}$ ili $\tau_{2,-}^{(\alpha-1)}$, onda po Frobeniusovom reciprocitetu Jacqueteov modul od $\pi \rtimes \sigma_c$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\nu^{\alpha-1}\rho \otimes \nu^{\alpha-1}\rho \otimes \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{\alpha-2}\rho]) \otimes \sigma_{(b+1)} \;\text{ ili }\; \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha}\rho]) \otimes \sigma_c.$$

Redom pokazujemo da to nije moguće.

1. Vidimo da je $\big((-(x+1), x), (\alpha-2, \alpha)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi)'$ jedini element za kojeg je odgovarajući konstituent u $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ oblika $\nu^{\alpha-1}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in R(G)$. Definiramo

$$\pi_1 = L(\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{\alpha-2}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{\alpha}\rho]))$$

te primijetimo da je $\nu^{\alpha-1}\rho \otimes \pi_1 \rtimes \sigma_c \leq \mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$. Nadalje, $\mu^*(\pi_1 \rtimes \sigma_c)$ ne sadrži konstituent oblika $\nu^{\alpha-1}\rho \otimes \pi''$ za neki $\pi'' \in R(G)$. Vidimo da ne postoji $\big((c_1,c_2),(d_1,d_2)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_1)'$ takav da je reprezentacija

$$L(\delta([\nu^{-c_2}\rho,\nu^{-(x+1)}\rho]),\delta([\nu^{-c_1}\rho,\nu^{x}\rho])) \times L(\delta([\nu^{d_1+1}\rho,\nu^{\alpha-2}\rho]),\delta([\nu^{d_2+1}\rho,\nu^{\alpha}\rho]))$$

izomorfna s $\nu^{\alpha-1}\rho$ jer su zbog pretpostavke $0 \leq x \leq \alpha-2$ elementi skupa $\{-(x+1),x,\alpha-2,\alpha\}$ različiti od $\alpha-1$.

2. Vidimo da su $\big((c,d),(c,d)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi)'$ za $c<d$, $-x-1 \leq c \leq \alpha-1$ i $x \leq d \leq \alpha$ jedine opcije za koje je π_2 iz $\pi_1 \otimes \pi_2 \leq \mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ jednaka σ_c. Nadalje, po Lemi 1.3.13 zaključujemo da ako reprezentacija

$$L(\delta([\nu^{-d}\rho,\nu^{-(x+1)}\rho]),\delta([\nu^{-c}\rho,\nu^{x}\rho])) \times L(\delta([\nu^{c+1}\rho,\nu^{\alpha-1}\rho]),\delta([\nu^{d+1}\rho,\nu^{\alpha}\rho]))$$

sadrži $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho,\nu^{\alpha}\rho])$, onda $c=\alpha-1$ ili $d=\alpha$. Kako sadrži $\nu^{\alpha}\rho$ u kuspidalnom nosaču, zbog uvjeta $0 \leq x \leq \alpha-2$ je nužno $c=\alpha-1$. No zbog $c<d\leq\alpha$ zaključujemo $d=\alpha$ pa ni ovaj slučaj nije moguć.

■

Pod uvjetima $-a=b$, $x=\alpha-1$ i $0 \leq x \leq -a-1$ iz Propozicije 3.2.1 (ii) smo pri analizi kandidata za temperirane subkvocijente koji nisu diskretne serije vidjeli da je najviše jedna reprezentacija iz skupa $\{\tau_{2,+}^{(b)},\tau_{2,-}^{(b)}\}$ subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_c$. Reprezentacija π je izomorfna s

$$L(\delta([\nu^{-b}\rho,\nu^{b}\rho]),\delta([\nu^{\alpha}\rho,\nu^{b+1}\rho])).$$

Propozicija 3.2.3. Neka je $-a=b$ i $x=\alpha-1\leq -a-1$. Tada inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_c$ sadrži jedinstveni ireducibilni temperirani subkvocijent koji se ulaže u $\pi \rtimes \sigma_c$ te je za $\alpha=1$ izomorfan s $\tau_{2,-}^{(b)}$, a za $\alpha \geq \frac{3}{2}$ s $\tau_{2,+}^{(b)}$.

Dokaz. Vidimo da se zbog sljedećih ulaganja i jednakosti u $R(G)$

$$\tau_{2,+}^{(b)} \oplus \tau_{2,-}^{(b)} \simeq \delta([\nu^{-b}\rho,\nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)} \hookrightarrow \delta([\nu^{-b}\rho,\nu^{b}\rho]) \times \delta([\nu^{\alpha}\rho,\nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c =$$
$$\pi \rtimes \sigma_c + \delta([\nu^{-b}\rho,\nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{\alpha}\rho,\nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_c$$

reprezentacije $\tau_{2,\pm}^{(b)}$ ulažu u neki od sumanada prema Lemi 3.1.2. Uočimo da ako reprezentacija $\delta([\nu^{-b}\rho,\nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{\alpha}\rho,\nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_c$ ima temperiranu podreprezentaciju, onda se ona ulaže u $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)}$. Druga opcija nije moguća jer se tada ulaže u reprezentaciju

$$\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes L(\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-\alpha}\rho]); \sigma_c) \simeq \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-\alpha}\rho]) \rtimes \sigma_c \simeq$$
$$\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-\alpha}\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c,$$

što je kontradikcija s Casselmanovim kriterijem.

U slučaju $\alpha = 1$ parametrizacija od $\tau_{2,+}^{(b)}$ daje

$$\tau_{2,+}^{(b)} \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \rho \rtimes \sigma_c.$$

Iz sljedećih inkluzija vidimo da je nužno $\tau_{2,+}^{(b)}$ podreprezentacija od $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)}$:

$$\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)} \hookrightarrow \delta([\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)} \simeq$$
$$\delta([\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b)} \simeq$$
$$\delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)} \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c \simeq$$
$$\delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow$$
$$\delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \rho \rtimes \sigma_c.$$

Kako smo vidjeli da se temperirana podreprezentacija od $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$ ulaže u $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)}$, slijedi da nije izomorfna s $\tau_{2,-}^{(b)}$. Time dobivamo da se $\tau_{2,-}^{(b)}$ ulaže u $\pi \rtimes \sigma_c$.

U slučaju $\alpha \geq \frac{3}{2}$ uočimo da se $\tau_{2,+}^{(b)}$ ne ulaže u $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)}$. Naime, po parametrizaciji od $\tau_{2,+}^{(b)}$ postoji ireducibilna reprezentacija $\pi' \in R(G)$ takva da Jacqueteov modul od $\tau_{2,+}^{(b)}$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži reprezentaciju oblika $\delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \pi'$. Uočimo da to ne vrijedi za Jacqueteove module od $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)}$. Svi konstituenti od $\mu^*(\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)})$ oblika $\delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \pi''$ za $\pi'' \in \mathrm{Irr}(G)$ su sadržani u

$$\delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)}.$$

Uočimo da $\mu^*(\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)})$ sadrži konstituent oblika $\pi_1 \otimes \pi_2$ takav da je $\nu^{\alpha-1}\rho \in [\pi_1]$ ako i samo ako je $[\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^{b+1}\rho] \subseteq [\pi_1]$. Dakle, ne sadrži reprezentaciju oblika $\delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \pi'''$ za $\pi''' \in \mathrm{Irr}(G)$ pa se $\tau_{2,+}^{(b)}$ ne ulaže u $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)}$. Time $\tau_{2,+}^{(b)}$ nije podreprezentacija od $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$ pa se ulaže u $\pi \rtimes \sigma_c$. ■

Definirajmo ireducibilne temperirane reprezentacije potrebne za analizu temperiranih kandidata u slučaju $y = -a$. Za $0 \leq \alpha - 2 < -a$ definiramo

$$\delta([\nu^{-x_1}\rho, \nu^{x_1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b,b+1)} \simeq \tau_{1,+}^{(x_1)} \oplus \tau_{1,-}^{(x_1)}$$

za realan broj x_1 takav da $\alpha - 2 \leq x_1 \leq b - 1$. Po Teoremu 1.6.3, za $-a < b$ reprezentacija $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_{(b,b+1)}$ sadrži točno dva međusobno neekvivalentna temperirana subkvocijenta σ_+ i σ_- u diskretnim serijama. Štoviše, vrijedi

$$\sigma_\pm \hookrightarrow \delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \tau_{1,\pm}^{(\alpha-2)}.$$

Iz Teorema 1.6.5 (ii) znamo da inducirana reprezentacija

$$\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)} \tag{3.8}$$

ima zajednički temperirani subkvocijent s $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{\alpha-2}\rho]) \rtimes \sigma_{(b,b+1)}$ koji je podreprezentacija od (3.8). Parametrizaciju reprezentacija $\tau_{1,\pm}^{(\alpha-2)}$ određujemo prema rezultatima potpoglavlja 1.5. Ako je $\alpha \geq 3$, onda je skup $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{(b,b+1)}) \cap [1, 2(\alpha-2)+1]$ neprazan pa je prema Teoremu 1.5.2 (i) točno jedna od reprezentacija $\tau_{1,\pm}^{(\alpha-2)}$ podreprezentacija inducirane reprezentacije

$$\nu^{\alpha-2}\rho \times \nu^{\alpha-2}\rho \times \delta([\nu^{-(\alpha-3)}\rho, \nu^{\alpha-3}\rho]) \rtimes \sigma_{(b,b+1)}.$$

Označimo ju $\tau_{1,+}^{(\alpha-2)}$. Ako je $\alpha = \frac{5}{2}$, po Teoremu 1.5.2 (ii) imamo $\tau_{1,+}^{(\alpha-2)} \hookrightarrow \nu^{\frac{1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{1}{2}}\rho \rtimes \sigma_{(b,b+1)}$ pa smo u posebnom slučaju analize za $\alpha \geq 3$. Za $\alpha = 2$ je $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{(b,b+1)}) \cap [1, 2(\alpha-2)+1] = \emptyset$ kako je po pretpostavci $b \geq 1$. Po Teoremu 1.5.2 (ii) vrijedi ulaganje $\tau_{1,+}^{(0)} \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^{b}\rho]) \times \rho \rtimes \pi'$, gdje je $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$ takva da $\sigma_{(b,b+1)} \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \pi'$. Zbog ulaganja $\sigma_{(b,b+1)} \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$, po Napomeni 1.5.3 dobivamo $\pi' \simeq \sigma_{(b+1)}$. Dakle, $\tau_{1,+}^{(0)}$ je parametrizirana ulaganjem u $\delta([\nu\rho, \nu^{b}\rho]) \times \rho \rtimes \sigma_{(b+1)}$. Uočimo da je za $\alpha \geq \frac{5}{2}$ reprezentacija oblika $\nu^{\alpha-2}\rho \otimes \nu^{\alpha-2}\rho \otimes \pi''$ za $\pi'' \in R(G)$ konstituent Jacqueteovog modula od $\tau_{1,+}^{(\alpha-2)}$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu, dok isto ne vrijedi za Jacqueteove module od $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$. Tvrdnja lako slijedi po formuli (3.2) i uvjetu $b \geq \alpha - 1$. Time je $\tau_{1,-}^{(\alpha-2)} \hookrightarrow \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$.

Pod uvjetima $x = -a+1 = \alpha - 1$ iz Propozicije 3.2.1 (iii) smo pri analizi kandidata za ireducibilne temperirane subkvocijente koji nisu diskretne serije vidjeli da je najviše jedna reprezentacija iz skupa $\{\tau_{1,+}^{(\alpha-2)}, \tau_{1,-}^{(\alpha-2)}\}$ subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_c$. Tada vrijedi

$$\pi \simeq L(\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b+1}\rho])).$$

Propozicija 3.2.4. Neka je $x = -a+1 = \alpha - 1$. Tada inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_c$ sadrži jedinstveni temperirani subkvocijent koji se ulaže u $\pi \rtimes \sigma_c$ te je za $\alpha = 2$ izomorfan s $\tau_{1,+}^{(0)}$, a za $\alpha \geq \frac{5}{2}$ s $\tau_{1,-}^{(\alpha-2)}$.

Dokaz. U slučaju $\alpha \geq \frac{5}{2}$ smo pokazali da se $\tau_{1,-}^{(\alpha-2)}$ ulaže u $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ pa se ulaže i u

$$\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c.$$

Time je $\tau_{1,-}^{(\alpha-2)}$ podreprezentacija od $\pi \rtimes \sigma_c$ ili od $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$. Pretpostavimo da vrijedi $\tau_{1,-}^{(\alpha-2)} \hookrightarrow \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$. Kompozicioni niz reprezentacije $\delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c = \sigma_{(b)} + L(\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-\alpha}\rho]); \sigma_c)$ i činjenica da je $\tau_{1,-}^{(\alpha-2)}$ temperirana impliciraju da se $\tau_{1,-}^{(\alpha-2)}$ ulaže u $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)}$. No uočimo da prema Teoremu 1.6.5 (ii) ta reprezentacija nema temperiranih subkvocijenata. Dakle, $\tau_{1,-}^{(\alpha-2)}$ se ulaže u $\pi \rtimes \sigma_c$.

U slučaju $\alpha = 2$ temperirana reprezentacija $\tau_{1,+}^{(0)}$ je parametrizirana ulaganjem u $\delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \rho \rtimes \sigma_{(b+1)}$. Zbog ulaganja

$$\tau_{1,+}^{(0)} \hookrightarrow \rho \rtimes \sigma_{(b,b+1)} \hookrightarrow \rho \times \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$$

slijedi da se ulaže u $\delta([\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ ili u $L(\rho, \delta([\nu\rho, \nu^b\rho])) \rtimes \sigma_{(b+1)}$. Po formuli (1.3) vidimo da se $\delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \otimes \rho$ ne nalazi u $M^*(L(\rho, \delta([\nu\rho, \nu^b\rho])))$ pa je nužno $\tau_{1,+}^{(0)} \hookrightarrow \delta([\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$. Sada analognim postupkom kao u prošlom slučaju vidimo da se $\tau_{1,+}^{(0)}$ ulaže u $\pi \rtimes \sigma_c$. ■

Pod uvjetima $-a = b = x + 1 = \alpha - 1$ iz Propozicije 3.2.1 (iv) smo pri analizi kandidata za temperirane subkvocijente od $\pi \rtimes \sigma_c$ koji nisu diskretne serije dobili reprezentaciju $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_{(\alpha-1,\alpha)}$ koja je ireducibilna jer je $2(\alpha-1)+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{(\alpha-1,\alpha)})$. Reprezentacija π je izomorfna s

$$L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]), \delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^\alpha\rho])).$$

Uočimo da je po formuli (1.3) i zbog $\nu^{\alpha-1}\rho \otimes \sigma_{(\alpha)} \leq \mu^*(\sigma_{(\alpha-1,\alpha)})$ reprezentacija oblika $\nu^{\alpha-1}\rho \otimes \nu^{\alpha-1}\rho \otimes \nu^{\alpha-1}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$ sadržana u Jacqueteovom modulu od

$$\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_{(\alpha-1,\alpha)}$$

obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. S druge strane, to ne vrijedi za Jacqueteove module od $\pi \rtimes \sigma_c$. Naime, svi konstituenti oblika $\nu^{\alpha-1}\rho \otimes \nu^{\alpha-1}\rho \otimes \pi''$ za neki $\pi'' \in \mathrm{Irr}(G)$ Jacqueteovog modula od $\pi \rtimes \sigma_c$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu su sadržani u

$$\nu^{\alpha-1}\rho \otimes \nu^{\alpha-1}\rho \otimes L(\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{\alpha-2}\rho]), \delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^\alpha\rho])) \rtimes \sigma_c.$$

Po formuli (1.3) vidimo da ako je $\pi_1 \otimes \pi_2 \leq \mu^*(L(\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{\alpha-2}\rho]), \delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^\alpha\rho])) \rtimes \sigma_c)$ takav da $\nu^{\alpha-1}\rho \in [\pi_1]$, onda je i $\nu^\alpha\rho \in [\pi_1]$. Dakle, $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_{(\alpha-1,\alpha)}$ nije subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_c$.

3.2.2. Subkvocijenti od $\pi \rtimes \sigma_c$ u diskretnim serijama

Pri određivanju kandidata za ireducibilne kvadratno integrabilne subkvocijente koristimo klasifikaciju diskretnih serija. Naime, po klasifikaciji se diskretna serija σ koja nije strogo pozitivna ulaže u induciranu reprezentaciju oblika

$$\delta([\nu^{-z}\rho, \nu^{y}\rho]) \rtimes \sigma', \tag{3.9}$$

gdje je σ' diskretna serija, $0 \leq z < y$ tako da je $(2y+1)\_ = 2z+1$ u $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$. Prema Frobeniusovom reciprocitetu je $\delta([\nu^{-z}\rho, \nu^{y}\rho]) \otimes \sigma'$ konstituent od $\mu^*(\sigma)$. Kandidate za ireducibilni kvadratno integrabilni subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_c$ određujemo po konstituentima od $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ opisanog oblika.

Na isti način kao pri analizi mogućih ireducibilnih temperiranih subkvocijenata vidimo da je $y \in \{-a, b\}$. Neka je $y = b$ i time $d_2 = b+1$. Analizom konstituenata od $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ dobivamo:

1. $\delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{-a}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$ za $d_1 = -a$, $c_2 = x$ i $c_1 \geq 0$,

2. $\delta([\nu^{-c_2}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{-x-1}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$ za $d_1 = -x-1$, $c_1 = a-1$ i $c_2 \geq 0$,

3. $\delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{d_1}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$ za $c_1 = a-1$, $c_2 = x$ i $d_1 + 1 \leq 0$.

Kako je u prvom slučaju $c_1 + 1 \geq 1$ i $x+1 \geq 1$, zbog $c_1 < c_2 = x$ slijedi da je

$$L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{-a}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]))$$

ljestvičasta reprezentacija s eksponentima u kuspidalnom nosaču većim ili jednakim 1. Teorem 2.1.1 opisuje ireducibilne temperirane subkvocijente reprezentacije

$$L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{-a}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c.$$

Zbog $c_1 < c_2 = x$ vidimo da je $c_1 = -a$ moguće samo u slučaju $-a < x$. Tada je $x = \alpha - 1$ i kandidati za diskretne serije su sadržani u induciranoj reprezentaciji $\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$. Uočimo da takve diskretne serije ne postoje jer uvjet $(2b+1)\_ = 2(-a)+1$ i analiza Jordanovog bloka od $\sigma_{(b+1)}$ impliciraju $\alpha - 1 \leq -a < x$, što nije moguće. Ako je $c_1 + 1 \leq -a$ i $x+1 \leq b+1$, onda je $c_1 + 1 = \alpha - 1$ i $x+1 = \alpha$. Primijetimo da ako inducirana reprezentacija

$\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(-a,b+1)}$ sadrži diskretnu seriju, onda dobivamo kontradikciju s definicijom Jordanovih blokova jer je $(2b+1)\_ = 2(\alpha-2)+1, 2(-a)+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$ i $\alpha - 1 \leq -a \leq b$. Dakle, prvi slučaj ukupno ne daje kandidate po klasifikaciji za diskretne serije od $\pi \rtimes \sigma_c$.

U drugom slučaju inducirana reprezentacija

$$L(\delta([\nu^a\rho, \nu^{-x-1}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c \stackrel{R(G)}{=} \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$$

prema rezultatu [23, Lema 3.6] može sadržavati $\sigma_{(-a,b+1)}$ u slučaju $0 \leq x \leq -a-1$, no isti argumenti kao u prvom slučaju pokazuju da dobivena inducirana reprezentacija ne sadrži diskretnu seriju. Dakle, preostaje razmotriti slučajeve $x = \alpha - 1$ i $c_2 = -a$ za $0 \leq x \leq -a-1$ ili $x = -a$ i $c_2 = \alpha - 1$ za $-a \leq x$. Time su kandidati diskretne serije od $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ za $0 \leq x \leq -a-1$ ili $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ za $-a \leq x$. Primijetimo da su uvjeti pod kojima dobivamo opisane diskretne serije $-a \geq \alpha$ i $x = \alpha - 1$ za $0 \leq x \leq -a-1$ i $-a = x \leq \alpha - 1$ za $-a \leq x$.

U trećem slučaju reprezentacija

$$L(\delta([\nu^a\rho, \nu^{d_1}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c \stackrel{R(G)}{=} \delta([\nu^{-d_1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$$

može sadržavati diskretnu seriju za $-d_1 = \alpha$ i $x = -a$ ili $d_1 = a-1$ i $x = \alpha - 1$ ili $-d_1 = \alpha - 1$ i $x+1 = \alpha$. Kao i ranije, inducirana reprezentacija $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(-a,b+1)}$ ne sadrži diskretne serije. Dakle, preostaje analizirati slučaj kada se na klasičnom dijelu inducira iz $\sigma_{(b+1)}$. Za $d_1 = -\alpha$ i $x = -a$ promatramo diskretne serije u $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$, dok za $d_1 = a-1$ i $x = \alpha - 1$ promatramo $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ koja sadrži diskretnu seriju ako i samo ako $-a \geq \alpha - 1 = x$. Primijetimo, $-a \geq \alpha - 1$ je zajednički uvjet pod kojim dobivamo ove kandidate.

Uočimo da smo pokazali da je za $0 \leq x \leq -a-1$ i $x = \alpha - 1$ reprezentacija $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \otimes \sigma_{(b+1)}$ konstituent od $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ kratnosti dva. Za $x = -a$ je reprezentacija $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \sigma_{(b+1)}$ konstituent od $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ kratnosti jedan.

Analizirajmo u konačnici slučaj $y = -a$. Kandidate dobivamo za $\big((c_1, x), (b, b+1)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi)'$ od konstituenta

$$\delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c. \tag{3.10}$$

Zbog $-a > c_1 \geq 0$ jedini kandidat za temperirani subkvocijent reprezentacije

$$L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

je strogo pozitivna diskretna serija dobivena za $c_1+1=\alpha-1$ i $x+1=\alpha$. Po Teoremu 1.6.3 inducirana reprezentacija

$$\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho,\nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_{(b,b+1)}$$

sadrži točno dvije podreprezentacije u diskretnim serijama uz uvjet $-a<b$. Kako smo pokazali da se u $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ reprezentacija oblika (3.10) koja daje kandidate nalazi sa kratnosti jedan, zaključujemo da je najviše jedna od njih subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_c$. Ako je $-a \leq x$, onda je $-a = x = \alpha-1$ nužan uvjet zbog nejednakosti $-a \leq x = \alpha-1$ i $\alpha-2<-a$. Ako je $0 \leq x \leq -a-1$, onda zbog $x=\alpha-1$ dobivamo uvjet $\alpha \leq -a$.

Sljedeća lema će nam biti važna u nastavku.

Lema 3.2.5. Neka je σ diskretna serija koja se ulaže u induciranu reprezentaciju

$$\delta([\nu^{-y}\rho,\nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$$

za $\max\{0,\alpha-1\} \leq y < b$ te za koju vrijedi $\varepsilon_\sigma((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = -1$.

Tada reprezentacija oblika $\nu^{b+1}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$ nije konstituent od $\mu^*(\sigma)$.

Dokaz. Lema 3.1.2 i sljedeća ulaganja

$$\sigma \hookrightarrow \delta([\nu^{-y}\rho,\nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)} \hookrightarrow \delta([\nu^{-y}\rho,\nu^{b}\rho]) \times \nu^{b+1}\rho \rtimes \sigma_{(b)}$$

impliciraju da se σ ulaže u $\delta([\nu^{-y}\rho,\nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)}$ ili u $L(\delta([\nu^{-y}\rho,\nu^{b}\rho]),\nu^{b+1}\rho) \rtimes \sigma_{(b)}$. Ako se ulaže u $\delta([\nu^{-y}\rho,\nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)}$, onda Teorem 1.6.5 (iv) implicira da je $\sigma \simeq \sigma_{ds}$. Po definiciji se vrijednosti od ε_σ i $\varepsilon_{\sigma_{ds}}$ na paru $((b,\rho),(b+1,\rho))$ razlikuju, što nije moguće. Dakle, vrijedi $\sigma \hookrightarrow L(\delta([\nu^{-y}\rho,\nu^{b}\rho]),\nu^{b+1}\rho) \rtimes \sigma_{(b)}$. Formula (1.3) implicira da

$$\mu^*(L(\delta([\nu^{-y}\rho,\nu^{b}\rho]),\nu^{b+1}\rho) \rtimes \sigma_{(b)})$$

ne sadrži konstituent oblika $\nu^{b+1}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$ pa smo time dokazali tvrdnju. ∎

Označimo sa σ_0 diskretnu seriju od $\delta([\nu^{a}\rho,\nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ za koju vrijedi

$$\varepsilon_{\sigma_0}((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = -1,$$

dok drugu diskretnu seriju označavamo σ_0'.

Propozicija 3.2.6. Ako inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_c$ sadrži diskretnu seriju, onda vrijedi $0 \leq x \leq -a < b$ i $x = \alpha-1$. U tom slučaju se za $\alpha \geq 2$ diskretna serija ulaže u induciranu reprezentaciju $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho,\nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_{(b,b+1)}$, dok je za $\alpha \in \{1,\frac{3}{2}\}$ izomorfna sa σ_0.

Dokaz. Analizom konstituenata od $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ smo pokazali da su kandidati za diskretnu seriju u $\pi \rtimes \sigma_c$ diskretne serije koje se ulažu u

(i) $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ ili $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_{(b,b+1)}$, za $0 \leq x \leq -a$ i $x = \alpha - 1$,

(ii) $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$, za $x = -a$ i $x \neq \alpha - 1$.

Uočimo da su Jordanovi blokovi diskretnih serija iz (i) jednaki. Naime, radi se o skupu $\mathrm{Jord}_\rho = \{2(-a)+1, 2b+1, 2(b+1)+1\} \cup \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c) \setminus \{2(\alpha-1)+1\}$. Diskretne serije od $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ su okarakterizirane ε-funkcijom definiranom s

$$\varepsilon((2(-a)+1,\rho),(2b+1,\rho)) = 1,$$
$$\varepsilon((2(\alpha-2)+1,\rho),(2(-a)+1,\rho)) \cdot \varepsilon((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = -1$$

te je $\varepsilon((x_-,\rho),(x,\rho)) = -1$ za ostale $x \in \mathrm{Jord}_\rho$. Diskretna serija σ_0', za koju vrijedi

$$\varepsilon_{\sigma_0'}((2(\alpha-2)+1,\rho),(2(-a)+1,\rho)) = -1,\ \varepsilon_{\sigma_0'}((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = 1,$$

se ulaže u $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow \nu^{b+1}\rho \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$. Po Frobeniusovom reciprocitetu dobivamo da u Jacqueteovom modulu obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži reprezentaciju oblika $\nu^{b+1}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Kao što smo vidjeli ranije, isto ne vrijedi za Jacqueteove module od $\pi \rtimes \sigma_c$. Dakle, jedini kandidat je diskretna serija σ_0, za koju vrijedi $\varepsilon((2(\alpha-2)+1,\rho),(2(-a)+1,\rho)) = 1,\ \varepsilon((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = -1$. Time se za $\alpha \geq 2$ diskretna serija σ_0 ulaže i u $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_{(b,b+1)}$.

Pokažimo da u slučaju $x = -a$ i $x \neq \alpha - 1$ diskretne serije koje se ulažu u induciranu reprezentaciju pod (ii) nisu subkvocijenti od $\pi \rtimes \sigma_c$. Označimo sa σ diskretnu seriju od

$$\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$$

za koju vrijedi $\varepsilon_\sigma((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = -1$. Za drugu diskretnu seriju, u oznaci σ', vidimo da nije subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_c$ na analogan način kao za σ_0'. Pokazat ćemo da se σ ulaže u reprezentaciju oblika $\nu^{\alpha-1}\rho \rtimes \pi'$ za $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Uočimo da zbog $x \neq \alpha - 1$ i $\alpha - 1 < b$ zaključujemo da $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ ne sadrži subkvocijent oblika $\nu^{\alpha-1}\rho \otimes \pi'$. Frobeniusov reciprocitet tada direktno implicira da σ nije subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_c$.

Neka je $\alpha = 1$. Prema klasifikaciji diskretnih serija, σ se ulaže u $\delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(0)}$ ili $\delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{2,-}^{(0)}$. Prema parametrizaciji vrijedi $\tau_{2,+}^{(0)} \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \rho \rtimes \sigma_c$ pa imamo

$$\delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(0)} \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \rho \rtimes \sigma_c \simeq$$
$$\delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \rho \rtimes \sigma_c \hookrightarrow \nu^{b+1}\rho \rtimes \pi''$$

za neki $\pi'' \in \mathrm{Irr}(G)$. Prema Lemi 3.2.5 zaključujemo da vrijedi $\sigma' \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(0)}$. Nadalje, zbog ulaganja $\sigma \oplus \sigma' \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \times \rho \rtimes \sigma_{(b+1)}$ i Leme 3.1.2 zaključujemo da se ulažu u $\delta([\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ ili $L(\rho, \delta([\nu\rho, \nu^b\rho])) \rtimes \sigma_{(b+1)}$. Štoviše, Jacqueteovi moduli induciranih reprezentacija obzirom na odgovarajuće paraboličke podgrupe sadrže $\delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \otimes \rho \otimes \sigma_{(b+1)}$ s kratnosti jedan. Time svaka od njih sadrži točno jednu diskretnu seriju iz skupa $\{\sigma, \sigma'\}$. Prema parametrizaciji od $\tau_{2,+}^{(0)}$ i Frobeniusovom reciprocitetu slijedi

$$\delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \otimes \rho \otimes \sigma_c \leq r_\beta(\sigma')$$

za odgovarajuću paraboličku podgrupu P_β. Time se σ' ne ulaže u $L(\rho, \delta([\nu\rho, \nu^b\rho])) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ jer Jacqueteovi moduli te reprezentacije ne sadrže reprezentaciju oblika $\delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \otimes \pi'''$ za neki $\pi''' \in \mathrm{Irr}(G)$. Slijedi $\sigma \hookrightarrow L(\rho, \delta([\nu\rho, \nu^b\rho])) \rtimes \sigma_{(b+1)} \hookrightarrow \rho \times \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ pa smo dokazali željenu tvrdnju.

Neka je $\alpha \geq \frac{3}{2}$. Vidjeli smo da vrijedi $\tau_{2,-}^{(\alpha-1)} \hookrightarrow \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Zbog

$$\delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \simeq \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$$

i Leme 3.2.5 zaključujemo $\sigma \hookrightarrow \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(\alpha-1)}$. Prema parametrizaciji od $\tau_{2,+}^{(\alpha-1)}$ slijedi

$$\sigma \hookrightarrow \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho]) \times \nu^{\alpha-1}\rho \times \nu^{\alpha-1}\rho \rtimes \pi'$$

za $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Ako se σ ulaže u $\delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^b\rho]) \times \nu^{\alpha-1}\rho \rtimes \pi'$, onda tvrdnja slijedi zbog

$$\delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^b\rho]) \times \nu^{\alpha-1}\rho \simeq \nu^{\alpha-1}\rho \times \delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^b\rho]).$$

Ako se ulaže u $L(\nu^{\alpha-1}\rho, \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho])) \times \nu^{\alpha-1} \rtimes \pi'$, onda tvrdnja slijedi zbog ulaganja

$$L(\nu^{\alpha-1}\rho, \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho])) \hookrightarrow \nu^{\alpha-1}\rho \times \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho]).$$

Time smo dokazali traženu tvrdnju i u slučaju $\alpha \geq \frac{3}{2}$. ■

Propozicija 3.2.7. Inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_c$ sadrži diskretnu seriju ako i samo ako $0 \leq x \leq -a < b$ i $x = \alpha - 1$. U tom slučaju je diskretna serija sadržana u $\pi \rtimes \sigma_c$ jedinstvena, izomorfna sa σ_0 i ulaže se u $\pi \rtimes \sigma_c$.

Dokaz. Ako inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_c$ sadrži diskretnu seriju, onda Propozicija 3.2.6 implicira $0 \leq x \leq -a < b$ i $x = \alpha - 1$. Obratno, pretpostavimo da je $0 \leq x \leq -a < b$ i $x = \alpha - 1$. Zbog ulaganja

$$\sigma_0 \hookrightarrow \delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)} \hookrightarrow \delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$$

i Leme 3.1.2, diskretna serija σ_0 se ulaže u $\pi \rtimes \sigma_c$ ili $\delta([\nu^a\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$. Ako vrijede sljedeća ulaganja

$$\sigma_0 \hookrightarrow \delta([\nu^a\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow \nu^{b+1}\rho \times \delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c,$$

onda prema Frobeniusovom reciprocitetu $\mu^*(\sigma_0)$ sadrži konstituent oblika $\nu^{b+1}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Prema Lemi 3.2.5 to nije moguće. Time slijedi da se σ_0 ulaže u $\pi \rtimes \sigma_c$. Pokazali smo da je $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-a}\rho]) \otimes \sigma_{(b,b+1)}$ konstituent od $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ kratnosti jedan pa druga diskretna serija od $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_{(b,b+1)}$ nije subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_c$. ■

Rezultati potpoglavlja 3.2.1 i 3.2.2 su opisani sljedećim teoremom.

Teorem 3.2.8. Inducirana reprezentacija $L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$ za $0 \leq x \leq b$ i $-a \leq b$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent ako i samo ako vrijedi neki od sljedećih uvjeta: $x = -a+1 = \alpha - 1$, $x = -a = b = \alpha - 1$, $x = \alpha - 1 \leq -a - 1$ i $-a = b$ ili $x = \alpha - 1 \leq -a < b$. U tom slučaju temperirani subkvocijent je jedinstven, u oznaci τ, i radi se o podreprezentaciji.
Ako je $x = -a+1 = \alpha - 1$, za $\alpha = 2$ subkvocijent τ je izomorfan s $\tau^{(0)}_{1,+}$, a za $\alpha \geq \frac{5}{2}$ s $\tau^{(\alpha-2)}_{1,-}$.
Ako je $x = \alpha - 1 \leq -a = b$, za $\alpha = 1$ subkvocijent τ je izomorfan s $\tau^{(b)}_{2,-}$, a za $\alpha \geq \frac{3}{2}$ s $\tau^{(b)}_{2,+}$.
Ako je $x = \alpha - 1 \leq -a < b$, onda je τ diskretna serija izomorfna sa σ_0.

Dokaz. Primijetimo da dokaz ovog teorema slijedi iz Propozicije 3.2.4 u prvom, iz Propozicija 3.2.2 i 3.2.3 u drugom te iz Propozicije 3.2.7 u trećem slučaju. ■

3.3. Temperirani subkvocijenti od $\pi_S \rtimes \sigma_c$

U ovom poglavlju ćemo odrediti temperirane subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Sjetimo se,

$$\pi_S \simeq L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]))$$

za $a \leq 0$ te $-a \leq b$ ili $b = -a-1$. Sljedeća lema će nam poslužiti kao bitan argument u nastavku.

Lema 3.3.1. Neka je $\pi \in R(G)$ takav da je multiskup $[\pi]_{\mathrm{GL}}$ neprazan, elementi su mu oblika $\nu^x\rho$ za $x \in \mathbb{R}$ i kuspidalnu reprezentaciju $\rho \in \mathrm{Irr}(GL)$ te neka je M maksimalni eksponent u $[\pi]_{\mathrm{GL}}$.

(i) Ako je diskretna serija σ subkvocijent od π, onda vrijedi $2M+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$.

(ii) Ako je M kratnosti barem dva u $[\pi]$, onda π ne sadrži diskretnu seriju.

Dokaz. Klasifikacija diskretnih serija implicira da za diskretnu seriju σ postoje esencijalno kvadratno integrabilne reprezentacije $\delta_1, \ldots, \delta_k \in \mathrm{Irr}(GL)$, $k \in \mathbb{N}_0$, takve da je $\delta_i \simeq \delta([\nu^{-x_i}\rho_i, \nu^{y_i}\rho_i])$ za realne brojeve x_i, y_i takve da $0 \leq x_i < y_i$ za $i = 1, \ldots, k$, i strogo pozitivna diskretna serija σ_{sp} takva da $\sigma \hookrightarrow \delta_k \times \ldots \times \delta_1 \rtimes \sigma_{sp}$ i $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma) = \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{sp}) \cup \{2x_i+1, 2y_i+1 : i = 1, \ldots, k\}$. Obje tvrdnje dokazujemo indukcijom po k. Uočimo da je nužno $\rho_i \simeq \rho$ za $i = 1, \ldots, k$ kako u obje tvrdnje pretpostavljamo $\sigma \leq \pi$.

Neka je $k = 0$, to jest $\sigma \simeq \sigma_{sp}$. Tada postoji jedinstveni strogo rastući niz pozitivnih brojeva $z_1, \ldots, z_r$, za $r = \lceil \alpha \rceil$, takvih da je $\alpha - z_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha - r + i - 1 \leq z_i$ za $i = 1, \ldots, r$ i kuspidalna reprezentacija σ_c takva da se σ_{sp} ulaže u

$$\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{z_1}\rho]) \times \ldots \times \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{z_r}\rho]) \rtimes \sigma_c. \tag{3.11}$$

Posebno, $2z_r + 1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{sp})$.

(i) Ako je $\sigma_{sp} \leq \pi$, onda zbog $[\sigma_{sp}] = [\pi]$ slijedi $z_r = M$ pa je $2M+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{sp})$.

(ii) Pretpostavimo da je M kratnosti barem dva u $[\pi]$ te da je $\sigma_{sp} \leq \pi$. Tada $[\sigma_{sp}] = [\pi]$, što daje kontradikciju jer je z_r maksimalni eksponent u $[\sigma_{sp}]$ kratnosti jedan.

Pretpostavimo da tvrdnje (i) i (ii) vrijede za $k-1$ i pokažimo da vrijede za k. Neka je σ diskretna serija koja se ulaže u $\delta_k \times \ldots \times \delta_1 \rtimes \sigma_{sp}$. Tada postoji diskretna serija $\sigma' \hookrightarrow \delta_{k-1} \times \ldots \times \delta_1 \rtimes \sigma_{sp}$ takva da $\sigma \hookrightarrow \delta_k \rtimes \sigma'$ i $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma') = \mathrm{Jord}_\rho(\sigma) \setminus \{2x_k+1, 2y_k+1\}$.

(i) Ako je $\sigma \leq \pi$, onda $\nu^M\rho \in [\sigma]$. Razlikujemo dva slučaja. Ako je $y_k = M$, onda jasno $2M+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$. U suprotnom je M maksimalan eksponent u $[\sigma']$. Pretpostavka indukcije sada implicira $2M+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma') \subseteq \mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$.

(ii) Pretpostavimo da je σ subkvocijent od π i M je maksimalan eksponent u $[\pi]$ kratnosti barem dva. Po (i) znamo da je $2M+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$. Ako je $y_k = M$, onda je $\nu^M\rho \in [\sigma']$ pa ponovnom primjenom od (i) dobivamo $2M+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma') = \mathrm{Jord}_\rho(\sigma) \setminus \{2x_k+1, 2M+1\}$, što nije moguće. U suprotnom, M je maksimalan eksponent u $[\sigma']$ kratnosti barem dva. Sada po pretpostavci indukcije dobivamo kontradikciju.

■

3.3.1. Slučaj $b = -a-1$

Reprezentacija π_S je izomorfna s

$$L(\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]), \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho])).$$

Uočimo da se radi o Speh reprezentaciji jer je izomorfna Langlandsovoj podreprezentaciji od

$$\nu^{-\frac{1}{2}}\delta([\nu^{a+\frac{1}{2}}\rho, \nu^{-a-\frac{1}{2}}\rho]) \times \nu^{\frac{1}{2}}\delta([\nu^{a+\frac{1}{2}}\rho, \nu^{-a-\frac{1}{2}}\rho]).$$

Prema formuli (1.3) vidimo da se ireducibilni temperirani subkvocijent τ od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ ulaže u

$$\delta([\nu^{-y}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \tau' \text{ ili } \delta([\nu^{-z}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \tau''$$

za temperirane reprezentacije $\tau', \tau'' \in \mathrm{Irr}(G)$ i realne brojeve y, z takve da $0 \leq y \leq -a-1$ i $0 \leq z \leq -a$. Ako vrijedi $\tau \hookrightarrow \delta([\nu^{-z}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \tau'' \hookrightarrow \nu^{-a}\rho \times \delta([\nu^{-z}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \tau''$, onda $\mu^*(\tau)$ sadrži konstituent oblika $\nu^{-a}\rho \otimes \pi''$ za neki $\pi'' \in R(G)$, što ne vrijedi za $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ prema $(*)$. Dakle, u tom slučaju temperirane podreprezentacije nisu kandidati za subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Konstituenti od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ koji sadrže reprezentacije oblika $\delta([\nu^{-y}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \tau'$ su

$$\delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^a\rho, \nu^{d_1}\rho]), \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho])) \rtimes \sigma_c \qquad (3.12)$$

za $\big((a-1, a), (d_1, -a)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$ i

$$\delta([\nu^{-c_2}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{-a}\rho])) \rtimes \sigma_c \qquad (3.13)$$

za $\big((a-1, c_2), (-a-1, -a)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$. Vrijedi $a \leq d_1 \leq -1$ i $1 \leq c_2+1 \leq -a$. Označimo s $\pi_1 \otimes \pi_2$ neku od reprezentacija (3.12) i (3.13). Kako je $-a$ maksimalan eksponent u $[\pi_2]$

kratnosti barem dva, po Lemi 3.3.1 (ii) vidimo da π_2 ne sadrži diskretnu seriju. Time smo temperirane kandidate reducirali na subkvocijente od

$$\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \times L(\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]), \nu^{-a}\rho) \rtimes \sigma_c$$

dobivene za $d_1 = a$ ili $c_1 = -a-1$. Primijetimo da kandidate za temperirane subkvocijente od $L(\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]), \nu^{-a}\rho) \rtimes \sigma_c$ ne dobivamo od $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \nu^a\rho \times \nu^{-a}\rho \rtimes \sigma_c$ jer $-a \geq 1$ pa inducirana reprezentacija $\nu^a\rho \times \nu^{-a}\rho \rtimes \sigma_c$ ne sadrži temperirani subkvocijent. Dakle, temperirani kandidati se nužno ulažu u $\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \tau'''$ za neku temperiranu reprezentaciju $\tau''' \in \mathrm{Irr}(G)$. Time

$$\tau \hookrightarrow \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \times \delta([\nu^a\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \tau''' \simeq \delta([\nu^a\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \tau'''$$

pa dobivamo da τ nije subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ na analogan način kao na početku potpoglavlja.

3.3.2. Slučaj $-a \leq b$

Temperirani subkvocijenti od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ koji nisu diskretne serije

Označimo s τ ireducibilnu temperiranu reprezentaciju koja se ulaže u $\delta([\nu^{-y}\rho, \nu^y\rho]) \rtimes \tau'$ za neku temperiranu reprezentaciju $\tau' \in \mathrm{Irr}(G)$ i $y \geq 0$. Ako je τ subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ za $-a \leq b$, onda iz (1.3) vidimo da je $y \in \{-a-1, -a, b, b+1\}$. Zbog argumentacije $(*)$ vidimo da kandidati za $y = b+1$ ne postoje. Analogni argument ukazuje da ne postoji kandidat za $y = -a$ kada je $-a < b$. Analizirajmo kandidate u slučaju $y = -a-1$. Svi takvi kandidati postižu se za $\big((a-1, -a-1), (b, b+1)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$ i sadržani su u

$$\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{-a}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c. \tag{3.14}$$

U terminima Teorema 3.2.8 je $x = -a-1$ te inducirana reprezentacija

$$L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{-a}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c \tag{3.15}$$

sadrži temperirani subkvocijent ako i samo ako $x = -a-1 = \alpha - 1$. Ako je $-a = b$, onda za $\alpha = 1$ sadrži $\tau_{2,-}^{(b)}$, a za $\alpha \geq \frac{3}{2}$ sadrži $\tau_{2,+}^{(b)}$. Kako su temperirani subkvocijenti iz Teorema 3.2.8 jedinstveni te reprezentacija (3.14) sadrži sve konstituente od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ oblika $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$, zaključujemo da je najviše jedan temperirani kandidat subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Ako je $-a < b$, onda reprezentacija (3.15) sadrži diskretnu seriju σ_0.

Neka je $-a < b$. Kandidate za temperirane subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ označavamo $\tau_{5,+} \oplus \tau_{5,-} \simeq \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_0$. Ako je $\alpha = 1$, prema Teoremu 1.5.2 reprezentacija $\tau_{5,+}$ je parametrizirana ulaganjem u $\nu\rho \times \rho \rtimes \pi'$ za diskretnu seriju π'. Ako je $\alpha \geq \frac{3}{2}$, prema Teoremu 1.5.2 reprezentacija $\tau_{5,+}$ je parametrizirana ulaganjem u

$$\nu^{\alpha-1}\rho \times \nu^{\alpha-1}\rho \times \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{\alpha-2}\rho]) \rtimes \sigma_0.$$

Reprezentacija π_S je izomorfna s $L(\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]))$.

Propozicija 3.3.2. Neka je $\alpha = -a < b$. Tada inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_c$ sadrži jedinstveni ireducibilni temperirani subkvocijent koji je podreprezentacija te je izomorfan s $\tau_{5,-}$.

Dokaz. Kako se diskretna serija σ_0 ulaže u $\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$, imamo ulaganja

$$\begin{aligned}\tau_{5,+} \oplus \tau_{5,-} \simeq \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_0 &\hookrightarrow \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \times \delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)} \\ &\simeq \delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}.\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $\alpha = 1$. Gornja ulaganja impliciraju da se $\tau_{5,\pm}$ ulažu u $\delta([\nu^{-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(0)}$ ili $\delta([\nu^{-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{2,-}^{(0)}$. Prebrojavajući kratnosti od $\rho \otimes \sigma_0$ u Jacqueteovim modulima tih reprezentacija obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu, zaključujemo da se svaka reprezentacija iz skupa $\{\tau_{5,+}, \tau_{5,-}\}$ ulaže u točno jednu reprezentaciju iz skupa $\{\delta([\nu^{-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(0)}, \delta([\nu^{-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{2,-}^{(0)}\}$. Parametrizacija iz Teorema 1.5.2 (ii) implicira da se $\tau_{2,+}^{(0)}$ ulaže u $\delta([\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Time zbog Leme 3.2.5 i ulaganja $\tau_{5,\pm} \hookrightarrow \rho \rtimes \sigma_0$ dobivamo da se reprezentacija iz skupa $\{\tau_{5,+}, \tau_{5,-}\}$, koja se ulaže u

$$\delta([\nu^{-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(0)} \hookrightarrow \delta([\nu^{-1}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c,$$

ulaže u $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Slijedeći argumentaciju $(*)$, lako je uočiti da konstituent oblika $\nu\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$ nije konstituent od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$, zbog čega niti $\tau_{5,+}$ nije subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Time dobivamo $\tau_{5,-} \hookrightarrow \pi_S \rtimes \sigma_c$.

U nastavku pretpostavljamo $\alpha \geq \frac{3}{2}$. Temperirane reprezentacije $\tau_{2,\pm}^{(\alpha-1)}$ se ulažu u

$$\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \times \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c.$$

Prema Teoremu 1.5.2 vrijedi $\tau_{2,+}^{(\alpha-1)} \hookrightarrow \nu^{\alpha-1}\rho \times \nu^{\alpha-1}\rho \times \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{\alpha-2}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$, iz čega slijedi da je zajednički ireducibilni temperirani subkvocijent od $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$ i $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$, prema Teoremu 1.6.5 (ii), izomorfan s $\tau_{2,-}^{(\alpha-1)}$. Time zaključujemo $\tau_{5,-} \hookrightarrow \delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{2,-}^{(\alpha-1)} \hookrightarrow \delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$.

Sada preostaje primijetiti da se $\tau_{5,-}$ ne ulaže u $\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_c$. U suprotnom $\mu^*(\tau_{5,-})$ sadrži konstituent oblika $\nu^{b+1}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$ pa ga sadrži i $\mu^*(\sigma_0)$ jer $\nu^{b+1}\rho \notin [\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]$. Prema Lemi 3.2.5 to nije moguće pa vrijedi $\tau_{5,-} \hookrightarrow \pi_S \rtimes \sigma_c$. ■

Neka je $-a = b$. Reprezentacija π_S je izomorfna s

$$L(\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha}\rho]), \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha+1}\rho])).$$

Kandidati za ireducibilne temperirane subkvocijente su temperirane podreprezentacije od

$$\rho \rtimes \tau_{2,-}^{(1)}\text{ , za } \alpha = 1 \text{ ili } \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(\alpha)}\text{ , za } \alpha \geq \frac{3}{2}.$$

Kako se reprezentacije $\tau_{2,\pm}^{(\alpha)}$ ulažu u $\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha}\rho]) \rtimes \sigma_{(\alpha+1)}$, parametrizacija temperiranog kandidata za subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ je određena time ulaže li se u

$$\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha}\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(\alpha-1)} \text{ ili } \delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha}\rho]) \rtimes \tau_{2,-}^{(\alpha-1)}.$$

Neka se za $\alpha = 1$ ulaže u $\delta([\nu^{-1}\rho, \nu\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(0)}$, a za $\alpha \geq \frac{3}{2}$ u $\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha}\rho]) \rtimes \tau_{2,-}^{(\alpha-1)}$. Označimo ih τ_4, za $\alpha = 1$, i τ_5, za $\alpha \geq \frac{3}{2}$.

Propozicija 3.3.3. Neka je $-a = b = \alpha \geq 1$. Tada inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_c$ sadrži jedinstveni ireducibilni temperirani subkvocijent koji se ulaže u $\pi_S \rtimes \sigma_c$ te je za $\alpha = 1$ izomorfan s τ_4, a za $\alpha \geq \frac{3}{2}$ s τ_5.

Dokaz. Neka je τ reprezentacija iz skupa $\{\tau_4, \tau_5\}$. Pokazat ćemo da se τ ulaže u $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Prvo uočimo da se reprezentacija $\tau_{2,+}^{(0)}$, za $\alpha = 1$, i $\tau_{2,-}^{(\alpha-1)}$, za $\alpha \geq \frac{3}{2}$, ulaže u $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Naime, prema Teoremu 1.6.5 (ii) ta inducirana reprezentacija ima zajednički temperirani subkvocijent s reprezentacijom $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_{(\alpha+1)}$. Za $\alpha = 1$ reprezentacija $\tau_{2,+}^{(0)}$ je parametrizirana ulaganjem u $\delta([\nu\rho, \nu^2\rho]) \times \rho \rtimes \sigma_c$. Kako vrijedi $\delta([\rho, \nu^2\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow \delta([\nu\rho, \nu^2\rho]) \times \rho \rtimes \sigma_c$, temperirana podreprezentacija od $\delta([\rho, \nu^2\rho]) \rtimes \sigma_c$ je izomorfna s $\tau_{2,+}^{(0)}$. Za $\alpha \geq \frac{3}{2}$ smo ranije vidjeli da vrijedi ulaganje $\tau_{2,-}^{(\alpha-1)} \hookrightarrow \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Končano,

$$\tau \hookrightarrow \delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha}\rho]) \times \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$$

pa se τ ulaže u $\pi_S \rtimes \sigma_c$ ili $\Pi = \delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha+1}\rho]) \times \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Pretpostavimo da se ulaže u Π. Konstituenti oblika $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \otimes \pi'$ za $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$ Jacqueteovog modula od Π obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu su sadržani u

$$\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \otimes \delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha+1}\rho]) \times \nu^{\alpha}\rho \rtimes \sigma_c.$$

Po definiciji od τ je $\tau_{2,-}^{(1)}$, za $\alpha = 1$, i $\tau_{2,+}^{(\alpha)}$, za $\alpha \geq \frac{3}{2}$, subkvocijent od $\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha+1}\rho]) \times \nu^{\alpha}\rho \rtimes \sigma_c$. Pokazat ćemo da to nije moguće. U $R(G)$ vrijedi

$$\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha}\rho]) \times \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{\alpha+1}\rho]) \rtimes \sigma_c = \tag{3.16}$$

$$L(\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha}\rho]), \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{\alpha+1}\rho])) \rtimes \sigma_c + \delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha+1}\rho]) \times \nu^{\alpha}\rho \rtimes \sigma_c. \tag{3.17}$$

Teorem 3.2.8 implicira da je $\tau_{2,-}^{(1)}$, za $\alpha = 1$, i $\tau_{2,+}^{(\alpha)}$, za $\alpha \geq \frac{3}{2}$, podreprezentacija od

$$L(\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{\alpha}\rho]), \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{\alpha+1}\rho])) \rtimes \sigma_c.$$

Dodatno, reprezentacija $\tau_{2,-}^{(1)}$, za $\alpha = 1$, i $\tau_{2,+}^{(\alpha)}$, za $\alpha \geq \frac{3}{2}$, je podreprezentacija od (3.16) kratnosti jedan. Zbog Frobeniusovog reciprociteta vidimo da podreprezentacija drugog sumanda sadrži u Jacqueteovom modulu reprezentaciju oblika $\nu^{\alpha+1}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$, što ne vrijedi za prvi sumand. Time sumandi u (3.17) nemaju zajedničku podreprezentaciju pa dobivamo kontradikciju s pretpostavkom i zaključujemo da se τ ulaže u $\pi_S \rtimes \sigma_c$. ∎

Preostaje analizirati subkvocijente oblika $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes \pi$ za neki $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$. Konstituente od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ koji ih sadrže dobivamo za $\big((a-1,b),(-a-1,b+1)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$:

$$\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{-a-1}\rho]), \nu^{b+1}\rho) \rtimes \sigma_c$$

te za $\big((a-1,a),(a-1,b+1)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$ ako je $-a = b$:

$$\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c. \tag{3.18}$$

Prvo ćemo pokazati da za $-a < b$ ne postoji temperirani subkvocijent reprezentacije

$$L(\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{-a-1}\rho]), \nu^{b+1}\rho) \rtimes \sigma_c \tag{3.19}$$

koja je u ovom slučaju izomorfna s $\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \times \nu^{b+1}\rho \rtimes \sigma_c$.

Lema 3.3.4. Reprezentacija $\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \times \nu^{b+1}\rho \rtimes \sigma_c$ ne sadrži temperirani subkvocijent za $-a < b$.

Dokaz. Pretpostavimo da je τ temperirani subkvocijent reprezentacije (3.19). Prema formuli (1.3), τ se nužno ulaže u $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \tau'$ za temperiranu reprezentaciju $\tau' \in \mathrm{Irr}(G)$ koja je subkvocijent od $\nu^{a}\rho \times \nu^{b+1}\rho \rtimes \sigma_c$. Kako je $1 \leq -a \leq b-1$, inducirana reprezentacija $\nu^{a}\rho \times \nu^{b+1}\rho \rtimes \sigma_c$ ne sadrži temperirani subkvocijent. Dakle, za $-a < b$ ne postoji temperirani subkvocijent reprezentacije (3.19). ∎

Za $-a = b$ određujemo ireducibilne temperirane subkvocijente reprezentacije

$$L(\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b-1}\rho]), \nu^{b+1}\rho) \rtimes \sigma_c.$$

Kako u $R(G)$ vrijedi

$$\begin{aligned} L(\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b-1}\rho]), \nu^{b+1}\rho) \rtimes \sigma_c &\simeq \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b-1}\rho]) \times \nu^{b+1}\rho \rtimes \sigma_c \\ \simeq \nu^{b+1}\rho \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b-1}\rho]) \rtimes \sigma_c &= \nu^{b+1}\rho \times \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_c \\ = \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c &+ L(\delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b}\rho]), \nu^{b+1}\rho) \rtimes \sigma_c, \end{aligned}$$

vidimo da za $b \geq 1$ Teoremi 1.6.3, 1.6.5 i 3.2.8 određuju temperirane subkvocijente od (3.19). Za $b = 0$ sadrži temperirani subkvocijent ako i samo ako je $\alpha = 1$. U tom slučaju se radi o strogo pozitivnoj reprezentaciji koja je podreprezentacija od $\nu\rho \rtimes \sigma_c$, to jest $\sigma_{(1)}$. Uočimo da je $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{(1)}) = \{3\}$ pa su temperirane podreprezentacije $\tau_{2,\pm}^{(0)}$ od $\rho \rtimes \sigma_{(1)}$ kandidati za subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Po Teoremu 1.5.2 (ii) parametriziramo reprezentacije $\tau_{2,\pm}^{(0)}$ tako da vrijedi ulaganje $\tau_{2,+}^{(0)} \hookrightarrow \nu\rho \times \rho \rtimes \sigma_c$.

Propozicija 3.3.5. Neka je $-a = b = 0$. Inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_c$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent ako i samo ako je $\alpha = 1$. U tom slučaju je jedinstven, ulaže se u $\pi_S \rtimes \sigma_c$ te je izomorfan s $\tau_{2,-}^{(0)}$.

Dokaz. Kako je $\tau_{2,-}^{(0)}$ podreprezentacija od $\rho \times \nu\rho \rtimes \sigma_c$, slijedi da je sadržana u $\delta([\rho, \nu\rho]) \rtimes \sigma_c$ ili $L(\rho, \nu\rho) \rtimes \sigma_c \simeq \pi_S \rtimes \sigma_c$. Ako vrijedi $\tau_{2,-}^{(0)} \hookrightarrow \delta([\rho, \nu\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow \nu\rho \times \rho \rtimes \sigma_c$, onda dobivamo kontradikciju s parametrizacijom od $\tau_{2,\pm}^{(0)}$. Dakle, $\tau_{2,-}^{(0)}$ je podreprezentacija od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Formula (1.3) pokazuje da $\mu^*(L(\rho, \nu\rho) \rtimes \sigma_c)$ ne sadrži konstituent oblika $\nu\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Po Frobeniusovom reciprocitetu ga $\mu^*(\tau_{2,+}^{(0)})$ sadrži pa $\tau_{2,+}^{(0)}$ nije subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. ■

Za $b = \frac{1}{2}$ sadrži temperirani subkvocijent ako i samo ako je α jednak $\frac{1}{2}$ ili $\frac{3}{2}$. Za $\alpha = \frac{1}{2}$ se radi o $\sigma_{(\frac{3}{2})}$, dok za $\alpha = \frac{3}{2}$ o $\sigma_{(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})}$. Reprezentacija π_S je izomorfna s

$$L(\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]), \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho])).$$

Za $\alpha = \frac{1}{2}$ je $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{(\frac{3}{2})}) = \{4\}$ i temperirane podreprezentacije $\tau_{2,\pm}^{(\frac{1}{2})}$ od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_{(\frac{3}{2})}$ su kandidati za subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Po Teoremu 1.5.2 (ii) parametriziramo reprezentacije $\tau_{2,\pm}^{(\frac{1}{2})}$ tako da vrijedi $\tau_{2,+}^{(\frac{1}{2})} \hookrightarrow \nu^{\frac{1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{1}{2}}\rho \rtimes \sigma_{(\frac{3}{2})}$.

Propozicija 3.3.6. Neka je $-a = b = \frac{1}{2}$. Inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_c$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent ako i samo ako je $\alpha = \frac{1}{2}$. U tom slučaju je jedinstven, ulaže se u $\pi_S \rtimes \sigma_c$ te je izomorfan s $\tau_{2,-}^{(\frac{1}{2})}$.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da za $\alpha = \frac{1}{2}$ dobivamo temperirani subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Kako su $\tau_{2,\pm}^{(\frac{1}{2})}$ također podreprezentacije od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]) \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_c,$$

zaključujemo da se svaka od njih ulaže u $\pi_S \rtimes \sigma_c$ ili $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \times \nu^{\frac{1}{2}}\rho \rtimes \sigma_c$. Kako su svi konstituenti od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ oblika $\nu^{\frac{1}{2}}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$ sadržani u

$$\nu^{\frac{1}{2}}\rho \otimes L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

i $\mu^*(L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho])) \rtimes \sigma_c)$ ne sadrži konstituente tog oblika, zaključujemo da je

$$\tau_{2,+}^{(\frac{1}{2})} \hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \times \nu^{\frac{1}{2}}\rho \rtimes \sigma_c.$$

Sada Lema 3.1.2 implicira da se $\tau_{2,+}^{(\frac{1}{2})}$ ulaže u $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \rtimes L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho; \sigma_c)$ ili $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_{(\frac{1}{2})}$. Jer je $\tau_{2,+}^{(\frac{1}{2})}$ temperirana, po Casselmanovom kriteriju se ne ulaže u

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \rtimes L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho; \sigma_c) \hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\rho \rtimes \sigma_c \simeq \nu^{-\frac{1}{2}}\rho \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_c.$$

Dakle, $\tau_{2,+}^{(\frac{1}{2})} \hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_{(\frac{1}{2})}$. Prema Teoremu 1.6.5 (ii) slijedi da reprezentacija $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_{(\frac{1}{2})}$ sadrži jedinstvenu ireducibilnu temperiranu reprezentaciju pa je nužno $\tau_{2,-}^{(\frac{1}{2})} \hookrightarrow \pi_S \rtimes \sigma_c$. Po Frobeniusovom reciprocitetu slijedi da $\mu^*(\tau_{2,+}^{(\frac{1}{2})})$ sadrži konstituent oblika $\nu^{\frac{3}{2}}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Po formuli (1.3) isto ne vrijedi za $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ pa $\tau_{2,+}^{(\frac{1}{2})}$ nije subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. S druge strane, za $\alpha = \frac{3}{2}$ pokazujemo da ireducibilna temperirana reprezentacija

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})}$$

nije subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Naime, zbog ulaganja reprezentacije $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})}$ u

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]) \times \nu^{\frac{1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{3}{2}}\rho \rtimes \sigma_c \simeq \nu^{\frac{1}{2}}\rho \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]) \times \nu^{\frac{3}{2}}\rho \rtimes \sigma_c$$

vidimo da se $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})}$ ulaže u $\nu^{\frac{1}{2}}\rho \times L(\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]), \nu^{\frac{3}{2}}\rho) \rtimes \sigma_c$ ili $\nu^{\frac{1}{2}}\rho \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Posljednje nije moguće jer se temperirana reprezentacija po Casselmanovom kriteriju ne ulaže u

$$\nu^{\frac{1}{2}}\rho \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_c \simeq \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \times \nu^{\frac{1}{2}}\rho \rtimes \sigma_c \simeq$$
$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\rho \rtimes \sigma_c \simeq \nu^{-\frac{1}{2}}\rho \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_c.$$

Dakle, $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})} \hookrightarrow \nu^{\frac{1}{2}}\rho \times L(\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]), \nu^{\frac{3}{2}}\rho) \rtimes \sigma_c$ pa Frobeniusov reciprocitet implicira da je $\nu^{\frac{1}{2}}\rho \otimes L(\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]), \nu^{\frac{3}{2}}\rho) \otimes \sigma_c$ subkvocijent Jacqueteovog modula od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})}$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Ako pretpostavimo $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})} \leq \pi_S \rtimes \sigma_c$, onda je nužno $L(\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]), \nu^{\frac{3}{2}}\rho) \otimes \sigma_c$ subkvocijent od $\mu^*(L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho])) \rtimes \sigma_c)$. Prema formuli (1.3), konstituenti oblika $\pi' \otimes \sigma_c$ za $\pi' \in R(G)$ od $\mu^*(L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho])) \rtimes \sigma_c)$ za koje vrijedi $[\pi'] = \{\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho\}$ imaju π' izomorfnu s $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]))$ ili $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho) \times \nu^{\frac{3}{2}}\rho$. Sa π_0 označimo reprezentaciju $L(\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho]), \nu^{\frac{3}{2}}\rho)$. Očito, $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{3}{2}}\rho]))$ nije izomorfna s π_0. Nadalje, π_0 nije subkvocijent od $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho) \times \nu^{\frac{3}{2}}\rho$ jer je reprezentacija oblika $\nu^{\frac{1}{2}}\rho \otimes \pi''$ za neki $\pi'' \in \mathrm{Irr}(G)$ subkvocijent od $m^*(\pi_0)$, ali ne i od $m^*(L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{\frac{1}{2}}\rho) \times \nu^{\frac{3}{2}}\rho)$. ■

Opišimo detaljnije temperirane subkvocijente u slučaju $b \geq 1$. Pri analizi reprezentacije $\delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ razlikujemo slučajeve kada je skup $[2(b-1)+1, 2(b+1)+1] \cap \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c)$ prazan i kada je neprazan. Time po Teoremu 1.6.3 za $b-1 \geq \alpha$ sadrži dvije diskretne serije σ_3, σ_4 dobivene po klasifikaciji. Pretpostavimo da je presjek neprazan. Jer su elementi skupa $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c)$ uzastopni prirodni brojevi iste parnosti slijedi da je $2(b-1)+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c)$. Prema Teoremu 1.6.5 (i) slijedi da za $2(b+1)+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c)$ reprezentacija $\delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ nema temperiranih subkvocijenata. Time Teorem 1.6.5 (ii) rješava jedini preostali slučaj i zaključujemo da pod tim pretpostavkama $\delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ sadrži temperirani subkvocijent ako i samo ako je $b = \alpha$. Radi se o zajedničkom temperiranom subkvocijentu s $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_{(\alpha+1)} \simeq \tau_{2,+}^{(\alpha-1)} \oplus \tau_{2,-}^{(\alpha-1)}$. Kao što smo vidjeli u dokazu Propozicije 3.3.2, za $\alpha = 1$ je $\tau_{2,+}^{(0)}$, a za $\alpha \geq \frac{3}{2}$ je $\tau_{2,-}^{(\alpha-1)}$ zajednički temperirani subkvocijent. Uočimo da smo time opisali kandidate dobivene od (3.18).

S druge strane, po Teoremu 3.2.8 reprezentacija $L(\delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b}\rho]), \nu^{b+1}\rho) \rtimes \sigma_c$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent ako i samo ako je $b = \alpha - 1$. Konkretno vidimo da je za $\alpha = 2$ izomorfan $\tau_{1,+}^{(0)}$, a za $\alpha \geq \frac{5}{2}$ $\tau_{1,-}^{(\alpha-2)}$. Ukupno za $b \geq 1$ imamo sljedeće kandidate:

- $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \tau_{1,+}^{(0)}$, za $b = \alpha - 1 = 1$
- $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \tau_{1,-}^{(\alpha-2)}$, za $b = \alpha - 1 \geq \frac{3}{2}$,
- $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(0)}$, za $b = \alpha = 1$
- $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \tau_{2,-}^{(\alpha-1)}$, za $b = \alpha \geq \frac{3}{2}$,
- $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_3$ i $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_4$, za $b \geq \alpha + 1$.

Za $b \geq \alpha + 1$ definiramo temperirane reprezentacije

$$\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_i = \tau_{i,+} \oplus \tau_{i,-}$$

za $i = 3,4$. Kako je $2(b-1)+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_i) \cap [1, 2b+1]$, ispunjeni su uvjeti Teorema 1.5.2 (i). Prema tome, $\tau_{i,+}$ je jedinstvena ireducibilna temperirana podreprezentacija od $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_i$ koja se ulaže u

$$\nu^b\rho \times \nu^b\rho \times \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b-1}\rho]) \rtimes \sigma_i.$$

Ekvivalentno, $\tau_{i,+}$ se ulaže u $\nu^b\rho \times \nu^b\rho \rtimes \lambda_i$ za neku $\lambda_i \in \mathrm{Irr}(G)$.

Propozicija 3.3.7. Neka je $-a = b \geq 1$. Inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_c$ sadrži temperirani subkvocijent koji nije diskretna serija ako i samo ako $b \geq \alpha$. Ako je $b = \alpha$, onda je jedinstveni ireducibilni temperirani subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ izomorfan s τ_4, a za $\alpha \geq \frac{3}{2}$ s τ_5. Ako je $b \geq \alpha + 1$, onda su ireducibilni temperirani subkvocijenti od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ izomorfni s $\tau_{3,-}$ i $\tau_{4,-}$. U svakom slučaju su temperirani subkvocijenti podreprezentacije od $\pi_S \rtimes \sigma_c$.

Dokaz. Prema opisu kandidata, vidimo da je potrebno analizirati kandidate za $b = \alpha - 1$, $b = \alpha$ i $b \geq \alpha + 1$.

Ako je $b = \alpha - 1$, onda su ireducibilni temperirani kandidati τ podreprezentacije inducirane reprezentacije oblika $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{\alpha-2}\rho]) \rtimes \tau'$ za temperirani $\tau' \in \mathrm{Irr}(G)$. Jer je $-a-1 = \alpha - 2$, prema ranijoj analizi zaključujemo da ako je τ subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$, onda je reprezentacija τ' nužno subkvocijent inducirane reprezentacije (3.15). No to nije moguće jer reprezentacija (3.15) sadrži temperirani subkvocijent ako i samo ako je $-a = \alpha$. Dakle, ovi kandidati ne daju subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$.

Ako je $b = \alpha$, kandidati za subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ su temperirane podreprezentacije od $\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^\alpha\rho]) \rtimes \tau_{2,+}^{(0)}$, za $\alpha = 1$ ili $\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^\alpha\rho]) \rtimes \tau_{2,-}^{(\alpha-1)}$, za $\alpha \geq \frac{3}{2}$. Uočimo da su time τ_4 i τ_5, definirane kao ranije, njihove jedine podreprezentacije koje su subkvocijenti od $\pi_S \rtimes \sigma_c$, kao što je pokazano u Propoziciji 3.3.3.

Pogledajmo sada slučaj $b \geq \alpha + 1$. Jer je $\sigma_i \hookrightarrow \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$, dobivamo

$$\tau_{i,\pm} \hookrightarrow \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$$

za $i = 3,4$. Tada prema Lemi 3.1.2 reprezentacija $\tau \in \{\tau_{3,\pm}, \tau_{4,\pm}\}$ se ulaže u $\pi_S \rtimes \sigma_c$ ili u $\delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Sljedeći operatori ispreplitanja i parametrizacija temperiranih reprezentacija $\tau_{i,\pm}$ za $i = 3,4$ pokazuju da su $\tau_{3,-}$ i $\tau_{4,-}$ podreprezentacije od

$\pi_S \rtimes \sigma_c$:

$$\begin{gathered}
\delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow \\
\delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \nu^{-b}\rho \rtimes \sigma_c \simeq \\
\delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \nu^{b}\rho \rtimes \sigma_c \simeq \\
\nu^b\rho \times \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow \\
\nu^b\rho \times \nu^b\rho \times \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b-1}\rho]) \times \delta([\nu^{-(b-1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c,
\end{gathered} \tag{3.20}$$

gdje izomorfizam (3.20) vrijedi jer je $b \geq \alpha + 1$. Kako se reprezentacija oblika $\nu^b\rho \otimes \nu^b\rho \otimes \pi'$ za $\pi' \in R(G)$ ne nalazi u Jacqueteovom modulu od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu, zaključujemo da $\tau_{i,+}$ za $i = 3, 4$ nisu podreprezentacije od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. ■

Subkvocijenti od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ u diskretnim serijama

Neka je $-a \in \{0, \frac{1}{2}\}$. Pretpostavimo da reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_c$ sadrži diskretnu seriju σ. Brojeći kratnosti od ρ ili $\nu^{\frac{1}{2}}\rho$ u kuspidalnom nosaču od π_S, zaključujemo da se prema klasifikaciji diskretnih serija σ ulaže u $\delta([\nu^{-x_1}\rho, \nu^{y_1}\rho]) \rtimes \sigma_{sp}$, gdje je σ_{sp} strogo pozitivna diskretna serija i vrijedi $0 \leq x_1 < y_1$. Time je $\nu^{y_1}\rho \otimes \pi'$, $y_1 > 0$, konstituent od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ pa formula (1.6) implicira $y_1 = b$. Jer je $b+1$ maksimalan eksponent u $[\pi_S]$, zaključujemo $[\nu^\alpha\rho, \nu^{b+1}\rho] \subseteq [\sigma_{sp}]$. Kako je po pretpostavci $\delta([\nu^{-x_1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \sigma_{sp}$ konstituent od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$, nužno je subkvocijent od

- $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-1}\rho]) \times \delta([\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$, ako je $a = 0$,
- $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho]) \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \nu^{-\frac{1}{2}}\rho \times \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$, ako je $-a = \frac{1}{2}$ i $\alpha \geq \frac{3}{2}$,
- $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$, ako je $-a = \frac{1}{2}$ i $\alpha = \frac{1}{2}$.

Time je $x_1 = \alpha - 1$. Ako je $a = 0$ i $\alpha \geq 2$, onda vrijedi $\{2(\alpha-2)+1, 2(\alpha-1)+1, 2b+1, 2(b+1)+1\} \subseteq \mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$ i vrijednosti ε_σ funkcije $\varepsilon_\sigma((2(\alpha-2)+1, \rho), (2(b+1)+1, \rho)) = -1$, $\varepsilon_\sigma((2(\alpha-1)+1, \rho), (2b+1, \rho)) = 1$ i $\varepsilon_\sigma((2b+1, \rho), (2(b+1)+1, \rho)) = -1$ impliciraju $\varepsilon_\sigma((2(\alpha-2)+1, \rho), (2(\alpha-1)+1, \rho)) = 1$. Time je $\nu^{\alpha-1}\rho \otimes \pi'$ konstituent od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ pa je $\alpha - 1 = b$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $\alpha - 1 < b$. Dakle, $\alpha = 1$. U slučaju $-a = \frac{1}{2}$, reprezentacija $\nu^{-\frac{1}{2}}\rho \times \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ sadrži strogo pozitivnu diskretnu seriju ako i samo je $\alpha = \frac{3}{2}$. No tada se 2 nalazi u $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$ sa kratnosti dva, što nije moguće. Dakle, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Za $a = 0$ i $\alpha = 1$ se kandidat za diskretnu seriju ulaže u $\delta([\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$. Prema Teoremu 1.6.3 postoje dvije takve reprezentacije. Označimo ih σ_5 i σ_5'. Jasno, $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_5) = \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_5') = \{1, 2b+1, 2(b+1)+1\}$. Parcijalni kuspidalni nosač je σ_c, a epsilon funkciju definiramo za diskretnu seriju σ_5

$$\varepsilon_{\sigma_5}((1,\rho),(2b+1,\rho)) = 1,\ \varepsilon_{\sigma_5}((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = -1$$

i za diskretnu seriju σ_5'

$$\varepsilon_{\sigma_5'}((1,\rho),(2b+1,\rho)) = 1,\ \varepsilon_{\sigma_5'}((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = 1.$$

Propozicija 3.3.8. Neka je $a = 0$ i $\alpha = 1$. Tada inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_c$ sadrži jedinstveni ireducibilni temperirani subkvocijent koji se ulaže u $\pi_S \rtimes \sigma_c$ te je izomorfan sa σ_5.

Dokaz. Za diskretnu seriju σ_5' vrijedi $\varepsilon_{\sigma_5'}((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = 1$ zbog čega se ulaže u $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ pa $\mu^*(\sigma_5')$ sadrži konstituent oblika $\nu^{b+1}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Kako isto ne vrijedi za $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$, zaključujemo da σ_5' nije subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Pokažimo da se σ_5 ulaže u $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Iz ulaganja

$$\begin{aligned}\sigma_5 \hookrightarrow \delta([\rho, \nu^b\rho]) \times \sigma_{(b+1)} &\hookrightarrow \delta([\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c = \\ &\pi_S \rtimes \sigma_c + \delta([\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c \end{aligned} \tag{3.21}$$

i Leme 3.1.2 zaključujemo da se σ_5 ulaže u jednu reprezentaciju iz sume (3.21). Kako po Lemi 3.2.5 $\mu^*(\sigma_5)$ ne sadrži konstituent oblika $\nu^{b+1}\rho \otimes \pi'$ za $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$, zaključujemo da se nužno ulaže u $\pi_S \rtimes \sigma_c$. ■

Za $a = -\frac{1}{2}$ i $\alpha = \frac{1}{2}$ se kandidati u diskretnim serijama ulažu u $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_{(b+1)}$. Pod ovim uvjetima vrijedi

$$\pi_S \simeq L(\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b+1}\rho])).$$

Označimo diskretne serije sa σ_6 i σ_6'. Definiramo ih dopustivim trojkama tako da je $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_6) = \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_6') = \{2, 2b+1, 2(b+1)+1\}$, parcijalni kuspidalni nosač je σ_c, a za epsilon funkciju diskretne serije σ_6 vrijedi

$$\varepsilon_{\sigma_6}(2,\rho) = -1,\ \varepsilon_{\sigma_6}((2,\rho),(2b+1,\rho)) = 1,\ \varepsilon_{\sigma_6}((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = -1$$

i za diskretnu seriju σ_6'

$$\varepsilon_{\sigma_6'}(2,\rho) = 1,\ \varepsilon_{\sigma_6'}((2,\rho),(2b+1,\rho)) = 1,\ \varepsilon_{\sigma_6'}((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = 1.$$

Dokaz sljedeće propozicije ide analogno kao dokaz Propozicije 3.3.8.

Propozicija 3.3.9. Neka je $a = -\frac{1}{2}$ i $\alpha = \frac{1}{2}$. Tada inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_c$ sadrži jedinstveni ireducibilni temperirani subkvocijent koji se ulaže u $\pi_S \rtimes \sigma_c$ te je izomorfan sa σ_6.

Neka je u nastavku potpoglavlja $a+1 \leq 0$. Koristeći klasifikaciju diskretnih serija u $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ tražimo konstituente oblika $\delta([\nu^{-z}\rho, \nu^{y}\rho]) \otimes \sigma$ za diskretnu seriju $\sigma \in R(G)$ i $0 \leq z < y$. Iz (1.3) vidimo da je nužno $y \in \{-a-1, -a, b, b+1\}$. Analogno kao kod analize temperiranih kandidata koji nisu diskretne serije vidimo da za $y = b+1$ i $y = -a$ za $-a < b$ ne dobivamo kandidate za diskretne serije. Za $y = -a-1$ od $\big((a-1, c_2), (b, b+1)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$ dobivamo konstituent jednak

$$\delta([\nu^{-c_2}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c.$$

Time zahtijevamo $0 \leq c_2 < -a-1$. U oznakama Teorema 3.2.8 imamo $x = c_2$. Dodatno, pod tim uvjetima Teorem 3.2.8 implicira da $L(\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$ sadrži diskretnu seriju ako i samo ako $x = \alpha - 1 \leq -a < b$. Dakle, ako je $\alpha - 1 < -a-1$, onda su diskretne serije u

$$\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \sigma_0$$

kandidati za subkvocijente od $\pi \rtimes \sigma_c$. Kako je $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_0) \cap [2(\alpha-1)+1, 2(-a-1)+1] = \emptyset$, po Teoremu 1.6.3 zaključujemo da su kandidati dvije diskretne serije dobivene po klasifikaciji. One su okarakterizirane proširenjem ε funkcije od σ_0 tako da vrijedi

$$\varepsilon((2(\alpha-1)+1, \rho), (2(-a-1)+1, \rho)) = 1,$$
$$\varepsilon((2(\alpha-2)+1, \rho), (2(\alpha-1)+1, \rho)) \cdot \varepsilon((2(-a-1)+1, \rho), (2(-a)+1, \rho)) = 1.$$

Ako je $\varepsilon((2(-a-1)+1, \rho), (2(-a)+1, \rho)) = 1$, onda se diskretna serija ulaže u reprezentaciju $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma'$ za diskretnu seriju σ'. Time sadrži reprezentaciju oblika $\nu^{-a}\rho \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$ u Jacqueteovom modulu obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Vidjeli smo da isto ne vrijedi za Jacqueteove module od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ pa kao jedini kandidat preostaje diskretna serija za koju vrijedi

$$\varepsilon((2(\alpha-2)+1, \rho), (2(\alpha-1)+1, \rho)) = \varepsilon((2(-a-1)+1, \rho), (2(-a)+1, \rho)) = -1.$$

Uočimo da se po definiciji ova diskretna serija ulaže u $\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{b}\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$.

Time preostaje ispitati kandidate u slučaju $y = b$. Dobivamo ih od

$$\delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{d_1}\rho]), \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c \tag{3.22}$$

za $\big((a-1,a),(d_1,b+1)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$ i

$$\delta([\nu^{-c_2}\rho,\nu^b\rho]) \otimes L(\delta([\nu^a\rho,\nu^{-a-1}\rho]),\delta([\nu^{c_2+1}\rho,\nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c \tag{3.23}$$

za $\big((a-1,c_2),(-a-1,b+1)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$. Vrijedi $a-1 \leq d_1 \leq -1$ i $0 \leq c_2 \leq b-1$.

Lema 3.3.10. Neka je σ diskretna serija u $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Tada vrijedi

$$\sigma \hookrightarrow \delta([\nu^a\rho,\nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho,\nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c.$$

Dokaz. Prebrojavanjem kratnosti od ρ ili $\nu^{\frac{1}{2}}\rho$ u kuspidalnom nosaču od π_S po klasifikaciji diskretnih serija zaključujemo da se σ ulaže u induciranu reprezentaciju oblika $\delta([\nu^{-x_1}\rho,\nu^{y_1}\rho]) \times \delta([\nu^{-x_2}\rho,\nu^{y_2}\rho]) \rtimes \sigma_{sp}$, gdje je σ_{sp} strogo pozitivna diskretna serija, vrijedi $0 \leq x_i < y_i$ za $i=1,2$ i možemo pretpostaviti $y_1 < y_2$. Time je $\nu^{y_1}\rho \otimes \pi'$ konstituent od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ pa je $y_1 = -a-1$ ili $y_1 = b$. Slučaj $y_1 = -a-1$ smo izanalizirali prije leme. Dakle, $y_1 = b$ te $y_2 = b+1$ jer je $b+1$ maksimalan eksponent u $[\pi_S]$. U nastavku redom analiziramo kandidate dobivene pomoću konstituenata (3.22) i (3.23) od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$. Označimo $-z = d_1+1$. Tada je reprezentacija (3.22) jednaka

$$\delta([\nu^{-z}\rho,\nu^b\rho]) \otimes L(\delta([\nu^a\rho,\nu^{-z-1}\rho]),\delta([\nu^{a+1}\rho,\nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c \tag{3.24}$$

za $0 \leq z \leq -a$. Za $z=-a$ dobivamo $\delta([\nu^a\rho,\nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^{a+1}\rho,\nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Iz opisa subkvocijenata od $\delta([\nu^{a+1}\rho,\nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ koji su diskretne serije vidimo da su ujedno i podreprezentacije pa slijedi tvrdnja leme.

Neka je σ' diskretna serija koja se ulaže u $\delta([\nu^{-x_2}\rho,\nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_{sp}$ tako da vrijedi $\sigma \hookrightarrow \delta([\nu^{-x_1}\rho,\nu^b\rho]) \rtimes \sigma'$. Pretpostavimo da je σ' subkvocijent od

$$L(\delta([\nu^a\rho,\nu^{-z-1}\rho]),\delta([\nu^{a+1}\rho,\nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c \tag{3.25}$$

za $0 \leq z \leq -a-1$. Ako je $z=-a-1$, reprezentacija (3.24) je izomorfna s

$$\delta([\nu^{a+1}\rho,\nu^b\rho]) \otimes L(\nu^a\rho,\delta([\nu^{a+1}\rho,\nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c.$$

Neka je $\pi_1 \otimes \pi_2$ konstituent od $\mu^*(L(\nu^a\rho,\delta([\nu^{a+1}\rho,\nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c)$ takav da je $\delta([\nu^{-x_2}\rho,\nu^{b+1}\rho])$ subkvocijent od π_1. Po Lemi 1.3.13 slijedi da π_1 nije izomorfna s reprezentacijom oblika $L(\delta([\nu^{-c_2}\rho,\nu^{-a-1}\rho]),\nu^{-a}\rho) \times \pi_1'$ za neke $c_2 \in \mathbb{R}$ i $\pi_1' \in R(GL)$. Time vrijedi $-x_2 = a$ ili $\nu^{-a}\rho \in [\pi_2]$ pa je po Lemi 3.3.1 (i) $2(-a)+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{sp})$, no $(2b+1)_- = 2(-a-1)+1$ pa nije moguće $2(-a)+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$. Ako je $0 \leq z \leq -a-2$, kako $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ ne sadrži konstituent oblika $\nu^z\rho \otimes \pi'$ za $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$, prema Napomeni 1.5.3 slijedi $-x_2 = -z+1$. Ponovno, neka je $\pi_1 \otimes \pi_2$ konstituent od $\mu^*(L(\delta([\nu^a\rho, \nu^{-z-1}\rho]), \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c)$ takav da je $\delta([\nu^{-z+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])$ subkvocijent od π_1. Kako je $-z-1 \geq a+1$, zaključujemo da se $\nu^{-a-1}\rho$ pojavljuje u kuspidalnom nosaču reprezentacije (3.25) s kratnosti tri. S druge strane, $[\pi_1]$ je segment pa postoji $\nu^{-a-1}\rho$ u $[\pi_2]$. Time je maksimalni eksponent x u $[\pi_2]$ veći ili jednak $-a-1$ pa je po Lemi 3.3.1 (i) $2x+1 \in \mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$. Kako vrijedi $(2b+1)\_ = 2z+1$ i $z \leq -a-2$, zaključujemo da ni u ovom slučaju nema kandidata za diskretnu seriju σ.

Analizirajući kandidate za diskretne serije dobivene od (3.23) vidimo da se za $c_2 = -a$ ulažu u $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Za $c_2 \geq -a+1$ ne postoji konstituent $\pi_1 \otimes \pi_2$ od $\mu^*(L(\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c)$ takav da je $\delta([\nu^{-x_2}\rho, \nu^{b+1}\rho])$ subkvocijent od π_1. Ako je $0 \leq c_2 \leq -a-1$, tada se $\nu^{-a}\rho$ nalazi u kuspidalnom nosaču reprezentacije

$$L(\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

s kratnosti dva. Ponovno po Napomeni 1.5.3 vrijedi $-x_2 = -c_2+1 \geq a+2$ pa $\nu^{-a}\rho$ mora biti u $[\sigma_{sp}]$ i $-a$ je maksimalni eksponent u $[\sigma_{sp}]$. Ponovno prema Lemi 3.3.1 (i) vidimo da to nije moguće jer u $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$ vrijedi $(2b+1)\_ = 2c_2+1$. Time dovršavamo dokaz leme. ■

Ostaje uočiti da u slučaju $a+1 \leq 0$, prema Teoremima 1.6.3 i 1.6.5, inducirana reprezentacija $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ sadrži diskretnu seriju jedino u slučajevima

(i) $[2(-a-1)+1, 2(b+1)+1] \cap \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c) = \emptyset$,

(ii) $2(-a-1)+1, 2(b+1)+1 \notin \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c)$ i $[2(-a-1)+1, 2(b+1)+1] \cap \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c)$ je jednočlan skup.

Posljednje nije moguće jer su elementi od $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c)$ uzastopni brojevi iste parnosti, a minimalni je jednak 1 ili 2. U slučaju (i), koji je ekvivalentan s $-a \geq \alpha+1$, diskretne serije koje su subkvocijenti od $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ dobivamo po klasifikaciji. Označimo ih σ_3, σ_4. Definirane su dopustivim trojkama $(\mathrm{Jord}(\sigma_i), \sigma_c, \varepsilon_{\sigma_i})$ tako da

$$\mathrm{Jord}(\sigma_i) = \{(2(-a-1)+1, \rho), (2(b+1)+1, \rho)\} \cup \mathrm{Jord}(\sigma_c).$$

Epsilon funkciju definiramo tako da vrijedi $\varepsilon_{\sigma_i}((2(-a-1)+1, \rho), (2(b+1)+1, \rho)) = 1$ te za $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c) = \emptyset$ imamo $\varepsilon_{\sigma_3}(2(-a-1)+1, \rho) = \varepsilon_{\sigma_3}(2(b+1)+1, \rho) = 1$, $\varepsilon_{\sigma_4}(2(-a-1)+1, \rho) = \varepsilon_{\sigma_4}(2(b+1)+1, \rho) = -1$, a za $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c) \neq \emptyset$ definiramo $\varepsilon_{\sigma_i}((x\_, \rho), (x, \rho)) = -1$ za $x \in \mathrm{Jord}(\sigma_c)$ i $\varepsilon_{\sigma_3}((2(\alpha-1)+1, \rho), (2(-a-1)+1, \rho)) = 1$, $\varepsilon_{\sigma_4}((2(\alpha-1)+1, \rho), (2(-a-1)+1, \rho)) =$

-1. Dodatno, ako je skup $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c)$ neprazan i elementi su mu parni brojevi, onda je minimum od $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_i)$ jednak 2 te vrijedi $\varepsilon_{\sigma_i}(2,\rho) = \varepsilon_{\sigma_c}(2,\rho) = -1$. Klasifikacija diskretnih serija implicira da za $i = 3,4$ postoje dvije diskretne serije $\sigma_{i,\pm}$ koje se ulažu u $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_i$. Definirane su dopustivim trojkama $(\mathrm{Jord}(\sigma_{i,\pm}), \sigma_c, \varepsilon_{\sigma_{i,\pm}})$ tako da

$$\mathrm{Jord}(\sigma_{i,\pm}) = \{(2(-a)+1,\rho),(2b+1,\rho)\} \cup \mathrm{Jord}(\sigma_i),$$

a za epsilon funkcije vrijedi da su na $\mathrm{Jord}(\sigma_i)$ jednake ε_{σ_i}, $\varepsilon_{\sigma_{i,\pm}}((2(-a)+1,\rho),(2b+1,\rho)) = 1$ te $\varepsilon_{\sigma_{i,\pm}}((2(-a-1)+1,\rho),(2(-a)+1,\rho)) \cdot \varepsilon_{\sigma_{i,\pm}}((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = 1$. Diskretne serije $\sigma_{i,+}$ i $\sigma_{i,-}$ razlikujemo prema tome što za $\sigma_{i,+}$ definiramo

$$\varepsilon_{\sigma_{i,+}}((2(-a-1)+1,\rho),(2(-a)+1,\rho)) = \varepsilon_{\sigma_{i,+}}((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = 1,$$

a za $\sigma_{i,-}$ definiramo

$$\varepsilon_{\sigma_{i,-}}((2(-a-1)+1,\rho),(2(-a)+1,\rho)) = \varepsilon_{\sigma_{i,-}}((2b+1,\rho),(2(b+1)+1,\rho)) = -1.$$

Za $\sigma \in \{\sigma_{i,+}, \sigma_{i,-}\}$ postoji jedinstvena ireducibilna temperirana reprezentacija τ koja se ulaže u $\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_i$ tako da vrijedi $\sigma \hookrightarrow \delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau$. Dodatno, $\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_i \simeq \tau_{i,+} \oplus \tau_{i,-}$, gdje su temperirane reprezentacije parametrizirane po Teoremu 1.5.2 (i) jer je $2(-a-1)+1 \in [1, 2(-a)+1] \cap \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_i)$. Dakle, $\tau_{i,+}$ definiramo kao jedinu reprezentaciju iz skupa $\{\tau_{i,+}, \tau_{i,-}\}$ koja u Jacqueteovom modulu obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži $\nu^{-a}\rho \otimes \nu^{-a}\rho \otimes \lambda_i$ za $\lambda_i \in \mathrm{Irr}(G)$. Pokazat ćemo da vrijedi $\sigma_{i,+} \hookrightarrow \delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau_{i,+}$.

Lema 3.3.11. Jedinstvena ireducibilna temperirana reprezentacija τ takva da se $\sigma_{i,+}$ ulaže u $\delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau$ je izomorfna s $\tau_{i,+}$ za $i = 3,4$.

Dokaz. Prema definiciji od $\sigma_{i,+}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\sigma_{i,+} \hookrightarrow \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow \\
&\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{a}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{a-1}\rho]) \rtimes \sigma_c \simeq \qquad (3.26)\\
&\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{a}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow \\
&\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^{b}\rho]) \times \nu^a\rho \rtimes \sigma_c \simeq \qquad (3.27)\\
&\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^{b}\rho]) \times \nu^{-a}\rho \rtimes \sigma_c \simeq \\
&\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^{b}\rho]) \times \nu^{-a}\rho \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Ako je $\alpha \geq 1$, izomorfizmi (3.26) i (3.27) vrijede jer je $-a \geq \alpha + 1$ pa Propozicija 1.6.4 (ii) implicira da su reprezentacije $\delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$ i $\nu^{-a}\rho \rtimes \sigma_c$ ireducibilne. Ako je $\alpha \in \{0, \frac{1}{2}\}$, onda tvrdnja slijedi po Teoremu 1.6.1 (ii) ili činjenici da je α jedinstveni nenegativni realni broj takav da je reprezentacija $\nu^\alpha\rho \rtimes \sigma_c$ reducibilna. Uočimo da zbog ulaganja

$$\sigma_{i,+} \hookrightarrow \delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_i \hookrightarrow \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^b\rho]) \times \nu^a\rho \rtimes \sigma_i$$

i Frobeniusovog reciprociteta slijedi da $\mu^*(\sigma_{i,+})$ sadrži konstituent oblika $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Time je $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^b\rho]) \times \nu^{-a}\rho \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ subkvocijent reprezentacije (3.28) u koji se $\sigma_{i,+}$ ulaže. Naime, prema formuli (1.3) za svaki

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \leq \mu^*(L(\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]), \delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho])) \times \nu^{-a}\rho \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c)$$

vrijedi $\pi_1 \not\simeq \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^b\rho])$. Uočimo da $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^b\rho])$ sadrži $\nu^{-a-1}\rho$ i $\nu^{a+1}\rho$ u kuspidalnom nosaču sa kratnosti jedan. Time je nužno $\pi_1 \simeq L(\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]), \delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]))$ pa slijedi tvrdnja. Sada imamo

$$\sigma_{i,+} \hookrightarrow \delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \nu^{-a}\rho \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow$$
$$\delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \times \nu^{-a}\rho \times \nu^{-a}\rho \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$$

pa je reprezentacija oblika $\delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \nu^{-a}\rho \otimes \nu^{-a}\rho \otimes \pi'$ subkvocijent Jacqueteovog modula od $\sigma_{i,+}$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Po egzaktnosti Jacqueteovih modula je konstituent i Jacqueteovog modula reprezentacije $\delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau$ u koju se $\sigma_{i,+}$ ulaže. Time je $\nu^{-a}\rho \otimes \nu^{-a}\rho \otimes \pi''$ za neki $\pi'' \in \mathrm{Irr}(G)$ konstituent Jacqueteovog modula od τ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu pa zaključujemo $\tau \simeq \tau_{i,+}$. ■

Propozicija 3.3.12. Neka je $-a \geq \alpha + 1$. Tada su $\sigma_{3,-}$ i $\sigma_{4,-}$ jedine diskretne serije koje su subkvocijenti od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Dodatno, radi se o podreprezentacijama.

Dokaz. Zbog ulaganja $\sigma_{i,\pm} \hookrightarrow \delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ za $i = 3, 4$ vidimo da su $\sigma_{i,\pm}$ podreprezentacije od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ ili od $\delta([\nu^a\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$. Uočimo da sljedeći operatori ispreplitanja

$$\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^a\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow$$
$$\delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \nu^a\rho \rtimes \sigma_c \simeq$$
$$\delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \nu^{-a}\rho \rtimes \sigma_c \simeq$$
$$\delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \times \nu^{-a}\rho \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow$$
$$\delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \times \nu^{-a}\rho \times \nu^{-a}\rho \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$$

i Lema 3.3.11 impliciraju da $\sigma_{3,-}$ i $\sigma_{4,-}$ nisu podreprezentacije od

$$\delta([\nu^a\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c.$$

Time slijedi $\sigma_{i,-} \hookrightarrow \pi_S \rtimes \sigma_c$ za $i = 3,4$. Po definiciji reprezentacija $\sigma_{i,+}$ slijedi da $\mu^*(\sigma_{i,+})$ sadrži konstituent oblika $\nu^{b+1}\rho \otimes \pi'$ za $\pi' \in R(G)$ pa $\sigma_{i,+}$ nisu subkvocijenti od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. ■

Time smo dovršili analizu temperiranih subkvocijenata od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ za $-a \leq b$.

Teorem 3.3.13. Inducirana reprezentacija $L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$ za $0 \leq -a \leq b$ sadrži

(i) ireducibilni temperirani subkvocijent koji nije diskretna serija ako i samo ako $-a = b = \alpha - 1 = 0$ ili $-a = b = \alpha = \frac{1}{2}$ ili $-a = b \geq \alpha + 1$ ili $\alpha = -a \leq b$.

(ii) diskretnu seriju ako i samo ako $a = \alpha - 1 = 0 < b$ ili $-a = \alpha = \frac{1}{2} < b$ ili $b > -a \geq \alpha + 1$.

U tom slučaju ireducibilni temperirani subkvocijenti su podreprezentacije od $\pi_S \rtimes \sigma_c$.
Ako je $-a = b$, za $b = \alpha - 1 = 0$ je temperirani subkvocijent izomorfan s $\tau_{2,-}^{(0)}$, za $b = \alpha = \frac{1}{2}$ s $\tau_{2,-}^{(\frac{1}{2})}$, za $b = \alpha \geq 1$ s τ_4 za $\alpha = 1$ te s τ_5 za $\alpha \geq \frac{3}{2}$, a za $b \geq \alpha + 1$ su dva temperirana subkvocijenta izomorfna s $\tau_{3,-}$ i $\tau_{4,-}$.
Ako je $-a < b$, za $a = \alpha - 1 = 0$ temperirani subkvocijent je izomorfan sa σ_5, za $-a = \alpha = \frac{1}{2}$ sa σ_6, za $-a = \alpha \geq 1$ sa $\tau_{5,-}$, a za $-a \geq \alpha + 1$ s dvije diskretne serije izomorfne s $\sigma_{3,-}$ i $\sigma_{4,-}$.

3.4. NETEMPERIRANI SUBKVOCIJENTI OD $\pi_S \rtimes \sigma_c$

U posljednjem potpoglavlju opisujemo ireducibilne netemperirane subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Time će biti određen kompozicioni niz reprezentacije $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Neka je $L(\delta_1, \ldots, \delta_t; \tau)$ subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Tada je $\delta_1 \otimes \pi'$ konstituent od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Dakle, postoji $\big((c_1, c_2), (d_1, d_2)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$ takav da je δ_1 subkvocijent od (1.6). Jer je $e(\delta_1) < 0$, zaključujemo da je $d_2 = b+1$. Jer se $-a-1$ i $-a$ razlikuju za jedan, Lema 1.3.13 implicira dvije mogućnosti:

1. $c_1 = a-1$ i $\delta_1 \leq \delta([\nu^{-c_2}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \times \delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^b\rho])$,

2. $c_2 = a$, no zbog $a-1 \leq c_1 < c_2$ je $c_1 = a-1$ pa je $\delta_1 = \delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^b\rho])$ i vidimo da je ovaj slučaj sadržan u prvom.

Ako je $d_1 + 1 \leq b$, onda razlikujemo dva slučaja: $c_2 = a$ ili $c_2 \geq a+1$. Ako je $c_2 = a$, onda je $e(\delta_1) < 0$ moguće samo za $d_1 + 1 = -b-1$. To implicira $a = -b-1$. Dobili smo $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \leq \mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$. Neka je u nastavku $c_2 \geq a+1$. Ako je $d_1 = -a-1$ i $c_2 = b+1$, dobivamo $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \sigma_c \leq \mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$. Ako je $d_1 = b$, u $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ imamo

$$\delta([\nu^{-c_2}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

za $-a \leq c_2 \leq b+1$. Primijetimo da smo time u slučaju $a = -b-1$ dobili $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \leq \mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$, dok u slučaju $-a \leq b$ imamo konstituente

$$\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \sigma_c,\ \delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c,$$
$$\delta([\nu^{-c_2}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c \text{ za } -a \leq c_2 \leq b.$$

Da bismo odredili kandidate u slučaju $t = 1$, za temperiranu reprezentaciju τ, potrebno je odrediti temperirane subkvocijente reprezentacija na drugim komponentama. Ireducibilni temperirani subkvocijenti generaliziranih osnovnih serija su opisani u potpoglavlju 1.6, dok za reprezentaciju oblika

$$L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c \text{ za } -a \leq x \leq b$$

opis nalazimo u potpoglavlju 3.2.

3.4.1. Slučaj $b = -a-1$

Vidjeli smo da je $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ konstituent od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ kojim dobivamo kandidate za netemperirane subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ u slučaju $b = -a-1$. Kompozicioni niz reprezentacije $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ tada u potpunosti opisuje kandidate. Ako je $b = -\frac{1}{2}$, kandidati su

$$\begin{cases} L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho; \sigma_c),\ L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho; \sigma_{(\frac{1}{2})}), & \text{ako je } \alpha = \frac{1}{2}, \\ L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho; \sigma_c), & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je $b \geq 0$, onda su uz $L(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{b}\rho]); \sigma_c)$, koji je kandidat u svakom slučaju, kandidati

$$\begin{cases} L(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{b}\rho]); \tau_2^{(\alpha-1)}), & \text{ako je } b = \alpha - 1, \\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{b}\rho]); \sigma_1),\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{b}\rho]); \sigma_2), & \text{ako je } b \geq \alpha, \end{cases}$$

gdje su σ_1 i σ_2 diskretne serije dobivene po klasifikaciji koje se ulažu u $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ za $b \geq \alpha$. Uočimo da su navedeni kandidati subkvocijenti reprezentacije $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{b}\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ koja je u $R(G)$ jednaka

$$\pi_S \rtimes \sigma_c + \delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_c.$$

Kako su reprezentacija $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_c$ i njezini ireducibilni subkvocijenti temperirani, zaključujemo da su svi opisani kandidati subkvocijenti od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Dodatno, uočimo da su svi subkvocijenti podreprezentacije od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ jer je ova reprezentacija unitarna pa time i poluprosta.

3.4.2. Slučaj $-a \leq b$

Diskusija na početku ovog potpoglavlja implicira da sljedeći konstituenti od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ daju kandidate za netemperirane subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$:

1. $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \delta([\nu^{a}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_c$,

2. $\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$ za $-a \leq x \leq b$,

3. $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes \delta([\nu^{a}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \sigma_c$.

Da bismo opisali kandidate u prvom slučaju, zanima nas kompozicioni niz inducirane reprezentacije $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$. Ako je $-a = b$, onda je reprezentacija $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$

$$\begin{cases} \text{ireducibilna}, & \text{ako je } 0 \leq b \leq \alpha - 1, \\ \simeq \tau_{0,+}^{(b)} \oplus \tau_{0,-}^{(b)}, & \text{ako je } b \geq \alpha. \end{cases}$$

Ako je $-a < b$, uz $L(\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-a}\rho]); \sigma_c)$, u slučaju $b \geq \alpha$ nalazimo i sljedeće ireducibilne subkvocijente od $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$:

$$\begin{cases} L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-a}\rho]); \sigma_{(b)}), & \text{ako je } 0 \leq -a \leq \alpha - 2, \\ \tau_8, & \text{ako je } -a = \alpha - 1, \\ \sigma_7 + \sigma_8, & \text{ako je } -a \geq \alpha. \end{cases}$$

Ako prema parametrizaciji iz potpoglavlja 1.5 označimo ireducibilne subkvocijente od

$$\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]) \rtimes \sigma_{(b)}$$

sa τ_+ i τ_-, onda je $\tau_8 \simeq \tau_-$ za $\alpha \geq \frac{3}{2}$ i $\tau_8 \simeq \tau_+$ za $\alpha = 1$. Diskretne serije σ_7 i σ_8 su dobivene po klasifikaciji. Označimo s π_0 neki od subkvocijenata od $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$. Uočimo da su, pod odgovarajućim uvjetima u ovisnosti o α i $-a$, ireducibilne reprezentacije

$$L(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]), \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-a}\rho]); \sigma_c),\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]); \pi_0)$$

za temperiranu π_0, i $L(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]), \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-a}\rho]); \sigma_{(b)})$ subkvocijenti od

$$\Pi = \delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c. \tag{3.29}$$

Označimo neku od njih sa π_1. Također je $\pi_S \rtimes \sigma_c$ subkvocijent od Π pa je dovoljno pokazati da je $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \pi_0$ subkvocijent od $\mu^*(\Pi)$ s kratnosti jedan. Naime, vidjeli smo da se $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \pi_0$ nalazi u $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ kroz određivanje kandidata za subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. U $\mu^*(\pi_1)$ se nalazi po Frobeniusovom reciprocitetu jer vrijedi $\pi_1 \hookrightarrow \delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \pi_0$. Dakle, ako se u $\mu^*(\Pi)$ nalazi sa kratnosti jedan, onda je nužno π_1 subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Lako vidimo da to vrijedi jer se $\nu^{-b-1}\rho$ nalazi s kratnosti jedan u kuspidalnom nosaču od Π i zbog toga je nužno $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \pi_0$ subkvocijent od

$$(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes 1) \rtimes \mu^*(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c).$$

Preostaje vidjeti s kojom kratnosti je π_0 subkvocijent od $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$. Iz opisa kompozicionog niza ove reprezentacije vidimo da se nalazi s kratnosti jedan i time dovršavamo dokaz.

Kandidati u drugom slučaju su opisani kompozicionim nizom reprezentacije

$$\pi \simeq L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

za $-a \leq x \leq b$. Prvo ćemo pokazati da kandidati oblika $L(\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]); \tau)$, $-a \leq x \leq b$, za temperiranu podreprezentaciju τ od $\pi \rtimes \sigma_c$, opisanu Teoremom 3.2.8, jesu subkvocijenti od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Definiramo

$$\Pi = \delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \times L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c.$$

Ako pokažemo da je $\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \tau$ subkvocijent od $\mu^*(\Pi)$ s kratnosti jedan, onda analogno kao u prošlom slučaju dobivamo da je $L(\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]); \tau)$ subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. Uočimo da je $\pi_S \rtimes \sigma_c$ subkvocijent od Π po Lemi 1.3.14, a $L(\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]); \tau)$ je podreprezentacija od Π jer se τ ulaže u $\pi \rtimes \sigma_c$. Uočimo da ukoliko je $\pi_1 \otimes \pi_2$ ireducibilni konstituent od $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ takav da vrijedi

$$\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \tau \leq M^*(\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho])) \rtimes (\pi_1 \otimes \pi_2), \tag{3.30}$$

tada je π_1 nužno trivijalna reprezentacija. Naime, za $\big((c_1, c_2), (d_1, d_2)\big) \in \mathrm{Lad}'(\pi)$ vrijedi

$$\pi_1 \simeq L(\delta([\nu^{-c_2}\rho, \nu^{-x-1}\rho]), \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a}\rho])) \times L(\delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{d_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])).$$

Zbog (3.30), minimalan eksponent u $[\pi_1]$ je jednak $-x$ pa je $c_2 = x$. Maksimalan eksponent je $-a-1$ pa također imamo $c_1 = a-1$, $d_1 = b$ i $d_2 = b+1$. Dakle, $\pi_1 \simeq 1$. Jer je $x \geq -a$, $\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes 1$ je konstituent od $M^*(\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]))$ kratnosti jedan. Time je kratnost od $\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \tau$ u $\mu^*(\Pi)$ jednaka kratnosti od τ u $\pi \rtimes \sigma_c$, za koju smo u Teoremu 3.2.8 vidjeli da je jednaka jedan.

Preostaje analizirati kandidate za subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ dobivene od netemperiranih subkvocijenata od $\pi \rtimes \sigma_c$. Prvo tražimo konstituent oblika $\delta \otimes \pi'$ od $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_c)$ takav da je $e(\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho])) \leq e(\delta) < 0$. Za $\big((c_1, c_2), (d_1, d_2)\big) \in \mathrm{Lad}'(\pi)$ je δ subkvocijent od

$$L(\delta([\nu^{-c_2}\rho, \nu^{-x-1}\rho]), \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a}\rho])) \times \delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^b\rho]),$$

gdje je $d_2 = b+1$, kako je $b+1$ maksimalan eksponent u $[\pi]$ i $e(\delta) < 0$. Prema Lemi 1.3.13 je nužno $c_1 = a-1$ ili $c_2 = x$. Ako je $c_1 = a-1$ i $c_2 = x$, onda je $\delta \simeq \delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^b\rho])$. Jer je $a \leq d_1 + 1$ i $-a \leq b$, ne može biti $e(\delta) < 0$. Ako je $c_1 = a-1$ i $c_2 \geq x+1$, onda je $d_1 \in \{-x-1, b\}$. Za $d_1 = -x-1$ je $x = -a$, $c_2 = b+1$ i kandidata za netemperirani subkvocijent dobivamo od

$$\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \sigma_c.$$

U trećem slučaju ćemo analizirati kandidate ovog oblika. Za $d_1 = b$ je $\delta \simeq \delta([\nu^{-c_2}\rho, \nu^{-x-1}\rho])$, no time ne vrijedi $e(\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho])) < e(\delta)$. Ako je $c_2 = x$, onda je $d_1 \in \{-a, b\}$. Za $d_1 = -a$ je $\delta \simeq \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{b}\rho])$, no zbog $-c_1 \geq -b$ ne vrijedi $e(\delta) < 0$. Za $d_1 = b$ kandidate za netemperirani subkvocijent dobivamo od

$$\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

za $0 \leq -a < c_1 < x$. Uočimo da ljestvičasta reprezentacija

$$\pi_L = L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]))$$

ima samo pozitivne eksponente u kuspidalnom nosaču te je kompozicioni niz reprezentacije $\pi_L \rtimes \sigma_c$ određen u poglavlju 2. Prema Teoremu 2.1.1 reprezentacija $\pi_L \rtimes \sigma_c$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent ako i samo ako je $c_1 + 1 = \alpha - 1$ i $x + 1 = \alpha$ te je tada ireducibilan subkvocijent jedinstven i izomorfan sa $\sigma_{(b,b+1)}$. U tom slučaju je reprezentacija

$$\pi_0 = L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-a-1}\rho]), \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-a}\rho]); \sigma_{(b,b+1)})$$

kandidat za subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$.

Lema 3.4.1. Ako je $0 \leq -a \leq \alpha - 3$ i $\alpha - 1 \leq b$, onda je π_0 subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$.

Dokaz. Označimo induciranu reprezentaciju

$$\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \times \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times L(\delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$$

sa Π. Uočimo da su π_0 i $\pi_S \rtimes \sigma_c$ subkvocijenti od Π. Primijetimo da ako je

$$\pi_1 = \delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-a}\rho]) \otimes \sigma_{(b,b+1)}$$

konstituent od $r_\beta(\Pi)$ kratnosti jedan za odgovarajuću paraboličku podgrupu P_β, onda je $\pi_0 \leq \pi_S \rtimes \sigma_c$. Prvo tražimo konstituente od $\mu^*(\Pi)$ oblika $\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \pi'$ za neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Za svaki $\pi_2 \otimes \pi_3 \leq M^*(\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-a}\rho]))$ vrijedi da su eksponenti kuspidalnog nosača od π_2 veći ili jednaki $-(\alpha - 2)$. Jasno, tada $\nu^{-(\alpha-1)}\rho \notin [\pi_2]$. Nadalje, uočimo da $\nu^{-(\alpha-1)}\rho$ nije element niti kuspidalnog nosača od

$$L(\delta([\nu^{-c_2}\rho, \nu^{-\alpha}\rho]), \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-(\alpha-1)}\rho])) \times L(\delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{d_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]))$$

za svaki $\big((c_1, c_2), (d_1, d_2)\big) \in \mathrm{Lad}'(L(\delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b+1}\rho])))$ jer je minimalan eksponent u $[\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-a-1}\rho]$ jednak $-(\alpha - 1)$ pa je $c_2 = \alpha - 1 > c_1$. Time je nužno $c_1 =$

$\alpha - 2$. Dodatno, $d_1 = b$ i $d_2 = b+1$ jer je maksimalan eksponent u $[\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-a-1}\rho]$ jednak $-a-1 < b$. Slijedi da je π_1 sadržan u $r_\beta(\Pi)$ s istom kratnosti s kojom je $\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-a}\rho]) \otimes \sigma_{(b,b+1)}$ sadržan u

$$\mu^*(\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times L(\delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c).$$

Sličnom analizom slijedi da je kratnosti jedan jer je u konačnici $\sigma_{(b,b+1)}$ jedinstvena podreprezentacija od $L(\delta([\nu^{\alpha-1}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^\alpha\rho, \nu^{b+1}\rho])) \rtimes \sigma_c$. ∎

Teorem 2.2.2 opisuje netemperirane subkvocijente od $\pi_L \rtimes \sigma_c$. Primjenom na reprezentaciju $\pi_L \rtimes \sigma_c$ vidimo da su netemperirani subkvocijenti $L(\delta_1, \dots, \delta_t; \tau)$ za $t \in \{1,2\}$ takvi da su desni krajevi segmenata od δ_i, $i = 1, \dots, t$ sadržani u $\{-x-1, -c_1-1\}$. Time vrijedi $e(\delta_i) < e(\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{-a-1}\rho]))$ ili $e(\delta_i) < e(\delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a}\rho]))$, što je u kontradikciji sa zahtjevima Langlandsove klasifikacije.

Kandidati u trećem slučaju su opisani konstituentom od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ oblika

$$\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \sigma_c.$$

Definiramo $L = L(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]); \sigma_c)$.

Propozicija 3.4.2. Neka je $-a \geq \alpha$. Tada je L subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo prilagodbom dokaza Teorema 3.1 iz [30]. Za to nam je potrebno prvo uočiti da pod uvjetima propozicije reprezentacija $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$ sadrži dvije neekvivalentne diskretne serije dobivene po klasifikaciji ili dvije neekvivalentne temperirane ireducibilne podreprezentacije. Preciznije, ako je $-a < b$, onda za $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c) = \emptyset$ prema Teoremu 1.6.1 reprezentacija $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$ ima dvije diskretne serije dobivene po klasifikaciji, dok za $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c) \neq \emptyset$ i $-a \geq \alpha$ to slijedi po Teoremu 1.6.3. Ako je $-a = b$, onda je $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$ izomorfna direktnoj sumi dviju neekvivalentnih temperiranih ireducibilnih reprezentacija prema Teoremu 1.5.1.

U dokazu Teorema 3.1 iz [30] je pokazano da je L subkvocijent od $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$ kratnosti dva kada je $a \leq 0$, $-a < b$ i $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$ sadrži točno dvije diskretne serije dobivene po klasifikaciji. Lako se može provjeriti da analogna argumentacija, štoviše i jednostavnija, dokazuje tvrdnju o kratnosti subkvocijenta L kada je $-a = b$ i $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$ je direktna suma dviju neekvivalentnih ireducibilnih temperiranih reprezentacija. Sada tvrdnja propozicije jednostavno slijedi iz računa kratnosti $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes$

$\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ u $\mu^*(\Pi)$ za $\Pi = \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$. Naime, u $R(G)$ vrijedi jednakost

$$\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c = \pi_S \rtimes \sigma_c + \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^a\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c. \tag{3.31}$$

Uočimo da je $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes 1$ jedini faktor u $\mu^*(\Pi)$ koji sadrži $\nu^{-b-1}\rho$ u kuspidalnom nosaču, kako je $-b-1$ minimalan eksponent kratnosti jedan u kuspidalnom nosaču od Π. Sada za $\delta([\nu^{-a}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho])$ i $\nu^{-a}\rho \times \delta([\nu^{-a+1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho])$ u $M^*(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]))$ dobivamo da je $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \sigma_c$ kratnosti 2 u $\mu^*(\Pi)$. Vidjeli smo da je u $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ kratnosti 1, a kako je $\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \sigma_c$ kratnosti jedan u $\mu^*(\delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \sigma_c)$, isti zaključak vrijedi za

$$\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \otimes \sigma_c. \tag{3.32}$$

Jer je po Frobeniusovom reciprocitetu (4.4) konstituent od $\mu^*(L)$, zaključujemo da je po jedna kopija od L sadržana u svakom od sumanada u (3.31). ■

Lema 3.4.3. Ako je $\frac{1}{2} \leq -a \leq \alpha - 1$, onda L nije subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$.

Dokaz. Zbog sljedećih ulaganja i izomorfizama

$$L \hookrightarrow \delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^a\rho, \nu^{-a-1}\rho]) \rtimes \sigma_c \simeq$$
$$\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_c \simeq \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$$

vidimo da $\mu^*(L)$ sadrži konstituent oblika $\nu^{-a}\rho \otimes \pi'$, što nije istina za $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ ako je $-a < b$. Ako je $-a = b$, onda $r_\beta(L)$ sadrži konstituent oblika $\nu^b\rho \otimes \nu^b\rho \otimes \pi''$ za odgovarajuću paraboličku podgrupu P_β, što također ne vrijedi za $r_\beta(\pi_S \rtimes \sigma_c)$. Time smo pokazali da L nije subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$. ■

Pretpostavimo sada da je $-a \geq 1$. Uz reprezentaciju L imamo kandidate za subkvocijente ovisno o temperiranim subkvocijentima od $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_c$:

$$\begin{cases} \tau_{21}, & \text{ako je } -a-1 = \alpha - 1 \geq 0, \\ \sigma_{21},\ \sigma_{22}, & \text{ako je } -a-1 \geq \alpha \geq 1 \text{ ili } \alpha \in \{0, \frac{1}{2}\}. \end{cases}$$

Primijetimo da smo ovime pokrili slučajeve i kada je $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c)$ prazan i kada je neprazan. Kada postoji, nazovimo sa τ neki od temperiranih subkvocijenata od $\delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_c$ i

$\pi_0 \simeq L(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]); \tau)$. Primijetimo da zbog ulaganja i izomorfizama

$$\pi_0 \hookrightarrow \delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \tau \hookrightarrow$$
$$\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \rtimes \sigma_c \simeq \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{-a}\rho]) \times \delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$$

kao i ranije zaključujemo da π_0 nije subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$.

Ako je $-a = \frac{1}{2}$, onda za $\alpha = \frac{1}{2}$ je kandidat $L(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]); \sigma_{(\frac{1}{2})})$. Pokazuje se da nije subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$ analogno kao i u slučaju $-a \geq 1$.

Ako je $a = 0$, onda je $L \simeq L(\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]); \sigma_c)$ jedini kandidat za subkvocijent te ga je preostalo analizirati u slučaju $\mathrm{Jord}_\rho(\sigma_c) \neq \emptyset$, zahvaljujući Propoziciji 3.4.2.

Ako je $0 \leq b+1 \leq \alpha - 1$, onda je $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$ ireducibilna reprezentacija te vrijedi $L \simeq \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c$. Time $\mu^*(L)$ sadrži konstituent oblika $\nu^{b+1}\rho \otimes \pi'$ za $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$, što ne vrijedi za $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_c)$ pa u ovom slučaju L nije subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$.

Ako je $b+1 \geq \alpha$, onda imamo dekompoziciju operatora ispreplitanja

$$j : \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \to \delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$$

prikazanu dijagramom:

$$\begin{aligned}
\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c \overset{i}{\hookrightarrow} \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \rho]) \rtimes \sigma_c &\overset{h}{\to} \\
\delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \times \delta([\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c &\overset{g}{\to} \\
\delta([\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu\rho, \nu^{b+1}\rho]) \rtimes \sigma_c &\overset{f}{\to} \\
\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c \hookrightarrow \delta([\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^{-1}\rho]) \rtimes \sigma_c &
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $j = f \circ g \circ h \circ i$. Uočimo da je $\mathrm{Im}(g) \simeq \pi_S \rtimes \sigma_c$. Kako je L jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{-b-1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_c$ i $\mathrm{Im}(j)$ se ulaže u istu induciranu reprezentaciju, slijedi $L \hookrightarrow \mathrm{Im}(j)$. Zbog dekompozicije vrijedi $L \hookrightarrow \mathrm{Im}(j) \hookrightarrow \mathrm{Im}(f|_{\mathrm{Im}(g)})$. Zaključujemo da ulaganje $L \hookrightarrow f(\mathrm{Im}(g))$ implicira da postoji ireducibilni subkvocijent π_0 od $\mathrm{Im}(g) \simeq \pi_S \rtimes \sigma_c$ takav da je $f(\pi_0) \simeq L$. Kako su π_0 i L ireducibilne reprezentacije, f inducira njihov izomorfizam. Dakle, L je subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_c$.

Teorem 3.4.4. Inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_c$ za $0 \leq -a \leq b+1$ ima sljedeće netemperirane ireducibilne subkvocijente po slučajevima:

- $-a-1=b$: $L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b}\rho]),\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b}\rho]);\sigma_c)$ i

$$\begin{cases} L(\nu^{-\frac{1}{2}}\rho;\sigma_{(\frac{1}{2})}), & \text{ako } b=\alpha-1=-\frac{1}{2},\\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b}\rho]);\tau_2^{(\alpha-1)}), & \text{ako } b=\alpha-1\geq 0,\\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b}\rho]);\sigma_1),\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b}\rho]);\sigma_2), & \text{ako } b\geq\alpha. \end{cases}$$

- $-a=b$:

$$\begin{cases} L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b-1}\rho]);\delta([\nu^{-b}\rho,\nu^{b}\rho])\rtimes\sigma_c), & \text{ako } 0\leq b\leq\alpha-1,\\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b-1}\rho]);\tau_{0,\pm}^{(b)}), & \\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b}\rho]),\delta([\nu^{-b}\rho,\nu^{b-1}\rho]);\sigma_c), & \text{ako } b\geq\alpha,\\ L(\delta([\nu^{-b}\rho,\nu^{b-1}\rho]);\tau_{2,+}^{(\alpha-1)}), & \text{ako } b=\alpha-1\geq\frac{1}{2},\\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b}\rho]);\sigma_c), & \text{ako } b=0 \text{ i } \alpha\geq 1. \end{cases}$$

- $-a<b$: $L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{-a-1}\rho]),\delta([\nu^{-b}\rho,\nu^{-a}\rho]);\sigma_c)$ i

$$\begin{cases} L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{-a-1}\rho]),\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho,\nu^{-a}\rho]);\sigma_{(b)}), & \text{ako } -a\leq\alpha-2 \text{ i } b\geq\alpha,\\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{-a-1}\rho]);\tau_8), & \text{ako } -a=\alpha-1,\\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{-a-1}\rho]);\sigma_7),\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{-a-1}\rho]);\sigma_8), & \text{ako } -a\geq\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho,\nu^{-a-1}\rho]);\tau_{1,+}^{(0)}), & \text{ako } \alpha=2 \text{ i } a=0,\\ L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho,\nu^{-a-1}\rho]);\tau_{1,-}^{(\alpha-2)}), & \text{ako } \alpha\geq\frac{5}{2} \text{ i } -a=\alpha-2,\\ L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho,\nu^{-a-1}\rho]);\sigma_0), & \text{ako } \alpha\geq 2 \text{ i } -a\geq\alpha-1,\\ L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho,\nu^{-a-1}\rho]),\delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho,\nu^{-a}\rho]);\sigma_{(b,b+1)}), & \text{ako } -a\leq\alpha-3 \text{ i } b\geq\alpha-1. \end{cases}$$

- $-a\leq b$:

$$\begin{cases} L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b}\rho]),\delta([\nu^{a}\rho,\nu^{-a-1}\rho]);\sigma_c), & \text{ako } -a\geq\alpha,\\ L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b}\rho]);\sigma_c), & \text{ako } a=0 \text{ i } b\geq\alpha-1. \end{cases}$$

Neka je $\pi_S^{(b)}$ Speh reprezentacija $L(\delta([\nu^{-b-1}\rho,\nu^{b}\rho]),\delta([\nu^{-b}\rho,\nu^{b+1}\rho]))$ i $-\frac{1}{2}\leq b<\alpha-1$. Kako smo vidjeli u Teoremu 3.4.4 i potpoglavlju 3.3.1, reprezentacija $\pi_S^{(b)}\rtimes\sigma_c$ je tada ireducibilna. Koristeći krajeve komplementarnih serija određujemo unitarne ireducibilne subkvocijente reprezentacija iz klase esencijalno Speh reprezentacija. Preciznije, neka je $\gamma\geq 0$ takav da je inducirana reprezentacija

$$\nu^{x}\pi_S^{(b)}\rtimes\sigma_c\simeq L(\delta([\nu^{-b-1+x}\rho,\nu^{b+x}\rho]),\delta([\nu^{-b+x}\rho,\nu^{b+1+x}\rho]))\rtimes\sigma_c \tag{3.33}$$

ireducibilna za $0 \leq x < \gamma$ i reducibilna za $x = \gamma$. Tada su ireducibilni subkvocijenti od $\nu^{\gamma}\pi_S^{(b)} \rtimes \sigma_c$ unitarne reprezentacije. Cilj nam je odrediti γ. Promotrimo $x = \alpha - b - 1$. Tada je reprezentacija (3.33) izomorfna s

$$L(\delta([\nu^{\alpha-2b-2}\rho, \nu^{\alpha-1}\rho]), \delta([\nu^{\alpha-2b-1}\rho, \nu^{\alpha}\rho])) \rtimes \sigma_c.$$

Uočimo, ako postoji $0 < x_0 < \alpha - b - 1$ takav da je $-b - 1 - x_0 > 0$, onda Propozicija 2.2.1 implicira da je reprezentacija (3.33) ireducibilna za svaki $x_0 \leq x < \alpha - b - 1$. Za sve $0 \leq x < \alpha - b - 1$ takve da je $-b - 1 + x \leq 0$ zbog $b + x < \alpha - 1$ po Teoremima 3.3.13 i 3.4.4 slijedi da je reprezentacija (3.33) ireducibilna. Dakle, ako je $\nu^{\alpha-b-1}\pi_S^{(b)} \rtimes \sigma_c$ reducibilna reprezentacija, onda je $\gamma = \alpha - b - 1$. Definiramo $\pi_0 = L(\delta([\nu^{-\alpha}\rho, \nu^{-\alpha+2b+1}\rho]), \delta([\nu^{-\alpha+1}\rho, \nu^{-\alpha+2b+2}\rho]); \sigma_c)$ i $\pi_1 = L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{-\alpha+2b+1}\rho]), \delta([\nu^{-(\alpha-2)}\rho, \nu^{-\alpha+2b+2}\rho]); \sigma_{(\alpha-1,\alpha)})$.

Korolar 3.4.5. Inducirana reprezentacija $\nu^{\alpha-b-1}\pi_S^{(b)} \rtimes \sigma_c$ za $\alpha - b \in \mathbb{Z}$ i $-\frac{1}{2} \leq b < \alpha - 1$ ima sljedeći kompozicioni niz po slučajevima:

- Ako $\alpha - 2 = b = 0$, onda

$$\nu^{\alpha-b-1}\pi_S^{(b)} \rtimes \sigma_c = \pi_0 + L(\nu^{-1}\rho; \tau_{1,+}^{(0)}) + L(\delta([\nu^{-1}\rho, \rho]); \sigma_c).$$

- Ako $\alpha - 2 = b \geq \frac{1}{2}$, onda

$$\nu^{\alpha-b-1}\pi_S^{(b)} \rtimes \sigma_c = \pi_0 + L(\delta([\nu^{-(\alpha-1)}\rho, \nu^{\alpha-3}\rho]); \tau_{1,-}^{(\alpha-2)}).$$

- Ako $\alpha - 2 = 2b \geq 1$, onda

$$\nu^{\alpha-b-1}\pi_S^{(b)} \rtimes \sigma_c = \pi_0 + \pi_1 + L(\delta([\nu^{-\frac{\alpha}{2}}\rho, \nu^{\frac{\alpha}{2}-1}\rho]); \sigma_c.$$

- Inače

$$\nu^{\alpha-b-1}\pi_S^{(b)} \rtimes \sigma_c = \pi_0 + \pi_1.$$

Dokaz. Primijetimo da je u slučaju $b \leq \alpha - 2 \leq 2b$ reprezentacija $\nu^{\alpha-b-1}\pi_S^{(b)} \rtimes \sigma_c$ reducibilna za svaki $\alpha - 2$ u $[b, 2b]$. Zbog toga se radi o kraju komplementarne serije za svaki $0 \leq b < \alpha - 1$ i $\alpha \geq 0$. Teorem 3.4.4 opisuje ireducibilne subkvocijente u slučaju $b \leq \alpha - 2 \leq 2b$, dok su subkvocijenti u slučaju $\alpha - 2 \geq 2b + 1$ opisani Teoremom 2.2.2. ∎

4. Reprezentacije inducirane iz esencijalno Speh i strogo pozitivne

Motivirani klasifikacijom ireducibilnih unitarnih reprezentacija opće linearne grupe, proučavamo prirodnu generalizaciju njihovih gradivnih blokova za klasične grupe. Konkretno, određujemo kompozicioni niz induciranih reprezentacija oblika $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$, gdje je σ_{sp} nekuspidalna strogo pozitivna reprezentacija iz $\mathrm{Irr}(G)$ i π_S esencijalno Speh reprezentacija s pozitivnim eksponentima u kuspidalnom nosaču. Primijetimo da je u slučaju kuspidalne σ_{sp} kompozicioni niz određen u Poglavlju 2. Dodatno, pretpostavljamo da za reprezentacije $\rho_1 \in [\pi_S]$ i $\rho_2 \in [\sigma_{sp}]$ postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $\nu^x \rho_1 \simeq \rho_2$. Rezultati Poglavlja 2, zajedno s prethodnom pretpostavkom, rješavaju opisani problem u punoj općenitosti.

U posebnim slučajevima opisane reprezentacije su ostvareni napretci vezani za opis kompozicionog niza u terminima Langlandsove klasifikacije. Rezultati iz [29], opisani u potpoglavlju 1.6, rješavaju problem za $\pi_S \simeq \delta(\Delta)$, dok rezultati iz [23] opisuju kompozicioni niz od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$ za $\pi_S \simeq L(\delta(\Delta_1), \delta(\Delta_2))$ i eksponente u $\Delta_1 \cup \Delta_2$ veće ili jednake jedan.

Glavni dio rješenja je klasifikacija ireducibilnih temperiranih subkvocijenata induciranih reprezentacija oblika

$$L(\delta([\nu^{a_1}\rho, \nu^{b}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a_n}\rho, \nu^{b+n-1}\rho])) \rtimes \sigma_{sp} \tag{4.1}$$

za $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}$ i $0 < a_1 < \ldots < a_n$. Analiza kuspidalnog nosača reprezentacije (4.1) implicira dvije mogućnosti. Ako $a_1 \neq \frac{1}{2}$ ili $\nu^{\frac{1}{2}}\rho$ nije sadržan u kuspidalnom nosaču od σ_{sp}, temperirani subkvocijent inducirane reprezentacije (4.1) je nužno strogo pozitivna diskretna serija. U suprotnom, temperirani subkvocijent nije strogo pozitivan te su ireducibilne temperirane reprezentacije koje se pojavljuju u ovom slučaju podreprezentacije inducirane reprezentacije oblika

$\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^{y}\rho]) \rtimes \sigma$ tako da $0 \leq x \leq y$ i σ je strogo pozitivna diskretna serija. Potpoglavlja 4.2 i 4.3 se bave tim slučajevima, redom u oznakama I. i II. slučaj.

Korištene metode su ponovno zasnovane na strukturnoj formuli iz Teorema 1.3.15. Naime, $L(\delta_1, \ldots, \delta_n; \tau)$ je kandidat za subkvocijent reprezentacije $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$ ako je $\delta_1 \otimes \cdots \otimes \delta_n \otimes \tau$ konstituent njegovog Jacquetovog modula obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Da bismo dokazali da je subkvocijent, konstruiramo reprezentaciju koja sadrži obje reprezentacije i prebrojavamo multiplicitet određenog konstituenta njihovih Jacquetovih modula. Na klasičnom dijelu koristimo klasifikaciju ireducibilnih temperiranih reprezentacija opisanu u potpoglavljima 1.4 i 1.5.

Preostalo je napomenuti da u prvom potpoglavlju uvodimo oznake i ključan tehnički rezultat, dok u posljednjem konačno dobivamo netemperirane subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$ i zaokružujemo rezultate navodeći kompozicioni niz promatrane reprezentacije.

4.1. Notacija i pomoćni rezultat

Fiksirajmo notaciju koju ćemo koristiti kroz cijelo poglavlje. Prvo, fiksiramo kuspidalnu reprezentaciju $\rho \in \mathrm{Irr}(GL)$ takvu da vrijedi $\rho \simeq \widetilde{\rho}$. Za $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $\frac{1}{2} \leq a \leq b$, $K \in \mathbb{N}$ i $K \geq 2$ definiramo

$$\pi_S = L(\delta([\nu^{a}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{a+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a+K-1}\rho, \nu^{b+K-1}\rho])).$$

Također, fiksiramo kuspidalnu reprezentaciju $\sigma_c \in \mathrm{Irr}(G)$ te s α označavamo jedinstveni nenegativni broj takav da se $\nu^{\alpha}\rho \rtimes \sigma_c$ reducira. Kako σ_{sp} nije kuspidalna, imamo $\alpha > 0$. Kroz poglavlje fiksiramo strogo pozitivnu diskretnu seriju $\sigma_{sp} = \sigma_{(b_1,\ldots,b_r)}$ za sp-dopustivu r-torku $(b_1, \ldots, b_r)$ takvu da $\alpha - r + i \leq b_i$ za neki $i \in \{1, \ldots, r\}$. Kao što smo komentirali na početku poglavlja, cilj je opisati kompozicioni niz inducirane reprezentacije oblika $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$. Uz strogo pozitivnu diskretnu seriju σ_{sp} vežemo sljedeće konstante:

$$s = \begin{cases} \max\{i : 1 \leq i \leq r,\ b_i = \alpha - r + i - 1\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

$$i_{min} = \begin{cases} \min\{i : s+1 \leq i \leq r,\ b_i > b + k - 1\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ r+1, & \text{inače,} \end{cases}$$

te $m = r - i_{min} + 1$. Primijetimo da po definiciji od i_{min} imamo $m \leq r - s$. Naredna lema je važna pri brojanju kratnosti određenih konstituenata u Jacquetovim modulima reprezentacija koje promatramo.

Lema 4.1.1. Neka je $(i_1, \dots, i_r) \in \mathrm{Acc}(\sigma_{sp})$ i $k \in \{1, \dots, K\}$. Definiramo

$$\Pi = \delta([\nu^{b_{r-m-k+1}+1}\rho, \nu^{e_1}\rho]) \times \cdots \times \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{e_k}\rho]) \rtimes \sigma_{(i_1,\dots,i_r)}$$

tako da vrijedi $b_{r-m-k+i} \leq e_i \leq b + i - 1$ za $i = 1, \dots, k$ te pretpostavimo da je $\sigma_{sp} \leq \Pi$. Tada $e_i = b_{r-m-k+i}$ za $i = 1, \dots, k$ i $\sigma_{(i_1,\dots,i_r)} \simeq \sigma_{sp}$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\sigma_{sp} \leq \Pi$. Primijetimo da za svaki $\nu^x\rho$ iz kuspidalnog nosača reprezentacije

$$\delta([\nu^{b_{r-m-k+1}+1}\rho, \nu^{e_1}\rho]) \times \cdots \times \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{e_k}\rho]) \tag{4.2}$$

vrijedi $x \in [b_{r-m-k+1} + 1, b + k - 1]$. Zajedno s $b_1 < \ldots < b_{r-m-k+1} < b_{r-m-k+1} + 1$ i $b + k - 1 < b_{r-m+1} < \ldots < b_r$, slijedi da $\nu^{b_i}\rho$ nije element kuspidalnog nosača reprezentacije (4.2) za $i = 1, \dots, r - m - k + 1, r - m + 1, \dots, r$. Uočimo da je $b_r = i_r$ jer su to maksimalni eksponenti u kuspidalnim nosačima $[\sigma_{sp}]$ i $[\Pi]$ te vrijedi $[\sigma_{sp}] = [\Pi]$. Induktivno, pretpostavimo da vrijedi $b_j = i_j$ za $j = j_0 + 1, \dots, r$, gdje je $j_0 \in \{r - m + 1, \dots, r - 1\}$. Tada vrijedi

$$[\sigma_{sp}] \setminus \bigcup_{j=j_0+1}^{r} [\nu^{\alpha-r+j}\rho, \nu^{b_j}\rho] = [\Pi] \setminus \bigcup_{j=j_0+1}^{r} [\nu^{\alpha-r+j}\rho, \nu^{b_j}\rho].$$

Time su b_{j_0} i i_{j_0} maksimalni eksponenti redom lijeve i desne strane jednakosti čime slijedi $b_{j_0} = i_{j_0}$, što smo i htjeli. Analogno se pokaže $b_j = i_j$ za $j = 1, \dots, r - m - k + 1$ izjednačavanjem minimalnih eksponenata. Teorem 1.4.11 implicira $\pi \otimes \sigma_{(b_{r-m+1},\dots,b_r)} \leq \mu^*(\sigma_{sp})$. Kako je $\left(\bigcup_{i=1}^{k}[b_{r-m-k+i} + 1, e_i]\right) \cap \{b_{r-m+1}, \dots, b_r\} = \emptyset$, slijedi $\pi \otimes \sigma_{(b_{r-m+1},\dots,b_r)} \leq \mu^*(\sigma_{(i_1,\dots,i_r)})$. Postoji jedinstveni konstituent od $\mu^*(\sigma_{(i_1,\dots,i_r)})$ tog oblika te vrijedi da je

$$\pi \simeq L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{\alpha-m}\rho, \nu^{b_{r-m}}\rho]))$$

subkvocijent od

$$\left(\times_{i=1}^{k} \delta([\nu^{b_{r-m-k+i}+1}\rho, \nu^{e_i}\rho])\right) \times L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{i_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{\alpha-m}\rho, \nu^{i_{r-m}}\rho])). \tag{4.3}$$

Primjenom m^* na reprezentacije π i (4.3), zbog $\left(\bigcup_{i=1}^{k}[b_{r-m-k+i} + 1, e_i]\right) \cap \{b_1, \dots, b_{r-m-k+1}\} = \emptyset$, zaključujemo da je $L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{\alpha-m-k+1}\rho, \nu^{b_{r-m-k+1}}\rho])) \otimes \pi'$ konstituent od $m^*(L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho,\nu^{i_1}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-m}\rho,\nu^{i_{r-m}}\rho])))$. Konstituent tog oblika je jedinstven, zbog čega dobivamo da je

$$\pi' \simeq L(\delta([\nu^{\alpha-m-k+2}\rho,\nu^{b_{r-m-k+2}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-m}\rho,\nu^{b_{r-m}}\rho]))$$

subkvocijent od

$$\left(\times_{i=1}^{k}\delta([\nu^{b_{r-m-k+i}+1}\rho,\nu^{e_i}\rho])\right)\times L(\delta([\nu^{\alpha-m-k+2}\rho,\nu^{i_{r-m-k+2}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-m}\rho,\nu^{i_{r-m}}\rho])).$$

Preostaje uočiti da zbog pretpostavke $e_k \geq b_{r-m}$ i jer je b_{r-m} maksimalni eksponent u $[\pi']$ imamo $e_k = b_{r-m}$. Zbog $e_i < e_k$ za $i = 1,\ldots,k-1$ slijedi $i_{r-m} = b_{r-m}$. Time je

$$L(\delta([\nu^{\alpha-m-k+2}\rho,\nu^{b_{r-m-k+2}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-m-1}\rho,\nu^{b_{r-m-1}}\rho]))$$

subkvocijent od

$$\left(\times_{i=1}^{k}\delta([\nu^{b_{r-m-k+i}+1}\rho,\nu^{e_i}\rho])\right)\times L(\delta([\nu^{\alpha-m-k+2}\rho,\nu^{i_{r-m-k+2}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-m-1}\rho,\nu^{i_{r-m-1}}\rho])).$$

Induktivnim argumentom dovršavamo dokaz leme. ■

4.2. Temperirani subkvocijenti I

Za $\sigma_{sp} = \sigma_{(b_1,\dots,b_r)}$, kroz cijelo poglavlje fiksiramo reprezentaciju

$$\pi = L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]))$$

takvu da $-\frac{1}{2} \le c_1 < c_2 < \dots < c_k$ i $c_i + 1 \le b + i - 1$ za $i = 1, \dots, k$. Ako je $c_1 = -\frac{1}{2}$, onda $b_1 = -\frac{1}{2}$. Cilj nam je opisati ireducibilne temperirane subkvocijente od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$.

Kao što smo spomenuli u uvodu, u slučaju da $\nu^{\frac{1}{2}}\rho$ nije sadržan u kuspidalnom nosaču od π i σ_{sp}, temperirani su subkvocijenti od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ strogo pozitivne diskretne serije. To slijedi iz analize kuspidalnog nosača od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ zbog restrikcija na c_1 i b_1. Odredimo sada nužne uvjete na π i σ_{sp} pod kojima inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži strogo pozitivnu diskretnu seriju oblika $\sigma_{(l_1,\dots,l_r)}$. Označimo $\tau = \sigma_{(l_1,\dots,l_r)}$ te na sličan način kao u potpoglavlju 4.1 definiramo

$$t = \begin{cases} \max\{i : l_i = \alpha - r + i - 1, i = 1, \dots, r\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Definicija 4.2.1. Za $\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$ označavamo $\min(\sigma) = \min\{|x| : \nu^x\rho \in [\sigma]\}$.

Po definiciji od s vrijedi $\min(\pi \rtimes \sigma_{sp}) \le \alpha - r + s + 1$. Kako relacija $\tau \le \pi \rtimes \sigma_{sp}$ implicira da su apsolutne vrijednosti eksponenata u kuspidalnim nosačima od τ i $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ jednake, zaključujemo da vrijedi $\alpha - r + t + 1 = \min(\tau) = \min(\pi \rtimes \sigma_{sp})$, što implicira $t \le s$. Također, $[\tau]$ sadrži $[\sigma_{sp}]$. Prema Teoremu 1.4.11, proizvoljan konstituent od $\mu^*(\tau)$ je oblika

$$L(\delta([\nu^{i_1+1}\rho, \nu^{l_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{i_r+1}\rho, \nu^{l_r}\rho])) \otimes \sigma_{(i_1,\dots,i_r)} \tag{4.4}$$

za $(i_1, \dots, i_r) \in \mathrm{Acc}(\tau)$. Egzaktnost Jacquetovih modula implicira da je (4.4) subkvocijent od $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_{sp})$ za svaki $(i_1, \dots, i_r) \in \mathrm{Acc}(\tau)$. Za $(i_1, \dots, i_r) = (\alpha - r, \dots, \alpha - 1) \in \mathrm{Acc}(\tau)$ postoje $\big((c_1, \dots, c_k), (d_1, \dots, d_k)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi)'$ i $(j_1, \dots, j_r) \in \mathrm{Acc}(\sigma_{sp})$ takvi da vrijedi

$$L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{l_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{l_r}\rho])) \le L(\delta([\nu^{d_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \dots, \delta([\nu^{d_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]))\times \tag{4.5}$$

$$\times L(\delta([\nu^{j_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{j_r+1}\rho, \nu^{b_r}\rho])),$$

$$\sigma_{(\alpha-r,\dots,\alpha-1)} \le L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{d_1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{d_k}\rho])) \rtimes \sigma_{(j_1,\dots,j_r)}. \tag{4.6}$$

Uočimo da je nužno prva k-torka u $\mathrm{Lad}(\pi)'$ jednaka $(c_1, \dots, c_k)$ kako ne postoje eksponenti manji ili jednaki nula u kuspidalnom nosaču od (4.5). Jer je $\sigma_{(\alpha-r,\dots,\alpha-1)} \simeq \sigma_c$, iz relacije (4.6) zaključujemo $c_i = d_i$ za $i = 1,\dots,k$ i $j_i = \alpha - r + i - 1$ za $i = 1,\dots,r$. Zajedno s (4.5) dobivamo

$$L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{l_1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{l_r}\rho])) \leq \tag{4.7}$$

$$L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]),\dots,\delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \times L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_r}\rho])). \tag{4.8}$$

Označimo $\pi_1 = L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]),\dots,\delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]))$ i

$$\pi_2 = L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_r}\rho])).$$

Lema 4.2.2. Neka je $\tau = \sigma_{(l_1,\dots,l_r)}$ i $\sigma_{sp} = \sigma_{(b_1,\dots,b_r)}$. Pretpostavimo da je τ subkvocijent od $\pi_0 \rtimes \sigma_{sp}$ za $\pi_0 \in \operatorname{Irr}(GL)$ te označimo $M = \max\{x : \nu^x\rho \in [\pi_0]\}$. Tada vrijedi $l_i = b_i$ za sve indekse i takve da je $\nu^{b_i}\rho \in [\sigma_{sp}]$ i $b_i > M$.

Dokaz. Ako je $\alpha \leq b_r$ i $b_r > M$, onda iz jednakosti $[\tau] = [\pi_0 \rtimes \sigma_{sp}]$ slijedi da su maksimalni eksponenti l_r i b_r jednaki. Ovdje je potrebno primijetiti da iz $\alpha \leq b_r$ slijedi $\alpha \leq l_r$. Sada vrijedi

$$[\tau] \setminus [\nu^{\alpha}\rho, \nu^{l_r}\rho] = [\pi_0 \rtimes \sigma_{sp}] \setminus [\nu^{\alpha}\rho, \nu^{b_r}\rho]. \tag{4.9}$$

Ako je $\alpha - 1 \leq b_{r-1}$ i $b_{r-1} > M$, onda po jednakosti maksimalnih eksponenata u skupovima iz jednakosti (4.9) vrijedi $l_{r-1} = b_{r-1}$. Induktivno ponavljajući argumentaciju dobivamo tvrdnju. ∎

Riješimo sada slučaj u kojem vrijedi $b_r < b + k - 1$ i $s = t$.

Propozicija 4.2.3. Neka su $\tau = \sigma_{(l_1,\dots,l_r)}$ i $\sigma_{sp} = \sigma_{(b_1,\dots,b_r)}$ takvi da je $\min(\tau) = \min(\sigma_{sp})$. Pretpostavimo da je τ subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$. Ako je $b_r < b + k - 1$, onda vrijedi

$$s \leq r - k,\ c_i = b_{r-k+i},\ l_{r-k+i} = b + i - 1 \text{ za } i = 1,\dots,k \text{ i } l_i = b_i \text{ za } i = 1,\dots,r-k.$$

Dokaz. Kako je $b_r < b + k - 1$ i l_r je maksimalni eksponent u kuspidalnom nosaču od (4.8), dobivamo $l_r = b + k - 1$. Zasebno ćemo promatrati svaki od dva slučaja.

(i) Zbog relacije između reprezentacija (4.7) i (4.8), egzaktnost Jacquetovih modula implicira $\pi_0 \otimes \delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{l_r}\rho]) \leq m^*(\pi_1 \times \pi_2)$ za neki $\pi_0 \in \operatorname{Irr}(GL)$. Prema formuli (1.3) vidimo da je $\delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{l_r}\rho])$ subkvocijent od

$$L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{e_1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{e_k}\rho])) \times L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{f_1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{\alpha}\rho, \nu^{f_r}\rho])) \tag{4.10}$$

za neke $(e_1,\dots,e_k)\in \mathrm{Lad}(\pi_1)$ and $(f_1,\dots,f_r)\in \mathrm{Lad}(\pi_2)$. Kako je α minimalni eksponent u kuspidalnom nosaču od $\delta([\nu^\alpha\rho,\nu^{l_r}\rho])$, zaključujemo $f_i=\alpha-r+i-1$ za $i=1,\dots,r-1$. Prema definiciji od $\mathrm{Lad}(\pi_1)$ i $\mathrm{Lad}(\pi_2)$ slijedi $f_r\le b_r<b+k-1$ i $e_1<\ldots<e_k\le b+k-1$, što zbog maksimalnosti eksponenta $l_r=b+k-1$ u kuspidalnom nosaču od $\delta([\nu^\alpha\rho,\nu^{l_r}\rho])$ povlači $e_k=b+k-1$. Dodatno, $e_i=c_i$ za $i=1,\dots,k-1$, jer bi u suprotnom postojali povezani uzastopni segmenti u $L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{e_1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{c_k+1}\rho,\nu^{e_k}\rho]))$, što nije moguće prema Lemi 1.3.13. Time dobivamo

$$\delta([\nu^\alpha\rho,\nu^{l_r}\rho])\le\delta([\nu^{c_k+1}\rho,\nu^{e_k}\rho])\times\delta([\nu^\alpha\rho,\nu^{f_r}\rho]),$$

što povlači $c_k=f_r$. Time je π_0 subkvocijent od

$$\begin{gathered}L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{b}\rho]),\dots,\delta([\nu^{c_{k-1}+1}\rho,\nu^{b+k-2}\rho]))\times\\ \times L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho,\nu^{b_1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{\alpha-1}\rho,\nu^{b_{r-1}}\rho]),\delta([\nu^{c_k+1}\rho,\nu^{b_r}\rho])).\end{gathered}\tag{4.11}$$

Primijetimo da je $l_{r-1}=b+k-2$, jer je l_{r-1} maksimalan eksponent u $[\pi_0]$, (4.11) sadrži $\nu^{b+k-2}\rho$ u kuspidalnom nosaču i $l_{r-1}<l_r=b+k-1$.

Zadnji argument možemo induktivno primijeniti. Zaključujemo da je $l_{r-k+i}=b+i-1$ za $i=1,\dots,k$ jer je $\nu^{b+i-1}\rho$ element kuspidalnog nosača reprezentacije (4.11) i vrijedi $l_{r-k+i}<l_{r-k+i+1}=b+i$. Time direktno slijedi $s\le r-k$.

(ii) Nastavljamo induktivno primjenjujući argumente iz (i). Opišimo $(i+1)$. korak. Slično kao u (i), $\delta([\nu^{\alpha-i}\rho,\nu^{l_{r-i}}\rho])$ je subkvocijent od

$$\begin{gathered}L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho,\nu^{e'_1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{c_{k-i}+1}\rho,\nu^{e'_{k-i}}\rho]))\times\\ L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho,\nu^{f'_1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{\alpha-i}\rho,\nu^{f'_{r-i}}\rho]),\delta([\nu^{c_{k-i+1}+1}\rho,\nu^{f'_{r-i+1}}\rho]),\dots,\delta([\nu^{c_k+1}\rho,\nu^{f'_r}\rho]))\end{gathered}\tag{4.12}$$

gdje je $c_j\le e'_j\le b+j-1$ za $j=1,\dots,k-i$, $e'_1<\ldots<e'_k$, $\alpha-r+j-1\le f'_j\le b_j$ za $j=1,\dots,r-i$, $c_{k-j+1}\le f'_{r-j+1}\le b_{r-j+1}$ za $j=1,\dots,i$ i $f'_1<\ldots<f'_r$. Također,

$$L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho,\nu^{l_1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{\alpha-i-1}\rho,\nu^{l_{r-i-1}}\rho]))\tag{4.13}$$

je subkvocijent od

$$\begin{gathered}L(\delta([\nu^{e'_1+1}\rho,\nu^{b}\rho]),\dots,\delta([\nu^{e'_{k-i}+1}\rho,\nu^{b+k-i-1}\rho]))\times\\ L(\delta([\nu^{f'_1+1}\rho,\nu^{b_1}\rho]),\dots,\delta([\nu^{f'_r+1}\rho,\nu^{b_r}\rho])).\end{gathered}\tag{4.14}$$

Na isti način kao u (i), zaključujemo $f'_j=\alpha-r+j-1$ za $j=1,\dots,r-i-1$. Ako $e'_{k-i}<b+k-i-1$, onda (4.14) sadrži $\nu^{b+k-i-1}\rho$ u kuspidalnom nosaču, ali maksimalni eksponent u

kuspidalnom nosaču reprezentacije (4.13) je $l_{r-i-1} = b+k-i-2$. Dakle, $e'_{k-i} = b+k-i-1$. U kuspidalnom nosaču od $\delta([\nu^{\alpha-i}\rho, \nu^{l_{r-i}}\rho])$ su svi elementi kratnosti jedan i $c_k > \ldots > c_{k-i+1} > c_{k-i}$ pa zaključujemo $f'_{r-j+1} = c_{k-j+1}$ za $j = 1, \ldots, i$. Time je reprezentacija (4.12) jednaka

$$L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{e'_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_{k-i-1}+1}\rho, \nu^{e'_{k-i-1}}\rho]), \delta([\nu^{c_{k-i}+1}\rho, \nu^{l_{r-i}}\rho])) \times \delta([\nu^{\alpha-i}\rho, \nu^{f'_{r-i}}\rho]).$$

Lema 1.3.13 implicira $e'_j = c_j$ za $j = 1, \ldots, k-i-1$. Slijedi $f'_{r-i} = c_{k-i}$ i reprezentacija (4.14) je jednaka

$$L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_{k-i-1}+1}\rho, \nu^{b+k-i-2}\rho]))\times$$
$$L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha-i-1}\rho, \nu^{b_{r-i-1}}\rho]), \delta([\nu^{c_{k-i}+1}\rho, \nu^{b_{r-i}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b_r}\rho])).$$

Nakon k-tog koraka je $L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{l_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha-k}\rho, \nu^{l_{r-k}}\rho]))$ subkvocijent od

$$L(\delta([\nu^{\alpha-r+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha-k}\rho, \nu^{b_{r-k}}\rho]), \delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b_{r-k+1}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b_r}\rho])).$$

Langlandsova klasifikacija implicira $l_i = b_i$ za $i = 1, \ldots, r-k$ i $c_i = b_{r-k+i}$ za $i = 1, \ldots, k$. ■

Sada smo u poziciji dokazati željenu karakterizaciju.

Propozicija 4.2.4. Neka su $\sigma_{sp} = \sigma_{(b_1,\ldots,b_r)}$ i

$$\pi = L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]))$$

reprezentacije za koje vrijedi $-\frac{1}{2} \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ i $c_i + 1 \leq b+i-1$ za $i = 1, \ldots, k$ i $b_1 = -\frac{1}{2}$, ako $c_1 = -\frac{1}{2}$. Za konstante

$$s = \begin{cases} \max\{i : 1 \leq i \leq r,\ b_i = \alpha - r + i - 1\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

$$i_{min} = \begin{cases} \min\{i : s+1 \leq i \leq r,\ b_i > b+k-1\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ r+1, & \text{inače,} \end{cases}$$

i $m = r - i_{min} + 1$, inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži strogo pozitivni ireducibilni subkvocijent τ takav da je $min(\sigma_{sp}) = min(\tau)$ ako i samo ako je $s \leq r-m-k$ i $c_i = b_{r-m-k+i}$ za $i = 1, \ldots, k$.

Definiramo $l_i = b_i$ za $i = 1, \ldots, r-m-k, r-m+1, \ldots, r$ i $l_{r-m-k+i} = b+i-1$ za $i = 1, \ldots, k$. Ako $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži strogo pozitivni ireducibilni subkvocijent τ takav da je $min(\sigma_{sp}) = min(\tau)$, onda je $\tau = \sigma_{(l_1,\ldots,l_r)}$ jedinstveni ireducibilni temperirani subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$, koji je i jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\tau = \sigma_{(l_1,\dots,l_r)}$ subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ takav da je $min(\sigma_{sp}) = min(\tau)$. Lema 4.2.2 i Propozicija 4.2.3 impliciraju $s \leq r-m-k$, $c_i = b_{r-m-k+i}$ za $i = 1,\dots,k$, $l_i = b_i$ za $i = 1,\dots,r-m-k, r-m+1,\dots,r$ i $l_{r-m-k+i} = b+i-1$ za $i = 1,\dots,k$. Da bismo dokazali drugi smjer, primijetimo da je prema Definiciji 1.4.10 uređena r-torka

$$(b_1,\dots,b_{r-m-k},b,\dots,b+k-1,b_{r-m+1},\dots,b_r) \tag{4.15}$$

sp-dopustiva kako je $(b_1,\dots,b_r)$ sp-dopustiva, $b+k-1 < b_{r-m+1}$ i $b_{r-m-k} < b_{r-m-k+1} = c_1 < b$. Označimo uređenu r-torku (4.15) s $(l_1,\dots,l_r)$ i definiramo $\tau = \sigma_{(l_1,\dots,l_r)}$. Dodatno definiramo

$$\Pi = \delta([\nu^{b_{r-m-k+1}+1}\rho, \nu^{b}\rho]) \times \cdots \times \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]) \rtimes \sigma_{sp}.$$

Jasno, $\pi \rtimes \sigma_{sp} \hookrightarrow \Pi$. Uočimo da vrijedi $[2b_{r-m}+1, 2(b+k-1)+1] \cap \mathrm{Jord}_\rho(\sigma_{sp}) = 2b_{r-m}+1$ jer je $2b_{r-m}+1 = (2b_{r-m+1}+1)\_$ i $b_{r-m+1} > b+k-1$. Zbog toga Propozicija 1.6.4 (i) implicira da je strogo pozitivna diskretna serija $\sigma^{(1)} = \sigma_{(b_1,\dots,b_{r-m-1},b+k-1,b_{r-m+1},\dots,b_r)}$ podreprezentacija od $\delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]) \rtimes \sigma_{sp}$. Induktivnom primjenom Propozicije 1.6.4 (i) dobivamo da se τ ulaže u Π. Neka je

$$\pi_0 = \delta([\nu^{b_{r-m-k+1}+1}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes \cdots \otimes \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]) \otimes \sigma_{sp}.$$

Da bismo pokazali $\tau \hookrightarrow \pi \rtimes \sigma_{sp}$, dovoljno je vidjeti da se π_0 javlja s kratnosti jedan u $\mu^*(\Pi)$. Naime, prema Frobeniusovom reciprocitetu svaka ireducibilna podreprezentacija od Π sadrži π_0 u Jacquetovom modulu obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Egzaktnost Jacquetovih modula implicira

$$\sigma_{sp} \leq \delta([\nu^{b_{r-m-k+1}+1}\rho, \nu^{e_1}\rho]) \times \cdots \times \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{e_k}\rho]) \rtimes \sigma_{(i_1,\dots,i_r)}, \tag{4.16}$$

gdje je $b_{r-m-k+i} \leq e_i \leq b+i-1$ za $i = 1,\dots,k$ i $(i_1,\dots,i_r) \in \mathrm{Acc}(\sigma_{sp})$. Lema 4.1.1 implicira da je u tada $e_i = b_{r-m-k+i}$ za $i = 1,\dots,k$ i $\sigma_{(i_1,\dots,i_r)} \cong \sigma_{sp}$. Preostaje pokazati da se $\delta([\nu^{b_{r-m-k+1}+1}\rho, \nu^{b}\rho]) \otimes \cdots \otimes \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])$ nalazi u

$$M^*(\delta([\nu^{b_{r-m-k+1}+1}\rho, \nu^{b}\rho]) \times \cdots \times \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]))$$

s kratnosti jedan. Iz relacije

$$\delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]) \leq \delta([\nu^{b_{r-m-k+1}+1}\rho, \nu^{f_1}\rho]) \times \cdots \times \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{f_k}\rho]),$$

gdje je $b_{r-m-k+i} \leq f_i \leq b+i-1$ za $i = 1,\dots,k$, zaključujemo $b_{r-m-k+i} = f_i$ za $i = 1,\dots,k-1$. Naime, $b_{r-m}+1$ je minimalan eksponent u kuspidalnom nosaču od $\delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])$ i vrijedi $b_{r-m-k+1} < \ldots < b_{r-m}$. Stoga je $f_k = b+k-1$. Induktivno dobivamo da je π_0 konstituent kratnosti jedan u Jacquetovom modulu od Π obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. ■

Razmotrimo sada slučaj $s > t$. Sljedeća propozicija daje nužne uvjete na π, σ_{sp} i τ u ovom slučaju.

Propozicija 4.2.5. Neka su $\tau = \sigma_{(l_1,\ldots,l_r)}$ i $\sigma_{sp} = \sigma_{(b_1,\ldots,b_r)}$. Pretpostavimo da je τ subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$. Ako je $s > t$, onda vrijedi $t = r-m-k, c_i = b_{t+i}, l_{t+i} = b+i-1$ za $i = 1,\ldots,k$ i $l_i = b_i$ za $i = 1,\ldots,t,r-m+1,\ldots,r$.

Dokaz. Prema Teoremu 1.4.11 je $L(\delta([\nu^{\alpha-r+t+1}\rho, \nu^{l_{t+1}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-r+s}\rho, \nu^{l_s}\rho]))\otimes\sigma_{(l_{s+1},\ldots,l_r)}$ konstituent od $\mu^*(\tau)$. Egzaktnost Jacquetovih modula i formula (1.6) impliciraju da postoje realni brojevi $e_1,\ldots,e_k$ takvi da $c_i \le e_i \le b+i-1$ za $i = 1,\ldots,k$ i $(i_1,\ldots,i_r) \in \mathrm{Acc}(\sigma_{sp})$ za koje vrijede sljedeće relacije

$$L(\delta([\nu^{\alpha-r+t+1}\rho, \nu^{l_{t+1}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-r+s}\rho, \nu^{l_s}\rho])) \le \tag{4.17}$$
$$L(\delta([\nu^{e_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{e_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \times L(\delta([\nu^{i_{s+1}+1}\rho, \nu^{b_{s+1}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{i_r+1}\rho, \nu^{b_r}\rho])),$$

$$\sigma_{(l_{s+1},\ldots,l_r)} \le L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{e_1}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{e_k}\rho])) \rtimes \sigma_{(i_{s+1},\ldots,i_r)}. \tag{4.18}$$

Prvo uočimo da je $i_j = b_j$ za $j = r-m+1,\ldots,r$. Ako je $i_r < b_r$, zbog relacije (4.17) imamo jednakost maksimalnih eksponenata $l_s = b_r$. Zbog pretpostavke da σ_{sp} nije kuspidalna vrijedi $s < r$ te postoji l_{s+1} koji je strogo veći od l_s, što nije moguće jer je b_r također maksimalan eksponent u $[\pi \rtimes \sigma_{sp}] = [\tau]$. Dakle, $i_r = b_r$ i induktivno promatrajući maksimalni eksponent u $[\pi \rtimes \sigma_{sp}] \setminus \bigcup_{i=j+1}^{r}[\nu^{\alpha-r+i}\rho, \nu^{b_i}\rho] = [\tau] \setminus \bigcup_{i=j+1}^{r}[\nu^{\alpha-r+i}\rho, \nu^{b_i}\rho]$ dobivamo jednakosti $i_j = b_j$ za $j = r-m+1,\ldots,r-1$. Relaciju (4.17) smo time sveli na

$$\begin{aligned} L(\delta([\nu^{\alpha-r+t+1}\rho, \nu^{l_{t+1}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-r+s}\rho, \nu^{l_s}\rho])) \le \\ L(\delta([\nu^{e_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{e_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]))\times \\ L(\delta([\nu^{i_{s+1}+1}\rho, \nu^{b_{s+1}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{i_{r-m}+1}\rho, \nu^{b_{r-m}}\rho])), \end{aligned} \tag{4.19}$$

dok relacija (4.18) i Lema 4.2.2 impliciraju $l_j = b_j$ za $j = r-m+1,\ldots,r$. Kako je $e_k \le b+k-1$, lako je uočiti da primijenom μ^* na (4.18) dobivamo

$$\begin{aligned} L(\delta([\nu^{\alpha-r+s+1}\rho, \nu^{l_{s+1}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-m}\rho, \nu^{l_{r-m}}\rho])) \le \\ L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{e_1}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{e_k}\rho]))\times \\ L(\delta([\nu^{\alpha-r+s+1}\rho, \nu^{i_{s+1}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-m}\rho, \nu^{i_{r-m}}\rho])). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Uočimo da je $\alpha - r + t + 1$ minimalni eksponent u kuspidalnom nosaču od $[\tau]$ i da je zbog $s > t$ nužno $c_1 = e_1 = \alpha - r + t$. Sada je $\alpha - r + t + 2$ minimalni eksponent u $[\tau] \setminus \{\nu^{\alpha-r+t+1}\rho\}$ pa induktivno zaključujemo $c_i = e_i = \alpha - r + t + i - 1$ za $i = 1, \ldots, s - t$. Analizirajući konstituente oblika $\delta([\nu^{\alpha-r+i}\rho, \nu^{l_i}\rho]) \otimes \pi_i$ Jacquetovih modula reprezentacije

$$L(\delta([\nu^{\alpha-r+i}\rho, \nu^{b+i-1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{e_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \times \pi_i'$$

obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu za $i = t+1, \ldots, s$, po Lemi 1.3.13 zaključujemo da vrijedi $e_i = b + i - 1$ za $i = s - t + 1, \ldots, k$. Primijenom dobivenih jednakosti na (4.18) imamo

$$\sigma_{(l_{s+1}, \ldots, l_r)} \leq L(\delta([\nu^{c_{s-t+1}+1}\rho, \nu^{b+s-t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \rtimes \sigma_{(i_{s+1}, \ldots, i_r)}.$$

Uočimo da zbog nejednakosti $l_i \geq b + i - t - 1$ koje slijede iz ranije analize relacije (4.19), Propozicija 4.2.4 implicira $l_{s+1} = b + s - t$ i u ranijim nejednakostima vrijedi jednakost. Sada direktno slijedi $t = r - m - k$ te je propozicija dokazana u ovom slučaju. Pokazat ćemo da slučaj $i_{s+1} = \alpha - r + s$ nije moguć. Izjednačavanjem maksimalnih eksponenata u kuspidalnim nosačima reprezentacija $L(\delta([\nu^{\alpha-r+s+1}\rho, \nu^{l_{s+1}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha-m-k+i}\rho, \nu^{l_{r-m-k+i}}\rho]))$ i

$$L(\delta([\nu^{c_{s-t+1}+1}\rho, \nu^{b+s-t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_i+1}\rho, \nu^{b+i-1}\rho])) \times \pi''$$

za $i = s - t + 1, \ldots, k$ nakon induktivne primijene od m^* na (4.20), dobivamo $l_{r-m-k+i} = b + i - 1$ za $i = s - t + 1, \ldots, k$. Posebno vrijedi $l_{s+1} \leq b + s - t$. Prema (4.19) je $l_s \geq b + s - t - 1$ pa je zbog $l_s < l_{s+1}$ nužno $l_s = b + s - t - 1$. Time zbog $l_{t+1} < \ldots < l_s$ u (4.19) dobivamo $i_j = b_j$ za $j = s + 1, \ldots, r - m$. No tada imamo $\alpha - r + s = i_{s+1} = b_{s+1}$, što je u kontradikciji s definicijom od s. ■

Konačno iskažimo teorem koji klasificira ireducibilne temperirane subkvocijente od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ pod pretpostavkama potpoglavlja.

Teorem 4.2.6. Neka je $\sigma_{sp} = \sigma_{(b_1, \ldots, b_r)}$ i ljestvičasta reprezentacija

$$\pi = L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])).$$

Pretpostavimo da vrijedi $-\frac{1}{2} \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ i $c_i + 1 \leq b + i - 1$ za $i = 1, \ldots, k$ te ako je

$c_1 = -\frac{1}{2}$, onda $b_1 = -\frac{1}{2}$. Označimo konstante

$$s = \begin{cases} \max\{i : 1 \leq i \leq r, b_i = \alpha - r + i - 1\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

$$i_{min} = \begin{cases} \min\{i : s + 1 \leq i \leq r, b_i > b + k - 1\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ r + 1, & \text{inače,} \end{cases}$$

i $m = r - i_{min} + 1$.

Inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent ako i samo ako $r - m - k \geq 0$ i $c_i = b_{r-m-k+i}$ za $i = 1, \ldots, k$.

Ako $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent, onda je taj subkvocijent strogo pozitivna reprezentacija $\sigma_{(b_1,\ldots,b_{r-m-k},b,\ldots,b+k-1,b_{r-m+1},\ldots,b_r)}$ koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent. Kao što smo primijetili ranije, nužno je strogo pozitivna diskretna serija. Označavamo ju $\tau = \sigma_{(l_1,\ldots,l_r)}$ za neku sp-dopustivu r-torku $(l_1, \ldots, l_r)$ i definiramo

$$t = \begin{cases} \max\{i : l_i = \alpha - r + i - 1, i = 1, \ldots, r\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Zbog jednakosti apsolutnih vrijednosti eksponenata u kuspidalnim nosačima od τ i $\pi \rtimes \sigma_{sp}$, očito je $t \leq s$. Ako vrijedi $t = s$, onda Propozicija 4.2.4 implicira $s \leq r - m - k$ i $c_i = b_{r-m-k+i}$ za $i = 1, \ldots, k$. Zbog $s \geq 0$ imamo $r - m - k \geq 0$. Ako vrijedi $t < s$, onda Propozicija 4.2.5 implicira $t = r - m - k$ i $c_i = b_{r-m-k+i}$ za $i = 1, \ldots, k$. Zbog $t \geq 0$ imamo $t = r - m - k \geq 0$. Primijetimo da Propozicije 4.2.4 i 4.2.5 također impliciraju $\tau \simeq \sigma_{(b_1,\ldots,b_{r-m-k},b,\ldots,b+k-1,b_{r-m+1},\ldots,b_r)}$.

Da bismo dokazali drugi smjer, primijetimo da ako je $r - m - k \geq 0$, onda razlikujemo dva slučaja: $s \leq r - m - k$ ili $s > r - m - k$. Prvo pretpostavimo $s \leq r - m - k$. Prema pretpostavci propozicije vrijedi $c_i = b_{r-m-k+i}$ za $i = 1, \ldots, k$. Definiramo strogo pozitivnu diskretnu seriju $\sigma_{(l_1,\ldots,l_r)}$, gdje je $l_i = b_i$ za $i = 1, \ldots, r - m - k, r - m + 1, \ldots, r$ i $l_{r-m-k+i} = b + i - 1$ za $i = 1, \ldots, k$. U dokazu Propozicije 4.2.4 smo pokazali da je $(l_1, \ldots, l_r)$ sp-dopustiva $r-$torka. Sada su ispunjene sve pretpostavke Propozicije 4.2.4 pa slijedi da $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži τ.

Sada pretpostavimo $s > r - m - k$. Pretpostavke propozicije daju $c_i = b_{r-m-k+i}$ za $i = 1, \ldots, k$. Definiramo $\sigma_{(l_1,\ldots,l_r)}$ kao u slučaju $s \leq r - m - k$ i označimo $t = r - m - k$. Jer je

$s = r-m-(k-s+t)$, Propozicija 4.2.4 implicira da inducirana reprezentacija

$$L(\delta([\nu^{b_{s+1}+1}\rho, \nu^{b+s-t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \rtimes \sigma_{sp}$$

sadrži jedinstvenu ireducibilnu strogo pozitivnu podreprezentaciju, u oznaci σ_1. Prema Teoremu 1.4.7 (ii) zaključujemo

$$\sigma_{(l_1,\ldots,l_r)} \hookrightarrow L(\delta([\nu^{\alpha-r+t+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha-r+s}\rho, \nu^{b+s-t-1}\rho])) \rtimes \sigma_1.$$

Tranzitivnost paraboličke indukcije implicira da je $\sigma_{(l_1,\ldots,l_r)}$ podreprezentacija od

$$\begin{aligned}\Pi = {} & L(\delta([\nu^{\alpha-r+t+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha-r+s}\rho, \nu^{b+s-t-1}\rho]))\times \\ & L(\delta([\nu^{b_{s+1}+1}\rho, \nu^{b+s-t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \rtimes \sigma_{sp}.\end{aligned}$$

Tvrdimo da Π sadrži jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju. Zbog Frobeniusovog reciprociteta, Jacquetov modul svake ireducibilne podreprezentacije od Π obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\begin{aligned}& L(\delta([\nu^{\alpha-r+t+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha-r+s}\rho, \nu^{b+s-t-1}\rho]))\otimes \\ & L(\delta([\nu^{b_{s+1}+1}\rho, \nu^{b+s-t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \otimes \sigma_{sp}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Neka je $\pi' \otimes \pi_1$ subkvocijent od $M^*(L(\delta([\nu^{\alpha-r+t+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha-r+s}\rho, \nu^{b+s-t-1}\rho])))$ te $\pi'' \otimes \pi_2$ subkvocijent od $\mu^*(L(\delta([\nu^{b_{s+1}+1}\rho, \nu^{b+s-t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \rtimes \sigma_{sp})$ tako da vrijedi $\sigma_{sp} \leq \pi_1 \otimes \pi_2$. Ako je π_1 netrivijalna reprezentacija, kuspidalni nosač od π_1 sadrži $\nu^x\rho$ tako da vrijedi $x < \alpha - r + s + 1$. To nije moguće pa vrijedi $\pi_1 \simeq 1$. Dakle, σ_{sp} je subkvocijent od

$$L(\delta([\nu^{b_{s+1}+1}\rho, \nu^{e_{s-t+1}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{e_k}\rho])) \rtimes \sigma_{(i_1,\ldots,i_r)}$$

tako da $e_{s-t+1} < \ldots < e_k$, $b_i \leq e_i \leq b+i-1$ za $i = s-t+1, \ldots, k$ i $(i_1, \ldots, i_r) \in \mathrm{Acc}(\sigma_{sp})$. Uz očito ulaganje

$$L(\delta([\nu^{b_{s+1}+1}\rho, \nu^{e_{s-t+1}}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{e_k}\rho])) \hookrightarrow \prod_{i=s-t+1}^{k} \delta([\nu^{b_{t+i}+1}\rho, \nu^{e_i}\rho])$$

i egzaktnost Jacquetovih modula, Lema 4.1.1 implicira da je

$$\begin{aligned}& L(\delta([\nu^{\alpha-r+t+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha-r+s}\rho, \nu^{b+s-t-1}\rho]))\times \\ & L(\delta([\nu^{b_{s+1}+1}\rho, \nu^{b+s-t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \otimes \sigma_{sp}\end{aligned}$$

jedini ireducibilni konstituent oblika $\pi''' \otimes \sigma_{sp}$ u $\mu^*(\Pi)$. Sada zaključujemo da se reprezentacija (4.21) nalazi s kratnosti jedan u Jacquetovom modulu reprezentacije Π obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Naime, za minimalni eksponent u kuspidalnom nosaču od

$$L(\delta([\nu^{b_{s+1}+1}\rho, \nu^{b+s-t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]))$$

vrijedi $b_{s+1}+1 > \alpha - r + s + 1$, a vidjeli smo da kuspidalni nosač od π_1 sadrži $\nu^x\rho$ za $x < \alpha - r + s + 1$ pa je opet nužno $\pi_1 \simeq 1$. Time smo pokazali da ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju i da je izomorfna s $\sigma_{(l_1,\ldots,l_r)}$. Kako je π jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$L(\delta([\nu^{\alpha-r+t+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha-r+s}\rho, \nu^{b+s-t-1}\rho])) \times$$
$$L(\delta([\nu^{b_{s+1}+1}\rho, \nu^{b+s-t}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]))$$

i reprezentacija Π sadrži jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, zaključujemo da je $\sigma_{(l_1,\ldots,l_r)}$ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$. ■

4.3. TEMPERIRANI SUBKVOCIJENTI II

U ovom potpoglavlju ćemo dovršiti opis ireducibilnih temperiranih subkvocijenata reprezentacije $\pi \rtimes \sigma_{sp}$, gdje je $\sigma_{sp} = \sigma_{(b_1,\dots,b_r)}$ i

$$\pi = L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \tag{4.22}$$

za $-\frac{1}{2} \le c_1 < c_2 < \dots < c_k$ i $c_i + 1 \le b + i - 1$ za $i = 1, \dots, k$. Prema rezultatima potpoglavlja 4.2, preostaje riješiti slučaj $c_1 + 1 = \frac{1}{2}$ i $b_1 \ge \frac{1}{2}$.

Proučimo strukturnu formulu (1.6) primijenjenu na induciranu reprezentaciju $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ u slučaju kojeg promatramo.

$$\mu^*(L(\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho]), \dots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \rtimes \sigma_{sp}) =$$

$$\sum_{\substack{\mathrm{Lad}(\pi)' \\ \mathrm{Acc}(\sigma_{sp})}} L(\delta([\nu^{-e_k}\rho, \nu^{-c_k-1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{-e_2}\rho, \nu^{-c_2-1}\rho]), \delta([\nu^{-e_1}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho])) \times \tag{4.23}$$

$$L(\delta([\nu^{f_1+1}\rho, \nu^b\rho]), \delta([\nu^{f_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \dots, \delta([\nu^{f_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \times \tag{4.24}$$

$$L(\delta([\nu^{i_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \delta([\nu^{i_2+1}\rho, \nu^{b_2}\rho]), \dots, \delta([\nu^{i_r+1}\rho, \nu^{b_r}\rho])) \otimes \tag{4.25}$$

$$L(\delta([\nu^{e_1+1}\rho, \nu^{f_1}\rho]), \delta([\nu^{e_2+1}\rho, \nu^{f_2}\rho]), \dots, \delta([\nu^{e_k+1}\rho, \nu^{f_k}\rho])) \rtimes \sigma_{(i_1,\dots,i_r)} \tag{4.26}$$

Prvo nam je cilj odrediti kandidate za ireducibilne temperirane subkvocijente od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ prema klasifikacijama opisanim u potpoglavljima 1.5 i 1.4. Primijetimo da oni ne mogu biti u strogo pozitivnim diskretnim serijama jer se $\nu^{\frac{1}{2}}\rho$ nalazi u $[\pi \rtimes \sigma_{sp}]$ s kratnosti dva. Prema rezultatima potpoglavlja 1.5, tražimo konstituente od $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_{sp})$ oblika $\delta([\nu^{-x}\rho, \nu^y\rho]) \otimes \pi'$ za $0 < x \le y$ i neki $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$.

Jer su eksponenti u kuspidalnom nosaču reprezentacije (4.23) negativni, zaključujemo da je $\nu^{\frac{1}{2}}\rho$ u kuspidalnom nosaču od (4.24) ili (4.25). Ako je $f_1 + 1 = \frac{1}{2}$, onda $-e_1 = \frac{1}{2}$, pa je maksimalan negativan eksponent jednak $-c_2 - 1$ koji je manji ili jednak $-\frac{3}{2}$. Dakle, da bi (4.23) sadržavala $\nu^{-\frac{1}{2}}\rho$, nužno je $i_1 + 1 = \frac{1}{2}$. Također primijetimo ako je $f_1 = b$, onda $f_1 < \dots < f_k$ implicira da je reprezentacija (4.24) trivijalna. S druge strane, ako $f_1 \le b - 1$, onda Lema 1.3.13 implicira $f_i = b + i - 1$ za $i = 2, \dots, k$, što je time ispunjeno u svakom slučaju. Lema 1.3.13 također povlači $c_i = e_i$ za $i = 2, \dots, k$ jer je (4.23) jedini faktor s negativnim eksponentima.

Na taj način smo problem reducirali na pitanje postojanja subkvocijenta $\delta \in D(GL)$ od

$$\delta([\nu^{-e_1}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho]) \times \delta([\nu^{f_1+1}\rho, \nu^b\rho]) \times \tag{4.27}$$

$$L(\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \delta([\nu^{i_2+1}\rho, \nu^{b_2}\rho]), \dots, \delta([\nu^{i_r+1}\rho, \nu^{b_r}\rho])).$$

Jer je kuspidalni nosač od δ segment i vrijedi $\frac{1}{2} \leq e_1 \leq f_1$, dobivamo sljedeće kandidate:

1. $\delta([\nu^{-e_1}\rho, \nu^{b_1}\rho])$, ako je $f_1 = b$ i $i_j = b_j$ za $j = 2, \ldots, r$,
2. $\delta([\nu^{-e_1}\rho, \nu^{b}\rho])$, ako je $f_1 = b_1$ i $i_j = b_j$ za $j = 2, \ldots, r$,
3. $\delta([\nu^{-e_1}\rho, \nu^{b_l}\rho])$, ako postoji $l \in \{2, \ldots, r\}$ takav da $i_l = b$, $f_1 = b_1$ i $i_j = b_j$ za $j = 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, r$.

Analizu nastavljamo proučavajući ireducibilne temperirane subkvocijente reprezentacije (4.26) u svakom od opisana tri slučaja. U prvom slučaju, ako postoje, su nužno strogo pozitivni subkvocijenti od

$$L(\delta([\nu^{e_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])), \ldots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \rtimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)}.$$

Zbog pretpostavki $e_1 + 1, b_2 \geq \frac{3}{2}$, ako je $e_1 + 1 \leq b$, onda Propozicija 4.2.4 implicira

$$\{e_1, c_2, \ldots, c_k\} \subseteq \{b_2, \ldots, b_r\}.$$

Posebno, $e_1 \geq b_2$. Obzirom da smo pretpostavili $e(\delta([\nu^{-e_1}\rho, \nu^{b_1}\rho])) = b_1 - e_1 \geq 0$, nejednakost $b_1 < b_2$ povlači $e_1 = b$. Tada iz $e_1 < e_2 = c_2 < \ldots < e_k = c_k$ dobivamo $c_i = b + i - 1$ za $i = 2, \ldots, k$. Definicija od π implicira da je to moguće samo u slučaju $k = 1$, koji je opisan u potpoglavlju 1.6. Za preostala dva slučaja nam je potrebna sljedeća lema.

Lema 4.3.1. Neka je σ strogo pozitivna diskretna serija $\sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)}$ ili $\sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_{l-1}, b, b_{l+1}, \ldots, b_r)}$. Neka je reprezentacija

$$L(\delta([\nu^{e_1+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho])), \ldots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \rtimes \sigma \tag{4.28}$$

takva da $\frac{1}{2} \leq e_1 \leq b_1$, $e_1 < c_2 < \ldots < c_k$, $c_i + 1 \leq b + i - 1$ za $i = 2, \ldots, k$ i $b_1 \leq b$. Pretpostavimo da reprezentacija (4.28) sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent. Tada vrijedi $e_1 = b_1$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest $e_1 + 1 \leq b_1$. Ranije smo vidjeli da ako reprezentacija (4.28) sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent, onda je on nužno strogo pozitivan. Označimo ga $\sigma_1 = \sigma_{(x_1, \ldots, x_r)}$. Tada vrijedi $\min(\sigma_1) = \min(\sigma)$ jer je $\min(\sigma) = \frac{3}{2}$ i $e_1 + 1 \geq \frac{3}{2}$. Time iz Leme 4.2.2 i dokaza Propozicije 4.2.3 dobivamo $x_i = b_i$ za $i = r - m + 1, \ldots, r$ i $x_{r-m-k+i} = b + i - 1$ za $i = 2, \ldots, k$. Teorem 1.4.11 implicira da postoji konstituent $\pi' \otimes \sigma_2$ od $\mu^*(\sigma_1)$ takav da je $\sigma_2 \cong \sigma_{(b+1, \ldots, b+k-1, b_{r-m+1}, \ldots, b_r)}$ i $\pi' \in \mathrm{Irr}(GL)$ ljestvičasta reprezentacija

$$L(\delta([\nu^{\frac{3}{2}}\rho, \nu^{x_2}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{\alpha-m-k+1}\rho, \nu^{x_{r-m-k+1}}\rho])).$$

Kao na kraju dokaza Propozicije 4.2.3, dobivamo da je π' subkvocijent reprezentacije

$$\delta([\nu^{e_1+1}\rho,\nu^{b_1}\rho])\times L(\delta([\nu^{\frac{3}{2}}\rho,\nu^{b_2}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-m-k+1}\rho,\nu^{b_{r-m-k+1}}\rho]),\\ \delta([\nu^{c_2+1}\rho,\nu^{b_{r-m-k+2}}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{c_k+1}\rho,\nu^{b_{r-m}}\rho])). \tag{4.29}$$

Ako $r-m-k=0$, onda vrijedi $\pi'\simeq 1$ pa je $e_1=b_1$. Ako je $r-m-k\geq 1$, primijenom preslikavanja m^* na reprezentacije (4.29) i π' te izjednačavanjem njihovih minimalnih eksponenata dok su strogo manji od e_1+1 dobivamo $\delta_i\simeq\delta([\nu^{-\frac{1}{2}+i}\rho,\nu^{b_i}\rho])$ za $i=2,\ldots,i_0$. Ako je $i_0=r-m-k+1$, onda $x_i=b_i$ za $i=2,\ldots,r-m-k+1$ pa slijedi $e_1=b_1$. Inače reprezentacija (4.29) sadrži minimalni eksponent s kratnosti dva kako minimalni eksponenti u kuspidalnim nosačima esencijalno kvadratno integrabilnih reprezentacija koje definiraju

$$L(\delta([\nu^{\frac{3}{2}}\rho,\nu^{b_2}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{\alpha-m-k+1}\rho,\nu^{b_{r-m-k+1}}\rho]))$$

rastu za jedan. To jasno nije moguće jer je π' ljestvičasta reprezentacija. ■

Odredimo kandidate za ireducibilne temperirane subkvocijente u drugom slučaju. Teoremi 1.6.3, 1.6.5 i 4.2.6 povlače da ako je σ ireducibilni subkvocijent reprezentacije oblika

$$L(\delta([\nu^{c_2+1}\rho,\nu^{b+1}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{c_k+1}\rho,\nu^{b+k-1}\rho]))\rtimes\sigma_{(-\frac{1}{2},b_2,\ldots,b_r)}$$

takav da $\delta([\nu^{-b_1}\rho,\nu^{b}\rho])\rtimes\sigma$ sadrži temperirani subkvocijent, onda imamo

$$\sigma\in\{\sigma_{(-\frac{1}{2},b+1,\ldots,b+k-1,b_{r-m+1},\ldots,b_r)},\sigma_{(-\frac{1}{2},b_2,b+1,\ldots,b+k-1,b_{r-m+1},\ldots,b_r)}\}.$$

Naime, tada je $[2b_1+1,2b+1]\cap\mathrm{Jord}_\rho(\sigma)$ prazan ili jednočlan skup.

Ako vrijedi $\sigma=\sigma_{(-\frac{1}{2},b_2,b+1,\ldots,b+k-1,b_{r-m+1},\ldots,b_r)}$, onda zbog $b_2\leq b-1$, diskretna serija σ_{ds} opisana u Teoremu 1.6.5 (iv) je kandidat za temperirani subkvocijent od $\pi\rtimes\sigma_{sp}$. Ako je σ_{ds} subkvocijent od $\pi\rtimes\sigma_{sp}$, iz njezine definicije i Frobeniusovog reciprociteta dobivamo $\delta([\nu^{-b_2}\rho,\nu^{b}\rho])\otimes\sigma_{(-\frac{1}{2},b_1,b+1,\ldots,b+k-1,b_{r-m+1},\ldots,b_r)}\leq\mu^*(\pi\rtimes\sigma_{sp})$. To očito nije moguće jer se $\delta([\nu^{-b_2}\rho,\nu^{b}\rho])$ ne nalazi na listi esencijalno kvadratno integrabilnih subkvocijenata reprezentacije (4.27).

Treći slučaj analiziramo na analogan način. Zbog $b=i_l\leq b_l$, da bismo analizirali treći slučaj koji nije uključen u drugi, pretpostavljamo $b_l\geq b+1$. Jer je $l\geq 2$, prema Teoremima 1.6.3 i 1.6.5 jedini kandidat za σ je reprezentacija $\sigma_{(-\frac{1}{2},b+1,\ldots,b+k-1,b_{r-m+1},\ldots,b_r)}$ za $k\geq 2$ ili $\sigma_{(-\frac{1}{2},b_2,\ldots,b_{l-1},b,b_{l+1},\ldots,b_r)}$ za $k=1$. Da bi za $k\geq 2$ inducirana reprezentacija

$$\delta([\nu^{-b_1}\rho,\nu^{b_l}\rho])\rtimes\sigma_{(-\frac{1}{2},b+1,\ldots,b+k-1,b_{r-m+1},\ldots,b_r)}$$

sadržavala ireducibilni temperirani subkvocijent, nužno je $b_l = b+1$. Tada se prema Teoremu 1.6.5 (iii) u $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_{sp})$ nalazi $\delta([\nu^{-(b+1)}\rho, \nu^{b+1}\rho]) \otimes \pi'$ za $\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$. Prema popisu tri moguća esencijalno kvadratno integrabilna konstituenta reprezentacije (4.27) i $b_1 < b_l$ vidimo da navedena temperirana reprezentacija nije subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$. Za $k=1$ je nužno $l=2$ te su diskretne serije od $\delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{b_2}\rho]) \rtimes \sigma_{(-\frac{1}{2},b,b_3,\ldots,b_r)}$ kandidati za subkvocijente od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$. Prema Teoremu 1.6.5 (iv) vidimo nisu subkvocijenti od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$.

Označimo $b_{min} = \min\{b, b_1\}$, $b_{max} = \max\{b, b_1\}$ i $\sigma_1 = \sigma_{(-\frac{1}{2},b+1,\ldots,b+k-1,b_{r-m+1},\ldots,b_r)}$. Za $k=1$, ako je $b < b_1$, i $k \in \mathbb{N}$, inače, Teorem 1.6.3 implicira da inducirana reprezentacija

$$\delta([\nu^{-b_{min}}\rho, \nu^{b_{max}}\rho]) \rtimes \sigma_1$$

ima dvije ireducibilne temperirane podreprezentacije. Točno jedna od njih je podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_{min}}\rho]) \rtimes \pi_1$ za $\pi_1 \in \mathrm{Irr}(G)$, ako $b_{min} \neq b_{max}$ i $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b}\rho]) \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \pi_2$ za $\pi_2 \in \mathrm{Irr}(G)$, inače. Označimo ju sa σ_2 te sa σ_3 drugu temperiranu reprezentaciju.

Teorem 4.3.2. Neka je $\sigma_{sp} = \sigma_{(b_1,\ldots,b_r)}$ i

$$\pi = L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \delta([\nu^{c_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])),$$

tako da vrijedi $-\frac{1}{2} < c_1 < c_2 < \ldots < c_k$, $c_i + 1 \leq b + i - 1$ za $i = 1, \ldots, k$, $c_1 + 1 = \frac{1}{2}$ i $b_1 \geq \frac{1}{2}$. Neka su konstante

$$s = \begin{cases} \max\{i : 1 \leq i \leq r, b_i = \alpha - r + i - 1\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$i_{min} = \begin{cases} \min\{i : s+1 \leq i \leq r, b_i > b + k - 1\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ r+1, & \text{inače.} \end{cases}$$

i $m = r - i_{min} + 1$.

Ako $b_1 > b$, inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent ako i samo ako $k = 1$.

Ako $b_1 \leq b$, inducirana reprezentacija $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent ako i samo ako $r = m + k$ i $c_i = b_i$ za $i = 2, \ldots, k$.

Ako $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent, onda sadrži jedinstveni ireducibilni temperirani subkvocijent koji je podreprezentacija, a diskretna serija je ako i samo ako $b_1 \neq b$. U tom slučaju je jednaka σ_2.

Dokaz. Slučaj $b_1 > b$ je riješen u Teoremu 1.6.6 (ii). Promotrimo drugi slučaj $b_1 \leq b$. Ranija diskusija implicira da ako $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ sadrži temperirani subkvocijent, onda $r = m+k$ i $c_i = b_i$ za $i = 2, \ldots, k$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $r = m+k$ i $c_i = b_i$ za $i = 2, \ldots, k$. Dokazat ćemo da je σ_2 podreprezentacija od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$. Promotrimo prvo slučaj $b_1 < b$. Zbog ulaganja

$$\sigma_2 \hookrightarrow \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \rtimes \pi_1$$

za $\pi_1 \in \mathrm{Irr}(G)$ koje vrijedi po definiciji od σ_2, zanimaju nas ireducibilne reprezentacije oblika $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \otimes \pi_1$ u Jacquetovom modulu od $\delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_1$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu u svrhu određivanja reprezentacije π_1.

Za svaki konstituent $\pi' \otimes \pi''$ od $\mu^*(\sigma_1)$ vrijedi da ako je $\pi' \neq 1$, onda u $[\pi']$ postoje eksponenti koji su veći ili jednaki $b+1$. Pretpostavili smo $b_1 \leq b$ pa reprezentacija

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \otimes \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_1$$

sadrži sve konstituente od $\mu^*(\delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_1)$ oblika $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \otimes \pi_1$. Prema Teoremu 1.6.6 (i) u $R(G)$ vrijedi

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b}\rho]) \rtimes \sigma_1 = L(\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho]); \sigma_1) + \sigma_0$$

za $\sigma_0 = \sigma_{(b, b+1, \ldots, b+k-1, b_{r-m+1}, \ldots, b_r)}$. Ako je $\pi_1 = L(\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho]); \sigma_1)$, onda

$$\sigma_2 \hookrightarrow \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \rtimes L(\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho]); \sigma_1) \hookrightarrow \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \times \delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho]) \rtimes \sigma_1,$$

što je kontradikcija s kvadratnom integrabilnosti od σ_2 prema Casselmanovom kriteriju. Time vrijedi $\pi_1 = \sigma_0$. Dokažimo da je σ_2 jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$. Označimo

$$\Pi = \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \times \pi \rtimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)}.$$

Primijetimo da je $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \times \pi$ ireducibilna reprezentacija. Naime, ako vrijedi

$$L(\delta_1, \ldots, \delta_l) \leq \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \times \pi,$$

onda $\delta_1 \otimes L(\delta_2, \ldots, \delta_l) \leq m^*(\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \times \pi)$. Kako vrijedi $b_1 < b$, formula (1.6) i Lema 1.3.14 povlače

$$\delta_1 \leq \delta([\nu^{x+1}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \times \delta([\nu^{y+1}\rho, \nu^{z}\rho])$$

za $-\frac{1}{2} \leq x \leq b_1$, $z \in \{b, b+1, \ldots, b+k-1\}$, $-\frac{1}{2} \leq y \leq z$, ako je $z = b$ te $b_2 \leq y \leq z$, inače. Pretpostavimo da vrijedi $x+1 \leq b_1$ i $y+1 \leq z$. Zbog toga je $y = b_1$ i $z = b$ jer vrijedi nejednakost $b_2 > b_1$. Također, $x = -\frac{1}{2}$, jer u suprotnom postoji indeks $i \in \{2, \ldots, l\}$ takav da je $\delta_i = \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^x\rho])$ i time $e(\delta_1) > e(\delta_i)$. Zaključujemo $\delta_1 = \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho])$ i $L(\delta_2, \ldots, \delta_l) = L(\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]), \delta_3, \ldots, \delta_l)$, što je u kontradikciji s $e(\delta_1) > e(\delta_2)$. U slučaju $x = b_1$ korištenjem analognih argumenata dobivamo isti zaključak. Dakle, $\delta_1 = \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho])$ i $L(\delta_1, \ldots, \delta_l)$ je izomorfna Langlandsovoj podreprezentaciji od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \times \pi$. Stoga dobivamo

$$\pi \rtimes \sigma_{sp} \hookrightarrow \pi \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \rtimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)} \simeq \Pi.$$

Teorem 4.2.6 implicira $\sigma_2 \hookrightarrow \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \rtimes \sigma_0 \hookrightarrow \Pi$ pa je po Frobeniusovom reciprocitetu $\Pi' = \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \otimes \pi \otimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)}$ konstituent Jacquetovih modula od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$ i σ_2 obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Pokazat ćemo da se javlja s kratnosti jedan u Jacquetovom modulu od Π obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Naime, ako je $\pi' \otimes \pi''$ ireducibilni konstituent od $M^*(\pi)$ ili $\mu^*(\sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)})$ takav da $\pi' \neq 1$, onda postoji x takav da je $\nu^x\rho \in [\pi']$ i $|x| > b_1$. Stoga je kratnost od Π' u Jacquetovom modulu od Π obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu jednaka kratnosti od $\pi \otimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)}$ u $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)})$. Sada Lema 4.1.1 implicira da se $\pi \otimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)}$ nalazi u $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)})$ s kratnosti jedan.

Sada pretpostavimo $b_1 = b$. Prema definiciji od σ_2 imamo ulaganje

$$\sigma_2 \hookrightarrow \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho]) \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \pi_2$$

za $\pi_2 \in \mathrm{Irr}(G)$. Da bismo odredili π_2, potrebno je opisati ireducibilne konstituente oblika $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \pi_2$ Jacquetovog modula od $\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_1$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Ponavljajući argumente iz slučaja $b_1 < b$, dobivamo da je $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \sigma_1$ jedinstven ireducibilan konstituent traženog oblika Jacquetovog modula od $\delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_1$ obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu, što direktno implicira $\pi_2 \simeq \sigma_1$. Na analogan način kao u prvom slučaju označimo

$$\Pi = \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^b\rho])^2 \times L(\delta([\nu^{b_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \rtimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)}$$

i dokažemo da je σ_2 jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$. Naime, Teorem 4.2.6 implicira da je σ_1 podreprezentacija od

$$L(\delta([\nu^{b_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \rtimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)}.$$

Time $\sigma_2 \hookrightarrow \Pi$. Inkluzija $\pi \rtimes \sigma_{sp} \hookrightarrow \Pi$ i prebrojavanje kratnosti određenih konstituenata u Jacqueteovim modulima slijedi na isti način kao u slučaju $b_1 < b$.

Preostalo je primijetiti da u slučaju $b_1 \leq b$ reprezentacija σ_3 nije subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$. Naime, obje reprezentacije σ_2 i σ_3 su podreprezentacije od $\delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^b\rho]) \rtimes \sigma_1$ te po Frobeniusovom reciprocitetu $\mu^*(\sigma_2)$ i $\mu^*(\sigma_3)$ sadrže $\delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \sigma_1$. No $\delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes \sigma_1$ se nalazi s kratnosti jedan u $\mu^*(\pi \rtimes \sigma_{sp})$, dobiven od

$$\delta([\nu^{-b_1}\rho, \nu^{-\frac{1}{2}}\rho]) \times \delta([\nu^{b_1+1}\rho, \nu^b\rho]) \otimes L(\delta([\nu^{b_2+1}\rho, \nu^{b+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_k+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho]))$$

iz $M^*(\pi)$ i $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\rho, \nu^{b_1}\rho]) \otimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)} \leq \mu^*(\sigma_{sp})$. Stoga σ_3 nije subkvocijent od $\pi \rtimes \sigma_{sp}$. ■

4.4. NETEMPERIRANI SUBKVOCIJENTI

U zadnjem potpoglavlju određujemo ireducibilne netemperirane subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$. Prema Langlandsovoj klasifikaciji su oblika $L(\delta_1, \ldots, \delta_l; \tau)$. Ako je reprezentacija tog oblika subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$, zbog $\mu^*(L(\delta_1, \ldots, \delta_l; \tau)) \geq L(\delta_1, \ldots, \delta_l) \otimes \tau$, egzaktnost Jacqueteovih modula implicira $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_{sp}) \geq L(\delta_1, \ldots, \delta_l) \otimes \tau$. Razmotrimo dva slučaja.

Ako $a \neq \frac{1}{2}$ ili $b_1 = -\frac{1}{2}$, tada sljedeći konstituenti od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_{sp})$ daju kandidate za ireducibilne netemperirane subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$:

$$\begin{aligned} &L(\delta([\nu^{-c_K}\rho, \nu^{-a-K+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a}\rho])) \otimes \\ &L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_K+1}\rho, \nu^{b+K-1}\rho])) \rtimes \sigma_{sp} \end{aligned} \tag{4.30}$$

za neki $\big((c_1, \ldots, c_K), (b, \ldots, b+K-1)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$. Bitno je primijetiti da ako je $c_{i_0} = b + i_0 - 1$, onda $c_i = b + i - 1$ za sve $i \geq i_0$. Zbog toga označimo s $k \in \{1, \ldots, K-1\}$ indeks za kojeg vrijedi $c_k \neq b + k - 1$ i $c_{k+1} = b + k$ ili $k = K$ ako $c_K \neq b + K - 1$. Modificirajmo notaciju s početka potpoglavlja 4.2. Označimo

$$i_{min}^{(k)} = \begin{cases} \min\{i : s+1 \leq i \leq r, b_i > b+k-1\}, & \text{ako takav } i \text{ postoji,} \\ r+1, & \text{inače,} \end{cases}$$

i $m_k = r - i_{min}^{(k)} + 1$. Prema Teoremu 4.2.6, inducirana reprezentacija (4.30) sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent ako i samo ako $r - m_k - k \geq 0$ i $c_i = b_{r-m_k-k+i}$ za $i = 1, \ldots, k$. Ako vrijede ti uvjeti, onda restrikcije postavljene na c_i za $i = 1, \ldots, k$ impliciraju: $a - 1 \leq b_{r-m_k-k+1}$ i $b_{r-m_k} + 1 \leq b + k - 1$. Uočimo da ako vrijede sljedeći uvjeti:

$$r - m_k - k \geq 0, \ a - 1 \leq b_{r-m_k-k+1} \text{ i } b_{r-m_k} + 1 \leq b + k - 1, \tag{4.31}$$

onda možemo izabrati c_i za $i = 1, \ldots, k$ takve da reprezentacija (4.30) sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent. Ako uvjeti vrijede, strogo pozitivni subkvocijent od (4.30) označimo

$$\sigma_k = \sigma_{(b_1, \ldots, b_{r-m_k-k}, b, \ldots, b+k-1, b_{r-m_k+1}, \ldots, b_r)}$$

i kandidat za ireducibilni netemperirani subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$ je jednak

$$\begin{aligned} \pi_k = L(&\delta([\nu^{-b-K+1}\rho, \nu^{-a-K+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b-k}\rho, \nu^{-a-k}\rho]), \\ &\delta([\nu^{-b_{r-m_k}}\rho, \nu^{-a-k+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_{r-m_k-k+1}}\rho, \nu^{-a}\rho]); \sigma_k). \end{aligned}$$

Primijetimo da je uvjet $b_{r-m_k}+1 \leq b+k-1$ ekvivalentan s $b+k-1 \notin \{b_1,\ldots,b_r\}$. Za uniforman opis ireducibilnih netemperiranih subkvocijenata od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$, neka $k \in \{1,\ldots,K\}$ također označava maksimalan indeks tako da uvjeti (4.31) vrijede. Ako takav indeks iz skupa $\{1,\ldots,K\}$ ne postoji, definiramo $k=0$, $\sigma_0 = \sigma_{sp}$ i

$$\pi_0 = L(\delta([\nu^{-b-K+1}\rho, \nu^{-a-K+1}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{-b}\rho, \nu^{-a}\rho]);\sigma_0).$$

U svrhu potpunosti rezultata, opisat ćemo kompozicioni niz od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$. Ako sadrži ireducibilni temperirani subkvocijent, onda je prema Teoremu 4.2.6 jedinstven i označit ćemo ga sa $\sigma^{(1)}$. Ako označimo s I skup svih indekasa $i \in \{1,\ldots,k\}$ takvih da $b+i-1 \in \{b_1,\ldots,b_r\}$, dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 4.4.1. Ako $a \neq \frac{1}{2}$ ili $b_1 = -\frac{1}{2}$, inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$ je u $R(G)$ jednaka

(i) $\displaystyle\sum_{i\in\{0,\ldots,k\}\setminus I} \pi_i + \sigma^{(1)}$, ako $k=K$ i $a+i-1 = b_{r-m_k-k+i}+1$ za $i=1,\ldots,k$,

(ii) $\displaystyle\sum_{i\in\{0,\ldots,k\}\setminus I} \pi_i$, inače.

Dokaz. Pokazat ćemo da uvjeti $r-m_i-i \geq 0$ i $a-1 \leq b_{r-m_i-i+1}$ vrijede za svaki $i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I$. Pretpostavimo $k-1 \notin I$. Obzirom da navedeni uvjeti vrijede za k, lako je vidjeti da vrijede i za $k-1$. Naime, prema definiciji dobivamo $m_{k-1} \geq m_k$ te zbog $b+k-1 \notin \{b_1,\ldots,b_r\}$, vrijedi jednakost. Također, lako pokazujemo $a-1 \leq b_{r-m_k-k+1} < b_{r-m_k-k+2}$ iz strogog rasta od b_i.

Definiramo cijele brojeve $l_1, l_2 \geq 1$ takve da $k,\ldots,k-l_1+1 \notin I$, $k-l_1,\ldots,k-l_1-l_2+1 \in I$ i $k-l_1-l_2 \notin I$. Primijetimo da dokazom da uvjeti vrijede za $k-l_1-l_2$, induktivno dokazujemo tvrdnju. Iz ranije argumentacije slijedi $m_k = m_{k-1} = \ldots = m_{k-l_1+1}$. Zbog $b_{r-m_k} \leq b+k-l_1-1$, $b_1 < \ldots < b_r$ i $b+(k-i)-1 \in \{b_1,\ldots,b_r\}$ za $i \in \{l_1,\ldots,l_1+l_2-1\}$, zaključujemo $b_{r-m_k-l_2+1} = b+k-l_1-l_2$. Sada $b_{r-m_k-l_2} \leq b+k-l_1-l_2-2$ jer vrijedi $k-l_1-l_2 \notin I$. Iz toga slijedi $m_{k-l_1-l_2} = m_k+l_2$. Preostali uvjeti također vrijede:

$$r-m_{k-l_1-l_2}-(k-l_1-l_2) \geq 0 \Leftrightarrow r-m_k-k+l_1 \geq 0 \text{ i } a-1 \leq b_{r-m_k-k+1} < b_{r-m_k-k+l_1+1}.$$

Sada smo u poziciji dokazati $\pi_i \leq \pi_S \rtimes \sigma_{sp}$ za svaki $i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I$. Zbog jednostavnije notacije, dokazat ćemo za $i=k$. Označimo s Π'_k induciranu reprezentaciju

$$\Big(\prod_{i=1}^{k} \delta([\nu^{-b_{r-m-k+i}}\rho, \nu^{-a-i+1}\rho])\Big) \times$$
$$L(\delta([\nu^{b_{r-m-k+1}+1}\rho, \nu^{b}\rho]),\ldots,\delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \rtimes \sigma_{sp}.$$

Označimo $\Pi_k = L(\delta([\nu^{-b-K+1}\rho, \nu^{-a-K+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b-k}\rho, \nu^{-a-k}\rho])) \rtimes \Pi'_k$. Definicije od σ_k i π_k impliciraju $\pi_k \leq \Pi_k$. Primijetimo da Lema 1.3.14 induktivno implicira da je

$$L(\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]), \ldots, \delta([\nu^{a+k-1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \rtimes \sigma_{sp}$$

subkvocijent reprezentacije Π'_k pa stoga $\pi_S \rtimes \sigma_{sp} \leq \Pi_k$. Očito je

$$\pi'_k = L(\delta([\nu^{-b-K+1}\rho, \nu^{-a-K+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b-k}\rho, \nu^{-a-k}\rho])) \otimes \tag{4.32}$$

$$L(\delta([\nu^{-b_{r-m}}\rho, \nu^{-a-k+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_{r-m-k+1}}\rho, \nu^{-a}\rho])) \otimes \tag{4.33}$$

$$L(\delta([\nu^{b_{r-m-k+1}+1}\rho, \nu^b\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])) \otimes \sigma_{sp}$$

sadržan u Jacqueteovim modulima od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$ i π_k obzirom na odgovarajuće paraboličke podgrupe. Pokazat ćemo da se javlja s kratnosti jedan u Jacqueteovom modulu od Π_k obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Neka je $\pi_1 \otimes \pi_2$ konstituent od $\mu^*(\Pi_k)$ takav da je reprezentacija π_1 izomorfna s (4.32). Kako se eksponenti $-b-K+1, \ldots, -b-k$ ne nalaze u $[\pi']$ za $\pi' \otimes \pi'' \leq \mu^*(\Pi'_k)$, zaključujemo da vrijedi

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \leq (\pi_1 \otimes 1) \rtimes (1 \otimes \Pi'_k) \leq M^*(\pi_1) \rtimes \mu^*(\Pi'_k).$$

Nadalje, neka je $\pi_3 \otimes \pi' \leq M^*(L(\delta([\nu^{b_{r-m-k+1}+1}\rho, \nu^b\rho]), \ldots, \delta([\nu^{b_{r-m}+1}\rho, \nu^{b+k-1}\rho])))$ takav da je reprezentacija (4.33) subkvocijent od $\pi_3 \times \pi''$ za neki $\pi'' \in \mathrm{Irr}(GL)$. Kako su eksponenti u (4.33) negativni, zaključujemo da vrijedi

$$\pi_3 \simeq L(\delta([\nu^{-x_{r-m}}\rho, \nu^{-b_{r-m}-1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-x_{r-m-k+1}}\rho, \nu^{-b_{r-m-k+1}-1}\rho]))$$

za realne brojeve x_i takve da je $b_i \leq x_i$ za $i = r-m-k+1, \ldots, r-m$ te $x_{r-m-k+1} < \ldots < x_{r-m}$. Uočimo da je minimalni eksponent u kuspidalnom nosaču reprezentacije (4.33) jednak $-b_{r-m}$. Time je $x_{r-m} = b_{r-m}$ te je $\pi'' = \delta([\nu^{-b_{r-m}}\rho, \nu^{-a-k+1}\rho]) \times \pi'''$. Analogno, jer je $-b_{r-m-1}$ minimalni eksponent u kuspidalnom nosaču od (4.33) i $\pi_3 \times \pi''$ bez $[\nu^{-b_{r-m}}\rho, \nu^{-a-k+1}\rho]$, zaključujemo $x_{r-m-1} = b_{r-m-1}$ i induktivno dobivamo $\pi_3 \simeq 1$. Time nam je preostalo primijetiti da se prema Lemi 4.1.1 π'_k nalazi u Jacqueteovom modulu od Π_k s kratnosti jedan. ■

Potpoglavlje završavamo analizom preostalog slučaja u kojem je $a = \frac{1}{2}$ i $b_1 \geq \frac{1}{2}$. Prvo odredimo kandidate analogno kao u prvom slučaju. Konstituenti od $\mu^*(\pi_S \rtimes \sigma_{sp})$ oblika

$$L(\delta([\nu^{-c_K}\rho, \nu^{-a-K+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{-a}\rho])) \otimes$$

$$L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^b\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_K+1}\rho, \nu^{b+K-1}\rho])) \rtimes \sigma_{sp} \tag{4.34}$$

za neki $\big((c_1, \ldots, c_K), (b, \ldots, b+K-1)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$ daju dva tipa kandidata. Ako inducirana reprezentacija (4.34) sadrži ireducibilnu temperiranu podreprezentaciju, onda je jedinstvena

(i) strogo pozitivna diskretna serija određena u Teoremu 4.2.6, ako $c_1 \geq \frac{1}{2}$,

(ii) ireducibilna temperirana reprezentacija određena u Teoremu 4.3.2, ako $c_1 = -\frac{1}{2}$.

U slučaju (ii), definiramo sa $\sigma^{(2)}$ diskretnu seriju jednaku $\sigma_2^{(1)}$, ako $b < b_1$, $\sigma_2^{(2)}$, ako $b_1 < b$ ili $\sigma_2^{(3)}$, ako $b_1 = b$, analogno definicijama u Potpoglavlju 4.3. Ako $b_1 \leq b$, argumenti iz dokaza Teorema 4.4.1 impliciraju da postoji najviše jedan element $k_{temp} \in \{1,\ldots,K\}$ takav da je $k_{temp} \notin I$ i $r = m_{k_{temp}} + k_{temp}$. Naime, ako takav element postoji i $k_{temp} - 1 \notin I$, tada smo pokazali $m_{k_{temp}} = m_{k_{temp}-1}$ pa $r \neq m_{k_{temp}-1} + k_{temp} - 1$. Općenito, $k_{temp} - l_1 - l_2 \notin I$ i tada $m_{k_{temp}-l_1-l_2} = m_{k_{temp}} + l_2$. Jer je $l_1 \geq 1$, ponovno nemamo željenu jednakost. Ako je $b < b_1$, tada $k_{temp} = 1$. Definiramo reprezentaciju

$$\pi_{temp} = L(\delta([\nu^{-b-K+1}\rho, \nu^{-a-K+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b-k_{temp}}\rho, \nu^{-a-k_{temp}}\rho]),$$
$$\delta([\nu^{-b_{k_{temp}}}\rho, \nu^{-a-k_{temp}+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_2}\rho, \nu^{-a-1}\rho]); \sigma^{(2)})$$

i ako $b_1 < b$, dodatno pretpostavljamo na k_{temp} da vrijedi $a \leq b_2$. Kandidati za netemperirane subkvocijente od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$ su također dobiveni od konstituenata oblika

$$L(\delta([\nu^{-c_K}\rho, \nu^{-a-K+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-c_1}\rho, \nu^{b_1}\rho])) \otimes$$
$$L(\delta([\nu^{c_1+1}\rho, \nu^{b}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{c_K+1}\rho, \nu^{b+K-1}\rho])) \rtimes \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_r)} \tag{4.35}$$

za neki $\big((c_1,\ldots,c_K),(b,\ldots,b+K-1)\big) \in \mathrm{Lad}(\pi_S)'$ i $c_1 \geq \frac{1}{2}$. Primijetimo da je ireducibilni temperirani subkvocijent inducirane reprezentacije (4.35) nužno strogo pozitivna reprezentacija. Stoga analiza ide na analogan način kao u Teoremu 4.4.1, do na zamjenu oznake k sa k' te definiramo $I' = I \setminus \{b_1\}$, $\sigma'_k = \sigma_{(-\frac{1}{2}, b_2, \ldots, b_{r-m_k-k}, b, \ldots, b+k-1, b_{r-m_k+1}, \ldots, b_r)}$ i

$$\pi'_k = L(\delta([\nu^{-b-K+1}\rho, \nu^{-a-K+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b-k}\rho, \nu^{-a-k}\rho]),$$
$$\delta([\nu^{-b_{r-m_k}}\rho, \nu^{-a-k+1}\rho]), \ldots, \delta([\nu^{-b_{r-m_k-k+1}}\rho, \nu^{b_1}\rho]); \sigma'_k).$$

Slijedeći dokaz Teorema 4.4.1 vidimo da je svaki π'_i za $i \in \{0,\ldots,k'\} \setminus I'$ ireducibilni subkvocijent od $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$. U sljedećem teoremu opisujemo kompozicioni niz u promatranom slučaju.

Teorem 4.4.2. Ako $a = \frac{1}{2}$ i $b_1 \geq \frac{1}{2}$, inducirana reprezentacija $\pi_S \rtimes \sigma_{sp}$ za $K \geq 2$ je u $R(G)$ jednaka

(i) $\sum_{i \in \{0,\ldots,k\} \setminus I} \pi_i + \sum_{i \in \{0,\ldots,k'\} \setminus I'} \pi'_i + \pi_{temp}$, ako postoji $k_{temp} \in \{1,\ldots,K\}$ takav da $k_{temp} \notin I$, $r = m_{k_{temp}} + k_{temp}$ te je $k_{temp} = 1$ za $b < b_1$ i $a \leq b_2$ za $b_1 \leq b$,

(ii) $\sum_{i \in \{0,\ldots,k\} \setminus I} \pi_i + \sum_{i \in \{0,\ldots,k'\} \setminus I'} \pi'_i$, inače.

ZAKLJUČAK

Reprezentacije klasičnih grupa inducirane iz esencijalno Speh reprezentacije na općem linearnom dijelu imaju važnu ulogu u teoriji reprezentacija p-adskih grupa. Rezultatima disertacije postignut je važan napredak u smjeru njihovog razumijevanja te postavljen temelj za daljnja istraživanja.

Kao što smo vidjeli na kraju trećeg poglavlja, poznavanjem kompozicionog niza promatranih reprezentacija bez uvjeta na kuspidalni nosač moguće je odrediti primjere ireducibilnih unitarnih reprezentacija. Rezultati tog tipa pridonose razumjevanju strukture unitarnog duala promatranih grupa.

Nastavak istraživanja u smjeru postignutih rezultata svakako uključuje promatranje ljestvičaste reprezentacije na dijelu opće linearne grupe bez uvjeta na kuspidalni nosač. Prirodan nastavak je također determinacija unitarnih reprezentacija u kompozicionim nizovima promatranih reprezentacija. Noviji pristup pitanjima unitarizabilnosti koristi Arthurove pakete te bi bilo korisno vidjeti njegovu primjenu u našem slučaju. Dodatno, motivirani induktivnim dokazom unitarnosti Speh reprezentacija, nameće se pitanje postojanja analognog fenomena u slučaju klasičnih grupa. U narednim radovima ćemo se baviti opisanim pitanjima.

BIBLIOGRAFIJA

[1] ARTHUR, J. *The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups*, vol. 61 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[2] BERNSTEIN, I. N., AND ZELEVINSKY, A. V. Induced representations of reductive p-adic groups. I. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10*, 4 (1977), 441–472.

[3] BERNSTEIN, J. *Draft of: Representations of p-adic groups*. Harvard University, Fall 1992.

[4] BOREL, ARMAND; WALLACH, N. R. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*. No. 294 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[5] BRUHAT, F., AND TITS, J. Groupes réductifs sur un corps local. ii. schémas en groupes. existence d'une donnée radicielle valuée. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 60 (1984), 197–376.

[6] CASSELMAN, W. *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups*. Preprint.

[7] DELIGNE, P. Le "centre" de Bernstein. *Representations of reductive groups over a local field, Travaux en Cours* (1984), 1–32.

[8] FLATH, D. Decomposition of representations into tensor products. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1* (1979), Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., pp. 179–183.

[9] GAN, W. T., AND LOMELÍ, L. Globalization of supercuspidal representations over function fields and applications. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 20*, 11 (2018), 2813–2858.

[10] GOLDBERG, D. Reducibility of induced representations for Sp(2n) and SO(n). *Amer. J. Math. 116*, 5 (1994), 1101–1151.

[11] HANZER, M., AND MUIĆ, G. On an algebraic approach to the Zelevinsky classification for classical p-adic groups. *J. Algebra 320*, 8 (2008), 3206–3231.

[12] HUMPHREYS, J. E. *Linear algebraic groups.* No. 21 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[13] JACQUET, H., AND LANGLANDS, R. P. Automorphic forms on $GL(2)$. *Springer-Verlag, Berlin-New York 114* (1970.), vii+548.

[14] JANTZEN, C. On supports of induced representations for symplectic and odd-orthogonal groups. *Amer. J. Math. 119*, 6 (1997), 1213–1262.

[15] KRET, ARNO; LAPID, E. Jacquet modules of ladder representations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris 350*, 21-22 (2012), 937–940.

[16] LANG, S. *Algebra*. Revised third edition, Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, Inc., 2002.

[17] LAPID, EREZ; MÍNGUEZ, A. On a determinantal formula of Tadić. *Amer. J. Math. 136*, 1 (2014), 111–142.

[18] LAPID, EREZ; MÍNGUEZ, A. On parabolic induction on inner forms of the general linear group over a non-archimedean local field. *Selecta Math. (N.S.) 22*, 4 (2016), 2347–2400.

[19] LAPID, E.; TADIĆ, M. Some results on reducibility of parabolic induction for classical groups. *Amer. J. Math. 142*, 2 (2020), 505–546.

[20] MATIĆ, I. Strongly positive representations of metaplectic groups. *J. Algebra 334*, 1 (2011), 255–274.

[21] MATIĆ, I. Jacquet modules of strongly positive representations of the metaplectic group $\widetilde{Sp(n)}$. *Trans. Amer. Math. Soc. 365*, 5 (2013), 2755–2778.

[22] MATIĆ, I. On discrete series subrepresentations of the generalized principal series. *Glas. Mat. Ser. III 51(71)*, 1 (2016), 125–152.

[23] MATIĆ, I. Composition factors of a class of induced representations of classical p-adic groups. *Nagoya Math. J. 227* (2017), 16–48.

[24] MATIĆ, I., AND TADIĆ, M. On Jacquet modules of representations of segment type. *Manuscripta Math. 147*, 3 (2015), 437–476.

[25] MILNE, J. S. Algebraic number theory (v3.08), 2020. Available at www.jmilne.org/math/.

[26] MŒGLIN, C. Sur la classification des séries discrètes des groupes classiques p-adiques: paramètres de Langlands et exhaustivité. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 4*, 2 (2002), 143–200.

[27] MŒGLIN, C. Paquets stables des séries discrètes accessibles par endoscopie tordue; leur paramètre de Langlands. In *Automorphic forms and related geometry: assessing the legacy of I. I. Piatetski-Shapiro*, vol. 614 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, pp. 295–336.

[28] MŒGLIN, COLETTE; TADIĆ, M. Construction of discrete series for classical p-adic groups. *J. Amer. Math. Soc. 15*, 3 (2002), 715–786.

[29] MUIĆ, G. Composition series of generalized principal series; the case of strongly positive discrete series. *Israel J. Math. 140* (2004), 157–202.

[30] MUIĆ, G. Reducibility of generalized principal series. *Canad. J. Math. 57*, 3 (2005), 616–647.

[31] O'MEARA, O. T. *Introduction to quadratic forms.* Reprint of the 1973 edition, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[32] P., C. Representations of p-adic groups: a survey. *Proc. Sympos. Pure Math.* (1979.), 111–155.

[33] RAMAKRISHNAN, DINAKAR; VALENZA, R. J. *Fourier analysis on number fields.* Graduate Texts in Mathematics, 186. Springer-Verlag, New York, 1999.

[34] RENARD, D. *Représentations des groupes réductifs p-adiques.* Cours Spécialisés 17. Société Mathématique de France, Paris, 2010.

[35] SHAHIDI, F. A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups. *Ann. of Math. (2) 132*, 2 (1990), 273–330.

[36] SHAHIDI, F. Twisted endoscopy and reducibility of induced representations for p-adic groups. *Duke Math. J. 66*, 1 (1992), 1–41.

[37] SILBERGER, A. J. Special representations of reductive p-adic groups are not integrable. *Ann. of Math. (2) 111*, 3 (1980), 571–587.

[38] TADIĆ, M. Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-Archimedean case). *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19*, 3 (1986), 335–382.

[39] TADIĆ, M. An external approach to unitary representations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 28*, 2 (1993), 215–252.

[40] TADIĆ, M. Structure arising from induction and Jacquet modules of representations of classical p-adic groups. *J. Algebra 177*, 1 (1995), 1–33.

[41] TADIĆ, M. On reducibility of parabolic induction. *Israel J. Math. 107* (1998), 29–91.

[42] TADIĆ, M. On tempered and square integrable representations of classical p-adic groups. *Sci. China Math. 56*, 11 (2013), 2273–2313.

[43] ZELEVINSKY, A. V. Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13*, 2 (1980), 165–210.

Životopis

Barbara Bošnjak rođena je 16. prosinca 1993. godine u Osijeku. Završila je III. gimnaziju u Osijeku te potom 2012. godine upisala preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirala je 2017. godine na diplomskom studiju Teorijska matematika s temom *Integracija na kompaktnim Riemannovim plohama* pod mentorstvom akademika Gorana Muića. Tokom studija je primala stipendiju za izvrsnost grada Zagreba te je dobitnica nagrade Prirodoslovno-matematičkog fakulteta za izniman uspjeh na diplomskom studiju.

U akademskoj godini 2017/18. je upisala doktorski studij matematike i zaposlila se kao asistent na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Član je Zavoda za algebru i osnove matematike te sudjeluje u radu *Seminara za unitarne reprezentacije i automorfne forme*. Tokom doktorskog studija je objavila članak *Representations induced from cuspidal and ladder representations of classical p-adic groups* u časopisu Proceedings of the American Mathematical Society. Sudjelovala je na konferencijama i radionicama u Dubrovniku, Padovi, Cambridgeu te je održala predavanje na seminaru *Representation theory and automorphic forms* na Matematičkom odsjeku Sveučilišta u Beču.