Generalizirani Wronskiani i modularne krivulje

Mikoč, Damir

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Damir Mikoč

Generalizirani Wronskiani i modularne krivulje

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2022.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Damir Mikoč

Generalizirani Wronskiani i modularne krivulje

DOKTORSKI RAD

Mentor:

prof.dr.sc. Goran Muić

Zagreb, 2022.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Damir Mikoč

Generalized Wronskians and Modular Curves

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:

prof.dr.sc. Goran Muić

Zagreb, 2022.

Zahvala

Zahvaljujem se svom mentoru Goranu Muiću na usmjeravanju kroz doktorski studij, brojnim prezentacijama zanimljivih matematičkih ideja te izuzetnoj podršci, strpljenju i razumijevanju.

Također se zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima na podršci, razumijevanju i dijeljenju pozitivne eneggije meni prijeko potrebne u ovom periodu života.

Sažetak

Fokus ove teze su modularne krivulje i modularne forme za neku Fuchsovu grupu prve vrste Γ, posebno za grupu $\Gamma_0(N)$. Proučavamo Weierstrassove i n–Weierstrassove točke, $n \in \mathbb{N}$, na krivulji $\mathfrak{R}_\Gamma$ u jeziku modularnih formi. Za danu modularnu krivulju $\mathfrak{R}_\Gamma$ i paran cijeli broj $m \geq 4$ želimo dati efektivan algoritam za provjeru jeli kasp $\mathfrak{a}_\infty$, $m/2$–Weierstrassova točka na $\mathfrak{R}_\Gamma$. Uvodimo prirodno poopćenje pojma Wronskiana kaspidalnih modularnih forma. Proučavamo Wronskiane kanonskih baza prostora $M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$. Proučavamo biracionalna preslikavanja $X(1) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ i računamo jednadžbe dobivenih krivulja.

Razvijen je algoritam u SAGE-u koji funkcionira za sve krivulje tipa $X_0(N)$, genusa $g \geq 3$ koje nisu hipereliptičke. Kao posljedicu tog algoritma izračunali smo jednadžbe svih kanonskih krivulja tipa $X_0(N)$, genusa $3 \leq g \leq 5$, koje nisu hipereliptičke.

Razvijen je algoritam za račun Wronskiana linearno nezavisnih modularnih formi. U SAGE-u su izračunati Wronskiani kanonskih baza prostora $M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$, za parne $m = 12, 14, 16, \ldots, 108, 110, 120$. Temeljem toga dokazan je teorem o vrijednosti tih Wronskiana za bilo koji parni m, do na neku ne–nul konstantu λ. Za $m = 12t$ iskazana je slutnja o vrijednosti konstante λ do na predznak.

Dani su numerički primjeri računa u SAGE-u kojima smo dobili jednadžbe ravninskih krivulja $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ biracionalno ekvivalentnih krivulji $X(1)$.

Ključne riječi: Fuchsova grupa prve vrste, Riemannova ploha, gornja poluravnina, modularna grupa, modularna krivulja, Weierstrassova točka, modularna forma, Wronskian, krivulja $X(1)$, biracionalno preslikavanje, krivulja $X_0(N)$, hipereliptička krivulja, kanonska krivulja.

Summary

We are interested in modular curves and modular forms for some Fuchsian group of the first kind, especially for the group $\Gamma_0(N)$. We are studying Weierstrass and n–Weierstrass points, $n \in \mathbb{N}$, on curve $\mathfrak{R}_\Gamma$ in the language of modular forms. For a given modular curve $\mathfrak{R}_\Gamma$ and an even integer $m \geq 4$, we want to give an effective algorithm for checking whether cusp $\mathfrak{a}_\infty$ is a Weierstrass point on $\mathfrak{R}_\Gamma$. We have introduced a natural generalization of the usual notion of the Wronskian of cuspidal modular forms. We are studying the Wronskians of the canonical bases of the spaces $M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$. We are studying the birational maps $X(1) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ and calculate the equations of the obtained curves.

An algorithm has been developed in SAGE that works for all curves of type $X_0(N)$, of the genus $g \geq 3$, that are not hyperelliptic. As a consequence of this algorithm, we calculated the equations of all canonical curves of type $X_0(N)$, genus $3 \leq g \leq 5$, which are not hyperelliptic.

An algorithm for the calculation of the Wronskian of linearly independent modular forms has been developed. In SAGE, we have calculated Wronskians of canonical bases for $M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$, for even $m = 12, 14, 16, \ldots, 108, 110, 120$. Based on this, the theorem on the value of these Wronskians for any even m, up to some non - zero constant λ, has been proved. For $m = 12t$ we made a conjecture about the value of the constant λ up to the sign.

Keywords: Fuchsian group of the first kind, Riemann surface, upper half-plane, modular group, modular curve, Weierstrass point, modular form, Wronskian, curve $X(1)$, birational map, curve $X_0(N)$, hyperelliptic curve, canonical curve.

Extended summary

We are interested in modular curves and modular forms for some Fuchsian group of the first kind, especially for the group $\Gamma_0(N)$. We are studying Weierstrass and n–Weierstrass points, $n \in \mathbb{N}$, on curve $\mathfrak{R}_\Gamma$ in the language of modular forms. For a given modular curve $\mathfrak{R}_\Gamma$ and an even integer $m \geq 4$, we want to give an effective algorithm for checking whether cusp $\mathfrak{a}_\infty$ is a Weierstrass point on $\mathfrak{R}_\Gamma$. We have introduced a natural generalization of the usual notion of the Wronskian of cuspidal modular forms. We are studying the Wronskians of the canonical bases of the spaces $M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$. We are studying the birational maps $X(1) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ and calculate the equations of the obtained curves.

We give interpretation of m-Weierstrass points in terms of modular forms. Let $m \geq 2$ even. We denote by $\mathcal{A}_m(\Gamma)$ the space of all meromorphic modular forms. By [18, Theorem 2.3.1], there exists isomorphism of vector spaces

$$\mathcal{A}_m(\Gamma) \longrightarrow D^{m/2}(\mathfrak{R}_\Gamma),$$

denoted by $f \longmapsto \omega_f$. We are interested in subspace of $\mathcal{A}_m(\Gamma)$ which maps isomorphically onto $H^{m/2}(\mathfrak{R}_\Gamma)$. We denote that space by $S_m^H(\Gamma)$. So we have $S_m^H(\Gamma) \simeq H^{m/2}(\mathfrak{R}_\Gamma)$. We have following result [25, Lemma 4-5 (x)] :

Assume that $g(\Gamma) \geq 1$, and $\mathfrak{a}_\infty$ is a Γ-cusp. Then, $\mathfrak{a}_\infty$ is **not** a $\frac{m}{2}$–Weierstrass point if and only if there exists a basis $f_1, \ldots f_t$ of $S_m^H(\Gamma)$ such that their q–expansions are of the form

$$f_u = a_u q^{u+m/2-1} + \text{higher order terms in } q, \quad 1 \leq u \leq t, \quad \text{where} \quad a_u \in \mathbb{C}, \quad a_u \neq 0.$$

The problem is how to compute space $S_m^H(\Gamma)$. By $S_{m,2}^H(\Gamma)$ we denote subspace of $S_m^H(\Gamma)$ generated by all monomials of degree $\frac{m}{2}$ of basis elements of $S_2(\Gamma)$. When $g(\Gamma) \geq 3$ and $\mathfrak{R}_\Gamma$ is not hyperelliptic we have $S_{m,2}^H(\Gamma) = S_m^H(\Gamma)$ [25, Theorem 4-12] :.

The method is the following. We take q-expansions of the base elements of $S_2(\Gamma_0(N))$:

$f_0, \ldots, f_{g-1}$, where $g = g(\Gamma_0(N))$. For even $m \geq 4$, we compute q–expansions of all monomials of degree $m/2$:

$$f_0^{\alpha_0} f_1^{\alpha_1} \cdots f_{g-1}^{\alpha_{g-1}}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ \sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i = \frac{m}{2}.$$

The number of monomials is $\binom{g+m/2-1}{m/2}$. By selecting first $m/2 + m \cdot (g-1)$ terms from q–expansions of the monomials, we can create matrix of size

$$\binom{g+m/2-1}{m/2} \times \left(\frac{m}{2} + m \cdot (g-1)\right).$$

Then, we perform suitable integral Gaussian elimination method to transform the matrix into row echelon form. The procedure is as follows. We successively sort and transform the row matrices to cancel the leading row coefficients with the same number of leading zeros as their predecessor. We use the *Quicksort algorithm* for sorting. We obtain the transformed matrix and the transformation matrix. The non-null rows of the transformed matrix give the q-expansions of the basis elements, and the corresponding rows of the transformation matrix give the corresponding linear combinations of monomials. Using the above described method we perform various computations in SAGE.

As a consequence of above mentioned algorithm, we calculated the equations of all canonical curves of type $X_0(N)$, genus $3 \leq g \leq 5$, which are not hyperelliptic.

An algorithm for the calculation of the Wronskian of linearly independent modular forms has been developed. In SAGE, we have calculated Wronskians of canonical bases for $M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$, for even $m = 12, 14, 16, \ldots, 108, 110, 120$. Based on this, the theorem on the value of these Wronskians for any even m, up to some non - zero constant λ, has been proved. For $m = 12t$ we made a conjecture about the value of the constant λ up to the sign.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Preliminarna sekcija **5**

1.1 Algebarske krivulje 5

1.2 Riemannove plohe 6

1.3 Diferencijali na kompaktnim Riemannovim plohama 8

1.4 Gornja poluravnina i Fuchsove grupe 13

1.5 Modularne krivulje 14

1.6 Modularne forme 18

1.7 Modularne forme i diferencijali 20

1.8 Divizori modularnih formi 22

2 Biracionalna preslikavanja od $X(1)$ u $\mathbb{P}^2$ **25**

2.1 Uniformizacija modularnim formama 25

2.2 Primjeri uniformizacija 33

2.3 Računi pomoću SAGE-a 38

2.4 Galoisova natkrivanja 41

3 Generalizirane Weierstrassove točke **47**

3.1 Weierstrassove točke 47

3.2 Generalizacija 49

3.3 Interpretacija u terminima modularnih formi 52

3.4 Računi prostora $S^H_{m,2}(\Gamma)$. 60

3.5 Hipereliptičke krivulje 68

3.6 Eksplicitni računi i opis algoritma 71

3.7 Jednadžbe homogenih polinoma 84

4 Generalizirani Wronskiani **91**

4.1 O divizoru Wronskiana 93

4.2 Računanje Wronsiana za $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ 96

4.3 Računi Wronskiana u SAGE-u i posljedični rezultati 102

Zaključak **117**

Bibliografija **118**

Životopis **122**

Izjava o izvornosti rada **123**

Uvod

Neka je Γ Fuchsova grupa prve vrste. Ona djeluje na kompleksnu gornju poluravninu $\mathbb{H}$ razlomljenim linearnim transformacijama. Kvocijent $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ ima strukturu Riemannove plohe, ali općenito nije kompaktan. Možemo ga kompaktificirati dodavanjem konačnog broja Γ–orbita točaka iz $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ koje zovemo kaspovi od Γ. Na taj način dobivamo kompaktnu Riemannovu plohu koju označavamo sa $\mathfrak{R}_\Gamma$.

Primarni interes su nam modularne grupe Γ, drugim riječima podgrupe $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ konačnog indeksa. Grupe $\Gamma_0(N)$, $\Gamma(N)$ i $\Gamma_1(N)$ su osnovni primjeri takvih grupa, a pripadne modularne krivulje označavamo s $X_0(N)$, $X(N)$ i $X_1(N)$. Sve ove krivulje su u uskoj vezi s eliptičkim krivuljama. Nama najinteresantnija je $X_0(N)$ koja predstavlja prostor parametara eliptičkih krivulja sa cikličkom podgrupom reda N.

S druge strane, krivulja $X_0(N)$ povezuje eliptičke krivulje s modularnim formama. Naime, jedna od ekvivalentnih formulacija čuvenog teorema modularnosti ([5]) kaže da za svaku eliptičku krivulju E definiranu nad $\mathbb{Q}$, postoji prirodan broj N i surjektivni morfizam $\phi\colon X_0(N) \longrightarrow E$ (vidi [7, Terem 2.5.1]).

Weierstrassove točke na kompaktnoj Riemannovoj plohi $\mathfrak{R}$ genusa $g \geq 2$, kao i njihove generalizacije n-Weierstrssove točke, $n \in \mathbb{N}$, od temeljne su važnosti u analizi svojstava krivulje $\mathfrak{R}$. Slijedimo [8, III.5] i [29, §6.1]. U [29, 6.1] Ken Ono je istakao problem:

Problem 0.0.1 ([29], Problem 6.2)**.** *Klasificirati sve prirodne brojeve N za koje je kasp u ∞ Weierstrassova točka na krivulji $X_0(N)$.*

Na taj (još uvijek otvoren problem) upućuju radovi Atkina [4], Lehner i Newmana [16], Ogga [26, 27] i Rohrlicha [33, 34].

U [16] Lehner i Newman su 1963. dali dovoljne uvjete za koje je kasp u ∞, Weierstrasova točka na modularnoj krivulji $X_0(4n)$ i $X_0(9n)$.

U [4] Atkin je 1966. proširio njihove rezultate na slučaj p^2n, gdje je $p \geq 5$ bilo koji prost broj. Na taj način je pokazao da je kasp u ∞ Weierstrassova točka na $X_0(N)$ za različite dovoljno složene vrijednosti od N. Specijalan slučaj Atkinovih rezultata je:

Teorem 0.0.2 ([4], Teorem 2)**.** *Kasp* ∞ *je Weierstrasova točka za modularnu krivulju tipa* $X_0(n^2)$ *ako i samo ako je*

$$n = 8 \quad \textit{ili} \quad n \geq 10.$$

Atkin je završio svoj članak s rečenicama [4]:

"It would be of great interest to find an instance (if one exists) od $n \in W$ when n is quadratfrei. On the other hand, it has not yet been proved that $n \notin W$ for infinity of n."

Gore je s $n \in W$ kraće pisana činjenica da je kasp u ∞ Weierstrassova točka na $X_0(n)$.

"Bilo bi od velikog interesa naći kvadratno slobodan prirodan broj N (ako postoji) za koji je kasp u ∞ Weierstrassova točka na $X_0(N)$. S druge strane, do sada nije dokazano da postoji beskonačno prirodnih brojeva N za koje kasp u ∞ nije Weierstrassova točka na $X_0(N)$." (prijevod od [4])

U [27] Ogg navodi da je 1973. Atkin dokazao da kasp u ∞ nije Weierstrassova točka na krivulji $X_0(p)$ za bilo koji prost broj p, što je vidljivo iz [2,3]. Time je dan odgovor na drugu rečenicu. Koliko znamo, odgovor na prvu rečenicu je još uvijek nepoznat.

U [27] Ogg 1978. daje svojevrsnu generalizaciju Atkinovih rezultata.

Weierstrassove točke na krivuljama tipa $X(N) = \mathfrak{R}_{\Gamma(N)}$, gdje je $\Gamma(N)$ glavna kongruencijska podgrupa od $SL_2(\mathbb{Z})$ proučavali su H. Petersson [32] i B. Schoeneberg [35]. Velika su odstupanja između njihovih rezultata i rezultata za grupu $\Gamma_0(N)$ što bi se moglo pripisati činjenici da su grupe $\Gamma(N)$ normalne podgrupe od $SL_2(\mathbb{Z})$, dok $\Gamma_0(N)$ nije, za $N > 1$ (vidi [16]).

U pozadini metoda iz Poglavlja 3 leži činjenica da je za krivlje genusa $g \geq 3$ koje nisu hipereliptičke, kanonsko preslikavanje injektivno. Kanonsko preslikavanje je prikladno za računanje pošto diferencijali na krivulji $\mathfrak{R}_\Gamma$ odgovaraju kasp formama težine 2 za Γ. Drugim riječima, ako izaberemo neku bazu $\{f_0, \ldots, f_{g-1}\}$ prostora kasp formi težine 2 za Fuchsovu grupu prve vrste Γ, tada možemo kanonsko preslikavanje napisati u obliku

$$\mathfrak{a}_z \longmapsto (f_0(z) : \cdots : f_{g-1}(z)).$$

Na taj način kanonsko preslikavanje prevodimo u jezik modularnih formi, a matematički software SAGE daje dobar alat za računanje s njima. S. Galbraith u svojoj tezi [9] koristi kanonsko ulaganje kako bi ulagao krivulju u projektivni prostor $\mathbb{P}^{g-1}$ i računao jednadžbe pripadnih kanonskih krivulja. Također navodi ideju konstrukcije preslikavanja u projektivni prostor preko modularnih formi veće težine.

Temeljem te ideje G. Muić razrađuje metodu nalaženja modela krivulja pomoću modularnih formi ([19], [20, 21]). U [24] dana je primjena te metode na krivulju $X(1) = X(SL_2(\mathbb{Z}))$, i nađene jednadžbe ravninskih krivulja $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ biracionalno ekvivalentnih krivulji $X(1)$. U koktorskoj disertaciji [13] i u [11] I. Kodrnja koristi η–kvocijente da bi eksplicitno izračunala stupnjeve nekih preslikavanja u ravninu konstruiranih od modularnih formi, temeljem opće formule iz [20]. Slijedeći isti pristum I. Kodrnja nalazi jednostavni model za krivulju $X_0(N)$ [12]. Mi slijedimo taj pristup proučavanju različitih aspekata modularnih krivulja.

n–Weierstrassova težina točke $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma$ odgovara redu poništavanja Wronskiana $W_z(\omega_1, \ldots, \omega_t)$ u točki $\mathfrak{a}$ za bilo koju bazu $\{\omega_1, \ldots, \omega_t\}$ od $H^m(\mathfrak{R}_\Gamma)$. Želimo ovo prevesti u jezik modularnih formi i dati svojevrsno poopćenje Wrosnkiana kasp formi.

U Poglavlju 2 dajemo razne modele za krivulju $X(1)$. Dobivamo jednadžbe krivulja koje su biracionalno ekvivalentne krivulji $X(1)$. Kako su to sve ravninske krivulje, često su singularne. Za uvid u algebarsku klasifikaciju singularitera ravninskih krivulja vidi [14]. Koristimo metodu koju je razvio G. Muić u člancima [19], [20, 21].

Glavni fokus Poglavlja 3 je naći efektivan algoritam za provjeru je li kasp $\mathfrak{a}_\infty$, m–Weierstrasova točka, barem za krivulju tipa $X_0(N)$. Dan je algoritam za provjeru je li kasp $\mathfrak{a}_\infty$, m–Weierstrassova točka za krivulju genusa $g(\Gamma) \geq 3$ koja nije hipereliptička.

U Sekciji 3.7 izračunali smo jednadžbe homogenih polinoma svih kanonskih krivulja tipa $X_0(N)$, genusa $3 \leq g \leq 5$ koje nisu hipereliptičke. Dobivene jednadžbe posljedica su algoritma za računanje uređene baze prostora $S_m^H(\Gamma)$, za krivulje genusa ≥ 3, koje nisu hipereliptičke (vidi Sekciju 3.6). Slično su radili S. Galbraith u [9, Chapter 3] svog doktorata, ali drugačijim metodama, kao i M. Shimura u [39].

U pravilu dobivamo da je ideal generiran homogenim kvadratnim polinomima. To je posljedica Petrijevog teorema za krivulje genusa $g \geq 4$, koji nisu trigonale (tj. nemaju preslikavanje stupnja 3 na $\mathbb{P}^1$), niti glatke ravninske krivulje stupnja 4 (vidi [39, Teorem 2 (Petri's Theorem)]):

Teorem 0.0.3 (Petri)**.** *Neka je $\mathfrak{R}$ glatka kanonska krivulja genusa $g \geq 4$. Tada je $\mathfrak{R}$ dana* *kao presjek nekih kvadratnih hiperploha, osim kada je $\mathfrak{R}$ trigonala ili izomorfna glatkoj ravninskoj kvintici (krivulji stupnja 4) kada je $\mathfrak{R}$ dana kao presjek nekih kvadratnih i kubnih hiperploha.*

U Poglavlju 4 bavimo se generaliziranim Wronskianima. Pod pojmom generalizirani Wronskian podrazumijevamo poopćenje standardnog pojma Wronskiana kasp formi [34], ([29], 6.3.1), ([19], dokaz Teorema 4-5), i ([20], Lema 4-1). Proširujemo rezultate od [25].

Razvijen je algoritam za račun Wronskiana linearno nezavisnih modularnih formi. U SAGE-u su izračunati Wronskiani kanonskih baza za $M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$ za parne $m = 12, 14, 16, \ldots, 108, 110, 120$. Temeljem toga dokazan je teorem o vrijednosti tih Wronskiana za bilo koji parni m, do na neku ne–nul konstantu λ. Za $m = 12t$ iskazana je slutnja o vrijednosti konstante λ do na predznak.

1. Preliminarna sekcija

1.1. Algebarske krivulje

U ovoj sekciji navodimo neke poznate rezultate iz teorije algebarskih krivulje koje koristimo u radu.

Sljedeća propozicija je [37, §1 Teorem 1.2]

Propozicija 1.1.1. *Neka je $\varphi\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ racionalno preslikavanje projektivne krivulje $\mathcal{C}$ u projektivnu mnogostrukost $\mathcal{D}$. Ako je $\mathcal{C}$ glatka tada je φ morfizam odnosno regularno preslikavanje.*

Navodimo teorem o slici regularnog preslikavanja, iz [37, §1 Teorem 1.10] odnosno Teorem 2. iz [36].

Teorem 1.1.2. *Slika regularnog preslikavanja s projektivne mnogostrukosti je zatvorena.*

Zaključujemo da je slika ne-konstantnog regularnog preslikavanja s projektivne krivulje zatvorena, tj. algebarska krivulja.

Navedimo bitan teorem iz [22, Teorem 13.1]:

Teorem 1.1.3. *Neka su $m, n \geq 1$. Neka je $X \subseteq \mathbb{P}^n$ projektivna mnogostrukost i*

$$\alpha\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^m$$

regularno preslikavanje. Tada je slika $\alpha(X)$ projektivna mnogostrukost u $\mathbb{P}^m$. Vrijedi

$$\dim \alpha(X) \leq \dim X.$$

1.2. Riemannove plohe

Kompleksna mnogostrukost dimenzije 1 naziva se *Riemannova ploha.* Neka je $\mathcal{R}$ kompaktna Riemannova ploha. S $\mathbb{C}(\mathcal{R})$ označavamo polje meromorfnih funkcija na $\mathcal{R}$.

Slijedimo ([38, §1.5]). Neka su $\mathcal{R}'$ i $\mathcal{R}$ dvije kompaktne Riemannove plohe, te

$$F\colon \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$$

holomorfno preslikavanje. Tada je φ konstantno ili surjektivno. Pretpostavimo da je φ surjektivno. Tada se par $(\mathcal{R}', F)$ naziva *natkrivanje* od $\mathcal{R}$. Neka je $\mathfrak{b} \in \mathcal{R}'$ i $\mathfrak{a} = F(\mathfrak{b})$. Ako su $t'_{\mathfrak{b}}$ i $t_{\mathfrak{a}}$ lokalni parametri u $\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{a}$ respektivno, takvi da šalju $\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{a}$ u ishodište, tada se F lokalno u okolici od $\mathfrak{b}$ može prikazati u obliku

$$t_{\mathfrak{a}}(F({t'_{\mathfrak{b}}}^{-1}(z))) = a_e z^e + a_{e+1} z^{e+1} + \cdots, \quad a_e \neq 0,$$

gdje je e pozitivan cijeli broj. Cijeli broj

$$e = e_{\mathfrak{b},F}$$

neovisan je o izboru lokalnih parametara $t'_{\mathfrak{b}}$ i $t_{\mathfrak{a}}$ i zovemo ga *indeks ramifikacije* natkrivanja $(\mathcal{R}', F)$ u $\mathfrak{b}$. Kako je $\mathcal{R}'$ kompaktna postoji samo konačno mnogo točaka $\mathfrak{b} \in \mathcal{R}'$ takvih da je $e_{\mathfrak{b},F} \neq 1$.

Svaka točka $\mathfrak{a} \in \mathcal{R}$ ima konačno praslika po natkrivanju F. Neka je $F^{-1}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_l\}$ za $\mathfrak{a} \in \mathcal{R}$. Tada je cijeli broj

$$n = \sum_{i=1}^{l} e_{\mathfrak{b},F}$$

neovisan o izboru točke $\mathfrak{a}$ i zovemo ga *stupanj natkrivanja* $(\mathcal{R}', F)$.

Nadalje, ako je $\phi \in \mathbb{C}(\mathcal{R})$, vrijedi da je

$$\phi \circ F \in \mathbb{C}(\mathcal{R}').$$

Korespondencija

$$F^*\colon \phi \longmapsto F \circ \phi$$

je ulaganje polja $\mathbb{C}(\mathcal{R})$ u polje $\mathbb{C}(\mathcal{R}')$. Označimo s $\mathbb{C}(\mathcal{R}) \circ F$ sliku tog ulaganja. Poznato je da vrijedi

$$[\mathbb{C}(\mathcal{R}') : \mathbb{C}(\mathcal{R}) \circ F] = n,$$

drugim riječima stupanj ovog proširenja polja jednak je stupnju natkrivanja F.

Neka su $g = g(\mathcal{R})$ i $g' = g(\mathcal{R}')$ genusi Riemannovih ploha i neka je $F\colon \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$ natkrivanje stupnja n. Tada vrijedi *Hurwitzova formula*

$$2g' - 2 = n(2g - 2) + \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{R}'} (e_{\mathfrak{b},F} - 1). \tag{1.1}$$

1.3. Diferencijali na kompaktnim Riemannovim plohama

Uzor nam je [18, Sekcija 2.2]. Neka je $\mathfrak{R}$ Riemannova ploha i m cijeli broj. Skup trojki $\{(\phi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ koje se sastoje od koordinatne okoline $V_\mu \subseteq \mathfrak{R}$, lokalne koordinate t_μ na V_μ i meromorfne funkcije ϕ_μ na V_μ, zove se **lokalni prikaz diferencijala stupnja** m, ako vrijedi:

(i) $\{(V_\mu, t_\mu)\}$ je koordinatni sustav na $\mathfrak{R}$;

(ii) $\phi_\mu(\mathfrak{a})(dt_\mu/dt_\nu)^m(\mathfrak{a}) = \phi_\nu(\mathfrak{a})$ za svaki $\mathfrak{a} \in V_\mu \cap V_\nu$, gdje je $V_\mu \cap V_\nu \neq \emptyset$.

Dva lokalna prikaza $\{(\phi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$ i $\{(\phi'_\nu, V'_\nu, t'_\nu)\}$ stupnja m su **ekvivalentna** ako je njihova unija

$$\{(\phi_\mu, V_\mu, t_\mu)\} \cup \{(\phi'_\nu, V'_\nu, t'_\nu)\},$$

također lokalni prikaz diferencijala.

Na taj način uvjet:

$$\phi_\mu(\mathfrak{a})(dt_\mu/dt_\nu)^m(\mathfrak{a}) = \phi_\nu(\mathfrak{a}),$$

znači

$$\phi_\mu(\mathfrak{a}) \left[(t_\mu \circ t_\nu^{-1})'\right]^m (t_\nu(\mathfrak{a})) = \phi_\nu(\mathfrak{a}).$$

Definicija 1.3.1. *Klase ekvivalencije lokalnih prikaza diferencijala stupnja m na Riemannovoj plohi $\mathfrak{R}$ nazivamo* ***diferencijali na $\mathfrak{R}$ stupnja*** *m i označavamo s $D^m(\mathfrak{R})$.*

Radi jednostavnosti često poistovjećujemo diferencijal s njegovim lokalnim prikazom i pišemo

$$\omega = \{(\phi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}.$$

Često koristimo sljedeću notaciju: Neka je $\omega \in D^m(\mathfrak{R})$ i neka je z neka lokalna koordinata na $\mathfrak{R}$. Tada lokalno postoji jedinstvena meromorfna funkcija φ takva da je

$$\omega = \varphi(dz)^m.$$

Ako je w neka druga lokalna koordinata, tada je $\omega = \psi(dw)^m$ za neku meromorfnu funkciju i vrijedi:

$$\varphi(z)(dz/dw)^m(w) = \psi(w).$$

Graduirana algebra diferencijala. Neka je dan ne-nul diferencijal

$$\omega = \{(\phi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}.$$

Definiramo diferencijal ω^{-1} stupnja $-m$ s

$$\omega^{-1} = \{(\phi_\mu^{-1}, V_\mu, t_\mu)\}.$$

Za $c \in \mathbb{C}$ definiramo diferencijal

$$c\omega = \{(c\phi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}.$$

Analogno, ako su

$$\omega = \{(\phi_\mu, V_\mu, t_\mu)\} \quad \text{i} \quad \omega' = \{(\phi'_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$$

diferencijali istog stupnja m definiramo diferencijal

$$\omega + \omega' = \{(\phi_\mu + \phi'_\mu, V_\mu, t_\mu)\}.$$

Ako je $\omega = \{(\phi_\mu, V_\mu, t_\mu)\} \in D^m(\mathfrak{R})$ i $\omega' = \{(\phi'_\mu, V_\mu, t_\mu)\} \in D^n(\mathfrak{R})$ tada definiramo produkt $\omega\omega' \in D^{m+n}(\mathfrak{R})$ sa

$$\omega \cdot \omega' = \{(\phi_\mu \cdot \phi'_\mu, V_\mu, t_\mu)\}.$$

Stavimo

$$D(\mathfrak{R}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D^m(\mathfrak{R}).$$

Očito je $D(\mathfrak{R})$ graduirana algebra nad $\mathbb{C}$ i nad $\mathbb{C}(\mathfrak{R})$.

Po uzoru na [18, Sekcija 2.2] imamo:

Lema 1.3.2. *Neka je $\mathfrak{R}$ kompaktna Riemannova ploha. Vrijedi:*

(i) $D^0(\mathfrak{R}) = \mathbb{C}(\mathfrak{R})$;

(ii) Ako je $\omega \in D^1(\mathfrak{R})$ *tada je* $\omega^m \in D^m(\mathfrak{R})$;

(iii) $D^m(\mathfrak{R}) \neq 0$ *za svaki* $m \in \mathbb{Z}$;

(iv) $D^m(\mathfrak{R}) = \mathbb{C}(\mathfrak{R})\omega^m$ *za* $\omega \in H^1(\mathfrak{R})$, $\omega \neq 0$ *fiksan. Drugim riječima:*

$$\dim_{\mathbb{C}(\mathfrak{R})} D^m(\mathfrak{R}) = 1.$$

Dokaz. Ako su $\omega, \omega' \in D^m(\mathfrak{R})$, $\omega \neq 0$, tada je $\frac{\omega'}{\omega} \in D^0(\mathfrak{R}) = \mathbb{C}(\mathfrak{R})$. Stoga vrijedi $\dim_{\mathbb{C}(\mathfrak{R})} D^m(\mathfrak{R}) = 1$. Time je pokazano (iv). Tvrdnje (i)-(iii) su standardne [18, Sekcija 2.2]. ∎

Sa $\mathrm{Div}(\mathfrak{R})$ označavamo slobodan modul nad $\mathbb{Z}$ generiran sa svim točkama od $\mathfrak{R}$ i zovemo **grupa divizora** od $\mathfrak{R}$,

$$\mathrm{Div}(\mathfrak{R}) = \{ \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}} c_{\mathfrak{a}} \mathfrak{a} \mid c_{\mathfrak{a}} \in \mathbb{Z} \ \text{ i } c_{\mathfrak{a}} = 0 \text{ za sve osim konačno mnogo točaka } \mathfrak{a} \}.$$

Divizor diferencijala. Neka je $\omega \neq 0$ diferencijal stupnja m od $\mathfrak{R}$, dan s $\omega = \{(\phi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}$. Za bilo koju točku $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$ definiramo **red** od ω u $\mathfrak{a}$ s

$$\nu_{\mathfrak{a}}(\omega) = \nu_{\mathfrak{a}}(\phi_\nu).$$

Veza funkcija ϕ_μ u različitim kartama dana je s $\phi_\mu(\mathfrak{a})(dt_\mu/dt_\nu)^m(\mathfrak{a}) = \phi_\nu(\mathfrak{a})$. Kako je funkcija dt_μ/dt_ν holomorfna i nema nultočaka na $V_\mu \cap V_\nu$ definicija ne ovisi o izboru lokalnog prikaza za ω.

Nadalje, kako je $\mathfrak{R}$ kompaktna postoji samo konačno mnogo točaka za koje je $\nu_{\mathfrak{a}}(\omega) \neq 0$. Stoga možemo definirati **divizor od** ω s

$$\mathrm{div}(\omega) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}} \nu_{\mathfrak{a}}(\omega).$$

Kanonska klasa divizora. Ako fiksiramo neki $\omega \in D^1(\mathfrak{R})$, zbog Leme 1.3.2(iv), svaki drugi diferencijal će biti oblika $f\omega$ za neki $f \in \mathbb{C}(\mathfrak{R})$. Stoga je

$$\mathrm{div}(f\omega) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega).$$

Na taj način svi divizori diferencijala pripadaju istoj klasi koju nazivamo **kanonska klasa divizora**. Kako je $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$, različiti izbori od ω imaju isti stupanj.

Za fiksni $\omega \in D^1(\mathfrak{R})$ sa

$$K = \mathrm{div}(\omega),$$

označavamo pripadni divizor u kanonskoj klasi.

Neka je $\mathfrak{R}$ kompaktna Riemannova ploha. Za $D \in \mathrm{Div}(\mathfrak{R})$ definiramo **Riemann-Rochov prostor**

$$L(D) := \{ f \in \mathbb{C}(\mathfrak{R})^\times \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0 \} \cup \{0\}.$$

Stavimo:

$$\ell(D) = \dim L(D).$$

Lako se vidi da vrijedi:

(i) $L(0) = \mathbb{C}$.

(ii) Ako je $\deg(D) < 0$, tada je $L(D) = 0$.

Sljedeći teorem je poznat [18, Teorem 2.2.1]:

Teorem 1.3.3 (Riemann-Roch)**.** *Neka je $\mathfrak{R}$ kompaktna Riemannova ploha genusa $g = g(\mathfrak{R})$, K kanonski divizor i $D \in \mathrm{div}(\mathfrak{R})$ divizor. Tada vrijedi*

$$\ell(D) = \deg(D) - g + 1 + \ell(K - D).$$

Iz ovoga lako dobijemo sljedeće [18, Korolar 2.2.2].

Korolar 1.3.4. *Neka je $\mathfrak{R}$ kompaktna Riemannova ploha genusa $g = g(\mathfrak{R})$.*

(i) Ako je ω nenul diferencijal od $\mathfrak{R}$ ($\omega \in D^1(\mathfrak{R})$), tada vrijedi

$$\deg(\mathrm{div}(\omega)) = 2g - 2, \qquad \ell(\mathrm{div}(\omega)) = g.$$

(ii) Ako je D divizor od X takav da je $\deg(D) \geq 2g - 1$, tada vrijedi

$$\ell(D) = \deg(D) - g + 1.$$

(iii) Ako je ω nenul diferencijal od $\mathfrak{R}$ stupnja m ($\omega \in D^m(\mathfrak{R})$), tada vrijedi

$$\deg(\mathrm{div}(\omega)) = 2m(g - 1).$$

Holomorfni diferencijali. Neka je ω diferencijal stupnja m. Kažemo da je ω **holomorfan** ako je $\mathrm{div}(\omega) \geq 0$ ili $\omega = 0$. S $H^m(\mathfrak{R})$ označavamo prostor holomorfnih diferencijala stupnja m.

Neka je $f \in \mathbb{C}(\mathfrak{R})$ i $\omega \in D^1(\mathfrak{R})$. Tada je po definiciji $f\omega^m \in H^m(\mathfrak{R})$ ako i samo ako je $\mathrm{div}(f\omega^m) \geq 0$. Kao je

$$\mathrm{div}(f\omega^m) = \mathrm{div}(f) + m\mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}(f) + mK,$$

gornje je ekvivalentno s $\operatorname{div}(f)+mK \geq 0$, odnosno s $f \in L(mK)$. Na taj način smo dobili izomorfizam vektorskih prostora

$$H^m(\mathfrak{R}) \simeq L(mK).$$

Koristeći ovo i primjenom Riemann-Rochovog Teorema dobijemo dimenzije prostora holomorfnih diferencijala [8, Propozicija III.5.2]:

Propozicija 1.3.5. *Neka je $\mathfrak{R}$ kompaktna Riemannova ploha. Tada vrijedi:*

$$\dim H^m(\mathfrak{R}) = \begin{cases} 0 & \textit{ako je} \;\; m \geq 1, g(\Gamma) = 0; \\ g(\Gamma) & \textit{ako je} \;\; m = 1,\; g(\Gamma) \geq 1; \\ g(\Gamma) & \textit{ako je} \;\; m \geq 2,\; g(\Gamma) = 1; \\ (2m-1)\left(g\left(\mathfrak{R}_\Gamma\right) - 1\right) & \textit{ako je} \;\; m \geq 2,\; g(\Gamma) \geq 2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Ako je $\omega \in H^m(\mathfrak{R})$ tada je on lokalno u nekoj varijabli z oblika

$$\omega = \varphi(dz)^m,$$

gdje je φ holomorfna funkcija na toj okolini.

1.4. Gornja poluravnina i Fuchsove grupe

Neka je

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

gornja poluravnina. Grupa $SL_2(\mathbb{R})$ djeluje na $\mathbb{H}$ *razlomljenim linearnim transformacijama*

$$\gamma.z = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}).$$

Primjetimo da za $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ i $z \in \mathbb{H}$ vrijedi:

$$\Im(\gamma.z) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} > 0, \tag{1.3}$$

pa je gornje djelovanje dobro definirano. Na taj način sa

$$z \longmapsto \gamma.z,$$

svakom elementu grupe pridružujemo automorfizam gornje poluravnine $\mathbb{H}$.

Stavimo $j(g,z) = cz+d$. Lako se vidi da funkcija j zadovoljava:

$$j(\gamma\gamma', z) = j(\gamma, \gamma'.z)j(\gamma', z). \tag{1.4}$$

Definicija 1.4.1. *Grupu $SL_2(\mathbb{Z})$ i sve njene podgrupe konačnog indeksa zovemo* modularne grupe*. Specijalno, $SL_2(\mathbb{Z})$ zovemo* puna modularna grupa*.*

1.5. Modularne krivulje

Neka je Γ bilo koja modularna grupa. Ona djeluje na $\mathbb{H}$ razlomljenim linearnim transformacijama. Skup orbita pod djelovanja grupe Γ na gornju poluravninu

$$Y(\Gamma) = \Gamma \setminus \mathbb{H},$$

nazivamo *modularna krivulja.* Modularna krivulja $Y(\Gamma)$ ima strukturu Riemannove plohe, međutim općenito nije kompaktna. Dodavanjem konačno točaka ovom kvocijentu dobijemo kompaktnu Riemannovu plohu koju označavamo s $\mathfrak{R}_\Gamma$. Te točke zovemo *kaspovi* od Γ, a dobijemo ih preko djelovanja od Γ na proširenu gornju poluravninu $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ pa imamo

$$\mathfrak{R}_\Gamma = \Gamma \setminus \mathbb{H}^*.$$

Napomena 1.5.1. *Ako je $\gamma \in \Gamma$, $-\gamma$ ne mora, ali može ležati u Γ. Bez obzira na to, primjetimo da γ i $-\gamma$ daju istu razlomljenu linearnu transformaciju. Stoga je kod proučavanja djelovanja grupe dovoljno gledati djelovanje njene projektivizacije*

$$\overline{\Gamma} = \Gamma / Z(\Gamma),$$

gdje je $Z(\Gamma) = \Gamma \cup \{\pm 1\}$. Ako je $-1 \notin \Gamma$, vrijedi $\overline{\Gamma} = \Gamma$, dok za $-1 \in \Gamma$ imamo da je $\overline{\Gamma}$ izomorfna podgrupi od Γ indeksa 2.

Ako imamo inkluziju modularnih grupa $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$, tada je indeks manje u većoj jednak indeksu pripadnih projektivizacija osim u slučaju kada je $-1 \in \Gamma_2$, $-1 \notin \Gamma_1$, tj.

$$[\overline{\Gamma_2} : \overline{\Gamma_1}] = \begin{cases} [\Gamma_2 : \Gamma_1] & \textit{za } \ (-1 \in \Gamma_1 \leq \Gamma_2) \ \textit{ ili } \ (-1 \notin \Gamma_1, \ -1 \notin \Gamma_2), \\ \frac{1}{2}[\Gamma_1 : \Gamma_2] & \textit{za } \ -1 \notin \Gamma_1, \ -1 \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Neka su $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ Fuchsove grupe. Tada ovo ulaganje grupa inducira preslikavenje na kvocijentnim prostorima

$$F\colon \Gamma_1 \setminus \mathbb{H} \longrightarrow \Gamma_2 \setminus \mathbb{H},$$

koje je definirano s

$$F(\mathfrak{b}_z) = \mathfrak{a}_z,$$

gdje su $\mathfrak{b}_z = \pi_{\Gamma_2}(z)$ i $\mathfrak{a}_z = \pi_{\Gamma_2}(z)$ prirodne projekcije.

Provjerimo je li dobro definirano. Pretpostavimo da je $\mathfrak{b}_z = \mathfrak{b}_{z'}$ za neke $z, z' \in \mathbb{H}$. To znači da su z i z' u istoj Γ_1 orbiti, tj. postoji $\gamma \in \Gamma_1$ tako da je $z' = \gamma.z$. Međutim, γ

je očito element i veće grupe pa su z i z' u istoj Γ_2 orbiti. Dakle $\pi_{\Gamma_2}(z) = \pi_{\Gamma_2}(z')$, tj. $\mathfrak{a}_z = \mathfrak{a}_{z'}$ pa je preslikavanje dobro definirano.

Preslikavanje F prirodno se proširuje do preslikavnaja kompaktnih Riemannovih ploha $\mathfrak{R}_{\Gamma_i} = \Gamma_i \backslash \mathbb{H}^*$, $i = 1, 2$

$$F \colon \mathfrak{R}_{\Gamma_1} \twoheadrightarrow \mathfrak{R}_{\Gamma_2}.$$

Iz definicije preslikavanja F vrijedi $F \circ \pi_{\Gamma_1} = \pi_{\Gamma_2}$, odnosno komutira sljedeći dijagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{\Gamma_1}"'] & \mathbb{H} \arrow[d, "\pi_{\Gamma_2}"] \\
\mathfrak{R}_{\Gamma_1} \arrow[r, "F"'] & \mathfrak{R}_{\Gamma_2}.
\end{tikzcd}$$

Iz konstrukcije strukture kompaktne Riemannove plohe na gornjim kvocijentnim prostorima lako se vidi da je preslikavanje F nekonstantno i holomorfno, pa mora biti i surjekcija.

1° Neka je $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_{\Gamma_2}$ obična točka, Tada je i bilo koja njena praslika, recimo $\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_{\Gamma_2}$ obična točka (ako točka nije stacionarna za djelovanje neke grupe nije niti za djelovanje njene podgrupe). Stavimo $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{z_0}$ i $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{w_0}$. Tada za dovoljno male okoline U_1 i U_2 od z_0 i w_0 respektivno možemo naći lokalne karte takve da je preslikavanje F lokalno oblika

$$\overline{F}(z) = z.$$

Vidi dijagram

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dd, bend right] & U_2 \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[dd, bend left] \\
V_{\mathfrak{b}} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "t_{\mathfrak{b}}"] & V_{\mathfrak{a}} \arrow[d, "t_{\mathfrak{a}}"] \\
W_1 \arrow[r, "\overline{F}"] & W_2.
\end{tikzcd}$$

Zaključujemo da je indeks grananja u svakoj takvoj točki $\mathfrak{b}$ jednak 1.

2° Neka je $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_{\Gamma_2}$ eliptička točka. Tada njena praslika $\mathfrak{b}$ može, ali i ne mora biti eliptička. U svakom slučaju imamo dijagram

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dd, bend right, "(\rho.z)^{e_1}"'] & U_2 \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dd, bend left, "(\rho'.z)^{e_2}"] \\
V_{\mathfrak{b}} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "t_{\mathfrak{b}}"] & V_{\mathfrak{a}} \arrow[d, "t_{\mathfrak{a}}"'] \\
W_1 \arrow[r, "\overline{F}"] & W_2.
\end{tikzcd}$$

Stoga možemo naći karte da za lokalno preslikavanje $\overline{F} = t_{\mathfrak{a}} \circ F \circ t_{\mathfrak{b}}^{-1}$, zbog komutativnosti dijagrama vrijedi

$$\overline{F}(w^{e_1}) = w^{e_2}.$$

Stoga za indeks ramifikacije preslikavanja F u točki $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{z_0}$ vrijedi

$$e_{\mathfrak{b},F} = e_2/e_1 = [\Gamma_{2z_0} : \Gamma_{1w_o}].$$

3° Neka je $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x \in \mathfrak{R}_{\Gamma_2}$ kasp od Γ_2. Zbog [18] Korolar 1.5.5 grupe $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ imaju isti skup kaspova $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Međutim Γ_2–ekvivalentni kaspovi ne moraju biti Γ_1 ekvivalentni. Zaključujemo da je indeks ramifikacije preslikavanja F u točki $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x$ jednak broju Γ_1–neekvivalentnih kaspova koji su Γ_2–ekvivalentni kaspu x.

Sljedeća lema je standardna (vidi [18, §1.8]). Proširujemo dokaz:

Lema 1.5.2. *Neka su $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ Fuchsove grupe prve vrste. Tada je prirodno natkrivanje kompaktnih Riemannovih ploha*

$$F : \mathfrak{R}_{\Gamma_1} \twoheadrightarrow \mathfrak{R}_{\Gamma_2}$$

stupnja $n = [\overline{\Gamma}_2 : \overline{\Gamma}_1]$.

Dokaz. Radi jednostavnosti pretpostavimo da je $-1 \notin \Gamma_i$, $i = 1, 2$. Neka je $\Gamma_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_1 \gamma_i$, $\gamma_i \in \Gamma_2$ dekompozicija od Γ_2 na klase. Neka je $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_{\Gamma_2}$ obična točka. Stoga je $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_z = \pi_{\Gamma_2}(z)$, gdje je $z \in \mathbb{H}$ i z nije eliptička za Γ_2 (stabilizator $\Gamma_{2z} = \{1\}$). Stoga z nije eliptička ni za Γ_1. Praslika od $\mathfrak{a}$ po F je oblika:

$$F^{-1}(\mathfrak{a}_z) = \{\mathfrak{b}_{\gamma_i.z} \mid i = 1, \ldots, n\},$$

gdje je $\mathfrak{b}_z = \pi_{\Gamma_1}(z)$. Prvo primjetimo da je ovo dobro definirano, jer za drugi izbor predstavnika klasa $\gamma'_j \in \Gamma_2$, $j = 1, \ldots, n$ takvih da je $\Gamma_1 \gamma_j = \Gamma_1 \gamma'_j$, vrijedi da je $\gamma'_j = \alpha \gamma_j$ za neki $\alpha \in \Gamma_1$. Stoga imamo

$$\mathfrak{b}_{\gamma'_j.z} = \mathfrak{b}_{(\alpha\gamma_j).z} = \mathfrak{b}_{\alpha.(\gamma_j.z)} = \mathfrak{b}_{\gamma_j.z}.$$

Zatim tvrdimo da su svi $\mathfrak{b}_{\gamma_i.z}$ različiti. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\mathfrak{b}_{\gamma_i.z} = \mathfrak{b}_{\gamma_j.z}$$

za $i \neq j$. Stoga postoji $\alpha \in \Gamma_1$ tako da vrijedi $\alpha.(\gamma_i.z) = \gamma_j.z$, pa imamo

$$\gamma_j^{-1} \alpha \gamma_i \in \Gamma_{2z} = \{1\}$$

kako točka z nije eliptička. Stoga je $\alpha\gamma_i = \gamma_j$, a to znači da γ_i i γ_j pripadaju istim desnim klasama od Γ_1

$$\Gamma_1\gamma_j = \Gamma_1\alpha\gamma_i = \Gamma_1\gamma_i,$$

a to je kontradikcija s pretpostavkom. Dobili smo da su svi $\mathfrak{b}_i$ različiti.

Kako je indeks ramifikacije svih praslika $\mathfrak{b}_i$ generičke točke $\mathfrak{a}$ jednak 1 zaključujemo da je stupanj preslikavanja jednak n.

■

Napomena 1.5.3. *Iz konstrukcije stukture Riemannove plohe na kvocijentnim skupovima $\Gamma_i \backslash \mathbb{H}^*$, $i = 1, 2$ (vidi [18, §1.8]) zaključujemo da je u lokalnim koordinatama običnih točaka z oko $\mathfrak{b}_{\gamma_i.z}$ i w oko $\mathfrak{a}_z$ preslikavanje F oblika*

$$F(z) = (\gamma_i^{-1}).z,$$

pa su svi indeksi ramifikacije jednaki 1, odnosno $e_{\mathfrak{b}_{\gamma_i.z},F} = 1$, za svaki $i = 1, \ldots, n$.

1.6. Modularne forme

Neka je k cijeli broj i neka je $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. Za bilo koju funkciju $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ definiramo djelovanje na nju (*slash operator*) s

$$(f \mid_k \gamma)(z) = (cz+d)^{-k} f(\gamma.z) = j(\gamma,z)^{-k} f(\gamma.z).$$

Kažemo da funkcija $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ zadovoljava *uvjet modularnosti* težine k za grupu $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ ako vrijedi

$$f \mid_k \gamma = f \quad \text{za svaki} \quad \gamma \in \Gamma. \tag{1.5}$$

Specijalno, ako je $k=0$ djelovanje operatora $|_k$ na funkciju f je oblika

$$(f|_0\gamma)(z) = f(\gamma.z).$$

Tada uvjet modularnosti povlači glasi $f(\gamma.z) = f(z)$, pa je dobro definirana funkcija ϕ_f na kvocijentnom prostoru $\Gamma \setminus \mathbb{H}$, takva da vrijedi

$$f(z) = \phi_f \circ \pi(z). \tag{1.6}$$

Označimo s

$$\mathcal{A}_k(\Gamma)$$

prostor svih meromorfnih funkcija $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ koje zadovoljavaju uvjet modularnosti (1.5) i koje su meromorfne u kaspu. Takve funkcije zovemo *meromorfne modularne forme*. Specijalno, za $k=0$ se lako vidi da je prostor

$$\mathcal{A}_0(\Gamma)$$

polje [18, §2.1].

Neka je $f \in \mathcal{A}_0(\Gamma)$. Tada je s (1.6) i po uzoru na [18, §2.1], dobro definirana meromorfna funkcija ϕ_f na Riemannovoj plohi $\mathfrak{R}_\Gamma$. Obratno, ako je ϕ element funkcijskog polja $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_\Gamma)$, tada je funkcija $f(z)$ definirana s

$$f(z) = \phi \circ \pi(z), \qquad z \in \mathbb{H},$$

element od $\mathcal{A}_0(\Gamma)$. Stoga smo dobili [18, (2.1.24)]:

Lema 1.6.1. $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_\Gamma)$ *je izomorfno s* $\mathcal{A}_0(\Gamma)$ *preko preslikavanja*

$$\phi \longmapsto \phi \circ \pi,$$

odnosno

$$f \longmapsto \phi_f.$$

Neka je Γ Fuchsova grupa prve vrste. Zbog [18, 2.1.9] svaki $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$ inducira izomorfizam polja

$$\mathcal{A}_0(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_0(\alpha^{-1}\Gamma\alpha),$$

definiran s

$$f \longmapsto f|_0\alpha.$$

Stoga zbog Leme 1.6.1 imamo

Lema 1.6.2. *Neka je* Γ *Fuchsova grupa prve vrste i neka je* $\phi = \phi_f \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_\Gamma)$. *Tada svaki* $\alpha \in Sl_2(\mathbb{R})$ *inducira izomorfizam polja*

$$\mathbb{C}(\mathfrak{R}_\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\alpha^{-1}\Gamma\alpha}),$$

definiran s

$$\phi_f \longmapsto \phi_{f|_0\alpha}.$$

Očito je $f \in \mathcal{A}_0(\Gamma)$ *i* $f|_0\alpha \in \mathcal{A}_0(\alpha^{-1}\Gamma\alpha)$.

Zanimaju nas prostori

$$M_k(\Gamma) = \{f \in \mathcal{A}_k(\Gamma) \mid f \text{ je holomorfna na } \mathbb{H} \text{ i u svim kaspovima od } \Gamma\} \text{ i}$$

$$S_k(\Gamma) = \{f \in \mathcal{A}_k(\Gamma) \mid f \text{ je holomorfna na } \mathbb{H} \text{ i ima nultočku u svakom kaspu od } \Gamma\}.$$

Nazivamo ih *prostor modularnih formi težine* k *za* Γ i *prostor kasp formi težine* k *za* Γ, respektivno.

1.7. Modularne forme i diferencijali

Po uzoru na [18, Sekcija 2.3] dajemo vezu diferencijala na kompaktnoj Riemannovoj plohi $\mathfrak{R}_\Gamma$ i meromorfne modularne forme za Γ, gdje je $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ Fuchsova grupa prve vrste.

Neka je $f \in \mathcal{A}_m(\Gamma)$ meromorfna modularna forma za Γ, $m \in \mathbb{Z}$ paran. Definiramo preslikavanje

$$\mathcal{A}_m(\Gamma) \longrightarrow D^{m/2}(\mathfrak{R}_\Gamma),$$

u oznaci

$$f \mapsto \omega_f = \{(\phi_\mu, V_\mu, t_\mu)\}.$$

1° Ako je $\mathfrak{a}_{z_0} \in V_\mu \subseteq \mathfrak{R}_\Gamma$ obična ili eliptička točka stavimo

$$\phi_\mu(\mathfrak{a}_z) = f(z)(d(t_\mu(\mathfrak{a}_z))/dz)^{-m/2}.$$

2° Neka je $b_x \in \mathfrak{R}_\Gamma$ kasp. Neka je $\sigma \in SL_2(\mathbb{R})$ takav da je $\sigma.x = \infty$ i neka je h pozitivan realan broj takav da je

$$\sigma\Gamma_x\sigma^{-1}\{\pm\} = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Iz definicije strukture Riemannove plohe na $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ slijedi da je funkcija $e^{2\pi i \sigma z/h}$ invarijantna na djelovanje od Γ_x, pa možemo definirati lokalnu koordinatu $t_\mathfrak{b}$ na okolini $V_\mathfrak{b} \subset \mathfrak{R}_\Gamma$ s

$$t_\mathfrak{b}(\mathfrak{a}_z) = e^{2\pi i \sigma z/h}.$$

Stavimo

$$\phi_\mathfrak{b}(\mathfrak{a}_z) = c(f|_m\sigma^{-1})(\sigma.z)\,(t_\mathfrak{b}(\mathfrak{a}_z))^{-m/2},$$

gdje je $c = (2\pi i/h)^{-m/2}$

Preslikavanje $f \mapsto \omega_f$ komutira s operacijama množenja i zbrajanja, tj.

$$\omega_{f+g} = \omega_f + \omega_g \quad \text{za} \quad f, g \in \mathcal{A}_m(\Gamma)$$

$$\omega_{fg} = \omega_f \cdot \omega_g \quad \text{za} \quad f \in \mathcal{A}_m(\Gamma) \in \mathcal{A}_n(\Gamma)$$

Obratno, za dani diferencijal $\omega = \{(\phi_\mu, V_\mu, t_\mu)\} \in D^k(\mathfrak{R}_\Gamma)$ definiramo $f \in \mathcal{A}_{2k}(\Gamma)$ s

$$f(z) = \phi_\mu(\mathfrak{a}_z)(d(t_\mu(\mathfrak{a}_z)/dz)^k.$$

Vrijedi

$$\omega = \omega_f.$$

Teorem 1.7.1 ([18], Teorem 2.3.1)**.** *Preslikavanje $f \mapsto \omega_f$ inducira izomorfizam graduiranih algebri nad $\mathbb{C}$:*

$$\mathcal{A}(\Gamma)_{parni} = \sum_m \mathcal{A}_{2m}(\Gamma) \quad i \quad D(\mathfrak{R}_\Gamma) = \sum_m D^m(\mathfrak{R}_\Gamma).$$

Teorem 1.7.2 ([18], Teorem 2.3.2)**.** *Za $k = 2$ korespondencija $f \mapsto \omega_f$ inducira izomorfizam*

$$S_2(\Gamma) \simeq H^1(\mathfrak{R}_\Gamma).$$

Ako je $f \in \mathcal{A}_k(\Gamma)$, pripadni diferencijal ω_f označavamo s izrazom $f(z)(dz)^{k/2}$. Evidentno je da taj izraz mora biti invarijantan na djelovanje od Γ, što drugim riječima znači da je

$$f(z)(dz)^{k/2} = f(\gamma.z)(d(\gamma.z))^{k/2},$$

za svaki $\gamma \in \Gamma$.

1.8. Divizori modularnih formi

Neka je Γ Fuchsova grupa prve vrste. Definirati ćemo pojam divizora modularne forme parne težine na modularnoj krivulji $\mathfrak{R}_\Gamma$ po uzoru na ([18], 2.3). Također vidi [19, sekcija 4].

Prvo definiramo red modularne forme u svakoj točki modularne krivulje.

1° Ako je $\mathfrak{a}$ obična ili eliptička točka tada vrijedi $\mathfrak{a} = \pi(\xi) = \mathfrak{a}_\xi$ za neki $\xi \in \mathbb{H}$, gdje je

$$\mathfrak{a}_\xi \in \mathfrak{R}_\Gamma \text{ projekcija od } \xi \text{ na } \mathfrak{R}_\Gamma.$$

Ako stavimo

$$e_\xi = \#\left(\Gamma_\xi / \Gamma \cap \{\pm 1\}\right),$$

tada za svaki $\gamma \in \Gamma$, vrijedi $e_\xi = e_{\xi'}$, gdje je $\xi' = \gamma.\xi$. Stoga je dobro definirano $e_{\mathfrak{a}_\xi} = e_\xi$. To zovemo indeks ramifikacije u točki $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\xi$. Točka $\xi \in \mathbb{H}$ odnosno pripadna $\mathfrak{a}_\xi \in \mathfrak{R}_\Gamma$ je eliptička ako je $e_\xi > 1$.

Neka je $f \in M_m(\Gamma)$, gdje je $m \geq 2$ parni cijeli broj. Neka je $\xi \in \mathbb{H}$. Tada $\nu_{z-\xi}(f)$ označava red holomorfne funkcije f u ξ. Znamo da je $j(\gamma.z) \neq 0$ za svaki $\gamma \in \Gamma$ i za svaki $z \in \mathbb{H}$. Za svaki $\gamma \in \Gamma$, imamo jednakost funkcija $f(\gamma.z) = j(\gamma.z)^m f(z)$, gdje je $z \in \mathbb{H}$. Ovo pokazuje da za svaki $\gamma \in \Gamma$, vrijedi $\nu_{z-\xi}(f) = \nu_{z-\xi'}(f)$, gdje je $\xi' = \gamma.\xi$. Stoga možemo staviti

$$\nu_{\mathfrak{a}_\xi}(f) = \nu_{z-\xi}(f)/e_{\mathfrak{a}_\xi}.$$

2° Ako je $\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_\Gamma$ kasp, on korespondira nekom $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kaspu za Γ, što pišemo $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_x$. Neka je $\sigma \in SL_2(\mathbb{R})$ takav da je $\sigma.x = \infty$ i neka je $h' > 0$ takav da imamo

$$\{\pm 1\}\sigma\Gamma_x\sigma^{-1} = \{\pm 1\}\left\{\begin{pmatrix} 1 & lh' \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \ l \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Tada Fourierov razvoj od f u x ima oblik:

$$(f|_m\sigma^{-1})(\sigma.z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi\sqrt{-1}n\sigma.z/h'}.$$

Stavimo

$$\nu_x(f) = N \geq 0$$

gdje je $a_N \neq 0$ i $a_i = 0$ za svaki cijeli broj i takav da je $0 \leq i < N$. Lako se vidi da ova definicija ne ovisi o izboru od σ. Također, ako je $x' = \gamma.x$, tada vrijedi $\nu_x(f) = \nu_{x'}(f)$. Stoga možemo definirati

$$\nu_{\mathfrak{b}_x}(f) = \nu_x(f).$$

Definicija 1.8.1. Divizor modularne forme f *dan je formulom*

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma} \nu_{\mathfrak{a}}(f)\mathfrak{a} \in \quad \mathbb{Q} \otimes \mathrm{Div}(\mathfrak{R}_\Gamma),$$

gdje je $\mathrm{Div}(\mathfrak{R}_\Gamma)$ *grupa (cjelobrojnih) divizora na* $\mathfrak{R}_\Gamma$.

U gornjoj definiciji je pojam divizora proširen na način da divizor može poprimati i racionalne vrijednosti.

Koristeći ([18], 2.3), vidimo da je ova suma konačna t.j., $\nu_{\mathfrak{a}}(f) \neq 0$ za samo konačno mnogo točaka. Stavimo

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma} \nu_{\mathfrak{a}}(f).$$

Neka je $\mathfrak{d}_i \in \mathbb{Q} \otimes \mathrm{Div}(\mathfrak{R}_\Gamma)$, $i = 1, 2$. Kažemo da je $\mathfrak{d}_1 \geq \mathfrak{d}_2$ ako razlika $\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2$ pripada $\mathrm{Div}(\mathfrak{R}_\Gamma)$ te je ne-negativna u standardnom smislu.

Sljedeća lema je po uzoru na [19, Lema 4-1].

Lema 1.8.2. *Neka je $m \geq 2$ paran cijeli broj, te pretpostavimo da je $f \in M_m(\Gamma)$, $f \neq 0$. Neka je t broj neekvivalentnih kaspova za Γ. Tada vrijedi:*

(i) Za $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma$, vrijedi $\nu_{\mathfrak{a}}(f) \geq 0$.

(ii) Za kasp $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma$, vrijedi da je $\nu_{\mathfrak{a}}(f) \geq 0$ cijeli broj.

(iii) Ako $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma$ nije eliptička točka niti kasp, tada je $\nu_{\mathfrak{a}}(f) \geq 0$ cijeli broj. Ako je $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma$ eliptička točka, tada je $\nu_{\mathfrak{a}}(f) - \frac{m}{2}(1 - 1/e_{\mathfrak{a}})$ cijeli broj.

(iv) Neka je $g(\Gamma)$ genus od $\mathfrak{R}_\Gamma$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\deg(\mathrm{div}(f)) &= m(g(\Gamma) - 1) + \frac{m}{2}\left(t + \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma,\ \textit{elipticka}} (1 - 1/e_{\mathfrak{a}})\right) \\ &= \frac{m}{4\pi} \iint_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} \frac{dx\,dy}{y^2}.\end{aligned}$$

(v) Označimo s $[x]$ najveći cijeli broj $\leq x$, gdje je $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\dim S_m(\Gamma) = \begin{cases} (m-1)(g(\Gamma)-1) + (\frac{m}{2}-1)t + \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma, \\ elipticka}} \left[\frac{m}{2}(1-1/e_{\mathfrak{a}})\right], & \textit{ako je } m \geq 4, \\ g(\Gamma), & \textit{ako je } m = 2. \end{cases}$$

$$\dim M_m(\Gamma) = \begin{cases} \dim S_m(\Gamma) + t, & \textit{ako je } m \geq 4, \textit{ ili } m = 2 \textit{ i } t = 0, \\ \dim S_m(\Gamma) + t - 1 = g(\Gamma) + t - 1, & \textit{ako je } m = 2 \textit{ i } t \geq 1. \end{cases}$$

(vi) Postoji cjelobrojni divizor $\mathfrak{c}'_f \geq 0$ stupnja

$$\begin{cases} \dim M_m(\Gamma) + g(\Gamma) - 1, & \textit{ako je } m \geq 4, \textit{ ili } m = 2 \textit{ i } t \geq 1, \\ 2(g(\Gamma)-1), & \textit{ako je } m = 2 \textit{ i } t = 0 \end{cases}$$

takav da vrijedi

$$\operatorname{div}(f) = \mathfrak{c}'_f + \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma, \ \ elipticka} \left(\frac{m}{2}(1-1/e_{\mathfrak{a}}) - \left[\frac{m}{2}(1-1/e_{\mathfrak{a}})\right]\right) \mathfrak{a}.$$

(vii) Neka je $f \in S_m(\Gamma)$. Tada za cjelobrojni divizor definiran s $\mathfrak{c}_f \overset{def}{=} \mathfrak{c}'_f - \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_\Gamma, \\ cusp}} \mathfrak{b}$ vrijedi $\mathfrak{c}_f \geq 0$ te je njegov stupanj dan s

$$\begin{cases} \dim S_m(\Gamma) + g(\Gamma) - 1; & \textit{ako je } m \geq 4, \\ 2(g(\Gamma)-1); & \textit{ako je } m = 2. \end{cases}$$

Dokaz. Tvrdnje (i)–(v) su standardne ([18], 2.3, 2.4, 2.5). Tvrdnja (vi) slijedi iz (iii), (iv) i (v) (vidi Lema 4-1 in [19]). Na kraju, (vii) sijedi iz (vi). ■

2. Biracionalna preslikavanja od $X(1)$ u $\mathbb{P}^2$

U ovom poglavlju proučavamo biracionalna preslikavanja modularne krivulje $X(1)$ pridružene grupi $SL_2(\mathbb{Z})$ u projektivnu ravninu $\mathbb{P}^2$. Pokazujemo da se svaka krivulja genusa 0 i stupnja q može uniformizirati s modularnim formama za $SL_2(\mathbb{Z})$ težine veće ili jednake $12q$, ali ne i manje. Uniformizacija formama težine $12q$ može ze odabrati tako da bude biracionalna ekvivalencija. Proučavamo druga regularna preslikavanja $X(1) \to \mathbb{P}^2$ i računamo jednadžbu pripadne projektivne krivulje koja je slika tog preslikavanja. U programu SAGE računamo neke uniformizacije. Proširujemo rezultate od [24].

2.1. Uniformizacija modularnim formama

Osnovi primjeri modularnih formi za $SL_2(\mathbb{Z})$ su Eisensteinovi redovi.

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$$
$$E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n$$

predstavljaju q-ekspanzije u beskonačnosti Eisensteinovih redova težine 4 i 6, gdje je $q = \exp(2\pi i z)$. Oni generiraju prostor modularnih formi bilo koje parne težine za $SL_2(\mathbb{Z})$. Detaljnije, ako s M_m označimo prostor svih modularnih formi parne težine m za $SL_2(\mathbb{Z})$ tada vrijedi

$$M_m = \bigoplus_{\substack{\alpha,\beta \geq 0 \\ 4\alpha + 6\beta = m}} \mathbb{C} E_4^{\alpha} E_6^{\beta}. \tag{2.1}$$

Modularna grupa $SL_2(\mathbb{Z})$ djeluje na proširenu gornju hiperravninu $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$

razlomljenim linearnim transformacijama. Kvocijent

$$X(1) = \mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z})$$

je modularna krivulja genusa nula. Krivulja $X(1)$ je preko modularne j-funkcije izomorfna s $\mathbb{P}^1$.

Klasična modularna j-funkcija definirana je s

$$j = E_4^3/\Delta,$$

gdje je Δ Ramanujanova delta funkcija. Δ je definirana s

$$\Delta(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = q + \sum_{n=2}\tau(n)q^n = q - 24q^2 + 252q^3 + \cdots = \frac{E_4^3(z) - E_6^2(z)}{1728},$$

gdje je $q = \exp(2\pi i z)$.

Znamo da je svaka ireducibilna kompleksna projektivna krivulja biracionalno ekvivalentna s ravninskom krivuljom. Kažemo da je ireducibilna krivulja $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ uniformizirana s modularnim formama težine m ako postoje $f, g, h \in M_m$ takve da je $\mathcal{C}$ slika holomorfnog preslikavanja $X(1) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ danog s

$$z \longmapsto (f(z) : g(z) : h(z)). \tag{2.2}$$

Kako je modularna krivulja $X(1)$ genusa 0 zbog Hurwitzove formule (1.1), krivulja $\mathcal{C}$ također ima genus 0. Glavni rezultat ovog poglavlja je ([24, Teorem 1-3])

Teorem 2.1.1. *Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ ireducibilna krivulja stupnja q i genusa 0. Tada se $\mathcal{C}$ može uniformizirati s modularnim formama za $SL_2(\mathbb{Z})$ težine $12q$. To se ne može napraviti s modularnim formama manje težine. Nadalje, uniformizacijsko preslikavanje s modularnim formama se može odabrati tako da bude biracionalna ekvivalencija.*

U dokazu koristimo standardne rezultate o kompleksnim algebarskim krivuljama [17]. Treba nam pojam divizora modularne forme koji smo za općenitu Fuchsovu grupu uveli u preliminarnoj sekciji. Prvo ćemo to specijalizirati za grupu $SL_2(\mathbb{Z})$. Slijedimo ([18] 2.3).

Točka ξ je eliptička ako njen stabilizator $SL_2(\mathbb{Z})_\xi$ u $SL_2(\mathbb{Z})$ podijeljen s $\{\pm 1\}$ nije trivijalan. Definiramo

$$e_\xi = \#\left(SL_2(\mathbb{Z})_\xi/\{\pm 1\}\right).$$

Stoga je ξ eliptička ako i samo ako $e_\xi > 1$. Definiramo

$$\nu_\xi(f) = \nu_{z-\xi}(f)/e_\xi.$$

Brojevi e_ξ and $\nu_\xi(f)$ ovise samo o $SL_2(\mathbb{Z})$–orbiti od ξ. Ako je $\mathfrak{a}_\xi$ projekcija od ξ na $X(1)$, možemo staviti

$$\nu_{\mathfrak{a}_\xi}(f) = \nu_\xi(f).$$

U $SL_2(\mathbb{Z})$ imamo samo dvije orbite eliptičkih točaka: i i $e^{\pi i/3}$. Pripadni indeksi ramifikacije su $e_i = 2$ te $e_{e^{\pi i/3}} = 3$.

Kaspovi za $SL_2(\mathbb{Z})$ su $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ i oni svi tvore jednu orbitu. Neka je $f \in M_m - \{0\}$ modularna forma parne težine $m \geq 4$ za $SL_2(\mathbb{Z})$. Po uzoru na (§1.8) definiramo Fourierov razvoj od f u kaspu $i\infty$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}.$$

Stavimo

$$\nu_{i\infty}(f) = N \geq 0,$$

gdje je $a_N \neq 0$ i $a_i = 0$ za svaki cijeli broj i takav da je $0 \leq i < N$. Pokazuje se da $\nu_x(f)$ ne ovisi o izboru kaspa $x \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$.

Definiramo divizor od f kao:

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{\mathfrak{a} \in X(1)} \nu_{\mathfrak{a}}(f)\mathfrak{a}.$$

To je divizor s racionalnim koeficijentima na Riemannovoj plohi $X(1)$. Znamo da je ([18], 2.3) ova suma konačna, t.j., $\nu_{\mathfrak{a}}(f) \neq 0$ samo za konačno mnogo točaka na krivulji. Standardno je stupanj divizora

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = \sum_{\mathfrak{a} \in X(1)} \nu_{\mathfrak{a}}(f).$$

U ([18], Theorem 2.3.3) dana je formula za stupanj divizora modularne forme za bilo koju Fuchsovu grupu Γ. Ako to primijenimo na grupu $SL_2(\mathbb{Z})$ dobivamo

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = \frac{m}{12}.$$

Analogno dokazu od ([19], Lemma 4-1 (vi)) dokazuje se

Lema 2.1.2. *Neka je $m \geq 12$ paran cijeli broj i $f \in M_m$, $f \neq 0$. Tada postoji cjelobrojni efektivni divizor $\mathfrak{c}_f \geq 0$ stupnja $\dim M_m - 1$ takav da vrijedi*

$$div(f) = \mathfrak{c}_f + \left(\frac{m}{4} - \left[\frac{m}{4}\right]\right) \mathfrak{a}_i + \left(\frac{m}{3} - \left[\frac{m}{3}\right]\right) \mathfrak{a}_{e^{\pi i/3}}.$$

Dokaz Teorema 2.1.1 počinjemo sa sljedećom lemom (vidi [24, Lema 2-2]):

Lema 2.1.3. *Pretpostavimo da je $m \geq 12$ paran cijeli broj takav da je $\dim M_m \geq 3$. Neka su $f, g, h \in M_m$ linearno nezavisne modularne forme. Tada je slika preslikavanja $X(1) \to \mathbb{P}^2$ danog s*

$$\mathfrak{a}_z \longmapsto (f(z) : g(z) : h(z))$$

ireducibilna projektivna krivulja genusa 0. Označavamo ju s $\mathcal{C}(f, g, h)$. Nadalje, ako stupanj krivulje $\mathcal{C}(f, g, h)$ označimo s q, tada vrijedi $1 < q \leq \dim M_m - 1$.

Dokaz. $X(1)$ ima strukturu kompaktne Riemannove plohe ([18] §1.8), a to povlači [17] da ima kanonsku strukturu glatke projektivne krivulje. Jasno je da su f/h i g/h racionalne funkcije na $X(1)$. Stoga je preslikavanje $\mathfrak{a}_z \longmapsto (f(z) : g(z) : h(z))$ jednako racionalnom preslikavanju

$$\mathfrak{a}_z \longmapsto (f(z)/h(z) : g(z)/h(z) : 1).$$

Međutim, kako je $X(1)$ glatka, to preslikavanje mora biti regularno (vidi 1.1.1). Kako je regularno preslikavanje neprekidno, slika ireducibilnog skupa je ireducibilan skup. Stoga je slika $\mathcal{C}(f, g, h)$ ireducibilna projektivna krivulja (vidi 1.1.2). Genus od $\mathcal{C}(f, g, h)$ je po definiciji genus od njene desingularizacije (normalizacije), koju nazovimo $\mathcal{C}$. Normalizacija daje racionalno preslikavanje $\varphi : \mathcal{C}(f, g, h) \longrightarrow \mathcal{C}$ koje je biracionalna ekvivalencija. Stoga je kompozicija

$$X(1) \xrightarrow{\mathfrak{a}_z \longmapsto (f(z):g(z):h(z))} \mathcal{C}(f, g, h) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}$$

ne-konstantno racionalno preslikavanje. Stoga je ta kompozicija regularna (1.1.1) i surjektivna. Po Hurwitzovoj formuli, genus od $\mathcal{C}$ je manji ili jednak genusu od $X(1)$, što povlači da je genus od $\mathcal{C}$ jednak 0. Dakle, $\mathcal{C}(f, g, h)$ ima genus 0.

Sada dokazujemo zadnju tvrdnju leme. Neka su $(x_0 : x_1 : x_2)$ homogene koordinate na $\mathbb{P}^2$. Kako su f, g, h linearno nezavisne, stupanj od $\mathcal{C}(f, g, h)$ na može biti 1. Pokažimo da je taj stupanj $\leq \dim M_m - 1$. Neka je l pravac u $\mathbb{P}^2$ u općem položaju u odnosu na $\mathcal{C}(f, g, h)$. Tada on presijeca krivulju $\mathcal{C}(f, g, h)$ u različitim točkama čiji broj je jednak stupnju od $\mathcal{C}(f, g, h)$. Možemo napraviti zamjenu koordinata tako da jednadžba pravca

l bude $x_0 = 0$. U novom koordinatnom sustavu preslikavanje $\mathfrak{a}_z \mapsto (f(z) : g(z) : h(z))$ je oblika

$$\mathfrak{a}_z \mapsto (F(z) : G(z) : H(z)),$$

gdje su $F, G, H \in M_m$ ponovo linearno nezavisne. Specijalno mora vrijediti $F, G, H \neq 0$.

Napišimo ovo regularno preslikavanje $X(1) \longrightarrow \mathcal{C}(F, G, H)$ u formi

$$\mathfrak{a}_z \mapsto (1 : G(z)/F(z) : H(z)/F(z)). \tag{2.3}$$

Pomoću Leme 2.1.2, lako možemo izračunati divizore racionalnih funkcija G/F i H/F. Dobijemo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(G/F) &= \operatorname{div}(G) - \operatorname{div}(F) = \mathfrak{c}_G - \mathfrak{c}_F \\ \operatorname{div}(H/F) &= \operatorname{div}(H) - \operatorname{div}(F) = \mathfrak{c}_H - \mathfrak{c}_F, \end{aligned} \tag{2.4}$$

gdje su $\mathfrak{c}_F$, $\mathfrak{c}_G$ i $\mathfrak{c}_H$ cjelobrojni efektivni divizori stupnja $\dim M_m - 1$.

Sada presjecimo $\mathcal{C}(f, g, h)$ s pravcem $x_0 = 0$. Promatrajući preslikavanje u formi (2.3), zaključujemo da je presjek određen s polovima od G/H i H/F. Kako su svi divizori u (2.4) efektivni, polovi od G/F i H/F su sadržani u nosaču od $\mathfrak{c}_F$. Kako je $\mathfrak{c}_F$ efektivan i stupnja $\dim M_m - 1$ njegov nosač ne može imati više od $\dim M_m - 1$ točaka u nosaču. Dakle, imamo najviše $\dim M_m - 1$ točaka u presjeku, čime je tvrdnja dokazana. ■

Sljedi slučaj s linearno zavisnim modularnim formama ([24, Lema 2-5]).

Lema 2.1.4. *Pretpostavimo da je $m \geq 12$ paran cijeli broj takav da je $\dim M_m \geq 2$. Neka su $f, g, h \in M_m$, takve da su dvije od njih linearno zavisne, ali ne i sve tri. Tada je slika preslikavanja $X(1) \to \mathbb{P}^2$ danog s*

$$\mathfrak{a}_z \longmapsto (f(z) : g(z) : h(z))$$

pravac.

Dokaz. Ako na primjer uzmemo da su f i g linearno nezavisne, tade je preslikavanje $X(1) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ (na afinom podskupu) dano s f/g ne-konstantno, pa stoga i surjektivno (slika je ireducibilna mnogostrukost, a to može biti jedino točka ili cijeli $\mathbb{P}^1$). To upravo znači da je preslikavanje $\mathfrak{a}_z \longmapsto (f(z) : g(z))$ surjektivno. Po pretpostavci je h linearna kombinacija od f i g, $h = \lambda f + \mu g$. Sada vidimo da početno preslikavanje možemo faktorizirati na sljedeći način:

$$X(1) \xrightarrow{\mathfrak{a}_z \mapsto (f(z):g(z))} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{(s:t) \mapsto (s:t:\lambda s + \mu t)} \mathbb{P}^2.$$

Kako je drugo preslikavanje stupnja 1 ono je izomorfizam, tj. ulaganje projektivnog pravca $\mathbb{P}^1$ u projektivnu ravninu. ■

Korolar 2.1.5 (([24], Korolar 2-6)**.** *Uz pretpostavke ili Leme 2.1.3 ili Leme 2.1.4, postoji do na množenje skalarom jedinstveni homogeni polinom $P = P_{f,g,h}$ u tri varijable stupnja $\leq \dim M_m - 1$ takav da je skup svih njegovih nultočaka $(P(x_0,x_1,x_2)=0)$ jednak $\mathcal{C}(f,g,h)$.*

Dokaz. $\mathcal{C}(f,g,h)$ je ireducibilna projektivna krivulja stupnja $q \leq \dim M_m - 1$. Po Hilbertovom teoremu o nulama ta krivulja je skup nultočaka do na skalar jedinstvenog ireducibilnog homogenog polinoma. Stupanj tog polinoma jedak je stupnju krivulje $\mathcal{C}(f,g,h)$. ■

Bitan korak u dokazu Teorema 2.1.1 je sljedeća lema ([24, Lema 2-7]).

Lema 2.1.6. *Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ ireducibilna krivulja stupnja $q > 1$ i genusa 0. Tada se $\mathcal{C}$ ne može uniformizirati s modularnim formama težine $< 12q$.*

Dokaz. Prisjetimo se da je

$$\dim M_m = \begin{cases} \left[\frac{m}{12}\right] & \text{ako je } m \equiv 2 \ (mod\ 12) \\ \left[\frac{m}{12}\right] + 1 & \text{ako je } m \not\equiv 2 \ (mod\ 12), \end{cases}$$

gdje $[x]$ najveći cijeli broj $\leq x$. Ako je $m < 12q$ iz toga vidimo da je

$$\dim M_m < \dim M_{12q} = q + 1.$$

Kako bi uniformizacija bila moguća mora vrijediti $\dim M_m \geq 2$ (inače bi preslikavanje bilo konstantno). Sada zbog Leme 2.1.3 i Lemme 2.1.4 vidimo da je stupanj krivulje koju uniformiziramo $\leq \dim M_m - 1 < q$, pa zaključujemo da s modularnim formama težine $m < 12q$ ne možemo uniformizirati krivulju stupnja q. ■

Sljedeća lema završava dokaz Teorema 2.1.1 (vidi [24, Lema 2-7]).

Lema 2.1.7. *Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ ireducibilna krivulja stupnja $q \geq 1$ i genusa 0. Tada se $\mathcal{C}$ može uniformizirati s modularnim formama težine $12q$ tako da je pripadno preslikavanje biracionalna ekvivalencija.*

Dokaz. Kako je $\mathcal{C}$ genusa 0 postoji biracionalno preslikavanje

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Ovo preslikavanje je nužno oblika

$$(s:t) \longmapsto (\alpha(s,t):\beta(s,t):\gamma(s,t)),$$

gdje su α, β i γ homogeni polinomi u dvije varijable istog stupnja homogenosti.

Kako je krivulja $\mathcal{C}$ stupnja q, lako se vidi da stupanj homogenosti polinoma α, β i γ mora biti jednak upravo q. Naime, promotrimo broj točaka presjeka krivulje s pravcem u općem položaju. Jednadžba pravca $l \subseteq \mathbb{P}^2$ je oblika

$$Ax + By + Cz = 0$$

za neke $A, B, C \in \mathbb{C}$. Stoga vidimo da je pravac do na množenje skalarom potpuno određen trojkom (A, B, C). Na taj način imamo $1-1$ korespondenciju između točaka $(A:B:C) \in \mathbb{P}^2$ i pravaca $l \subseteq \mathbb{P}^2$. Pravci u općem položaju čine Zariski otvoren skup koji odgovara Zariski otvorenom skupu točaka $(A:B:C) \in \mathbb{P}^2$. Presjek pravca zadanog gornjom jednadžbom i slike biracionalnog preslikavanja dan je s nultočkama polinoma

$$A\alpha(s,t) + B\beta(s,t) + C\gamma(s,t).$$

Ako je pravac u općem položaju gornja jednadžba mora imati q-različitih rješenja $(s:t) \in \mathbb{P}^1$. Stoga polinom mora biti stupnja q. Kako ovo vrijedi na Zariski otvorenom skupu trojki $(A:B:C) \in \mathbb{P}^2$, homogeni polinomi α, β, γ moraju biti istog stupnja q.

Kako je gornje preslikavanje biracionalno, zaključujemo da su bar dva polinoma iz skupa $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ linearno nezavisna. U suprotnom bi preslikavanje bilo konstantno. Stoga su bar dva od njihovih dehomogenizacija $\alpha(T,1), \beta(T,1), \gamma(T,1)$ linearno nezavisna, gdje nam je T varijabla.

Polje racionalnih funkcija $\mathbb{C}(X(1))$ je dano s

$$\mathbb{C}(X(1)) = \mathbb{C}(j) \simeq \mathbb{C}(T).$$

Ovdje je j klasična modularna j-funkcija definirana s

$$j = E_4^3/\Delta,$$

gdje je Δ Ramanujanova delta funkcija

$$\Delta(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = q + \sum_{n=2}\tau(n)q^n = q - 24q^2 + 252q^3 + \cdots = \frac{E_4^3(z) - E_6^2(z)}{1728},$$

s time da je $q = \exp(2\pi i z)$.

Stoga vidimo da su barem dvije od modularnih funkcija $\alpha(j(z),1), \beta(j(z),1), \gamma(j(z),1)$ linearno nezavisne kao elementi od $\mathbb{C}(X(1))$. Stoga zbog homogenosti isto vrijedi i za modularne forme $\alpha(E_4^3(z), \Delta(z))$, $\beta(E_4^3(z), \Delta(z))$, $\gamma(E_4^3(z), \Delta(z))$ stupnja $12q$. Sada možemo Lemu 2.1.3 i Lemu 2.1.4 primijeniti na preslikavanje

$$X(1) \longrightarrow \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{C}$$

dano s

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} \longmapsto & (\alpha(j(z),1) : \beta(j(z),1) : \gamma(j(z),1) \\ &= \left(\alpha(E_4^3(z), \Delta(z)) : \beta(E_4^3(z), \Delta(z)) : \gamma(E_4^3, \Delta(z))\right).\end{aligned}$$

Zaključujemo da je slika ireducibilna projektivna krivulja $\mathcal{C}\left(\alpha(E_4^3, \Delta), \beta(E_4^3, \Delta), \gamma(E_4^3, \Delta)\right)$ sadržana u krivulji $\mathcal{C}$, pa su one zbog ireducibilnosti jednake. Kako je gornje preslikavanje kompozicija izomorfizma i biracionalne ekvivalencije, ono je i samo biracionalna ekvivalencija. ■

2.2. Primjeri uniformizacija

U ovoj sekciji proširujemo rezultate iz [24, sekcija 3]. Promatramo polinome u dvije varijable x,y, koje u projektivnom slučaju homogeniziramo na uobičajeni način s $x = x_1/x_0$ i $y = x_2/x_0$. Primjeri koje konstruiramo u ovoj sekciji dobiveni su direktnom primjenom Teorema 2.1.1. Oni daju biracionalnu ekvivalenciju.

Neka je

$$P(x,y) = x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \cdots a_1 q + a_0 - y,$$

polinom s kompleksnim koeficijentima a_i. Pokažimo da je on ireducibilan u prstenu $\mathbb{C}[x,y]$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je ga možemo napisati kao produkt

$$P(x,y) = P_1(x,y) \cdot P_2(x,y),$$

za neke nekonstantne polinome $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[x,y]$. Ako ga promatramo kao polinom u varijabli y s koeficijentima u prstenu $\mathbb{C}[x]$, on je očito ireducibilan i stupnja 1. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $P_1 \in C[x]$, i $\deg_y P_2 = 1$ (stupanj u varijabli y). Pretpostavili smo da je P_1 ne-konstantan, tj. $P_1 \notin \mathbb{C}$, pa stoga sadrži ne-nul monom u varijabli x pozitivnog stupnja k, $b_k x^k$. Stoga će produkt, tj. polinom $P(x,y)$ sadržavati monom $bx^k y$, gdje je $k > 0$, što je kontradikcija. To pokazuje da je $P(x,y)$ ireducibilan.

Stoga je afina krivulja $(y = x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \cdots a_1 q + a_0)$ ireducibilna i imamo očiti (afini) izomorfizam

$$(x,y) \longmapsto x$$

čiji inverz je

$$x \longmapsto (x, x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \cdots a_1 q + a_0).$$

Pripadna projektivna krivulja $\mathcal{C} = (x_2 x_0^{q-1} = x_1^q + a_{q-1}x_1^{q-1}x_0 + \cdots a_1 x_1 x_0^{q-1} - a_0 x_0^q)$ je ireducibilna i ima stupanj q. Nadalje, njen genus je 0 pošto gornji afini izomorfizmi induciraju biracionalno preslikavanje s $\mathcal{C}$ u $\mathbb{P}^1$.

U projektivnim koordinatama, biracionalna ekvivalencija $\mathbb{P}^1 \to \mathcal{C}$ je dana s $(t \leftrightarrow x)$

$$(s:t) \longmapsto (s^q : s^{q-1}t : t^q + a_{q-1}st^{q-1} + \cdots a_1 s^{q-1}t : a_0 s^q). \tag{2.5}$$

Kako $\mathfrak{a}_z \longmapsto (E_4^3(z) : \Delta(z))$ daje izomorfizam od $X(1)$ s $\mathbb{P}^1$, kompozicija

$$X(1) \xrightarrow{\mathfrak{a}_z \longmapsto (E_4^3(z):\Delta(z))} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\text{preslikavanje (2.5)}} \mathcal{C}.$$

daje biracionalnu ekvivalenciju od $X(1)$ s $\mathcal{C}$. Stoga je $\mathcal{C}$ uniformizirana i biracionalno ekvivalentna s $X(1)$ pomoću modularnih formi $E_4^{3q}, \Delta E_4^{3q-3}, \Delta^q + a_{q-1}\Delta^{q-1}E_4^3 + \cdots + a_1\Delta E_4^{3q-3} + a_0 E_4^{3q} \in M_{12q}$.

Neka su $m, n \geq 1$ relativno prosti cijeli brojevi. Tvrdimo da je krivulja dana jednadžbom

$$x^m - y^n = 0$$

ireducibilna i biracionalno ekvivalentna afinom pravcu $\mathbb{A}^1$. Zaista, promotrimo preslikavanje

$$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{x \mapsto (x^n, x^m)} (x^m - y^n = 0). \tag{2.6}$$

Pokažimo da je ono biracionalna ekvivalencija. Prvo promotrimo sljedeća preslikavanja:

$$\begin{aligned} (x^n - y^r = 0) &\xrightarrow{(x,y)\mapsto(y,xy^k)} (x^m - y^n = 0), \\ (x^m - y^n = 0) &\xrightarrow{(x,y)\mapsto(\frac{y}{x^k},x)} (x^n - y^r = 0), \end{aligned}$$

gdje je $m = nk + r$. Očito je da su ta preslikavanja inverzna jedno drugom na Zariski otvorenom skupu pa su oba biracionalne ekvivalencije. Koristeći ovu ideju i primjenom Euklidovog algoritma preslikavanje 2.6 se može rastaviti u niz biracionalnih ekvivalencija:

$$\begin{array}{ll}
m = k_1 n + r_1 & (x^n - y^{r_1} = 0) \xrightarrow{(x,y)\mapsto(y,xy^{k_1})} (x^m - y^n = 0) \\
n = k_2 r_1 + r_2 & (x^{r_1} - y^{r_2} = 0) \xrightarrow{(x,y)\mapsto(y,xy^{k_2})} (x^n - y^{r_1} = 0) \\
\dots & \dots \\
r_{i-1} = k_{i+1} r_i + r_{i+1} & (x^{r_i} - y^{r_{i+1}} = 0) \xrightarrow{(x,y)\mapsto(y,xy^{k_{i+1}})} (x^{r_{i-1}} - y^{r_i} = 0) \\
r_i = k_{i+2} r_{i+1} + 1 & (x^{r_{i+1}} - y = 0) \xrightarrow{(x,y)\mapsto(y,xy^{k_{i+2}})} (x^{r_i} - y^{r_{i+1}} = 0) \\
 & \mathbb{A}^1 \xrightarrow{x\mapsto(x,x^{r_{i+1}})} (x^{r_{i+1}} - y = 0).
\end{array}$$

Pretpostavimo da je $m > n$. Napomenimo da je polinom

$$x^m - y^n$$

ireducibilan, što je ekvivalentno ireducibilnosti homogenog polinoma

$$x_1^m - x_2^n x_0^{m-n}.$$

To dobijemo iz pokazane činjenice da je krivulja $(x^m - y^n = 0)$ ireducibilna, a to povlači ireducibilnost projektivne krivulje $(x_1^m - x_2^n x_0^{m-n} = 0)$. Stoga je po Hilbertovom teoremu o nulama polinom $x_1^m - x_2^n x_0^{m-n}$ potencija ireducibilnog polinoma, stupnja jednakog stupnju krivulje $(x_1^m - x_2^n x_0^{m-n} = 0)$. Međutim, ako presječemo tu krivulju s pravcem

$$x_0 - x_2 = 0,$$

dobijemo m različitih točaka presjeka. Točnije, točke presjeka su

$$(1 : \xi^k : 1), \quad \text{za} \quad 0 \leq k < m,$$

gdje je ξ primitivni m-ti korijen iz jedinice. To pokazuje tvrdnju o ireducibilnosti polinoma.

I dalje radi određenosti pretpostavljamo da je $m > n$. Kompozicijom preslikavanja (2.6) u projektivnoj formi i izomorfizma od $X(1)$ s $\mathbb{P}^1$ preko j-funkcije dobijemo biracionalni izomorfizam između $X(1)$ i krivulje $\mathcal{C} = (x_1^m - x_2^n x_0^{m-n} = 0)$:

$$X(1) \xrightarrow{\mathfrak{a}_z \longmapsto (E_4^3(z):\Delta(z))} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{(s:t) \mapsto (s^m : t^n s^{m-n} : t^m)} \mathcal{C}.$$

Stoga je $\mathcal{C}$ uniformizirana i biracionalno ekvivalentna s $X(1)$ uz pomoć modularnih formi $E_4^{3m}, \Delta^n E_4^{3m-3n}, \Delta^m \in M_{12q}$.

U sljedećoj propoziciji opisujemo sve krivulje koje možemo uniformizirati pomoću tri modularne forme za $SL_2(\mathbb{Z})$ u kanonskoj bazi (vidi (2.1))

$$E_4^{3q},\ E_4^{3q-3} E_6^2, \ldots, E_6^{2q} \tag{2.7}$$

za M_{12q}, gdje je $q \geq 2$.

Propozicija 2.2.1. *Neka je $q \geq 2$. Promatramo bazu od M_{12q} danu s (2.7). Tada su sve krivulje koje možemo uniformizirati pomoću tri forme iz te baze od M_{12q}, do na poredak elemenata baze i uniformizaciju s M_{12q} za $2 \leq q' < q$, dane s jednadžbama oblika $(x_0^{q'-j'} x_2^{j'} - x_1^{q'} = 0)$, gdje je $0 < j < q$, $(j,q) = d$, $q' = q/d$ i $j' = j/d$. Uniformizacija je biracionalna ekvivalencija ako i samo ako je $d = 1$.*

Dokaz. Prvo promotrimo slučaj $q = 2$. Tu se radi o prostoru M_{24} čija kanonska baza je E_4^6, $E_4^3 E_6^2$, E_6^4. Očito vrijedi $E_4^6 E_6^4 - \left(E_4^3 E_6^2\right)^2 = 0$. Stoga dobijemo krivulju $(x_0 x_2 - x_1^2 = 0)$. Time je tvrdnja za $q = 2$ dokazana.

Općenito, promotrimo krivulju dobivenu od $E_4^{3q-3i}E_6^{21}, E_4^{3q-3j}E_6^{2j}$, gdje je $0 \leq i < j < k \leq q$. Ako je $i > 0$ ili $k < q$, tada je svaka forma djeljiva s E_6^2 ili E_4^3 respektivno. To znači da jednadžbe krivulja koje dobijemo dolaze od pripadnih formi iz prostora $M_{12(q-1)}$ ili manjeg. Ali, nih smo već dobili za taj manji q. Zaključujemo da se doprinos prostora M_{12q} listi krivulja ostvaruje pomoću trojki $E_4^{3q}, E_4^{3q-3j}E_6^{2j}, E_6^{2q}$, gdje je $0 < j < q$. U ovom slučaju stavimo $(j,q) = d$, $q' = q/d$, i $j' = j/d$. Tada dobijemo:

$$\begin{aligned}
\left(E_4^{3q}\right)^{q'-j'}\left(E_6^{2q}\right)^{j'} - \left(E_4^{3q-3j}E_6^{2j}\right)^{q'} &= \left(E_4^{3q'd}\right)^{q'-j'}\left(E_6^{2q'd}\right)^{j'} - \left(E_4^{3q'd-3j'd}E_6^{2j'd}\right)^{q'} \\
&= E_4^{3q'd(q'-j')}E_6^{2q'dj'} - E_4^{3d(q'-j')q'}E_6^{2j'dq'} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da je ireducibilna projektivna krivulja

$$\mathcal{C}(E_4^{3q}, E_4^{3q-3j}E_6^{2j}, E_6^{2q})$$

(vidi 2.1.3), sadržana u krivulji

$$\left(x_0^{q'-j'}x_2^{j'} - x_1^{q'} = 0\right).$$

Međutim, kako su q' i j' relativno prosti, pomoću drugog primjera u ovoj sekciji zaključujemo da je krivulja $\left(x_0^{q'-j'}x_2^{j'} - x_1^{q'} = 0\right)$ također ireducibilna. Stoga zaključujemo da je

$$\mathcal{C}(E_4^{3q}, E_4^{3q-3j}E_6^{2j}, E_6^{2q}) = \left(x_0^{q'-j'}x_2^{j'} - x_1^{q'} = 0\right).$$

Sada diskutiramo kada je preslikavanje biracionalna ekvivalencija. Radi jednostavnosti stavimo $f = E_4^{3q}$, $g = E_4^{3q-3j}E_6^{2j}$, i $h = E_6^{2q}$. U dokazu leme 2.1.3 objašnjeno je da preslikavanje $\mathfrak{a}_z \longmapsto (f(z) : g(z) : h(z))$ možemo promatrati kao regularno preslikavanje s glatke projektivne krivulje $X(1)$ koje je surjektivno. Na razini polja racionalnih funkcija to implicira sljedeće:

$$\mathbb{C}\left(x_0^{q'-j'}x_2^{j'} - x_1^{q'} = 0\right) = \mathbb{C}\left(\mathcal{C}(f,g,h)\right) \simeq \mathbb{C}(g/f, h/f) \subseteq \mathbb{C}(X(1)) = \mathbb{C}(j).$$

Dakle, imamo ulaganje polja racionalnih funkcija. Znamo (vidi [37, str. 13] ili [36, str. 12]) da je racionalno preslikavanje biracionalna ekvivalencija ako i samo ako je pripadno ulaganje polja racionalnih funkcija izomorfizam. Stoga je preslikavanje $\mathfrak{a}_z \longmapsto (f(z) : g(z) : h(z))$ biracionalna ekvivalencija ako i samo ako vrijedi $\mathbb{C}(g/f, h/f) = \mathbb{C}(X(1)) = \mathbb{C}(j)$.

Pogledajmo čemu je jednako potpolje generirano s funkcijama g/f i h/f. Vrijedi

$$\mathbb{C}(g/f, h/f) = \mathbb{C}\left(\left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^j, \left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^q\right).$$

Međutim, postoje $m, n \in \mathbb{Z}$ takvi da je $jn + qm = d$, gdje je $(j,q) = d$. Kako je d najmanji takav broj po apsolutnoj vrijednosti za bilo koji izbor od n i m, vrijedi

$$\mathbb{C}\left(\left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^j, \left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^q\right) = \mathbb{C}\left(\left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^d\right).$$

Primjetimo da je

$$\frac{E_6^2}{E_4^3} = \frac{E_4^3 + E_6^2 - E_4^3}{E_4^3} = 1 - \frac{\Delta}{E_4^3} = 1 - j^{-1}.$$

Sada imamo

$$\mathbb{C}\left(\left(1 - j^{-1}\right)^d\right) = \mathbb{C}(g/f, h/f) \subseteq \mathbb{C}(X(1)) = \mathbb{C}(j) = \mathbb{C}\left(j^{-1}\right).$$

Rekli smo da je preslikavanje $\mathfrak{a}_z \longmapsto (f(z) : g(z) : h(z))$ biracionalana ekvivalencija ako i samo ako je gornja inkluzija jednakost. Međutim, kako je $\mathbb{C}(j^{-1}) \simeq \mathbb{C}(T)$, gdje je T varijabla, inkluzija će biti jednakost ako i samo ako je $d = 1$. ■

2.3. Računi pomoću SAGE-a

U ovoj sekciji računamo neke uniformizacije pomoću open source matematičkog softwarea SAGE. Proširujemo rezultate iz [24, sekcija 4]. Računamo ireducibilne poliome dane u Korolaru 2.1.5. Radi jednostavnosti označimo modularne forme u kanonskoj bazi za M_{12q} dane u (2.7) s:

$$e_0,\ e_1, \ldots, e_i, \ldots e_q \tag{2.8}$$

Ovu bazu računamo u SAGE-u na sljedeći način:

$$\text{sage}:\ \text{E4} = \text{eisenstein\_series\_qexp}(4, \text{prec})$$

$$\text{sage}:\ \text{E6} = \text{eisenstein\_series\_qexp}(6, \text{prec})$$

Ove naredbe vraćaju q-ekspanzije od normaliziranih Eisensteinovih redova težine 4 i 6 do preciznosti *prec*. Forme koje čine bazu dobivamo s

$$\text{sage}:\ \text{e}_\text{i} = \text{E4\^{}}(3*(\text{q}-\text{i}))*\text{E6\^{}}(2*\text{i})$$

za $0 \leq i \leq q$. Jednadžbu krivulje dobivene od linearno nezavisnih formi $f, g, h \in M_{12q}$ računamo na sljedeći način.

Prvo, pomoću jednostavnih procedura računamo sve monome stupnja q koji se dobiju od f, g, h. Nakon toga pomoću SAGE naredbe linear_dependence() računamo jednadžbe linearne zavisnosti monoma:

$$\text{sage}:\ \text{L} = \text{V.linear\_dependence}(\text{vectors}, \text{zeros} =' \text{left}').$$

To nam daje jednadžbu krivulje. Dalje koristimo naredbu factor() kako bi provjerili ireducibilnost pripadnog polinoma.

$$\text{sage}:\ \text{F} = \text{factor}(\text{pol}).$$

Primjetimo da su sve krivulje dobivene pomoću tri forme u kanonskoj bazi opisane u Propoziciji 2.2.1. Stoga radimo neke elementarne operacije s elementima kanonske baze kako bi dobili neke druge trojke linearno nezavisnih formi. Sljede neki ireducibilni ireducibilni polinomi koje smo izračunali u SAGEu:

1. M_{120}, $q = 10$. Za $f = e_0,\ g = e_0 + e_1,\ h = e_0 + e_1 + e_{10}$ dobivamo:

$$2x_0^{10} - 9x_0^9x_1 + 45x_0^8x_1^2 - 120x_0^7x_1^3 + 210x_0^6x_1^4 - 252x_0^5x_1^5$$
$$+ 210x_0^4x_1^6 - 120x_0^3x_1^7 + 45x_0^2x_1^8 - 10x_0x_1^9 + x_1^{10} - x_0^9x_2.$$

Za $f = e_0,\ g = e_0 + e_3,\ h = e_0 + e_3 + e_{10}$ dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&2x_0^{10} - 7x_0^9x_1 + 48x_0^8x_1^2 - 119x_0^7x_1^3 + 210x_0^6x_1^4 - 252x_0^5x_1^5 + 210x_0^4x_1^6 \\
&- 120x_0^3x_1^7 + 45x_0^2x_1^8 - 10x_0x_1^9 + x_1^{10} - 3x_0^9x_2 - 6x_0^8x_1x_2 - 3x_0^7x_1^2x_2 \\
&+ 3x_0^8x_2^2 + 3x_0^7x_1x_2^2 - x_0^7x_2^3.
\end{aligned}
$$

Za $f = e_0 + e_8,\ g = e_7 + e_8,\ h = e_{10} + e_8$ dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&x_0^2x_1^8 - 2x_0x_1^9 + 2x_1^{10} - 8x_0^2x_1^7x_2 + 9x_0x_1^8x_2 - 8x_1^9x_2 + 35x_0^2x_1^6x_2^2 - 34x_0x_1^7x_2^2 \\
&+ 20x_1^8x_2^2 - 90x_0^2x_1^5x_2^3 + 103x_0x_1^6x_2^3 - 48x_1^7x_2^3 + 142x_0^2x_1^4x_2^4 - 182x_0x_1^5x_2^4 + 82x_1^6x_2^4 \\
&- 126x_0^2x_1^3x_2^5 + 178x_0x_1^4x_2^5 - 80x_1^5x_2^5 + 53x_0^2x_1^2x_2^6 - 86x_0x_1^3x_2^6 \\
&+ 40x_1^4x_2^6 - x_0^3x_2^7 - 8x_0^2x_1x_2^7 + 16x_0x_1^2x_2^7 - 8x_1^3x_2^7 + x_0^2x_2^8 - 2x_0x_1x_2^8 + x_1^2x_2^8.
\end{aligned}
$$

2. M_{180}, $q = 15$. Za $f = e_0 + e_{14},\ g = e_{13} + e_{14}, h = e_{15} + e_{14}$ dobivamo:

$$x_1^{15} - x_0x_1x_2^{13} - x_0x_2^{14} + x_1x_2^{14}$$

Za $f = e_0 + e_3,\ g = e_2 + e_3, h = e_{15} + e_3$ dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&x_0^{12}x_1^3 - 12x_0^{11}x_1^4 + 66x_0^{10}x_1^5 - 220x_0^9x_1^6 + 495x_0^8x_1^7 - 792x_0^7x_1^8 + 926x_0^6x_1^9 - 768x_0^5x_1^{10} \\
&+ 450x_0^4x_1^{11} - 208x_0^3x_1^{12} + 84x_0^2x_1^{13} - 24x_0x_1^{14} + 4x_15 - 3x_0^{12}x_1^2x_2 + 36x_0^{11}x_1^3x_2 \\
&- 198x_0^{10}x_1^4x_2 + 660x_0^9x_1^5x_2 - 1485x_0^8x_1^6x_2 + 2376x_0^7x_1^7x_2 - 2787x_0^6x_1^8x_2 + 2339x_0^5x_1^9x_2 \\
&- 1362x_0^4x_1^{10}x_2 + 570x_0^3x_1^{11}x_2 - 190x_0^2x_1^{12}x_2 + 48x_0x_1^{13}x_2 - 6x_1^{14}x_2 - x_0^{13}x_2^2 + 15x_0^{12}x_1x_2^2 \\
&- 102x_0^{11}x_1^2x_2^2 + 418x_0^{10}x_1^3x_2^2 - 1155x_0^9x_1^4x_2^2 + 2277x_0^8x_1^5x_2^2 - 3300x_0^7x_1^6x_2^2 + 3564x_0^6x_1^7x_2^2 \\
&- 2871x_0^5x_1^8x_2^2 + 1705x_0^4x_1^9x_2^2 - 726x_0^3x_1^{10}x_2^2 + 210x_0^2x_1^{11}x_2^2 - 37x_0x_1^{12}x_2^2 + 3x_1^{13}x_2^2.
\end{aligned}
$$

3. M_{228}, $q = 19$. Za $f = e_0 + e_{18},\ g = e_{17} + e_{18}, h = e_{19} + e_{18}$ dobivamo:

$$x_1^{19} - x_0x_1x_2^{17} - x_0x_2^{18} + x_1x_2^{18}$$

Za $f = e_0 + e_{17},\ g = e_{16} + e_{17}, h = e_{19} + e_{17}$ dobivamo:

$$x_0^2x_1^{17} - 2x_0x_1^{18} + x_1^{19} - 17x_0^2x_1^{16}x_2 + 34x_0x_1^{17}x_2 - 17x_1^{18}x_2 + 152x_0^2x_1^{15}x_2^2$$
$$- 224x_0x_1^{16}x_2^2 + 136x_1^{17}x_2^2 - 903x_0^2x_1^{14}x_2^3 + 1050x_0x_1^{15}x_2^3 - 595x_1^{16}x_2^3$$
$$+ 3910x_0^2x_1^{13}x_2^4 - 4324x_0x_1^{14}x_2^4 + 2142x_1^{15}x_2^4 - 12876x_0^2x_1^{12}x_2^5 + 14620x_0x_1^{13}x_2^5$$
$$- 6800x_1^{14}x_2^5 + 32918x_0^2x_1^{11}x_2^6 - 38692x_0x_1^{12}x_2^6 + 17646x_1^{13}x_2^6 - 65779x_0^2x_1^{10}x_2^7$$
$$+ 79988x_0x_1^{11}x_2^7 - 36193x_1^{12}x_2^7 + 102416x_0^2x_1^9x_2^8 - 129136x_0x_1^{10}x_2^8 + 58208x_1^{11}x_2^8 -$$
$$122760x_0^2x_1^8x_2^9 + 161208x_0x_1^9x_2^9 - 72624x_1^{10}x_2^9 + 110960x_0^2x_1^7x_2^{10} - 152584x_0x_1^8x_2^{10}$$
$$+ 68952x_1^9x_2^{10} - 73432x_0^2x_1^6x_2^{11} + 106360x_0x_1^7x_2^{11} - 48416x_1^8x_2^{11} + 34268x_0^2x_1^5x_2^{12}$$
$$- 52556x_0x_1^6x_2^{12} + 24208x_1^7x_2^{12} - 10798x_0^2x_1^4x_2^{13} + 17586x_0x_1^5x_2^{13} - 8228x_1^6x_2^{13}$$
$$+ 2190x_0^2x_1^3x_2^{14} - 3784x_0x_1^4x_2^{14} + 1802x_1^5x_2^{14} - 269x_0^2x_1^2x_2^{15} + 491x_0x_1^3x_2^{15} - 238x_1^4x_2^{15}$$
$$- x_0^3x_2^{16} + 19x_0^2x_1x_2^{16} - 35x_0x_1^2x_2^{16} + 17x_1^3x_2^{16}.$$

2.4. Galoisova natkrivanja

Neka je $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$, gdje su Γ_1 i Γ_2 Fuchsove grupe prve vrste. Radi jednostavnosti pretpostavljamo da $-1 \notin \Gamma_i$, $i = 1, 2$.

Ako je Γ_1 podgrupa konačnog indeksa u Γ_2, tada prirodno preslikavanje kvocijentnih prostora inducira surjektivni morfizam (natkrivanje) kompaktnih Riemannovih ploha

$$F : \mathfrak{R}_{\Gamma_1} \twoheadrightarrow \mathfrak{R}_{\Gamma_2},$$

stupnja $[\Gamma_2 : \Gamma_1]$ (vidi Lemu 1.5.2). Ovo natkrivanje inducira ulaganje polja racionalnih funkcija

$$\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2}) \subseteq \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1}).$$

Iz teorije Riemnanovih ploha je poznato da je stupanj natkrivanja jednak stupnju proširenja polja ([18, 1.8.7]), pa vrijedi

$$[\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1}) : \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2}] = [\Gamma_2 : \Gamma_1].$$

Osnovni rezultat ove sekcije je sljedeći teorem ([38, str. 31]):

Teorem 2.4.1. *Ako je Γ_1 normalna podgrupa u Γ_2, tada je proširenje polja*

$$\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2}) \subseteq \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})$$

Galoisovo.

Dokaz. Proširujemo dokaz dan u [38]. Neka je $\gamma \in \Gamma_2$. Zbog normalnosti je $\gamma^{-1}\Gamma_1\gamma = \Gamma_1$, pa zbog Leme 1.6.2 imamo automorfizam polja

$$\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1}) \longrightarrow \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1}),$$

definiran s

$$\phi \longmapsto \phi|\gamma.$$

Ovdje je $\phi|\gamma = (\phi_f)|\gamma = \phi_{f|_0\gamma}$, gdje je $f \in \mathcal{A}_0(\Gamma_1)$ (vidi Lemu 1.6.1).

Na taj način smo definirali djelovanje grupe Γ_2 na polje $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})$.

1°. Zbog Leme 1.6.1 odmah vidimo da je fiksno polje ovog djelovanja upravo polje $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2})$, drugim riječima

$$\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2}) = \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})^{\Gamma_2}.$$

2°. Kako je djelovanje podgrupe Γ_1 invarijantno, dobro je definirano djelovanje desnih klasa od Γ_1, tj. elemenata od $\Gamma_1 \setminus \Gamma_2$ na polje $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})$. Naime, ako je $\Gamma_1\gamma = \Gamma_1\gamma'$, tada imamo $\gamma = \alpha\gamma'$ za neki $\alpha \in \Gamma_1$. Stoga je

$$\phi|\gamma = \phi|(\alpha\gamma') = (\phi|\alpha)|\gamma' = \phi|\gamma',$$

tj. djelovanje je dobro definirano.

3°. Zbog normalnosti je $\Gamma_1 \setminus \Gamma_2$ grupa. Dobili smo konačnu grupu automorfizama polja $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})$, čije fiksno polje je $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2})$, tj.

$$\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})^{\Gamma_1\setminus\Gamma_2} = \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2}).$$

Zbog Artinovog teorema ([15, VI §1 Teorem 1.8]) vrijedi da je

$$\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2}) \subseteq \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1}),$$

Galoisovo proširenje stupnja $[\Gamma_2 : \Gamma_1]$. ■

Napomena. *Ako je natkrivanje Galoisovo, tada Galoisova grupa proširenja polja djeluje tranzitivno na vlaknima natkrivanja.*

Napomena. *Vrijedi ([18, Teorem 4.2.1])*

$$\Gamma(N) \trianglelefteq SL_2(\mathbb{Z}),$$

$$\Gamma(N) \trianglelefteq \Gamma_0(N).$$

Međutim $\Gamma_0(N)$ nije normalna podgrupa od $SL_2(\mathbb{Z})$,

$$\Gamma_0(N) \ntrianglelefteq SL_2(\mathbb{Z}).$$

Primjer. *$\Gamma_0(N)$ nije normalna podgrupa od $SL_2(\mathbb{Z})$.*

Zaista, ako je $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$. Tada za $g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ vrijedi da je $g^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Stoga imamo:

$$g^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Sada za $h = \left(\begin{smallmatrix} 1-N & 1 \\ -N & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ vrijedi

$$g^{-1}hg = \begin{pmatrix} 1 & N \\ -1 & 1-N \end{pmatrix} \notin \Gamma_0(N)$$

pa $\Gamma_0(N)$ nije normalna podgrupa od $SL_2(\mathbb{Z})$.

U nastavku ćemo dati detalje oko karakterističnog i minimalnog polinoma funkcije $\phi \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})$.

Propozicija 2.4.2. *Neka su* $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ *Fuchsove grupe prve vrste i neka je* $\Gamma_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_1 \gamma_i,\ \ \gamma_i \in \Gamma_2$*, dekompozicija od* Γ_2 *na klase. Neka je* $\phi \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1}) \supseteq \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2})$*. Tada je*

$$P_\phi(T) := \prod_{i=1}^{n} (T - \phi|\gamma_i),$$

karakteristični polinom *od* ϕ *nad poljem* $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2})$*. Drugim riječima*

$$P_\phi(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i, \quad a_i \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2}),$$

i vrijedi

$$P_\phi(\phi) = 0,$$

Dokaz. Neka je $\phi \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})$ bilo koja funkcija. Neka je j jedinstveni indeks takav da je $\gamma_j \in \Gamma_1$. Stoga je $\phi|\gamma_j = \phi$, pa evidentno slijedi da je $P_\phi(\phi) = 0$.

Za drugi dio, primjetimo da koeficijente a_i, $i = 0, \ldots, n$ polinoma $P_\phi(T)$ dobijemo od funkcija $\{\phi|\gamma_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ preko Vieta-ovih formula. Znamo da su Vieta-ove formule simetrične funkcije, tj. ne ovise o permutaciji argumenta. Točnije, vrijedi:

$$a_i = a_i(\phi|\gamma_1, \phi|\gamma_2, \ldots, \phi|\gamma_n) = a_i(\phi|\gamma_{\sigma(1)}, \phi|\gamma_{\sigma(2)}, \ldots, \phi|\gamma_{\sigma(n)}),$$

gdje je σ bilo koja permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Pogledajmo kako Γ_2 djeluje na skup $\{\phi|\gamma_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Djelovanjem od $\alpha \in \Gamma_2$ na $\phi|\gamma_i$ dobijemo

$$\phi|\gamma_i \mapsto \phi|\gamma_i|\alpha = \phi|\gamma_i\alpha.$$

Vrijedi

$$\gamma_i\alpha \in \Gamma_1\gamma_j$$

za neki j. Za fiksni α različiti i-ovi daju različite j-ove (inače bi γ_i i $\gamma_{i'}$ bili u istoj klasi). Dakle imamo $\gamma_i\alpha = \beta_i\gamma_j$ gdje je $\beta_i \in \Gamma_1$, pa slijedi

$$\phi|\gamma_i|\alpha = \phi|\gamma_i\alpha = \phi|\beta_i\gamma_j = \phi|\beta_i|\gamma_j = \phi|\gamma_j.$$

Dakle, djelovanje grupe Γ_2 permutira skup $\{\phi|\gamma_i \colon i = 1, \ldots, n\}$. Stoga su koeficijenti a_i polinoma $P_\phi(T)$ invarijantni na djelovanje grupe Γ_2, tj.

$$a_i|\gamma = a_i, \quad \text{za svaki } \gamma \in \Gamma_2.$$

Zbog gornje Leme 1.6.1 zaključujemo da vrijedi

$$a_i \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2}), \quad \text{za svaki } i = 1, \ldots, n.$$

■

Primjetimo da funkcije $\phi|\gamma_i$, $i = 1, \ldots, n$ ne moraju biti međusobno različite za proizvoljno odabranu funkciju $\phi \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})$. Na primjer, ako je $\phi \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2})$, tada je $\phi|\gamma = \phi$ za svaki $\gamma \in \Gamma_2$, pa su one sve iste. Uzimanjem podskupa svih različitih dobiti ćemo polinom s koeficijentima u polju $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})$ koji poništava funkciju ϕ, a manjeg je stupnja od polinoma $P_\phi(T)$. Točnije, neka je $S \subset \{1, \ldots, n\}$ takav da vrijedi jednakost skupova

$$\{\phi|\gamma_i \mid i = 1, \ldots, n\} = \{\phi|\gamma_s \mid s \in S\},$$

s time da je $\phi|\gamma_s \neq \phi|\gamma_r$, za $s, r \in S$, $s \neq r$. Tada analogno dokazu Propozicije 2.4.2 vidimo da polinom

$$M_\phi(T) := \prod_{s \in S} (T - \phi|\gamma_s), \tag{2.9}$$

ima koeficijente u polju $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2})$ i vrijedi

$$M_\phi(\phi) = 0.$$

Vrijedi da je $M_\phi(T)$ upravo minimalni polinom od ϕ:

Propozicija 2.4.3. *Neka je $\phi \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})$. Tada polinom $M_\phi(T)$ definiran u 2.9 ima koeficijente u polju $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2})$ i jednak je do na skalar* ***minimalnom polinomu*** *funkcije ϕ nad poljem $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})$.*

Dokaz. Zbog gore navedenog dovoljno je pokazati da, ako polinom $Q(T) \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2})[T]$ poništava funkciju $\phi \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_1})$, nužno mora poništavati i funkciju $\phi|\gamma$, za svaki $\gamma \in \Gamma_2$. To pokazujemo u sljedećoj lemi. ■

Lema 2.4.4. *Neka je $\phi \in \mathbb{C}(X(\Gamma_1))$ i neka je*

$$Q(T) = \sum_{i=0}^{m} b_i T^i, \quad b_i \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2}),$$

polinom s koeficijentima u $\mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2})$ koji poništava funkciju ϕ, tj.

$$Q(\phi) = 0.$$

Tada vrijedi da je

$$Q(\phi|\gamma) = 0, \quad \text{za svaki } \gamma \in \Gamma_2.$$

Dokaz. Neka je $\gamma \in \Gamma_2$. Računamo

$$Q(\phi|\gamma) = \sum_{i=0}^{m} b_i(\phi|\gamma)^i = \sum_{i=0}^{m}(b_i|\gamma)(\phi^i|\gamma) = (\sum_{i=0}^{m} b_i\phi^i)|\gamma = Q(\phi)|\gamma = 0,$$

gdje je $b_i|\gamma = b_i$ jer je $b_i \in \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma_2})$. ∎

Ovime je i Propozicija (2.4.3) pokazana.

Definicija 2.4.5. *Neka je Γ Fuchsova grupa prve vrste.* ***Galoisov model od*** $\mathfrak{R}_\Gamma$ *je nekonstantno racionalno preslikavanje*

$$F : \mathfrak{R}_\Gamma \longrightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^n,$$

takvo da je pripadno proširenje polja

$$\mathbb{C}(\mathcal{C}) \subseteq \mathbb{C}(\mathfrak{R}_\Gamma)$$

Galoisovo.
Stupanj Galoisova modela *definiramo kao stupanj pripadnog proširenja polja.*
Jednadžbe Galoisova modela od $\mathfrak{R}_\Gamma$ *definiramo kao jednadžbe krivulje $\mathcal{C}$.*
Za $n = 2$ kažemo da imamo ***ravninski Galoisov model od*** $\mathfrak{R}_{\Gamma(N)}$.

Prisjetimo se da smo u sekciji 2.2 dali dva specijalna slučaja ravninskih krivulja biracionalno ekvivalentnih s $\mathfrak{R}_{\Gamma(1)}$ na način da smo eksplicitno konstruirali pripadne uniformizacije. Također smo u Propoziciji 2.2.1 naveli sve krivulje koje se mogu uniformizirati pomoću tri forme iz kanonske baze od M_{12q}, te dali uvjet kada je ta uniformizacija biracionalna ekvivalencija. Nakon toga smo u sekciji 2.3 za različite prostore M_{12q} dali primjere krivulja koje su uniformizirane s tri linearno nezavisne forme iz tih prostora. Sve te krivulje $\mathcal{C}$ su biracionalno ekvivalentne s $\mathfrak{R}_{\Gamma(1)}$. Za sve te krivulje $\mathcal{C}$ vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.4.6. *Jednadžbe krivulja $\mathcal{C}$ iz gornjeg paragrafa su jednadžbe Galoisovih modela od $\mathfrak{R}_{\Gamma(N)}$ stupnja*

$$[\Gamma(1) : \Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N} \left(1 - 1/p^2\right),$$

gdje je p prost broj.

Dokaz. Iz [18, Teorem 4.2.1.] slijedi da je $\Gamma(N)$ normalna podgrupa od $\Gamma(1)$ pa zbog teorema 2.4.1 slijedi da je natkrivanje

$$F\colon \mathfrak{R}_{\Gamma(N)} \longrightarrow \mathfrak{R}_{\Gamma(1)},$$

Galoisovo stupnja $[\Gamma(1):\Gamma(N)]$. Prema [18, Teorem 4.2.1.] prirodno preslikavanje

$$\lambda_N\colon SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}),$$

je surjektivni homomorfizam čija jezgra je $\Gamma(N)$. Stoga je

$$\Gamma(1)/\Gamma(N) \simeq SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Prema [18, Teorem 4.2.4.(2)] vrijedi $|SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = N^3 \prod_{p|N}\left(1-1/p^2\right)$ pa imamo

$$[\Gamma(1):\Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N}\left(1-1/p^2\right).$$

Sve ravninske krivulje $\mathcal{C}$ o čijim jednadžbama govorimo su biracionalno ekvivalentne s $\mathfrak{R}_{\Gamma(1)}$. Drugim riječima imamo biracionalnu ekvivalenciju $\phi\colon \mathfrak{R}_{\Gamma(1)} \longrightarrow \mathcal{C}$. Stoga je kompozicija

$$\mathfrak{R}_{\Gamma(N)} \xrightarrow{F} \mathfrak{R}_{\Gamma(1)} \xrightarrow{\phi} \mathcal{C},$$

nekonstantno racionalno preslikavanje. Kako biracionalna ekvivalencija inducira izomorfizam polja funkcija, proširenje polja

$$\mathbb{C}(\mathcal{C}) \subseteq \mathbb{C}(\mathfrak{R}_{\Gamma(N)}),$$

je Galoisovo stupnja $[\Gamma(1):\Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N}\left(1-1/p^2\right)$. Po definiciji je jednadžba krivulje $\mathcal{C}$, jednadžba ravninskog Galoisova modela od $\mathfrak{R}_{\Gamma(N)}$

■

3. Generalizirane Weierstrassove točke

3.1. Weierstrassove točke

Weierstrassove točke na kompaktnoj Riemannovoj plohi $\mathfrak{R}$ genusa $g \geq 2$, kao i njihove generalizacije m-Weierstrassove točke od temeljne su važnosti u analizi svojstava krivulje $\mathfrak{R}$. Slijedimo [8, III.5] i [29, §6.1].

Definicija 3.1.1. *Kažemo da je $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma$ Weierstrassova točka ako postoji ne-nul $\omega \in H^1(\mathfrak{R}_\Gamma)$ takav da je*

$$\nu_{\mathfrak{a}}(\omega) \geq g = \dim H^1(\mathfrak{R}_\Gamma).$$

Poznati rezultati i otvorena pitanja za modularnu krivulju $X_0(N)$. U [29, 6.1] Ken Ono je istakao sljedeći problem:

Problem 3.1.2 ([29], Problem 6.2)**.** *Klasificirati sve prirodne brojeve N za koje je kasp u ∞ Weierstrassova točka na krivulji $X_0(N)$.*

Na taj (još uvijek otvoren problem) upućuju radovi Atkina [4], Lehner i Newmana [16], Ogga [26, 27] i Rohrlicha [33, 34].

U [16] Lehner i Newman su 1963. dali dovoljne uvjete za koje je kasp u ∞, Weierstrassova točka na modularnoj krivulji $X_0(4n)$ i $X_0(9n)$.

U [4] Atkin je 1966. proširio njihove rezultate na slučaj p^2n, gdje je $p \geq 5$ bilo koji prost broj. Na taj način je pokazao da je kasp u ∞ Weierstrassova točka na $X_0(N)$ za različite dovoljno složene vrijednosti od N. Specijalan slučaj Atkinovih rezultata je:

Teorem 3.1.3 ([4], Teorem 2)**.** *Kasp ∞ je Weierstrassova točka za modularnu krivulju* *tipa* $X_0(n^2)$ *ako i samo ako je*

$$n = 8 \quad \textit{ili} \quad n \geq 10.$$

Atkin je završio svoj članak s rečenicama [4]:

"It would be of great interest to find an instance (if one exists) od $n \in W$ when n is quadratfrei. On the other hand, it has not yet been proved that $n \notin W$ for infinity of n."

(Prijevod iz [4]: "Bilo bi od velikog interesa naći kvadratno slobodan prirodan broj N (ako postoji) za koji je kasp u ∞ Weierstrassova točka na $X_0(N)$. S druge strane, do sada nije dokazano da postoji beskonačno prirodnih brojeva N za koje kasp u ∞ nije Weierstrassova točka na $X_0(N)$.")

Gore je s $n \in W$ kraće napisana činjenica da je kasp u ∞ Weierstrassova točka na $X_0(n)$.

U [27] Ogg navodi da je 1973. Atkin dokazao da kasp u ∞ nije Weierstrassova točka na krivulji $X_0(p)$ za bilo koji prost broj p, što je vidljivo iz [2,3]. Time je dan odgovor na drugu rečenicu. Koliko znamo, odgovor na prvu rečenicu je još uvijek nepoznat.

U [27] Ogg 1978. daje svojevrsnu generalizaciju Atkinovih rezultata.

Krivulje tipa $X(N)$. Weierstrassove točke na krivuljama tipa $X(N) = \mathfrak{R}_{\Gamma(N)}$, gdje je $\Gamma(N)$ glavna kongruencijska podgrupa od $SL_2(\mathbb{Z})$ proučavali su H. Petersson [32] i B. Schoeneberg [35]. Velika su odstupanja između njihovih rezultata i rezultata za grupu $\Gamma_0(N)$ što bi se moglo pripisati činjenici da su grupe $\Gamma(N)$ normalne podgrupe od $SL_2(\mathbb{Z})$, dok $\Gamma_0(N)$ nije, za $N > 1$ (vidi [16]).

3.2. Generalizacija

Analognno definiciji običnih Weierstrassovih točaka možemo definirati *m-Weierstrassove* točke gledajući prostor holomorfnih diferencijala stupnja m, $H^m(\mathfrak{R}_\Gamma)$.

Definicija 3.2.1. *Neka je $m \geq 1$ cijeli broj. Kažemo da je $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma$ m-Weierstrassova točka ako postoji ne-nul $\omega \in H^m(\mathfrak{R}_\Gamma)$ takav da je*

$$\nu_{\mathfrak{a}}(\omega) \geq \dim H^m(\mathfrak{R}_\Gamma).$$

Želimo uvesti pojam Weierstrassova težina koji profinjuje pojam Weierstrassova točka. Prvo primjetimo da vrijedi [8, str 81.]:

Napomena 3.2.2. *Za bilo koju točku $\mathfrak{a}$ na kompaktnoj Riemannovoj plohi $\mathfrak{R}$ genusa $g > 0$ postoji holomorfni diferencijal $\omega \in H^1(\mathfrak{R})$, koji se ne poništava u $\mathfrak{a}$, drugim riječima $\nu_{\mathfrak{a}}(\omega) = 0$.*

Zbog napomene i dimenzija pripadnih prostora holomorfnih diferencijala (1.2), vidimo da krivulje genusa 0 i 1 nemaju Weierstrassove točke.

Definicija 3.2.3. *Neka je $m \geq 1$ cijeli broj i $t = \dim H^m(\mathfrak{R})$. Za točku $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$, neka je*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t$$

baza prostora holomorfnih diferencijala stupnja m sa svojstvom

$$0 = \nu_{\mathfrak{a}}(\omega_1) < \nu_{\mathfrak{a}}(\omega_2) \cdots < \nu_{\mathfrak{a}}(\omega_t). \tag{3.1}$$

Tada definiramo m–Weierstrassovu težinu od $\mathfrak{a}$ kao nenegativan cijeli broj

$$\mathrm{wt}_m(\mathfrak{a}) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{t} (\nu_{\mathfrak{a}}(\omega_j) - j + 1).$$

Pokazuje se da je težina neovisna o izboru baze koja zadovljava (3.1).

Primjetimo da definicija m–Weierstrassove težine ovisi o lokalnom izboru baze holomorfnih diferencijala. Želimo ju definirati u terminima nekog globalnog objekta.

Lokalna definicija Wronskiana. Pretpostavimo da je $g(\Gamma) \geq 1$ i $m \geq 1$. Stoga je $t = \dim H^m(\mathfrak{R}_\Gamma) \neq 0$. Fiksirajmo bazu

$$\omega_1, \ldots, \omega_t \quad \text{od } H^m(\mathfrak{R}_\Gamma),$$

od $H^m(\mathfrak{R}_\Gamma)$. Tada za bilo koju lokalnu koordinatu z, lokalno postoje jedinstvene holomorfne funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_t$ takve da vrijedi

$$\omega_i = \varphi_i \, (dz)^m, \quad \text{za svaki } i = 1, \ldots, t.$$

Sada promatramo lokalni objekt Wronskian W_z definiran s

$$W_z \left(\omega_1, \ldots, \omega_t\right) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \varphi_1(z) & \cdots & \varphi_t(z) \\ \frac{d\varphi_1(z)}{dz} & \cdots & \frac{d\varphi_t(z)}{dz} \\ & \cdots & \\ \frac{d^{t-1}\varphi_1(z)}{dz^{k-1}} & \cdots & \frac{d^{t-1}\varphi_t(z)}{dz^{t-1}} \end{vmatrix}. \tag{3.2}$$

Očito je da drugi izbor baze od $H^m(\mathfrak{R}_\Gamma)$ daje Wronskian koji se od $W_z \left(\omega_1, \ldots, \omega_t\right)$ razlikuje do na množenje s ne-nul kompleksnim brojem. Stoga je red poništavanja Wronskiana u točki $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma$ neovisan o izboru baze prostora holomorfnih diferencijala i vrijedi [8, Proposition III.5.8]:

Propozicija 3.2.4. *$m-$Weierstrassova težina točke $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma$ jednaka je redu poništavanja Wronskiana $W_z \left(\omega_1, \ldots, \omega_t\right)$ u točki $\mathfrak{a}$ za bilo koju bazu $\omega_1, \ldots, \omega_t$ od $H^m(\mathfrak{R}_\Gamma)$, drugim riječima*

$$\mathrm{wt}_m(\mathfrak{a}) = \nu_a \left(W_z \left(\omega_1, \ldots, \omega_t\right)\right).$$

Želimo od lokalnih Wronskiana W_z dobiti globalni objekt. U [8, III.5.10] pokazano je da skup svih

$$W_z \left(\omega_1, \ldots, \omega_t\right) (dz)^{\frac{t}{2}(2m-1+t)}, \tag{3.3}$$

definira ne-null holomorfni diferencijal (globalni objekt)

$$W \left(\omega_1, \ldots, \omega_t\right) \in H^{\frac{t}{2}(2m-1+t)} \left(\mathfrak{R}_\Gamma\right).$$

Ovaj diferencijal zovemo Wronskian baze $\omega_1, \ldots, \omega_t$. Očito je da drugi izbor baze od $H^m \left(\mathfrak{R}_\Gamma\right)$ daje Wronskian koji se od $W \left(\omega_1, \ldots, \omega_t\right)$ razlikuje do na množenje s ne-nul kompleksnim brojem. Na taj način su m–Weierstrassove točke nultočke tog (globalnog) diferencijala. Preciznije vrijedi:

$$\mathrm{wt}_m(\mathfrak{a}) = \nu_{\mathfrak{a}}\left(W\left(\omega_1, \ldots, \omega_t\right)\right).$$

Stoga imamo da je $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma$ m–Weierstrassova točka ako i samo ako je

$$\nu_{\mathfrak{a}}\left(W\left(\omega_1, \ldots, \omega_t\right)\right) \geq 1.$$

Iz Riemann-Rochovog teorema slijedi da je stupanj divizora ovog diferencijala dan s

$$\deg\left(\mathrm{div}(W\left(\omega_1, \ldots, \omega_t\right))\right) = t\left(2m-1+t\right)\left(g\left(\mathfrak{R}_\Gamma\right)-1\right). \tag{3.4}$$

Iz ovoga zaključujemo da postoji samo konačno mnogo m–Weierstrassovih točaka [8, Propozicija III.5.10].

Propozicija 3.2.5. *Neka je $\mathfrak{R}_\Gamma$ kompaktna Riemannova ploha genusa $g(\Gamma) \geq 2$ i neka je $m \geq 1$ cijeli broj. Neka je $t = \dim H^m(\mathfrak{R}_\Gamma)$. Tada vrijedi*

$$\sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma} \mathrm{wt}_m(\mathfrak{a}) = t\left(2m-1+t\right)\left(g\left(\mathfrak{R}_\Gamma\right)-1\right).$$

Dokaz. Direktno iz (3.4) i (3.2.4). ■

Korolar 3.2.6. *Za $g(\Gamma) \geq 2$ postoje m–Weierstrassove točke na $\mathfrak{R}_\Gamma$ za svaki $m \geq 1$.*

Specijalno za $m = 1$ vrijedi.

Korolar 3.2.7. *Neka je $g = g(\Gamma) \geq 1$. Tada postoji*

$$g^3 - g$$

Weierstrassovih točaka na $\mathfrak{R}_\Gamma$, gdje svaku brojimo prema njenoj težini.

3.3. Interpretacija u terminima modularnih formi

Želimo dati interpretaciju rezultata o m-Weierstrassovim točkama u terminima modularnih formi. Radimo prema [25].

Ponovo nam je Γ Fuchsova grupa prve vrste. Neka je $m \geq 2$ paran. Označimo s $\mathcal{A}_m(\Gamma)$ prostor svih meromorfnih funkcija $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ takvih da vrijedi

$$f(\gamma.z) = j(\gamma, z)^m f(z), \quad (z \in \mathbb{H}, \gamma \in \Gamma),$$

koje su meromorfne u svakom kaspu od Γ. Po [18, Theorem 2.3.1], postoji izomorfizam vektorskih prostora

$$\mathcal{A}_m(\Gamma) \longrightarrow D^{m/2}\left(\mathfrak{R}_\Gamma\right),$$

u oznaci

$$f \longmapsto \omega_f.$$

Cilj nam je odrediti potprostor od $\mathcal{A}_m(\Gamma)$ izomorfan s $H^{m/2}\left(\mathfrak{R}_\Gamma\right)$ pod gornjim izomorfizmom.

Kao prvo primjetimo da za gornji izomorfizam vrijedi [18, Theorem 2.3.3]

$$\begin{aligned}
&\nu_{\mathfrak{a}_\xi}(f) = \nu_{\mathfrak{a}_\xi}(\omega_f) + \frac{m}{2}\left(1 - \frac{1}{e_{\mathfrak{a}_\xi}}\right), \quad \text{ako je } \xi \in \mathbb{H} \\
&\nu_{\mathfrak{a}}(f) = \nu_{\mathfrak{a}}(\omega_f) + \frac{m}{2}, \quad \text{za } \Gamma\text{–kasp } \mathfrak{a}. \\
&\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(\omega_f) + \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma} \frac{m}{2}\left(1 - \frac{1}{e_{\mathfrak{a}}}\right)\mathfrak{a},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

gdje je $1/e_{\mathfrak{a}} = 0$ ako je $\mathfrak{a}$ kasp.

Neka je $f \in M_m(\Gamma)$. Tada, zbog Leme 1.8.2 (vi) postoji cjelobrojni divizor $\mathfrak{c}'_f \geq 0$ takav da je

$$\operatorname{div}(f) = \mathfrak{c}'_f + \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma,\ eliptička} \left(\frac{m}{2}(1 - 1/e_{\mathfrak{a}}) - \left[\frac{m}{2}(1 - 1/e_{\mathfrak{a}})\right]\right)\mathfrak{a}.$$

Ovo i (3.5) daje

$$\operatorname{div}(\omega_f) = \mathfrak{c}'_f - \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma,\ eliptička} \left[\frac{m}{2}(1 - 1/e_{\mathfrak{a}})\right]\mathfrak{a} - \frac{m}{2} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_\Gamma,\ kasp} \mathfrak{b}. \tag{3.6}$$

Sada želimo odrediti sve $f \in M_m(\Gamma)$ takve da je $\omega_f \in H^{m/2}(\mathfrak{R}_\Gamma)$. Iz (3.6) vidimo da takav f mora pripadati prostoru $S_m(\Gamma)$, te da vrijedi nejednakost

$$\mathfrak{c}'_f \geq \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma,\ eliptička} \left[\frac{m}{2}(1-1/e_\mathfrak{a})\right]\mathfrak{a} + \frac{m}{2} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_\Gamma,\ kasp} \mathfrak{b}. \tag{3.7}$$

Definiramo:

$$S_m^H(\Gamma) = \{f \in S_m(\Gamma);\quad f = 0 \text{ ili } f \text{ zadovoljava } (3.7)\}.$$

Ovaj prostor se preko $f \longmapsto \omega_f$ izomorfno preslikava na $H^{m/2}(\mathfrak{R}_\Gamma)$.

Primjetimo da se za $m = 2$ (3.7) reducira na

$$\mathfrak{c}'_f \geq \sum_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_\Gamma,\ kasp} \mathfrak{b}.$$

Stoga je $S_2^H(\Gamma) = S_2(\Gamma)$ što daje standardni izomorfizam prostora $S_2(\Gamma)$ i $H^1(\mathfrak{R}_\Gamma)$ (vidi [18, Theorem 2.3.2]).

Efektivni algoritam. Želimo naći efektivni algoritam za provjeru je li kasp $\mathfrak{a}_\infty$ m–Weierstrassova točka, barem za $\Gamma = \Gamma_0(N)$.

Imamo sljedeći rezultat ([25], Lema 4-5):

Lema 3.3.1. *Neka su $m, n \geq 2$ parni cijeli brojevi. Neka je Γ Fuchsova grupa prve vrste. Tada vrijedi:*

(i) $S_2^H(\Gamma) = S_2(\Gamma)$.

(ii) $S_m^H(\Gamma)$ *je izomorfno s* $H^{m/2}(\mathfrak{R}_\Gamma)$.

(iii) $S_m^H(\Gamma) = \{0\}$ *ako je* $g(\Gamma) = 0$.

(iv) Pretpostavimo da je $g(\Gamma) = 1$. Stavimo da je $S_2(\Gamma) = \mathbb{C} \cdot f$, za neku ne–nul kasp formu f. Tada vrijedi $S_m^H(\Gamma) = \mathbb{C} \cdot f^{m/2}$.

(v) $\dim S_m^H(\Gamma) = (m-1)(g(\Gamma)-1)$ *ako je* $g(\Gamma) \geq 2$ *i* $m \geq 4$.

(vi) $S_m^H(\Gamma) \cdot S_n^H(\Gamma) \subset S_{m+n}^H(\Gamma)$.

(vii) Ne postoje $m/2$–Weierstrassove točke na $\mathfrak{R}_\Gamma$ za $g(\Gamma) \in \{0, 1\}$.

(viii) *Pretpostavimo da je $g(\Gamma) \geq 2$, te da je $\mathfrak{a}_\infty$ Γ-kasp. Tada je $\mathfrak{a}_\infty$ $\frac{m}{2}$–Weierstrassova točka ako i samo ako postoji $f \in S_m^H(\Gamma)$, $f \neq 0$, takva da*

$$\mathfrak{c}'_f(\mathfrak{a}_\infty) \geq \begin{cases} \frac{m}{2} + g(\Gamma) & \text{ako je } m = 2; \\ \frac{m}{2} + (m-1)(g(\Gamma)-1) & \text{ako je } m \geq 4. \end{cases}$$

Primjetimo da su $g(\Gamma)$ i $(m-1)(g(\Gamma)-1)$ dimenzije prostora $S_m^H(\Gamma)$ za $m = 2$ i $m \geq 4$, respektivno.

(ix) *Neka je $g(\Gamma) \geq 1$, i $\mathfrak{a}_\infty$ Γ–kasp. Tada postoji baza $f_1, \dots f_t$ od $S_m^H(\Gamma)$ s q–ekspanzijama oblika*

$$f_u = a_u q^{i_u} + \text{članovi većeg stupnja u } q, \quad 1 \leq u \leq t, a_u \neq 0, \text{ gdje je}$$
$$\frac{m}{2} \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq \frac{m}{2} + m\left(g(\Gamma)-1\right).$$

(x) *Uz pretpostavke kao u (ix), $\mathfrak{a}_\infty$ **nije** $\frac{m}{2}$–Weierstrassova ako i samo ako postoji baza $f_1, \dots f_t$ od $S_m^H(\Gamma)$ takva da je niz vodećih potencija iz (ix) jednak*

$$(i_1, i_2, \dots, i_t) = (\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \dots, \frac{m}{2}+t-1).$$

Kriterij (x) iz gornje Leme 3.3.1 je dosta dobar kriterij za provjeru je li $\mathfrak{a}_\infty$ Weierstrassova točka ($m = 2$) pomoću računalnih sustava kao što je SAGE zato jer trebamo samo izlistati bazu.

Međutim, pokazati ćemo da on nije dobar za $m \geq 4$, glede ograde za $S_m^H(\Gamma)$ dane u Lemi 3.3.1 (ix).

Pogledajmo prvo što nam daje SAGE. Proučavamo prostor $S_m^H(\Gamma)$.

Slučaj $m = 2$. Ako je $m = 2$ znamo da je

$$S_2^H(\Gamma) = S_2(\Gamma),$$

pa je zbog kriterija (x) iz Leme 3.3.1 dovoljno samo izlistati bazu. Za krivulje tipa $X_0(N)$ lagano u SAGE-u dobijemo bazu od $S_2(\Gamma_0(N))$:

```
N=38

G=Gamma0(N)

print('genus='+str(G.genus()))

S2 = CuspForms(G,2, prec=15)

print(S2.basis())
```

Za $\Gamma = \Gamma_0(38)$ **dobijemo:**

```
genus=4
q + q^5 - 2*q^6 - q^7 - 2*q^8 - q^9 + 2*q^10 - 3*q^11 + 2*q^12 + O(q^13),
q^2 - 2*q^6 - 2*q^8 + 3*q^10 + O(q^13),
q^3 + 2*q^5 - 2*q^6 - 2*q^7 - 3*q^8 + 5*q^10 - 4*q^11 + q^12 + O(q^13),
q^4 - 3*q^5 + q^6 + 2*q^7 + 2*q^8 - q^9 - 4*q^10 + q^11 - 2*q^12 + O(q^13)
```

Znamo da je $t = \dim(S_2(\Gamma)) = g = 4$. Po kriteriju (x), $\mathfrak{a}_\infty$ **nije** 1-Weierstrassova točka ako i samo ako postoji uređena baza s vodećim potencijama

$$\frac{m}{2}, \frac{m}{1} + 1, \cdots, \frac{m}{2} + t - 1,$$

što za $m = 2$ i $t = 4$ odgovara nizu

$$1, 2, 3, 4.$$

Zaključujemo da $\mathfrak{a}_\infty$ nije Weierstrassova točka za $X_0(38)$.

$\Gamma = \Gamma_0(34)$**.** Za genus i bazu od $S_2(\Gamma)$ dobijemo:

```
genus=3
q - 2*q^4 - 2*q^5 + 4*q^7 + 2*q^8 - 3*q^9 + O(q^13),
q^2 - q^4 - q^8 - 2*q^10 + O(q^13),
q^3 - 2*q^4 - q^5 + q^6 + 4*q^7 - 2*q^9 - q^10 - 3*q^11 + q^12 + O(q^13)
```

Vidimo da imamo sve potencije redom od 1 do 3, pa $\mathfrak{a}_\infty$ nije Weierstrassova točka za $X_0(34)$.

$\Gamma = \Gamma_0(54)$**.** Za genus i bazu od $S_2(\Gamma)$ dobijemo:

```
genus=4
q - q^7 - 2*q^10 - q^13 + 2*q^16 - q^19 + 2*q^22 + q^25 + O(q^30),
q^2 - 2*q^8 - q^14 + 5*q^26 + O(q^30),
q^4 - q^10 - 3*q^13 - q^16 + 3*q^19 + q^22 + 3*q^25 - q^28 + O(q^30),
q^5 - q^8 - q^11 + q^20 - 2*q^23 + 3*q^26 + 2*q^29 + O(q^30)
```

Imamo skok u potencijama s 2 na 4. Zaključujemo da je $\mathfrak{a}_\infty$ Weierstrassova točka za $X_0(54)$.

$\Gamma = \Gamma_0(72)$. Za genus i bazu od $S_2(\Gamma)$ dobijemo:

```
genus=5
q - 2*q^13 - 4*q^19 - q^25 + O(q^30),
q^2 - 4*q^14 + 2*q^26 + O(q^30),
q^3 - q^9 - 2*q^15 + q^27 + O(q^30),
q^5 - 2*q^11 - q^17 + 4*q^23 - 3*q^29 + O(q^30),
q^7 - q^13 - 3*q^19 + q^25 + O(q^30)
```

Imamo dva skoka u potencijama. Zaključujemo da je $\mathfrak{a}_\infty$ Weierstrassova točka za $X_0(72)$.

Slučaj $m \geq 4$. Prostor kasp formi veće težine $S_m(\Gamma)$ dobijemo u SAGE-u:

```
N=34
m=4
G=Gamma0(N)
print('genus='+str(G.genus()))
Sm = CuspForms(G,m, prec=20)
print('dim(S_m(Gamma)='+str(Sm.dimension()))
print('dim(S_m^H(Gamma)='+str((m-1)*(G.genus()-1)))
print(Sm.basis())
```

Dobijemo:

```
genus=3
dim(S_m(Gamma))=12
dim(S_m^H(Gamma))=6
q - 2*q^14 - 3*q^15 - 2*q^16 + O(q^17),
q^2 - 3/2*q^13 - 3*q^14 - 3/2*q^15 - 3*q^16 + O(q^17),
q^3 + 1/2*q^13 - 3*q^14 - 7/2*q^15 + q^16 + O(q^17),
q^4 - 3/2*q^13 - q^14 - 3/2*q^15 - q^16 + O(q^17),
q^5 - 3/4*q^13 - 5/2*q^14 - 3/4*q^15 - 3/2*q^16 + O(q^17),
q^6 - 3/2*q^13 - 3/2*q^15 - 3*q^16 + O(q^17),
q^7 - 5/4*q^13 - 3/2*q^14 + 3/4*q^15 - 5/2*q^16 + O(q^17),
q^8 - 3/2*q^13 - q^14 - 3/2*q^15 + O(q^17),
q^9 - 1/2*q^13 - q^14 + 1/2*q^15 - 3*q^16 + O(q^17),
```

```
q^10 + 3/4*q^13 - 5/2*q^14 + 3/4*q^15 - 5/2*q^16 + O(q^17),
q^11 - 1/4*q^13 - 3/2*q^14 - 1/4*q^15 - 1/2*q^16 + O(q^17),
q^12 - 3/4*q^13 - 1/2*q^14 - 3/4*q^15 + 1/2*q^16 + O(q^17)
```

Ovdje smo dobili bazu od $S_m(\Gamma)$, a za primjenu kriterija treba nam uređena baza od $S_m^H(\Gamma)$.

Naime, po stavci (x) iz Leme 3.3.1 (vi) znamo da $\mathfrak{a}_\infty$ nije $\frac{m}{2}$–Weierstrassova ako i samo ako postoji uređena baza za $S_m^H(\Gamma)$ s vodećim potencijama

$$\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1, \frac{m}{2}+2, \ldots, \frac{m}{2}+(m-1)(g-1)-1.$$

Za $\Gamma_0(34)$ i $m=4$ to odgovara nizu:

$$2,3,4,5,6,7.$$

Međutim, znamo da je $S_m^H(\Gamma) \subseteq S_m(\Gamma)$ i upitno je leži li podskup gornje baze

```
q^2 - 3/2*q^13 - 3*q^14 - 3/2*q^15 - 3*q^16 + O(q^17),
q^3 + 1/2*q^13 - 3*q^14 - 7/2*q^15 + q^16 + O(q^17),
q^4 - 3/2*q^13 - q^14 - 3/2*q^15 - q^16 + O(q^17),
q^5 - 3/4*q^13 - 5/2*q^14 - 3/4*q^15 - 3/2*q^16 + O(q^17),
q^6 - 3/2*q^13 - 3/2*q^15 - 3*q^16 + O(q^17),
q^7 - 5/4*q^13 - 3/2*q^14 + 3/4*q^15 - 5/2*q^16 + O(q^17),
```

sav u $S_m^H(\Gamma)$. Jedino što sigurno znamo da vodeće potencije elemenata uređene baze od $S_m^H(\Gamma)$ moraju biti između

$$\frac{m}{2} \quad \text{i} \quad \frac{m}{2}+m(g-1)$$

što je u ovom primjeru između

$$q^2+\cdots \quad \text{i} \quad q^{10}+\cdots,$$

U gornjem primjeru vidimo da baza od $S_m(\Gamma)$ sadrži normalizirane kasp forme s vodećim članovima

$$q^2, \ldots, q^{10},$$

i mi ne znamo koje od njih pripadaju prostoru $S_m^H(\Gamma)$, a koje ne. Ovo situacija vrijedi i općenito. Naime, za **dovoljno veliki** m i kada Γ **sadrži eliptičke točke** uređena baza od $S_m(\Gamma)$ sigurno će sadržavati sve kasp forme s vodećim članovima

$$q^{m/2}, \ldots, q^{m/2+m(g-1)}.$$

Međutim, ne znamo koje od njih pripadaju prostoru $S_m^H(\Gamma)$. To je objašnjeno ispod u Korolaru 3.3.4.

Prvo navedimo rezultate iz [20, Lemma 2.9] koji su poznati u nešto drugačijoj notaciji ([31], [30]). Također vidi [25, Lema 4-7, Lema 4-8].

Lema 3.3.2. *Neka je $m \geq 4$ paran cijeli broj za koji vrijedi $\dim S_m(\Gamma) \geq g(\Gamma)+1$. Tada za svaki $1 \leq i \leq t_m - g$, postoji kasp forma $f_i \in S_m(\Gamma)$ takva da je $\mathfrak{c}'_{f_i}(\mathfrak{a}_\infty) = i$.*

Lema 3.3.3. *Pretpostavimo da Γ ima eliptičke točke. (Na primjer, $\Gamma = \Gamma_0(N)$.) Tada za dovoljno veliki parni cijeli broj m vrijedi*

$$\frac{m}{2} + m(g(\Gamma)-1) \leq \dim S_m(\Gamma) - g(\Gamma). \tag{3.8}$$

Dokaz. Neka je $m \geq 4$ paran. Tada prema Lemi 1.8.2 (v), dobijemo

$$\begin{aligned}
&\dim S_m(\Gamma) - g(\Gamma) - \left(\frac{m}{2} + m(g(\Gamma)-1)\right) \\
&= \left(\frac{m}{2} - 1\right)t - \frac{m}{2} + \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma, \\ elliptic}} \left[\frac{m}{2}(1 - 1/e_{\mathfrak{a}})\right] - 2g(\Gamma) + 1 \\
&\geq \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma, \\ elliptic}} \left[\frac{m}{2}(1 - 1/e_{\mathfrak{a}})\right] - 2g(\Gamma) - t + 1.
\end{aligned}$$

Kako Γ ima eliptičke točke, zadnji član je ≥ 0 da dovoljno veliki parni cijeli broj m. ■

Kao posljedicu imamo ([25], Korolar 4-10):

Korolar 3.3.4. *Pretpostavimo da vrijedi (3.8). Neka je dana baza $f_1, \ldots f_t$ od $S_m^H(\Gamma)$ sa svojstvom da je $\mathfrak{c}'_{f_j}(\mathfrak{a}_\infty) = i_j$, $1 \leq j \leq t$, gdje je*

$$\frac{m}{2} \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq \frac{m}{2} + m\left(g(\Gamma)-1\right).$$

Tada se ta baza može proširiti s dodatnih $g(\Gamma)$ kasp formi iz $S_m(\Gamma)$ kako bi dobili kolekciju kasp formi

$$F_k, \quad \frac{m}{2} \leq k \leq \frac{m}{2} + m\left(g(\Gamma)-1\right)$$

takvih da je

$$\mathfrak{c}'_{F_k}(\mathfrak{a}_\infty) = k \quad \textit{za svaki} \;\; k.$$

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz Lema 3.3.2 i 3.3.3. ■

Stoga nam je potreban drugačiji pristup. Znamo da za $m = 2$ vrijedi $S_2^H(\Gamma) = S_2(\Gamma)$. Zbog toga i Leme 3.3.1 (vi) produkti kasp formi iz $S_2(\Gamma)$ leže u $S_m^H(\Gamma)$ za neki paran $m \geq 4$. Imamo Lemu ([25], Lema 4-11):

Lema 3.3.5. *Neka je $m \geq 4$ paran. Odaberimo bazu $f_0, \ldots, f_{g-1}$, od $S_2(\Gamma)$. Tada svih $\binom{g+\frac{m}{2}-1}{\frac{m}{2}}$ monoma*

$$f_0^{\alpha_0} f_1^{\alpha_1} \cdots f_{g-1}^{\alpha_{g-1}}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ \sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i = \frac{m}{2}.$$

pripada prostoru $S_m^H(\Gamma)$. Potprostor razapet s tim monomima označavamo sa

$$S_{m,2}^H(\Gamma).$$

Dokaz. Direktno iz Leme 3.3.1 (vi) pošto vrijedi $S_2(\Gamma) = S_2^H(\Gamma)$ (vidi Lema 3.3.1 (i)). ■

3.4. Računi prostora $S_{m,2}^H(\Gamma)$.

Sada ćemo se detaljno baviti algoritmom za određivanje prostora $S_{m,2}^H(\Gamma)$.

Naredba:

```
def getMonoms2(m,g,S2b):
    var('f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8')
    fi=[f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8]
    mons=[]
    mons_fi=[]
    if m==4:
        for i1 in range(g):
            for i2 in range(i1,g):
                mons.append(S2b[i1]*S2b[i2])
                mons_fi.append(fi[i1]*fi[i2])
    elif m==6:
        for i1 in range(g):
            for i2 in range(i1,g):
                for i3 in range(i2,g):
                    mons.append(S2b[i1]*S2b[i2]*S2b[i3])
                    mons_fi.append(fi[i1]*fi[i2]*fi[i3])
    elif m==8:
        for i1 in range(g):
            for i2 in range(i1,g):
                for i3 in range(i2,g):
                    for i4 in range(i3,g):
                        mons.append(S2b[i1]*S2b[i2]*S2b[i3]*S2b[i4])
                        mons_fi.append(fi[i1]*fi[i2]*fi[i3]*fi[i4])
    elif m==10:
        for i1 in range(g):
            for i2 in range(i1,g):
                for i3 in range(i2,g):
                    for i4 in range(i3,g):
                        for i5 in range(i4,g):
                            mons.append(S2b[i1]*S2b[i2]*S2b[i3]*S2b[i4]*S2b[i5])
                            mons_fi.append(fi[i1]*fi[i2]*fi[i3]*fi[i4]*fi[i5])
    elif m==12:
        for i1 in range(g):
```

```
        for i2 in range(i1,g):
            for i3 in range(i2,g):
                for i4 in range(i3,g):
                    for i5 in range(i4,g):
                        for i6 in range(i5,g):
                            mons.append(S2b[i1]*S2b[i2]*S2b[i3]*S2b[i4]*S2b[i5]*S2b[i6])
                            mons_fi.append(fi[i1]*fi[i2]*fi[i3]*fi[i4]*fi[i5]*fi[i6])
elif m==14:
    for i1 in range(g):
        for i2 in range(i1,g):
            for i3 in range(i2,g):
                for i4 in range(i3,g):
                    for i5 in range(i4,g):
                        for i6 in range(i5,g):
                            for i7 in range(i6,g):
                                mons.append(S2b[i1]*S2b[i2]*S2b[i3]*S2b[i4]*S2b[i5]
                                                *S2b[i6]*S2b[i7])
                                mons_fi.append(fi[i1]*fi[i2]*fi[i3]*fi[i4]*fi[i5]
                                                *fi[i6]*fi[i7])
elif m==16:
    for i1 in range(g):
        for i2 in range(i1,g):
            for i3 in range(i2,g):
                for i4 in range(i3,g):
                    for i5 in range(i4,g):
                        for i6 in range(i5,g):
                            for i7 in range(i6,g):
                                for i8 in range(i7,g):
                                    mons.append(S2b[i1]*S2b[i2]*S2b[i3]*S2b[i4]*S2b[i5]
                                                    *S2b[i6]*S2b[i7]*S2b[i8])
                                    mons_fi.append(fi[i1]*fi[i2]*fi[i3]*fi[i4]*fi[i5]
                                                    *fi[i6]*fi[i7]*fi[i8])
return (mons,mons_fi)
```

daje listu monoma stupnja $\frac{m}{2}$ dobivenih od $g = g(\Gamma)$ elemenata baze od $S_2(\Gamma)$. Želimo vidjeti koliko je velik potprostor razapet s njima u odnosu na $S^H_m(\Gamma)$.

Odabirući prvih $m/2 + m \cdot (g-1)$ članova iz q–ekspanzija monoma (Lema 3.3.1 (ix)), (potencije od $g^{m/2}$ do $q^{m/2+m(g-1)}$) kreiramo matricu dimenzija

$$\binom{g+m/2-1}{m/2} \times \left(\frac{m}{2}+m\cdot(g-1)\right).$$

Rang te matrice jednak je dimenziji prostora $S^H_{m,2}(\Gamma)$.

Računi od $S^H_{m,2}(\Gamma_0(N))$ za razne N i m :

$\Gamma = \Gamma_0(38)$. Vrijedi $g(X_0(38)) = 4$. Za $m = 4$ dobijemo matricu:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & -2 & -4 & -1 & 0 & -4 & 4 & 11\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 6 & -3 & 10\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 & -5 & 1 & -3 & -5 & 2 & 10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 & -6 & 2 & 2 & 0 & -4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 10 & 0 & 8\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -4 & -3 & -6 & 9 & -1 & 11\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 & 0 & 5 & -8 & 3 & -5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -4 & 0 & -14 & -4 & 6 & 8\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -6 & 8 & 4 & 3 & -7\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 11 & -2 & -7 & -10 & 6
\end{pmatrix}$$

Rang ove matrice je 9 i to nam daje $\dim(S^H_{m,2}(\Gamma))$. Kako je $\dim(S^H_m(\Gamma)) = (m-1)(g-1) = 3\cdot 3 = 9$, dobili smo cijeli prostor.

Na analogan način dobijemo u SAGE-u dimenzije:

$\Gamma = \Gamma_0(38)$

```
g(X_0(38))=4

m = 4

dim(S_m^H)=9

dim(S_m,2^H)=9


m = 6

dim(S_m^H)=15

dim(S_m,2^H)=15


m = 8
```

```
dim(S_m^H)=21
dim(S_m,2^H)=21

m = 10
dim(S_m^H)=27
dim(S_m,2^H)=27
```

$\Gamma = \Gamma_0(34)$

```
g(X_0(34))=3
m = 4
dim(S_m^H)=6
dim(S_m,2^H)=6

m = 6
dim(S_m^H)=10
dim(S_m,2^H)=10

m = 8
dim(S_m^H)=14
dim(S_m,2^H)=14

m = 10
dim(S_m^H)=18
dim(S_m,2^H)=18
```

$\Gamma = \Gamma_0(55)$

```
g(X_0(55))=5
m = 4
dim(S_m^H)=12
dim(S_m,2^H)=12

m = 6
dim(S_m^H)=20
dim(S_m,2^H)=20
```

```
m = 8
dim(S_m^H)=28
dim(S_m,2^H)=28

m = 10
dim(S_m^H)=36
dim(S_m,2^H)=36
```

$\Gamma = \Gamma_0(35)$

```
g(X_0(35))=3
m = 4
dim(S_m^H)=6
dim(S_m,2^H)=5

m = 6
dim(S_m^H)=10
dim(S_m,2^H)=7

m = 8
dim(S_m^H)=14
dim(S_m,2^H)=9

m = 10
dim(S_m^H)=18
dim(S_m,2^H)=11
```

$\Gamma = \Gamma_0(71)$

```
genus od X_0(71)=6
m = 4
dim(S_m^H)=15
dim(S_m,2^H)=11

m = 6
dim(S_m^H)=25
dim(S_m,2^H)=16
```

```
m = 8
dim(S_m^H(X_0(71)))=35
dim(S_m,2^H(X_0(71)))=21

m = 10
dim(S_m^H(X_0(71)))=45
dim(S_m,2^H(X_0(71)))=26
```

$\Gamma = \Gamma_0(26)$

```
g(X_0(26))=2
m = 4
dim(S_m^H(X_0(26))=3
dim(S_m,2^H(X_0(26)))=3

m = 6
dim(S_m^H(X_0(26))=5
dim(S_m,2^H(X_0(26)))=4

m = 8
dim(S_m^H(X_0(26))=7
dim(S_m,2^H(X_0(26)))=5

m = 10
dim(S_m^H(X_0(26))=9
dim(S_m,2^H(X_0(26)))=6
```

$\Gamma = \Gamma_0(37)$

```
g(X_0(37))=2
m = 4
dim(S_m^H(X_0(37))=3
dim(S_m,2^H(X_0(37)))=3

m = 6
dim(S_m^H(X_0(37))=5
dim(S_m,2^H(X_0(37)))=4
```

```
m = 8
dim(S_m^H(X_0(37))=7
dim(S_m,2^H(X_0(37)))=5

m = 10
dim(S_m^H(X_0(37))=9
dim(S_m,2^H(X_0(37)))=6
```

U gornjim primjerima imali smo situacije:

(i) $X_0(34)$, $X_0(38)$, $X_0(55)$ nisu hipereliptičke.

(ii) $X_0(35)$, $X_0(71)$ su hipereliptičke i $g(\Gamma) > 2$.

(iii) $X_0(26)$, $X_0(37)$ su hipereliptičke i $g(\Gamma) = 2$.

Prisjetimo se da je $\mathfrak{R}_\Gamma$ hipereliptička ako i samo ako je $g(\Gamma) \geq 2$ i postoji preslikavanje $\mathfrak{R}_\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^1$ stupnja dva. Po općoj teoriji [17, Chapter VII, Proposition 1.10], znamo da je $\mathfrak{R}_\Gamma$ sigurno hipereliptička ukoliko je $g(\Gamma) = 2$. Ukoliko $\mathfrak{R}_\Gamma$ nije hipereliptička, tada je $\dim S_2(\Gamma) = g(\Gamma) \geq 3$, i regularno preslikavanje $\mathfrak{R}_\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^{g(\Gamma)-1}$ pridruženo kanonskom divizoru K je izomorfizam na sliku [17, Chapter VII, Proposition 2.1].

Neka je $\Gamma = \Gamma_0(N)$, $N \geq 1$. Stavimo $X_0(N) = \mathfrak{R}_{\Gamma_0(N)}$. Podsjetimo da je $g(\Gamma_0(N)) \geq 2$ osim u slučaju kada je

$$\begin{cases} N \in \{1-10, 12, 13, 16, 18, 25\} \text{ kada je } g(\Gamma_0(N)) = 0, \text{ i} \\ N \in \{11, 14, 15, 17, 19-21, 24, 27, 32, 36, 49\} \text{ kada je } g(\Gamma_0(N)) = 1. \end{cases}$$

Neka je $g(\Gamma_0(N)) \geq 2$. Znamo da je Ogg [26] odredio sve krivulje tipa $X_0(N)$ koje su hipereliptičke. S obzirom na rezultate od Ogga znamo da $X_0(N)$ **nije hipereliptička** za $N \in \{34, 38, 42, 43, 44, 45, 51-58, 60-70\}$ ili $N \geq 72$. To povlači da je $g(\Gamma_0(N)) \geq 3$.

Rezultati računanja dimenzija prostora $S^H_{m,2}(\Gamma)$ u SAGE-u dali su ideju za sljedeći teorem ([25], Teorem 4-12):

Teorem 3.4.1. *Neka je $m \geq 4$ paran. Pretpostavimo da $\mathfrak{R}_\Gamma$ nije hipereliptička. Tada vrijedi*

$$S^H_{m,2}(\Gamma) = S^H_m(\Gamma).$$

Dokaz. Vidi [25, Teorem 4-12]. ■

Direktnom provjerom bez Teorema 3.4.1 dobili smo:

Propozicija 3.4.2. *Za* $m = 4,6,8,10,12$ *i* $N = 34,38,44,55$, *te za* $m = 4,6,8,10$ *i* $N = 54,60$, *vrijedi*

$$S^H_m(\Gamma_0(N)) = S^H_{m,2}(\Gamma_0(N)).$$

Napomenimo da sve krivulje $X_0(N)$, $N \in \{34,38,44,54,55,60\}$ *nisu hipereliptičke.*

Kriterij za testiranje. Sada se za $m \geq 4$ i krivulju koja nije hipereliptička, kombinacijom Teorema 3.4.1 i Leme 3.3.1 (x) dobije dobar kriterij za **testiranje** je li točka $\mathfrak{a}_\infty$ $\frac{m}{2}$–Weierstrassova točka ([25], Korolar 4-14):

Korolar 3.4.3. *Neka je* $m \geq 4$ *paran. Pretpostavimo da* $\mathfrak{R}_\Gamma$ *nije hipereliptička. Pretpostavimo da je* $\mathfrak{a}_\infty$ *kasp za* Γ. *Odaberimo bazu* $f_0, \ldots, f_{g-1}$, $g = g(\Gamma)$, *od* $S_2(\Gamma)$. *Izračunamo* q*–ekspanzije svih monoma*

$$f_0^{\alpha_0} f_1^{\alpha_1} \cdots f_{g-1}^{\alpha_{g-1}}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ \sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i = \frac{m}{2}.$$

Tada, $\mathfrak{a}_\infty$ ***nije*** $\frac{m}{2}$*–Weierstrassova točka ako i samo ako postoji baza prostora svih takvih monoma,* $F_1, \ldots F_t$, $t = \dim S^H_m(\Gamma) = (m-1)(g-1)$ *, takva da su njene* q*–ekspanzije oblika*

$$F_u = a_u q^{u+m/2-1} + \text{članovi većeg stupnja u } q, \quad 1 \leq u \leq t,$$

gdje je

$$a_u \in \mathbb{C}, \quad a_u \neq 0.$$

3.5. Hipereliptičke krivulje

Neka je Γ takva da vrijedi $g(\Gamma) = 2$, pa je $\mathfrak{R}_\Gamma$ nužno hipereliptička. Kasp je $\mathfrak{a}_\infty$ **nije** Weierstrassova točka ako i samo ako je uređena baza od $S_2(\Gamma)$ oblika

$$\begin{aligned} f_1 &= q + \cdots \\ f_2 &= q^2 + \cdots \end{aligned}$$

Zbog Leme 3.3.1 (vi) znamo da su monomi

$$\begin{aligned} f_1^2 &= q^2 + \cdots \\ f_1 f_2 &= q^3 + \cdots \\ f_2^2 &= q^4 + \cdots \end{aligned}$$

elementi prostora $S_4^H(\Gamma)$, a iz njihovih q–ekspanzije je očito da su linearno nezavisni. Kako je

$$\dim S_4^H(\Gamma) = (4-1)(2-1) = 3$$

oni očito čine bazu od $S_4^H(\Gamma)$.

Slijedi da $\mathfrak{a}_\infty$ **nije** 2-Weierstrassova točka za $\mathfrak{R}_\Gamma$. Drugim riječima, vrijedi:

Propozicija 3.5.1. *Neka je Γ Fuchsova grupa prve vrste takva da je $\mathfrak{a}_\infty$ Γ-kasp i da je $g(\Gamma) = 2$. Ako $\mathfrak{a}_\infty$ nije Weierstrassova točka na $\mathfrak{R}_\Gamma$, tada $\mathfrak{a}_\infty$ nije ni 2-Weierstrassova točka na $\mathfrak{R}_\Gamma$.*

Ako je $\mathfrak{R}_\Gamma$ hipereliptička, prostor $S_{m,2}^H(\Gamma)$ može biti pravi potprostor od $S_m^H(\Gamma)$. Direktnim računom prostora $S_m^H(\Gamma)$ dobili smo:

Teorem 3.5.2. *Za sljedeće hipereliptičke krivulje i vrijednosti od m:*

$$\begin{aligned} &X(\Gamma_0(40)), X(\Gamma_0(46)), X(\Gamma_0(48)), X(\Gamma_0(59)) && \textit{za } m = 4, 6, 8, 10, 12, \quad i \\ &X(\Gamma_0(26)), X(\Gamma_0(35)), X(\Gamma_0(37)), X(\Gamma_0(47)), X(\Gamma_0(71)) && \textit{za } m = 4, 6, 8, 10, 12, 14, \end{aligned}$$

vrijedi

$$\dim S_{m,2}^H(\Gamma) = \frac{m}{2}(g(\Gamma) - 1) + 1.$$

Pokazuje se da vrijedi i općenito:

Propozicija 3.5.3. *Neka je* $\mathfrak{R}_\Gamma$ *hipereliptička i* $m \geq 4$ *paran. Tada je*

$$\dim S_{m,2}^H(\Gamma) = \frac{m}{2}(g(\Gamma)-1)+1.$$

Dokaz. Komunikacija s M. Kazalickim i G. Muićem. ∎

Kako po općoj teoriji vrijedi $\dim S_m^H(\Gamma) = (m-1)(g(\Gamma)-1)$, za prostore iz Teorema 3.5.2 ili uz pretpostavku Propozicije 3.5.3 vrijedi

$$\dim S_m^H(\Gamma) - \dim S_{m,2}^H(\Gamma) = (\frac{m}{2}-1)(g(\Gamma)-1)-1 \geq 1, \quad \begin{cases} \text{za } \; g(\Gamma) \geq 2 \; \text{ i } \; m \geq 6, \text{ ili} \\ \text{za } \; g(\Gamma) \geq 3 \; \text{ i } \; m \geq 4. \end{cases}.$$

Drugim riječima u svim gornjim slučajevima prostor $S_{m,2}^H(\Gamma)$ je pravi potprostor od $S_m^H(\Gamma)$.

Slučaj kada je $g(\Gamma) = 2$ se može pokazati u potpunosti.

Propozicija 3.5.4. *Pretpostavimo da je* $g(\Gamma) = 2$. *Neka je* f_0, f_1 *baza od* $S_2(\Gamma)$. *Tada za svaki paran cijeli broj* $m \geq 4$, *monomi* $f_0^u f_1^{\frac{m}{2}-u}$, $0 \leq u \leq \frac{m}{2}$ *čine bazu od* $S_{m,2}^H(\Gamma)$. *Stoga je,*

$$\dim S_m^H(\Gamma) = (m-1)(g(\Gamma)-1) = m-1 > \frac{m}{2}+1, \quad \textit{za } m \geq 6.$$

Drugim riječima za $m \geq 6$, $S_{m,2}^H(\Gamma)$ *je pravi potprostor od* $S_m^H(\Gamma)$, *dok za* $m = 4$ *imamo jednakost* $S_{4,2}^H(\Gamma) = S_4^H(\Gamma)$.

Dokaz. Pokažimo da su monomi $f_0^u f_1^{\frac{m}{2}-u}$, $0 \leq u \leq \frac{m}{2}$ linearno nezavisni. Neka su

$$f_0 = a_k q^k + a_{k+1} q^{k+1} + \dots$$
$$f_1 = b_l q^l + b_{l+1} q^{l+1} + \dots$$

njihove q–ekspanzije. Možemo pretpostaviti da je $k < l$. Za pokazati linearnu nezavisnost monoma dovoljno je pokazati da svaka dva imaju različitu vodeću potenciju. Pretpostavimo suprotno, tj. da za cijele brojeve $0 \leq u_1, u_2 \leq m$, $u_1 \neq u_2$ vrijedi da su vodeće potencije od $f_0^{u_1} f_1^{\frac{m}{2}-u_1}$ i $f_0^{u_2} f_1^{\frac{m}{2}-u_2}$ iste. Dobijemo jednakost

$$ku_1 + l(\frac{m}{2}-u_1) = ku_2 + l(\frac{m}{2}-u_2).$$

Slijedi da je $k(u_1 - u_2) = l(u_1 - u_2)$ što je kontradikcija s pretpostavkom da je $k < l$ i $u_1 \neq u_2$.

Tvrdnja da je $S^H_{m,2}(\Gamma)$ pravi potprostor od $S^H_m(\Gamma)$ za $m \geq 6$ je očita, a jednakost $S^H_{4,2}(\Gamma) = S^H_4(\Gamma)$ slijedi iz rasprave na početku paragrafa.

■

3.6. Eksplicitni računi i opis algoritma

Računi bazirani na Korolaru 3.4.3 za $\Gamma = \Gamma_0(N)$.

Primjenjujemo gornji algoritam u kombinaciji s računima u SAGEu. Metoda je sljedeća. Uzmemo q-ekspanzije elemenata baze od $S_2(\Gamma_0(N))$:

$$f_0, \ldots, f_{g-1},$$

gdje je $g = g(\Gamma_0(N))$. Za parni $m \geq 4$, računamo q–ekspanzije svih monoma stupnja $m/2$:

$$f_0^{\alpha_0} f_1^{\alpha_1} \cdots f_{g-1}^{\alpha_{g-1}}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ \sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i = \frac{m}{2}.$$

Broj takvih monoma je

$$\binom{g+m/2-1}{m/2}.$$

Odabirući prvih $m/2 + m \cdot (g-1)$ članova od q–ekspanzija monoma (Lema 3.3.1 (ix)), možemo kreirati matricu dimenzija

$$\binom{g+m/2-1}{m/2} \times \left(\frac{m}{2} + m \cdot (g-1)\right).$$

Zatim radimo prikladnu metodu **cjelobrojnih Gaussovih eliminacija** kako bi transformirali matricu u row echelon formu. Procedura je sljedeća. Sukcesivno sortiramo i transformiramo redke matrice kako bi poništili vodeći koeficijent retka koji ima isti broj vodećih nula kao njegov prethodnik. Koristimo *Quicksort algoritam* za sortiranje.

Kao rezultat dobijemo transformiranu matricu i matricu transformacija.

Ne-nul redci transformirane matrice daju q–ekspanzije elemenata baze, a pripadajući redci matrice transformacija daju pripadne linearne kombinacije monoma.

Procedure u SAGE-u

```
def integral_Row_Ecelon_t(A):
    # Ulaz je matrica A; radimo transformacije nad retcima
    arr = A.rows()
    n = len(arr)
    # Matrica u kojoj pamtim transformacije
    arr_t = Matrix.identity(A.dimensions()[0]).rows()
```

```
    # prvo sortiramo retke po vodecim nulama
    quickSort_t(arr, arr_t, 0, n-1)
    # Sada imamo sortiranu dvostruku listu arr
    A_ech = Matrix(QQ, arr)
    A_t = Matrix(QQ, arr_t)
    # za 2 retka s jednakim brojem vodecih nula kratimo
    # vodeci keoficijent donjeg retka
    L=0
    while L < n-1 and L != -1:
        L = truncateAndReorderFrom(A_ech, A_t, L)
        if L == -1:
            break
    return A_ech, A_t

# The main function that implements QuickSort
# arr[] --> Array to be sorted,
# low --> Starting index,
# high --> Ending index
# arr_t[] --> Array (Matrix) for remembering all transformations

def quickSort_t(arr, arr_t, low, high):
    if len(arr) == 1:
        return arr, arr_t
    if low < high:

        # pi is partitioning index, arr[p] is now
        # at right place
        pi = partition_t(arr, arr_t, low, high)

        # Separately sort elements before
        # partition and after partition
        quickSort_t(arr, arr_t, low, pi-1)
        quickSort_t(arr, arr_t, pi+1, high)
```

```
# This function takes last element as pivot, places
# the pivot element at its correct position in sorted
# array, and places all smaller (smaller than pivot)
# to left of pivot and all greater elements to right
# of pivot

def partition_t(arr, arr_t, low, high):
    i = (low-1)    # index of smaller element
    pivot = arr[high]     # pivot

    for j in range(low, high):
        # If current element is smaller than or equal to pivot
        if getFirstNonZeroIndex(arr[j]) <= getFirstNonZeroIndex(pivot):

            # increment index of smaller element
            i = i+1
            arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]
            arr_t[i], arr_t[j] = arr_t[j], arr_t[i]

    arr[i+1], arr[high] = arr[high], arr[i+1]
    arr_t[i+1], arr_t[high] = arr_t[high], arr_t[i+1]
    return (i+1)
```

Sve manje od **pivota** slaže redom od početka s lijeva na desno. Kada završi stavi **pivot** odmah iza zadnjeg manjeg.

```
def truncateAndReorderFrom(A, A_t, L):
    m, n = A.dimensions()
    p=m-1
    for k in range(L, p):
        i1, arr_i1 = getFirstNonZero(A[k])
        i2, arr_i2 = getFirstNonZero(A[k+1])
        if i1 == n or i2 == n:
            return -1
```

```
        if i1==i2:
            #print 'kratim redak', k+1, ' s retkom ', k
            # zamjenim f_k+1 s bf_k - af_k+1
            q = gcd(arr_i1, arr_i2)
            if q == 0:
                print 'dobio sam dijeljenje s 0 za i-ove ', i1, i2,
                                                ' i k-ove ', k, k+1
                return -1
            A.rescale_row(k+1, -arr_i1/q)
            A_t.rescale_row(k+1, -arr_i1/q)

            A.add_multiple_of_row(k+1, k, arr_i2/q)
            A_t.add_multiple_of_row(k+1, k, arr_i2/q)

            # najveca zajednicka mjera (k+1). retka Matrice A
                                             i matrice transformacija
            q1 = gcd(gcd(A.row(k+1)),gcd(A_t.row(k+1)))

            if q1 != 1 and q1 != 0:
                #print 'Dijelim najvecom mjerom q1 =', q1
                A.rescale_row(k+1, 1/q1)
                A_t.rescale_row(k+1, 1/q1)

            # stavim f_k+1 na pravo mjesto u poredak
            swaps_to_place_t(A, A_t, k+1)

            #print A
            return k
    return -1

# Krece od (k+1).-tog retka i i zamijeni ga s k-tim
# ukoliko ima manje vodecih nula
def swaps_to_place_t(A, A_t, k):
```

```
    m=A.dimensions()[0]
    j_k, arr_kj = getFirstNonZero(A[k])
    for i in range(k+1, m):
        j_i, arr_ki = getFirstNonZero(A[i])
        if j_i < j_k:
            A.swap_rows(i-1, i)
            A_t.swap_rows(i-1, i)
        else:
            break
```

Vodeći nenul indeks u retku.

```
def getFirstNonZeroIndex(arr):
    for j in range(len(arr)):
        if arr[j] != 0:
            return j
    return len(arr)


def getFirstNonZero(arr):
    for j in range(len(arr)):
        if arr[j] != 0:
            return j, arr[j]
    return len(arr), 0
```

Za generalizirane Weierstrassove točke lako možemo provjeriti sljedeći rezultat:

Propozicija 3.6.1. *Za krivulju $X_0(34)$ i za $m = 2, 4, 6, 8, 10$, $\mathfrak{a}_\infty$ nije $\frac{m}{2}$–Weierstrassova točka. Nadalje, za krivulju $X_0(55)$, $\mathfrak{a}_\infty$ nije (1–)Weierstrassova točka, ali je $\frac{m}{2}$–Weierstrassova točka za $m = 4, 6, 8, 10$.*

Navodimo neke primjere:

Krivulja $X_0(55)$ Vrijedi $g(\Gamma_0(55)) = 5$. Baza od $S_2(\Gamma)$ je:

$$f_0 = q - q^7 - q^8 - q^9 + q^{10} - 2q^{12} + q^{13} + q^{14} - q^{16} + \cdots$$
$$f_1 = q^2 - 2q^6 + q^8 + 2q^9 - q^{10} - 2q^{12} - 2q^{13} - 2q^{14} + 2q^{16} + \cdots$$
$$f_2 = q^3 - 2q^6 - q^7 + 3q^8 + 5q^9 - 3q^{10} + q^{11} - 4q^{12} - 5q^{13} - q^{14} - \cdots$$
$$f_3 = q^4 - 2q^6 - q^7 + 3q^8 + 4q^9 - 3q^{10} + q^{11} - 4q^{12} - 3q^{13} - q^{14} - \cdots$$
$$f_4 = q^5 - 2q^{10} - q^{15} + \cdots$$

Očito je da $\mathfrak{a}_\infty$ nije Weierstrassova točka.

$X_0(55)$, $m = 4$. Matrica s koeficijentima q–ekspanzija monoma je:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 2 & 0 & -4 & 3 & 4 & 3 & -2 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 4 & -4 & 0 & -1 & -2 & -3 & -10 & -2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 & 4 & -4 & 0 & -3 & 1 & -1 & -11 & -2 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & -8 & -12 & 1 & 4 & 14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 3 & 6 & 3 & 2 & -12 & -22 & 6 & 6 & 19 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 4 & 2 & 5 & -13 & -16 & 6 & 6 & 14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -2 & 6 & 14 & -2 & -9 & -34 & 1 & 30 & 17 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 11 & 6 & -13 & -27 & 5 & 23 & 14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 5 & -3 & 5 & -2 & -12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 10 & 12 & -17 & -20 & 5 & 20 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 & 2 & -3 & 5 & -2 & -9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Transformirana matrica je:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 2 & 0 & -4 & 3 & 4 & 3 & -2 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 4 & -4 & 0 & -1 & -2 & -3 & -10 & -2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 & 4 & -4 & 0 & -3 & 1 & -1 & -11 & -2 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 & 1 & -10 & -3 & -5 & 13 & 21 & -17 & -8 & -14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & -6 & 19 & 7 & -13 & -33 & -7 & 38 & 14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & 9 & -5 & 4 & -13 & -12 & 18 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 11 & -11 & 0 & -7 & -22 & 22 & 22 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & -11 & 0 & -11 & -22 & 22 & 22 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 44 & -44 & 0 & 44 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 & 22 & -22 & 0 & 44 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Matrica transformacija je:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & -6 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -4 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 2 & -4 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 4 & -1 & -4 & -3
\end{pmatrix}
$$

Uređena baza u obliku linearnih kombinacija monoma je:

$$f_0^2$$
$$f_0f_1$$
$$f_0f_2$$
$$f_0f_3$$
$$f_0f_4$$
$$-f_1f_2+f_0f_3$$
$$-f_1f_2+f_0f_3+2f_2f_3$$
$$-f_1f_2+f_0f_3+2f_2f_3-f_3^2$$
$$-f_1f_2+f_0f_3+2f_2f_3-f_3^2-2f_3f_4$$
$$-f_1f_2+f_0f_3+2f_2f_3-f_3^2-2f_3f_4+f_4^2$$
$$-f_1f_2-f_2^2+f_0f_3+2f_2f_3-f_3^2+f_0f_4-6f_3f_4-f_4^2$$
$$-f_2^2+f_3^2+f_0f_4-f_2f_4-4f_3f_4+2f_4^2$$

Pripadne q–ekspanzije elemenata baze:

$$q^2-2q^8-2q^9-2q^{10}+2q^{11}-4q^{13}+3q^{14}+4q^{15}+3q^{16}-2q^{17}+5q^{18}$$
$$q^3-2q^7+q^{10}-2q^{11}+q^{12}-2q^{14}-4q^{16}+5q^{18}$$
$$q^4-2q^7-q^8+3q^9+4q^{10}-4q^{11}-q^{13}-2q^{14}-3q^{15}-10q^{16}-2q^{17}+3q^{18}$$
$$q^5-2q^7-q^8+3q^9+4q^{10}-4q^{11}-3q^{13}+q^{14}-q^{15}-11q^{16}-2q^{17}+5q^{18}$$
$$q^6-2q^{11}-q^{12}-q^{13}-q^{14}+q^{15}-q^{16}+3q^{18}$$
$$-2q^7+q^8+6q^9+q^{10}-10q^{11}-3q^{12}-5q^{13}+13q^{14}+21q^{15}-17q^{16}-8q^{17}-14q^{18}$$
$$q^8+2q^9-5q^{10}-6q^{11}+19q^{12}+7q^{13}-13q^{14}-33q^{15}-7q^{16}+38q^{17}+14q^{18}$$
$$2q^9-q^{10}-4q^{11}+9q^{12}-5q^{13}+4q^{14}-13q^{15}-12q^{16}+18q^{17}+4q^{18}$$
$$-q^{10}+11q^{12}-11q^{13}-7q^{15}-22q^{16}+22q^{17}+22q^{18}$$
$$11q^{12}-11q^{13}-11q^{15}-22q^{16}+22q^{17}+22q^{18}$$
$$-22q^{13}+44q^{15}-44q^{16}+44q^{18}$$
$$-22q^{14}+22q^{15}-22q^{16}+44q^{18}$$

Potencije moraju biti između $m/2$ i $m/2+m(g-1)$, tj. između 2 i 18. Nije Weierstrassova ako su od $m/2$ do $m/2+(m-1)(g-1)-1$, tj. od 2 do 13. Vidimo da je $\mathfrak{a}_\infty$ 2–Weierstrassova točka za $X_0(55)$.

$X_0(55)$, $m=6$.

$q^3-3q^9-3q^{10}-3q^{11}+3q^{12}-6q^{14}+6q^{15}+9q^{16}+9q^{17}-3q^{18}+6q^{19}+6q^{20}$

$q^4-2q^8-q^{10}-3q^{12}+2q^{13}+2q^{14}-2q^{15}+3q^{16}-6q^{17}+q^{18}+8q^{19}+10q^{20}$

$q^5-2q^8-q^9+3q^{10}+3q^{11}-5q^{12}-q^{13}+2q^{14}+q^{15}-5q^{16}-17q^{17}-5q^{18}+10q^{19}$

$q^6-2q^8-q^9+3q^{10}+4q^{11}-5q^{12}-q^{13}-2q^{14}+5q^{15}-q^{16}-21q^{17}-5q^{18}+13q^{19}$

$q^7-2q^9-q^{10}+q^{11}+4q^{12}+q^{13}+4q^{14}-12q^{15}-12q^{16}+8q^{17}-2q^{18}+7q^{19}-3q^{20}$

$-2q^8-q^9+9q^{10}+4q^{11}-8q^{12}-7q^{13}-11q^{14}+5q^{15}+17q^{16}+9q^{17}-6q^{18}+q^{19}-23q^{20}$

$-q^9+9q^{10}-4q^{11}-16q^{12}+5q^{13}+19q^{14}+21q^{15}+5q^{16}-91q^{17}-84q^{18}+77q^{19}+99q^{20}$

$9q^{10}-4q^{11}-22q^{12}+2q^{13}+28q^{14}+48q^{15}+8q^{16}-121q^{17}-182q^{18}+83q^{19}+222q^{20}$

$-4q^{11}-4q^{12}+47q^{13}+19q^{14}-114q^{15}-163q^{16}+86q^{17}+439q^{18}+308q^{19}-570q^{20}-1063q^{21}$

$-4q^{12}+31q^{13}+3q^{14}-78q^{15}-71q^{16}+70q^{17}+227q^{18}+92q^{19}-290q^{20}-463q^{21}+493q^{23}$

$31q^{13}-21q^{14}-90q^{15}+13q^{16}+166q^{17}+27q^{18}-208q^{19}-62q^{20}+145q^{21}-227q^{23}$

$-21q^{14}+34q^{15}+75q^{16}-144q^{17}-283q^{18}+319q^{19}+310q^{20}-134q^{21}+238q^{23}$

$34q^{15}+33q^{16}-165q^{17}-220q^{18}+319q^{19}+247q^{20}+55q^{21}-77q^{23}-693q^{24}$

$33q^{16}-165q^{17}-220q^{18}+319q^{19}+451q^{20}+55q^{21}-77q^{23}-693q^{24}$

$198q^{17}+88q^{18}-517q^{19}-253q^{20}+506q^{21}-649q^{23}+231q^{24}+1815q^{25}$

$550q^{18}+275q^{19}-1375q^{20}-1408q^{21}+1727q^{23}+2211q^{24}+2673q^{25}-2937q^{26}$

$220q^{19}-220q^{20}-22q^{21}-77q^{23}-396q^{24}-308q^{25}+407q^{26}+484q^{27}$

$242q^{21}-363q^{23}-484q^{24}+968q^{25}-847q^{26}-484q^{27}$

$-363q^{23}+726q^{24}-18876q^{25}+18513q^{26}+18876q^{27}$

$-1452q^{25}+1452q^{26}+1452q^{27}$

Nije 3–Weierstrassova ako su potencije od 3 do 22.

Vidimo da postoje skokovi u potencijama pa zaključujemo da je $\mathfrak{a}_\infty$ 3-Weierstrassova točka za $X_0(55)$.

Pripadni linearne kombinacije monoma su:

f_0^3

$f_0^2 f_1$

$f_0^2 f_2$

$f_0^2 f_3$

$f_0 f_1 f_3$

$-f_1^3 + f_0^2 f_3$

$-f_1^3 + 2f_1 f_2^2 + f_0^2 f_3$

$-f_1^3 + 2f_1 f_2^2 + f_2^3 + f_0^2 f_3$

$-f_1^3 + 2f_1 f_2^2 + f_2^3 + f_0^2 f_3 - 9f_2^2 f_3$

$-f_1^3 + 2f_1 f_2^2 + f_2^3 + f_0^2 f_3 - 9f_2^2 f_3 + 4f_2 f_3^2$

$-f_1^3 + 2f_1 f_2^2 + f_2^3 + f_0^2 f_3 - 9f_2^2 f_3 + 4f_2 f_3^2 + 4f_3^3$

$-f_1^3 + 2f_1 f_2^2 + f_2^3 + f_0^2 f_3 - 9f_2^2 f_3 + 4f_2 f_3^2 + 4f_3^3 - 31f_3^2 f_4$

$-f_1^3 + 2f_1 f_2^2 + f_2^3 + f_0^2 f_3 - 9f_2^2 f_3 + 4f_2 f_3^2 + 4f_3^3 - 31f_3^2 f_4 + 21f_3 f_4^2$

$-f_1^3 + 2f_1 f_2^2 + f_2^3 + f_0^2 f_3 - 9f_2^2 f_3 + 4f_2 f_3^2 + 4f_3^3 - 31f_3^2 f_4 + 21f_3 f_4^2 - 34f_4^3$

$f_1^3 - 2f_1 f_2^2 - f_2^3 - f_0^2 f_3 + 9f_2^2 f_3 - 4f_2 f_3^2 - f_3^3 - 3f_2 f_3 f_4 + 31f_3^2 f_4 - 9f_3 f_4^2 + 34f_4^3$

$f_1^3 + 4f_1 f_2^2 - f_2^3 - f_0^2 f_3 - 6f_1^2 f_3 - 3f_2^2 f_3 + 14f_2 f_3^2 - 19f_3^3 + 9f_2 f_3 f_4 + 31f_3^2 f_4 - 57f_3 f_4^2 + 76f_4^3$

$-f_1^3 + f_1 f_2^2 + f_2^3 + f_0^2 f_3 + f_1^2 f_3 - 7f_2^2 f_3 + f_2 f_3^2 + 4f_3^3 + 16f_2 f_3 f_4 - 31f_3^2 f_4 - 15f_1 f_4^2 + 47f_3 f_4^2 + 4f_4^3$

$f_1^3 - f_1 f_2^2 - f_2^3 - f_0^2 f_3 - f_1^2 f_3 + 7f_2^2 f_3 - f_2 f_3^2 - 4f_3^3 + 4f_2 f_3 f_4 + 11f_3^2 f_4 - 5f_1 f_4^2 + 20f_2 f_4^2 - 7f_3 f_4^2 - 24f_4^3$

$$-15f_1^3 + 9f_1 f_2^2 - 5f_2^3 + 15f_0^2 f_3 + 21f_1^2 f_3 - 93f_2^2 f_3 - 3f_2 f_3^2 + 98f_3^3 + 20f_1^2 f_4 - 96f_2 f_3 f_4 - 279f_3^2 f_4 + \cdots$$
$$- 41f_1 f_4^2 - 166f_2 f_4^2 + 445f_3 f_4^2 + 350f_4^3$$

$-2f_2^3 - 3f_2^2 f_3 + 5f_3^3 + 2f_1^2 f_4 + 3f_0 f_3 f_4 - 15f_2 f_3 f_4 - 12f_3^2 f_4 - 2f_1 f_4^2 + 2f_2 f_4^2 + 16f_3 f_4^2 + 20f_4^3$

$X_0(55)$, $m=8$. q–ekspanzije uređene baze od $S^H_{8,2}(\Gamma_0(55))$:

$q^4-4q^{10}-4q^{11}-4q^{12}+4q^{13}-8q^{15}+10q^{16}+16q^{17}+18q^{18}-4q^{19}+6q^{20}+12q^{21}+6q^{22}-16q^{23}-72q^{24}-8q^{25}+\cdots$

$q^5-2q^9-2q^{11}-q^{12}-4q^{13}+3q^{14}+4q^{15}-2q^{16}+7q^{17}-6q^{18}+5q^{19}+11q^{20}+10q^{21}-9q^{22}-4q^{23}+33q^{24}-26q^{25}+\cdots$

$q^6-2q^9-q^{10}+3q^{11}+2q^{12}-6q^{13}-2q^{14}+5q^{15}+4q^{16}-7q^{17}-23q^{18}-6q^{19}+20q^{20}+26q^{21}-19q^{22}+3q^{23}+84q^{24}+\cdots$

$q^7-2q^9-q^{10}+3q^{11}+4q^{12}-6q^{13}-2q^{14}-q^{15}+9q^{16}-q^{17}-31q^{18}-7q^{19}+23q^{20}+37q^{21}-34q^{22}+2q^{23}+75q^{24}+\cdots$

$q^8-2q^{10}-q^{11}+q^{12}+4q^{13}+3q^{15}-11q^{16}-8q^{17}+10q^{18}-10q^{19}+q^{20}-6q^{21}+30q^{22}+17q^{23}+22q^{24}-15q^{25}+\cdots$

$-2q^9-q^{10}+9q^{11}+4q^{12}-8q^{13}-7q^{14}-9q^{15}+8q^{16}+11q^{17}-5q^{18}-12q^{19}+25q^{20}+7q^{21}-75q^{22}-10q^{23}+90q^{24}+\cdots$

$-q^{10}+9q^{11}-22q^{13}-q^{14}+7q^{15}+38q^{16}+43q^{17}-61q^{18}-148q^{19}-31q^{20}+41q^{21}+171q^{22}+360q^{23}+72q^{24}+\cdots$

$9q^{11}-26q^{13}-7q^{14}+13q^{15}+54q^{16}+61q^{17}-60q^{18}-214q^{19}-114q^{20}+63q^{21}+273q^{22}+606q^{23}+155q^{24}-681q^{25}+\cdots$

$-9q^{12}-2q^{13}+5q^{14}-8q^{15}-45q^{16}+175q^{17}+93q^{18}-229q^{19}+21q^{20}-342q^{21}+300q^{22}+417q^{23}-31q^{24}-393q^{25}+\cdots$

$-2q^{13}+5q^{14}-80q^{15}-81q^{16}+283q^{17}+489q^{18}-121q^{19}-537q^{20}-2178q^{21}+282q^{22}+3189q^{23}+4595q^{24}+\cdots$

$5q^{14}-84q^{15}-95q^{16}+283q^{17}+539q^{18}-49q^{19}-595q^{20}-2438q^{21}+80q^{22}+3553q^{23}+5513q^{24}-297q^{25}+\cdots$

$-84q^{15}-75q^{16}+313q^{17}+499q^{18}-219q^{19}-660q^{20}-2028q^{21}+780q^{22}+3203q^{23}+3628q^{24}-1547q^{25}+\cdots$

$-75q^{16}-191q^{17}+79q^{18}+1461q^{19}+2616q^{20}-4800q^{21}-10560q^{22}-997q^{23}+27988q^{24}+29953q^{25}+\cdots$

$-191q^{17}-521q^{18}+1161q^{19}+5316q^{20}-1800q^{21}-18810q^{22}-14197q^{23}+42838q^{24}+68053q^{25}-42515q^{26}+\cdots$

$-521q^{18}+15q^{19}+4743q^{20}+2211q^{21}-14608q^{22}-23747q^{23}+30805q^{24}+80086q^{25}-21505q^{26}-168498q^{27}+\cdots$

$15q^{19}+2659q^{20}+1169q^{21}-9398q^{22}-19579q^{23}+21948q^{24}+78002q^{25}-14732q^{26}-178918q^{27}-69120q^{28}+\cdots$

$2659q^{20}+1199q^{21}-9383q^{22}-19624q^{23}+21978q^{24}+78047q^{25}-14927q^{26}-178948q^{27}-68805q^{28}+242396q^{29}+\cdots$

$1199q^{21}-9383q^{22}-19624q^{23}+21978q^{24}+99319q^{25}-14927q^{26}-178948q^{27}-68805q^{28}+242396q^{29}+132913q^{30}+\cdots$

$11781q^{22}+16027q^{23}-30371q^{24}-96921q^{25}+34111q^{26}+174152q^{27}+47223q^{28}-241197q^{29}-129316q^{30}+\cdots$

$4246q^{23}-6809q^{24}-61578q^{25}+34111q^{26}+197714q^{27}+70785q^{28}-347226q^{29}-282469q^{30}+140151q^{31}+\cdots$

$-11q^{24}+11q^{25}-11q^{26}+22q^{28}+66q^{29}-55q^{30}+44q^{31}-110q^{33}-110q^{34}+33q^{35}+11q^{36}$

$129954q^{25}-125840q^{26}-431244q^{27}-82643q^{28}+889108q^{29}+594473q^{30}-127776q^{31}-669009q^{32}-1097712q^{33}+\cdots$

$-4114q^{26}-1936q^{27}-3993q^{28}+63888q^{29}-31339q^{30}-88814q^{31}+19239q^{32}+144716q^{33}+8470q^{34}-250228q^{35}+\cdots$

$1936q^{27}+12221q^{28}-63888q^{29}+23111q^{30}+121726q^{31}-19239q^{32}-194084q^{33}-33154q^{34}+316052q^{35}-143264q^{36}$

$605q^{28}-1936q^{29}+968q^{30}+2541q^{31}-968q^{32}-4356q^{33}-242q^{34}+6050q^{35}-2541q^{36}$

$12584q^{29}-2662q^{30}-47674q^{31}+2662q^{32}+75504q^{33}+25168q^{34}-133100q^{35}+54934q^{36}$

$9922q^{30}-9922q^{31}-9922q^{32}-19844q^{35}+29766q^{36}$

$873136q^{34}-1746272q^{35}+873136q^{36}$

Nije 4–Weierstrassova točka ako su vodeće potencije od $m/2$ do $m/2+(m-1)(g(\Gamma)-1)-1$, tj. od 4 do 31. Primjećujemo skok u potencijama s 30 na 34, pa je $\mathfrak{a}_\infty$ 4–Weierstrassova točka za $\Gamma_0(55)$.

Pripadne linearne kombinacije monoma su:

f_0^4

$f_0^3 f_1$

$f_0^3 f_2$

$f_0^3 f_3$

$f_0^2 f_1 f_3$

$-f_0 f_1^3 + f_0^3 f_3$

$-f_0 f_1^3 + 2f_1^3 f_2 + f_0^3 f_3$

$-f_0 f_1^3 + 2f_1^3 f_2 + f_1^2 f_2^2 + f_0^3 f_3$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 + 9f_2^4 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 + 9f_2^4 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3 + 2f_2^3 f_3$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 + 9f_2^4 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3 + 2f_2^3 f_3 - 5f_2^2 f_3^2$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 + 9f_2^4 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3 + 2f_2^3 f_3 - 5f_2^2 f_3^2 + 84f_2 f_3^3$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 + 9f_2^4 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3 + 2f_2^3 f_3 - 5f_2^2 f_3^2 + 84f_2 f_3^3 + 75f_3^4$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 + 9f_2^4 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3 + 2f_2^3 f_3 - 5f_2^2 f_3^2 + 84f_2 f_3^3 + 75f_3^4 + 191f_3^3 f_4$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 + 9f_2^4 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3 + 2f_2^3 f_3 - 5f_2^2 f_3^2 + 84f_2 f_3^3 + 75f_3^4 + 191f_3^3 f_4 + 521f_3^2 f_4^2$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 + 9f_2^4 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3 + 2f_2^3 f_3 - 5f_2^2 f_3^2 + 84f_2 f_3^3 + 75f_3^4 + 191f_3^3 f_4 + 521f_3^2 f_4^2 - 15f_3 f_4^3$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 + 9f_2^4 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3 + 2f_2^3 f_3 - 5f_2^2 f_3^2 + 84f_2 f_3^3 + 75f_3^4 + 191f_3^3 f_4 + 521f_3^2 f_4^2 - 15f_3 f_4^3$
$\quad - 2659f_4^4$

$-2f_0 f_1^3 - 5f_1^3 f_2 + 2f_1^2 f_2^2 - 9f_2^4 + 2f_0^3 f_3 + 9f_0 f_1^2 f_3 - 2f_2^3 f_3 + 5f_2^2 f_3^2 - 84f_2 f_3^3 - 75f_3^4 - 82f_3^3 f_4 - 521f_3^2 f_4^2 - 109f_1 f_4^3$
$\quad + 669f_3 f_4^3 + 2986f_4^4$

$-2f_0 f_1^3 - 5f_1^3 f_2 + 2f_1^2 f_2^2 - 9f_2^4 + 2f_0^3 f_3 + 9f_0 f_1^2 f_3 - 2f_2^3 f_3 + 5f_2^2 f_3^2 - 84f_2 f_3^3 - 75f_3^4 - 82f_3^3 f_4 - 1592f_3^2 f_4^2 - 109f_1 f_4^3$
$\quad + 1071f_2 f_4^3 + 669f_3 f_4^3 - 1298f_4^4$

$-f_2 f_3 f_4^2 + f_3^2 f_4^2 + f_1 f_4^3 - f_2 f_4^3 - 2f_3 f_4^3 + f_4^4$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 + 9f_2^4 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3 + 2f_2^3 f_3 - 5f_2^2 f_3^2 + 84f_2 f_3^3 + 268f_3^4 - 193f_2 f_3^2 f_4 - 111f_3^3 f_4$
$\quad - 1970f_2 f_3 f_4^2 + 5878f_3^2 f_4^2 + 2272f_1 f_4^3 - 4585f_2 f_4^3 - 5767f_3 f_4^3 + 6742f_4^4$

$-2f_0 f_1^3 - 5f_1^3 f_2 + 2f_1^2 f_2^2 - 9f_2^4 + 2f_0^3 f_3 + 9f_0 f_1^2 f_3 - 2f_2^3 f_3 + 184f_2^2 f_3^2 - 84f_2 f_3^3 - 89f_3^4 - 179f_0 f_3^2 f_4 + 14f_2 f_3^2 f_4$
$\quad + 469f_3^3 f_4 - 178f_2 f_3 f_4^2 - 150f_3^2 f_4^2 + 234f_1 f_4^3 - 69f_2 f_4^3 - 677f_3 f_4^3 + 418f_4^4$

$2f_0 f_1^3 + 5f_1^3 f_2 - 2f_1^2 f_2^2 + 9f_2^4 - 2f_0^3 f_3 - 9f_0 f_1^2 f_3 + 2f_2^3 f_3 - 201f_2^2 f_3^2 + 84f_2 f_3^3 + 106f_3^4 + 196f_0 f_3^2 f_4 - 99f_2 f_3^2 f_4$
$\quad - 469f_3^3 f_4 + 68f_1 f_3 f_4^2 + 8f_2 f_3 f_4^2 + 184f_3^2 f_4^2 - 132f_1 f_4^3 - 67f_2 f_4^3 + 541f_3 f_4^3 - 180f_4^4$

$$f_2^4-7f_2^2f_3^2+4f_2f_3^3+2f_3^4-f_0f_2^2f_4+7f_0f_3^2f_4+7f_2f_3^2f_4-19f_3^3f_4-7f_1f_3f_4^2+7f_2f_3f_4^2+10f_3^2f_4^2-5f_2f_4^3+2f_3f_4^3-3f_4^4$$

$$\begin{aligned}&6f_2^4+10f_1^2f_3^2+33f_2^2f_3^2+4f_2f_3^3-43f_3^4-16f_0f_2^2f_4+7f_0f_3^2f_4+247f_2f_3^2f_4-14f_3^3f_4-112f_1f_3f_4^2+122f_2f_3f_4^2\\&\qquad-20f_3^2f_4^2+60f_2f_4^3-448f_3f_4^3-28f_4^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&6f_2^4+10f_1^2f_3^2-19f_2^2f_3^2+4f_2f_3^3+9f_3^4-16f_0f_2^2f_4+52f_1f_2f_3f_4+7f_0f_3^2f_4+91f_2f_3^2f_4-118f_3^3f_4-112f_1f_3f_4^2\\&\qquad+70f_2f_3f_4^2+188f_3^2f_4^2+60f_2f_4^3-292f_3f_4^3-28f_4^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-164f_0f_1^3-410f_1^3f_2+164f_1^2f_2^2+474f_2^4+164f_0^3f_3+738f_0f_1^2f_3-164f_2^3f_3-1178f_1^2f_3^2+1943f_2^2f_3^2-1968f_1f_3^3\\&\qquad+316f_2f_3^3-1913f_3^4-34f_0f_2^2f_4-2452f_1f_2f_3f_4-1825f_0f_3^2f_4-6423f_2f_3^2f_4+11178f_3^3f_4-3846f_1f_3f_4^2\\&\qquad-1112f_2f_3f_4^2-2696f_3^2f_4^2+9512f_1f_4^3-11824f_2f_4^3+14734f_3f_4^3+11646f_4^4\end{aligned}$$

$X_0(34)$ Za $m=4$ q–ekspanzije elemenata uređene baze i pripadne linearne kombinacije monoma su

$$\begin{aligned}f_0^2&=q^2-4q^5-4q^6+12q^8+12q^9-2q^{10}\\f_0f_1&=q^3-q^5-2q^6-2q^7+2q^8+5q^9+2q^{10}\\f_0f_2&=q^4-2q^5-q^6-q^7+6q^8+6q^9+2q^{10}\\-f_1^2+f_0f_2&=-2q^5+q^6-q^7+5q^8+6q^9+4q^{10}\\-f_1^2+f_0f_2+2f_1f_2&=-3q^6-5q^7+11q^8+16q^9+2q^{10}\\-f_1^2+f_0f_2+2f_1f_2+3f_2^2&=-17q^7+17q^8+34q^9+17q^{10}\end{aligned}$$

Vodeći eksponenti su $\frac{m}{2}=4,5,6,7=\frac{m}{2}+(m-1)(g-1)-1$ što pokazuje da $\mathfrak{a}_\infty$ nije 2–Weierstrassova točka za $X_0(34)$.

Izračunali smo:

Propozicija 3.6.2. *Na krivulji $X_0(34)$ točka $\mathfrak{a}_\infty$ nije $\frac{m}{2}$–Weierstrassova točka za $m=2,4,6,8,10$.*

Za $X_0(55)$, $\mathfrak{a}_\infty$ nije Weierstrassova točka, ali je $\frac{m}{2}$–Weierstrassova točka za $m=4,6,8,10$.

3.7. Jednadžbe homogenih polinoma

U ovoj sekciji tražimo jednadžbe homogenih polinoma kanonskih krivulja za krivulje tipa $X_0(N)$. Dobivene jednadžbe su posljedica algoritma za računanje uređene baze prostora $S_m^H(\Gamma)$, za krivulje genusa ≥ 3, koje nisu hipereliptičke (vidi Sekciju 3.6).

Slično su radili S. Galbraith u [9, Chapter 3] svog doktorata, ali drugačijim metodama, kao i M. Shimura u [39]. U značajnom broju slučajeva su koeficijenti naših jednadžbi manji od koeficijenata jednadžbi u [9] i [39].

U pravilu dobivamo da je ideal generiran homogenim kvadratnim polinomima. To je posljedica Petrijevog teorema za krivulje genusa $g \geq 4$, koji nisu trigonale (tj. nemaju preslikavanje stupnja 3 na $\mathbb{P}^1$), niti glatke ravninske krivulje stupnja 4. Dajemo iskaz Petrijevog teorema prema [39, Teorem 2 (Petri's Theorem)]:

Teorem 3.7.1 (Petri)**.** *Neka je $\mathfrak{R}$ glatka kanonska krivulja genusa $g \geq 4$. Tada je $\mathfrak{R}$ dana kao presjek nekih kvadratnih hiperploha, osim kada je $\mathfrak{R}$ trigonala ili izomorfna glatkoj ravninskoj kvintici (krivulji stupnja 4) kada je $\mathfrak{R}$ dana kao presjek nekih kvadratnih i kubnih hiperploha.*

Petrijev teorem je poopćenje Enriques-Babbage teorema (vidi [1, Ch. III.3]):

Teorem 3.7.2. *Neka je $C \subseteq \mathbb{P}^n$ kanonska krivulja. Tada ili se C može skupovno-teoretski isjeći s kvadrikama, ili je C trigonala ili je izomorfna ravninskoj kvintici.*

Također vidi Noether-Enriques theorem na poveznici *https://encyclopediaofmath.org /wiki/Noether-Enriques_theorem.*

Neka je $\mathfrak{R}_\Gamma$ modularna krivulja i izaberimo bazu $f_0, \ldots, f_{g-1}$, $g = g(\Gamma)$ od $S_2(\Gamma)$. Tada skup svih

$$\binom{g+m/2-1}{m/2}$$

monoma $f_0^{\alpha_0} f_1^{\alpha_1} \cdots$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i = \frac{m}{2}$ uređenih leksikografski definira regularno preslikavanje

$$\phi_{m/2} \colon \mathfrak{R}_\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{g+m/2-1}{m/2}-1}.$$

Ovo preslikavanje je kompozicija kanonskog ulaganja i Veronese ulaganja stupnja $\frac{m}{2}$

$$\mathfrak{R}_\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1} \xrightarrow{\nu_{g-1,m/2}} \mathbb{P}^{\binom{g+m/2-1}{m/2}-1},$$

vidi [10, Example 2.4] za definiciju Veronese preslikavanja. Veroneseovo ulaganje stupnja d je preslikavanje

$$\nu_{n,d}\colon \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N,$$

gdje je $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Preslikavanje se definira pomoću svih monoma stupnja d u varijablama $T_0, \ldots, T_n$, drugim riječima monomima

$$T_0^{i_0} \cdots T_n^{i_n}, \quad \sum_{j=0}^{n} i_j = d, \quad i_j \geq 0 \text{ za svaki } j.$$

Oni čine bazu vektorskog prostora homogenih polinoma stupnja homogenosti d, koji označavamo s $\mathbb{C}[T_0, \ldots, T_n]_d$. Svakom monomu je na jedinstven način pridružena particija i broja d, gdje je $i = (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $|i| = d$. Očito je da vrijedi i obratno, svakoj particiji na jedinstven način možemo pridružiti monom, pa imamo bijekciju. Prebrojavanjem tih particija dobije se dimenzija prostora homogenih polinoma, tj.

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_n]_d = \binom{n+d}{d},$$

vidi [22, Ch. 20]. Na taj način dobivamo $N+1 = \binom{n+d}{d}$ koordinatnih funkcija indeksiranih particijama

$$\nu_{i_0,\ldots,i_n}(x_0 : \cdots : x_n) = x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

Ako uredimo ove koordinatne funkcije leksikografski po pripadnim particijama dobijemo Veronseovo ulaganje

$$\nu_{n,d}(x_0 : \cdots : x_n) = (x_0^d : x_0^{d-1} x_1 : \cdots : x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} : \cdots : x_n^d).$$

Geometrijski gledano, Veronese preslikavanje $\nu_d\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ je karakterizirano svojstvom da bilo koja hiperploha stupnja d u $\mathbb{P}^n$ odgovara presjeku slike $\nu_{n,d}(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N$ s odgovarajućom hiperravninom [10, Example 2.4, str. 23]. Na taj način možemo probleme s hiperplohama stupnja d reducirati na probleme s hiperravninama. Točnije, ako je

$$F = \sum a_{i_0 \ldots i_n} T_0^{i_0} \cdots T_n^{i_n}$$

homogeni polinom stupnja d i $X \subseteq \mathbb{P}^n$ hiperploha definirana s $F = 0$, tada je njena slika

$$\nu_{n,d}(X) \subseteq \nu_{n,d}(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N$$

jednaka presjeku od $\nu_{n,d}(\mathbb{P}^n)$ s hiperravninom u $\mathbb{P}^N$ definiranom s

$$\sum a_{i_0 \ldots i_n} Z_{i_0 \ldots i_n} = 0,$$

gdje su $Z_{i_0 \dots i_n}$ homogene koordinate od $\mathbb{P}^N$.

U primjeru $X_0(55)$ za $m = 4$ i $g(\Gamma) = 5$, matrica s q–ekspanzijama monoma odgovara ulaganju

$$\phi_2 \colon X_0(55) \longrightarrow \mathbb{P}^{14}.$$

Elementarnim transformacijama nad retcima te matrice dobili smo da slika $\phi_2(X_0(55))$ leži na hiperravninama:

$$\begin{aligned}
&Z_{1,0,0,0,1} - 2Z_{0,1,0,0,1} - Z_{0,0,2,0,0} + 2Z_{0,0,1,1,0} + Z_{0,0,1,0,1} - Z_{0,0,0,2,0} = 0\\
&-2Z_{1,0,1,0,0} + Z_{1,0,0,1,0} + 2Z_{0,2,0,0,0} - Z_{0,1,1,0,0} - 2Z_{0,0,1,1,0} + 3Z_{0,0,1,0,1} + 2Z_{0,0,0,2,0} - 4Z_{0,0,0,1,1}\\
&\qquad + 5Z_{0,0,0,0,2} = 0\\
&Z_{1,0,0,1,0} - Z_{1,0,0,0,1} - Z_{0,1,1,0,0} + 2Z_{0,1,0,1,0} - Z_{0,0,2,0,0} + 2Z_{0,0,1,1,0} + 4Z_{0,0,1,0,1} - Z_{0,0,0,2,0}\\
&\qquad - 4Z_{0,0,0,1,1} - 3Z_{0,0,0,0,2} = 0
\end{aligned}$$

U stvari koordinatne funkcije preslikavanja ϕ_2 zadovoljavaju te jednadžbe. Te jednadžbe odgovaraju retcima matrice transformacija koji daju nul redke u transformiranoj matrici. Kako je matrica elementarnih transformacija nad redcima regularna, jednadžbe su linearno nezavisne.

Pripadne jednadžbe hiperploha stupnja 2 na kojima leži kanonska krivulja su:

$$\begin{aligned}
T_0T_4 - 2T_1T_4 - T_2^2 + 2T_2T_3 + T_2T_4 - T_3^2 &= 0\\
-2T_0T_2 + T_0T_3 + 2T_1^2 - T_1T_2 - 2T_2T_3 + 3T_2T_4 + 2T_3^2 - 4T_3T_4 + 5T_4^2 &= 0\\
T_0T_3 - T_0T_4 - T_1T_2 + 2T_1T_3 - T_2^2 + 2T_2T_3 + 4T_2T_4 - T_3^2 - 4T_3T_4 - 3T_4^2 &= 0
\end{aligned}$$

To nam daje dio stupnja 2 homogenog ideala krivulje.

U ovom primjeru matrica s koeficijentima q–ekspanzija monoma je:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 2 & 0 & -4 & 3 & 4 & 3 & -2 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 4 & -4 & 0 & -1 & -2 & -3 & -10 & -2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 & 4 & -4 & 0 & -3 & 1 & -1 & -11 & -2 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & -8 & -12 & 1 & 4 & 14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 3 & 6 & 3 & 2 & -12 & -22 & 6 & 6 & 19 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 4 & 2 & 5 & -13 & -16 & 6 & 6 & 14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -2 & 6 & 14 & -2 & -9 & -34 & 1 & 30 & 17 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 11 & 6 & -13 & -27 & 5 & 23 & 14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 5 & -3 & 5 & -2 & -12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 10 & 12 & -17 & -20 & 5 & 20 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 & 2 & -3 & 5 & -2 & -9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Transformirana matrica je:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 2 & 0 & -4 & 3 & 4 & 3 & -2 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 4 & -4 & 0 & -1 & -2 & -3 & -10 & -2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 & 4 & -4 & 0 & -3 & 1 & -1 & -11 & -2 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 & 1 & -10 & -3 & -5 & 13 & 21 & -17 & -8 & -14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & -6 & 19 & 7 & -13 & -33 & -7 & 38 & 14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & 9 & -5 & 4 & -13 & -12 & 18 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 11 & -11 & 0 & -7 & -22 & 22 & 22 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & -11 & 0 & -11 & -22 & 22 & 22 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 44 & -44 & 0 & 44 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 & 22 & -22 & 0 & 44 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Matrica transformacija je:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & -6 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -4 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 2 & -4 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 4 & -1 & -4 & -3
\end{pmatrix}$$

Primjetimo da su zadnja 3 retka transformirane matrice null retci i oni odgovaraju linearnim kombinacijama redaka početne matrice s koeficijentima danim u zadnja 3 retka matrice transformacije.

Znamo da je Ogg [26] odredio sve krivulje tipa $X_0(N)$ koje nisu hipereliptičke. Temeljem toga lako vidimo da za

$$N \in \{34,38,42,43,44,45,51,52,53,54,55,56,57,58,60,61,62,63,64,65,\\ 66,67,68,69,70,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81\},$$

krivulja $X_0(N)$ nije hipereliptička, te je $g(\Gamma_0(N)) \geq 3$. Dajemo jednadžbe kanonskih krivulja za sve N iz gornjeg skupa za koje je $g(\Gamma_0(N)) < 6$. Drugim riječima izuzimamo velike genuse:

$$g(\Gamma_0(58)) = 6,\ g(\Gamma_0(60)) = 7,\ g(\Gamma_0(62)) = 7,\ g(\Gamma_0(66)) = 9,\ g(\Gamma_0(68)) = 7,\\ g(\Gamma_0(69)) = 7,\ g(\Gamma_0(70)) = 9,\ g(\Gamma_0(74)) = 8,\ g(\Gamma_0(76)) = 8,\ g(\Gamma_0(77)) = 7,\\ g(\Gamma_0(78)) = 11,\ g(\Gamma_0(79)) = 6,\ g(\Gamma_0(80)) = 7.$$

Napomenimo da je za $N > 82$ vrijedi $g(\Gamma_0(N)) \geq 6$. U SAGE-u je to provjereno za $N <$ 12.000, dok je u [6] dana donja ograda za genus krivulje tipa $X_0(N)$ u obliku nejednakosti

$$g(\Gamma_0(N)) \geq (N - 5\sqrt{N} - 8)/12.$$

$X_0(34)$ $g(\Gamma) = 3$	$T_0^3T_2 - T_0^2T_1^2 - 3T_0^2T_2^2 + 2T_0T_1^3 + 3T_0T_1^2T_2 - 3T_0T_1T_2^2 + 4T_0T_2^3 - T_1^4 + 4T_1^3T_2$ $\quad -6T_1^2T_2^2 + 4T_1T_2^3 - 2T_2^4 = 0$ Dobili smo ravninsku krivulju 4. stupnja.
$X_0(38)$ $g(\Gamma) = 4$	$T_0T_2 - T_1^2 - T_1T_3 - T_2^2 - T_2T_3 - T_3^2 = 0$ $-2T_0^2T_2 - T_0^2T_3 + 2T_0T_1^2 + 2T_0T_1T_3 + T_0T_3^2 + T_1^3 - T_1^2T_2 + 3T_1T_2^2 + 6T_1T_2T_3$ $\quad +4T_1T_3^2 + T_2^3 + 2T_2^2T_3 + 2T_2T_3^2 + T_3^3 = 0$ $-T_0^2T_3 - T_0T_3^2 + T_1^3 - 3T_1^2T_2 - 2T_1^2T_3 + 3T_1T_2^2 + 4T_1T_2T_3 + 2T_1T_3^2 - T_2^3 - 2T_2^2T_3$ $\quad -2T_2T_3^2 - T_3^3 = 0$ $-T_0^2T_3 - 2T_0T_2T_3 - T_0T_3^2 + T_1^3 - 3T_1^2T_2 + 3T_1T_2^2 + 4T_1T_2T_3 + 4T_1T_3^2 - T_2^3 + T_3^3 = 0$ $T_0^2T_3 + 2T_0T_1T_2 + T_0T_3^2 - 3T_1^3 + 3T_1^2T_2 - 5T_1T_2^2 - 6T_1T_2T_3 - 4T_1T_3^2 + T_2^3$ $\quad +2T_2^2T_3 + 2T_2T_3^2 + T_3^3 = 0$ Dobili smo 4 ireducibilna polinoma stupnja 3 (od njih 5). Preostali je djeljiv s kvadratnim. Homogeni ideal generiran je s jednim kvadratnim polinomom i bilo kojim od gornja 4 polinoma 3. stupnja.

$X_0(42)$ $g(\Gamma)=5$	$T_0T_4-T_1T_4-T_2^2+T_3T_4-T_4^2=0$ $T_0T_3-T_1T_2+T_1T_3-T_2^2+T_2T_3+T_2T_4-T_3^2-2T_3T_4=0$ $T_0T_2-T_1^2+T_2T_3=0$
$X_0(43)$ $g(\Gamma)=3$	$T_0^3T_2-2T_0^2T_1^2+2T_0^2T_1T_2-2T_0^2T_2^2+T_0T_1^3+3T_0T_1^2T_2-5T_0T_1T_2^2+3T_0T_2^3-9T_1^4$ $+24T_1^3T_2-28T_1^2T_2^2+16T_1T_2^3-4T_2^4=0$
$X_0(44)$ $g(\Gamma)=4$	$-T_0T_2+T_1^2-2T_1T_3+3T_3^2=0$ $-T_0^2T_2+T_0T_1^2-2T_0T_1T_3+3T_0T_3^2=0$
$X_0(51)$ $g(\Gamma)=5$	$-T_0T_2+T_0T_3+T_1^2-T_1T_2-T_1T_3+T_2T_4+T_3^2-T_3T_4=0$ $T_0T_2-3T_0T_3+T_0T_4-T_1^2+3T_1T_2+T_3T_4=0$ $T_0T_3-T_1T_2-T_2^2-T_3T_4=0$
$X_0(52)$ $g(\Gamma)=5$	$-T_0T_4+T_1T_3+2T_2^2-T_2T_4+T_4^2=0$ $-T_0T_3+T_1T_2-T_1T_4+T_3T_4=0$ $T_0T_2-T_1^2-T_2^2-T_3^2=0$
$X_0(53)$ $g(\Gamma)=4$	$-3T_0T_2+2T_0T_3+3T_1^2-5T_1T_3+2T_2^2-T_2T_3+2T_3^2=0$ $-9T_0^2T_2+9T_0T_1^2-15T_0T_1T_3+10T_0T_3^2+18T_1^3+18T_1^2T_2-51T_1^2T_3+12T_1T_2^2$ $-30T_1T_2T_3+41T_1T_3^2+42T_2^3-92T_2^2T_3+73T_2T_3^2-26T_3^3=0$ $9T_0^2T_3-5T_0T_3^2-27T_1^3-18T_1^2T_2+78T_1^2T_3-18T_1T_2^2+30T_1T_2T_3-64T_1T_3^2$ $-57T_2^3+136T_2^2T_3-104T_2T_3^2+40T_3^3=0$ $18T_0^2T_2-18T_0T_1^2+45T_0T_1T_2-20T_0T_3^2-81T_1^3-36T_1^2T_2+177T_1^2T_3-54T_1T_2^2$ $+75T_1T_2T_3-112T_1T_3^2-84T_2^3+184T_2^2T_3-146T_2T_3^2+52T_3^3=0$ Dobili smo 3 (od ukupno 5) ireducibilna polinoma stupnja 3. Ostali su djeljivi s kvadratnim. Homogeni ideal generiran je s jednim kvadratnim polinomom i bilo kojim od gornja tri polinoma 3. stupnja.
$X_0(54)$ $g(\Gamma)=4$	$T_0T_3-T_1T_2+T_2T_3=0$ $-T_0^2T_2+T_0T_2^2+T_1^3-T_1^2T_3+3T_1T_3^2-T_2^3-3T_3^3=0$ Dobili smo 1 ireducibilan stupnja 3 (od 5). Ostali su djeljivi s kvadratnim.
$X_0(55)$ $g(\Gamma)=5$	$T_0T_4-2T_1T_4-T_2^2+2T_2T_3+T_2T_4-T_3^2=0$ $-2T_0T_2+T_0T_3+2T_1^2-T_1T_2-2T_2T_3+3T_2T_4+2T_3^2-4T_3T_4+5T_4^2=0$ $T_0T_3-T_0T_4-T_1T_2+2T_1T_3-T_2^2+2T_2T_3+4T_2T_4-T_3^2-4T_3T_4-3T_4^2=0$
$X_0(56)$ $g(\Gamma)=5$	$2T_0T_2-T_0T_4-2T_1^2+T_1T_3-T_2^2-5T_3^2+T_4^2=0$ $-T_0T_2+T_1^2+T_2^2-T_2T_4+3T_3^2=0$ $-T_0T_3+T_1T_2-T_1T_4+T_2T_3=0$

$X_0(57)$ $g(\Gamma)=5$	$-2T_0T_2-3T_0T_4+2T_1^2-4T_1T_3-4T_1T_4+7T_2^2+T_2T_3+2T_3^2+4T_3T_4+8T_4^2=0$ $-2T_0T_2+T_0T_4+2T_1^2-4T_1T_3-4T_1T_4+3T_2^2+5T_2T_3-8T_2T_4+2T_3^2+4T_3T_4=0$ $-2T_0T_2-8T_0T_3+21T_0T_4+2T_1^2+8T_1T_2-4T_1T_3+12T_1T_4-17T_2^2-7T_2T_3$ $+10T_3^2-36T_3T_4=0$
$X_0(61)$ $g(\Gamma)=4$	$T_0T_2-T_1^2-T_1T_2-2T_2^2+2T_2T_3-T_3^2=0$ $2T_0^2T_2-T_0^2T_3-2T_0T_1^2-T_0T_1T_3-T_1^2T_3-3T_1T_2^2+4T_1T_2T_3-2T_1T_3^2-2T_2^3+2T_2^2T_3-T_2T_3^2=0$ Dobili smo 1 ireducibilan stupnja 3 (od 5). Ostali su djeljivi s kvadratnim.
$X_0(63)$ $g(\Gamma)=5$	$T_0T_2-T_1^2+T_1T_4-T_2T_3-T_4^2=0$ $-T_0T_4+T_1T_3+T_2^2=0$ $T_0T_3-T_1T_2-T_2T_4=0$
$X_0(64)$ $g(\Gamma)=3$	$T_0^3T_2+4T_0T_2^3-T_1^4=0$ Dobili smo ravninsku krivulju 4. stupnja
$X_0(65)$ $g(\Gamma)=5$	$-5T_0T_3+4T_0T_4+5T_1T_2-4T_1T_3+2T_2^2-7T_2T_3+5T_3^2+2T_3T_4-2T_4^2=0$ $4T_0T_2-3T_0T_3-4T_1^2+3T_1T_2+4T_1T_4-2T_2^2-T_2T_3-T_3^2+2T_3T_4-2T_4^2=0$ $-T_0T_3+T_1T_2+2T_2^2+T_2T_3-4T_2T_4+T_3^2-2T_3T_4+2T_4^2=0$
$X_0(67)$ $g(\Gamma)=5$	$-T_0T_2+T_0T_3+T_1^2-T_1T_2-2T_1T_4-T_2^2+6T_2T_3-T_2T_4+T_3^2-3T_3T_4+2T_4^2=0$ $4T_0T_3-T_0T_4-4T_1T_2-T_1T_4-8T_2^2+23T_2T_3-2T_2T_4+T_3^2-9T_3T_4+4T_4^2=0$ $T_0T_3-T_1T_2-T_1T_3-3T_2^2+8T_2T_3-T_2T_4-2T_3T_4+T_4^2=0$
$X_0(72)$ $g(\Gamma)=5$	$T_0T_4-T_2T_3-2T_4^2=0$ $T_0T_2-T_1^2+T_3^2=0$ $T_0T_3-T_2^2=0$
$X_0(73)$ $g(\Gamma)=5$	$2T_0T_3-T_1T_2-2T_1T_3+T_2^2-T_2T_3+2T_2T_4-8T_3^2+9T_3T_4-T_4^2=0$ $-T_0T_2+2T_0T_3-2T_0T_4+2T_1^2-3T_1T_2+2T_2^2-2T_2T_3+2T_2T_4-T_3^2+T_3T_4=0$ $T_0T_2-2T_1^2+2T_1T_2-2T_1T_4-T_2^2+3T_2T_3+3T_3^2-T_4^2=0$
$X_0(75)$ $g(\Gamma)=5$	$3T_0T_2-4T_0T_3-3T_1^2+4T_1T_2-4T_1T_4-3T_3^2-4T_3T_4=0$ $T_0T_2-T_1^2-T_3^2-4T_4^2=0$ $T_0T_4-T_1T_3-T_2T_4=0$
$X_0(81)$ $g(\Gamma)=4$	$T_0T_2-T_1^2-2T_2T_3=0$ $-T_0^2T_3+T_0T_3^2+T_1^3+3T_2^3-T_3^3=0$ Dobili smo 1 ireducibilan stupnja 3 (od 5). Ostali su djeljivi s kvadratnim.

4. Generalizirani Wronskiani

Pod pojmom generalizirani Wronskian podrazumijevamo poopćenje standardnog pojma Wronskiana kasp formi [34], ([29], 6.3.1), ([19], dokaz Teorema 4-5), i ([20], Lema 4-1). Proširujemo rezultate od [25].

Imamo lemu ([25], Lema 6-1.):

Lema 4.0.1. *Neka je $f \in M_m(\Gamma)$ i $\gamma \in \Gamma$. Tad je za svaki $k \geq 0$ k–ta derivacija funkcije $f(\gamma.z)$ dana s*

$$\frac{d^k f(\gamma.z)}{d(\gamma.z)^k} = j(\gamma,z)^{m+2k} \cdot \frac{d^k f(z)}{dz^k} + \sum_{i=0}^{k-1} D_{ik} \cdot j(\gamma,z)^{m+k+i} \cdot \frac{d^i f(z)}{dz^i}.$$

gdje su D_{ik} neke konstante ovisne o m, k, i γ. Ako je $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$, tada su te konstante cijeli brojevi, drugim riječima $D_{ik} \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. Ovo se pokazuje jednostavnom indukcijom po k uz činjenicu da je

$$\frac{d}{dz}\gamma.z = j(\gamma,z)^{-2}.$$

Vidi također 4-5 u [19], tekst između linija (4-6) i (4-8).

Detaljnije:

Neka je $j(\gamma,z) = cz + d$, gdje je $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Stavimo $w = \gamma.z$. Tada vrijedi

$$\frac{dw}{dz} = j(\gamma,z)^{-2}.$$

Kako je $f \in M_m(\Gamma)$ vrijedi

$$f(w) = j(\gamma,z)^m f(z).$$

Deriviramo gornju jednakost po varijabli z i dobijemo:

$$\frac{df(w)}{dw}\frac{dw}{dz} = m \cdot j(\gamma,z)^{m-1} \cdot c \cdot f(z) + j(\gamma,z)^m \frac{df(z)}{dz},$$

odnosno

$$\frac{df(w)}{dw} = mc \cdot j(\gamma, z)^{m+1} f(z) + j(\gamma, z)^{m+2} \frac{df(z)}{dz}.$$

Na taj način smo dobili prvu derivaciju po w, a na analogan način se pokaže korak indukcije po k. ■

Važan rezultat je sljedeća propozicija ([25], Propozicija 6-2.):

Propozicija 4.0.2. *Neka je $m \geq 1$. Tada za bilo koji niz $f_1, \ldots, f_k \in M_m(\Gamma)$, Wronskian*

$$W(f_1, \ldots, f_k)(z) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} f_1(z) & \cdots & f_k(z) \\ \frac{df_1(z)}{dz} & \cdots & \frac{df_k(z)}{dz} \\ & \cdots & \\ \frac{d^{k-1} f_1(z)}{dz^{k-1}} & \cdots & \frac{d^{k-1} f_k(z)}{dz^{k-1}} \end{vmatrix}$$

je kasp modularna forma iz $S_{k(m+k-1)}(\Gamma)$, ako je $k \geq 2$. Ako su $f_1, \ldots, f_k$ linearno nezavisne, tada je $W(f_1, \ldots, f_k) \neq 0$.

Dokaz. Vidi dokaz od [25, Propozicija 6-2]. ■

Kada Γ ima kasp u beskonačnosti $\mathfrak{a}_\infty$, prikladnije je koristiti derivaciju s obzirom na

$$q = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}z}{h},$$

gdje je $h > 0$ širina kaspa, s obzirom da tada sve modularne forme za Γ imaju q–ekspanzije. Lagano se vidi da je

$$\frac{d}{dz} = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{h} \cdot q\frac{d}{dq}.$$

To povlači da je

$$\frac{d^k}{dz^k} = \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{h}\right)^k \cdot \left(q\frac{d}{dq}\right)^k, \quad k \geq 0.$$

Ovdje $\left(q\frac{d}{dq}\right)^k$ označava k-tu uzastopnu primjenu operatora $\left(q\frac{d}{dq}\right)$.

Stoga možemo definirati q–Wronskian na sljedeći način:

$$W_q(f_1, \ldots, f_k) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_k \\ q\frac{d}{dq} f_1 & \cdots & q\frac{d}{dq} f_k \\ & \cdots & \\ \left(q\frac{d}{dq}\right)^{k-1} f_1 & \cdots & \left(q\frac{d}{dq}\right)^{k-1} f_k \end{vmatrix}, \tag{4.1}$$

s obzirom na q–ekspanzije od $f_1, \ldots, f_k$.

Vrijedi:

$$W(f_1,\dots,f_k)=\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{h}\right)^{k(k-1)/2} W_q(f_1,\dots,f_k). \tag{4.2}$$

Lako se vidi da u gornjoj determinanti možemo zamijeniti $\left(q\frac{d}{dq}\right)^i$ s $q^k\frac{d^i}{dq^i}$, što je ponekad lakše za računanje.

Propozicija 4.0.3. *Pretpostavimo da je $\mathfrak{a}_\infty$ kasp od Γ. Neka je $m\geq 1$. Tada za bilo koji niz $f_1,\dots,f_k\in M_m(\Gamma)$ vrijedi:*

$$\begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_k \\ q\frac{d}{dq}f_1 & \cdots & q\frac{d}{dq}f_k \\ & \cdots & \\ \left(q\frac{d}{dq}\right)^i f_1 & \cdots & \left(q\frac{d}{dq}\right)^i f_k \\ & \cdots & \\ \left(q\frac{d}{dq}\right)^{k-1} f_1 & \cdots & \left(q\frac{d}{dq}\right)^{k-1} f_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_k \\ q\frac{d}{dq}f_1 & \cdots & q\frac{d}{dq}f_k \\ & \cdots & \\ q^i\frac{d^i}{dq^i}f_1 & \cdots & q^i\frac{d^i}{dq^i}f_k \\ & \cdots & \\ q^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dq^{k-1}}f_1 & \cdots & q^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dq^{k-1}}f_k \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

Dokaz. Primjetimo da vrijedi:

$$\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(q^j\frac{d^j}{dq^j}\right)=jq^j\frac{d^j}{dq^j}+q^{j+1}\frac{d^{j+1}}{dq^{j+1}},$$

za svaki cijeli broj $j\geq 1$. Specijalno za $j=1$ vrijedi:

$$\left(q\frac{d}{dq}\right)^2=\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(q\frac{d}{dq}\right)=q\frac{d}{dq}+q^2\frac{d^2}{dq^2}.$$

Na taj način vidimo da je svaki $\left(q\frac{d}{dq}\right)^j$ cjelobrojna linearna kombinacija operatora $q^i\frac{d^i}{dq^i}$, gdje je $1\leq i\leq j$. Drugim riječima vrijedi:

$$\left(q\frac{d}{dq}\right)^j=\sum_{i=1}^{j}a_iq^i\frac{d^i}{dq^i},$$

gdje su $a_i\in\mathbb{Z}$ i $a_j=1$.

Stoga možemo elementarnim transformacijama nad redcima svesti lijevu determinantu na desnu. Naime, ukoliko je red matrice veći od 2, startamo s trećim retkom i poništavamo manje potencije s prethodnim redcima, na način da u i-tom retku ostane samo član $q^i\frac{d^i}{dq^i}$. ∎

4.1. O divizoru Wronskiana

U ovoj sekciji iznosimo rezultate o divizorima kaspidalnih modularnih formi konstruiranih pomoću Wronskiana (vidi Proposition 4.0.2). Slijedimo [25], sekcija 7.

Lema 4.1.1. *Neka je dan niz $\varphi_1, \cdots, \varphi_l$ linearno nezavisnih meromorfnih funkcija na nekom otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{C}$. Definiramo njihov Wronskian na uobičajeni način s*

$$W(\varphi_1, \cdots, \varphi_k) = \det\left(\frac{d^{i-1}\varphi_j}{dz^{i-1}}\right)_{i,j=1,\ldots,k}.$$

Tada vrijedi:

(i) Wronskian $W(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$ je ne–nul meromorfna funkcija na U.

(ii) Vrijedi

$$W(\varphi_1, \cdots, \varphi_k) = \varphi^k W(\varphi_1/\varphi, \cdots, \varphi_k/\varphi)$$

za bilo koju ne–nul meromorfnu funkciju φ na U.

(iii) Neka je $\xi \in U$ neka točku u kojoj su sve funkcije φ_i holomorfne. Neka je A vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ razapet sa svim funkcijama φ_i. Tada je svaka funkcija $\varphi \in A$ holomorfna u ξ, a skup redova u ξ

$$\{\nu_{z-\xi}(\varphi); \quad \varphi \in A, \ \varphi \neq 0\}$$

ima točno $k = \dim A$ različitih elemenata. (Vidi sekciju 1.8 za definiciju od $\nu_{z-\xi}$.) Označimo s $\nu_{z-\xi}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ sumu svih k različitih vrijednosti gornjeg skupa. Tada je Wronskian $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ holomorfan u ξ, te mu je red u ξ jednak

$$\nu_{z-\xi}(W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)) = \nu_{z-\xi}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) - \frac{k(k-1)}{2}.$$

Dokaz. Vidi [25], Lema 7-1. ∎

Sljedeća propozicija je direktna posljedica Leme 4.1.1. Vidi sekciju 1.8 gdje je definiran pojam divizora modularne forme, kao i Propoziciju 4.0.2. Promatramo običnu ili eliptičku točku $\mathfrak{a}_\xi$, gdje je $\xi \in \mathbb{H}$.

Propozicija 4.1.2. *Neka je $m \geq 2$ paran cijeli broj. Neka je $f_1, \ldots, f_k \in M_m(\Gamma)$ niz linearno nezavisnih formi. Neka je $\xi \in \mathbb{H}$. Tada vrijedi:*

$$\nu_{\mathfrak{a}_\xi}(W(f_1, \ldots, f_k)) = \frac{1}{e_\xi} \cdot \left(\nu_{z-\xi}(f_1, \ldots, f_k) - \frac{k(k-1)}{2}\right).$$

Dokaz. Vidi [25], Proopozicija 7-2. ∎

Slučaj kada imamo kasp $\mathfrak{a}_\infty$ zahtijeva nešto drugačiju tehniku dokaza, ali je rezultat sličan.

Teorem 4.1.3. *Neka je $m \geq 2$ paran. Pretpostavimo da je $\mathfrak{a}_\infty$ kasp za Γ. Neka je $f_1, \ldots, f_k \in M_m(\Gamma)$ niz linearno nezavisnih modularnih formi. Promatramo $f_1, \ldots, f_k$ kao meromorfne funkcije u varijabli q u okolini od $q = 0$, te definiramo $\nu_{q-0}(f_1, \ldots, f_k)$ kao u Lemi 4.1.1 (iii). Tada vrijedi:*

$$\nu_{\mathfrak{a}_\infty}\left(W\left(f_1, \ldots, f_k\right)\right) = \nu_{q-0}\left(f_1, \ldots, f_k\right).$$

Dokaz. Vidi [25], Teorem 7-3. ■

4.2. Računanje Wronsiana za $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$

Pretpostavimo je $m \geq 4$ paran cijeli broj. Neka je M_m prostor svih modularnih formi težine m za $SL_2(\mathbb{Z})$. Sjetimo se da vrijedi

$$M_m = \bigoplus_{\substack{\alpha,\beta \geq 0 \\ 4\alpha+6\beta=m}} \mathbb{C} E_4^{\alpha} E_6^{\beta}, \tag{4.4}$$

gde su E_4 i E_5 Eisensteinovi redovi težine 4 i 6

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$$
$$E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n,$$

gdje je $q = \exp(2\pi i z)$.

Vrijedi:

$$k = k_m \stackrel{def}{=} \dim M_m = \begin{cases} [m/12] + 1, & m \not\equiv \ 2 (\text{mod } 12); \\ [m/12], & m \equiv \ 2 (\text{mod } 12). \end{cases} \tag{4.5}$$

Dobro je poznato da je preslikavanje

$$f \longmapsto f \cdot \Delta$$

izomorfizam između vektorskih prostora M_m modularnih formi težine m i prostora svih kasp formi S_{m+12} kao potprostora od M_{m+12}. Općenito vrijedi:

$$\dim S_m = \dim M_m - 1,$$

za sve parne cijele brojeve $m \geq 4$.

Sada možemo računati prve Wronskiane. Vidi (4.1) za notaciju.

Propozicija 4.2.1. *Vrijedi:*

(i) $W_q\left(E_4^3, E_6^2\right) = -1728 \cdot \Delta \cdot E_4^2 E_6$.

(ii) $2E_4 \frac{d}{dq} E_6 - 3E_6 \frac{d}{dq} E_4 = -1728 \cdot \Delta \cdot q^{-1}$.

Dokaz. [25], Propozicija 8-3. ■

Ručni računi Wronskiana. Za prostor M_{24} baza je $\{E_4^6, E_4^3E_6^2, E_6^4\}$. Pripadni Wronskian $W_q\left(E_4^6, E_4^3E_6^2, E_6^4\right)$ je kasp forma težine $3\cdot(24+3-1)=78$. Računamo ga kao sljedeću determinantu:

$$W_q\left(E_4^6, E_4^3E_6^2, E_6^4\right) = \begin{vmatrix} E_4^6 & E_4^3E_6^2 & E_6^4 \\ q\frac{d}{dq}E_4^6 & q\frac{d}{dq}\left(E_4^3E_6^2\right) & q\frac{d}{dq}E_6^4 \\ (q\frac{d}{dq})^2E_4^6 & (q\frac{d}{dq})^2\left(E_4^3E_6^2\right) & (q\frac{d}{dq})^2E_6^4 \end{vmatrix}$$

Propozicija 4.2.2. *Vrijedi:*

$$W_q\left(E_4^6, E_4^3E_6^2, E_6^4\right) = -2\cdot 1728^3\Delta^3E_4^6E_6^3$$

Dokaz. Računamo determinantu razvojem po zadnjem retku. Prvo računamo 2×2 minore:

$$\begin{aligned} W_q\left(E_4^3E_6^2, E_6^4\right) &= \begin{vmatrix} E_4^3E_6^2 & E_6^4 \\ q\frac{d}{dq}(E_4^3E_6^2) & q\frac{d}{dq}E_6^4 \end{vmatrix} \\ &= E_4^2E_6^2\cdot q\cdot 4E_6^3\frac{d}{dq}E_6 - E_6^4\cdot q\cdot\left(3E_4^2E_6^2\frac{d}{dq}E_4 + E_4^3 2E_6\frac{d}{dq}E_6\right) \\ &= 2E_4^3E_6^5\cdot q\frac{d}{dq}E_6 - 3E_4^2E_6^6\cdot q\frac{d}{dq}E4 \\ &= E_4^2E_6^5\cdot q\cdot\left(2E_4\frac{d}{dq}E_6 - 3E_6\frac{d}{dq}E_4\right) \\ &= E_4^2E_6^5\cdot(-1728)\cdot\Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_q\left(E_4^6, E_6^4\right) &= \begin{vmatrix} E_4^6 & E_6^4 \\ q\frac{d}{dq}E_4^6 & q\frac{d}{dq}E_6^4 \end{vmatrix} \\ &= E_4^6\cdot q\cdot 4E_6^3\frac{d}{dq}E_6 - E_6^4\cdot q\cdot 6E_4^5\frac{d}{dq}E_4 \\ &= 2E_4^5E_6^3\cdot q\cdot\left(2E_4\frac{d}{dq}E_6 - 3E_6\frac{d}{dq}E_4\right) \\ &= 2E_4^5E_6^3\cdot(-1728)\cdot\Delta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_q\left(E_4^6, E_4^3E_6^2\right) &= \begin{vmatrix} E_4^6 & E_4^3E_6^2 \\ q\frac{d}{dq}E_4^6 & q\frac{d}{dq}(E_4^3E_6^2) \end{vmatrix} \\
&= E_4^6 q\left(3E_4^2E_6^2\frac{d}{dq}E_4 + E_4^3 2E_6\frac{d}{dq}E_6\right) - E_4^3E_6^2 q 6E_4^5\frac{d}{dq}E_4 \\
&= 3E_4^8E_6^2 \cdot q \cdot \frac{d}{dq}E_4 + 2E_4^9E_6 \cdot q \cdot \frac{d}{dq}E_6 - 6E_4^8E_6^2 \cdot q \cdot \frac{d}{dq}E_4 \\
&= 2E_4^9E_6 \cdot q \cdot \frac{d}{dq}E_6 - 3E_4^8E_6^2 \cdot q \cdot \frac{d}{dq}E_4 \\
&= E_4^8E_6 \cdot q \cdot \left(2E_4\frac{d}{dq}E_6 - 3E_6\frac{d}{dq}E_4\right) \\
&= E_4^8E_6 \cdot (-1728) \cdot \Delta.
\end{aligned}
$$

Sada možemo računati cijelu determinantu:

$$
\begin{aligned}
&W_q\left(E_4^6, E_4^3E_6^2, E_6^4\right) = \begin{vmatrix} E_4^6 & E_4^3E_6^2 & E_6^4 \\ q\frac{d}{dq}E_4^6 & q\frac{d}{dq}\left(E_4^3E_6^2\right) & q\frac{d}{dq}E_6^4 \\ \left(q\frac{d}{dq}\right)^2 E_4^6 & \left(q\frac{d}{dq}\right)^2\left(E_4^3E_6^2\right) & \left(q\frac{d}{dq}\right)^2 E_6^4 \end{vmatrix} \\
&= \left(q\frac{d}{dq}\right)^2 E_4^6 \cdot E_4^2E_6^5 \cdot (-1728)\Delta - \left(q\frac{d}{dq}\right)^2\left(E_4^3E_6^2\right) \cdot 2E_4^5E_6^3(-1728)\Delta \\
&\quad + \left(q\frac{d}{dq}\right)^2 E_6^4 \cdot E_4^8E_6 \cdot (-1728)\Delta \\
&= (-1728)\Delta E_4^2E_6\left(E_6^4\left(q\frac{d}{dq}\right)^2 E_4^6 - 2E_4^3E_6^2\left(q\frac{d}{dq}\right)^2\left(E_4^3E_6^2\right) + E_4^6\left(q\frac{d}{dq}\right)^2 E_6^4\right).
\end{aligned}
$$

Računamo samo izraz u velikim zagradama:

1°

$$
\begin{aligned}
&E_6^4\left(q\frac{d}{dq}\right)^2 E_4^6 - 2E_4^3E_6^2\left(q\frac{d}{dq}\right)^2(E_4^3E_6^2) + E_4^6\left(q\frac{d}{dq}\right)^2 E_6^4\\
&= E_6^4\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(q6E_4^5\frac{d}{dq}E_4\right) - 2E_4^3E_6^2\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(q\left(3E_4^2E_6^2\frac{d}{dq}E_4 + E_4^3 2E_6\frac{d}{dq}E_6\right)\right)\\
&\quad + E_4^6\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(q4E_6^3\frac{d}{dq}E_6\right)\\
&= E_6^4\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(q6E_4^5\frac{d}{dq}E_4\right) - 2E_4^3E_6^2\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(qE_4^2E_6\left(3E_6\frac{d}{dq}E_4 + 2E_4\frac{d}{dq}E_6\right)\right)\\
&\quad + E_4^6\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(q4E_6^3\frac{d}{dq}E_6\right)\\
&= 6E_6^4\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(qE_4^5\frac{d}{dq}E_4\right)\\
&\quad - 6E_4^3E_6^2\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(qE_4^2E_6^2\frac{d}{dq}E_4\right) - 4E_4^3E_6^2\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(qE_4^3E_6\frac{d}{dq}E_6\right)\\
&\quad + 4E_4^6\left(q\frac{d}{dq}\right)\left(qE_6^3\frac{d}{dq}E_6\right)
\end{aligned}
$$

2°

$$
\begin{aligned}
&= 6E_6^4 q\left(E_4^5\frac{d}{dq}E_4 + 5qE_4^4\left(\frac{d}{dq}E_4\right)^2 + qE_4^5\frac{d^2}{dq^2}E_4\right)\\
&\quad - 6E_4^3E_6^2 q\left(E_4^2E_6^2\frac{d}{dq}E_4 + 2qE_4E_6^2\left(\frac{d}{dq}E_4\right)^2 + 2qE_4^2E_6\frac{d}{dq}E_4\frac{d}{dq}E_6 + qE_4^2E_6^2\frac{d^2}{dq^2}E_4\right)\\
&\quad - 4E_4^3E_6^2 q\left(E_4^3E_6\frac{d}{dq}E_6 + 3qE_4^2E_6\frac{d}{dq}E_4\frac{d}{dq}E_6 + qE_4^3\left(\frac{d}{dq}E_6\right)^2 + qE_4^3E_6\frac{d^2}{dq^2}E_6\right)\\
&\quad + 4E_4^6 q\left(E_6^3\frac{d}{dq}E_6 + 3qE_6^2\left(\frac{d}{dq}E_6\right)^2 + qE_6^3\frac{d^2}{dq^2}E_6\right)\\
&= 6E_6^4 q\left(E_4^5\frac{d}{dq}E_4 + 5qE_4^4\left(\frac{d}{dq}E_4\right)^2 + qE_4^5\frac{d^2}{dq^2}E_4\right)\\
&\quad - 6E_4^3E_6^2 q\left(E_4^2E_6^2\frac{d}{dq}E_4 + 2qE_4E_6^2\left(\frac{d}{dq}E_4\right)^2 + 2qE_4^2E_6\frac{d}{dq}E_4\frac{d}{dq}E_6 + qE_4^2E_6^2\frac{d^2}{dq^2}E_4\right)\\
&\quad - 4E_4^3E_6^2 q\left(E_4^3E_6\frac{d}{dq}E_6 + 3qE_4^2E_6\frac{d}{dq}E_4\frac{d}{dq}E_6 + qE_4^3\left(\frac{d}{dq}E_6\right)^2 + qE_4^3E_6\frac{d^2}{dq^2}E_6\right)\\
&\quad + 4E_4^6 q\left(E_6^3\frac{d}{dq}E_6 + 3qE_6^2\left(\frac{d}{dq}E_6\right)^2 + qE_6^3\frac{d^2}{dq^2}E_6\right)
\end{aligned}
$$

3°.

$$
\begin{aligned}
&= 18E_4^4E_6^4q^2\left(\frac{d}{dq}E_4\right)^2 - 24E_4^5E_6^3q^2\frac{d}{dq}E_4\frac{d}{dq}E_6 + 8E_4^6E_6^2q^2\left(\frac{d}{dq}E_6\right)^2\\
&= 2E_4^4E_6^2q^2\left(9E_6^2\left(\frac{d}{dq}E_4\right)^2 - 12E_4E_6\frac{d}{dq}E_4\frac{d}{dq}E_6 + 4E_4^2\left(\frac{d}{dq}E_6\right)^2\right)\\
&= 2E_4^4E_6^2q^2\left(3E_6\frac{d}{dq}E_4 - 2E_4\frac{d}{dq}E_6\right)^2 = 2E_4^4E_6^2\cdot(1728\Delta)^2
\end{aligned}
$$

Dobili smo

$$\begin{aligned} W_q\left(E_4^6, E_4^3E_6^2, E_6^4\right) &= (-1728)\Delta E_4^2E_6 \cdot 2E_4^4E_6^2 \cdot (1728\Delta)^2 \\ &= -2\cdot 1728^3\Delta^3E_4^6E_6^3 \end{aligned}$$

■

Ako koristimo operator $q^2\frac{d^2}{dq^2}$ umjesto $\left(q\frac{d}{dq}\right)^2$ (vidi Propozicija 4.0.3) imamo:

$$W_q\left(E_4^6, E_4^3E_6^2, E_6^4\right) \overset{\text{Propozicija}4.0.3}{=} \begin{vmatrix} E_4^6 & E_4^3E_6^2 & E_6^4 \\ q\frac{d}{dq}E_4^6 & q\frac{d}{dq}\left(E_4^3E_6^2\right) & q\frac{d}{dq}E_6^4 \\ q^2\frac{d^2}{dq^2}E_4^6 & q^2\frac{d^2}{dq^2}\left(E_4^3E_6^2\right) & q^2\frac{d^2}{dq^2}E_6^4 \end{vmatrix}$$

$$= q^2\frac{d^2}{dq^2}E_4^6 \cdot E_4^2E_6^5\cdot(-1728)\Delta - q^2\frac{d^2}{dq^2}\left(E_4^3E_6^2\right)\cdot 2E_4^5E_6^3(-1728)\Delta + q^2\frac{d^2}{dq^2}E_6^4\cdot E_4^8E_6\cdot(-1728)\Delta$$

$$= (-1728)\Delta E_4^2E_6q^2\left(E_6^4\frac{d^2}{dq^2}E_4^6 - 2E_4^3E_6^2\frac{d^2}{dq^2}\left(E_4^3E_6^2\right) + E_4^6\frac{d^2}{dq^2}E_6^4\right)$$

Sada samo velike zagrade:

$$
\begin{aligned}
&E_6^4 \frac{d^2}{dq^2} E_4^6 - 2E_4^3E_6^2 \frac{d^2}{dq^2}\left(E_4^3E_6^2\right) + E_4^6 \frac{d^2}{dq^2} E_6^4 \\
&= E_6^4 \frac{d}{dq}\left(6E_4^5 \frac{dE_4}{dq}\right) - 2E_4^3E_6^2 \frac{d}{dq}\left(3E_4^2E_6^2 \frac{dE_4}{dq} + 2E_4^3E_6\frac{dE_6}{dq}\right) + E_4^6 \frac{d}{dq}\left(4E_6^3 \frac{dE_6}{dq}\right) \\
&= E_6^4 \cdot \left(30E_4^4\left(\frac{dE_4}{dq}\right)^2 + 6E_4^5 \frac{d^2E_4}{dq^2}\right) \\
&\quad - 2E_4^3E_6^2\left(6E_4E_6^2\left(\frac{dE_4}{dq}\right)^2 + 6E_4^2E_6\frac{dE_4}{dq}\frac{dE_6}{dq} + 3E_4^2E_6^2\frac{d^2E_4}{dq^2}\right. \\
&\qquad \left. + 6E_4^2E_6\frac{dE_4}{dq}\frac{dE_6}{dq} + 2E_4^3\left(\frac{dE_6}{dq}\right)^2 + 2E_4^3E_6\frac{d^2E_6}{dq^2}\right) \\
&\quad + E_4^6\left(12E_6^2\left(\frac{dE_6}{dq}\right)^2 + 4E_6^3\frac{d^2E_6}{dq^2}\right)
\end{aligned}
$$

(**druge derivacije se pokrate**)

$$
\begin{aligned}
&= 18E_4^4E_6^4\left(\frac{dE_4}{dq}\right)^2 - 24E_4^5E_6^3\frac{dE_4}{dq}\frac{dE_6}{dq} + 8E_4^6E_6^2\left(\frac{dE_6}{dq}\right)^2 \\
&= 2E_4^4E_6^2\left(9E_6^2\left(\frac{dE_4}{dq}\right)^2 - 12E_4E_6\frac{dE_4}{dq}\frac{dE_6}{dq} + 4E_4\left(\frac{dE_6}{dq}\right)^2\right) \\
&= 2E_4^4E_6^2\left(3E_6\frac{dE_4}{dq} - 2E_4\frac{dE_6}{dq}\right)^2 \\
&= 2E_4^4E_6^2\left(1728 \cdot \Delta \cdot q^{-1}\right)^2
\end{aligned}
$$

Stoga je

$$
\begin{aligned}
&W_q\left(E_4^6, E_4^3E_6^2, E_6^4\right) \\
&= (-1728)\Delta E_4^2E_6q^2\left(E_6^4\frac{d^2}{dq^2}E_4^6 - 2E_4^3E_6^2\frac{d^2}{dq^2}\left(E_4^3E_6^2\right) + E_4^6\frac{d^2}{dq^2}E_6^4\right) \\
&= (-1728)\Delta E_4^2E_6q^2 \cdot 2E_4^4E_6^2\left(1728 \cdot \Delta \cdot q^{-1}\right)^2 \\
&= -2 \cdot 1728^3\Delta^3E_4^6E_6^3
\end{aligned}
$$

4.3. Računi Wronskiana u SAGE-u i posljedični rezultati

Označimo s

$$W_q(M_m),$$

q–Wronskian kanonske baze od M_m oblika $E_4^\alpha E_6^\beta$, gdje je $4\alpha+6\beta=m$, i $\alpha,\beta\geq 0$. Računom u SAGE-u dobijemo:

$$\begin{aligned}
W_q(M_{12}) &= -\left(E_4^3-E_6^2\right)E_4^2E_6\\
W_q(M_{14}) &= E_4^2E_6\\
W_q(M_{16}) &= -\left(E_4^3-E_6^2\right)E_4^4E_6\\
W_q(M_{18}) &= -\left(E_4^3-E_6^2\right)E_4^2E_6^3\\
W_q(M_{20}) &= -\left(E_4^3-E_6^2\right)E_4^6E_6\\
W_q(M_{22}) &= -\left(E_4^3-E_6^2\right)E_4^4E_6^3\\
W_q(M_{24}) &= -2\left(E_4^3-E_6^2\right)^3E_4^6E_6^3\\
W_q(M_{26}) &= -\left(E_4^3-E_6^2\right)E_4^6E_6^3\\
W_q(M_{28}) &= -2\left(E_4^3-E_6^2\right)^3E_4^9E_6^3\\
W_q(M_{30}) &= -2\left(E_4^3-E_6^2\right)^3E_4^6E_6^6\\
W_q(M_{32}) &= -2\left(E_4^3-E_6^2\right)^3E_4^{12}E_6^3\\
W_q(M_{34}) &= -2\left(E_4^3-E_6^2\right)^3E_4^9E_6^6\\
W_q(M_{36}) &= 12\left(E_4^3-E_6^2\right)^6E_4^{12}E_6^6\\
W_q(M_{38}) &= -2\left(E_4^3-E_6^2\right)^3E_4^{12}E_6^6\\
W_q(M_{40}) &= 12\left(E_4^3-E_6^2\right)^6E_4^{16}E_6^6\\
W_q(M_{42}) &= 12\left(E_4^3-E_6^2\right)^6E_4^{12}E_6^{10}\\
W_q(M_{44}) &= 12\left(E_4^3-E_6^2\right)^6E_4^{20}E_6^6\\
W_q(M_{46}) &= 12\left(E_4^3-E_6^2\right)^6E_4^{16}E_6^{10}\\
W_q(M_{48}) &= 288\left(E_4^3-E_6^2\right)^{10}E_4^{20}E_6^{10}\\
W_q(M_{50}) &= 12\left(E_4^3-E_6^2\right)^6E_4^{20}E_6^{10}
\end{aligned}$$

$$W_q(M_{52}) = 288\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{10} E_4^{25} E_6^{10}$$
$$W_q(M_{54}) = 288\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{10} E_4^{20} E_6^{15}$$
$$W_q(M_{56}) = 288\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{10} E_4^{30} E_6^{10}$$
$$W_q(M_{58}) = 288\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{10} E_4^{25} E_6^{15}$$
$$W_q(M_{60}) = -34560\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{15} E_4^{30} E_6^{15}$$
$$W_q(M_{62}) = 288\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{10} E_4^{30} E_6^{15}$$
$$W_q(M_{64}) = -34560\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{15} E_4^{36} E_6^{15}$$
$$W_q(M_{66}) = -34560\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{15} E_4^{30} E_6^{21}$$
$$W_q(M_{68}) = -34560\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{15} E_4^{42} E_6^{15}$$
$$W_q(M_{70}) = -34560\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{15} E_4^{36} E_6^{21}$$
$$W_q(M_{72}) = -24883200\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{21} E_4^{42} E_6^{21}$$
$$W_q(M_{74}) = -34560\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{15} E_4^{42} E_6^{21}$$
$$W_q(M_{76}) = -24883200\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{21} E_4^{49} E_6^{21}$$
$$W_q(M_{78}) = -24883200\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{21} E_4^{42} E_6^{28}$$
$$W_q(M_{80}) = -24883200\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{21} E_4^{56} E_6^{21}$$
$$W_q(M_{82}) = -24883200\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{21} E_4^{49} E_6^{28}$$
$$W_q(M_{84}) = -125411328000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{28} E_4^{56} E_6^{28}$$
$$W_q(M_{86}) = -24883200\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{21} E_4^{56} E_6^{28}$$
$$W_q(M_{88}) = -125411328000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{28} E_4^{64} E_6^{28}$$
$$W_q(M_{90}) = -125411328000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{28} E_4^{56} E_6^{36}$$
$$W_q(M_{92}) = -125411328000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{28} E_4^{72} E_6^{28}$$
$$W_q(M_{94}) = -125411328000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{28} E_4^{64} E_6^{36}$$
$$W_q(M_{96}) = -5056584744960000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{36} E_4^{72} E_6^{36}$$
$$W_q(M_{98}) = -125411328000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{28} E_4^{72} E_6^{36}$$
$$W_q(M_{100}) = -5056584744960000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{36} E_4^{81} E_6^{36}$$
$$W_q(M_{102}) = -5056584744960000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{36} E_4^{72} E_6^{45}$$
$$W_q(M_{104}) = -5056584744960000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{36} E_4^{90} E_6^{36}$$
$$W_q(M_{106}) = -5056584744960000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{36} E_4^{81} E_6^{45}$$
$$W_q(M_{108}) = -1834933472251084800000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{45} E_4^{90} E_6^{45}$$
$$W_q(M_{110}) = -5056584744960000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{36} E_4^{90} E_6^{45}$$
$$W_q(M_{120}) = -6658606584104736522240000000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{55} E_4^{110} E_6^{55}$$

Procedure u SAGE-u za račun Wronskiana. Za dani paran cijeli broj m želimo naći Wronskian kanonske baze od $M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$.

1° Procedure za račun dimenzije i kanonske baze prostora $M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$:

```
def get_dim_M_m(m):
    if m % 12 == 2:
        return m//12
    elif m%12==0 or m%12==4 or m%12==6 or m%12==8 or m%12==10:
        return m//12+1
    else:
        return 0

def get_First_a_b_For_M_m(m):
    a=0; b=0
    if m%4==0:
        a=m//4; b=0
    elif m%4==2:
        a=m//4-1; b=1
    return (a,b)

def get_Basis_For_M_m(m, E_4, E_6):
    dim_M_m=get_dim_M_m(m)
    ab=get_First_a_b_For_M_m(m)
    a=ab[0]; b=ab[1]
    M_m_basis=[E_4^(a-3*i)*E_6^(b+2*i) for i in range(dim_M_m)]
    return M_m_basis
```

2° Procedure za q–derivaciju $q\frac{d}{dq}$ (θ–operator):

```
def qDer(f,q):
    return q*f.derivative(q)

def qDerN(f,q,N):
    fN=f
```

```
    for i in range(N):
        fN=qDer(fN,q)
        #fN=q*fN.derivative(q)
    return fN


def qDerN_List(basis_list,q,N):
    n=len(basis_list)
    return basis_qDerN


def qDerN_List_Trnc(basis_list,q,N,trnc):
    n=len(basis_list)
    basis_qDerN=[qDerN(basis_list[i],q,N).truncate(trnc)
                                    for i in range(len(basis_list))]
    return basis_qDerN
```

3° Procedure za račun matrice Wronskiana, njene determinante, i pripadnog polinoma u verijablama E_4 i E_6. Potrebna preciznost za Eisensteinove redove jednaka je dimenziji prostora cusp formi u kojem se Wronskian nalazi

$$\text{Precison } = \dim M_{k(m+k-1)}(SL_2(\mathbb{Z}))$$

gdje je $k = \dim M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$, odnosno općenitije broj uzetih linearno nezavisnih elemenata iz $M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$. Da bi račun bio moguć za bilo koji veći m potrebno je bilo prilagoditi metodu za izračun determinante.

```
def my_det(W_2d_list, trunc):
    if len(W_2d_list) > 0 and len(W_2d_list) == len(W_2d_list[0]):
        det=0
        siz = len(W_2d_list)
        if siz == 1:
            return W_2d_list[0][0].truncate(trunc)
        elif siz == 2:
            return (W_2d_list[0][0]*W_2d_list[1][1]-W_2d_list[0][1]*
                                        W_2d_list[1][0]).truncate(trunc)
        for k in range(siz):
```

```
            R = range( siz )
            W_minor = [[W_2d_list[i][j] for j in R if not j==k] for i in R
                                                                    if not i==siz-1]
            det=det + (-1)^k * W_2d_list[siz-1][k].truncate(trunc) *
                                                        my_det(W_minor, trunc)
        return det.truncate(trunc)
    else:
        return 'error rrr'

# vraca matricu obradjenu s Gauss-Jordanovim eliminacijama.
def get_Wronskian_new(m):
    k=get_dim_M_m(m)
    wrnsk_weight = k*(m+k-1)

    prec=get_dim_M_m(wrnsk_weight)

    e4 = eisenstein_series_qexp(4,prec)
    e6 = eisenstein_series_qexp(6,prec)
    q=(e6+1/504).truncate(2)
    E4 = e4*240
    E6 = e6*(-504)

    basis_M_m = get_Basis_For_M_m(m,E4,E6)
    # Matrix for Wronskian
    wrnsk_mtrx_as_2d_list = [qDerN_List_Trnc(basis_M_m, q, j, prec)
                                                              for j in range(k)]
    print('precision='+str(prec))

    W_poly = my_det(wrnsk_mtrx_as_2d_list, prec)
    list_wrnsk_coef = W_poly.coefficients(sparse=False)

    # basis of space where Wronskian live
```

```
    basis_Wrnsk_Space = get_Basis_For_M_m(wrnsk_weight,E4,E6)
    A=Matrix(QQ,[basis_Wrnsk_Space[0].truncate(prec).coefficients(sparse=False)])

    for cff in basis_Wrnsk_Space:
        b = Matrix(QQ, cff.truncate(prec).coefficients(sparse=False))
        A=A.stack(b)
    b = Matrix(QQ, list_wrnsk_coef)
    A=A.stack(b)
    A=A.delete_rows([0])
    At=A.transpose()
    return (At.rref(),wrnsk_weight)

def get_Wronskian_Poly_test(m):
    W_Rref_list=get_Wronskian_new(m)
    W_Rref = W_Rref_list[0]
    W_weight = W_Rref_list[1]
    W_space_dim = get_dim_M_m(W_weight)
    W_eq_coeffs = W_Rref[0:W_space_dim, W_space_dim]

    var('E_4,E_6')
    W_space_basis = get_Basis_For_M_m(W_weight, E_4, E_6)
    # ovo je de vidim koeficijent i elemente baze
    izraz1 =0
    for i in range(len(W_space_basis)):
        izraz1=izraz1+W_eq_coeffs[i][0]*W_space_basis[i]
    my_eq = izraz1.factor()
    return (my_eq, 'W(M_{'+str(m)+'})&='+ latex(izraz1.factor())+'\\\\')
```

Kada imamo sve gornje metode poziv:

```
get_Wronskian_Poly_test(120)
```

vraća:

```
(-665860658410473652224000000*(E_4^3 - E_6^2)^55*E_4^110*E_6^55,
```

```
W(M_{120})&= -665860658410473652224000000 \,
    {\left(E_{4}^{3} - E_{6}^{2}\right)}^{55} E_{4}^{110} E_{6}^{55} \\)
```

Napomenimo da ovaj poziv za $m = 120$ traje poprilično sati na običnom računalu.

Ako izdvojimo samo Wronskiane oblika $W_q(M_{12t})$ dobijemo sljedeću listu:

$$\begin{aligned}
W_q(M_{12}) &= -\left(E_4^3 - E_6^2\right)E_4^2E_6\\
W_q(M_{24}) &= -2\left(E_4^3 - E_6^2\right)^3E_4^6E_6^3\\
W_q(M_{36}) &= 12\left(E_4^3 - E_6^2\right)^6E_4^{12}E_6^6\\
W_q(M_{48}) &= 288\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{10}E_4^{20}E_6^{10}\\
W_q(M_{60}) &= -34560\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{15}E_4^{30}E_6^{15}\\
W_q(M_{72}) &= -24883200\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{21}E_4^{42}E_6^{21}\\
W_q(M_{84}) &= -125411328000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{28}E_4^{56}E_6^{28}\\
W_q(M_{96}) &= -5056584744960000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{36}E_4^{72}E_6^{36}\\
W_q(M_{108}) &= -1834933472251084800000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{45}E_4^{90}E_6^{45}\\
W_q(M_{120}) &= -665860658410473652224000000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{55}E_4^{110}E_6^{55}
\end{aligned}$$

Primjetimo da je $\left(E_4^3 - E_6^2\right) = 1728 \cdot \Delta$.

Ovi rezultati su dali ideju za sljedeću lemu ([25], Propozicija 8-4.):

Lema 4.3.1. *Pretpostavimo da je $m = 12t$ za neki $t \geq 1$. Napišimo bazu od M_m na sljedeći način:*

$$\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ 0 \leq u \leq t.$$

Tada vrijedi:

$$W_q\left(\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\quad 0 \leq u \leq t\right) = \lambda \cdot \Delta^{\frac{t(t+1)}{2}}E_4^{t(t+1)}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}},$$

za neku ne–nul konstantu λ.

Za dokaz gornje leme proširujemo poznatu lemu (vidi [20], Lema 4-1):

Lema 4.3.2. *Neka je $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Tada vrijedi:*

$$\operatorname{div}(\Delta) = \mathfrak{a}_\infty,\ \operatorname{div}(E_4) = \frac{1}{3}\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2},\ \operatorname{div}(E_6) = \frac{1}{2}\mathfrak{a}_i.$$

Dokaz. Zbog Leme 1.8.2 (iv) sljedi da je

$$\deg(\operatorname{div}(\Delta)) = 12(0-1) + \frac{12}{2}(1+1/2+2/3) = 1.$$

Kako je Δ kasp forma imamo prvu formulu.

Ponovo po Lemi 1.8.2 (iv) imamo

$$\deg(\operatorname{div}(E_4)) = 4(0-1) + \frac{4}{2}(1+1/2+2/3) = \frac{1}{3}.$$

Stavimo $\epsilon = (1+\sqrt{-3})/2$ i $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Tada je $\gamma.\epsilon = \epsilon$. Imamo

$$E_4(\epsilon) = E_4(\gamma.\epsilon) = j(\gamma,\epsilon)^4 E_4(\epsilon) = \epsilon^4 E_4(\epsilon) = -E_4(\epsilon).$$

Stoga je $E_4(\epsilon) = 0$. Kako je indeks ramifikacije točke $\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2} \in X(1)$ jednak 3, E_4 holomorfna i $\deg(\operatorname{div}(E_4)) = \frac{1}{3}$, zaključujemo da vrijedi druga formula.

Još jednom zbog Leme 1.8.2 (iv) imamo

$$\deg(\operatorname{div}(E_6)) = 6(0-1) + \frac{6}{2}(0+1/2+2/3) = \frac{1}{2}.$$

Neka je $\delta = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Tada je $\delta.i = \frac{1}{-i} = i$. Stoga imamo

$$E_6(i) = E_6(\delta.i) = j(\delta,i)^6 E_6(i) = (-i)^6 E_6(i) = -E_6(i).$$

Zaključujemo da je $E_6(i) = 0$. Kako je indeks ramifikacije točke $\mathfrak{a}_i \in X(1)$ jednak 2, E_6 holomorfna i $\deg(\operatorname{div}(E_6)) = \frac{1}{2}$, zaključujemo da vrijedi treća formula. ∎

Sada možemo dokazati Lemu 4.3.1:

Dokaz. Možemo odabrati neku drugu bazu od $f_0, \ldots, f_t$ od M_m takvu da je $f_i = c_i q^i + d_i q^{i+1} + \cdots$, $0 \le i \le t$, gdje su $c_i \neq 0, d_i, \ldots$ neki kompleksni brojevi (vidi [40, 2.3. The Miller Basis]). Vrijedi

$$\nu_{q-0}(f_0, \ldots, f_t) = 0+1+2+\cdots+t = \frac{t(t+1)}{2}.$$

(Vidi Lemu 4.1.1 za definiciju od $\nu_{q-0}(f_0, \ldots, f_t)$.) Direktna primjena Teorema 4.1.3 daje

$$\nu_{\mathfrak{a}_\infty}\Big(W_q\Big(\left(E_4^3\right)^u \left(E_6^2\right)^{t-u}, \quad 0 \le u \le t\Big)\Big) = \frac{t(t+1)}{2}.$$

Zbog Leme 4.3.2 znamo da je $\operatorname{div}(\Delta) = \mathfrak{a}_\infty$. Stoga dobijemo da je

$$f \overset{def}{=} W_q\Big(\left(E_4^3\right)^u \left(E_6^2\right)^{t-u}, \quad 0 \le u \le t\Big) / \Delta^{\frac{t(t+1)}{2}}$$

ne–kasp modularna forma težine

$$l = (t+1)\cdot(12t+t) - 12\frac{t(t+1)}{2} = 7t(t+1).$$

Preostaje nam odrediti gore definiranu modularnu formu f. Prvo tražimo redove poništavanja Wronskiana

$$W_q\left(\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ \ 0\le u\le t\right)$$

u eliptičkim točkama i i $e^{\pi i/3} = (1+i\sqrt{3})/2$, redova 2 i 3, respektivno. Zbog Leme 4.3.2 imamo da je

$$\operatorname{div}(E_4) = \frac{1}{3}\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2}\ \text{ i }\ \operatorname{div}(E_6) = \frac{1}{2}\mathfrak{a}_i.$$

To povlači da su redovi funkcije $\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u}$ u točkama $(1+i\sqrt{3})/2$ i i jednaki $3u$ i $2(t-u)$, respektivno. Stoga Wronskian $W_q\left(\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ \ 0\le u\le t\right)$ ima redove (vidi Propoziciju 4.1.2)

$$\begin{aligned}\nu_{\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2}}\left(W_q\left(\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ \ 0\le u\le t\right)\right) &= \frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{u=0}^{t}3u - \frac{t(t+1)}{2}\right)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(3\cdot\frac{t(t+1)}{2} - \frac{t(t+1)}{2}\right) = \frac{1}{3}t(t+1),\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\nu_{\mathfrak{a}_i}\left(W_q\left(\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ \ 0\le u\le t\right)\right) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{u=0}^{t}2(t-u) - \frac{t(t+1)}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{t(t+1)}{2} - \frac{t(t+1)}{2}\right) = \frac{1}{4}t(t+1),\end{aligned}$$

Kako je $\operatorname{div}(\Delta) = \mathfrak{a}_\infty$ ovo povlači da je

$$\nu_{\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2}}(f) = \frac{1}{3}\cdot t(t+1),$$

i

$$\nu_{\mathfrak{a}_i}(f) = \frac{1}{4}\cdot t(t+1).$$

Stoga je

$$\operatorname{div}(f) = \frac{1}{3}t(t+1)\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2} + \frac{1}{4}t(t+1)\mathfrak{a}_i.$$

Znamo da je $f \in M_{7t(t+1)}$. Modularna forma $E_4^{t(t+1)} E_6^{\frac{t(t+1)}{2}}$ pripada istom prostoru i ima isti divizor kao f. Stoga je njihov kvocijent funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi $X(1)$, divizora jednakog 0. Standardno znamo da je tada

$$\frac{f}{E_4^{t(t+1)} E_6^{\frac{t(t+1)}{2}}} \in L(0) = \mathbb{C},$$

pa je

$$f = \lambda \cdot E_4^{t(t+1)} E_6^{\frac{t(t+1)}{2}},$$

za neku ne–nul konstnatu λ. ■

Analogno možemo pokazati tvrdnje kada je m paran $m \neq 12t,\ t \geq 1$. Izdvojimo iz računa u SAGE-u samo Wronskiane prostora M_m gdje je $m = 12 + 4$, za neki cijeli broj $t \geq 1$:

$$\begin{aligned}
W_q(M_{16}) &= -\left(E_4^3 - E_6^2\right) E_4^4 E_6 \\
W_q(M_{28}) &= -2\left(E_4^3 - E_6^2\right)^3 E_4^9 E_6^3 \\
W_q(M_{40}) &= 12\left(E_4^3 - E_6^2\right)^6 E_4^{16} E_6^6 \\
W_q(M_{52}) &= 288\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{10} E_4^{25} E_6^{10} \\
W_q(M_{64}) &= -34560\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{15} E_4^{36} E_6^{15} \\
W_q(M_{76}) &= -24883200\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{21} E_4^{49} E_6^{21} \\
W_q(M_{88}) &= -125411328000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{28} E_4^{64} E_6^{28} \\
W_q(M_{100}) &= -5056584744960000\left(E_4^3 - E_6^2\right)^{36} E_4^{81} E_6^{36}
\end{aligned}$$

Teorem 4.3.3. *Pretpostavimo da je $m = 12t + 4$ za neki $t \geq 1$. Napišimo bazu od M_m na sljedeći način:*

$$E_4\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ 0 \leq u \leq t.$$

Tada vrijedi:

$$W_q\left(E_4\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\quad 0 \leq u \leq t\right) = \lambda \cdot \Delta^{\frac{t(t+1)}{2}} E_4^{(t+1)^2} E_6^{\frac{t(t+1)}{2}},$$

za neku ne–nul konstantu λ.

Dokaz. Znamo da je za $m=12t+4$, $\dim(M_m)=t+1$. Stoga možemo odabrati neku drugu bazu $f_0,\ldots,f_t$ od M_m takvu da je $f_i=c_iq^i+d_iq^{i+1}+\cdots$, $0\le i\le t$, gdje su $c_i\neq 0, d_i,\ldots$ neko kompleksni brojevi. Vrijedi

$$\nu_{q-0}(f_0,\ldots,f_t)=0+1+2+\cdots+t=\frac{t(t+1)}{2}.$$

(Vidi Lemu 4.1.1 za definiciju od $\nu_{q-0}(f_0,\ldots,f_t)$.) Direktna primjena Teorema 4.1.3 daje

$$\nu_{\mathfrak{a}_\infty}\left(W_q\left(E_4\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ \ 0\le u\le t\right)\right)=\frac{t(t+1)}{2}.$$

Zbog Leme 4.3.2 znamo da je $\mathrm{div}(\Delta)=\mathfrak{a}_\infty$. Stoga dobijemo da je

$$f\overset{def}{=}W_q\left(E_4\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ \ 0\le u\le t\right)/\Delta^{\frac{t(t+1)}{2}}$$

ne–kasp modularna forma težine

$$l=(t+1)\cdot(12t+4+t)-12\frac{t(t+1)}{2}=(7t+4)(t+1).$$

Preostaje nam odrediti gore definiranu modularnu formu f. Prvo tražimo redove poništavanja Wronskiana

$$W_q\left(E_4\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ \ 0\le u\le t\right)$$

u eliptičkim točkama i i $e^{\pi i/3}=(1+i\sqrt{3})/2$, redova 2 i 3, respektivno. Zbog Leme 4.3.2 imamo da je

$$\mathrm{div}(E_4)=\frac{1}{3}\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2}\ \text{ i }\ \mathrm{div}(E_6)=\frac{1}{2}\mathfrak{a}_i.$$

To povlači da su redovi funkcije $E_4\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u}$ u točkama $(1+i\sqrt{3})/2$ i i jednaki $3u+1$ i $2(t-u)$, respektivno. Stoga Wronskian $W_q\left(E_4\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ \ 0\le u\le t\right)$ ima redove (vidi Propoziciju 4.1.2)

$$\begin{aligned}\nu_{\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2}}\left(W_q\left(E_4\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ \ 0\le u\le t\right)\right)&=\frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{u=0}^{t}(3u+1)-\frac{t(t+1)}{2}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\left(3\cdot\frac{t(t+1)}{2}+(t+1)-\frac{t(t+1)}{2}\right)=\frac{1}{3}(t+1)^2,\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\nu_{\mathfrak{a}_i}\left(W_q\left(E_4\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ \ 0\le u\le t\right)\right)&=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{u=0}^{t}2(t-u)-\frac{t(t+1)}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{t(t+1)}{2}-\frac{t(t+1)}{2}\right)=\frac{1}{4}t(t+1),\end{aligned}$$

Kako je $\operatorname{div}(\Delta) = \mathfrak{a}_\infty$ ovo povlači da je

$$\nu_{\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2}}(f) = \frac{1}{3}\cdot(t+1)^2,$$

i

$$\nu_{\mathfrak{a}_i}(f) = \frac{1}{4}\cdot t(t+1).$$

Stoga je

$$\operatorname{div}(f) = \frac{1}{3}(t+1)^2\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2} + \frac{1}{4}t(t+1)\mathfrak{a}_i.$$

Znamo da je $f \in M_{(7t+4)(t+1)}$. Modularna forma $E_4^{(t+1)^2}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}}$ pripada istom prostoru i ima isti divizor kao f. Stoga je njihov kvocijent funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi $X(1)$, divizora jednakog 0. Standardno znamo da je tada

$$\frac{f}{E_4^{(t+1)^2}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}}} \in L(0) = \mathbb{C},$$

pa je

$$f = \lambda\cdot E_4^{(t+1)^2}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}},$$

za neku ne–nul konstantu λ. ■

Za ostale Wronskiane baza od M_m, ispišimo prvo pripadne baze. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\text{Za } m = 12t \text{ baza od } M_m \text{ je oblika} && \left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ 0\le u\le t,\\
&\text{Za } m = 12t+2 \text{ baza od } M_m \text{ je oblika} && E_4^{-1}\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u}E_6,\ 1\le u\le t,\\
&\text{Za } m = 12t+4 \text{ baza od } M_m \text{ je oblika} && E_4\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ 0\le u\le t,\\
&\text{Za } m = 12t+6 \text{ baza od } M_m \text{ je oblika} && \left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u}E_6,\ 0\le u\le t,\\
&\text{Za } m = 12t+8 \text{ baza od } M_m \text{ je oblika} && E_4^2\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u},\ 0\le u\le t,\\
&\text{Za } m = 12t+10 \text{ baza od } M_m \text{ je oblika} && E_4\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u}E_6,\ 0\le u\le t,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Različiti izbori od m utiču na to da elementi kanonskih baza imaju različite redove u eliptičkim točkama $(1+i\sqrt{3})/2$ i i. To direktno utiče na redove pripadnog Wronskiana u $\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2}$ i $\mathfrak{a}_i$. Stavimo $\epsilon = (1+i\sqrt{3})/2$ i kreirajmo tablicu 4.1:

Slučaj $m = 12t+2$ je nešto drugačiji zbog manje dimenzije prostora. Vrijedi $\dim(M_{12t+2}) = t$. Stoga je red Wronskiana u kaspu $\mathfrak{a}_\infty$ jednak

$$\nu_{\mathfrak{a}_\infty}\left(W_q\left(E_4^{-1}\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u}E_6,\quad 1\le u\le t\right)\right) = \frac{(t-1)t}{2}.$$

Tablica 4.1: Tablica Wronskiana kanonskih baza

m	$\nu_{z-\epsilon}(\cdot)$	$\nu_{z-i}(\cdot)$	u	$\mathrm{div}(f)$	$W_q(M_m)$
$12t$	$3u$	$2(t-u)$	$0\le u\le t$	$\frac{1}{3}t(t+1)\mathfrak{a}_\epsilon+\frac{1}{4}t(t+1)\mathfrak{a}_i$	$\lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t+1)}{2}}E_4^{t(t+1)}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}}$
$12t+2$	$3u-1$	$2(t-u)+1$	$1\le u\le t$	$\frac{1}{3}t(t+1)\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2}+\frac{1}{4}t(t+1)\mathfrak{a}_i$	$\lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t-1)}{2}}E_4^{t(t+1)}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}}$
$12t+4$	$3u+1$	$2(t-u)$	$0\le u\le t$	$\frac{1}{3}(t+1)^2\mathfrak{a}_\epsilon+\frac{1}{4}t(t+1)\mathfrak{a}_i$	$\lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t+1)}{2}}E_4^{(t+1)^2}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}}$
$12t+6$	$3u$	$2(t-u)+1$	$0\le u\le t$	$\frac{1}{3}t(t+1)\mathfrak{a}_\epsilon+\frac{1}{4}(t+1)(t+2)\mathfrak{a}_i$	$\lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t+1)}{2}}E_4^{t(t+1)}E_6^{\frac{(t+1)(t+2)}{2}}$
$12t+8$	$3u+2$	$2(t-u)$	$0\le u\le t$	$\frac{1}{3}(t+1)(t+2)\mathfrak{a}_\epsilon+\frac{1}{4}t(t+1)\mathfrak{a}_i$	$\lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t+2)}{2}}E_4^{(t+1)(t+2)}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}}$
$12t+10$	$3u+1$	$2(t-u)+1$	$0\le u\le t$	$\frac{1}{3}(t+1)^2\mathfrak{a}_\epsilon+\frac{1}{4}(t+1)(t+2)\mathfrak{a}_i$	$\lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t+1)}{2}}E_4^{(t+1)^2}E_6^{\frac{(t+1)(t+2)}{2}}$

Na taj način je

$$f \overset{def}{=} W_q\left(E_4^{-1}\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u}E_6,\quad 1\le u\le t\right)/\Delta^{\frac{(t-1)t}{2}}$$

ne–kasp modularna forma težine

$$l=t(12t+2+t-1)-12\frac{(t-1)t}{2}=7t(t+1).$$

Stoga Wronskian $W_q\left(E_4^{-1}\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u}E_6,\quad 1\le u\le t\right)$ ima redove (vidi Propoziciju 4.1.2)

$$\begin{aligned}\nu_{\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2}}\left(W_q\left(E_4^{-1}\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u}E_6,\quad 1\le u\le t\right)\right)&=\frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{u=1}^{t}(3u-1)-\frac{(t-1)t}{2}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\left(3\cdot\frac{t(t+1)}{2}-t-\frac{(t-1)t}{2}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\left(3\cdot\frac{t(t+1)}{2}-\frac{t(t+1)}{2}\right)\\&=\frac{1}{3}t(t+1),\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\nu_{\mathfrak{a}_i}\left(W_q\left(E_4^{-1}\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u}E_6,\quad 1\le u\le t\right)\right)&=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{u=1}^{t}(2(t-u)+1)-\frac{(t-1)t}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{(t-1)t}{2}+t-\frac{(t-1)t}{2}\right)=\frac{1}{4}t(t+1),\end{aligned}$$

Kako je $\mathrm{div}(\Delta) = \mathfrak{a}_\infty$ ovo povlači da je

$$\mathrm{div}(f) = \frac{1}{3}t(t+1)\mathfrak{a}_{(1+i\sqrt{3})/2} + \frac{1}{4}t(t+1)\mathfrak{a}_i.$$

Analogno prijašnjim dokazima ovo povlači da je

$$W_q\left(E_4^{-1}\left(E_4^3\right)^u\left(E_6^2\right)^{t-u}E_6,\ \ 1 \le u \le t\right) = \lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t-1)}{2}}E_4^{t(t+1)}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}},$$

za neku ne–nul konstantu λ.

Na ovaj način smo izračunali vrijednost Wronskiana kanonske baze za M_m, gdje je $m = 12t+2$ (vidi tablicu 4.6). Račun za ostale vrijednosti od m je sličan. Razlika je samo u obliku baze (vidi tablicu 4.6) i vrijednostima divizora funkcije f (vidi tablicu 4.1). Na taj način imamo teorem:

Teorem 4.3.4. *Za kanonske baze prostora M_m dane u Tablici 4.6 imamo sljedeće vrijednosti pripadnih Wronskiana:*

$$\begin{aligned}
W_q(M_{12t}) &= \lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t+1)}{2}}E_4^{t(t+1)}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}},\\
W_q(M_{12t+2}) &= \lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t-1)}{2}}E_4^{t(t+1)}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}},\\
W_q(M_{12t+4}) &= \lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t+1)}{2}}E_4^{(t+1)^2}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}},\\
W_q(M_{12t+6}) &= \lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t+1)}{2}}E_4^{t(t+1)}E_6^{\frac{(t+1)(t+2)}{2}},\\
W_q(M_{12t+8}) &= \lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t+2)}{2}}E_4^{(t+1)(t+2)}E_6^{\frac{t(t+1)}{2}},\\
W_q(M_{12t+10}) &= \lambda\cdot\Delta^{\frac{t(t+1)}{2}}E_4^{(t+1)^2}E_6^{\frac{(t+1)(t+2)}{2}},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

gdje su vrijednosti od λ različite ne-nul konstante.

Za konstantu λ u Wronskianima oblika $W_q(M_{12t})$ uočena je pravilnost u obliku rekurzivne formule za njenu vrijednost. Imamo slutnju:

Slutnja 4.3.5. *Wronskian kanonske baze od $M_{k\cdot 12}$ jednak je*

$$W(M_{k\cdot 12}) = (-1)^?\ a_{k+1}\ (E_4^3 - E_6^2)^{k(k+1)/2}E_4^{k(k+1)}E_6^{k(k+1)/2},$$

gdje koeficijenti a_k zadovoljavaju rekurzivnu formulu

$$a_k = (k-1)\cdot a_{k-1}^2/a_{k-2}, \quad \textit{with} \ \ a_1 = 1, a_2 = 1.$$

Propozicija 4.3.6. *Rješenje gornje rekurzivne formule je*

$$a_k = \prod_{i=1}^{k-1} (k-i)^i = (k-1)\cdot(k-2)^2\cdot(k-3)^3\cdot\ldots\cdot(k-(k-2))^{k-2}\cdot(k-(k-1))^{k-1}.$$

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po k. Pretpostavimo da formula vrijedi za k.

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= k\cdot\frac{a_k^2}{a_{k-1}} \\
&= k\cdot\frac{\big((k-1)\cdot a_{k-1}^2/a_{k-2}\big)^2}{a_{k-1}} \\
&= k\cdot(k-1)^2\cdot\frac{a_{k-1}^3}{a_{k-2}^2} \\
&= k\cdot(k-1)^2\cdot\frac{\Big[\prod_{i=1}^{k-2}(k-1-i)^i\Big]^3}{\Big[\prod_{i=1}^{k-3}(k-2-i)^i\Big]^2} \\
&= k\cdot(k-1)^2\cdot\frac{\Big[(k-2)\prod_{i=2}^{k-2}(k-1-i)^i\Big]^3}{\Big[\prod_{i=1}^{k-3}(k-2-i)^i\Big]^2} \\
&= k\cdot(k-1)^2\cdot\frac{\Big[(k-2)\prod_{i=1}^{k-3}(k-1-(i+1))^{i+1}\Big]^3}{\Big[\prod_{i=1}^{k-3}(k-2-i)^i\Big]^2} \\
&= k\cdot(k-1)^2\cdot(k-2)^3\cdot\frac{\prod_{i=1}^{k-3}(k-2-i)^{3(i+1)}}{\prod_{i=1}^{k-3}(k-2-i)^{2i}} \\
&= k\cdot(k-1)^2\cdot(k-2)^3\cdot\prod_{i=1}^{k-3}(k-2-i)^{i+3} \\
&= k\cdot(k-1)^2\cdot(k-2)^3\cdot\prod_{i=3}^{k-1}(k-i)^{i+1} \\
&= \prod_{i=0}^{k-1}(k-i)^{i+1} \\
&= \prod_{i=1}^{(k+1)-1}((k+1)-i)^i.
\end{aligned}$$

■

Zaključak

Dali smo razne modele za krivulju $X(1)$. Na taj način smo dobili jednadžbe krivulja koje su biracionalno ekvivalentne krivulji $X(1)$. Kako su to sve ravninske krivulje, često su singularne. Koristili smo metodu koju je razvio G. Muić u člancima [19], [20, 21].

Razvijen je algoritam u matematičkom softwareu SAGE za provjeru jeli kasp $\mathfrak{a}_\infty$, m–Weierstrassova točka za krivulju genusa $g(\Gamma) \geq 3$ koja nije hipereliptička.

Izračunali smo jednadžbe homogenih polinoma svih kanonskih krivulja tipa $X_0(N)$, genusa $3 \leq g \leq 5$ koje nisu hipereliptičke. Dobivene jednadžbe posljedica su algoritma za računanje uređene baze prostora $S_m^H(\Gamma)$, za krivulje genusa ≥ 3, koje nisu hipereliptičke. Slično su radili S. Galbraith u [9, Chapter 3] svog doktorata, ali drugačijim metodama, kao i M. Shimura u [39].

Pod pojmom generalizirani Wronskian podrazumili smo poopćenje standardnog pojma Wronskiana kasp formi [34], ([29], 6.3.1), ([19], dokaz Teorema 4-5), i ([20], Lema 4-1). Razvijen je algoritam za račun Wronskiana linearno nezavisnih modularnih formi. U SAGE-u su izračunati Wronskiani kanonskih baza za $M_m(SL_2(\mathbb{Z}))$ za parne $m = 12, 14, 16, \ldots, 108, 110, 120$. Temeljem toga dokazan je teorem o vrijednosti tih Wronskiana za bilo koji parni m, do na neku ne–nul konstantu λ. Za $m = 12t$ iskazana je slutnja o vrijednosti konstante λ do na predznak.

Bibliografija

[1] Arbarello, E., M. Cornalba, P. A. Griffiths i J. Harris: *Geometry of Algebraic Curves, Volume I.* Springer-Verlag, 1985. ↑ 84.

[2] Atkin, A. O. L.: *Letter to A. Ogg (dated 9 Sept., 1974, received 17 April, 1975).* ↑ 2, 48.

[3] Atkin, A. O. L.: *Modular forms of weight one, and supersingular equations.* U.S.-Japan seminar on modular functions, Ann Arbor, June 1975. ↑ 2, 48.

[4] Atkin, A. O. L.: *Weierstrass points at cusps of X0(N).* Ann. of Math. **85** (1967), 42–45. ↑ 1, 2, 47, 48.

[5] Breuil, Christophe, Brian Conrad Fred Diamond i Richard L. Taylor: *On the modularity of elliptic curves over Q: wild 3-adic exercises.* 2001. ↑ 1.

[6] Csirik, J. A., J. L. Wetherell i M. E. Zieve: *On the Genera of $X_0(N)$.* preprint (arXiv:math/0006096). ↑ 88.

[7] Diamond, F. i J. Shurman: *A First Course in Modular Forms.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2005. ↑ 1.

[8] Farkas, H. M. i I. Kra: *Riemann surfaces.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 71. izdanje, 1992. ↑ 1, 12, 47, 49, 50, 51.

[9] Galbraith, S.: *Equations for modular curves, Ph.D. thesis.* Oxford, 1996. ↑ 2, 3, 84, 117.

[10] Harris, J.: *Algebraic Geometry: A First Course.* Springer-Verlag, 1992. ↑ 85.

[11] Kodrnja, I.: *η-quotients and embeddings of $X_0(N)$ in the projective plane.* Ramanujan Journal 46 (2018), no. 2, 509–524. ↑ 3.

[12] Kodrnja, I.: *On a simple model of* $X_0(N)$. Monatsh. Math. 186 (2018), no. 4, 653–661. ↑ 3.

[13] Kodrnja, I.: *Modeli modularnih krivulja, modularne forme i* η*-kvocijenti, Doktorski rad*. Zagreb, 2016. ↑ 3.

[14] Kunz, E.: *Introduction to Plane Algebraic Curves*. Birkhauser, 2005. ↑ 3.

[15] Lang, S.: *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 211, **3**, (2002). Springer-Verlag New York. ↑ 42.

[16] Lehner, J. i M. Newman: *Weierstrass points on Gamma0(N)*. Ann. of Math. **79** (1964), 360–368. ↑ 1, 2, 47, 48.

[17] Miranda, R.: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Graduate Studies in Mathematics **5**, 1995. ↑ 26, 28, 66.

[18] Miyake, T.: *Modular forms*. Springer-Verlag, 2006. ↑ iv, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 41, 42, 46, 52, 53.

[19] Muić, G.: *Modular curves and bases for the spaces of cuspidal modular forms*. Ramanujan J. **27**, 181—208, (2012). ↑ 3, 4, 22, 23, 24, 27, 91, 117.

[20] Muić, G.: *On degrees and birationality of the maps* $X_0(N) \to \mathbb{P}^2$ *constructed via modular forms*. Monatsh. Math. **Vol. 180, No. 3**, 607–629, (2016). ↑ 3, 4, 58, 91, 108, 117.

[21] Muić, G.: *On embeddings of curves in projective spaces*. Monatsh. Math. **Vol. 173, No. 2**, 239–256, (2014). ↑ 3, 117.

[22] Muić, G.: *Uvod u algebarsku geometriju*, 2020. URL: `https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/uag-pred20202021.pdf`. Last visited on 2020/12/02. ↑ 5, 85.

[23] Muić, G. i I. Kodrnja: *On primitive elements of algebraic function fields and models of* $X_0(N)$. Ramanujan J. **Vol. 55, No. 2**, 393–420, (2021).

[24] Muić, G. i D. Mikoč: *Birational maps of* $X(1)$ *into* $\mathbb{P}^2$. Glasnik Matematicki **Vol. 48**, No. 2, 301–312, (2013). ↑ 3, 25, 26, 28, 29, 30, 33, 38.

[25] Muić, G. i D. Mikoč: *On m–fold Holomorphic Differentials and Modular Forms.* manuscript (https://arxiv.org/abs/2101.00601). ↑ iv, 4, 52, 53, 58, 59, 66, 67, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 108.

[26] Ogg, A. P.: *Hyperelliptic modular curves.* Bull. Soc. Math. France 102 (1974), 449–462. ↑ 1, 47, 66, 87.

[27] Ogg, A. P.: *Weierstrass points on X0(N).* Illinois J. Math. **22** (1978), 31-35. ↑ 1, 2, 47, 48.

[28] Olsen, B. A.: *On Higher Order Weierstrass Points.* Ann. Math. **95** No. 2 (1972), 357–364.

[29] Ono, K.: *The Web of Modularity: Arithmetic of the Coefficients of Modular Forms and q–Series,.* Conference Board of the Mathematical Sciences **102**,. American Mathematical Society, 2004. ↑ 1, 4, 47, 91, 117.

[30] Petersson, H.: *Über Weierstrasspunkte und die expliziten Darstellungen der automorphen Formen von reeller Dimension.* Math. Z. **52** (1949), 32—59. ↑ 58.

[31] Petersson, H.: *Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art.* Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. **14** (1941), 22–60. ↑ 58.

[32] Petersson, H.: *Zwei Bemerkungen uiber die Weierstrasspunkte der Kongruenzgruppen.* Arch. Math., 2 (1950), 246–250. ↑ 2, 48.

[33] Rohrlich, D.: *Some remarks on Weierstrass points.* Number Theory related to Fermat's Last Theorem, Birkhauser Prog. Math. **26** (1982), 71-78. ↑ 1, 47.

[34] Rohrlich, D.: *Weierstrass points and modular forms.* Illinois J. Math **29** (1985), 134-141. ↑ 1, 4, 47, 91, 117.

[35] Schoeneberg, B.: *Über die Weierstrasspunkte in den Korpern der elliptischen Modulfunktionen.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 17 (1951), 104-111. ↑ 2, 48.

[36] Shafarevich, I.: *Basic Algebraic Geometry 1 - Varieties in Projective Space.* Springer, 2nd ed. izdanje, 1988. ↑ 5, 36.

[37] Shafarevich, I.: *Basic Algebraic Geometry 1 - Varieties in Projective Space*. Springer, 3nd ed. izdanje, 2013. ↑ 5, 36.

[38] Shimura, G.: *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions. Kanô Memorial Lectures 1.* Publications of the Mathematical Society of Japan 11. Tokyo : Iwanami Shoten; Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1971. ↑ 6, 41.

[39] Shimura, M.: *Defining Equations of Modular Cures X0(N).* Tokyo J. Math. **Vol. 79, No. 2**, (1995), 443–456. ↑ 3, 84, 117.

[40] Stein, W.: *Modular Forms, a Computational Approach.* Graduate Studies in Mathematics, **Vol. 97**. American Mathematical Society, 2007. ↑ 109.

Životopis

Damir Mikoč je rođen 2. svibnja 1966. godine u Zagrebu. Osnovnu i srednju školu završava u Kutini. Tijekom osmogodišnjeg i srednjoškolskog obrazovanja na natjecanjima iz astronomije, matematike i fizike postigao je značajne rezultate na nivou bivše države. Upisuje studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 1987. godine. Diplomirao je 1994. godine s radom Homološka algebra pod vodstvom prof. Mirka Primca i akademika M. Tadića.

Od listopada 1994. do kraja 1996. godine zaposlen je na Zavodu za primjenjenu matematiku na FER-u u Zagrebu, gdje je držao vježbe iz raznih kolegija. Za to vrijemo bio je član seminara za teoriju reprezentacija i kratko vrijeme seminara za konačne geometrije i grupe. Od početka 1997. do listopada 2011. godine radi u privredi. 1999. godine upisuje stari poslijediplomski studij matematike. Magistrirao je 2009. godine pod vodstvom akademika G. Muića s temom Divizori projektivnih mnogostrukosti i Serreova dualnost. Od listopada 2011. do prosinca 2014. radi kao asistent na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci, gdje je držao vježbe iz raznih kolegija. Od siječnja 2015. godine zaposlen je kao viši predavač na Odjelu za nastavničke studije u Gospiću, Sveučilišta u Zadru, gdje drži nastavu iz svih matematičkih kolegija.

Studira na doktorskom studiju matematike od listopada 2012. godine. Član je Seminara za unitarne reprezentacije i automorfne forme.

S G. Muićem objavio je znanstvenni rad *Birational maps of $X(1)$ into $\mathbb{P}^2$*, Glasnik Matematicki, **Vol. 48**, No. 2, 301–312, (2013). S G. Muićem napisao je i znanstveni rad *On m–fold Holomorphic Differentials and Modular Forms*, arXiv:2101.00601.

Objavio je stručni rad *Birch i Swinnerton-Dyerova slutnja*, math.e - Hrvatski matematički elektronički časopis, Broj 37, (2020), http://e.math.hr/broj37/mikoc. Objavio je stručni rad *O pravcu i što bi taj pojam značio u različitim svjetovima* , Zbornik 6. Dani Šime i Ante Starčevića (Učitelj – između tradicije i suvremenosti), (2019).