

# Koncept mase u specijalnoj teoriji relativnosti

---

**Kapustić, Karmen**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:879310>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-04**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Karmen Kapustić

KONCEPT MASE U SPECIJALNOJ TEORIJI  
RELATIVNOSTI

Diplomski rad

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Karmen Kapustić**

Diplomski rad

**Koncept mase u specijalnoj teoriji  
relativnosti**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Davor Horvatić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_  
2. \_\_\_\_\_  
3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2022.

Zahvaljujem se mentoru, izv. prof. dr. sc. Davoru Horvatiću na vodstvu, svim savjetima, prenesenom znanju, podršci i strpljenju tijekom pisanja ovog rada i tijekom studija.

Zahvaljujem se svojim roditeljima na bezuvjetnoj podršci.

Zahvaljujem se svima koji su vjerovali i još uvijek vjeruju u mene.

## Sažetak

Specijalnu teoriju relativnosti je 1905. godine predstavio Albert Einstein. Važan doprinos teoriji dali su Max Planck koji je predstavio relativističku količinu gibanja i Hermann Minkowski koji je doprinio njenoj geometrijskoj formulaciji. U ovome radu je pokazano da je masa jednaka u svim referentnim sustavima i da ne ovisi o brzini opažачa. Koncept relativističke mase koji se odnosi na masu koja se mijenja s brzinom je u neskladu s današnjom formulacijom specijalne teorije relativnosti koja je temeljena na geometrijskim svojstvima četverodimenzionalnog prostora vremena. Međutim, koncept relativističke mase još uvijek se koristi pri poučavanju specijalne teorije relativnosti u sklopu formalnog obrazovanja i u popularizaciji znanosti. Einstein nikada nije upotrebljavao relativističku masu iako se upravo njemu najčešće pripisuje. Einstein je u početku predstavio izraze za longitudinalnu i transverzalnu masu koji se mogu smatrati pretečama relativističke mase. Međutim, nakon što je Planck predstavio relativističku količinu gibanja, Einstein je u svim člancima i predavanjima o specijalnoj teoriji relativnosti naglasak stavljao na relativističke izraze za energiju i količinu gibanja. Iz izraza za relativističku količinu gibanja i ukupnu energiju, uz Lorentzove transformacije koje slijede iz geometrije prostora vremena proizlazi da je masa invarijantna veličina.

Ključne riječi: specijalna teorija relativnosti, geometrijska formulacija specijalne teorije relativnosti, masa, relativistička masa, odnos mase i energije, energija mirovanja, inercija

# The Concept of Mass in Special Relativity

## Abstract

In 1905 Albert Einstein introduced special relativity. Valuable contributions to the theory came from Max Planck who introduced the relativistic momentum. Hermann Minkowski introduced four-dimensional space-time, which is a key to the geometric formulation of special relativity. This thesis outlines the idea that mass is the same for all observers and independent of reference frame. The concept of relativistic mass refers to the mass of the object in motion that depends on its velocity. Today it is known that relativistic mass is at odds with the accepted kinematics that stems from the geometric formulation of special relativity. However, relativistic mass is still used, and many believe that consequently no harm is made. Widespread use of relativistic mass is found in education, both in schools and universities. Additionally, is used to a great extent for the popularization of science. The concept of relativistic mass is repeatedly ascribed to Einstein although he never established it. Initially, he did propose transverse and longitudinal mass which can be taken as the forerunners of relativistic mass. However, after Planck derived the expression for relativistic momentum, Einstein has forsaken those notions. In all of his future articles and lectures, Einstein put to the fore the relativistic expression for energy and momentum. Based on the relativistic expression for energy and momentum with the geometry of special relativity, mass is found to be Lorentz invariant i.e. the same in all reference frames for all observers.

Keywords: special relativity, geometric formulation of special relativity, mass, relativistic mass, mass-energy relation, rest energy, inertia

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Pojava koncepta mase u fizici</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Izraz <math>E_0 = mc^2</math></b>	<b>5</b>
3.1	Masa složenog sustava . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Relativistička masa</b>	<b>9</b>
4.1	Put do relativističke mase . . . . .	9
4.2	Relativistička masa i inercija . . . . .	13
4.3	Gravitacijska masa . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Geometrijska formulacija specijalne teorije relativnosti</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>Za i protiv relativističke mase</b>	<b>24</b>
6.1	Uloga relativističke mase u poučavanju specijalne teorije relativnosti .	27
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>29</b>
<b>8</b>	<b>Metodički dio</b>	<b>30</b>
8.1	Nastavna priprema: Postulati specijalne teorije relativnosti . . . . .	30

# 1 Uvod

Tema ovog rada je *Koncept mase u specijalnoj teoriji relativnosti*. U specijalnoj teoriji relativnosti se za koncept mase vežu dva značenja. Prvo je da se masa tijela povećava s brzinom gibanja tijela, a drugo je da je masa tijela konstantna. Masa koja bi se povećavala s brzinom tijela naziva se relativistička masa. Korištenje relativističke mase u poučavanju specijalne teorije relativnosti može dovesti do krivih ideja kod učenika i studenata. Glavni cilj ovog rada je pokazati da je masa jednaka za sve promatrače u svim referentnim sustavima i da koncept mase koja se povećava s brzinom nije dobro definiran i nije u skladu s prihvaćenom geometrijskom formulacijom specijalne teorije relativnosti.

Da bi se razumjela problematika ovog rada, u poglavlju 2 predstavljeno je kako je pojam mase uveden u fiziku i predstavljena su mnoga tumačenja pojma mase predlagana od 17. stoljeća do danas. Također obrazloženi su prijevori oko tumačenja pojma mase od kojih su mnogi još uvijek aktualni. Poglavlje 3 stavlja naglasak na ispravno tumačenje poznate Einsteinove relacije  $E_0 = mc^2$ . U njemu su predstavljeni svi bitni relativistički izrazi, uveden je pojam relativističke mase i pokazano je da on proizlazi iz krivog tumačenja veze između mase i energije.

Razlog tome što je koncept relativističke mase uspio opstati do danas leži u spletu okolnosti koje su pogodovale njegovom razvitku i pružile dobro tlo za puštanje korijenja. Čitav put do koncepta relativističke mase u današnjem obliku opisan je u poglavlju 4.

Specijalna teorija relativnosti je od svog prvog stupanja na scenu do danas stasala u dosljednu teoriju koja je bazirana na geometrijskim svojstvima četverodimenzionalnog prostora i vremena. U poglavlju 5 predstavljena je geometrijska formulacija specijalne teorije relativnosti i pokazano je da se koncept relativističke mase u nju ne uklapa. Za kraju, u poglavlju 6 su razmotreni neki argumenti u korist relativističke mase i na nekoliko primjera je objašnjeno kako se isti fizički problem drugačije može interpretirati ako se u pristupu koristi koncept relativističke mase i ako se on zaobilazi. Dio poglavlja 6 je posvećen korištenju koncepta relativističke mase u poučavanju specijalne relativnosti.

Posljednji dio rada je metodički dio u sklopu kojeg je napisana nastavna priprema na temu *Postulati specijalne teorije relativnosti*. U pripremi je detaljno metodički razrađeno na koji način bi se učenici upoznali s Michelson-Morleyevim eksperimentom i kako njegovi rezultati mogu poslužiti kao podloga za predstavljanje specijalne teorije relativnosti i postulata na kojima se ona temelji.



## 2 Pojava koncepta mase u fizici

Koncept mase, iako je od velike važnosti za fiziku, još do danas nije dobio tumačenje oko kojeg bi se svi jednoglasno složili. Koncept mase u fiziku je uveo Isaac Newton koji je u svojoj *Philosophiae naturalis principia mathematica* iz 1687. godine masu poistovjetio s količinom tvari i samim tijelom koje je sastavljeno od čestica čiji volumen je dobro definiran i koje su jednake prirode u svim tijelima.

Inercija za Newtona je unutarnje svojstvo tijela koje je proporcionalno količini tvari. Taj stav je direktna posljedica njegovog uvjerenja da su sve elementarne čestice međusobno jednake po prirodi i gustoći i da je inercija svake čestice proporcionalna njenom volumenu. Newton je također pretpostavio da je gravitacija svakog tijela sastavljena od gravitacije čestica od kojih je tijelo sastavljeno. Uz to navodi kako se ne može pretpostaviti da će tijela jednake težine, ali drugačije teksture i prirode (primjerice drvo i zlato) imati jednaku količinu tvari. Zbog toga Newton osmišljava način za otkrivanje veze između težine i količine tvari. Pomoću njihala je eksperimentalno pokazao da sva tijela padaju istom akceleracijom zbog gravitacijskog privlačenja sa Zemljom, neovisno o težini, prirodi ili teksturi tijela. Zatim primjenjujući svoj drugi zakon gibanja dolazi do tvrdnje da će omjer sila kojima Zemlja djeluje na neka dva tijela (sila teža) na danom mjestu biti jednak omjeru umnoška njihovih količina tvari i akceleracije. Budući da je akceleracija jednaka za oba tijela, Newton konačno zaključuje da je omjer težina na danom mjestu jednak omjeru količina tvari. Gledajući iz današnje perspektive Newton je zapravo pokazao da je omjer težina jednak omjeru inercija. Ipak, s Newtonove perspektive to je bio jako dobar argument koji je uvjerio njega i njegove nasljednike u proporcionalnost količine tvari i težine na svakom zadanom mjestu. To je po prvi puta dovelo do mogućnosti gledanja na sva tijela kao sastavljena od slične tvari što je bilo lako interpretirati i lako se moglo mjeriti jer su Newtonovi zaključci otvorili vrata mogućnosti odabira bilo kojeg tijela kao tijela koje sadrži jediničnu količinu tvari i određivanju broja takvih jedinica u bilo kojem tijelu. Time je količini tvari dano još jedno značenje, a to je broj identičnih čestica ili atoma u tijelu. Newtonova količina tvari se u svom originalnom značenju uvijek mjerila indirektno. Za bilo koja dva tijela omjer njihovih količina tvari jednak je je omjeru njihovih inercija, i omjeru njihovih težina. Prema Newtonu količina tvari u tijelu određuje njegovu inerciju, težinu i njegovo gravitacijsko djelovanje na druga tijela što je uvelike doprinijelo interpretaciji, predviđanju i ujedinjenju mehaničkih fenomena.

Nakon Newtona koncept mase je dalje razvijao Leonhard Euler s kojim se javila ideja o tome da je masa eksplicitno dinamički pojam. Euler je 1745. godine uspoređivao inerciju dvaju tijela uspoređivanjem sila potrebnih za njihovo ubrzavanje. Također je izjednačio masu i količinu tvari s količinom inercije. Temelj toga je zamišljena podjela tijela na čestice jednake inercije kojima se može odrediti broj što mu je omogućilo da masu i količinu tvari poistovjeti s količinom inercije. Svojim

tumačenjem pojma mase Euler je iza sebe ostavio nedoumice koje još uvijek nisu razriješene: znači li količina inercije samo tijelo koje se može podijeliti u jedinice jednake inercije ili se odnosi na inerciju kao odupiranje akceleraciji.

Od 1868. godine Ernst Mach ukazuje na to da je koncept količine tvari (sastavljeno od istih atoma) neodrživ zbog tada aktualnih otkrića na području kemije. Mjernim tehnikama Mach je definirao masu kao potpuno kinematički koncept bez ikakve potrebe za mjerenjem sile. Njegov zapis toga je

$$\frac{m}{m'} = - \left( \frac{\phi'}{\phi} \right). \quad (2.1)$$

U izrazu (2.1)  $\phi'$  i  $\phi$  su akceleracije tijela čije su mase  $m$  i  $m'$ . Akceleracije  $\phi'$  i  $\phi$  su posljedica međudjelovanja ovih dvaju tijela kada su postavljena jedno nasuprot drugome.

Mach je takvim tumačenjem pojma mase nastojao ujediniti inerciju i gravitacijsko privlačenje te eliminirati svaku povezanost s količinom tvari. Time je prvi puta u fizici masa eksplicitno dobila apstraktnu definiciju dinamičkog svojstva tijela. Matematičari William Kingdon Clifford i Karl Person su Machova mjerenja iskoristili kao odskočnu dasku za još radikalniji pristup pojmu mase tvrdeći da je masa samo puki broj koji predstavlja omjer akceleracija, ali ta reducirana definicija mase nikada nije zaživjela.

Na početku dvadesetog stoljeća javljaju se dva nova koncepta vezana uz tumačenje mase. Prvi od njih poistovjećuje masu s inercijom što je utemeljeno na prvim Eulerovim idejama o količini inercije. Eulerova ideja o količini inercije, za razliku od Newtonove ideje o količini tvari koja je stekla lošu reputaciju, bila je opće prihvaćena i zbog toga su mnogi fizičari u ono vrijeme masu jednostavno definirali kao inerciju. Takva definicija mase prvo se pojavila u udžbenicima i njezini dijelovi održali su se sve do danas.

Za opću prihvaćenost drugog koncepta zaslužan je Albert Einstein koji 1907. ističe podjelu na inercijsku i gravitacijsku masu čime otvara vrata novom pristupu tumačenja mase kao dinamičkog koncepta. Hermann Bondi je 1957. godine dodatno proširio klasifikaciju uvođenjem pojmova aktivne gravitacijske mase i pasivne gravitacijske mase koja je odgovarala prvotnoj Einsteinovoj gravitacijskoj masi. Definicija svake od tih masa utemeljena je na tehnikama njihovog mjerenja. Za sva mjerenja kao prototip uzima se standardni kilogram iz Sevresa. Za mjerenje inercijske mase prototip i tijelo nepoznate mase pritisnu se uz oprugu tako da ona bude sabijena. Pri puštanju tijela da se slobodno gibaju ona dobivaju akceleraciju, a omjer njihovih akceleracija je inverzno proporcionalan omjeru njihovih inercijskih masa. Na sličan način se prototip i tijelo nepoznate mase mogu usporediti pomoću vage s pomičnim utegom (kantara). U tom slučaju gleda se težina tijela što je osnova za mjerenje pasivne gravitacijske mase. Aktivna gravitacijska masa nekog tijela određuje se u odnosu na prototip uspoređivanjem gravitacijskih polja pojedinih tijela. Iako su definicije temeljene na mjerenjima ovih triju masa dovoljno jasne za njihovo razlikovanje,

ne nude potpuno objašnjenje kako bi se te tri mase trebale interpretirati u sklopu fizike tj. predstavljaju li tri mehanička svojstva tijela: inerciju, gravitacijsko privlačenje i težinu redom ili znače tijelo koje je izvor inercije, gravitacijskog privlačenja i težine. Za razumijevanje toga potrebno je promotriti kako se te tri mase koriste u fizici, a to konačno dovodi do zaključka da svaka masa znači zapravo tijelo koje se interpretira kao izvor određenog mehaničkoga svojstva. Iz toga se vidi da su Einstein i Bondi svojom definicijom mase ponovno aktualizirali dio Newtonove ideje da se masa zapravo tumači kao tijelo, a ne samo kao apstraktno svojstvo tog tijela.

Tumačenje pojma mase koje su dali Einstein i Bondi trenutno je dominantno u znanstvenim krugovima fizike zbog mnogih prednosti. To tumačenje je korisno, koherentno, znatno manje hipotetsko od Newtonovog tumačenja i konceptualno daje šire značenje od same inercije. Međutim, postoje i slabosti tog tumačenja. Jedna od njih je narušavanje jedinstvenosti koncepta mase razlaganjem na tri mase. Također je problem to što usvajanje tog pristupa ostavlja otvorenu mogućnost proširivanja tumačenja uvođenjem dodatnih masa koje bi ostale kvalitativno različite čak i u slučaju da se pokaže da su njihove brojčane vrijednosti uvijek jednake. Posljedica toga bilo bi dodatno udaljavanje od jedinstvenog koncepta mase prema kojem još uvijek postoji težnja.

Einstein je dao još jedan izuzetno važan doprinos dinamičkom tumačenju mase time što je konstatirao da je masa rezervoar energije i inzistirajući na ekvivalenciji mase i energije.

Definicije mase koje se javljaju u literaturi jasno pokazuju da ne postoji jedno tumačenje pojma mase oko kojeg bi se svi jednoglasno složili. Za neke fizičare masa još uvijek znači tijelo sastavljeno od čestica što povlači tumačenje mase kao količine tvari. Danas ta definicija mase prevladava u osnovnoškolskim udžbenicima iz fizike i također u udžbenicima iz kemije za sve razine učenja. Oprečno tome je tumačenje mase kao inercije što ograničava koncept mase i u sukobu je s ostalim značenjima. Primjerice, smisleno je govoriti o ekvivalenciji mase i energije, ali nije smisleno govoriti o ekvivalenciji inercije i energije. Masa općenito danas u fizici znači tvar i tijelo, a to je u sukobu s korištenjem mase kao inercije. Čak i autori koji masu prvobitno predstavljaju kao inerciju rijetko ostanu pri tome da pojam mase koriste samo kao svojstvo tijela, a ne kao tijelo [1].

Na temelju Maxwellovih jednadžbi, J.J. Thomson ukazuje na mogućnost da je inercija jednim dijelom zapravo elektromagnetske prirode, a 1902. je Max Abraham predložio da je inercija svih tijela potpuno elektromagnetska [1, 5]. Više o tome bit će rečeno u poglavlju 4. Do velikog zaokreta u nesuglasicama oko tumačenja pojma mase dolazi s Einsteinovom specijalnom teorijom relativnosti jer se javlja ideja o relativističkoj masi koja se povećava s brzinom. Ta ideja je rezultat nekonzistentne primjene relativističkih formula, krivog tumačenja relacije o ekvivalentnosti mase i energije i još uvijek nerazriješena dvojba oko tumačenja mase kao inercije. Više o tome bit će rečeno u ostatku rada.

### 3 Izraz $E_0 = mc^2$

Na temelju standardnog modela sva zbivanja u prirodi se mogu svesti na interakcije elementarnih čestica: masenih poput protona i elektrona, lakih kao što su neutriini i bezmasenih kao što su fotoni. Energija  $E$  i količina gibanja  $\mathbf{p}$  izoliranog sustava čestica pri takvim interakcijama ostaju očuvani. Relacija (3.1) koja povezuje energiju  $E$  i količinu gibanja  $\mathbf{p}$  takvog sustava s njegovom masom  $m$  jedna je od temeljnih jednadžbi specijalne teorije relativnosti. Iz nje slijedi da je masa takvog sustava dana energijom i količinom gibanja sustava kao što je prikazano izrazom (3.2) [3].

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \quad (3.1)$$

$$m^2 = \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{p}{c}\right)^2 \quad (3.2)$$

Druga bitna jednadžba specijalne teorije relativnosti koja povezuje količinu gibanja i brzinu je (3.3). Obje jednadžbe vrijede za slobodno tijelo (slobodnu česticu) [2].

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2}\mathbf{v} \quad (3.3)$$

Te su jednadžbe u skladu s centralnom idejom specijalne teorije relativnosti o četverodimenzionalnom prostorvremenu koje je predstavio Minkowski, a detaljnije će biti razrađena u poglavlju 5. U četverodimenzionalnom prostorvremenu položaj čestice u prostoru  $\mathbf{r}$  i položaj čestice u vremenu  $t$  tvore četverovektor čije komponente imaju iste dimenzije:  $(ct, \mathbf{r})$  ili  $(t, \mathbf{r}/c)$ . Sukladno tome  $E$  i  $\mathbf{p}c$  su komponente četverovektora, a masa  $m$  je skalar, što znači da ima jednaku vrijednost u svim referentnim sustavima i ne ovisi o brzini [3].

Jednadžba (3.3) može se lako dobiti pomoću izraza (3.4) za ukupnu relativističku energiju i izraza (3.5) za relativističku količinu gibanja pri čemu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$$E = \gamma mc^2 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} \quad (3.5)$$

Brzina  $\mathbf{v}$  koja se javlja u izrazima (3.3), (3.5) i u definiciji faktora  $\gamma$  je brzina čestice u sustavu inercijalnog opažачa, a  $c$  je brzina svjetlosti.

Iz definicije mase dane izrazom (3.1) u slučaju kada  $v = 0$  što povlači  $p = 0$  [2, 3], slijedi da je energija čestice koja miruje dana izrazom (3.6) gdje  $E_0$  označava energiju mirovanja.

$$E_0 = mc^2 \quad (3.6)$$

Zbog krive interpretacije Einsteinovih radova jednadžba (3.6) je postala poznata kao jednadžba (3.7). Te dvije jednadžbe imaju potpuno drugačije značenje jer  $E_0$  iz jednadžbe (3.6) je energija mirovanja (energija tijela koje miruje, unutarnja energija), a  $E$  iz jednadžbe (3.7) je ukupna energija. To je doprinijelo ideji relativističke mase koja se povećava s brzinom [3]. Masa  $m$  koja se javlja u jednadžbi (3.7) je relativistička masa definirana izrazom (3.8).

$$E = mc^2 \quad (3.7)$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (3.8)$$

Paralelno s idejom relativističke mase javio se i pojam mase mirovanja koja se označava s  $m_0$ , a predstavlja masu tijela koje miruje. Prema tome bi masa  $m$  koja se javlja u jednadžbi (3.6) trebala biti upravo masa mirovanja.

U svom drugom radu o relativnosti iz 1905. godine Albert Einstein je razmatrao tijelo energije  $E$  koje miruje i emitira dva svjetlosna vala u suprotnim smjerovima [2, 5]. Svjetlosni valovi moraju biti u suprotnim smjerovima zbog zakona očuvanja količine gibanja budući da tijelo miruje prije i nakon emitiranja svjetlosnih valova. Na temelju ideje da je masa tijela mjera energije koju tijelo sadrži Einstein zaključuje da ako se energija tijela promijeni za  $L$ , masa tijela će se promijeniti za  $L/c^2$ . Uz krivu interpretaciju tog zaključka dolazi se do jednadžbe  $\Delta E = \Delta mc^2$  koja vodi na izraz (3.7) gdje  $E$  je ukupna energija i pojam relativističke mase koji u to doba još nije bio razvijen u današnjem obliku. Bitno je uočiti da je u ovom misaonom eksperimentu Einstein promatrao tijelo koje miruje prije i nakon emitiranja svjetlosnih valova. To vodi k drugačijoj interpretaciji Einsteinovog zaključka: promjena energije tijela uzrokuje promjenu mase mirovanja što se može zapisati kao  $\Delta m_0 = L/c^2$ , a budući da  $E = E_0$  jer tijelo miruje vrijedi  $L = \Delta E_0$ . Iz toga proizlazi  $\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2$  što uz prihvatanje toga da je masa mirovanja zapravo jedina masa konačno daje izraz (3.6). Kada je Einstein pisao svoje prve radove, pojam energija mirovanja još nije imao definiciju koju ima danas i zato ga Einstein nije koristio. Da je energija o kojoj Einstein govori upravo energija mirovanja jasno se vidi po naglašavanju da tijelo o kojem govori miruje [5].

Ispravno je u jednadžbi (3.6) isto kao i u jednadžbi (3.1) napisati masu kao  $m$ , a ne kao  $m_0$ . Također je ispravno tu masu tumačiti kao i u klasičnoj fizici kao invarijantnu veličinu. Za odgovor na pitanje zašto je ispravno koristiti masu  $m$  umjesto  $m_0$  potrebno je razmotriti slučaj kada  $v \ll c$  u kojem se količina gibanja dana izrazom (3.3) svodi na klasični izraz kao što je prikazano izrazom (3.9).

$$\mathbf{p} \simeq \mathbf{v} \frac{E_0}{c^2} = m\mathbf{v} \quad (3.9)$$

Kada se klasični izraz za količinu gibanja uvrsti u izraz (3.1) za ukupnu energiju, razvojem u red dobiva se

$$E = E_0 + E_{\text{kin}} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots \quad (3.10)$$

Kada se uzme u obzir da je ukupna energija zbroj energije mirovanja i kinetičke energije vidi se iz izraza (3.10) da u nerelativističkoj granici  $v \ll c$  relativističke jednadžbe daju izraze za količinu gibanja i kinetičku energiju

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m},$$

koji su već poznati iz klasične fizike [2]. To znači da masa  $m$  u relativističkim izrazima mora biti jednaka masi u klasičnoj fizici. Relativistička notacija ne bi se poklapala s nerelativističkom da se u relativističkim izrazima koristi masa  $m_0$  umjesto mase  $m$ .

Masa je invarijantna veličina i jednaka je u različitim referentnim sustavima, a energija je komponenta četverovektora  $(E, \mathbf{p}c)$  i nije jednaka u različitim referentnim sustavima. Zbog toga je pojam energije mirovanja dobar i njegovo je korištenje opravdano, a korištenje pojma mase mirovanja nije opravdano. Indeks 0 u  $E_0$  označava sustav u kojem tijelo miruje.

U slučaju kada  $m = 0$  iz jednadžbi (3.1) i (3.3) proizlazi da je brzina tijela jednaka brzini svjetlosti:  $v = c$  u svim referentnim sustavima. To znači da za takva tijela ne postoji referentni sustav u kojem miruju. U skladu s time takva tijela nemaju energiju mirovanja već je njihova energija potpuno kinetička. Jednadžbe (3.1) i (3.3) daju kinematički opis slobodnih tijela za sve brzine od 0 do  $c$ , a iz njih direktno slijedi jednadžba (3.6) prema kojoj je masa konstantna i foton je bezmaseni. Prema jednadžbi (3.7) masa općenito ovisi o energiji, a time i o brzini, a masa fotona je  $m = E/c^2$  što nije točno jer je foton bezmasena čestica. Međutim, u specijalnoj teoriji relativnosti bezmaseni foton može prenositi masu različitu od nule. Ako tijelo apsorbira bezmaseni foton energije  $E$  masa tijela će se povećati za  $E/c^2$  samo ako je porast kinetičke energije tijela zbog apsorpcije fotona zanemariv [2].

### 3.1 Masa složenog sustava

Einstein je razmatrajući složeni fizički sustav ustanovio da se ponaša kao materijalna točka mase  $M$  koja ovisi o energiji koju sustav sadrži. Ta ovisnost je opisana formulom

$$M = \mu + \frac{E_0}{c^2} \quad (3.11)$$

u kojoj  $M$  je masa koja se može izmjeriti (prividna masa),  $\mu$  je stvarna masa (ukupna masa dijelova sustava) i  $E_0$  je unutarnja energija sustava (zbroj kinetičke i potencijalne energije). Ishodišna točka za  $E_0$  se može odabrati proizvoljno i zbog toga nije moguće razlikovati prividnu masu od stvarne mase. Dio  $\mu c^2$  se može priključiti  $E_0$ , jer je odabir ishodišne točke za  $E_0$  proizvoljan, i tada izraz (3.11) postaje

$$M = \frac{E_0}{c^2}$$

iz čega se lako može iščitati da je  $E_0$  zapravo energija mirovanja. Energija mirovanja sustava interagirajućih čestica obuhvaća unutarnju potencijalnu energiju, unutarnju kinetičku energiju i energiju koja dolazi od mase čestica koje sačinjavaju sustav [5].

Kada se složeni sustav promatra iz referentnog sustava u odnosu na kojeg se jednoliko giba, njegova ukupna energija je prema Einsteinu dana izrazom (3.4). Kinetička energija translacijskog gibanja sustava kao cjeline ne doprinosi masi sustava. U slučaju kada bi translacijska kinetička energija doprinosila masi sustava, masa bi bila funkcija brzine, a i sam Einstein je tu ideju odbacio [5]. Povećanje mase koje se za složeno tijelo (ili sustav) može izmjeriti iz referentnog sustava koji se giba s tijelom je stvarno kada dolazi od kinetičke energije dijelova tijela [4]. Kinetička energija čestica koje sačinjavaju tijelo i koje se nasumično gibaju dio je unutarnje energije samog tijela i time utječe na njegovu masu. Kao primjer može se razmotriti idealni monoatomni plin u spremniku koji miruje u inercijalnom referentnom sustavu. Ako se unutarnja energija plina poveća za  $\Delta U$ , masa plina će se povećati za  $\Delta U/c^2$ . Pobjornici relativističke mase tumače da to povećanje mase idealnog plina dolazi od povećanja relativističke mase atoma koji sačinjavaju plin [8]. Ispravno je povećanje mase složenog sustava tumačiti na temelju povećanje unutarnje energije, a ne na temelju povećanja relativističke masa pojedinih čestica koje sačinjavaju sustav [4].

Einstein navodi da je, promatrano iz koordinatnog sustava koji se giba s tijelom, masa tijela zapravo energija koju tijelo posjeduje [4]. Zato je masu prirodno promatrati kao rezervoar energije i pretpostaviti da se energija mirovanja može pretvoriti u neki drugi oblik energije budući da je takva pretvorba jedno od glavnih svojstava energije. Zbog toga je Einstein bio protiv ideje očuvanja mase koja dolazi iz klasične fizike i zagovarao je ideju da se zakon očuvanja mase spoji sa zakonom očuvanja energije [5].

## 4 Relativistička masa

Kada djeluje sila na nabijenu sferu ona akcelerira. Budući da pri tome sa sferom akcelerira i njezino električno polje inducira se magnetsko polje. Inducirano magnetsko polje se prema Lenzovom pravilu opire akceleraciji sfere koja ga je uzrokovala. Iz toga se može zaključiti da postoji elektromagnetska inercija na što je 1881. godine ukazao J.J. Thomson koji je zaslužan za otkriće elektrona. Veliki broj znanstvenika je nastavio tu ideju dalje razvijati primjenjujući Maxwelllove jednadžbe i Newtonove zakone na specifične modele elektrona jer su vjerovali da je razumijevanje elektrona ključno u razumijevanju tvari općenito zbog pretpostavke da je sva tvar nabijena [6]. Otkriće protona (1919.) koji je imao naboj suprotan naboju elektrona, a veću inerciju nego elektron i otkriće neutrona (1932.) koji nije bio nabijen učinilo je ideju elektromagnetske inercije neodrživom [1].

Elektromagnetska inercija spojena s neslaganjem oko tumačenja mase kao inercije bila je početak dugačkoga puta do relativističke mase.

### 4.1 Put do relativističke mase

Hendrik Antoon Lorentz je u svom radu iz 1899. godine razmatrao stacionarni eter (sredstvo koje može vibrirati) i male nabijene čestice ili ione koji se kroz njega gibaju. Lorentz je zaključio da će isti ion u slučaju kada su vibracije etera paralelne brzini iona imati drugačiju masu nego u slučaju kada su vibracije etera okomite na brzinu iona, a masa iona ovisi o brzini u oba slučaja [5,6]. Walter Kaufmann je 1901. godine izveo prva mjerenja koja su trebala pokazati ponaša li se masa nabijenog tijela onako kako je predvidio Lorentz. Kaufmann je u svom eksperimentu koristio elektrone velikih brzina emitirane iz uzorka radija koji su bili ubrzani lokalnim električnim poljem  $E$  okomitim na snop elektrona, a pomoću konstantnog magnetskog polja  $B$  paralelnog s  $E$  dobivena je kružna putanja elektrona. Radijus putanje ovisi o količini gibanja elektrona, a brzina elektrona može se odrediti ako je poznat iznos električnog polja kojim su elektroni ubrzani. To je omogućilo Kaufmannu da uz određivanje točke u koju je udario elektron na ploči s filmom i poznavanje iznosa polja  $E$  i  $B$  izračuna omjer naboja i mase elektrona:  $e/m$ . Dobiveni rezultati su pokazali da omjer  $e/m$  ovisi o brzini elektrona. Pri evaluaciji rezultata eksperimenta Kaufmann je koristio izraze za elektromagnetsku energiju različitih raspodjela naboja koje se gibaju. Te izraze je 1897. godine izveo George F.C. Searle. Njegov pristup računanju energije vodio je na elektromagnetsku masu koja ovisi s brzinom iako ju Searle nije eksplicitno izračunao [5].

U tumačenju rezultata Kaufmannovog eksperimenta ključna je definicija količine gibanja. Max Planck je do izraza (4.1) za relativističku količinu gibanja čestice koji je već predstavljen u poglavlju 3 došao 1906. godine krenuvši od elektrodinamike i



koristeći Lagrangeov i Hamiltonov formalizam mehanike [5, 6].

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\mathbf{v}\gamma \quad (4.1)$$

Planckov rezultat upućuje na to da količina gibanja zapravo nije linearna funkcija brzine kao u klasičnoj fizici, a masa čestice je konstantna i ne ovisi o smjeru. Kada se uzme u obzir relativistički izraz za količinu gibanja Kaufmannov eksperiment zapravo pokazuje da se količina gibanja elektrona mijenja nelinearno s njegovom brzinom, a omjer  $e/m$  je konstantan. Za objašnjenje Kaufmannovog eksperimenta korišten je klasičan izraz na količinu gibanja:  $p = mv$  jer u to vrijeme relativistički izraz još nije bio poznat. Direktna posljedica toga je zaključak da se omjer  $e/m$  smanjuje s brzinom [5].

Odgovor na pitanje koliki dio mase elektrona je zapravo elektromagnetskog podrijetla ponudio je Max Abraham koji je tvrdio da je masa elektrona u potpunosti elektromagnetska. Abraham je modelirao elektron kao jednoliko nabijenu krutu sferu koja se giba u sveprisutnom eteru. Mehaničku masu elektrona je označio s  $m$ , a elektromagnetsku masu s  $\mu$  kako bi ih se lakše razlikovalo [5, 6]. Abraham je 1903. godine definirao elektromagnetsku *transverzalnu masu*  $\mu_{\perp}$  elektrona za akceleraciju okomitu na smjer gibanja tj. na brzinu elektrona i *longitudinalnu masu*  $\mu_{\parallel}$  za akceleraciju paralelnu s brzinom elektrona. Obje mase su definirane kao omjer derivacije količine gibanja elektrona i njegove akceleracije. Abraham je transverzalnu i longitudinalnu masu napisao pomoću  $\mu_0$  što je označavalo masu na malim brzinama. Oba izraza su bila složene funkcije brzine. Za male brzine te funkcije postaju međusobno jednake i vrijedi:  $\mu_{\perp} = \mu_{\parallel} = \mu_0$  [6].

U radu iz 1904. godine Lorentz je modelirao elektron kao malu nabijenu sferu koja osjeća efekt kontrakcije duljine pri kretanju kroz eter [5, 6]. Lorentz je izveo izraze za longitudinalnu i transverzalnu masu koji su bili znatno jednostavniji od Abrahamovih. Prema Lorentzu transverzalna masa je  $m_0\gamma$ , a longitudinalna masa je  $m_0\gamma^3$ . Budući da su postojale dvije teorije, Abrahamova i Lorentzova, koje su predviđale različite izraze za transverzalnu i longitudinalnu masu Kaufmann je od 1902. do 1903. izveo niz eksperimenata sa svrhom pronalaska konačnog rješenja. Elektoni u Kaufmannovim eksperimentima su se gibali stalnom brzinom po približno kružnoj putanji u ravnini okomitoj na smjer magnetskog polja. Akceleracija elektrona u eksperimentu je bila okomita na njihovu brzinu jer magnetska sila koja je proporcionalna vektorskom produktu vektora brzine i vektora magnetskog polja je bila okomita na brzinu elektrona i magnetsko polje. Zbog toga je Kaufmann u svojim eksperimentima mogao mjeriti samo transverzalnu masu koja je definirana za akceleraciju okomitu na brzinu elektrona. Lorentzov rezultat za transverzalnu masu odgovarao je Kaufmannovim mjerenjima, ali ne tako dobro kao Abrahamov rezultat [5].

Einstein je svoj prvi članak o relativnosti objavio kada je koncept elektromagnetske mase koja ovisi o brzini već bio razvijen [5]. Prvi Einsteinov članak o relativnosti koji je objavljen u lipnju 1905. godine nazvan je *O elektrodinamici tijela u gibanju*.

U završnom dijelu članka Einstein je pristupio problemu elektrona koji se giba bez pretpostavki o njegovoj strukturi primjenjujući Maxwelllove jednadžbe i svoju novu teoriju. Pretpostavivši da  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  umjesto  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ , Einstein je izveo izraze za longitudinalnu i transverzalnu masu koje su ovisile o brzini. Einstein je svoje rezultate predstavio u sljedećem obliku:

$$\text{transverzalna masa} = \mu(1 - v^2/c^2)^{-1}$$

$$\text{longitudinalna masa} = \mu [(1 - v^2/c^2)^{-1/2}]^3$$

gdje  $\mu$  je masa elektrona kada se giba sporo [5, 6]. Kada se u Einsteinovim izrazima prepozna faktor  $\gamma$  definiran u poglavlju 3 desna strana jednadžbi može se napisati u kompaktnijem obliku:

$$\text{transverzalna masa} = \mu\gamma^2$$

$$\text{longitudinalna masa} = \mu\gamma^3.$$

Einstein je umanjio važnost tih rezultata prema Hechtu [6] navodeći da (u prijevodu): "Drugom definicijom sile i akceleracije dobili bismo drugačije izraze za mase." To ukazuje na činjenicu da se ovisnost mase o brzini može dobiti na temelju definicije, ali nije ključni rezultat specijalne teorije relativnosti [4].

Einsteinov rezultat za transverzalnu masu nije se poklapao s Lorentzovim rezultatom  $\mu\gamma$ , a izrazi za longitudinalnu masu koja se nije mogla mjeriti u eksperimentima su bili jednaki. Einstein je mogao drugačijom definicijom sile doći do jednakog rezultata za transverzalnu masu kao i Lorentz, ali nije budući da vjerojatno nije bio upoznat s Lorentzovim rezultatima [6]. Einstein je uspješno pokazao da njegova nova teorija može iznjedriti slične rezultate kao i Abrahamov tradicionalni pristup, a upravo to je možda bila i namjera [5, 6]. Einsteinovu formulu za transverzalnu masu je 1906. godine kada je i predstavio relativističku količinu gibanja ispravio Planck tako da se poklapala s Lorentzovom. Iako su izrazi za transverzalnu i longitudinalnu masu predviđeni sukobljenim teorijama (Einsteinova i Lorentzova) matematički jednaki, Einsteinove formule su posljedica kinematičkih transformacija vremena i prostora, a Lorentzove formule dolaze od pretpostavljenih promjena u strukturi elektrona [4].

Transverzalna i longitudinalna masa su direktne posljedice Einsteinove pretpostavke  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Ispravni zapis drugog Newtonovog zakona je

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (4.2)$$

a  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  je samo aproksimacija koja vrijedi na malim brzinama. Da je Einstein 1905. godine krenuo od izraza (4.2) i upotrijebio relativističku količinu gibanja ne bi dobio dvije mase koje ovise o brzini. Koristeći izraz (4.2) i deriviranjem relativističke količine gibanja  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma$  dobiva se da odnos sile  $\mathbf{F}$  i akceleracije  $\mathbf{a}$  ovisi o smjeru sile naspram brzine  $\mathbf{v}$ . Za slučaj kada je sila okomita s brzinom dobije se  $\mathbf{F}_\perp = \gamma m \mathbf{a}_\perp$ , a za slučaj kada je sila paralelna s brzinom dobije se  $\mathbf{F}_\parallel = \gamma^3 m \mathbf{a}_\parallel$  [5]. Ovi rezultati ukazuju na to da u općenitom slučaju  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  nije vjerodostojan prikaz sile.

Planckov pristup specijalnoj teoriji relativnosti imao je veliki utjecaj na Einsteina koji nakon 1906. godine nikada više nije spominjao transverzalnu i longitudinalnu masu. U članku iz prosinca 1907. godine koji je bio pregled specijalne teorije relativnosti Einstein je rekonstruirao svoje izvode za elektron koji se giba iz 1905. u duhu Planckovih ideja. Kako navodi Hecht [5], Einstein je tada ustanovio da je sila definirana kao u Planckovoj studiji, dakle kao što je prikazano izrazom (4.2). Formulacija jednadžbi gibanja za materijalnu točku koje jasno odražavaju analogiju s klasičnim jednadžbama gibanja također je preuzeta od Plancka. Budući da je Einstein koristio relativističku količinu gibanja transverzalna i longitudinalna masa se u njegovoj analizi tog puta nisu pojavile. Od tada je čak i u općoj relativnosti Einstein najveći značaj davao relativističkim izrazima za energiju i količinu gibanja. U svom radu iz 1907. Einstein se također osvrnuo na rezultate Kaufmannovih eksperimenata navodeći da Abrahamova teorija daje predviđanja koja se znatno bolje slažu s rezultatima eksperimenata od predviđanja specijalne teorije relativnosti. Međutim, zbog pretpostavke o masi elektrona u gibanju koja nije u skladu s teorijom koja obuhvaća širi spektar fenomena Abrahamova teorija nema dovoljno čvrste temelje da bi bila vjerodostojna. Teorija koja obuhvaća širi spektar fenomena je upravo specijalna teorija relativnosti koja u prvi plan stavlja relativističke jednadžbe za energiju i količinu gibanja [5].

Pojam relativističke mase

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0\gamma \quad (4.3)$$

danas se odnosi na masu koja se povećava s brzinom u odnosu na mirujućeg opažača [7]. Izraz za relativističku masu mnogi pripisuju Einsteinu iako je u brojnim radovima, održanim predavanjima i knjigama Einstein izveo relativističke izraze za ukupnu energiju, kinetičku energiju, energiju mirovanja i količinu gibanja, a izraz za relativističku masu nije. Relativističku masu u obliku koji se danas koristi direktno iz dinamike izveli su Gilbert Lewis i Richard Tolman promatrajući različite vrste sudara u razdoblju od 1908. do 1912. Lewis i Tolman su definirali silu kao derivaciju količine gibanja po vremenu kao što prikazuje izraz (4.2) i pretpostavili su da je količina gibanja dana jednakim izrazom kao u klasičnoj fizici:  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  zanemarujući Planckovu relativističku količinu gibanja. Uz tu pretpostavku primijenili su klasične zakone očuvanja mase i očuvanja količine gibanja u skladu s Lorentzovim transformacijama. S tim korakom su Lewis i Tolman napravili još jednu pogrešku budući da je Einstein tada već bio ukazao na to da zakon očuvanja mase nekog sustava vrijedi samo kada je energija tog sustava konstantna, a masa općenito nije očuvana [6]. Konačni rezultat bio je izraz za masu koja ne ovisi o smjeru kao što ovise transverzalna i longitudinalna masa i povećava se s brzinom. Budući da je Lewisova i Tolmanova masa bila identična Lorentzovoj transverzalnoj masi mnogi su je prihvatili raširenih ruku iako je bila kombinacija klasičnih i relativističkih ideja. Također, relativistička masa je istisnula iz uporabe transverzalnu i longitudinalnu masu. Prema Hechtu [5,6] nije poznato tko je točno masu koju su izveli Lewis i Tolman nazvao *relativistička masa*,

moгуće da je to bio Born 1920. godine. Relativistička masa je u kratkom vremenu dobila status temeljne ideje specijalne teorije relativnosti. Značajan doprinos tome dao je Wolfgang Pauli koji je 1921. godine objavio enciklopedijski članak koji je danas poznat kao knjiga o teoriji relativnosti. Pauli je tada odbacio pojmove transverzalne i longitudinalne mase proglašivši ih zastarjelima, a zadržao je pojmove mase mirovanja  $m_0$  i relativističke mase  $m = m_0\gamma$  uz klasičnu količinu gibanja  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Ta Paulijeva knjiga bila je temeljna literatura za uvod u specijalnu teoriju relativnosti mnogim generacijama fizičara i podarila je dugovječnost pojmu mase koja ovisi o brzini, pojmu mase mirovanja i krivoj formuli  $E = mc^2$  [2].

U privatnom pismu kojeg je Einstein 1948. poslao Lincolnu Barnettu prema Okunu [2] i Hechtu [5, 6] napisao je da nije dobro predstavljati koncept mase  $M = m(1 - v^2/c^2)$  tijela koje se giba jer nije moguće dati jasnu definiciju mase  $M$ . Bolje je predstaviti samo koncept mase mirovanja  $m$ , a umjesto  $M$  koristiti izraze za energiju i količinu gibanja. Iz toga se jasno vidi da je Einstein bio dobro upoznat s pojmom relativističke mase i da ga nikada nije prihvatio.

## 4.2 Relativistička masa i inercija

U općenitom slučaju kada sila  $\mathbf{F}$  na tijelo djeluje u nekom proizvoljnom smjeru tako da nije niti paralelna niti okomita na smjer gibanja tijela na temelju izraza (4.2), relativističke količine gibanja i definicije akceleracije  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  dobiva se da je odnos između sile i akceleracije dan izrazom

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{m\gamma} \quad (4.4)$$

u kojem

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

Izraz (4.4) ukazuje na to da u općenitom slučaju akceleracija nije paralelna sa silom već ima neiščezavajuću komponentu u smjeru brzine tijela [2]. U klasičnoj mehanici izraz (4.4) se svodi na

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (4.5)$$

U slučaju kada akceleracija nije u smjeru sile za inerciju tijela u gibanju iz definicije  $I = F/a$  proizlazi izraz

$$I = \frac{m_{\perp}}{1 - v^2 \cos^2 \theta / c^2} \quad (4.6)$$

u kojem je  $v$  brzina kojom se tijelo giba u odnosu na opažača i  $\theta$  je kut između vektora sile i vektora brzine. Inercija opisana izrazom (4.6) je svojstvo tijela zbog ovisnosti o  $m_{\perp}$ , svojstvo opažača zbog ovisnosti o  $v$  i svojstvo onog tko djeluje silom zbog ovisnosti o  $\theta$ . Izraz (4.6) za inerciju dobiven je na temelju relativističkih jednadžbi. Zbog njegove složenosti Adler [4] smatra da je bolje preskočiti uvođenja koncepta inercije koji bi bio u skladu sa specijalnom teorijom relativnosti.

Za slučaj kada sila na tijelo djeluje okomito na smjer gibanja tijela definirana je transverzalna masa  $m_{\perp} = m_0\gamma$  i može se napisati jednačica

$$F_{\perp} = m_{\perp}a, \quad (4.7)$$

a za slučaj kada je sila paralelna sa smjerom gibanja tijela definirana je longitudinalna masa  $m_{\parallel} = m_0\gamma^3$  i može se napisati jednačica

$$F_{\parallel} = m_{\parallel}a \quad (4.8)$$

gdje  $a$  označava akceleraciju u smjeru sile. Jednačice (4.7) i (4.8) proizlaze iz definicije sile dane izrazom (4.2), relativističke količine gibanja i definicija transverzalne i longitudinalne mase. Transverzalnu i longitudinalnu masu u kontekstu jednačica (4.7) i (4.8) je točnije tumačiti kao inerciju budući da predstavljaju faktor proporcionalnosti između sile i akceleracije. Međutim, ovakav koncept inercije razlikuje se od koncepta inercije u klasičnoj fizici. Inercija u klasičnoj fizici je svojstvo tijela i kao takva ne ovisi o vanjskim utjecajima na tijelo. Longitudinalna i transverzalna masa u ulozi inercije su svojstvo tijela zbog ovisnosti o  $m_0$  i svojstvo opažača zbog ovisnosti o brzini  $v$  kojom se tijelo giba naspram tog opažača [4], a u definiciju transverzalne i longitudinalne mase ulazi preko faktora  $\gamma$ .

Uz pomoć relativističke mase dane izrazom (4.3) relativistička količina gibanja se može definirati kao

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (4.9)$$

gdje je  $m$  relativistička masa. U tom kontekstu relativistička masa je samo veličina koja množi brzinu kako bi se dobila količina gibanja i ne može se smatrati inercijom u klasičnom smislu. Često autori koji na početku predstave relativističku masu uz definiciju količine gibanja prikazanu izrazom (4.9) u daljnjem tekstu ju koriste kao inerciju. Adler [4] u svom članku navodi primjer teksta u kojem je to slučaj (u prijevodu): "Da je brzina svjetlosti prirodna granica za brzinu u svemiru može se vidjeti (...) iz formule  $m = m_0/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ . Kada se tijelo ubrzava do sve veće brzine masa tijela postaje sve veća." Autor navedenoga isječka sugerira da relativistička masa definirana izrazom (4.3), koju je na početku predstavio u izrazu (4.9) za količinu gibanja, zapravo predstavlja otpor ubrzanju (inerciju), a to nije točno. Relativistička masa i transverzalna masa ili bolje rečeno transverzalna inercija matematički su identične. Zbog toga bi u slučaju kada je sila okomita na smjer gibanja tijela i vrijedi izraz (4.7) prelazak s transverzalne inercije na relativističku masu mogao biti opravdan. Međutim, autor isječka kojeg je naveo Adler govori o ubrzanju tijela što isključuje mogućnost da sila na tijelo ima samo komponentu okomitu na smjer gibanja. Kada bi sila bila okomita na smjer gibanja tijela, tijelo bi se gibalo konstantnom brzinom. Pri ispravnom objašnjenju zašto je brzina svjetlosti granična brzina za materijalne čestice ne može se upotrijebiti ni relativistička masa ni transverzalna inercija.

Porast inercije s brzinom za česticu koja se giba je zapravo iluzija uzrokovana efektom dilatacije vremena. Kada na česticu zadane mase mirovanja u gibanju djeluje

sila, čini se da je istoj sili potrebno više vremena kako bi ubrzala česticu kada se ona giba brže nego kada se giba sporije. Zbog toga se čini da se čestica više opire akceleraciji na velikim brzinama. Mjereno sa satom koji se giba s česticom ista sila uvijek stvara jednaki efekt u istim vremenskim intervalima neovisno o iznosu brzine čestice. Kada se čestica promatra iz našeg sustava zbog efekta dilatacije vremena opaža se da vrijeme u sustavu čestice prolazi sporije. S porastom brzine čestice efekt dilatacije vremena postaje izraženiji i zato se čini da je istoj sili potrebno više vremena za isti učinak kada se čestica giba brže nego kada se čestica giba sporije. To izaziva prividni porast u inerciji [4].

Inercija je općenito definirana kao omjer sile i akceleracije. Kada je odnos smjera sile i početne brzine tijela proizvoljan vrijedi izraz

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{a} = [i_0 \gamma^3 [(1 - \beta^2)\mathbf{u} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}]] \cdot \mathbf{a} \quad (4.10)$$

u kojem je  $\mathbf{F}$  sila,  $\mathbf{a}$  je akceleracija,  $\mathbf{u} = i\mathbf{i} + j\mathbf{j} + k\mathbf{k}$  je jedinični dijadični tenzor [13],  $\mathbf{i}$  je tenzor linearne inercije i  $\beta = v/c$ . Kada  $v = 0$  tenzor linearne inercije postaje izotropan i vrijedi:  $\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 = i_0\mathbf{u}$  gdje  $i_0$  je skalarna vrijednost izotropnog tenzora linearne inercije [1].

Jednadžba  $E = \gamma mc^2$  sadrži samo skalare koji su tenzori nultog reda, a jednadžba  $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$  sadrži skalare i vektore koji su tenzori prvog reda. Linearna inercija je tenzor koji se rotacijom koordinatnih osi transformira kao tenzor drugog reda. Kada se masa  $m$  u jednadžbama interpretira kao inercija (unutarnja linearna inercija koja je svojstvo tijela) i zamijeni s  $\mathbf{i}_0$  prestaje vrijediti jednakost lijeve i desne strane obiju jednadžbi zbog razlike u redu tenzora na lijevoj i desnoj strani, a kada se  $\gamma m$  zamijeni s  $\mathbf{i}$  prestaje vrijediti jednakost lijeve i desne strane obiju jednadžbi zbog razlike u redu tenzora i razlike u numeričkim vrijednostima na lijevoj i desnoj strani. Masa (mirovanja) i statična inercija su numerički jednake u SI sustavu, ali ne mogu se smatrati konceptualno jednakima jer masa je tenzor nultog reda, a inercija je tenzor drugog reda [1].

### 4.3 Gravitacijska masa

Zagovornici korištenja pojma relativističke mase fotonu pripisuju masu jednaku  $E/c^2$  što proizlazi iz jednadžbe (3.7) u poglavlju 3 koja nije u skladu s Einsteinovim tumačenjem odnosa između mase i energije. Sandin [8] smatra da je opis problema koji uključuju fotone bez relativističke mase kompliciran i nekonzistentan navodeći nekoliko primjera koji to potvrđuju: opaženo gravitacijsko privlačenje fotona, a da sam foton pri tome nema gravitacijsku masu; nekonzistentnim se čini da foton može prenositi masu, a da pri tome sam nema masu; količina gibanja fotona je

$$p = \left(\frac{E}{c^2}\right) c,$$

a  $E/c^2$  nije masa fotona; uključivanje faktora  $E_i/c^2$  za svaki foton pri računanju mase sustava (kao u raspadu  $\pi^0$  ili u slučaju anihilacije kada sustav sadrži dva fotona), a

masa sustava koji se sastoji samo od fotona koji se gibaju u istome smjeru jednaka je nuli.

Okun [2] navodi da je sila na lako tijelo poput fotona ili elektrona mase  $m$  koje se giba s energijom  $E$  i brzinom  $v = \beta c$  u gravitacijskom polju vrlo teškog tijela mase  $M$  poput Zemlje ili Sunca dana izrazom (4.11) u kojem je  $G_N = 6.7 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  gravitacijska konstanta. Vektor  $\mathbf{r}$  leži na spojnici tijela.

$$\mathbf{F}_g = \frac{-G_N M (E/c^2) [\mathbf{r}(1 + \beta^2) - \beta(\beta \cdot \mathbf{r})]}{r^3} \quad (4.11)$$

Gravitacijsko polje u razmatranju je statično sferno simetrično gravitacijsko polje Zemlje ili Sunca i efekti rotacije su zanemareni. Izraz (4.11) je valjan samo u ne-inercijalnim sustavima poput uobičajenog laboratorijskog referentnog sustava [9]. Detalji izvoda izraza (4.11) neće biti raspravljani u ovome radu jer izlaze iz opsega njegove teme.

U slučaju kada je  $\beta \ll 1$  jednadžba (4.11) svodi se na Newtonov zakon gravitacije

$$\mathbf{F}_g = \frac{-G_N M m \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.12)$$

Kada je  $\beta \simeq 1$  sila više nije u smjeru vektora  $\mathbf{r}$  već ima i komponentu u smjeru brzine. Ne postoji pojam relativističke gravitacijske mase koja bi ulazila u koeficijent proporcionalnosti  $\mathbf{F}_g$  s  $\mathbf{r}$ . Takozvana gravitacijska masa fotona koji pada prema Zemlji vertikalno je sasvim slučajno jednaka  $E/c^2$ . Foton koji se giba horizontalno naspram Zemlje tako da vrijedi  $\beta \perp \mathbf{r}$  je prema formuli (4.11) dva puta teži. Dodatan faktor 2 je ključan u dobivanju ispravnog kuta otklona svjetlosti zbog Sunca. Izraz koji se dobije za kut otklona je  $\theta = 4G_N M_\odot / R_\odot c^2$  i kada se u obzir uzmu masa  $M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{kg}$  i radijus  $R_\odot = 7 \times 10^8 \text{m}$  Sunca dobije se  $\theta \simeq 10^{-5}$  što je u skladu s opažanjima [2].

Prema Sandinu [8] bilo bi konzistentnije prihvatiti da su inercijska i gravitacijska masa međusobno jednake i jednake  $E/c^2$ , a dodatne članove u izrazu (4.11) naspram izraza (4.12) protumačiti kao relativističke korekcije Newtonovom zakonu gravitacije. Međutim, gravitacijsko privlačenje između dvaju (relativističkih) tijela određeno je njihovim tenzorima energije-impulsa, a ne samo njihovim energijama [2].

Kada se uzme da je gravitacijska masa fotona  $E/c^2$  i primijeni se Newtonov zakon gravitacije dobije se pola od opažene vrijednosti kuta otklona svjetlosti zbog Sunca. Međutim, ta polovica opažene vrijednosti je zapravo kut otklona u ravnom prostoru-vremenu. Kada se u obzir uzme zakrivljenost prostorvremena zbog blizine masivnog tijela dobiva se i druga polovica opažene vrijednosti [8]. Zbog pojedinosti izvoda jednadžbe (4.11) može se reći da rezultat za kut otklona svjetlosti proizlazi iz globalne geometrije centralnog gravitacijskog polja [9].

Izrazom

$$m_g = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.13)$$

se u literaturi ponekad opisuje gravitacijska relativistička masa koja se koristi u opisanju problema tijela koje pada [4]. Odgovarajuća jednadžba u tom slučaju bila bi

$$\frac{d}{dt}mv = -m_g g. \quad (4.14)$$

Izvod izraza (4.13) nije točan jer uključuje specijalnu teoriju relativnosti i opažača u neinercijalnom sustavu, a specijalna teorija relativnosti vrijedi samo za inercijalne sustave.

U sklopu opće teorije relativnosti može se izvesti izraz za gravitaciju masu

$$m_g = \frac{m_0}{[1 + (2\Phi/c^2) - u^2/c^2]^{1/2}} \quad (4.15)$$

u kojem je  $\Phi$  gravitacijski potencijal. Masa dana izrazom (4.15) može se upotrijebiti u jednadžbi sličnoj jednadžbi (4.14) imajući na umu da  $u$  nije koordinatna brzina i da je derivacija u jednadžbi zapravo kovarijantna. Zbog tih komplikacija izbjegava se korištenje gravitacijske relativističke mase u samim počecima učenja o specijalnoj teoriji relativnosti, a u općoj teoriji relativnosti ne postoji snažan razlog za uvođenje relativističke mase [4].



## 5 Geometrijska formulacija specijalne teorije relativnosti

Specijalna teorija relativnosti temelji se na postulatima koje je predstavio Einstein u svom prvom članku o relativnosti 1905. godine.

**Prvi postulat:** Brzina svjetlosti jednaka je u svim inercijalnim sustavima.

**Drugi postulat:** Svi inercijalni sustavi su ravnopravni [11].

Prvi postulat implicira da je brzina svjetlosti u vakuumu neovisna o gibanju izvora i opažača i da je konstantna [10]. Prvo snažno uporište prvog postulata specijalne teorije relativnosti bio je eksperiment u kojem su Michelson i Morley pokušali izmjeriti utjecaj rotacije Zemlje na brzinu svjetlosti. Po uzoru na mehaničke valove, primjerice zvuk, pretpostavljeno je da svjetlost također treba medij za širenje. Taj medij nazvan je eter i pretpostavljeno je da je brzina svjetlosti u odnosu na eter  $c$ . Brzina svjetlosti u odnosu na Zemlju bi u tom slučaju ovisila o smjeru gibanja Zemlje kroz eter. Budući da su rezultati eksperimenta pokazali da gibanje Zemlje ne utječe na brzinu svjetlosti i da je ona jednaka u svim smjerovima, ideja o postojanju etera je odbačena [10, 11].

Prema Galilejevom pravilu zbrajanja brzina ako se predmet giba brzinom  $v_1$  u odnosu na sustav  $\bar{S}$ , a sustav  $\bar{S}$  se u odnosu na sustav  $S$  giba brzinom  $v_2$ , brzina  $u$  kojom se taj predmet giba u odnosu na sustav  $S$  je

$$u = v_1 + v_2. \quad (5.1)$$

Za slučaj kada je brzina  $v_1$  ili  $v_2$  jednaka brzini svjetlosti  $c$  izraz (5.1) ne daje rezultat koji je u skladu s prvim postulatom specijalne teorije relativnosti. Zbog toga je Einstein u specijalnoj teoriji relativnosti Galilejevo pravilo zbrajanja brzina zamijenio novim pravilom za zbrajanje brzina istog smjera:

$$u = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)}. \quad (5.2)$$

Izraz (5.2) se u slučaju kada  $v_1 v_2 \ll c^2$  svodi na izraz (5.1), a u slučaju kada  $v_1 = c$  ili  $v_2 = c$  daje  $u = c$  što je u skladu s prvim postulatom jer ako se bilo što giba brzinom  $c$  u jednom sustavu, mora se gibati brzinom  $c$  i u drugom sustavu [10, 11].

S odbacivanjem ideje o postojanju etera također je odbačena i ideja o postojanju referentnog sustava koji bi imao prednost u odnosu na ostale referentne sustave, a to je izrečeno drugim postulatom. Drugi postulat specijalne teorije relativnosti također implicira da ako zakoni fizike vrijede u jednom inercijalnom sustavu, vrijede i u svim ostalim inercijalnim sustavima. Homogenost (ravnopravnost svih točaka) i izotropnost (ravnopravnost svih smjerova) prostora također su sadržani u drugom postulatu. Sve navedeno vrijedi za prazan prostor. Kada bi u prostoru postojao neki masivni objekt tada bi postojala razlika između položaja tog objekta i neke druge točke u prostoru. Takve slučajeve obuhvaća opća teorija relativnosti [11].

Geometrijske posljedice postulata specijalne teorije relativnosti su: relativnost istovremenosti, dilatacija vremena i kontrakcija duljina. Dva događaja koja su istovremena u jednom inercijalnom sustavu uglavnom nisu istovremena u bilo kojem drugom inercijalnom sustavu. Istovremenost ovisi o sustavu u kojem je izvršeno opažanje. Bitno je naglasiti da je opažanje izvršio inteligentni opažatelj koji ne poistovjećuje ono što vidi s onim što opaža i koji radi korekciju za vrijeme koje je potrebno signalu da dođe do njega [10, 11].

Efekt dilatacije vremena je čvrsto vezan uz prirodu vremena koje nije apsolutno. Kada opažatelj u nekom referentnom sustavu  $\bar{S}$  mjeri vrijeme koje prođe između dva događaja koja se dogode na istom mjestu izmjeri vrijeme  $\Delta\bar{t}$ . Kada opažatelj iz sustava  $S$  u kojem se sustav  $\bar{S}$  giba brzinom  $v$  mjeri vrijeme između dva ista događaja u sustavu  $\bar{S}$ , izmjeri vrijeme  $\Delta t$  koje je dulje od vremena  $\Delta\bar{t}$ . Veza između ova dva vremenska intervala je [10]

$$\Delta\bar{t} = \frac{\Delta t}{\gamma}. \quad (5.3)$$

U izrazu (5.3)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Brzina  $v$  je brzina kojom se sustav  $\bar{S}$  giba u odnosu na sustav  $S$ , a  $\Delta\bar{t}$  je vrijeme izmjereno u sustavu u kojem su događaji između kojih se mjeri vrijeme na istome mjestu (vremena na satu su očitana na istome mjestu) i naziva se vlastito vrijeme. Kada bi  $\Delta t$  i  $\Delta\bar{t}$  u izrazu (5.3) zamijenili mjesta, izraz ne bi vrijedio jer događaji između kojih se mjeri vrijeme nisu se zbili na istome mjestu za opažatelja iz sustava  $S$  [11].

Prostor također nije apsolutan i to se očituje efektom kontrakcije duljina. Duljina koju izmjeru opažatelj u sustavu u kojem se predmet giba je manja od duljine koju izmjeri opažatelj u sustavu u kojem predmet miruje. Veza između vlastite duljine  $\Delta\bar{x}$  izmjerene u sustavu u kojem predmet miruje i duljine  $\Delta x$  izmjerene u sustavu u kojem se predmet giba je

$$\Delta\bar{x} = \gamma\Delta x. \quad (5.4)$$

Duljina objekta koji se giba velikom brzinom skraćuje se u smjeru gibanja. Dimenzije okomite na smjer brzine ostaju nepromijenjene [10]. Kada se govori o duljini nekog objekta nužno je istaknuti u kojem referentnom sustavu jer duljina ovisi o tome u kojem sustavu je mjerenje izvršeno [11].

Svaki događaj se u nekom inercijalnom sustavu može opisati pomoću tri prostorne koordinate  $(x, y, z)$  i jedne vremenske koordinate  $(t)$ . Ako su poznate koordinate  $(x, y, z, t)$  nekog događaja u sustavu  $S$ , pomoću Lorentzovih transformacija mogu se dobiti koordinate  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  tog događaja u sustavu  $\bar{S}$  koji se giba brzinom  $v$  po  $x$  osi

u odnosu na sustav  $S$ . Lorentzove transformacije su:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \gamma(x - vt), \\ \bar{y} &= y, \\ \bar{z} &= z, \\ \bar{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Za prelazak iz sustava  $\bar{S}$  u sustav  $S$  potrebno je svugdje u jednadžbama (5.5) promijeniti predznak brzine jer brzina sustava  $S$  u odnosu na sustav  $\bar{S}$  je  $-v$  [10].

Uvođenje veličina

$$x^0 \equiv ct, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}\tag{5.6}$$

i numeriranje ostalih koordinata u skladu s njima:

$$\begin{aligned}x^1 &= x, \\ x^2 &= y, \\ x^3 &= z\end{aligned}\tag{5.7}$$

omogućava matrični zapis Lorentzovih transformacija:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.\tag{5.8}$$

Uvođenje veličine  $x^0$  umjesto vremena  $t$  i  $\beta$  umjesto  $v$  omogućava promjenu jedinice vremena iz sekunde u metar. Jedan metar  $x^0$  odgovara vremenu potrebnom da svjetlost prijeđe jedan metar u vakuumu [10].

Izraz (5.8) može se napisati u obliku jednadžbe

$$\bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^\mu_\nu) x^\nu \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu\tag{5.9}$$

gdje  $\Lambda$  označava matricu Lorentzovih transformacija. Indeks  $\mu$  označava redak matrice, a  $\nu$  označava stupac matrice. Oba indeksa mogu poprimiti vrijednosti od 0 do 3. U četverodimenzionalnom prostorvremenu specijalne teorije relativnosti svaka uređena četvorka  $(a^0, a^1, a^2, a^3)$  koja se transformira Lorentzovim transformacijama kao  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , tako da vrijedi izraz (5.9), je četverovektor [10, 11].

Geometrijska formulacija specijalne teorije relativnosti bazirana je na geometrijskim svojstvima četverodimenzionalnog prostorvremena na koji vode izotropnost prostora i homogenost prostora i vremena uz pojam kauzalnosti. Iz postulata specijalne teorije relativnosti slijedi konzistentna kinematika koja uključuje efekte dilatacije vremena, kontrakcije duljina, relativnost istovremenosti i Einsteinovo pravilo zbrajanja brzina. Lorentzove transformacije u teoriju ulaze kao direktna posljedica

hiperboličke geometrije prostorvremena. Iz definicije četverovektora energije i impulsa u dinamičkom dijelu teorije proizlazi da je masa invarijantna na Lorentzove transformacije [7]. Budući da se relativistička masa još uvijek koristi i mnogi smatraju da je osobni izbor hoće li ju netko koristiti ili ne, nameće se pitanje: je li moguće da relativistička masa, iako nije izvedena koristeći ispravne relativističke izraze, bude u skladu s prihvaćenom kinematikom specijalne teorije relativnosti?

Relativistička masa se često koristi kao objašnjenje zašto ne postoji objekt koji bi se gibao brzinom jednakom ili većom od brzine svjetlosti. Korištenjem relativističke mase za objašnjenje tog koncepta izbjegava se uvođenje dilatacije vremena, Lorentzovih transformacija i ostalih koncepata koji proizlaze iz geometrijske formulacije specijalne teorije relativnosti. Međutim, relativistička masa sama po sebi ne isključuje mogućnost opažanja superluminalnih objekata (objekata koji se gibaju brzinom većom od brzine svjetlosti) jer ne uključuje Einsteinovo pravilo zbrajanja brzina. Zbog toga bi opažači u dva inercijalna sustava koja se gibaju u suprotnim smjerovima mogli zaključiti da se gibaju brzinom većom od brzine svjetlosti jedan u odnosu na drugog. Postojanje brzine svjetlosti kao granične brzine koju nije moguće nadmašiti je zapravo posljedica dilatacije vremena koja proizlazi iz geometrije specijalne teorije relativnosti. Koncept relativističke mase ne može u potpunosti zamijeniti geometrijsku formulaciju specijalne teorije relativnosti, a predstavljanje koncepta relativističke mase uz postulate čini ga potpuno suvišnim jer to da je brzina svjetlosti jednaka u svim sustavima vodi k tome da je brzina svjetlosti granična brzina gibanja [7].

Glavna motivacija za uvođenje pojma relativističke mase je održavanje poznatih izraza za brzinu i količinu gibanja. U poglavlju 4 objašnjeno je kako su Lewis i Tolman izveli izraz za relativističku masu zanemarujući relativističku količinu gibanja i primjenjujući zakon očuvanja količine gibanja. Izrazom (4.9) u poglavlju 4 pokazano je da se relativistička količina gibanja uz definiciju relativističke mase  $m$  može napisati u obliku  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Max Jammer, kako navodi Oas [7], u svojoj knjizi o konceptu mase izjavljuje da Lorentzove transformacije i izraz za relativističku masu slijede jedno iz drugog. Takav rezultat bi svakako pridonio valjanosti koncepta relativističke mase i učinio formulaciju specijalne teorije relativnosti baziranu na relativističkoj masi jednako vrijednom kao i geometrijsku formulaciju. Međutim, Lorentzove transformacije proizlaze iz geometrije prostorvremena, a ne iz izraza za relativističku masu. Jammer je kao dokaz svoje tvrdnje izveo izraz za relativističku masu iz Lorentzovih transformacija iz kojih slijedi četverovektor energije i impulsa

$$p^\mu = \gamma m_0 u^\mu \quad (5.10)$$

u kojem

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (5.11)$$

U Jammerov izvod nije uključen četverovektor brzine koji proizlazi iz geometrije i eliminira potrebu za relativističkom masom kod interpretacije izraza (5.10). Četverovektor

(vlastite) brzine je

$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (5.12)$$

U izrazu (5.12)

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}, \quad (5.13)$$

a  $\tau$  se naziva vlastito vrijeme. Za razliku od vremena  $t$  koje ovisi o referentnom sustavu, vlastito vrijeme  $\tau$  je invarijantna veličina [10]. Vežanjem faktora  $\gamma$  iz izraza (5.10) uz  $u^\mu$  dobiva se četverovektor brzine i izostaje pojava relativističke mase  $\gamma m_0$ . Vežanjem faktora  $\gamma$  uz  $m_0$  što vodi na relativističku masu uvjetuje prihvaćanje krive definicije četverovektora brzine prikazane izrazom (5.11) koji nije kovarijantan na Lorentzove transformacije, a to znači da se ne transformira Lorentzovim transformacijama kao što je određeno definicijom četverovektora [11]. Ako se Lorentzove transformacije primijene na izraz (5.11) za prelazak iz sustava u kojem se tijelo giba brzinom  $u$  koja je vektor u trodimenzionalnom prostoru (ima samo prostorne komponente) u sustav u kojem tijelo miruje dobiva se [7]

$$\bar{u}^\mu = \Lambda_\nu^\mu(u)u^\nu = \left( \frac{c}{\gamma}, 0, 0, 0 \right). \quad (5.14)$$

Iz zapisa četverovektora brzine kao uređene četvorke

$$V = \gamma \left( c, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) \quad (5.15)$$

proizlazi da u sustavu u kojem tijelo miruje, budući da je  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , se četverovektor brzine svodi na [11]

$$V = (c, 0, 0, 0). \quad (5.16)$$

Usporedbom rezultata prikazanog izrazom (5.14) s izrazom (5.16) jasno se vidi da  $u^\mu$  definiran izrazom (5.11) nije četverovektor jer nije kovarijantan u odnosu na Lorentzove transformacije. Budući da je izraz (5.11) posljedica uvođenja relativističke mase dobiveni rezultat vodi na zaključak da je koncept relativističke mase u potpunom neskladu s prihvaćenom kinematikom specijalne teorije relativnosti. Uvođenje relativističke mase oduzimanjem faktora  $\gamma$  četverovektoru brzine i spajanjem s  $m_0$  narušava kovarijantnost s obzirom na Lorentzove transformacije [7] koja je ključna za definiciju četverovektora i koherentnost geometrijske formulacije specijalne teorije relativnosti.

Uvođenje relativističke mase u specijalnu teoriju relativnosti vodi na izraz

$$K_{RM} = \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) m_r c^2 \quad (5.17)$$

za kinetičku energiju. U izrazu (5.17) relativistička masa je označena s  $m_r$  jer je oznaka  $m$  sačuvana za invarijantnu masu. Uzimajući koncept relativističke mase kao valjan, kod ubrzavanja tijela povećavaju se kinetička energija i masa. Iz geometrijske

formulacije specijalne teorije relativnosti koja isključuje koncept relativističke mase kinetička energija je

$$K_G = (\gamma - 1)mc^2. \quad (5.18)$$

U geometrijskoj formulaciji specijalne teorije relativnosti pri ubrzavanju tijelu se povećava samo kinetička energija. Divergencija kinetičke energije kada se brzina  $v$  približava brzini svjetlosti u izrazu (5.17) dolazi od divergencije relativističke mase, a u geometrijskoj formulaciji je posljedica geometrije prostorvremena. Razlikovanje izraza (5.17) i (5.18) i njihovih značenja je još jedan pokazatelj toga da se koncept relativističke mase ne podudara s geometrijskom formulacijom. Koncept relativističke mase nije u skladu s prihvaćenom kinematikom specijalne teorije relativnosti. Također nije moguće da se specijalna teorija relativnosti temelji na konceptu relativističke mase i da on zamijeni geometrijsku formulaciju specijalne teorije relativnosti [7].

## 6 Za i protiv relativističke mase

Koncept relativističke mase može dovesti do zaključka da tijelo doslovno postaje masivnije s porastom kinetičke energije. To otvara mnoga pitanja: Kako točno tijelo postaje masivnije? Povećava li se broj atoma u njemu? Kako se to povećanje mase mjeri i može li se uopće mjeriti? Oas [7] navodi nekoliko isječaka u kojima je relativistička masa predstavljena na takav način da postoji dovoljno prostora za stvaranje ideje da masa predmeta raste u sustavu u kojem tijelo miruje. To je posljedica toga što u tim tekstovima nije naznačen referentni sustav. Budući da relativistička masa raste s povećanjem ukupne energije tijela bitno je naznačiti referentni sustav u kojem se tijelo promatra jer energija nije jednaka u svim referentnim sustavima. Sukladno tome relativistička masa također ne može biti jednaka u svim referentnim sustavima.

Prema Sandinu [8] promatrač koji se giba s tijelom neće opaziti promjenu (relativističke) mase tijela. Taj isti opažatelj također neće opaziti promjenu duljine predmeta u smjeru gibanja, neće opaziti efekt dilatacije vremena i neće opaziti Dopplerov efekt (promjenu frekvencije emitiranoga signala zbog relativnog gibanja izvora i opažatelja). U obrani relativističke mase ističe se upravo to da bi se masa također mogla tretirati kao relativna veličina budući da su duljina, vrijeme i frekvencija veličine koje su relativne. Opažatelj koji se giba s tijelom (opažatelj u sustavu u kojem tijelo miruje) će izmjeriti masu  $m_0$ , a opažatelj koji se u odnosu na tijelo giba brzinom  $v$  izmjerit će masu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.1)$$

Prema tome nema referentnog sustava koji bi imao prednost naspram drugih referentnih sustava, oba opažatelja su u pravu i oba mogu koristiti svoja mjerenja mase i upotrijebiti izraz (6.1) kada govore o tome što je opažatelj u drugom referentnom sustavu izmjerio. Da bi se ocijenila valjanost ove ideje nužno je uzeti u obzir način mjerenja mase. Newton je masu (tj. količinu tvari kako ju je on tumačio) mjerio indirektno uspoređujući omjere inercija ili težina dvaju tijela koji su bili jednaki omjeru njihove količine tvari [1]. Einstein i Bondi su svojim tumačenjem pojma mase uveli diobu na tri mase koje se po definiciji razlikuju po tehnikama njihovog mjerenja kao što je opisano u poglavlju 2. Ono što im je zajedničko je da se mjerenja temelje na usporedbi sa standardnim kilogramom, prototipom za mjerenje mase. Iako je kilogram dobio novu definiciju [14] koja ne uključuje stvarno tijelo kao standardni kilogram, način mjerenja mase usporedbom sa standardnim kilogramom bitno je uzeti u obzir u ovom razmatranju.

Zbog promjene u omjerima veličina koje opisuju mehanička svojstva tijela (inerciju, gravitacijsko privlačenje i težinu) uzrokovane gibanjem, da bi se dobila jedina moguća valjana masa za usporedbu s tijelom koje se giba, standardni kilogram bi se također trebao gibati brzinom tijela kojem se određuje masa. Rezultat toga bi bio jednaki broj kilograma s jednakim mehaničkim svojstvima kao i tijelo kojem se određuje masa u slučaju kada se standardni kilogram giba s tijelom i kada oba mi-

ruju. Da bi se masa u relativnosti tretirala kao što se tretiraju duljina i vrijeme bilo bi nužno mjeriti relativističku masu kao što se mjere duljina i vrijeme. To znači da bi se masa tijela koje se giba morala mjeriti u odnosu na standardni kilogram koji miruje u inercijalnom sustavu. Međutim, to nije moguće i zbog toga relativistička masa nije koncept koji je dobro definiran [1]. Ideja da se masa može tretirati u specijalnoj teoriji relativnosti jednako kao vrijeme i duljina je neodrživa.

Kao što je opisano u poglavlju 3 na primjeru idealnog monoatomnog plina u spremniku koji miruje, zagrijavanjem tijela (koje miruje) povećava se njegova masa zbog povećanja brzine relativnog gibanja atoma koji sačinjavaju tijelo. Tijelo koje miruje unatoč zagrijavanju ostaje inercijski i gravitacijski izotropno što znači da se njegova masa može izmjeriti pomoću standardnog kilograma koji miruje. Za tijelo koje se giba to nije moguće i zato nije u redu da  $\gamma m$  predstavlja masu tijela koje se giba [1]. U redu je govoriti o povećanju mase tijela koje dolazi od kinetičke energije relativnog gibanja atoma koji sačinjavaju tijelo, a nije u redu govoriti o povećanju mase koje dolazi od kinetičke energije translacijskog gibanja. Oni koji koriste koncept relativističke mase čine ovo drugo. Pozivajući se na jednadžbu  $E = mc^2$  u kojoj je  $E$  ukupna energija, a  $m$  relativistička masa tvrdi se da povećanje jedne veličine uzrokuje proporcionalni porast druge. U skladu s time povećanje kinetičke energije translacije uzrokuje povećanje relativističke mase s brzinom gibanja tijela [8]. Koncept relativističke mase svoje uporište nalazi u krivom tumačenju jednadžbi koje povezuju masu i energiju. Jednadžba  $E = mc^2$  je krivi oblik Einsteinove jednadžbe  $E_0 = mc^2$  kao što je objašnjeno u poglavlju 3.

Korištenje koncepta relativističke mase za određivanje mase složenog sustava tijela brojčano daje jednake rezultate kao i tretman problema koji ne uključuje relativističku masu, ali je interpretacija doprinosa masi sustava različita kao što je navedeno u poglavlju 3 na primjeru spremnika s idealnim monoatomnim plinom. Isto se može demonstrirati i na primjeru jednostavnog sustava koji se sastoji od dva protona koji se gibaju jedan prema drugome u sudarivaču čestica s kinetičkim energijama jednakim 20 000 GeV. Masa mirovanja protona za potrebe ovog razmatranja može se zaokružiti na 1 GeV/ $c^2$  odakle slijedi da je energija mirovanja protona 1 GeV. Međusobna interakcija protona zbog njihovog naboja se u ovom razmatranju zanemaruje. Oba pristupa, s relativističkom masom i bez nje, slažu se oko tog da je ukupna energija svakog protona jednaka 20 001 GeV. Međutim, pristupom koji uključuje relativističku masu dobiva se da je masa svakog protona 20 001 GeV/ $c^2$  što vodi na to da je masa sustava jednaka 40 002 GeV/ $c^2$  u odnosu na sustav vezan za laboratorij. Pristupom kojim se relativistička masa zaobilazi također se dobiva da masa sustava iznosi 40 002 GeV/ $c^2$ , ali pri tome masa svakog od protona ostaje 1 GeV/ $c^2$  [8]. Ostatak mase sustava dolazi od kinetičke energije relativnog gibanja protona u sustavu. Promatrani sustav dva protona u odnosu na sustav laboratorija miruje jer je ukupna količina gibanja jednaka nuli. Prema tome, kinetičke energije



protona čine unutarnju energiju sustava kao cjeline i masa sustava  $M$  je

$$M = \sum_{i=1}^2 \left( m_i + \frac{K_i}{c^2} \right) \quad (6.2)$$

gdje  $m_i$  je masa pojedinog protona, a  $K_i$  njegova kinetička energija. Sandin [8] smatra da je takav pristup masi zbunjujući i nedosljedan jer porast kinetičke energije jedne čestice ne uzrokuje porast njezine mase, a porast mase sustava može biti uzrokovan porastom kinetičke energije čestica koje ga sačinjavaju. Ispravnim tumačenjem izraza  $E_0 = mc^2$  u kojem  $E_0$  je energija mirovanja koja uključuje unutarnju energiju tijela (ili sustava) uklanja se svaka moguća nejasnoća i prividna nedosljednost. Kinetička energije translacije čestice ne doprinosi njenoj unutarnjoj energiji i zbog toga ne utječe na njenu masu. Kinetička energija relativnog gibanja čestica koje sačinjavaju neki sustav doprinosi njegovoj unutarnjoj energiji i zato direktno utječe na njegovu masu. Kada bi se sustav gibao kao cjelina, kinetička energija translacije sustava kao cjeline ne bi doprinosila njegovoj masi baš kao što kinetička energija translacije čestice ne doprinosi njenoj masi.

Još jedna razlika u tumačenju odnosa mase i energije onih koji su za relativističku masu i onih koji su protiv nje može se ilustrirati na primjeru nuklearne reakcije nastanka deuterona (vezanog stanja protona i neutrona). Obje strane se slažu oko toga da je reakcijom oslobođeno 2.2 MeV energije budući da je masa mirovanja deuterona za 2.2 MeV/ $c^2$  manja od zbroja masa mirovanja protona i neutrona. Sustav se prije reakcije sastoji od protona i neutrona, a nakon reakcije od deuterona i fotona. Da bi količina gibanja ostala sačuvana deutron se nakon reakcije giba u suprotnom smjeru od fotona. Od oslobođenih 2.2 MeV gotovo je sva energija pripala fotonu. Sa stajališta protiv relativističke mase foton je bezmaseni i tijekom reakcije došlo je do pretvorbe mase u energiju. Sa stajališta za relativističku masu netočno je reći da se masa pretvorila u energiju jer su masa i energija isto. Za dani sustav se ne može povećati energija tako da mu se smanji masa i obratno. Masa i energija deuterona su manje zato što je dio mase i energije pripao fotonu. Sandin [8] ističe da tumačenje sa stajališta protiv relativističke mase implicira da za izolirani sustav ne vrijedi zakon očuvanja mase i energije kod nuklearnih reakcija.

Anihilacija čestice s antičesticom, kao što su primjerice elektron i pozitron, navodi se kao primjer pretvorbe mase u energiju. Izolirani sustav se prije reakcije sastoji od elektrona i pozitrona, a nakon reakcije od dva fotona jednakih energija koji se gibaju u suprotnim smjerovima. S oba stajališta se pri reakciji sustavu nije promijenila ni masa ni energija [8]. Sa stajališta za relativističku masu može se smatrati nedosljednim što je u pristupu bez relativističke mase dobiveno da je masa sustava koji se sastoji od dva fotona različita od nule, a masa svakog od fotona je jednaka nuli. Budući da je ukupna količina gibanja jednaka nuli zaključak o masi sustava je u skladu s izrazom (6.2) budući da energije fotona čine unutarnju energiju sustava.

Unutarnja pobuđenja čestica ili sustava čestica rezultiraju povećanjem njihove mase. Pobuđena stanja neke jezgre su masivnija od nepobuđenih iako se i dalje radi

o jezgri iste vrste [12]. Pobuđenjem jezgre mijenja se potencijalna i kinetička energija nukleona. Koristeći relativističku masu zaključuje se da porast mase pobuđene jezgre dolazi od porasta mase individualnih nukleona koja je dana izrazom

$$\Delta m_i = \frac{\Delta K_i}{c^2}. \quad (6.3)$$

Iz izraza (6.3) vidi se da porast mase pojedinih nukleona dolazi zbog porasta u njihovoj kinetičkoj energiji  $K_i$ . Bez korištenja relativističke mase zaključuje se da nije došlo do promjene u masi pojedinih nukleona, a promjena mase jezgre uzrokovana je promjenom energije pojedinih nukleona [8].

Tumačenje nuklearne reakcije stvaranja deuteronu i anihilacije elektrona i pozitrona pristupom koji ne uključuje relativističku masu je u skladu s Einsteinovom idejom mase kao rezervoara energije [1]. Također je u skladu s Einsteinovom idejom o ujedinjenju zakona očuvanja mase i zakona očuvanja energije izoliranog sustava. Masa koja je s energijom mirovanja povezana relacijom  $E_0 = mc^2$  može se pretvoriti i u druge oblike energije. Takve pretvorbe mase u primjerice elektromagnetsko zračenje su sasvim normalna pojava na atomskoj i subatomskej razini. Izmjene mase i energije se također redovito dešavaju tijekom neelastičnih nuklearnih reakcija. Energija oslobođena u takvim reakcijama dolazi od pretvorbe dijela mase teških atomskih jezgara u druge oblike energije [12].

## 6.1 Uloga relativističke mase u poučavanju specijalne teorije relativnosti

Mnogi argumenti koji podupiru korištenje koncepta relativističke mase, kao i oni koji su protiv njegovog korištenja vezani su za poučavanje specijalne teorije relativnosti.

U isječku iz Feynmanovih predavanja iz fizike koji ističe Oas [7] navodi se da za one koji žele naučiti dovoljno relativnosti da mogu rješavati zadatke, dovoljno je znati da teorija relativnosti samo mijenja Newtonove zakone uvođenjem dodatnog faktora kojim se korigira masa. Međutim, fizika je puno više od pukog rješavanja zadataka. Bitno je da pri poučavanju fizike naglasak bude na razumijevanju određenih pojava i da nastava fizike doprinosi razvijanju prirodoslovne pismenosti i znanstvenog zaključivanja kod učenika. Korištenje relativističke mase samo kako bi se učenicima olakšalo rješavanje zadataka i pritom omogućilo upotrebljavanje već poznatih izraza iz klasične fizike uskraćuje im razumijevanje specijalne teorije relativnosti.

Jednadžba  $E = mc^2$  je dio popularne kulture [2] i koncept relativističke mase slijedi iz nje. Zbog toga se kao jedan od razloga za korištenje koncepta relativističke mase navodi to da se njegovim zaobilazanjem u počecima poučavanja specijalne relativnosti zaobilazi jedino s čime su učenici već upoznati [4]. Međutim, korištenje relativističke mase i izraza  $E = mc^2$  stvara kod učenika iluziju razumijevanja specijalne teorije relativnosti. Učenici i studenti često zaključuju da je relativistička masa temelj specijalne teorije relativnosti, a izraz  $E = mc^2$  neizbježna posljedica. Ideja

koja se time prenosi učenicima je da gdje god postoji energija postoji i masa. Postojanje fotona je dokaz da to nije točno [2]. Sandin [8] smatra da je opis fotona koji isključuje relativističku masu nedosljedan i predstavlja izvor nerazumijevanja za učenike. Međutim, učenici uče da je foton čestica bez mase u sklopu drugih tema iz fizike. Prema tome bi bilo nedosljedno kod poučavanja specijalne teorije relativnosti koristiti relativističku masu i predstaviti  $E/c^2$  kao masu fotona.

Korištenje relativističke mase kod učenika može potaknuti misao da se struktura tijela mijenja s gibanjem što je bila Lorentzova motivacija za uvođenje izraza za transverzalnu i longitudinalnu masu. Svi opaženi efekti (npr. porast inercije s brzinom) su zapravo posljedica promjena u prostorvremenu [4]. Problem nastaje i kada profesori od učenika ili studenata zahtijevaju korištenje relativističke mase, a ona se ne nalazi u popratnoj literaturi. Može se desiti i obratno. Oba slučaja zbunjuju učenike i studente koji uče o specijalnoj teoriji relativnosti i uskraćuju im odgovor na pitanje ovisi li masa zaista o brzini [9].

Relativistička masa narušava elegantnost i jasnoću koju je specijalnoj teoriji relativnosti donijela geometrijska formulacija koja uključuje četverovektore [4] kao što je obrazloženo u poglavlju 5. U počecima učenja o specijalnoj teoriji relativnosti nemoguće je uvesti četverovektore i bazirati pristup specijalnoj relativnosti na njima, dijelom zbog nedostatka potrebnog predznanja kod učenika i dijelom zbog kratkoće vremena predviđenog za tu temu [8]. Međutim, to ne opravdava korištenje relativističke mase. Postulati specijalne teorije relativnosti mogu se uvesti bez četverovektora. Na temelju postulata mogu se uvesti relativnost istovremenosti, dilatacija vremena i kontrakcija duljina. Već to je dovoljno da se objasni postojanje brzine svjetlosti kao granične brzine gibanja i zašto se niti jedan predmet ne može gibati brzinom jednakom ili većom od brzine svjetlosti. Učenike se također može upoznati s izrazima za relativističku energiju i relativističku količinu gibanja bez da se uvodi četverovektor energije i impulsa. Dalje, oni koji će željeti ili trebati naučiti više o specijalnoj teoriji relativnosti svoje znanje mogu lako proširiti četverovektorima i Lorentzovim transformacijama.

Specijalnu teoriju relativnosti nije moguće temeljiti na relativističkoj masi. Nije moguće masu u specijalnoj teoriji relativnosti tretirati jednako kao vrijeme i duljinu jer se efekti dilatacije vremena i kontrakcije duljina lako mogu izravno izmjeriti dok za promjenu mase to nije moguće. Relativistička masa se ne može koristiti uz četverovektore i Lorentzove transformacije. Uvođenje relativističke mase nije u skladu s geometrijskom formulacijom specijalne relativnosti [7]. Razumno je zapitati se: što je onda ostalo? Koncept relativističke mase je suvišan u specijalnoj teoriji relativnosti i doprinosi stvaranju krivih ideja. Najbolje bi bilo izostaviti koncept relativističke mase pri poučavanju specijalne relativnosti i predstaviti samo jednu masu koja je jednaka u svim referentnim sustavima i za koju vrijedi  $E_0 = mc^2$ .

## 7 Zaključak

Ovim radom pokazano je da iako se koncept relativističke mase može na prvu učiniti korisnim, njegovim korištenjem može se javiti niz problema. Mnogi od njih su vezani upravo uz stvaranje krivih predodžbi kod onih koji tek kreću učiti o specijalnoj teoriji relativnosti.

Niz činjenica iznesenih u ovome radu ukazuje na to da koncept relativističke mase nije dobro zamišljen. Relativistička masa je posljedica primjene izraza iz klasične fizike u području u kojem oni ne vrijede, zanemarivanja relativističke količine gibanja i krivog tumačenja ostalih relativističkih izraza.

Pokazano je da relativistička masa nije u skladu s prihvaćenom kinematikom specijalne teorije relativnosti i obrazloženo je na koji način narušava kovarijantnost u odnosu na Lorentzove transformacije što remeti sklad geometrijske formulacije specijalne teorije relativnosti.

Nizom primjera pokazano je kako se fizički problemi drugačije interpretiraju kada im se pristupi koristeći koncept relativističke mase i kada im se pristupi bez njega. To je uglavnom posljedica drugačijeg shvaćanja veze između mase i energije koje se također očituje u krivoj interpretaciji Einsteinove jednadžbe  $E_0 = mc^2$ .

Iako korištenje relativističke mase u poučavanju specijalne teorije relativnosti naizgled olakšava prenošenje nekih ideja učenicima, u stvarnosti im uskraćuje razumijevanje specijalne teorije relativnosti. Zbog toga je bolje izbjeći relativističku masu u poučavanju specijalne teorije relativnosti i predstaviti samo jednu masu koja se ne mijenja s brzinom tijela i jednaka je za sve opažače u svim referentnim sustavima.

## 8 Metodički dio

Teorija relativnosti danas je najpoznatije otkriće koje se veže za ime svjetski poznatog fizičara Alberta Einsteina. Einstein je razvio specijalnu teoriju relativnosti koja vrijedi samo za inercijalne sustave i opću teoriju relativnosti koja uključuje gravitaciju i ne-inercijalne sustave. U školama i visokom obrazovanju kod poučavanja fizike najveći naglasak je na specijalnoj teoriji relativnosti na kojoj je i bazirana tema ovoga rada. Prije nje mislilo se da je Newtonova mehanika sasvim dovoljna za razumijevanje, predviđanje i opisivanje fizičkih fenomena. Međutim, klasična mehanika savršeno funkcionira pri brzinama koje su jako male u odnosu na brzinu svjetlosti, a kada se njene ideje pokušaju primijeniti na objekte koji se gibaju velikim brzinama (brzinama bliskim brzini svjetlosti) doživljava veliki poraz. Specijalna teorija relativnosti je danas najbolji opis našeg svemira koji imamo neovisno o tome primjenjuje li se na velikim ili malim brzinama.

Specijalna teorija relativnosti može biti posebno zahtjevna za poučavanje zbog toga što zahtijeva od učenika odmak od postojećih ideja koje su nastale dijelom zbog vlastitih iskustava s okolinom, a dijelom zbog dobrog poznavanja Newtonove fizike. Specijalna teorija relativnosti je često kontraintuitivna zbog toga što je brzina svjetlosti mnogo veća od brzina s kojima se susrećemo u svakodnevnom životu. Da je brzina svjetlosti približno jednakog reda veličine kao brzine iz svakodnevnog života, primjerice brzina automobila, efekti dilatacije vremena i kontrakcije duljine imali bi efekt na svakodnevni život [11]. Zbog toga što je teorija relativnosti kontraintuitivna zahtijeva dodatne mentalne napore kod učenika.

### 8.1 Nastavna priprema: *Postulati specijalne teorije relativnosti*

Nastavna priprema za temu *Postulati specijalne teorije relativnosti* napisana je za četvrti razred prirodoslovno-matematičke gimnazije i predviđena je za jedan nastavni sat. Vrsta nastave za koju je priprema napisana je istraživački usmjerena nastava. Nastavne metode koje su predviđene za izvođenje nastave su: vođena razredna rasprava, korištenje računalne simulacije pokusa, metoda pisanja i crtanja i rješavanje pitanja s karticama.

Tema za koju je napisana priprema dio je nastavne cjeline *Teorija relativnosti*. U toj nastavnoj cjelini učenici prvo uče o relativnosti u klasičnoj fizici koja uključuje Galilejevo načelo relativnosti i Galilejevo pravilo zbrajanja brzina. Nakon što to savladaju, učenici se susreću s idejom sredstva koje omogućava širenje elektromagnetskih valova, a to sredstvo je nazvano eter. Na to se nadovezuje Michelson-Morleyev eksperiment čiji rezultati su ukazali na potrebu za novom teorijom. Nastavna priprema je napisana za sat koji učenicima omogućava da se detaljno upoznaju s Michelson-Morleyevim pokusom, a pri tome veliki naglasak stavlja na vježbanje hipotetičko-deduktivnog zaključivanja. Rezultati Michelson-Morleyevog pokusa mogu se iskoris-

titi kao dobra polazišna točka za predstavljanje specijalne teorije relativnosti i njenih postulata. Također su dobro mjesto za ukazati na potrebu za novim pravilom zbrajanja brzina budući da je ishod predviđen na temelju Galilejevog pravila zbrajanja brzina bio krivi. Nakon što se učenici upoznaju s postulatima specijalne teorije relativnosti slijedi detaljna razrada posljedica postulata: relativnost istovremenosti, dilatacija vremena i kontrakcija duljina. Te teme bi se obrađivale nakon sata opisanog pripremom. Posljednja nastavna jedinica u cjelini o teoriji relativnosti bavi se relativističkom dinamikom. U njoj učenici uče i relativističkoj količini gibanja i relativističkoj energiji.

Na prethodnom satu učenici su učili o relativnosti u klasičnoj fizici. Učenici su upoznati s inercijalnim sustavima, znaju primijeniti Galilejevo pravilo zbrajanja brzina i upoznati su s Galilejevim načelom relativnosti. U trećem razredu učenici su učili o mehaničkim valovima, a na početku četvrtog razreda upoznali su se s valnom prirodom svjetlosti i elektromagnetskim valovima.

U uvodnom dijelu sata učenici navode neke primjere valova i njihovog širenja za koje je potrebno elastično sredstvo. Budući da je svjetlost također val, nameće se pitanje je li za širenje svjetlosti također potrebno elastično sredstvo. Učenici se upoznaju s povijesnim problemom postojanja sredstva koje prenosi elektromagnetske valove - etera i upoznaju njegova svojstva. Pomoću simulacije Michelson-Morleyevog pokusa učenici se upoznaju s radom interferometra što će im kasnije pomoći da sami predlože eksperimentalni test hipoteze.

U središnjem dijelu učenici formiraju hipotezu o postojanju etera i širenju svjetlosti brzinom  $c$  u odnosu na eter. Budući da su se u uvodnom dijelu sata upoznali s interferometrom učenici će pokušati sami osmisliti eksperimentalni test svoje hipoteze i predvidjeti će ishod eksperimenta koji bi bio u skladu s postavljenom hipotezom. Kada osmisle eksperimentalni test i predvide ishod koji je u skladu s hipotezom učenici će uz pomoć računalne simulacije Michelson-Morleyevog eksperimenta istražiti valjanost svoje hipoteze. Učenici će također primijeniti Galilejevo pravilo zbrajanja brzina za predviđanje brzine svjetlosnog snopa. Na kraju će učenici donijeti zaključak o valjanosti postavljene hipoteze na temelju rezultata Michelson-Morleyevog eksperimenta. Nakon toga ćemo raspraviti o tome kako se ishod eksperimenta uklapa u Galilejevu relativnost i budući da se rezultati eksperimenta ne mogu objasniti u granicama klasične fizike predstaviti će novu teoriju uvođenjem postulata specijalne teorije relativnosti.

U završnom dijelu sata učenici će riješiti tri konceptualna pitanja pomoću kartica s ponuđenim odgovorima. Nakon svakog pitanja uslijedit će kratka rasprava o pitanju. Na kraju sata učenici će ispuniti listu za samoprocjenu prikazanu tablicom 8.1 koja će im pokazati koje ishode su uspješno ostvarili, a za koje bi bilo dobro da ponove gradivo.

Da bi se sat proveo u zamišljenom obliku potrebni su računalo, projektor i ploča.

### **Predmetni ishodi**

FIZ. SŠ C.4.7. - Opisuje i primjenjuje osnovne ideje specijalne teorije relativnosti.

- Učenik opisuje Michelson-Morleyev pokus.
- Učenik tumači rezultate Michelson-Morleyevog eksperimenta.
- Učenik primjenjuje Galilejevo pravilo zbrajanja brzina.
- Učenik navodi postulate specijalne teorije relativnosti.
- Učenik objašnjava postulate specijalne teorije relativnosti.

FIZ. SŠ C.4.10. - Istražuje fizičke pojave.

- Učenik istražuje pojavu s pomoću računalne simulacije.
  - Učenik osmišljava hipotezu.
  - Učenik osmišljava eksperimentalni test hipoteze.
  - Učenik objašnjava svoje pretpostavke.
  - Učenik samostalno izlaže svoja opažanja.
  - Učenik tumači rezultate eksperimenta.
  - Učenik izgrađuje argumente utemeljene na znanstvenim dokazima.
  - Učenik objašnjava teorijsku podlogu eksperimenta.
  - Objašnjava pojavu u prirodi prikazanu računalnom simulacijom.
  - Učenik opisuje princip rada interferometra.

FIZ. SŠ C.4.9. - Rješava fizičke probleme.

- Učenik kvalitativno zaključuje povezujući koncepte vezane uz sadržaje.
- Učenik kvalitativno zaključuje primjenjujući fizičke koncepte i zakone.

### **Međupredmetni ishodi**

osr. A.5.3. - Razvija svoje potencijale.

uku. A.4/5.2 - Primjena strategija učenja i rješavanje problema.

uku. A.4/5.3 - Kreativno mišljenje.

uku. A.4/5.4 - Kritičko mišljenje.

uku. B.4/5.4. - Samovrednovanje/ samoprocjena

uku. C.4/5.3 - Interes.

## TIJEK NASTAVNOG SATA

### 1. UVODNI DIO SATA

**Uvodni problem:** Navedite neke primjere valova. Što je potrebno za širenje mehaničkih valova? Je li svjetlost val? Kakav je svjetlost val?

- Učenici se prisjećaju valova o kojima su do sada učili na fizici. Neki od njih su: valovi na žici, valovi na vodi, zvuk, elektromagnetski valovi. Za širenje mehaničkih valova potrebno je elastično sredstvo. Svjetlost je elektromagnetski val.

**Je li potrebno sredstvo za širenje svjetlosti (i općenito za širenje elektromagnetskih valova)?**

- Učenici iznose svoje ideje. Cilj ovog pitanja je prikupiti njihove ideje i nakon toga ih upoznajem s povijesnim problemom sredstva koje omogućava širenje elektromagnetskih valova.

Na prijelazu iz 19. u 20. stoljeće smatralo se, po uzoru na mehaničke valove, da je za širenje elektromagnetskih valova također potrebno elastično sredstvo. To elastično sredstvo nazvano je **eter** i pretpostavljeno je da eter ispunjava sav svemirski prostor i da se u njemu gibaju sva svemirska tijela, a on apsolutno miruje.

**Kakva bi trebala biti svojstva etera ako se uzme u obzir iznos brzine svjetlosti?**

- Brzina svjetlosti je  $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ . U usporedbi s brzinom zvuka u zraku koja je  $340 \text{ ms}^{-1}$  brzina svjetlosti je mnogo veća. Zbog velikog iznosa brzine svjetlosti eter bi trebao biti jako elastičan fluid koji može prenositi transverzalne valove (jer svjetlost je transverzalni val). Također, eter je nevidljiv i gustoća mu je mala jer ne primjećujemo učinak etera na gibanje tijela.

Michelson i Morley su 1887. godine izveli pokus kojim su htjeli dokazati postojanje etera. Za izvođenje pokusa koristili su uređaj koji se naziva interferometar.

**Opservacijski pokus:** Princip rada interferometra

Za demonstraciju principa rada interferometra koristit ću simulaciju Michelson-Morleyeva eksperimenta koja je dostupna na stranici [https://galileoandstein.phys.virginia.edu/more\\_stuff/Applets/MichelsonMorley/michelsonmorley.html](https://galileoandstein.phys.virginia.edu/more_stuff/Applets/MichelsonMorley/michelsonmorley.html).

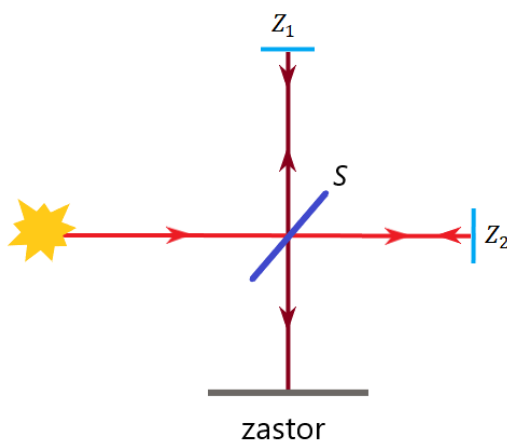
Interferometar se sastoji od polupropusnog zrcala koje se nalazi u sredini, dva zrcala koja su označena plavom bojom u simulaciji i detektora ili zastora koji je označen sivom bojom.



Brzinu etera postavljam na nulu i pokrećem simulaciju. Učenici pažljivo promatraju što će se desiti sa snopom svjetlosnih zraka u simulaciji.

**Što ste opazili? Opišite putanju snopa svjetlosnih zraka i skicirajte ju u bilježnicu.**

- Učenici iznose svoja opažanja. Učenici skiciraju shematski prikaz interferometra i putanju svjetlosnog snopa u svoje bilježnice slično prikazu na slici 8.1. Svjetlosni snop se prolaskom kroz polupropusno zrcalo  $S$  razdvaja na dva okomita snopa, ti snopovi se reflektiraju na zrcalima  $Z_1$  i  $Z_2$  i vrate se prema polupropusnom zrcalu. Prolaskom kroz polupropusno zrcalo snopovi se spajaju i zajedno putuju prema detektoru.



Slika 8.1: Shematski prikaz interferometra iz Michelson-Morleyeva eksperimenta.

**Kolika je brzina svjetlosti? U kojem referentnom sustavu je brzina svjetlosti jednaka  $c$ ?**

- Brzina svjetlosti je  $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ . Učenici iznose svoje ideje. Cilj ovog pitanja je navesti ih do zaključka da ako pretpostavimo da postoji eter kao medij koji omogućava širenje svjetlosti, brzina svjetlosti bi u odnosu na eter trebala biti  $c$ .

**Bi li u nekom referentnom sustavu koji se giba u odnosu na eter brzina svjetlosti bila drugačija?**

- Cilj ovog pitanja je prikupiti ideje učenika. Očekujem da će se javiti ideja o tome da će brzina svjetlosti ovisiti o gibanju sustava u odnosu na eter zbog poznavanja Galilejeve relativnosti.

## 2. SREDIŠNJI DIO SATA

Učenici će pomoću istraživačkog pokusa, korištenjem simulacije Michelson-Morleyeva eksperimenta koja je dostupna na stranici [https://galileoandstein.phys.virginia.edu/more\\_stuff/Applets/MichelsonMorley/michelsonmorley.html](https://galileoandstein.phys.virginia.edu/more_stuff/Applets/MichelsonMorley/michelsonmorley.html) testirati hipotezu koju su postavili.

**ISTRAŽIVAČKO PITANJE:** Postoji li eter i u kojem referentnom sustavu je brzina svjetlosti  $c$ ?

**Kako bi glasila hipoteza za postavljeno istraživačko pitanje?**

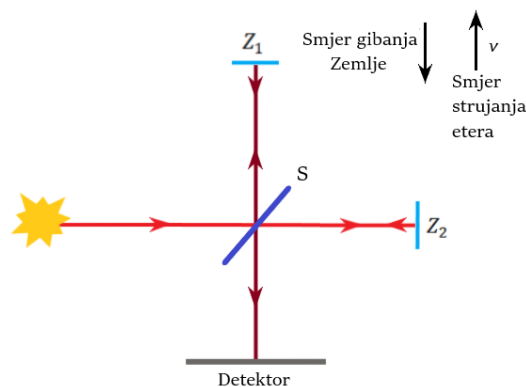
- Učenici daju svoje ideje za hipotezu i nakon kratke rasprave formuliramo hipotezu na temelju njihovih ideja.

**HIPOTEZA:** Postoji eter koji je sredstvo koje omogućava širenje svjetlost i brzina svjetlosti u odnosu na eter je  $c$ .

**Kako biste eksperimentalno provjerili valjanost postavljene hipoteze uz pomoć interferometra?**

- Učenice predlažu svoje ideje. Po potrebi bi postavljala potpitanja kao pomoć.
  - Moguća potpitanja: Giba li se Zemlja u odnosu na eter? Možemo li pomoću interferometra pokazati da gibanje Zemlje kroz eter utječe na brzinu gibanja svjetlosti? Možemo li postaviti interferometar da se giba sa Zemljom? Bi li to uzrokovalo promjenu brzine jednog od svjetlosnih snopovi? Kako uz pomoć simulacije možemo vidjeti da je došlo do promijene brzine?

**EKSPERIMENTALNI TEST:** Interferometar postavimo tako da se jedan krak interferometra poklapa sa smjerom gibanja Zemlje kroz eter, a drugi krak bude okomit na smjer Zemljina gibanja. Zbog gibanja Zemlje kroz eter, opažatelj na Zemlji uočiti će strujanje etera uz površinu Zemlje istom brzinom, ali u suprotnome smjeru kao što je prikazano na slici 8.2. U eksperimentu ćemo promatrati brzine svjetlosnih snopova tako što ćemo promatrati dolaze li snopovi do detektora u isto vrijeme i ako ne dolaze, promatrat ćemo koji dolazi prvi i koliko ovaj drugi kasni za njim.



Slika 8.2: Shematski prikaz interferometra u odnosu na smjer gibanja Zemlje kroz eter. Na slici su označeni smjer gibanja Zemlje i smjer strujanja etera uz površinu zemlje. Shematski prikaz se poklapa s eksperimentalnim postavom u korištenoj simulaciji [20].

### Kakav ishod eksperimenta očekujete da bi hipoteza bila podržana?

- Učenici iznose svoje ideje i argumentiraju ih. Ishod eksperimenta koji bi pokazao da je hipoteza valjana je da svjetlosni snopovi ne dođu do detektora istovremeno. Očekujemo da će se promijeniti brzina svjetlosnog snopa čiji smjer gibanja se poklapa sa smjerom strujanja etera.

U simulaciji namjestim brzinu etera na polovicu maksimalne brzine pomoću kliznog pokazivača. Pokrenem simulaciju nekoliko puta i uputim učenike da pažljivo promatraju. Upozorim ih na to da pažljivo promatraju koji svjetlosni snop dođe prvi do detektora.

### Što ste opazili? Koji svjetlosni snop je prvi stigao do detektora?

- Do detektora je prvi stigao svjetlosni snop koji se gibao okomito na smjer strujanja etera. Nakon njega je stigao snop čiji smjer se poklapa sa smjerom strujanja etera.

Brzinu etera namještam pomoću kliznog pokazivača tako da bude maksimalna. Pokrenem simulaciju nekoliko puta i uputim učenike da promatraju i da ponovno obrate pažnju na to koji snop dolazi prvi do detektora.

### Što ste opazili? Što je različito u odnosu na slučaj kada je brzina strujanja etera bila manja?

- Ponovno je do detektora prvi stigao snop koji se gibao okomito na smjer strujanja etera. Nakon njega je do detektora stigao snop čiji smjer se poklapa sa smjerom strujanja etera, ali s većim zakašnjenjem nego u slučaju kada je brzina etera bila manja.

**Kolika je brzina svjetlosnog snopa čiji smjer se poklapa sa smjerom strujanja etera kada se giba od polupropusnog zrcala  $S$  do zrcala  $Z_1$ ?**

- Prema Galilejevom pravilu zbrajanja brzina, brzina svjetlosnog snopa je  $c + v$ .

**Kolika je brzina svjetlosnog snopa čiji smjer se poklapa sa smjerom strujanja etera kada se giba od zrcala  $Z_1$  do polupropusnog zrcala  $S$  i dalje do detektora?**

- Brzina svjetlosnog snopa je  $c - v$ .

**Jesu li ova opažanja u skladu s vašim očekivanjima?**

- Opažanja učenika su u skladu s predviđenim ishodom eksperimenta da bi hipoteza bila potvrđena.

Michelson i Morley su predviđali isti ishod eksperimenta. Sada ću ponovno pokrenuti simulaciju da vidimo kakav rezultat su Michelson i Morley dobili.

U simulaciji brzinu etera namještam na nulu i pokrećem simulaciju. Simulaciju ću pokrenuti nekoliko puta i uputit ću učenike da pažljivo promatraju.

**Što ste opazili?**

- Učenici iznose svoja opažanja. Učenici su mogli opaziti da su svjetlosni snopovi došli u isto vrijeme.

**Utječe li zaista gibanje Zemlje na brzinu svjetlosti?**

- Na temelju rezultata eksperimenta može se zaključiti da gibanje Zemlje ne utječe na brzinu svjetlosti.

**Što na temelju ovog opažanja možete zaključiti o postavljenoj hipotezi?**

- Budući da ovakav ishod eksperimenta nije u skladu s predviđenim ishodom koji bi bio u skladu s hipotezom, na temelju njega može se zaključiti da postavljena hipoteza nije podržana.

**ZAKLJUČAK: Hipoteza nije podržana.**

**Je li rezultat eksperimenta u skladu s Galilejevom relativnosti?**

- Učenici mogu zaključiti da konačni rezultat eksperimenta nije u skladu s Galilejevom relativnosti.

**Do koje pojave karakteristične za valove dolazi kada se svjetlosni snopovi ponovno spoje? Što će se vidjeti na zastoru kojeg postavimo na mjesto detektora?**

- Učenici bi trebali uočiti da dolazi do interferencije i da se na zastoru može promatrati interferencijska slika.

## Što bi se desilo s interferencijskom slikom na zastoru da su brzine svjetlosnih snopova različite? Zašto?

- Kada bi brzine svjetlosnih snopova bile različite interferencijska slika bi se promijenila zato što ona ovisi o faznom pomaku između snopova, a promjenom brzine jednog od snopova mijenja se i fazni pomak između snopova.

Michelson i Morley nisu mogli promatrati svjetlosne snopove kao što je prikazano u simulaciji jer brzina svjetlosti je prevelika da bi naše oko moglo opaziti razliku u brzini koja bi se javila zbog gibanja Zemlje. Oni su promatrali interferencijsku sliku na zastoru. Zakretali su interferometar i očekivali su da će time doći do promjena u interferencijskoj slici. Da postoji eter, zakretanjem interferometra bi se promijenile brzine svjetlosnih snopova u krakovima, a time bi došlo i do promijene u fazi što bi se vidjelo po promjeni interferencijske slike. Međutim, interferencijska slika se nije mijenjala pri rotaciji interferometra što je vodilo na zaključak da su brzine svjetlosnih snopova jednake kao što ste mogli opaziti u simulaciji.

Budući da se rezultati eksperimenta nisu mogli objasniti u okvirima klasične fizike i Galilejeve relativnosti, Albert Einstein je 1905. godine objavio novu teoriju u sklopu koje se mogu objasniti rezultati Michelson-Morleyeva eksperimenta. Ta nova teorija naziva se **specijalna teorija relativnosti** i temelji se na dva postulata:

### **Prvi Einsteinov postulat: Načelo relativnosti**

Fizikalni zakoni moraju biti jednaki u svim inercijalnim sustavima.

### **Drugi Einsteinov postulat: Načelo stalnosti brzine svjetlosti**

Brzina svjetlosti u vakuumu jednaka je za sve promatrače u svim inercijalnim sustavima i ne ovisi o brzini izvora svjetlosti ili opažača.

## **Podsjeća li vas prvi postulat na nešto?**

- Očekujem da se učenici prisjete Galilejevog načela relativnosti i uoče sličnost.

Prvi Einsteinov postulat je proširenje Galilejevog načela relativnosti na sve fizičke zakone, dakle i na zakone elektromagnetizma. Prema prvom postulatu svi inercijalni sustavi su ravnopravni i zakoni fizike su jednaki za opažače u svim inercijalnim sustavima. To da su zakoni fizike jednaki znači da imaju isti matematički oblik u svim inercijalnim sustavima. Zbog ravnopravnosti svih inercijalnih sustava odbačena je ideja o postojanju etera. Drugi Einsteinov postulat govori upravo o tome što smo opazili u simulaciji. Brzina svjetlosti jednaka je u svim inercijalnim sustavima.

### 3. ZAVRŠNI DIO SATA

#### Konceptualna pitanja

1. Sustav  $S$  se giba jednolikom brzinom  $v$  u odnosu na sustav  $S'$ . Marko u sustavu  $S$  upali svjetiljku i mjeri brzinu svjetlosti  $c$ . Koliku brzinu svjetlosti svjetiljke izmjeri Petar u sustavu  $S'$  ako je Marko usmjerio svjetiljku prema Petru?

- A) Petar će izmjeriti da je brzina svjetlosti  $c + v$ .
- B) Petar će izmjeriti da je brzina svjetlosti  $c$ .
- C) Petra će izmjeriti da je brzina svjetlosti  $c - v$ .
- D) Odgovor je A) ili C), ovisi o tome giba li se sustav  $S$  prema Petru ili od Petra.

Točan odgovor: B)

2. U procesu anihilacije elektrona i pozitrona nastanu dva fotona koji se gibaju po istome pravcu u suprotnim smjerovima. Fizičar u laboratoriju izmjeri da se oba fotona gibaju brzinom  $c$ . Astronaut u raketi koja se giba stalnom brzinom  $v$  pored laboratorija također mjeri njihove brzine? Što je astronaut izmjerio?

- A) Oba fotona se gibaju brzinom  $c$ .
- B) Jedan foton se giba brzinom  $c - v$ , a drugi se giba brzinom  $c + v$ .
- C) Oba fotona se gibaju brzinom  $c + v$ .
- D) Oba fotona se gibaju brzinom  $c - v$ .

Točan odgovor: A)

3. Prema postulatima specijalne teorije relativnosti, u koja dva sustava Faradayev zakon elektromagnetske indukcije ima isti oblik?

- A) U inercijalnom sustavu  $A$  i sustavu  $B$  koji se giba u odnosu na sustav  $A$  jednoliko ubrzano.
- B) U inercijalnom sustavu  $C$  i sustavu  $D$  koji se u odnosu na sustav  $C$  giba stalnom brzinom.
- C) U inercijalnom sustavu  $E$  i sustavu  $F$  koji se giba po kružnoj putanji oko sustava  $E$ .

Točan odgovor: B)

### Lista za samoprocjenu

ISHOD	DA	DONEKLE	NE
Mogu opisati kako radi interferometar.			
Mogu opisati Michelson-Morleyev pokus.			
Mogu objasniti rezultate Michelson-Morleyevog pokusa.			
Mogu navesti postulate specijalne teorije relativnosti.			
Mogu objasniti značenje postulata specijalne teorije relativnosti.			
Mogu primijeniti postulate specijalne teorije relativnosti na zadane probleme.			
Mogu osmisliti hipotezu.			
Mogu osmisliti eksperimentalni test za provjeru valjanosti hipoteze.			
Mogu argumentirati svoja predviđanja za ishod eksperimenta.			
Mogu zaključiti o valjanosti hipoteze na temelju ishoda eksperimenta.			

Tablica 8.1: Lista za samoprocjenu učenika.

## Literatura

- [1] Roche, J. What is mass? // European Journal of Physics. Vol. 26, 1-18 (2005)
- [2] Okun, L. B. The concept of mass. // Physics Today. Vol. 42, 31-36 (1989.)
- [3] Okun, L. B. Mass versus relativistic and rest masses. // American Journal of Physics. Vol. 77, 430-431 (2009.)
- [4] Adler, C. G. Does mass really depend on velocity, dad? // American Journal of Physics. Vol. 55, 739-743 (1987.)
- [5] Hecht, E. Einstein on mass and energy. // American Journal of Physics. Vol. 77, 799-806 (2009.)
- [6] Hecht, E. Einstein Never Approved of Relativistic Mass. // The Physics Teacher. Vol. 47, 336-341 (2009.)
- [7] Oas, G. On the Abuse and Use of Relativistic Mass. // arXiv:physics/0504110, (2005).
- [8] Sandin, T. R. In defense of relativistic mass. // American Journal of Physics. Vol. 51, 1032-1036 (1991.)
- [9] Rindler, W.; Vandyck, M. A.; Murugesan, P.; Ruschin, S.; Sauter, C.; Okun, L. B. Putting to Rest Mass Misconceptions. // Physics Today. Vol. 43, 13-15, 115-117 (1990.)
- [10] Griffiths, D. J. Introduction to Electrodynamics. 3. izdanje. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- [11] Morin, D. Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [12] Žugec, P.; Klajn, B. Malo relativistike. // Matematičko fizički list. Vol. 65, Br. 259, 180-190 (2015.)
- [13] Dyadics, (13.1.2022.), Wikipedia, <https://en.wikipedia.org/wiki/Dyadics>, 24.1.2022.
- [14] Pravilnik o izmjenama Pravilnika o mjernim jedinicama (5.2.2020.), Narodne Novine, [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2020\\_02\\_16\\_396.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2020_02_16_396.html), 7.2.2022.
- [15] Planinić, M. Skripta iz metodike nastave fizike 1. Akademski godina 2020./2021.



- [16] Planinić, M. Specijalna teorija relativnosti, predavanje iz metodike nastave fizike 2. Akademska godina 2020./2021.
- [17] Labor, J. Fizika 3: Udžbenik za treći razred gimnazije. 3. izdanje. Zagreb: Alfa, 2009
- [18] Paar, V.; Hrlec, A.; Vadjla Rešetar, K.; Sambolek, M. Fizika oko nas 4: udžbenik fizike u četvrtom razredu gimnazije. 1. izdanje. Zagreb: Školska knjiga, 2021.
- [19] Brković, N. Zbirka zadataka iz fizike, III. dio. 1. izdanje. Zagreb: LUK d.o.o., 2001.
- [20] Michelson-Morley Experiment, (1.2.2022.), [https://galileoandstein.phys.virginia.edu/more\\_stuff/Applets/MichelsonMorley/michelsonmorley.html](https://galileoandstein.phys.virginia.edu/more_stuff/Applets/MichelsonMorley/michelsonmorley.html)