Tihonovljev teorem

Crnogorac, Tomislav

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tomislav Crnogorac

TIHONOVLJEV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Maja Resman

Zagreb, veljača, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ___________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Diplomski rad posvećujem ponajviše svojim roditeljima koji su kroz sve godine studiranja bili uz mene, pružajući mi sve što je bilo potrebno za uspješno akademsko putovanje.

Zahvaljujem mentorici, prof. Resman, na ugodnoj suradnji i pomoći prilikom pisanja rada.

Nadalje, zahvaljujem svojim kolegama i prijateljima koji su me podupirali u svim teškim trenucima koliko na fakultetu, toliko i izvan njega.

Na kraju, zahvaljujem i svojoj djevojci na dugogodišnjoj potpori, strpljenju i savjetima kojima me je uputila u pravom smjeru.

Sadržaj

Uvod

U matematici, od ranih godina 20. stoljeća razvijala se još jedna njezina grana, koju danas nazivamo topologija. Ona se na početku bavila poopćenjima raznih matematičkih pojmova koji su do tada već bili poznati u euklidskim prostorima.

Jedan od matematičara tog doba je Andrej N. Tihonov, koji je u svojoj matematičkoj karijeri, najveći trag ostavio upravo u topologiji. Važan teorem koji danas nosi njegovo ime on je prvi dokazao u punoj općenitosti 1930. godine. U ovom radu ćemo iskazati Tihonovljev teorem i predstaviti nekoliko njegovih dokaza.

Slika 0.1: Andrej N. Tihonov

Međutim, veći dio ovog rada pripremat će nas da bismo shvatili iskaz teorema i uvesti "alate" kojima ćemo pokazati tvrdnju. Temeljna struktura koju ćemo promatrati je topološki prostor te je prvi dio posvećen upravo temeljnim pojmovima i tvrdnjama o topološkim prostorima. U ovom dijelu ćemo se često vraćati na metričke prostore, te ćemo generalizirati tvrdnje koje vrijede u tim prostorima. Nadalje, pokazat ćemo važnost nizova u topološkim prostorima, ali i poteškoće koje donosi njihovo korištenje. U svrhu rješavanja tih poteškoća, definirat ćemo poopćenja nizova, tzv. mreže i filtre. Osvrnut ćemo se na svojstvo kompaktnosti u općenitim topološkim prostorima i njegove karakterizacije pomoću mreža i filtara. U zadnjem poglavlju ćemo iskazati i dokazati Tihonovljev teorem koji tvrdi da je produkt kompaktnih topoloških prostora kompaktan u produktnoj topologiji.

Poglavlje 1

Topologija

1.1 Temeljni pojmovi

Pojmove neprekidnosti funkcija, nizove i konvergenciju u matematici obično počinjemo promatrati na euklidskim ili metričkim prostorima. Ono što karakterizira metričke prostore je funkcija udaljenosti točaka d. Pomoću te funkcije i definiramo navedene pojmove. Međutim, postavljalo se pitanje o postojanju općenitije strukture kod koje bismo mogli napustiti ideju o udaljenosti točaka. Ta struktura je središnji pojam ovog rada, kojeg ćemo sada definirati.

Definicija 1.1.1 (Topologija na skupu X, [1])**.** *Neka je $X \neq \emptyset$.* ***Topologija na skupu*** *X je familija τ podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:*

(T-1) $\emptyset, X \in \tau$,

(T-2) unija proizvoljno mnogo elemenata iz τ je u τ,

(T-3) presjek konačno mnogo elemenata iz τ je u τ.

Nadalje, uređeni par (X, τ) naziva se ***topološki prostor****, a elemente $U \in \tau$ zovemo* ***otvorenim skupovima u*** *X.*

Prethodna definicija formirala se kroz duži vremenski period. Matematičari su imali brojne pokušaje konstruiranja prikladne definicije za strukturu topološkog prostora. Glavni problem je bio osiguravanje dovoljne općenitosti unutar definicije ovih prostora, a da se pritom ne naruše teoremi koji vrijede za posebnu skupinu topoloških prostora, metričke prostore [1].

Primjer 1.1.2.

a) Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ i $\tau = \{\emptyset, \{1\}, X\}$. Tada je (X, τ) topološki prostor jer zadovoljava svojstva (T-1) - (T-3).

b) Pogledajmo jedan sličan primjer kao u a). Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ i $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$. U ovom slučaju, (X, τ) nije topološki prostor jer ne zadovoljava svojstvo (T-2):

$$\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \tau.$$

c) Neka je $X \neq \emptyset$ i τ_f familija podskupova od X dana na sljedeći način:

$$\tau_f = \{X, \text{svi skupovi kojima je komplement konačan}\}.$$

Tada je τ_f topologija koja se zove **kofinitna topologija**, te zadovoljava potrebna svojstva (T-1) - (T-3) [1].

d) Neka je $X \neq \emptyset$. Promotrit ćemo dva granična slučaja. Familija svih podskupova od X naziva se **diskretna topologija**, a familija koja se sastoji samo od $\emptyset$ i X naziva se **trivijalna topologija**.

e) (Metrička topologija)
Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Skupove

$$K(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

nazivamo **otvorenim kuglama** sa središtem u x_0 i radijusa r. Unije ovako definiranih otvorenih kugala čine topologiju na X koju zovemo **topologija generirana metrikom** d. Koristeći metriku, može se pokazati da je ovo zaista topologija na X, odnosno da zadovoljava svojstva (T-1) - (T-3) [3]. Stoga, u metričkom prostoru, skup $A \subseteq X$ je otvoren ako za svaki $a \in A$, postoji otvorena kugla $K(a, r)$ koja je sadržana u A.

Promotrimo sada neki "manji" skup koji generira tu topologiju. Taj skup nazivamo bazom topologije, po uzoru na npr. bazu vektorskog prostora koja na neki način generira taj prostor.

Definicija 1.1.3 (Baza topologije τ, [3])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor.* ***Baza topologije*** *τ na X je familija $\mathcal{B} \subseteq \tau$, takva da se τ može izraziti kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$.*

Definicija 1.1.4 (Podbaza topologije na X, [1])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor.* ***Podbaza topologije τ na*** *X je familija $\mathcal{P} \subseteq \tau$, takva da je topologija τ jednaka familiji svih unija konačnih presjeka elemenata iz $\mathcal{P}$.*

Sljedeći teorem, kojeg nećemo pokazati ovdje, daje nam nužne uvjete koja baza neke topologije na X mora ispunjavati.

Teorem 1.1.5 (Baza neke topologije na X, [3])**.** *Neka je $X \neq \emptyset$. **Baza topologije na** X je familija podskupova od X koja zadovoljava svojstva:*

(B-1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$,

(B-2) za $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i $x \in B_1 \cap B_2$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je

$$x \in B \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Ukoliko $\mathcal{B}$ zadovoljava svojstva baze za neku topologiju, tada postoji jedinstvena topologija τ kojoj je $\mathcal{B}$ baza, te je τ jednaka familiji svih unija elemenata iz $\mathcal{B}$.

Primjer 1.1.6.

a) Neka je (X, d) metrički prostor i $\mathcal{B}$ familija otvorenih kugala na X. $\mathcal{B}$ je baza topologije na X. Svojstvo (B-1) ispunjeno je jer:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K(x_0, n), x_0 \in X.$$

Prije nego što pokažemo (B-2), pokazat ćemo da za svaki $y \in K(x, R)$, možemo pronaći $r > 0$, takav da je $K(y, r) \subseteq K(x, R)$. Možemo uzeti $r = R - d(x, y)$. Tada za $z \in K(y, r)$ vrijedi

$$d(y, z) < R - d(x, y).$$

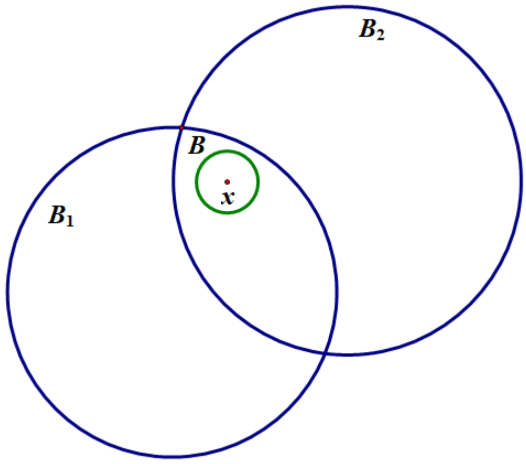
No tada, zbog svojstava metrike [4], vrijedi

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < R.$$

Time smo pokazali da je $K(y, r) \subseteq K(x, R)$.
Sada pokažimo (B-2). Uzmimo $x \in B_1 \cap B_2$, gdje su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Pokazali smo da postoje $K(x, r_1) \subseteq B_1$ i $K(x, r_2) \subseteq B_2$. Za $r := \min\{r_1, r_2\}$ vrijedi da je

$$x \in K(x, r) \subseteq B_1 \cap B_2,$$

gdje je $B = K(x, r)$ traženi element iz $\mathcal{B}$. Slika 1.1 prikazuje otvorene kugle koje čine bazu tzv. **metričke topologije generirane euklidskom metrikom** d koju nazivamo **euklidskom topologijom**. Otvoreni skupovi u toj topologiji su proizvoljne unije kugala iz $\mathcal{B}$.



Slika 1.1: Bazni elementi metričke topologije na $\mathbb{R}^2$ generirane euklidskom metrikom

b) Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ i familija $\mathcal{B} = \{X, \{1\}, \{2\}\}$. Tada $\mathcal{B}$ zadovoljava svojstva (B-1) i (B-2) baze za neku topologiju. Jedinstvena topologija koju generira ova baza $\mathcal{B}$ je

$$\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

c) Baza topologije na X za diskretni topološki prostor (X, τ) je familija

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}.$$

Familija svih mogućih unija elemenata iz $\mathcal{B}$ je jednaka $\mathcal{P}(x)$, a to je upravo diskretna topologija, stoga po Teoremu 1.1.5, $\mathcal{B}$ je baza topologije τ_d.

d) Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ i familija $\mathcal{B} = \{X, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Kada bismo uzeli sve moguće unije elemenata iz $\mathcal{B}$, dobili bismo familiju

$$\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, X\}.$$

Međutim, ona ne zadovoljava svojstva topologije na X. Naime, svojstvo (T-3) nije ispunjeno jer je

$$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\},$$

što nije element te familije.

Neki koncepti koje vežemo uz euklidske i metričke prostore mogu se poopćiti u topološkim prostorima.

Definicija 1.1.7 (Zatvoren skup, [3])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor. Kažemo da je $A \subseteq X$* ***zatvoren u*** *X ako je skup $X \setminus A$ otvoren u X.*

Definicija topologije (Definicija 1.1.1) govori da je τ, familija otvorenih skupova u X, zatvorena na proizvoljne unije i konačne presjeke svojih elemenata. Direktna posljedica ovoga za familiju zatvorenih skupova $\mathcal{F}$ dana je u Teoremu 1.1.8

Teorem 1.1.8 ([2])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor. Tada familija $\mathcal{F}$ zatvorenih skupova u X, ima sljedeća svojstva:*

(C-1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,

(C-2) unija konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{F}$ je u $\mathcal{F}$,

(C-3) presjek proizvoljno mnogo elemenata iz $\mathcal{F}$ je u $\mathcal{F}$.

Teorem nećemo ovdje dokazati, sve tvrdnje slijede direktno iz (T-1), (T-2) i (T-3) [3].

Primjer 1.1.9.

a) U metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$, segmenti $[a, b]$ su zatvoreni. Zaista, komplement ovog segmenta u $\mathbb{R}$ je
$$\langle -\infty, a\rangle \cup \langle b, +\infty\rangle.$$
Ovaj skup je otvoren kao unija otvorenih kugala u $\mathbb{R}$, pa je segment $[a, b]$ zatvoren po definiciji.

b) U diskretnom topološkom prostoru (X, τ) vrijedi da je svaki $A \subseteq X$ otvoren, ali je i $X \setminus A$ otvoren kao podskup od X. Slijedi da je A ujedno i zatvoren po definiciji.

c) Neka je (X, τ_f) topološki prostor s kofinitnom topologijom. Zatvoreni skupovi u X, osim cijelog skupa X, su svi $A \subseteq X$ koji su konačni.

Definicija 1.1.10 (Interior skupa, [1])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor i $A \subseteq X$.* ***Interior ili nutrina skupa*** *A, u oznaci Int A, je unija svih otvorenih skupova u X sadržanih u A, odnosno:*
$$\operatorname{Int} A = \bigcup \{K \subseteq X : K \subseteq A, K \text{ otvoren u } X\}.$$

Definicija 1.1.11 (Zatvarač skupa, [1])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor i $A \subseteq X$.* ***Zatvarač skupa*** *A, u oznaci $\overline{A}$, je presjek svih zatvorenih skupova u X koji sadrže A, odnosno:*

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq X : A \subseteq F, F \text{ zatvoren u } X\}.$$

Iz definicija interiora i zatvarača možemo vidjeti da vrijede sljedeće dvije inkluzije koje će se pokazati korisnim unutar nekih dokaza: za $A \subseteq X$ topološkog prostora (X, τ) vrijedi:

$$\operatorname{Int} A \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

Također, vrijedi da je $\operatorname{Int} A$ otvoren kao unija otvorenih skupova, a $\overline{A}$ zatvoren kao presjek zatvorenih skupova. Zatvarače ćemo češće promatrati nego interiore, zbog njihove povezanosti s nizovima (Poglavlje 2), no sada pokažimo karakterizaciju zatvarača skupa u topološkom prostoru.

Teorem 1.1.12 (Karakterizacija zatvarača u topološkom prostoru, [1])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor i $A \subseteq X$. Točka $x \in X$ se nalazi u zatvaraču skupa A ako i samo ako za svaki otvoren skup U koji sadrži x vrijedi:*

$$U \cap A \neq \emptyset.$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo pokazati pomoću obrata po kontrapoziciji, točnije pokazat ćemo:

$$x \notin \overline{A} \iff \text{postoji } U \in \tau, x \in U, \text{ takav da je } U \cap A = \emptyset.$$

($\Rightarrow$) Pretpostavimo $x \notin \overline{A}$. Skup $\overline{A}$ je zatvoren u X, stoga je

$$U := X \setminus \overline{A}$$

otvoren i sadrži x. Općenito vrijedi i $A \subseteq \overline{A}$, stoga je

$$U \cap A = \emptyset,$$

što smo i htjeli pokazati.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo da postoji U otvoren u X, $x \in U$ takav da vrijedi

$$U \cap A = \emptyset.$$

Tada je $X \setminus U$ zatvoren i vrijedi:

$$A \subseteq X \setminus U.$$

No, po definiciji zatvarača od A,

$$\overline{A} \subseteq X \setminus U.$$

Konačno, po pretpostavci je $x \in U$, stoga

$$x \notin \overline{A}.$$

□

Unutar dokaza Teorema 1.1.12. promatrali smo otvorene skupove U koji sadrže x. U nastavku, takve skupove ćemo zvati **okoline** točke $x \in X$.

Definicija 1.1.13 (Okolina točke x, [3])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor i $x \in X$.* ***Okolina točke*** *x je otvoren skup U koji sadrži x. Familiju svih okolina od x označavamo $\mathcal{U}_x$.*

Istaknimo samo da bi točnija definicija okoline točke $x \in X$ bila skup $U \subseteq X$, takav da je

$$x \in \operatorname{Int} U,$$

ali mi ćemo pod pojmom okolina u većini rada podrazumijevati da je okolina otvoren skup, odnosno element topologije koji sadrži $x \in X$. [4]

Teorem 1.1.14 ([3])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor i $x \in X$. Tada familija $\mathcal{U}_x$ ima sljedeća svojstva:*

(O-1) ako je $U \in \mathcal{U}_x$, onda je $x \in U$,

(O-2) ako su $U, V \in \mathcal{U}_x$, onda je i $U \cap V \in \mathcal{U}_x$,

(O-3) ako je $U \in \mathcal{U}_x$ i $U \subseteq V$, onda je $V \in \mathcal{U}_x$.

Svojstvo (O-3) vrijedi za općenitiju definiciju okoline koju smo spomenuli prije teorema. Dokaz nećemo ovdje napraviti, može se pronaći u [4].

Definicija 1.1.15 (Baza okolina, [3])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor i $x \in X$.* ***Baza okolina točke*** *x je familija $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x$, takva da za svaki $U \in \mathcal{U}_x$, postoji $B \in \mathcal{B}_x$, takva da je $x \in B \subseteq U$. Kažemo da su elementi $B \in \mathcal{B}_x$* ***bazne okoline točke*** *x.*

Primjer 1.1.16.

a) Neka je (X, d) metrički prostor. Za svaku točku $x \in X$ možemo definirati

$$\mathcal{B}_x = \{K(x, r) : r > 0\}.$$

Tada je $\mathcal{B}_x$ baza okolina točke $x \in X$. Umjesto ovako definirane baze okolina točke, možemo za svaku točku $x \in X$ definirati

$$\mathcal{B}'_x = \{K(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\},$$

čime ćemo dobiti prebrojivu bazu okolina točke metričkog prostora (X, d).

b) U diskretnom topološkom prostoru (X, τ), svaka točka $x \in X$ ima bazu okolina koja se sastoji od jednočlanog skupa $\{x\}$.

1.2 Preslikavanja topoloških prostora

Ovdje ćemo kratko promatrati funkcije s jednog topološkog prostora na drugi. Najviše će nas zanimati kako iz metričkih prostora generalizirati svojstvo **neprekidnosti funkcije** u topološkom prostoru.

Definicija 1.2.1 (Neprekidnost funkcije, [2])**.** *Neka su (X, τ_x) i (Y, τ_y) topološki prostori. Kažemo da je funkcija $f : X \to Y$* ***neprekidna u točki*** *$x \in X$, ako za svaku okolinu V točke $f(x)$, postoji okolina U točke x, takva da je*

$$f(U) \subseteq V.$$

Nadalje, kažemo da je f ***neprekidna na*** *X ako je neprekidna u svakoj točki $x \in X$.*

Lako se provjeri da u definiciji neprekidnosti okoline možemo zamijeniti baznim okolinama i često ćemo tako raditi. Sljedeći rezultat je karakterizacija neprekidnosti pomoću otvorenih i zatvorenih skupova koju navodimo kao teorem, a dokaz ([1], [4]) ćemo izostaviti.

Teorem 1.2.2 (Karakterizacija neprekidnosti, [1])**.** *Neka su (X, τ_x) i (Y, τ_y) topološki prostori i funkcija $f : X \to Y$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) f je neprekidna na X,

(ii) za svaki otvoren skup V u Y, skup $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ je otvoren u X.

(iii) za svaki zatvoren skup F u Y, skup $f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \in F\}$ je zatvoren u X,

(iv) za svaki $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Sada bismo htjeli izdvojiti jednu klasu preslikavanja između topoloških prostora koje čuvaju topološku strukturu. U algebarskim strukturama postoje preslikavanja koja nazivamo izomorfizmima. To su bijekcije koje čuvaju svojstva te algebarske strukture [1]. Sličan pojam imamo u topološkim prostorima.

Definicija 1.2.3 (Homeomorfizam, [3])**.** *Neka su X, Y topološki prostor i $f : X \to Y$ bijekcija. Ako su funkcije f i $f^{-1} : Y \to X$ neprekidne, tada kažemo da je f* ***homeomorfizam****.*

Ukoliko postoji homeomorfizam između topoloških prostora X i Y, kažemo da su ti prostori **homeomorfni**. Homeomorfizmi čuvaju topološku strukturu. Sa stajališta topologije, homeomorfni prostori su jednaki, do na bijekciju. Odnosno, ako postoji homeomorfizam f između topoloških prostora X i Y, f će preslikati otvoren skup u X u otvoren skup u Y, ali i obrnuto. To slijedi iz karakterizacije neprekidnosti (ii) Teorema 1.2.2, a funkcije

f i f^{-1} su neprekidne po definiciji homeomorfizma. Zbog toga, ne samo da su X i Y povezani tom bijekcijom, nego i za svaku familiju otvorenih skupova od X postoji jedinstvena familija otvorenih skupova u Y. Time se svojstva koja ima topologija na X čuvaju prilikom preslikavanja f i obrnuto. Nadalje, relacija "biti homeomorfan" je relacija ekvivalencije [3], stoga zaista dobivamo klase topoloških prostora koje smatramo jednakima.

Primjer 1.2.4.

a) Otvoreni interval $\langle a, b\rangle$ u $\mathbb{R}$ je homeomorfan prostoru $\langle 0, 1\rangle$. Zaista, preslikavanje $f : \langle 0, 1\rangle \to \langle a, b\rangle$ dano s:
$$f(x) = (b - a)x + a$$
je homeomorfizam. To slijedi iz činjenice da je f neprekidna bijekcija, ali i njen inverz f^{-1} je također neprekidna funkcija.

b) Pokažimo da su $\langle 0, 1\rangle$ i $\mathbb{R}$ homeomorfni. Pronađimo homeomorfizam $f : \mathbb{R} \to \langle 0, 1\rangle$. Neka je $g : \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ dana s:
$$g(x) = \mathrm{arctg}(x).$$
Nadalje, po dijelu a), postoji homeomorfizam $h : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \langle 0, 1\rangle$.
Tada je $f = h \circ g : \mathbb{R} \to \langle 0, 1\rangle$ homeomorfizam kao kompozicija neprekidnih bijekcija g i h. Zaključujemo da su topološki prostori $\langle 0, 1\rangle$ i $\mathbb{R}$ homeomorfni.

1.3 Produktna topologija

Definicija 1.3.1 (Kartezijev produkt skupova, [3]). *Neka je X_i skup, za sve $i \in I$, gdje je I skup indeksa.* ***Kartezijev produkt skupova*** *X_i je skup*

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i : x(i) \in X_i, \text{ za sve } i \in I \right\}$$

Vrijednost $x(i)$ češće označavamo s x_i, te je nazivamo ***i*-ta koordinata**. Indeksni skupovi I mogu biti konačni, prebrojivi i neprebrojivi.

Primjer 1.3.2 ([6]).

a) Za I konačan, tj. $I = \{1, 2, ...n\}$, $\mathbb{R}^n$ možemo shvatiti kao produkt

$$\prod_{i=1}^{n} X_i, \text{ gdje je } X_i = \mathbb{R}, \text{ za } i = 1, ..., n$$

Dakle, s obzirom na Definiciju 1.3.1, $\mathbb{R}^n$ je skup svih funkcija $x : \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{R}$. Vrijednosti funkcije x tada zapisujemo kao uređene n-torke $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

b) Za I prebrojiv, promotrimo

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i, \text{ gdje je } X_i = \mathbb{R}, \text{ za } i \in \mathbb{N}.$$

Taj produkt označavamo s $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, te ga definiramo kao skup svih funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, odnosno skup svih nizova realnih brojeva.

c) Za I neprebrojiv, promotrimo $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Ponovno, u skladu s Definicijom 1.3.1., njega definiramo kao skup svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Uvedimo neke najpoznatije topologije na produktu $\prod_{i\in I} X_i$, ako je (X_i, τ_i) topološki prostor, $i \in I$. Pogledajmo prvo jedan primjer.

Primjer 1.3.3.

Neka je $X = Y = \mathbb{R}$ i pretpostavimo da su (X, d) i (Y, d) metrički prostori s euklidskom metrikom. Promotrimo produkt

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Otvorene kugle, ujedno i bazni elementi topologije generirane metrikom d, u X i Y su otvoreni intervali $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ i $\langle c, d\rangle \subseteq \mathbb{R}$. Za $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definirajmo topologiju čija je baza

$$\{\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle : a < b, c < d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Ova familija zaista zadovoljava svojstva baze za neku topologiju, što se može lako provjeriti, te onda topologiju generiranu ovom bazom nazivamo **produktnom topologijom** na $\mathbb{R}^2$. Može se pokazati da se ona podudara s topologijom generiranom euklidskom metrikom na $\mathbb{R}^2$. Naime, za proizvoljnu točku (x, y) u otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^2$ u metričkoj topologiji, postoji $R > 0$ takav da je

$$K((x, y), R) \subseteq U,$$

jer je familija kugala baza metričke topologije. No, tada možemo pronaći otvoren skup u produktnoj topologiji sadržan u U. Postoji $r > 0$ takav da je

$$\langle x - r, x + r\rangle \times \langle y - r, y + r\rangle \subseteq K((x, y), R).$$

Možemo uzeti $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Tada za svaki $(x_1, y_1) \in \langle x - r, x + r\rangle \times \langle x - r, x + r\rangle$. vrijedi

$$|x - x_1| < r, |y - y_1| < r.$$

No, tada je

$$d((x, y),(x_1, y_1)) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < \sqrt{\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2}} = R,$$

te zaključujemo da je

$$\langle x - r, x + r\rangle \times \langle y - r, y + r\rangle \subseteq K((x, y), R) \subseteq U.$$

Obratno, uzmemo li proizvoljnu točku (x, y) u otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ u produktnoj topologiji, postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da je

$$\langle x - r_1, x + r_1\rangle \times \langle y - r_2, y + r_2\rangle \subseteq U,$$

jer su to bazni elementi produktne topologije po definiciji. Možemo pronaći otvoren skup u metričkoj topologiji koji je sadržan u U. Postoji $R > 0$ takav da je

$$K((x, y), R) \subseteq \langle x - r_1, x + r_1\rangle \times \langle y - r_2, y + r_2\rangle.$$

Možemo uzeti $R = \min\{r_1, r_2\}$. Tada za svaki $(x_1, y_1) \in K((x, y), R)$ vrijedi da je

$$d((x, y),(x_1, y_1)) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < R,$$

odnosno

$$|x - x_1|^2 \leq (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < R^2 \leq r_1^2.$$

No, tada je $|x - x_1| < r_1$. Slično, vrijedi i

$$|y - y_1|^2 \leq (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < R^2 \leq r_2^2,$$

te je tada $|y - y_1| < r_2$. Zaključujemo da je

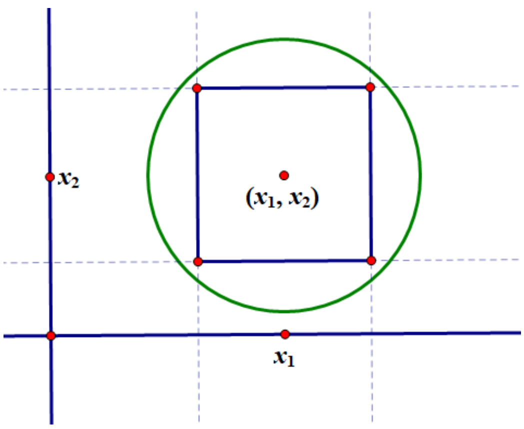
$$K((x, y), R) \subseteq \langle x - r_1, x + r_1 \rangle \times \langle y - r_2, y + r_2 \rangle \subseteq U.$$

Time smo pokazali da se ove dvije topologije podudaraju (Slika 1.2. i Slika 1.3.).

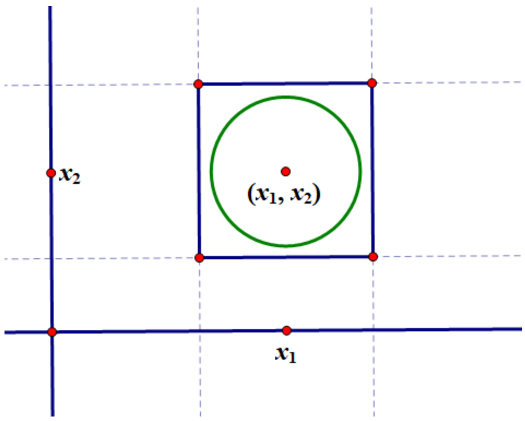
Po uzoru na primjer, na općenitom produktu $X \times Y$ definirajmo topologiju koja za bazu ima

$$\tau_{X \times Y} = \{U \times V : U \in \tau_x, V \in \tau_y\}.$$

To ćemo i napraviti za proizvoljni produkt topoloških prostora.



Slika 1.2: $\tau_d \subseteq \tau_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$



Slika 1.3: $\tau_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \subseteq \tau_d$

Neka su dani topološki prostori (X_i, τ_i), za sve $i \in I$. Ako na produktu $\prod_{i \in I} X_i$ definiramo topologiju čija je baza familija svih skupova oblika:

$$\prod_{i \in I} U_i, \text{ gdje je } U_i \text{ otvoren u } X_i, \text{ za sve } i \in I,$$

topologiju koja je generirana ovom bazom zovemo **box topologija.**

Možemo vidjeti da baza koja generira box topologiju zadovoljava svojstva (B-1) i (B-2) baze topologije (Teorem 1.1.5). Svojstvo (B-1), odnosno da je cijeli prostor $\prod_{i \in I} X_i$ unija baznih elementa, ispunjeno je budući da je on sam jedan bazni element. Za svojstvo (B-2) uzmimo dva elementa baze, $\prod_{i \in I} U_i$ i $\prod_{i \in I} V_i$. Tada vrijedi:

$$(\prod_{i \in I} U_i) \cap (\prod_{i \in I} V_i) = \prod_{i \in I} (U_i \cap V_i),$$

što je ponovo jedan bazni element, budući je $U_i \cap V_i \in \tau_i$, za sve $i \in I$.

Međutim, iako ovako definirana topologija na produktu zaista zadovoljava (T-1) - (T-3) [1], možemo pronaći jednu "manju" topologiju na produktu.

Definicija 1.3.4 (Produktna topologija, [3])**.** *Neka su (X_i, τ_i) topološki prostori, za sve $i \in I$. Topologija na $\prod_{i\in I} X_i$ koja za bazu ima $\prod_{i\in I} U_i$, takvu da vrijedi:*

(P-1) U_i otvoren u X_i, za sve $i \in I$,

(P-2) za sve osim konačno mnogo $i \in I$ je $U_i = X_i$,

*naziva se **produktna topologija na** $\prod_{i\in I} X_i$.*

Provjerimo da baza $\mathcal{B}$ produktne topologije zadovoljava svojstva (B-1) i (B-2). Neka je

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} U_i : U_i \in \tau_i, \text{ za sve } i \in I \text{ te } U_i = X_i, \text{ za sve osim konačno mnogo } i \in I\}.$$

(B-1) Cijeli prostor $\prod_{i\in I} X_i$ je unija baznih elemenata jer je $\prod_{i\in I} X_i$ bazni element.
(B-2) Uzmimo dva elementa iz $\mathcal{B}$. Tada je

$$(\prod_{i\in I} U_i) \cap (\prod_{i\in I} V_i) = \prod_{i\in I}(U_i \cap V_i),$$

a vrijedi da je $U_i \cap V_i \in \tau_i$, za sve $i \in I$ i $U_i \cap V_i = X_i$, za sve osim konačno mnogo $i \in I$. Presjek dva elementa iz $\mathcal{B}$ je opet u $\mathcal{B}$, stoga je (B-2) ispunjeno.

Definicija 1.3.5 (Projekcija, [1])**.** *Neka je $\prod_{i\in I} X_i$ produktni topološki prostor. Preslikavanje $\pi_k : \prod_{i\in I} X_i \to X_k$ dano s:*

$$\pi_k((x_i)_{i\in I}) = x_k,\ k \in I$$

*nazivamo **projekcija** s $\prod_{i\in I} X_i$ na X_k.*

Produktna topologija može se i definirati na drugi način, podbazom. Primijetimo da je familija

$$\mathcal{P} = \{\pi_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \in \tau_i\},$$

podbaza produktne topologije.

Razlog tome je što se svaki bazni element produktne topologije $\prod_{i\in I} U_i$, gdje je $U_i = X_i$, osim za konačno mnogo $i = i_1, ...i_n$, može prikazati kao

$$\prod_{i\in I} U_i = \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}),$$

pa je po Definiciji 1.1.4., $\mathcal{P}$ podbaza produktne topologije.

Drugi naziv za produktnu topologiju je **Tihonovljeva topologija**, te se pojavljuje u Tihonovljevom teoremu. U slučaju konačnog skupa indeksa I, box topologija i produktna topologija se podudaraju, no općenito je produktna topologija podskup box topologije. To možemo vidjeti preko baza tih topologija. Naime, uzmemo li bazni element produktne topologije $\prod_{i \in I} U_i$, on će po definiciji biti i bazni element box topologije. No, bazni element box topologije ne mora biti bazni element produktne. Primjer koji to ilustrira možemo pronaći na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pogledajmo skup

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \langle -1, 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Taj skup je bazni element u box topologiji jer je $\langle -1, 1 \rangle$ otvoren u $\mathbb{R}$. Međutim, nije bazni element u produktnoj topologiji. Oko točke $(0, 0, ...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, u njega se ne može upisati niti jedan bazni element produktne topologije. Stoga smo našli otvoren skup (štoviše, i bazni element) u box topologiji koji nije otvoren u produktnoj topologiji.

Teorem 1.3.6 ([3])**.** *Neka su $X_i, i \in I$ topološki prostori. Projekcija $\pi_k : \prod_{i \in I} X_i \to X_k$ je neprekidna na $\prod_{i \in I} X_i$ s produktnom topologijom.*

Dokaz. Neka je U_k otvoren u X_k. Tada je

$$\pi_k^{-1}(U_k) = U_k \times \prod_{i \in I, i \neq k} X_i$$

Kako je U_k otvoren u X_k, tada je $U_k \times \prod_{i \in I, i \neq k} X_i$ otvoren u produktnoj topologiji (čak i bazni element). Pokazali smo da je praslika otvorenog skupa u X_k otvoren u $\prod_{i \in I} X_i$, pa je π_k neprekidna po karakterizaciji neprekidnosti. □

Istaknimo samo da će tvrdnja prethodnog teorema vrijediti i ako promatramo $\prod_{i \in I} X_i$ s box topologijom, što se može vidjeti i u samom dokazu.

Poglavlje 2

Mreže i filtri

2.1 Nizovi

U ovom poglavlju ponovit ćemo i proširiti znanja o jednom od temljenih pojmova matematičke analize, nizovima. Koncept niza poprilično je jasan i ljudima izvan matematike, a u našem matematičkom obrazovanju nizovi prirodnih, malo kasnije i realnih brojeva, promatraju se vrlo rano. U općenitim topološkim prostorima s nizovima radimo na sličan način, no ubrzo primjećujemo da nas intuicija koja nas je vodila u realnom svijetu ovdje napušta.

Definicija niza realnih brojeva prirodno se može proširiti na bilo koji neprazan skup X, kao i oznake na koje smo već naviknuti.

Definicija 2.1.1 (Niz u skupu X, [4])**.** ***Niz u skupu*** *$X \neq \emptyset$ je svako preslikavanje $x : \mathbb{N} \to X$. Vrijednost $x(n) \in X$, kraće zapisana x_n, naziva se* ***n-ti član niza****.*

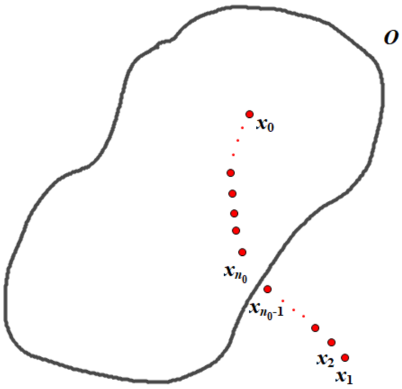
Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ najčešće ćemo označavati (x_n). Koristeći pojam okoline iz prvog poglavlja, slično se kao kod nizova realnih brojeva, definira i konvergencija niza (x_n) u općenitom topološkom prostoru.

Definicija 2.1.2 (Konvergencija niza, [4])**.** *Neka je (x_n) niz u topološkom prostoru (X, τ) i $x_0 \in X$. Kažemo da niz (x_n)* ***konvergira*** *ili* ***teži*** *prema x_0 ako za svaku okolinu O točke x_0, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $x_n \in O$.*

Vrlo je važno da točka x_0 zaista bude iz X, kako bismo mogli reći da je niz (x_n) konvergentan u X. Taj x_0 nazivamo **limes ili granična vrijednost niza** (x_n) te zapisujemo kao

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Prethodna definicija govori nam zapravo sljedeće: u svakoj okolini O točke x_0 nalazi se beskonačno mnogo članova niza, a izvan te okoline "samo" konačno mnogo $(x_1, x_2, ..., x_{n_0-1})$.



Slika 2.1: Konvergencija niza (x_n)

Primjer 2.1.3.

a) Pogledajmo metrički prostor $(\mathbb{R}^2, d)$ s euklidskom metrikom. Neka je niz $x_n = (1 + \frac{1}{n}, \frac{2}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Prisjetimo se, okoline točke (x_0, y_0) u ovom prostoru su otvorene kugle

$$K((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x_0, y_0), (x, y)) < r\}.$$

Rezultat koji je poznat iz realne analize govori da će (x_n) biti konvergentan ako i samo ako su oba komponentna niza konvergentna u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$ s metrikom $d(x, y) = |x - y|$. Kasnije ćemo pokazati generalnu tvrdnju za općenite topološke prostore. Ovdje je to ispunjeno i limes niza (x_n) je točka $(1, 0)$. Naime, uzmemo li bilo koju otvorenu kuglu $K((1, 0), r)$ u $\mathbb{R}^2$ oko limesa, možemo pronaći $n_r \in \mathbb{N}$, takav da je

$$x_n \in K((1, 0), r), \text{ za sve } n \geq n_r.$$

Neka je $x_n = (x'_n, x''_n)$. Tada, zbog konvergencije niza x'_n u $(\mathbb{R}, d)$, znamo da za svaki $r > 0$, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$, takav da je za sve $n \geq n_1$,

$$|x'_n - 1| < \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Slično, za x''_n, postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je za sve $n \geq n_2$,

$$|x''_n - 0| < \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Neka je $n_r :=$ max $\{n_1, n_2\}$. Tada, za sve $n \geq n_r$, vrijedi

$$d((x'_n, x''_n), (1,0)) = \sqrt{(x'_n - 1)^2 + (x''_n - 0)^2} < \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2}} = r,$$

pa je $x_n \in K((1,0), r)$, za sve $n \geq n_r$.

b) Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ topološki prostor s topologijom $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$. Niz (x_n) zadan je na sljedeći način:

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ neparan}, \\ 3, & n \text{ paran}. \end{cases}$$

Provjerimo na ovom primjeru konvergenciju niza (x_n).

Kad bi 1 bio limes ovog niza, svaka okolina (podskup iz τ) koja sadrži 1, sadržavala bi sve osim konačno mnogo članova niza. Međutim, okolina $\{1\}$ ne sadrži 3, pa zbog toga ne sadrži beskonačno mnogo članova niza.

Nadalje, 3 je limes ovog niza jer jedina okolina koja sadrži 3 je X, a ona sadrži sve članove niza.

Na kraju, možemo provjeriti konvergira li niz možda i prema točki 2. Zaista, slično kao što smo zaključili za 3, možemo zaključiti i ovdje: jedina okolina koja sadrži 2 je cijeli X, a on sadrži sve članove niza, stoga je 2 također limes.

Kroz ovaj primjer htjeli smo ilustrirati nejedinstvenost limesa, pojavu koja nije karakteristična za realne nizove, te pokazati da moramo biti oprezni s nizovima u općenitom topološkom prostoru. Još jedna činjenica koja je neočekivana jest da je 2 limes ovog niza, iako intuitivno to možda ne bismo zaključili. Razlog tome je što naša intuicija konvergencije dolazi iz realnih nizova, tj. iz euklidske topologije koja sa sobom nosi standardnu funkciju udaljenosti točaka.

Definicija 2.1.4 (Gomilište niza, [4])**.** *Neka je (x_n) niz u topološkom prostoru i $x_0 \in X$. Kažemo da je x_0 gomilište niza (x_n) ako za svaku okolinu O točke x_0 i za svaki $n_0 \in \mathbb{N}$, postoji $n > n_0$, takav da je $x_n \in O$.*

Nažalost, nizovi definirani u Definiciji 2.1.1. "gube na snazi" u općenitom topološkom prostoru. Izdvojimo dva važna teorema koja vrijede samo na jednoj klasi topoloških prostora, na tzv. 1-prebrojivim prostorima. Specijalno, vrijede i na metričkim prostorima.

Teorem 2.1.5 ([4])**.** *Neka je (X, d) metrički prostor te $A \subseteq X$. Ako je (x_n) niz u A koji konvergira prema $x_0 \in X$, onda je $x_0 \in \overline{A}$. Obrnuto, ako je $x_0 \in \overline{A}$, onda postoji niz (x_n) u A koji konvergira prema x_0.*

Teorem 2.1.6 ([4]). *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje u (x_0) i (x_n) niz koji konvergira prema $x_0 \in X$. Tada niz $f(x_n)$ konvergira prema $f(x_0)$. Obrnuto, ako za funkciju $f : X \to Y$ i za svaki niz (x_n) koji konvergira prema $x_0 \in X$, vrijedi da $f(x_n)$ konvergira prema $f(x_0)$, tada je f neprekidna u x_0.*

Svaki od teorema sastoji se od tvrdnje i obrata. Ono što se pokazuje je da će u općenitom topološkom prostoru X vrijediti samo jedna od tih implikacija. Jedno od svojstava metričkog prostora je da oni zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti ([4], Primjer 2.1.8.a), a to je ujedno i razlog zašto tamo vrijede i obrati ovih teorema. Iz istog primjera vidjet ćemo da su gornji teoremi specijalni slučaj Teorema 2.2.9. i Teorema 2.2.10., te ih zato posebno ne dokazujemo.

Definicija 2.1.7 (1-prebrojiv prostor, [3]). *Kažemo da je topološki prostor (X, τ)* ***1-prebrojiv*** *ili da* ***zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti****, ako svaki $x \in X$ ima prebrojivu bazu okolina.*

Ukoliko je topološki prostor 1-prebrojiv, onda za svaki element $x \in X$ postoji niz okolina $O_1, O_2, ...$ oko x, takav da za svaku okolinu O oko x, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $O_n \subseteq O$.

Primjer 2.1.8.

a) Svaki metrički prostor (X, d) zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.

   Uzmimo proizvoljni $x \in X$ i pogledajmo okoline te točke. U metričkom prostoru familija otvorenih kugala $\{K(x, R) : R > 0\}$ čini bazu okolina točke x. Uzmemo li otvorene kugle $K(x, r)$, gdje je $r \in \mathbb{Q}$, one će isto činiti bazu okolina oko x.

   Na kraju, kako je $\mathbb{Q}$ prebrojiv [5], slijedi da je i skup

$$\{K(x, r) : r > 0, r \in \mathbb{Q}\}$$

   prebrojiva baza okolina točke x, pa je po definiciji (X, d) 1-prebrojiv.

b) Neka je $X \neq \emptyset$ neprebrojiv skup. Topološki prostor (X, τ) s kofinitnom topologijom nije 1-prebrojiv.

   Pretpostavimo suprotno, da je X 1-prebrojiv. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Tada postoji $\mathcal{B}_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva baza otvorenih okolina oko x. Možemo pretpostaviti da je $B_n \neq \emptyset$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Zbog otvorenosti, za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji konačan skup $F_n \subseteq X$, takav da je $B_n = X \setminus F_n$. Formirajmo sljedeću uniju C_x:

$$C_x := \{x\} \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n).$$

Skup C_x je prebrojiv kao prebrojiva unija konačnih skupova [5]. Uzmimo sada $y \in X \setminus C_x$. To možemo jer je X neprebrojiv. Neka je

$$U := X \setminus \{y\}.$$

Kako je $X \setminus U = \{y\}$ konačan, U je otvoren u kofinitnoj topologiji. Također, $x \in U$, stoga je U okolina točke x. No, kako je $y \in X \setminus C_x$, slijedi da $y \notin F_n$, niti za jedan $n \in \mathbb{N}$. Zato imamo da je

$$y \in B_n \setminus U,$$

što znači da ne postoji niti jedan bazni element B_n oko x za koji vrijedi

$$x \in B_n \subseteq U.$$

No, baza okolina po Definiciji 1.1.15 mora zadovoljavati to svojstvo, što znači da $\mathcal{B}_x$ nije prebrojiva baza okolina za x. To je kontradikcija s početnom pretpostavkom da postoji prebrojiva baza okolina točke x, te zaključujemo da (X, τ) nije 1-prebrojiv.

Gornje teoreme koje smo iskazali za metričke prostore možemo generalizirati za 1-prebrojive prostore.

Teorem 2.1.9 ([3])**.** *Neka je (X, τ) 1-prebrojiv topološki prostor i $A \subseteq X$. Tada je $x_0 \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji niz (x_n) u A koji konvergira prema x_0.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Neka je $x_0 \in \bar{A}$ i $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva baza okolina točke x_0. Neka je

$$O_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i, \ n \in \mathbb{N}.$$

Familija $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ je baza okolina, što po definiciji znači da za svaku okolinu U od x, postoji U_n takav da je

$$x \in U_n \subseteq U, \text{ za neki } n \in \mathbb{N}.$$

No, kako je općenito $O_n \subseteq U_n$, tada je i

$$x \in O_n \subseteq U_n \subseteq U,$$

te je i $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva baza okolina točke x.

Za familiju $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ očito vrijedi:

$$O_1 \supseteq O_2 \supseteq ...$$

Po karakterizaciji zatvarača od A, vrijedi da je $O_n \cap A \neq \emptyset$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ uzmimo

$$x_n \in O_n \cap A,$$

te ćemo tako dobiti niz (x_n) koji se nalazi u A i koji konvergira prema x_0.
Naime, za proizvoljnu okolinu U od x_0, postoji bazna okolina O_{n_0} takva da je

$$O_{n_0} \subseteq U, \; n_0 \in \mathbb{N}.$$

No, tada je za sve $n \geq n_0$,

$$x_n \in O_n \subseteq O_{n_0} \subseteq U,$$

iz čega slijedi da niza (x_n) konvergira prema x_0.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo sada da je (x_n) niz u A koji konvergira prema x_0. To znači da za svaku okolinu U od x_0, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za $n \geq n_0$,

$$x_n \in U.$$

Znamo da je i $x_n \in A$, stoga je $x_n \in U \cap A$. Odnosno, pokazali smo da za svaku okolinu U oko x_0 vrijedi:

$$U \cap A \neq \emptyset,$$

te po karakterizaciji zatvarača slijedi da je $x_0 \in \bar{A}$.

□

Teorem 2.1.10 ([3]). *Neka su (X, τ) i (Y, τ') topološki prostori i neka je (X, τ) 1-prebrojiv. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna ako i samo ako za svaki niz (x_n) koji konvergira prema x_0, vrijedi da $f(x_n)$ konvergira prema $f(x_0)$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ova tvrdnja uvijek vrijedi, bez obzira na svojstvo 1-prebrojivosti. Uzmimo funkciju f, neprekidnu u x_0 i niz (x_n) koji konvergira prema x_0. Uzmimo proizvoljnu okolinu V točke $f(x_0)$ i pokažimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za sve $n \geq n_0$,

$$f(x_n) \in V.$$

Po definiciji neprekidnosti od f u x_0, slijedi da postoji otvorena okolina U točke x_0 za koju je $f(U) \subseteq V$. Niz (x_n) je konvergentan, stoga za svaku okolinu, uključujući i U, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_1$, vrijedi

$$x_n \in U.$$

No, uzmemo li $n_0 = n_1$, za sve $n \geq n_0$, vrijedi da je

$$f(x_n) \in f(U) \subseteq V,$$

odnosno $f(x_n)$ konvergira prema $f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da za svaki niz (x_n) koji konvergira prema x_0, vrijedi da i $f(x_n)$ konvergira prema $f(x_0)$. Pokažimo da je f neprekidna koristeći karakterizaciju neprekidnosti (Teorem 1.2.2. (iv)). Pokažimo da za proizvoljni $A \subseteq X$, vrijedi da je

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Ukoliko je $x_0 \in A$, tada je i $x_0 \in \overline{A}$. Kako je X 1-prebrojiv, tada po Teoremu 2.1.9, postoji niz (x_n) u A koji konvergira prema x_0. Po pretpostavci, $f(x_n)$ konvergira prema $f(x_0)$. Budući da je $f(x_n) \in f(A)$, ponovo po Teoremu 2.1.9, slijedi da je

$$f(x_0) \in \overline{f(A)}.$$

No, tada je $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, pa zaključujemo da je f neprekidna.

$\square$

Sljedeći primjer pokazuje kako jedan smjer Teorema 2.1.9 ne vrijedi uklonimo li pretpostavku 1-prebrojivog prostora.

Primjer 2.1.11.

Neka je $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ prebrojivo beskonačan produkt prostora $\mathbb{R}$ sa samim sobom, tj.

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \text{ gdje je } X_n = \mathbb{R}, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Promotrimo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ s box topologijom. Neka je dan $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ s:

$$A := \{(x_1, x_2, ...) : x_i > 0, \text{ za sve } i \in \mathbb{N}\}.$$

Neka je $x_0 = (0, 0, ...)$. Pokažimo da je $x_0 \in \overline{A}$. Uzmimo proizvoljni bazni element

$$B = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times ...,$$

koji sadrži x_0. Tada je nužno $a_i < 0$ i $b_i > 0$, za sve $i \in \mathbb{N}$. No, tada je $B \cap A \neq \emptyset$. Kako to vrijedi za svaki bazni element B koji sadrži x_0, po karakterizaciji zatvarača je tada

$$x_0 \in \overline{A}.$$

Tvrdimo da ne postoji niz (a_n) u A koji konvergira u x_0. Neka je dan proizvoljan niz u A,

$$a_n = (x_{in})_{i\in\mathbb{N}}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Budući da je niz (a_n) u A, sve koordinate x_{in} su strogo pozitivne. Konstruirajmo okolinu

$$B' = \langle -x_{11}, x_{11} \rangle \times \langle -x_{22}, x_{22} \rangle \times ....$$

Očito, B' je bazna okolina točke x_0.
Međutim, B' ne sadrži nijedan član niza (a_n). Odnosno, za sve $n \in \mathbb{N}$, član niza $a_n \notin B'$ jer njegova n-ta koordinata ne pripada intervalu $\langle -x_{nn}, x_{nn} \rangle$. Po definiciji konvergencije niza, (a_n) ne konvergira prema x_0. Zbog proizvoljnog odabira niza (a_n) u A, slijedi da ne postoji niz u A koji konvergira prema x_0.

Kako bismo Teoreme 2.1.9 i 2.1.10 generalizirali na općenite topološke prostore, a ne samo 1-prebrojive, generalizirat ćemo prvo pojam niza. To ćemo učiniti tako da domenu niza $\mathbb{N}$ modificiramo, čime ćemo doći do općenitijeg pojma mreže.

2.2 Mreže

Ideju uvođenja općenitijeg skupa kao domenu funkcije "niza" prvo su predstavili američki matematičari Eliakim Hastings Moore i Herman Lyle Smith. Zahtijevali su da postoji relacija na tom skupu koja bi nam omogućila koncept **pozitivne orijentacije** u općenitom topološkom prostoru (X, τ).

Definicija 2.2.1 (Usmjeren skup, [3])**.** *Kažemo da je skup S* ***usmjeren relacijom*** $\leq$ *ako na njemu postoji relacija $\leq$ takva da:*

(S-1) $s \leq s$, *za sve* $s \in S$,

(S-2) $s_1 \leq s_2$ *i* $s_2 \leq s_3 \Rightarrow s_1 \leq s_3$, *za sve* $s_1, s_2, s_3 \in S$,

(S-3) za $s_1, s_2 \in S$, *postoji* $s_3 \in S$, *takav da je* $s_1 \leq s_3$ *i* $s_2 \leq s_3$.

Svojstva relacija (S-1) i (S-2) poznata su već iz elementarne matematike kao refleksivnost i tranzitivnost redom, a svojstvo (S-3) je postojanje gornje međe za bilo koji par elemenata skupa. Relaciju $\leq$ na skupu S koja zadovoljava (S-1), (S-2) i (S-3) nazivamo **smjer** od S.

Provjerimo usmjerenost nekih skupova koristeći svojstva (S-1) - (S-3).

Primjer 2.2.2.

a) $\mathbb{N}$ sa standardnom relacijom "manje ili jednako" ($\leq$) je temeljni primjer usmjerenog skupa. S istom relacijom su i ostali skupovi brojeva $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ također usmjereni.

b) U topološkom prostoru X, na skupu svih okolina $\mathcal{U}_x$ od $x \in X$ definirajmo relaciju

$$U \leq V \Longleftrightarrow U \supseteq V.$$

Tada je $\mathcal{U}_x$ usmjeren skup relacijom $\leq$.
Zaista, provjeravajući redom svojstva usmjerenog skupa imamo:

(S-1) $U \leq U$ vrijedi jer je $U \supseteq U$, za svaki $U \in \mathcal{U}_x$.

(S-2) Neka je za $U, V, W \in \mathcal{U}_x$, $U \leq V$ i $V \leq W$. To znači da je $U \supseteq V$ i $V \supseteq W$, a to povlači da je $U \supseteq W$, odnosno $U \leq W$.

(S-3) Za $U, V \in \mathcal{U}_x$, postoji $W \in \mathcal{U}_x$ takva da vrijedi $U \leq W$ i $V \leq W$.
Zaista, uzmemo li $W = U \cap V$, tada je zbog svojstva (O-2) skupa svih okolina $\mathcal{U}_x$, $W \in \mathcal{U}_x$. Za skup W vrijedi da je $W \subseteq U$ i $W \subseteq V$, odnosno $U \leq W$ i $V \leq W$.

Koristeći usmjerene skupove, možemo zamijeniti domenu niza (skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$) s usmjerenim skupom S te ćemo tako definirati pojam **mreže** u skupu X.

Definicija 2.2.3 (Mreža, [3])**.** ***Mreža na skupu*** *X je preslikavanje $P : S \to X$, gdje je $S \neq \emptyset$ neki usmjereni skup. Vrijednost $P(s)$ označavamo x_s, a mrežu kraće zapisujemo $(x_s)_{s \in S}$ ili samo (x_s).*

Mreže zaista jesu općenitiji pojam od pojma niza, to vidimo zbog toga što je skup $\mathbb{N}$ jedan usmjeren skup (Primjer 2.2.2.a). Često možemo pronaći i alternativne nazive za mreže kao što su hipernizovi ili Moore - Smith nizovi u čast spomenutim američkim matematičarima iz 20. stoljeća od kojih su potekle.

Pojam **podmreže** vrlo je sličan pojmu podniza kojeg znamo iz elementarne matematike te ga i definiramo na sličan način, a bit će nam koristan u tvrdnjama o konvergenciji mreža koje ćemo uskoro vidjeti.

Definicija 2.2.4 (Podmreža, [3])**.** ***Podmreža*** *mreže $P : S \to X$ je preslikavanje $P \circ \phi$, gdje je $\phi : M \to S$ funkcija s usmjerenog skupa M koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

i) ako je $m_1 \leq m_2$, onda je $\phi(m_1) \leq \phi(m_2)$, za $m_1, m_2 \in M$,

ii) za svaki $s \in S$, postoji $m \in M$, takav da je $s \leq \phi(m)$.

Prvo svojstvo govori da je funkcija ϕ rastuća, a drugo svojstvo da za svaki $s \in S$ postoji član podmreže s većim indeksom (s obzirom na relaciju $\geq$). Kompozicija $P \circ \phi$ je dobro definirana, član podmreže $P \circ \phi(m) \in X$ označavamo kraće x_{ϕ_m}, a cijelu podmrežu mreže $P : S \to X$ označavamo kao (x_{ϕ_m}).

Definirajmo sada pojam **konvergencije mreže**. Međutim, to se može prirodno proširiti iz definicije konvergencije niza (Definicija 2.1.2).

Definicija 2.2.5 (Konvergencija mreže, [3])**.** *Neka je (x_s) mreža u topološkom prostoru (X, τ) i $x_0 \in X$. Kažemo da mreža x_s* ***konvergira*** *ili teži prema x_0 ako za svaku okolinu O oko x_0, postoji $s_0 \in S$, takav da za sve $s \geq s_0$, vrijedi $x_s \in O$.*

Naravno, standardna relacija $\leq$ na skupu $\mathbb{N}$ iz definicije konvergencije niza ovdje je generalizirana kao relacija smjera na skupu S, koju isto zapisujemo kao $\leq$. Ovdje se pokazuje, kao kod nizova, da je dovoljno koristiti bazu okolina kod provjeravanja konvergencije mreže, što ćemo i ilustrirati na sljedećim primjerima.

Primjer 2.2.6 (Konvergencija mreža, [3])**.**

a) U Primjeru 2.2.2.a) vidjeli smo da je skup $\mathbb{N}$ usmjeren standardnom relacijom $\leq$ te je onda svaki niz (x_n) u skupu X ujedno i mreža. Zbog toga je ovdje konvergencija mreže ekvivalentna konvergenciji niza.

b) Neka je (X, τ) topološki prostor i neka je $S = \mathcal{B}_{x_0}$ baza okolina oko $x_0 \in X$. Skup S je usmjeren relacijom smjera $\leq$ iz primjera 2.2.2. Za skupove $U, V \in \mathcal{B}_{x_0}$:

$$U \leq V \Longleftrightarrow U \supseteq V.$$

Za svaki $U \in \mathcal{B}_{x_0}$, uzmimo $x_U \in U$. Na taj način dobivamo članove mreže (x_U) prostora X, koji su indeksirani usmjerenim skupom $S = \mathcal{B}_{x_0}$.
Pokažimo da mreža (x_U) konvergira prema x_0. Prema svojstvima baze okolina, za bilo koju okolinu O oko x_0, postoji $U_0 \in \mathcal{B}_{x_0}$ takva da je

$$x_0 \in U_0 \subseteq O.$$

Tada je U_0 pripadni indeks te za $U \geq U_0$, vrijedi $U \subseteq U_0$, stoga je

$$x_U \in U \subseteq U_0 \subseteq O.$$

Konačno, kako je $x_U \in O$, za sve $U \geq U_0$, pokazali smo da mreža (x_s) konvergira prema x_0.

c) Neka je (x_s) stacionarna mreža na X, odnosno $x_s = x$, za sve $s \in S$, gdje je S neki usmjeren skup. Tada (x_s) teži prema x. Naime, uzmemo li bilo koju okolinu U oko x, ona će sadržavati sve članove mreže, što je ekvivalentno definiciji konvergencije mreže.

Propozicija 2.2.7 ([3])**.** *Ako mreža (x_s) u topološkom prostoru (X, τ) konvergira prema $x \in X$, onda i svaka njena podmreža konvergira prema x.*

Dokaz. Budući da je (x_s) konvergentna, za svaku okolinu O točke x postoji $s_0 \in S$ takav da je, za sve $s \geq s_0$,

$$x_s \in O.$$

Uzmimo proizvoljnu podmrežu (x_{ϕ_m}) mreže (x_s). Neka je O proizvoljna okolina točke x_0 i neka je s_0 kao gore. Zbog svojstva (ii) podmreže, za $s_0 \in S$, postoji $m_0 \in M$, takav da je

$$s_0 \leq \phi(m_0).$$

Zbog konvergencije mreže je onda i

$$x_{\phi_{m_0}} \in O.$$

Funkcija $\phi : M \to S$ je rastuća, stoga za $m \geq m_0$ vrijedi

$$\phi(m) \geq \phi(m_0).$$

No, onda je i

$$x_{\phi_m} \in O,\ m \geq m_0,$$

čime smo pokazali da proizvoljna podmreža konvergentne mreže (x_s) konvergira prema limesu mreže (x_s). $\square$

Pojam iz mreža koji će nam također biti važan do kraja ovog rada je pojam gomilišta mreže koji nije bitno drugačiji od pojma gomilišta niza.

Definicija 2.2.8 (Gomilište mreže, [3])**.** *Neka je (x_s) mreža u prostoru (X, τ) i $x_0 \in X$. Točka x_0 je **gomilište mreže** (x_s) ako za svaku okolinu O oko x_0 i za svaki $s_0 \in S$, postoji $s \geq s_0$ takav da je $x_s \in O$.*

Dva teorema koja su nam bila nepotpuna (Teorem 2.1.5 i Teorem 2.1.6), u kojima za općenite topološke prostore nisu vrijedila oba smjera, sada možemo upotpuniti koristeći mreže.

Teorem 2.2.9 ([3])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor i $A \subseteq X$. Točka $x_0 \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji mreža x_s u A koja konvergira prema x_0.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Neka je $x_0 \in \overline{A}$. Po karakterizaciji točke u zatvaraču (Teorem 1.1.12), za svaku okolinu $U \in \mathcal{U}_{x_o}$ oko x_0, možemo pronaći točku

$$x_U \in U \cap A.$$

Tada je s $x(U) := x_U$, $U \in \mathcal{U}_x$, definirana mreža $x : \mathcal{U}_x \to X$ koja je sadržana u A. Pokažimo da ta mreža konvergira prema x_0. Uzmimo proizvoljnu okolinu V točke x_0. Tada je za sve $U \geq V$, s obzirom na relaciju smjera $\geq$ na $\mathcal{U}_x$,

$$x_U \in U \subseteq V,$$

odnosno mreža (x_U) konvergira prema x_0.

$(\Leftarrow)$ Neka mreža (x_s) iz A konvergira prema $x_0 \in X$. Pokažimo da je $x_0 \in \overline{A}$. Uzmimo proizvoljnu okolinu U oko x_0. Mreža (x_s) konvergira, pa postoji $s_0 \in S$, takav da za sve $s \geq s_0$, vrijedi:

$$x_s \in U.$$

Po pretpostavci, članovi mreže x_s su također i u A, što znači da je za $s \geq s_0$,

$$x_s \in U \cap A.$$

Stoga je taj skup neprazan, te po karakterizaciji zatvarača slijedi da je $x_0 \in \overline{A}$.

□

Teorem 2.2.10 ([3]). *Neka su X i Y topološki prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaku mrežu (x_s) koja konvergira prema x_0, vrijedi da $f(x_s)$ konvergira prema $f(x_0)$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je f neprekidna u x_0 te neka mreža (x_s) konvergira prema $x_0 \in X$. Pokažimo da tada mreža $f(x_s)$ konvergira prema $f(x_0) \in Y$. Uzmemo li proizvoljnu otvorenu okolinu V oko $f(x_0)$, zbog neprekidnosti je i okolina $f^{-1}(V)$ oko x_0 otvorena.
Po pretpostavci (x_s) konvergira prema x_0, pa postoji $s_0 \in S$, takav da za sve $s \geq s_0$ vrijedi

$$x_s \in f^{-1}(V).$$

No tada je za sve $s \geq s_0$,

$$f(x_s) \in V,$$

pa zaključujemo da $f(x_s)$ konvergira prema $f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da ako mreža (x_s) konvergira prema (x_0), tada i $f(x_s)$ konvergira prema $f(x_0)$. Pretpostavit ćemo suprotno: da preslikavanje f nije neprekidno u točki x_0.
Tada, po definiciji neprekidnosti, postoji okolina V oko $f(x_0)$, takva da ne postoji okolina $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ oko x_0, za koju je

$$f(U) \subseteq V.$$

Drugim riječima, za svaku okolinu U oko x_0 možemo pronaći točku $x_U \in U$ za koju $f(x_U) \notin V$. No tada je (x_U) mreža u X koja konvergira prema x_0 (Primjer 2.2.6.b). No, $f(x_U)$ ne konvergira prema $f(x_0)$. Kada bi to bio slučaj, imali bismo da za okolinu V oko $f(x_0)$, postoji U_0, takav da za sve $U \geq U_0$ vrijedi:

$$f(x_U) \subseteq U \subseteq V.$$

No, to je kontradikcija s pretpostavkom $f(x_U) \notin V$, za $U \in \mathcal{U}_{x_0}$. Dakle, f je neprekidna u $x_0 \in X$. □

Konačno, na kraju poglavlja tvrdnja iskažimo tvrdnju vezanu uz konvergenciju mreže u produktnoj topologiji, koja nam uvelike olakšava dokaz Tihonovljevog teorema na kraju ovog rada. Slična tvrdnja vrijedi za nizove na produktu topoloških prostora te je specijalan slučaj sljedećeg teorema.

Teorem 2.2.11 ([3])**.** *Neka su $X_i, i \in I$ topološki prostori i $\prod_{i \in I} X_i$ topološki prostor s produktnom topologijom. Mreža (x_s) konvergira prema x_0 u $\prod_{i \in I} X_i$ ako i samo ako mreža $\pi_i(x_s)$ konvergira prema $\pi_i(x_0)$ u X_i, za svaki $i \in I$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da mreža (x_s) konvergira prema x_0. Po Teoremu 1.3.6, znamo da je projekcija π_i neprekidno preslikavanje, stoga $\pi_i(x_s)$ konvergira prema $\pi_i(x_0)$ po Teoremu 2.2.10, za svaki $i \in I$.

($\Leftarrow$) Obratno, neka $\pi_i(x_s)$ konvergira prema $\pi_i(x_0)$, za svaki $i \in I$. Uzmimo proizvoljnu baznu okolinu oko $x_0 \in \prod\limits_{i \in I} X_i$,

$$\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}),$$

gdje su $U_{i_k} \in X_{i_k}, i_k \in I, k = 1, ..., n$. Tada, po pretpostavci konvergencije, za svaki $k = 1, ..., n$, postoji $s_k \in S$, takav da za $s \geq s_k$,

$$\pi_{i_k}(x_s) \in U_{i_k}.$$

No, po svojstvu (S-3), primijenjenom induktivno na usmjereni skup S, postoji $s_0 \in S$, takav da je $s_0 \geq s_k,\ k = 1, ..., n$, s obzirom na relaciju $\geq$. Stoga za sve $s \geq s_0$, vrijedi

$$\pi_{i_k}(x_s) \in U_{i_k},\ k = 1, ..., n.$$

Odnosno, za sve $s \geq s_0$,

$$x_s \in \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}),$$

što znači da (x_s) konvergira prema x_0.

$\square$

Definicija 2.2.12 (Ultramreža, [3])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor. Kažemo da je mreža (x_s)* ***ultramreža*** *ili* ***univerzalna mreža*** *na X ako za svaki $A \subseteq X$, postoji $s_0 \in S$, takav da je za sve $s \geq s_0$, $x_s \in A$ ili $x_s \in X \setminus A$.*

Ultramreže su podvrsta mreža koje se mogu interpretirati i na sljedeći način koristeći gomilišta: svaka ultramreža će konvergirati prema svim svojim gomilištima [3]. Ta činjenica slijedi neposredno iz definicije ultramreža, a mi ćemo je precizno iskazati i dokazati u sljedećoj lemi.

Lema 2.2.13. *Neka je (X, τ) topološki prostor. Neka je $x : S \to X$ ultramreža i x_0 neko njezino gomilište. Tada (x_s) konvergira prema x_0.*

Dokaz. Neka je U proizvoljna okolina točke x_0. Budući da je (x_s) ultramreža, za $U \subseteq X$, postoji $s_0 \in S$, takav da za sve $s \geq s_0$, vrijedi

$$x_s \in U \text{ ili } x_s \in X \setminus U.$$

No, x_0 je gomilište mreže po pretpostavci, stoga slučaj $x_s \in X \setminus U$, $s \geq s_0$, nije moguć po definiciji gomilišta mreže. Dakle, za proizvoljnu okolinu U od x_0, postoji $s_0 \in S$, takav da je za sve $s \geq s_0$,

$$x_s \in U,$$

odnosno x_s konvergira prema x_0. $\square$

Primjer jedne ultramreže je $P : S \to X$, $P(s) = x_0 \in X$, koju zovemo trivijalna ultramreža. Netrivijalne ultramreže nisu konstruirane, no može se pokazati da one postoje [3].

2.3 Filtri

Osim mreža, u općenitom topološkom prostoru postoji još jedan pojam kojim možemo poopćiti nizove, a to je pojam **filtra**. Njih ćemo također koristiti kako bismo karakterizirali kompaktnost topološkog prostora. Pokazat ćemo ključnu činjenicu da su filtri i mreže "ekvivalentni" kada govorimo o konvergenciji u topološkim prostora.

Definicija 2.3.1 (Filtar, [3])**.** *Neka je $X \neq \emptyset$. Familija $\mathcal{F} \neq \emptyset$ nepraznih podskupova od X koja zadovoljava:*

(F-1) za $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ vrijedi da je $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,

(F-2) za $F \in \mathcal{F}$ i $F \subset F'$ vrijedi da je $F' \in \mathcal{F}$,

naziva se ***filtar na skupu*** *X.*

Svojstvo (F-1) govori da je filtar zatvoren na konačne presjeke i da je presjek dva elementa iz $\mathcal{F}$ neprazan, (F-2) da je zatvoren na nadskupove. Oba svojstva podsjećaju na svojstva familije okolina $\mathcal{U}_x$ oko točke x.
Također, kao kod familije okolina, i kod filtara možemo promatrati bazne elemente te ih prirodno definiramo na sljedeći način.

Definicija 2.3.2 (Baza filtra, [3])**.** ***Baza filtra*** *$\mathcal{F}$ je potfamilija $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, takva da za svaki element $F \in \mathcal{F}$, postoji element $F' \in \mathcal{F}'$, takav da je $F' \subseteq F$.*

Kao i kod baze za neku topologiju, ovdje ćemo definirati bazu za neki filtar.

Definicija 2.3.3 (Baza nekog filtra, [3])**.** *Za $\mathcal{F}'$ kažemo da je* ***baza nekog filtra*** *na X ako za svaki $F_1', F_2' \in \mathcal{F}'$, postoji $F' \in \mathcal{F}'$, takav da je $F' \subset F_1' \cap F_2'$.*

Tada filtar $\mathcal{F}$ generiran ovom bazom sadrži sve nadskupove elemenata $\mathcal{F}'$. Primijetimo da u tom slučaju, $\mathcal{F}$ zaista zadovoljava svojstva (F-1) i (F-2).

Primjer 2.3.4.

a) Primjer filtra kojeg smo već susreli u topološkom prostoru (X, τ) je $\mathcal{U}_x$, skup svih okolina točke x. Točnije,

$$\mathcal{U}_x = \{A \subseteq X : \text{ postoji } U \in \tau \text{ takav da je } x \in U \subseteq A\}.$$

Primijetimo da je to ona općenitija definicija okolina koju smo spomenuli nakon što smo definirali otvorene okoline. Do sada smo uvijek uzimali u obzir samo otvorene okoline, no za potrebe filtra, trebat će nam općenitije okoline. Pokažimo da $\mathcal{U}_x$ zadovoljava svojstva (F-1) i (F-2) filtra.

(F-1) Neka su $A, B \in \mathcal{U}_x$. Tada postoje $U_a, U_b \in \tau$, takvi da je

$$x \in U_a \subseteq A \text{ i } x \in U_b \subseteq B.$$

Tada je $x \in A \cap B$. Kako bi smo pokazali da je $A \cap B \in \mathcal{U}_x$, pronađimo $U \in \tau$ za koji je

$$x \in U \subseteq A \cap B.$$

No, to je upravo $U = U_a \cap U_b$. Dakle, $A \cap B \in \mathcal{F}_x$.

(F-2) Neka je $A \in \mathcal{U}_x$. Tada postoji $U \in \tau$, takav da je

$$x \in U \subseteq A.$$

Neka je $B \supseteq A$. Tada je očito

$$x \in U \subseteq B,$$

stoga je $B \in \mathcal{U}_x$.

b) Neka je $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ je konačan}\}$. Tada je $\mathcal{F}$ filtar na X, kojeg nazivamo **Fréchetov filtar**. Provjerimo svojstva filtara:

(F-1) Za $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi da su $X \setminus A$ i $X \setminus B$ konačni. Kako je

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B),$$

onda je $X \setminus (A \cap B)$ konačan kao unija konačnih skupova, iz čega slijedi

$$A \cap B \in \mathcal{F}.$$

(F-2) Ukoliko je $A \in \mathcal{F}$, onda je $X \setminus A$ konačan. No tada i za $B \supset A$, vrijedi da je $X \setminus B$ konačan, odnosno

$$B \in \mathcal{F}.$$

Zaključujemo da je $\mathcal{F}$ zaista filtar na X.

Definicija 2.3.5 (Konvergencija filtra, [3]). *Neka je (X, τ) topološki prostor. Kažemo da filtar $\mathcal{F}$* ***konvergira prema točki*** *$x \in X$ ako je $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$.*

Definicija 2.3.6 (Gomilište filtra, [8]). *Neka je (X, τ) topološki prostor i $\mathcal{F}$ filtar na X. Točka $x \in X$ je* ***gomilište filtra*** *$\mathcal{F}$ ako za svaki $F \in \mathcal{F}$ i svaki $U \in \mathcal{U}_x$ vrijedi da je*

$$F \cap U \neq \emptyset.$$

Zbog karakterizacije zatvarača, x je gomilište filtra $\mathcal{F}$ ako i samo ako je $x \in \overline{F}$ za svaki $F \in \mathcal{F}$. Često ćemo koristiti ovu činjenicu te ćemo je kraće zapisati kao:

$$x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}.$$

U prethodnom potpoglavlju smo spomenuli jednu vrstu mreža koje smo nazivali univerzalnim mrežama ili ultramrežama. U teoriji filtara postoji ekvivalentan pojam i na sličan način ga definiramo.

Definicija 2.3.7 (Ultrafiltar, [7])**.** *Filtar $\mathcal{F}$ na X je **ultrafiltar** ako je za svaki $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{F}$ ili $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Lema o ultramrežama koju smo pokazali, odnosno lema koja govori da ultramreža uvijek konvergira prema svakom svom gomilištu, može se proširiti za ultrafiltre i pokazati na sličan način koristeći definiciju konvergencije filtra [3]. Također, u sljedećem teoremu navest ćemo još jedan rezultat vezan za ultrafiltre. On je ujedno i karakterizacija ultrafiltara te se u nekoj literaturi koristi kao definicija, a može nam pomoći stvoriti intuiciju o ultrafiltru.

Teorem 2.3.8 ([7])**.** *Filtar $\mathcal{F}$ na $X \neq \emptyset$ je ultrafiltar ako i samo ako je $\mathcal{F}$ maksimalan filtar, odnosno ne postoji filtar $\mathcal{G}$, takav da je*

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{G}.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\mathcal{F}$ ultrafiltar. Pretpostavimo suprotno, da postoji filtar $\mathcal{G}$ za koji je

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{F}.$$

Tada postoji $A \subseteq X$, takav da je

$$A \in \mathcal{G} \text{ i } A \notin \mathcal{F}.$$

No, kako je $\mathcal{F}$ ultrafiltar, tada je nužno

$$X \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}.$$

Time smo dobili da su A i $X \setminus A$ sadržani u $\mathcal{G}$, što bi po svojstvu (F-1) filtra $\mathcal{G}$, značilo da je

$$A \cap (X \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{G}.$$

No, to nije moguće jer je $\mathcal{G}$ filtar, stoga imamo kontradikciju s početnom pretpostavkom i zaključujemo da je $\mathcal{F}$ maksimalni filtar.

($\Leftarrow$) Neka je $\mathcal{F}$ maksimalan filtar. Pretpostavimo da $\mathcal{F}$ nije ultrafiltar, odnosno postoji $A \subseteq X$ takav da $A \notin \mathcal{F}$ i $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Ukoliko bi postojao $B \in \mathcal{F}$, za koji vrijedi $B \subseteq X \setminus A$, tada bi zbog svojstva (F-2) filtra vrijedilo $X \setminus A \in \mathcal{F}$, ali to nije moguće. Zbog toga, za svaki $B \in \mathcal{F}$ vrijedi da je

$$B \cap A \neq \emptyset.$$

Iz ovoga slijedi da je bilo koji konačan presjek elemenata iz $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{A\}$ neprazan. Tada je $\tilde{\mathcal{F}}$ filtar na X za koji vrijedi $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$. No, je kontradikcija s pretpostavkom da je $\mathcal{F}$ maksimalan. Dakle, $\mathcal{F}$ je ultrafiltar. □

Filtar $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$, za neki $x \in X$, trivijalni je primjer ultrafiltra na X. Budući da je za svaki $A \subseteq X$,

$$A \in \mathcal{F}_x,$$

$\mathcal{F}_x$ je po definiciji ultrafiltar. Također, koristeći Teorem 2.3.8., mogli bismo zaključiti isto jer je $\mathcal{F}$ maksimalan filtar s obzirom na relaciju inkluzije. Ponovno, kao kod ultramreža, netrivijalne ultrafiltre je teško konstruirati, ali njihova egzistencija može se pokazati [3].

Međutim, za svaki filtar $\mathcal{F}$ na X, može se pokazati egzistencija ultrafiltra koji ga sadrži. To ćemo i pokazati koristeći **Zornovu lemu**: ako je $A \neq \emptyset$ parcijalno uređen skup i ako za svaki totalno uređen $B \subseteq A$, vrijedi da B ima gornju među u A, tada A ima maksimalan element. Prisjetimo se, parcijalno uređen skup A je skup na kojem postoji relacija parcijalnog uređaja, označimo je s $\leq$. Takva relacija je refleksivna, tranzitivna i antisimetrična. Ako su, osim toga, svaka dva elementa $a_1, a_2 \in A$, usporediva, odnosno vrijedi

$$a_1 \leq a_2 \text{ ili } a_1 \geq a_2,$$

tada kažemo da je skup A totalno uređen. Neka je A parcijalno uređen skup, tada kažemo da je element $M \in A$, gornja međa nepraznog podskupa $B \subseteq A$, ako za svaki $b \in B$, vrijedi da je $b \leq M$. Nadalje, kažemo da je $a_0 \in A$ maksimalni element skupa A, ako ne postoji $a \in A$, $a \neq a_0$, takav da je $a_0 \leq a$.

Teorem 2.3.9 ([3])**.** *Svaki filtar $\mathcal{F}$ na X sadržan je u nekom ultrafiltru.*

Dokaz. Neka je C familija svih filtara $\mathcal{F}'$, za koje vrijedi $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$. C je parcijalno uređen skup relacijom

$$\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \iff \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2.$$

Tada svaka totalno uređena potfamilija $\{\mathcal{F}_i : i \in I\} \subseteq C$ ima gornju među, $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$, koja zadovoljava svojstva filtra.

(F-1) Neka su $F_1.F_2 \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$, tada postoje $\mathcal{F}_j$ i $\mathcal{F}_k$ takvi da je $F_1 \in \mathcal{F}_j$ i $F_2 \in \mathcal{F}_k$. No, zbog relacije $\leq$ totalnog uređaja, $\mathcal{F}_j$ i $\mathcal{F}_k$ su usporedivi. Možemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_j \leq \mathcal{F}_k$. Tada vrijedi:

$$F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_k \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i.$$

(F-2) Neka je $F \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ i $F' \supset F$. Tada postoji $k \in I$, takav da je $F \in \mathcal{F}_k$. No, $\mathcal{F}_k$ je filtar i time zadovoljava svojstvo (F-2) filtra, te vrijedi

$$F' \in \mathcal{F}_k \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i.$$

Po Zornovoj lemi, familija $\mathcal{C}$ ima maksimalni element $\mathcal{F}^*$. Kako je $\mathcal{F}^*$ maksimalni filtar, tada je nužno $\mathcal{F}^*$ ultrafiltar po Teoremu 2.3.8 □

2.4 Veza između mreža i filtara

U ovom potpoglavlju ćemo povezati mreže i filtre, te pokazati kako se konvergencija mreže u općenitom topološkom prostoru (X, τ) (Definicija 2.2.5) može izreći pomoću filtara. U teoriji filtara postoje teoremi koji su na neki način dualni onima iz mreža (Teorem 2.2.9 i Teorem 2.2.10), a tiču se karakterizacije točke u zatvaraču i neprekidnosti funkcije. Njih ćemo ovdje istaknuti bez dokaza.

Teorem 2.4.1 ([3])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor i $A \subseteq X$. Tada je $x_0 \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji filtar $\mathcal{F}$ na X koji sadrži A te konvergira prema x_0.*

Prije sljedećeg teorema, prvo iskažimo tvrdnju vezanu za sliku filtra prilikom nekog preslikavanja f. Neka je $\mathcal{F}$ filtar na X i $f : X \to Y$. Definirajmo filtar $\mathcal{F}_Y$ kao filtar na Y koji za bazu ima familiju

$$f(\mathcal{F}) = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}.$$

Primijetimo da ta familija sama po sebi nije filtar na Y jer ne zadovoljava svojstvo (F-1). Međutim, zadovoljava svojstvo baze filtra na Y iz Definicije 2.3.3. Neka su $f(F)$ i $f(G)$ dva elementa iz $f(\mathcal{F})$, za $F, G \in \mathcal{F}$. Znamo da je općenito $f(F \cap G) \subseteq f(F) \cap f(G)$. Budući da je $\mathcal{F}$ filtar na X, slijedi da je $f(F \cap G) \in f(\mathcal{F})$, pa je zadovoljeno svojstvo baze filtra. Filtar $\mathcal{F}_Y$ na Y definiramo kao familiju svih nadskupova od $f(\mathcal{F})$.

Teorem 2.4.2 ([3])**.** *Neka su X i Y topološki prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki filtar $\mathcal{F}$ na X koji konvergira prema x_0, vrijedi da filtar $\mathcal{F}_Y$ na Y konvergira prema $f(x_0) \in Y$.*

Također, za filtre na direktnom produktu topoloških prostora vrijedi karakterizacija koja nam je poznata iz nizova, odnosno mreža (Teorem 2.2.11).

Teorem 2.4.3 ([3])**.** *Filtar $\mathcal{F}$ na $\prod_{i \in I} X_i$ s produktnom topologijom konvergira prema x_0 u $\prod_{i \in I} X_i$ ako i samo ako filtar $\pi_i(\mathcal{F})$ na X_i konvergira prema $\pi_i(x_0)$, za svaki $i \in I$.*

Prethodna tri teorema mogu se dokazati koristeći pojmove iz filtara (dokazi se mogu pronaći u [3] ili u [8]), međutim, u ovom radu nam dokazi neće biti potrebni za nastavak.

Vidjeli smo velike sličnosti mreža i filtara te sada neće biti problem uspostaviti vezu između njih.

Definicija 2.4.4 (Filtar generiran mrežom, [3])**.** *Neka je (x_s) mreža u X. Familija $\mathcal{F}_{x_s}$ podskupova od X definirana s: $A \in \mathcal{F}_{x_s}$, ako postoji $s_0 \in S$, takav da je za sve $s \geq s_0$,*

$$x_s \in A,$$

naziva se ***filtar generiran mrežom*** x_s.

Može se lako pokazati da je ovo zaista filtar na X:

(F-1) Neka su $A, B \in \mathcal{F}_{x_s}$, tada postoje $s_A, s_B \in S$ takvi da su za sve $s \geq s_A$, odnosno $s \geq s_B$

$$x_s \in A, \text{ i } x_s \in B.$$

Po svojstvu (S-3) usmjerenog skupa, postoji s_0 takav da je $s_0 \geq s_A$ i $s_0 \geq s_B$, stoga za sve $s \geq s_0$ vrijedi

$$x_s \in A \cap B,$$

odnosno $A \cap B \in \mathcal{F}_{x_s}$.

(F-2) Neka je $A \in \mathcal{F}_{x_s}$ i $B \supseteq A$. Tada postoji $s_A \in S$ takav da za sve $s \geq s_A$ vrijedi da je

$$x_s \in A \subseteq B,$$

iz čega slijedi da je $x_s \in B$, odnosno $B \in \mathcal{F}_{x_s}$.

Definicija 2.4.5 (Mreža utemeljena na filtru, [3])**.** *Neka je $\mathcal{F}$ filtar na X i $S_{\mathcal{F}} = \{(x, F) : x \in F \in \mathcal{F}\}$ usmjeren skup s relacijom $\leq$ definiranom s:*

$$(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2) \iff F_2 \subseteq F_1.$$

Preslikavanje $P : S_{\mathcal{F}} \to X$, takvo da je $P(x, F) = x$, naziva se ***mreža utemeljena na filtru*** *$\mathcal{F}$.*

Skup $S_{\mathcal{F}}$ iz prethodne definicije zaista je usmjeren budući da relacija $\geq$ na $S_{\mathcal{F}}$ zadovoljava svojstva (S-1), (S-2) i (S-3). Time je preslikavanje $P : S_{\mathcal{F}} \to X$ mreža na skupu X. Istaknimo samo da za svaki $F \in \mathcal{F}$ biramo po jedan $x \in F$ i taj par stavimo u $S_{\mathcal{F}}$. Za razne izbore generiramo razne mreže utemeljene na filtru.

Propozicija 2.4.6. *Mreža utemeljena na ultrafiltru je ultramreža.*

Dokaz. Neka je mreža $P : S_{\mathcal{F}} \to X$ utemeljena na ultrafiltru $\mathcal{F}$. Neka su $A \subseteq X$ i $\mathcal{B}$ neka baza filtra $\mathcal{F}$. Po definiciji ultrafiltra, vrijedi da je

$$A \in \mathcal{F} \text{ ili } X \setminus A \in \mathcal{F}.$$

U svakom slučaju, postoji B_0 iz baze filtra takav da je

$$B_0 \subseteq A \text{ ili } B_0 \subseteq X \setminus A.$$

No, tada postoji $b_0 \in B_0$, takav da je

$$(b_0, B_0) \in S_{\mathcal{F}}.$$

Sada za sve $(x, F) \geq (b_0, B_0)$, vrijedi

$$P(x, F) = x \in F \subseteq B_0 \subseteq A,$$

ili

$$P(x, F) = x \in F \subseteq B_0 \subseteq X \setminus A,$$

te zaključujemo da je mreža P ultramreža po Definiciji 2.2.12 □

Na kraju ovog poglavlja iskazujemo i dokazujemo teorem koji pokazuje dualnost mreža i filtara kada govorimo o konvergenciji u topološkom prostoru te nam govori zašto se možemo prebaciti iz svijeta mreža u svijet filtara i obratno.

Teorem 2.4.7 ([3])**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor.*

i) Filtar $\mathcal{F}$ na X konvergira prema $x_0 \in X$ ako i samo ako mreža utemeljena na filtru $\mathcal{F}$ konvergira prema x_0.

ii) Mreža (x_s) konvergira prema $x_0 \in X$ ako i samo ako filtar na X generiran mrežom (x_s) konvergira prema x_0.

Dokaz. (i) ($\Rightarrow$) Neka filtar $\mathcal{F}$ na X konvergira prema x_0 i neka je $P : S_{\mathcal{F}} \rightarrow X$ mreža utemeljena na filtru $\mathcal{F}$. Po definiciji konvergencije filtra, za svaku okolinu $U \in \mathcal{U}_{x_0}$, vrijedi da je $U \in \mathcal{F}$. Pokažimo da mreža P konvergira prema x_0. Uzmimo proizvoljnu okolinu $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ i fiksirajmo $p \in U$. Tada je $(p, U) \in S_{\mathcal{F}}$. Za sve $(x, F) \in S_{\mathcal{F}}$, takve da je

$$(x, F) \geq (p, U),$$

s obzirom na relaciju smjera u $S_{\mathcal{F}}$, vrijedi

$$P(x, F) = x \in F \subseteq U.$$

No tada, po definiciji konvergencije mreže, mreža P konvergira.

($\Leftarrow$) Neka mreža utemeljena na filtru $\mathcal{F}$ konvergira prema x_0. Uzmimo proizvoljnu okolinu U oko x_0. Želimo pokazati da je $U \in \mathcal{F}$. Zbog konvergencije mreže postoji $(p_0, F_0) \in S_{\mathcal{F}}$, takav da za sve $(x, F) \geq (p_0, F_0)$, vrijedi da je

$$x \in U.$$

Budući da je $(x, F) \in S_{\mathcal{F}}$ i $(x, F) \geq (p_0, F_0)$, onda je nužno

$$x \in F \subseteq F_0.$$

Sada je dovoljno pokazati $F_0 \subseteq U$, te onda nužno slijedi da je $U \in \mathcal{F}$.
Kada $F_0 \subseteq U$ ne bi vrijedilo, onda bi postojao $y \in F_0 \setminus U$. No, kako vrijedi $(y, F_0) \geq (p_0, F_0)$, zbog konvergencije mreže dobili bismo da je $y \in U$, što nije moguće. Zaključujemo da je $F_0 \subseteq U \in \mathcal{F}$, odnosno da filtar $\mathcal{F}$ konvergira prema x_0.

(ii) ($\Rightarrow$) Neka mreža x_s konvergira prema x_0 i neka je U proizvoljna okolina točke x_0. Po definiciji konvergencije mreže postoji $s_0 \in S$ takav da je za sve $s \geq s_0$,

$$x_s \in U.$$

Želimo pokazati da za filtar $\mathcal{F}_{x_s}$ generiran mrežom (x_s) vrijedi $U \in \mathcal{F}_{x_s}$, ali to je ispunjeno zbog Definicije 2.4.4.
($\Leftarrow$) Neka filtar $\mathcal{F}_{x_s}$ generiran mrežom (x_s) konvergira prema x_0. Tada je za svaku okolinu U točke x_0,

$$U \in \mathcal{F}_{x_s}.$$

Pokažimo da mreža (x_s) konvergira prema x_0. No, po pretpostavci i definiciji od $\mathcal{F}_{x_s}$, za svaku okolinu U točke x_0, postoji $s_0 \in S$, takav da je za sve $s \geq s_0$,

$$x_s \in U,$$

pa mreža (x_s) po definiciji konvergira.

$\square$

Poglavlje 3

Kompaktnost

3.1 Kompaktnost: Definicija i primjeri

Tihonovljev teorem govori nam o **kompaktnosti** direktnog produkta topoloških kompaktnih prostora s produktnom topologijom. Prvo definiramo svojstvo kompaktnosti općenitog topološkog prostora koristeći pojmove pokrivača.

Definicija 3.1.1 (Pokrivač, [1],[4])**.** *Neka je X topološki prostor i $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ familija podskupova od X. Kažemo da je familija $\mathcal{A}$ **pokrivač** od X, odnosno da **pokriva** X ako je*

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

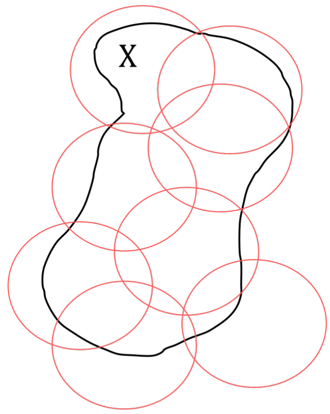
*Nadalje, kažemo da je pokrivač $\mathcal{A}$ **otvoren** ako su A_i otvoreni, za svaki $i \in I$, a **konačan** ako je I konačan.*

Definicija 3.1.2 (Potpokrivač, [4])**.** *Kažemo da je potfamilija $\mathcal{A}' = \{A_i : i \in I'\} \subseteq \mathcal{A}, I' \subseteq I$, **potpokrivač** pokrivača $\mathcal{A}$ ako je i sama pokrivač od X.*

Definicija 3.1.3 (Kompaktnost, [1])**.** *Za topološki prostor (X, τ) kažemo da je **kompaktan** ako svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{A}$ od X sadrži konačan potpokrivač.*

Na slici 3.1 prikazano je kako intuitivno zamišljamo pokrivač prostora X. Crvene kružnice zapravo predstavljaju familiju $\mathcal{A}$ (npr. otvorene kugle u metričkom prostoru $\mathbb{R}^2$ s euklidskom metrikom) koja pokriva prostor X. Pokrivač na slici 3.1 je konačan.

U sljedećem primjeru vidjet ćemo neke temeljne primjere topoloških prostora koji jesu kompaktni, kao i neke koji nisu. Kako bismo to pokazali, koristit ćemo samo prethodnu definiciju.



Slika 3.1: Pokrivač prostora X

Primjer 3.1.4.

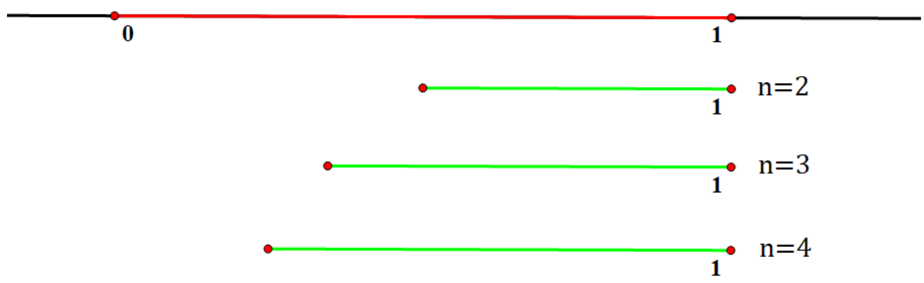
a) Neka je $X = \langle 0, 1\rangle$ i $\mathcal{A} = \{\langle \frac{1}{n}, 1\rangle : n \in \mathbb{N}\}$. Familija $\mathcal{A}$ je otvoreni pokrivač jer su za sve $n \in \mathbb{N}$, skupovi $A_n = \langle \frac{1}{n}, 1\rangle$ otvoreni te je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

   Pretpostavimo da je X kompaktan. Tada pokrivač $\mathcal{A}$ sadrži konačan potpokrivač, odnosno potfamiliju $\mathcal{A}' = \{\langle \frac{1}{n_1}, 1\rangle, ..., \langle \frac{1}{n_k}, 1\rangle\}$, $k \in \mathbb{N}$. (Slika 3.2)

   Neka je $N := \max\{n_1, ..., n_k\}$. Unija elemenata iz $\mathcal{A}'$ je $\langle \frac{1}{N}, 1\rangle$. Kako je i $\mathcal{A}'$ pokrivač vrijedi

$$\langle 0, 1\rangle \subseteq \langle \frac{1}{N}, 1\rangle.$$

   No to nije moguće jer je $\frac{1}{N+1} \in \langle 0, 1\rangle$, ali $\frac{1}{N+1} \notin \langle \frac{1}{N}, 1\rangle$. To je kontradikcija, te zaključujemo da $X = \langle 0, 1\rangle$ nije kompaktan.



Slika 3.2: Potfamilija $\mathcal{A}'$ u primjeru 3.1.4.a).

b) Neka je $X = \mathbb{R}$. Sličnim argumentiranjem kao u primjeru a), pokazalo bi se da $\mathbb{R}$ nije kompaktan. Uzimajući otvoreni pokrivač

$$\mathcal{A} = \{\langle -n, n\rangle : n \in \mathbb{N}\},$$

zaključuje se da $\mathcal{A}$ nema konačan potpokrivač, odnosno da $\mathbb{R}$ nije kompaktan.

c) Zbog zahtjeva postojanja konačnog potpokrivača u definiciji kompaktnosti, svaki je konačan topološki prostor $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, kompaktan.

d) Topološki prostor (X, τ_f), s kofinitnom topologijom je kompaktan. Neka je $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ proizvoljni otvoren pokrivač od X. Uzmimo bilo koji neprazni element te familije, npr. A_0. Skup A_0 je otvoren u X, stoga je zbog kofinitne topologije $X \setminus A_0$ konačan, odnosno

$$X \setminus A = \{x_1, ..., x_n\}.$$

Za sve $k = 1, ..., n$, uzmimo po jedan $A_k \in \mathcal{A}$ takav da je $x_k \in A_k$. Takvi skupovi A_k postoje jer je $\mathcal{A}$ pokrivač od X. No, tada je familija

$$\mathcal{A}' = \{A_0, A_1, ..., A_n\} \subseteq \mathcal{A}$$

konačan potpokrivač od X, pa je X kompaktan po definiciji.

Koristeći samo definiciju kompaktnosti, zbog njene formulacije i zahtjeva na **svaki** otvoreni pokrivač, često će biti jako teško zaključiti je li proizvoljni topološki prostor kompaktan ili ne. Međutim, kompaktnost ima vrlo zanimljive i praktične karakterizacije koje nam pomažu u odlučivanju. Neke od njih upoznat ćemo u sljedećem potpoglavlju.

3.2 Svojstva kompaktnih prostora

Sve tvrdnje za kompaktnost koje ćemo iskazati i dokazati u ovome potpoglavlju pomoći će nam da bolje shvatimo to svojstvo, ali također ćemo ih koristiti u dokazu Tihonovljevog teorema. Iz realne analize poznato je da je svojstvo zatvorenosti povezano s kompaktnošću prostora. Točnije, u prostoru $\mathbb{R}^n$ s euklidskom topologijom, potprostor je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen. Stoga ćemo prvo vidjeti odnos kompaktnosti i zatvorenosti na općenitim topološkim prostorima i njihovim potprostorima.

Teorem 3.2.1 ([1])**.** *Neka je X kompaktan topološki prostor i $Y \subseteq X$ njegov zatvoren potprostor. Tada je Y kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ pokrivač od Y skupovima otvorenim u X. Želimo pokrivačem $\mathcal{B}$ pokriti cijeli X, stoga možemo uzeti

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}.$$

Kako je Y zatvoren u X, onda je po definiciji $X \setminus Y$ otvoren u X te je familija $\mathcal{B}$ otvorena kao familija otvorenih skupova. Zbog kompaktnosti od X, familija $\mathcal{B}$ sadrži konačnu potfamiliju $\mathcal{B}'$ koja je zapravo konačan potpokrivač od X, pa time i od Y. Naime, imamo dva slučaja:

1. Ukoliko $X \setminus Y \subseteq \mathcal{B}'$, onda iz te familije možemo izbaciti skup $X \setminus Y$ te ono što što će ostati i dalje će biti konačni potpokrivač od Y, pa je po definiciji Y kompaktan.

2. Ukoliko je $X \setminus Y \nsubseteq \mathcal{B}'$, onda je familija $\mathcal{B}'$ konačni potpokrivač od Y, pa je opet Y kompaktan po definiciji.

□

Teorem 3.2.2 ([2])**.** *Neka je $f : X \to Y$ neprekidna te X kompaktan skup. Tada je $f(X) \subseteq Y$ kompaktan.*

Dokaz. Uzmimo familiju $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ koja je otvoreni pokrivač od $f(X)$. Zbog neprekidnosti preslikavanja f, skup $\{f^{-1}(A_i) : i \in I\} \subseteq X$ je otvoren u X, ali je također i pokrivač od X.

Kako je X kompaktan, po definiciji postoji konačan potpokrivač od X, $\{f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_n)\}$, $n \in \mathbb{N}$.

No, tada je familija $A_1, ..., A_n$ konačan potpokrivač od $f(X)$ iz čega možemo zaključiti da je $f(X)$ kompaktan u Y. □

Osim definicije kompaktnosti preko otvorenih pokrivača, kompaktnost prostora (X, τ) možemo karakterizirati pomoću zatvorenih familija sa svojstvom konačnog presjeka. Taj rezultat će biti pokazan uskoro u Teoremu 3.2.4

Definicija 3.2.3 (Svojstvo konačnog presjeka, [1])**.** *Neka je X topološki prostor. Kažemo da je familija C podskupova od X* ***centrirana familija*** *ili da ima* ***svojstvo konačnog presjeka*** *ako za svaku konačnu potfamiliju*

$$\{C_1, C_2, ..., C_n\} \subseteq C, \ n \in \mathbb{N},$$

vrijedi da je presjek $C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n$ neprazan.

Iz metričkih prostora poznata je karakterizacija koja povezuje nizove i kompaktnost: metrički prostor (X, d) je kompaktan ako i samo ako svaki niz (x_n) u tom prostoru ima barem jedno gomilište u tom prostoru. Generalizaciju te tvrdnje ćemo iskazati i dokazati za općenite topološke prostore koristeći mreže i filtre kao generalizaciju nizova.

Teorem 3.2.4 ([3])**.** *Za topološki prostor X, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

i) X je kompaktan,

ii) za svaku familiju C zatvorenih podskupova od X, sa svojstvom konačnog presjeka, vrijedi $\bigcap_{i \in I} C \neq \emptyset$,

iii) svaki filtar u X ima gomilište,

iv) svaka mreža u X ima gomilište,

v) svaka ultramreža u X konvergira,

vi) svaki ultrafiltar u X konvergira.

Dokaz. (i)⇒(ii) Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $C = \{C_i : i \in I\}$ familija zatvorenih skupova sa svojstvom konačnog presjeka u X za koju vrijedi:

$$\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset. \tag{3.1}$$

Kako je C_i zatvoren, za sve $i \in I$, slijedi da je familija

$$\{X \setminus C_i : i \in I\}$$

otvorena. Također, zbog 3.1, vrijedi da je

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} X \setminus C_i = X,$$

odnosno da je familija $\{X \setminus C_i : i \in I\}$ otvoreni pokrivač od X po definiciji. Skup X je kompaktan po pretpostavci, stoga postoji konačan potpokrivač

$$\{X \setminus C_{i_1}, ..., X \setminus C_{i_n}\}, \; n \in \mathbb{N}.$$

No, kako je ta konačna familija pokrivač od X, tada dobivamo da je

$$\bigcup_{i=1}^{n} X \setminus C_i = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} C_i = X,$$

pa je

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset.$$

Slijedi da familija C nema svojstvo konačnog presjeka, ali to je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, C mora imati neprazan presjek.

(ii)⇒(iii) Neka je $\mathcal{F}$ filtar na X. Pogledajmo familiju

$$\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}.$$

To je familija zatvorenih podskupova od X jer je $\overline{F}$ zatvoren u X te ima svojstvo konačnog presjeka zbog svojstva (F-1) filtra $\mathcal{F}$. Po pretpostavci, ona također ima neprazan presjek, odnosno postoji $x \in X$ takav da je

$$x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}.$$

No, tada je x gomilište filtra (Definicija 2.3.6).

(iii)⇒(iv) Uzmimo proizvoljnu mrežu (x_s) na X. Neka je $\mathcal{F}_{x_s}$ filtar generiran mrežom (x_s). Po pretpostavci, ovaj filtar ima gomilište x, odnosno za svaku okolinu U točke x i za svaki $A \in \mathcal{F}_{x_s}$ vrijedi

$$U \cap A \neq \emptyset.$$

Pokažimo da je x gomilište mreže (x_s). Ako odaberemo $A_{s_0} \in \mathcal{F}_{x_s}$ definirane s:

$$A_{s_0} = \{x_s : s \geq s_0\}, \text{ za svaki } s_0 \in S,$$

tada, zbog $U \cap A_{s_0} \neq \emptyset$, slijedi da se u svakoj okolinu U od x nalazi beskonačno mnogo članova mreže (x_s). Dakle, x je gomilište mreže (x_s).

(iv)⇒(v) Uzmimo ultramrežu x_s. Ona je i mreža, pa po pretpostavci ima gomilište x. Kako je x_s ultramreža, po Lemi 2.2.13. ona konvergira prema svom gomilištu x.

(v)⇒(vi) U Propoziciji 2.4.6, pokazali smo da je mreža utemeljena na ultrafiltru ultramreža. Po pretpostavci, ultramreža utemeljena na ultrafiltru $\mathcal{F}$ konvergira, ali tada i ultrafiltar $\mathcal{F}$ konvergira prema Teoremu 2.4.7.(i).

(vi)⇒(i) Pretpostavimo da svaki ultrafiltar na X konvergira, ali da X nije kompaktan. Tada postoji otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ koji ne sadrži konačan potpokrivač. Odnosno,

$$X \setminus (U_1 \cup ... \cup U_n) \neq \emptyset,$$

za bilo koju konačnu potfamiliju $\{U_1, ..., U_n\}$ pokrivača $\mathcal{A}$. Gornju relaciju možemo interpretirati: čitav skup X nismo prekrili konačnim pokrivačem.
Nadalje, neprazna familija $\{X \setminus (U_1 \cup ... \cup U_n)\}$, gdje su $U_1 \cap ... \cap U_n$ sve konačne unije elemenata pokrivača, čini bazu filtra za neki filtar po Definiciji 2.3.2 jer presjek dvaju elemenata te familije ponovno pripada toj familiji. Neka je $\mathcal{F}$ filtar generiran tom bazom. Po Teoremu 2.3.8, filtar $\mathcal{F}$ nalazi se u nekom ultrafiltru $\mathcal{F}^*$ za kojeg znamo po pretpostavci da konvergira u X. Označimo taj limes s x. Kako je $\mathcal{A}$ pokrivač, x se nalazi u barem jednom elementu pokrivača U_n, $n \in \mathbb{N}$. Kako je U_n otvoren, postoji bazna okolina U takva da je $x \in U \subseteq U_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$.
Zbog konvergencije filtra vrijedi da je $U \in \mathcal{F}^*$. No, tada je $X \setminus U_n \subseteq X \setminus U$, pa je, zbog svojstva (F-2),

$$X \setminus U \in \mathcal{F}^*.$$

No tada po svojstvu filtra (F-1), slijedi da je

$$U \cap (X \setminus U) = \emptyset \in \mathcal{F}^*,$$

a to nije moguće jer je $\mathcal{F}^*$ filtar. Imamo kontradikciju s početnom pretpostavkom te zaključujemo da $\mathcal{A}$ mora imati konačan potpokrivač, odnosno da X mora biti kompaktan. □

Poglavlje 4

Tihonovljev teorem

Andrej N. Tihonov ruski je matematičar koji je živio u 20. stoljeću. Zbog njegovog rada u brojnim matematičkim područjima, ali najviše u topologiji, postoji mnogo pojmova koje nose njegovo ime [9]. U prvom poglavlju uveli smo Tihonovljevu topologiju (produktnu topologiju), a u ovom poglavlju ćemo iskazati i dokazati teorem iz naslova rada koji također nosi njegovo ime. Napravit ćemo dva dokaza u potpoglavljima 4.1. i 4.2.

Teorem 4.0.1 (**Tihonovljev teorem**, [3]). *Produkt topoloških prostora $\prod_{i \in I} X_i$ s produktnom topologijom je kompaktan ako i samo ako je za svaki $i \in I$, X_i kompaktan.*

4.1 Dokaz preko mreža i filtara

Prvi dokaz Teorema 4.0.1. ($\Rightarrow$) Neka je $X = \prod_{i \in I} X_i$ kompaktan. Neka je

$$\pi_k : X \to X_k,$$

projekcija iz Definicije 1.3.5., za $k \in I$. Po Teoremu 1.3.6, za sve $k \in I$ je preslikavanje π_k neprekidno na X. Po pretpostavci je X kompaktan, stoga nužno slijedi iz Teorema 3.2.2 da je

$$\pi_k(X) = X_k,$$

kompaktan, za sve $k \in I$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da su, za sve $i \in I$, skupovi X_i kompaktni. Neka je $(x_s)_{s \in S}$ proizvoljna ultramreža u $\prod_{i \in I} X_i$. Tada je, za sve $i \in I$,

$$(\pi_i(x_s))_{s \in S}$$

ultramreža u X_i. Po pretpostavci je X_i kompaktan, za svaki $i \in I$, stoga ultramreža $(\pi_i(x_s))$ konvergira prema Teoremu 3.2.4.(v). No, tada i ultramreža (x_s) konvergira u $\prod_{i \in I} X_i$ po Teoremu 2.2.10, stoga je $\prod_{i \in I} X_i$ kompaktan, opet zbog Teorema 3.2.4.(v). $\square$

Ovaj dokaz Tihonovljeva teorema na prvi pogled izgleda kao vrlo kratak dokaz, međutim u sebi krije mnogo matematičke teorije koju smo prolazili u prijašnjim poglavljima. Dijelove te teorije i sredstva koja smo koristili ovdje u dokazu nisu bile dostupne ni samom Tihonovu, barem ne u vrijeme njegovog prvog dokaza teorema. Smjer ($\Leftarrow$) teorema se može pokazati koristeći ultrafiltre umjesto ultramreža, zbog dualnosti pojmova mreže i filtra kada govorimo o konvergenciji u topološkom prostoru.

4.2 Dokaz preko centriranih familija

Drugi dokaz Tihonovljeva teorema koji ćemo ovdje pokazati koristi karakterizaciju kompaktnosti preko centriranih familija, odnosno zatvorenih familija sa svojstvom konačnog presjeka (Teorem 3.2.4.(ii)). Prvo ćemo dokazati dvije leme koje ćemo koristiti u dokazu. U njima ćemo ponovno iskoristiti Zornovu lemu: ako svaki totalno uređen podskup $B \subseteq A$ parcijalno uređenog skupa $A \neq \emptyset$ ima gornju među, tada A ima maksimalni element. Za označavanje skupovi čiji su elementi familije podskupova od X, u ovom ćemo poglavlju koristiti notaciju $\mathbb{A}, \mathbb{B}, ...$

Lema 4.2.1 ([1])**.** *Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{A}$ centrirana familija podskupova od X. Tada postoji maksimalna centrirana familija $\mathcal{D}$ koja sadrži $\mathcal{A}$, odnosno ne postoji niti jedna centrirana familija podskupova od X koja strogo sadrži $\mathcal{D}$.*

Dokaz. Po pretpostavci, $\mathcal{A}$ je centrirana familija podskupova od X. Neka je $\mathbb{A}$ skup čiji su elementi sve centrirane familije $\mathcal{B}$ podskupova od X za koje je $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$. $\mathbb{A}$ je parcijalno uređen relacijom $\subseteq$ i za njega ćemo pokazati da ima maksimalni element $\mathcal{D}$. Prvo ćemo pokazati da proizvoljni totalno uređen podskup $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$, ima gornju među u $\mathbb{A}$.

Neka je

$$C := \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} \mathcal{B},$$

unija familija iz $\mathbb{B}$. Pokažimo da je sadržana u $\mathbb{A}$, odnosno da je C centrirana familija za koju je $C \supseteq \mathcal{A}$. Uvjet $C \supseteq \mathcal{A}$ je ispunjen jer za svaki element $\mathcal{B}$ te unije, vrijedi da je $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$.
Da bismo pokazali da je C centrirana familija, uzet ćemo proizvoljne $C_1, ..., C_n \in C$. C je dana kao unija elemenata iz $\mathbb{B}$, stoga za svaki $i = 1, ..., n$, postoji element $\mathcal{B}_i \in \mathbb{B}$, takav da je

$$C_i \in \mathcal{B}_i.$$

No, $\{\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n\} \in \mathbb{B}$, gdje je $\mathbb{B}$ totalno uređen s relacijom $\supseteq$. Budući da je skup konačan i totalno uređen kao podskup totalno uređenog skupa, tada postoji maksimalni element $\mathcal{B}_k$ s obzirom na relaciju $\supseteq$, za neki $1 \leq k \leq n$. No, $\mathcal{B}_k$ je tada centrirana familija koja sadrži $\{C_1, ..., C_n\}$, te vrijedi

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset.$$

Po definiciji je C centrirana familija.
Konačno, lako se vidi da je C gornja međa od $\mathbb{B}$ u $\mathbb{A}$, stoga, po Zornovoj lemi, $\mathbb{A}$ ima maksimalan element, kojeg možemo označiti s $\mathcal{D}$. □

Lema 4.2.2 ([1]). *Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{D}$ maksimalna centrirana familija podskupova od X. Tada vrijedi:*

(i) svaki konačni presjek elemenata iz $\mathcal{D}$ je u $\mathcal{D}$,

(ii) ako je $A \subseteq X$, takav da je za sve $D \in \mathcal{D}$, $A \cap D \neq \emptyset$, tada je $A \in \mathcal{D}$.

Dokaz. (i) Neka je B konačni presjek elemenata iz $\mathcal{D}$. Definirajmo

$$C := \mathcal{D} \cup \{B\}.$$

Pokažimo da je C centrirana familija podskupova od X, tada će, zbog činjenice da je $\mathcal{D}$ maksimalna, vrijediti da je $C = \mathcal{D}$, odnosno $B \in \mathcal{D}$.

Uzmimo proizvoljne elemente $C_1, ..., C_n \in C$. Tada imamo dva slučaja:

1. Ukoliko je $C_i \neq B$, za sve $i = 1, ..., n$, tada je $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ neprazan jer je $\mathcal{D}$ centrirana familija.

2. Ukoliko je $C_k = B$, za neki $1 \leq k \leq n$, tada je taj presjek oblika

$$D_1 \cap ...D_m \cap B.$$

   No, ovo je konačni presjek elemenata iz $\mathcal{D}$, jer je B konačan presjek elemenata iz $\mathcal{D}$. Po pretpostavci je $\mathcal{D}$ centrirana familija, stoga je taj presjek neprazan.

U oba slučaja, C je po definiciji centrirana familija.

(ii) Za proizvoljni $A \subseteq X$, koji ima neprazan presjek sa svakim elementom $D \in \mathcal{D}$, definiramo

$$C := \mathcal{D} \cup \{A\}.$$

Slično kao u (i), pokažimo da je C centrirana familija, tada će, zbog maksimalnosti od $\mathcal{D}$, slijediti da je $A \in \mathcal{D}$. Uzmimo proizvoljne elemente $C_1, ..., C_n \in C$. Tada imamo dva slučaja:

1. Ukoliko je $C_i \neq A$, za sve $i = 1, ..., n$, tada je $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ neprazan jer je $\mathcal{D}$ centrirana familija.

2. Ukoliko je $C_k = A$, za neki $1 \leq k \leq n$, tada je taj presjek oblika

$$D_1 \cap ... \cap D_m \cap A.$$

   Po (i) je presjek elemenata $D = D_1 \cap ... \cap D_m \in \mathcal{D}$, a po pretpostavci, za skup A vrijedi da je $A \cap D \neq \emptyset$, za sve $D \in \mathcal{D}$.

U oba slučaja, $\mathcal{C}$ je po definiciji centrirana familija. □

Sada ćemo dokazati Tihonovljev teorem (Teorem 4.0.1) koristeći centrirane familije i prethodne dvije leme.

Drugi dokaz Teorema 4.0.1. ($\Rightarrow$) Potpuno isti kao u dokazu preko mreža i filtara.

($\Leftarrow$) Neka je $X = \prod_{i\in I} X_i$, uz pretpostavku da je X_i kompaktan, za sve $i \in I$. Neka je $\mathcal{C}$ centrirana familija zatvorenih podskupova od X. Ako pokažemo da je

$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \emptyset,$$

tada će, po Teoremu 3.2.4.(ii), X biti kompaktan.
Po Lemi 4.2.1, možemo pronaći maksimalnu centriranu familiju $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{C}$. Kako je $\mathcal{C}$ zatvorena, tada za svaki $C \in \mathcal{C}$, vrijedi $C = \overline{C}$. Vrijedi $\mathcal{C} \subseteq \{\overline{D} : D \in \mathcal{D}\}$, jer je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ i $C = \overline{C}$, te je tada dovoljno pokazati da je

$$\bigcap_{D\in\mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset,$$

iz čega će slijediti da je

$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

Neka je $\pi_i : X \to X_i,\ i \in I$, projekcija iz Definicije 1.3.5. Familija podskupova

$$\{\pi_i(D) : D \in \mathcal{D}\} \subseteq X_i,$$

je centrirana jer je $\mathcal{D}$ centrirana. Po pretpostavci je X_i kompaktan, stoga, po Teoremu 3.2.4.(ii), za svaki $i \in I$, možemo pronaći $x_i \in X_i$ takav da je

$$x_i \in \bigcap_{D\in\mathcal{D}} \overline{\pi_i(D)}.$$

Pokazat ćemo da je upravo točka $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ sadržana u $\overline{D}$, za sve $D \in \mathcal{D}$.
Ideja dokaza je pokazati prvo da proizvoljni podbazni element produktne topologije koji sadrži x, siječe sve $D \in \mathcal{D}$, te kasnije pomoću 4.2.2 i definicije podbaze, pokazati i da bazni element produktne topologije koji sadrži x, siječe sve $D \in \mathcal{D}$. Tada će, zbog karakterizacije zatvarača, slijediti tvrdnja.

Neka je $\pi_j^{-1}(U_j)$, za neki $j \in I$, gdje je U_j otvoren u X_j, proizvoljni podbazni element koji sadrži x. Tada je $\pi_j(x) = x_j \in U_j$. Pokažimo da je njegov presjek s bilo kojim elementom $D \in \mathcal{D}$, neprazan. Prema gornjoj konstrukciji točke x, znamo da je

$$x_j \in \overline{\pi_j(D)}, \text{ za svaki } D \in \mathcal{D}.$$

No, kako je U_j okolina točke x_j, onda je, po karakterizaciji zatvarača, za svaki $D \in \mathcal{D}$,

$$U_j \cap \pi_j(D) \neq \emptyset.$$

Za $D \in \mathcal{D}$, postoji točka $y_j \in X_j$, takva da je $y_j \in U_j$ i $y_j \in \pi_j(D)$. No, tada postoji $y \in X$, takav da je

$$y = \pi_j^{-1}(y_j) \in \pi_j^{-1}(U_j).$$

Primijetimo da je također,

$$y = \pi_j^{-1}(y_j) \in D.$$

Zaključujemo da je, za svaki $D \in \mathcal{D}$,

$$\pi_j^{-1}(U_j) \cap D \neq \emptyset.$$

Po Lemi 4.2.2.b slijedi da je $\pi_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{D}$. Svaki bazni element $U \subseteq X$, koji sadrži x, može se dobiti kao konačni presjek podbaznih elemenata. Tada je, po Lemi 4.2.2.a,

$$U \in \mathcal{D}.$$

No, $\mathcal{D}$ je centrirana familija, što znači da je, za svaki bazni element U točke x,

$$U \cap D \neq \emptyset, \text{ za sve } D \in \mathcal{D}.$$

Po karakterizaciji zatvarača je onda $x \in \overline{D}$, za svaki $D \in \mathcal{D}$, čime smo pokazali da je

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset,$$

odnosno da je X kompaktan.

□

Vidjeli smo dva dokaza teorema te je spomenut još jedan koji koristi ultrafiltre. Tihonov je u svom prvom dokazu koristio hipergomilišta [4] kako bi pokazao tvrdnju. Postoji još nekoliko dokaza, neki od njih koriste transfinitnu indukciju [4], neki od njih ultrafiltre, a zadnji i najnoviji dokaz teorema koristi ponovno mreže, ali ne ultramreže kao u dokazu prikazanom u 4.1. Tihonovljev teorem iznimno je važan zbog svoje općenitosti te se smatra jednim od najvažnijih rezultata u topološkim prostorima.

Bibliografija

[1] James R. Munkres, *Topology, 2nd edition*, Prentice Hall, 2000.

[2] Wilson A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces, 2nd edition,* Oxford University Press, 2009.

[3] Stephen Willard, *General topology*, Dover Edition, Dover Publications Inc, 2004.

[4] Sibe Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, 1.dio*, Školska knjiga, 1989.

[5] Boris Guljaš, *Matematička analiza 1 i 2 (Skripta)*, 2017., https://web.math.pmf. unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf

[6] Zvonko Iljazović, *Opća topologija (skripta)*, 2020.

[7] Michael C. Gemignani, *Elementary topology, Dover edition*, 1990.

[8] Ivan Khatchatourian, *Nets and filters (are better than sequences)*, 2018. http://www.math.toronto.edu/ivan/mat327/docs/other/nets.pdf

[9] P S Aleksandrov, *The principal mathematical discoveries of A. N. Tikhonov*, Russian Math, 1976.

Sažetak

Glavni cilj ovog rada je iskazati i predstaviti neke od dokaza Tihonovljevog teorema, koji tvrdi da je proizvoljni produkt kompaktnih topoloških prostora kompaktan u produktnoj topologiji. Veći dio rada, prva tri poglavlja, pripremaju teren upravo za to.
Prvo poglavlje služi kao svojevrsni rječnik pojmova koji se tiču strukture topološkog prostora i direktnog produkta topoloških prostora. U drugom poglavlju kratko se promatraju nizovi u općenitom topološkom prostoru, a zatim se uvode i istražuju poopćenja nizova, a to su mreže i filtri. Oni, za razliku od nizova, omogućuju dovoljnu općenitost kada je u pitanju konvergencija u topološkom prostoru. Treće poglavlje sadrži osnovne činjenice vezane uz kompaktnost topološkog prostora i neke primjere takvih prostora. Osim toga, iznosimo i karakterizacije kompaktnosti preko mreža i filtara iz prethodnog poglavlja.
Konačno, u zadnjem poglavlju iskazuje se Tihonovljev teorem i dokazuje se na dva načina: preko mreža i filtara, odnosno preko centriranih familija (familija sa svojstvom konačnog presjeka).

Summary

The main goal of this paper is to state and present some of the proofs of the Tychonoff theorem, which states that an arbitrary product of compact topological spaces is compact in the product topology. The first three chapters of this thesis prepare the setting just for its proofs.
The first chapter serves as a kind of a dictionary of terms concerning the structure of topological spaces and the direct product of topological spaces. In the second chapter, sequences in general topological space are briefly discussed and then generalized introducing the notions of nets and filters. They, unlike sequences, allow sufficient generality when it comes to convergence in a topological space. The third chapter contains basic facts about the compactness of a topological space and examples of such spaces. In addition, it contains characterization of compactness using nets and filters from the previous chapter. Finally, in the last chapter, Tychonoff theorem is stated and two proofs are presented: the first one using nets and filters, and the second one using collections the with finite intersection property.

Životopis

Rođen sam 9. siječnja 1997. godine u Zagrebu. Završio sam Osnovnu školu Malešnicu 2011. godine, te zatim upisao opći smjer u IX. gimnaziji u Zagrebu. Tijekom gimnazijskog programa stekao sam interes za prirodne znanosti, a osobito za matematiku. Zbog toga, nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja 2015. godine, upisao sam preddiplomski studij Matematika; nastavnički smjer na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Na istom fakultetu nastavio sam svoje obrazovanje upisajući diplomski studij Matematika; nastavnički smjer 2019. godine. Uz poneke studentske poslove tijekom boravka na fakultetu, kroz zadnju godinu studiranja 2021./2022., radio sam kao učitelj matematike u Osnovnoj školi Špansko – Oranice.