Hilbertova nejednakost

Krezo, Karla

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Karla Krezo

HILBERTOVA NEJEDNAKOST

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Tomislav Berić

Zagreb, veljača, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj iii

Uvod 1

1 Hilbertova nejednakost 2
1.1 Pomoćne tvrdnje 2
1.2 Izvod Hilbertove nejednakosti 7
1.3 Optimalna konstanta 9
1.4 Integralna verzija Hilbertove nejednakosti 12
1.5 Geometrijski dokaz 16
1.6 Poopćenja Hilbertove nejednakosti 20
1.7 Varijanta s maksimumom 24
1.8 Nenegativnost 27

2 Primjene Hilbertove nejednakosti 29
2.1 Bilinearne i kvadratne forme, norma matrice 29
2.2 Hilbertove matrice 32
2.3 Trigonometrijski polinomi 34
2.4 Integrali polinoma 40

Bibliografija 43

Uvod

David Hilbert (1862.-1943.) bio je jedan od najutjecajnijih matematičara 19. i ranog 20. stoljeća. Zaslužan je za razvoj brojnih grana matematike, kao što su algebarska teorija brojeva, varijacijski račun i matematička fizika. 1900. je objavio 23 problema vezana uz razna područja matematike, od kojih neki do danas nisu riješeni. Oni se općenito smatraju jednom od najuspješnijih i najrazmatranijih kompilacija neriješenih problema koje je zadala neka osoba te su uvelike utjecali na razvoj matematike u 20. stoljeću. U ranim 1900. godinama izveo je Hilbertovu nejednakost, no ispostavilo se da konstanta koju je odredio nije bila optimalna. Optimalnu konstantu je nekoliko godina kasnije odredio Issai Schur.

U ovome radu ćemo izvesti diskretnu Hilbertovu nejednakost i odrediti njenu optimalnu konstantu. Zatim ćemo ju proširiti na realne funkcije te provjeriti provjeriti postoje li slučajevi u kojima vrijedi jednakost. Također ćemo proučiti i nekoliko njenih poopćenja, ali i provjeriti vrijedi li nejednakost i za neke slične izraze. Zadnje ćemo u ovome poglavlju provjeriti nenegativnost lijeve strane Hilbertove nejednakosti.

U drugome poglavlju ćemo definirati Hilbertove matrice i odrediti im bitnija svojstva, a posebnu pažnju ćemo posvetiti njihovoj normi. Pri računanju norme ćemo uvesti trigonometrijske polinome pomoću kojih ćemo dokazati Hilbertovu nejednakost za Hilbertove operatore, koja je, od svih verzija obrađenih u radu, najsličnija nejednakosti koju je dokazao Hilbert. Na samome kraju ćemo Hilbertovu nejednakost koristiti za računanje integrala polinoma, preko kojih ćemo provjeriti pozitivnost jedne Hilbertove i nekih sličnih matrica.

Poglavlje 1

Hilbertova nejednakost

1.1 Pomoćne tvrdnje

U radu ćemo prvo dokazati **Hilbertovu nejednakost**, koja tvrdi da postoji konstanta $C > 0$ takva da za svaka dva niza realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vrijedi

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < C\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Odmah iz iskaza možemo primijetiti sličnost s Cauchyjevom nejednakošću, koja će nam biti bitna u dokazu.

Teorem 1.1.1. (Cauchyjeva nejednakost) *Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljni nizovi realnih brojeva. Tada vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Dokaz. Neka su x i y dva proizvoljna realna broja. Tada vrijedi

$$0 \le (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Odnosno

$$xy \le \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

Ako uzmemo $x = |a_n|$ i $y = |b_n|$ i sumiramo po svim $n \in \mathbb{N}$, dobijemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \le \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Ukoliko se jedan od nizova $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sastoji isključivo od nula, Cauchyjeva nejednakost je trivijalno ispunjena. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da su $a_i \neq 0$ i $b_j \neq 0$, iz čega slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \neq 0 \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \neq 0.$$

Sada možemo uvesti nove varijable kojima ćemo normirati sume s desne strane nejednakosti.

Neka su

$$\hat{a}_n = \frac{a_n}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{i} \quad \hat{b}_n = \frac{b_n}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Tada slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \hat{b}_n \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n^2 = 1,$$

odnosno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq 1,$$

iz čega dobijemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

što je upravo Cauchyjeva nejednakost za beskonačne sume.

□

Izrazimo i njen integralni oblik.

Definicija 1.1.2. *Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere, $\mathbb{F}$ polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ i $1 \leq p \leq +\infty$. Definiramo*

$$L^p(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{F}) = \{f : X \to \mathbb{F} \text{ izmjeriva} \mid |f|^p \text{ je } \mu\text{-integrabilna}\}, \quad p < \infty$$

te

$$L^{\infty}(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{F}) = \left\{ f : X \to \mathbb{F} \text{ izmjeriva} : \begin{array}{l} \exists M > 0, \forall A \in \mathcal{F} \text{ t.d. } \mu(A) < +\infty, \\ \mu(A \cap \{x \in X \mid |f(x)| > M\}) = 0 \end{array} \right\}.$$

Teorem 1.1.3. *Neka su $f, g \in L^2$. Za njih vrijedi*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2\,dt \int_a^b g(t)^2\,dt. \tag{1.3}$$

U Hilbertovoj nejednakosti se s desne strane javlja potencija 2, no pokazat ćemo i njenu poopćenu verziju koja vrijedi za konjugirane potencije $p, q > 1$, odnosno p, q takve da vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Također, uzimamo da su 1 i ∞ konjugirane potencije. U tom slučaju će nam biti korisnija Hölderova nejednakost, to jest njen diskretni oblik.

Teorem 1.1.4. (Hölderova nejednakost) Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere te $1 \leq p, q \leq +\infty$ konjugirane potencije. Ako je $f \in L^p$ i $g \in L^q$, tada je $fg \in L^1$ i vrijedi:

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Korolar 1.1.5. (Diskretna Hölderova nejednakost) Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljni nizovi realnih brojeva te $1 < p, q < \infty$ konjugirane potencije. Tada vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.4}$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz teorema 1.1.4 kada se za mjeru uzme mjera prebrojavanja.

□

Prije nego što krenemo izvoditi Hilbertovu nejednakost, dokazat ćemo i neke pomoćne tvrdnje koje će nam biti potrebne u postupku.

Lema 1.1.6. *Neka je $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ nenegativna padajuća funkcija. Tada je f integrabilna na svakom segmentu $[a, b]$, $b < \infty$, te za svaku donju Darbouxovu sumu s te funkcije vrijedi*

$$s \leq \int_0^{\infty} f(x) \, dx.$$

U radu ćemo se često baviti beskonačnim sumama te će nam biti potrebno pokazati njihovu konvergenciju, za što će nam biti koristan sljedeći teorem.

Teorem 1.1.7. (Integralni Cauchyjev kriterij) *Neka je $f : [1, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ neprekidna i padajuća funkcija na $[1, +\infty\rangle$.*

1. *Red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira ako i samo ako integral $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ konvergira.*
2. *Ako red konvergira, onda vrijedi $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x) \, dx$.*

Također, bit će potrebno pokazati i konvergenciju integrala.

Teorem 1.1.8. *Neka je $a > 0$ te neka su funkcije $f, \phi : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ pozitivne i neka postoji*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} = c \quad (0 \leq c \leq +\infty)\,.$$

Ako je $c < +\infty$ i ako konvergira integral $\int_a^\infty \phi(x)\,dx$, onda konvergira i integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Odnosno, ako divergira integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$, onda divergira i integral $\int_a^\infty \phi(x)\,dx$.

Navedimo i lemu koju najčešće koristimo za dokazivanje konvergencije pomoću prethodnog teorema.

Lema 1.1.9. *Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergira za $p > 1$ i divergira za $p \leq 1$, dok $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergira za $p < 1$ i divergira za $p \geq 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $p \neq 1$. Tada je

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergira ako je $\lim_{b\to\infty} b^{1-p} < \infty$, što je moguće samo ako je $1-p < 0$, odnosno $p > 1$. U suprotnome integral divergira.

Također,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to 0+} \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_a^1 = \frac{1}{1-p} - \lim_{a\to 0+} \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergira ako je $\lim_{a\to 0+} a^{1-p} < \infty$, što je moguće samo ako je $1-p > 0$, odnosno $p < 1$. U suprotnom integral divergira.

Ako je $p = 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b - 0 = \infty$$

te

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0+} \ln x\Big|_a^1 = 0 - \lim_{a\to 0+} \ln a = +\infty.$$

□

Sljedeći teoremi će nam pomoći pri rješavanju integrala.

Teorem 1.1.10. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ racionalna funkcija bez singulariteta u $\mathbb{R}^+$. Pretpostavimo da postoje $M > 0$, $R > 0$ i $m \geq 1$ takvi da je*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x|^m} \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}, |x| \geq R.$$

Definiramo

$$F(z) = \frac{f(c)}{|z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}}.$$

Ta je funkcija holomorfna svugdje na području $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < 2\pi\}$ osim u konačno mnogo točaka.

Tada za $0 < \alpha < 1$ vrijedi

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} \sum_{z_k \in D} \operatorname{res}\left(z \mapsto \frac{f(z)}{z^\alpha}, z_k\right). \tag{1.5}$$

Teorem 1.1.11. *Neka je $f : A \to \mathbb{C}, A \subset \mathbb{C}$, funkcija oblika $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, gdje su g i h holomorfne funkcije, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, te z_0 nultočka prvog reda funkcije h. Tada je z_0 pol prvog reda funkcije f i vrijedi*

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Zamjenu poretka integracije ili sumacije opravdavamo primjenom Fubinijevog teorema.

Teorem 1.1.12 (Fubinijev teorem)**.** *Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ-konačni prostori mjere. Neka je $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mu \times \nu$-integrabilna. Tada je za μ-gotovo svaki x funkcija $y \mapsto f(x, y)$ ν-integrabilna, dok je funkcija $x \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$ μ-integrabilna. Analogno, za ν-gotovo svaki y je funkcija $x \mapsto f(x, y)$ ν-integrabilna, dok je funkcija $y \mapsto \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ ν-integrabilna. Također vrijedi*

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\, d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

U radu ćemo raditi isključivo s nenegativnim integrabilnim funkcijama za koje ćemo Fubinijev teorem koristiti za mijenjanje poretka integracije.

Teorem 1.1.13 (Fubinijev teorem za nizove)**.** *Neka je* $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ *niz realnih brojeva. Ako je* $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}|a_{m,n}| < \infty$*, vrijedi*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{m,n} = \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n}.$$

Na kraju uvedimo i nekoliko notacija koje će nam koristiti za pojednostavljivanje kompliciranijih izraza.

Definicija 1.1.14. (Landauova notacija) *Neka je* $f : I \to \mathbb{R}$ *realna funkcija,* $I \subset \mathbb{R}$ *i* $a \in \mathbb{R}$ *te neka je g realna funkcija koja je pozitivna na dovoljno velikoj okolini od a. Ako postoje* $\delta > 0$ *i* $M > 0$ *takvi da za svaki* $x \in I$ *koji zadovoljava* $0 < |x-a| < \delta$ *vrijedi* $|f(x)| \leq Mg(x)$*, pišemo* $f(x) = O(g(x))$*.*

Definicija 1.1.15. *Neka su* $f, g : I \to \mathbb{R}$*,* $I \subset \mathbb{R}^n$*,* $n \in \mathbb{N}$ *funkcije. Kažemo da su f i g slične, u oznaci* $f \sim g$*, ako vrijedi da f konvergira ako i samo ako g konvergira.*

1.2 Izvod Hilbertove nejednakosti

Neka je $S = \{(m,n) \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ skup svih uređenih parova prirodnih brojeva, što znamo da je prebrojiv skup. Također, neka su $(\alpha_s)_{s\in S}$ i $(\beta_s)_{s\in S}$ kolekcije realnih brojeva indeksirane sa S definirane s

$$\alpha_s = \frac{a_m}{\sqrt{m+n}} \quad \text{i} \quad \beta_s = \frac{b_n}{\sqrt{m+n}}, \quad s = (m,n),$$

kako bi umnožak $\alpha_s\beta_s$ odgovarao lijevome članu Hilbertove nejednakosti (1.1).

Tada Cauchyjeva nejednakost (1.2) za $(\alpha_s)_{s\in S}$ i $(\beta_s)_{s\in S}$ glasi:

$$\sum_{s\in S}\alpha_s\beta_s \leq \left(\sum_{s\in S}\alpha_s^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{s\in S}\beta_s^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

a uvrštavanjem α_s i β_s dobijemo

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{m+n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{m+n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Za prvi član s desne strane vrijedi

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{m+n}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m^2\sum_{n'=m+1}^{\infty}\frac{1}{n'}\right).$$

Pošto je $\sum_{n'=m+1}^{\infty}\frac{1}{n'}$ harmonijski red umanjen za svoju m-tu parcijalnu sumu, $m\in\mathbb{N}$, znamo da teži u beskonačnost pa samim time i $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{m+n}$ teži u beskonačnost. Analogno se i u $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{m+n}$ pojavljuje harmonijski red po m pa cijela suma teži u beskonačnost. Zato bismo trebali drukčije definirati α_s i β_s, ali da pritom njihov umnožak ostane isti, što možemo postići tako da ih pomnožimo recipročnim izrazima.

Kao što smo već utvrdili, do divergencije dolazi jer se α_s ponaša kao harmonijski red po n pa faktor kojim ga množimo mora biti funkcija padajuća po n, a β_s funkcijom padajućom po m – na primjer

$$\alpha_s=\frac{a_m}{\sqrt{m+n}}\left(\frac{m}{n}\right)^{\lambda}\quad \text{i}\quad \beta_s=\frac{b_n}{\sqrt{m+n}}\left(\frac{n}{m}\right)^{\lambda},\quad s=(m,n),\quad \lambda>0,$$

gdje ćemo λ odrediti kasnije.

Ponovnim uvrštavanjem u Cauchyjevu nejednakost dobijemo

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_mb_n}{m+n}&\le\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda}\right]^{\frac12}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{2\lambda}\right]^{\frac12}\\&=\left[\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda}\right]^{\frac12}\left[\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{2\lambda}\right]^{\frac12}.\end{aligned}$$

Primijetimo kako su unutarnje sume u oba člana jednake pa ako pokažemo da za neki λ postoji konstanta $B_\lambda<\infty$ takva da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda}\le B_\lambda,\quad \text{za svaki } m\in\mathbb{N},$$

njegovim izlučivanjem ćemo dobiti izraz sličan Hilbertovoj nejednakosti.

Neka je $f:[0,\infty\rangle\to\mathbb{R}$ proizvoljna nenegativna padajuća funkcija. Znamo da je ograničena na svakom segmentu $[a,b]\,, a,b\in\mathbb{N}$, te minimum postiže u točki b. Stoga iz leme 1.1.6 slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\le\int_0^{\infty}f(x)\,dx.$$

U našem slučaju je $f(n) = \frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda}$ pa uvrštavanjem i supstitucijom dobijemo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda} &\leq \int_0^{\infty} \frac{1}{m+x} \cdot \frac{m^{2\lambda}}{x^{2\lambda}}\, dx \\
&= \begin{bmatrix} x = my \\ dx = m\, dy \end{bmatrix} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+y)\, y^{2\lambda}}\, dy.
\end{aligned}$$

Kako bismo ispitali konvergenciju integrala, lakše ga je prikazati kao

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+y)\, y^{2\lambda}}\, dy = \int_0^{1} \frac{1}{(1+y)\, y^{2\lambda}}\, dy + \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+y)\, y^{2\lambda}}\, dy.$$

Također, vidimo da vrijedi

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}}{\frac{1}{y^p}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^{2\lambda-p+1}\left(\frac{1}{y}+1\right)} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^{2\lambda-p+1}}.$$

Za $\lambda > 0$ uzmemo $p := 2\lambda + 1 > 1$ pa iz teorema 1.1.8 i leme 1.1.9 zaključujemo da integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\, dy$ konvergira za svaki $\lambda > 0$.

Također, $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$ konvergira za svaki $p < 1$ te je $0 \leq \frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}} \leq \frac{1}{y^{2\lambda}}$ za svaki $0 < y < 1$ pa iz monotonosti integrala slijedi da $\int_0^1 \frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\, dy$ konvergira za svaki $\lambda \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$.

Time smo pokazali da $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\, dy$ konvergira za svaki $\lambda \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, odnosno traženi B_λ postoji.

1.3 Optimalna konstanta

Uspjeli smo pokazati da postoji konstanta C takva da nejednakost (1.1) vrijedi, no kako bi nam bila korisnija u primjeni, trebamo preciznije odrediti C.

Konstanta koju smo koristili u izvodu ovisi o odabiru parametra $\lambda > 0$ prilikom definiranja koeficijenata α i β te je jednaka

$$C_\lambda = \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)\, y^{2\lambda}}\, dy. \tag{1.6}$$

Funkcija $f(y) = \frac{1}{1+y}$ ima singularitet samo u -1 te je

$$|f(x)| = \frac{1}{|1+x|} \leq \frac{2}{|x|} \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, |x| \geq 2,$$

pa su ispunjeni uvjeti teorema 1.1.10.

Sada je

$$C_\lambda = \frac{2\pi i}{1 - e^{-4\pi i\lambda}} \operatorname{res}\left(\frac{1}{(1+z)\, z^{2\lambda}}, -1\right).$$

Primjenom teorema 1.1.11 na $g(z) = \frac{1}{z^{2\lambda}}$ i $h(z) = 1 + z$ u točki $z = -1 = e^{i\pi}$ imamo

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{(1+z)\, z^{2\lambda}}, -1\right) = \frac{g(-1)}{h'(-1)} = \frac{1}{(-1)^{2\lambda}} = \frac{1}{e^{2i\lambda\pi}},$$

pa je

$$C_\lambda = \frac{2\pi i}{1 - e^{-4i\lambda\pi}} \frac{1}{e^{2i\lambda\pi}} = \frac{\pi}{\frac{e^{2i\lambda\pi} - e^{-2i\lambda\pi}}{2i}} = \frac{\pi}{\sin(2\lambda\pi)}. \tag{1.7}$$

Funkcija $F(\lambda) = \frac{\pi}{\sin(2\lambda\pi)}$ je na intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ konveksna te postiže minimum u $\lambda = \frac{1}{4}$. Stoga je najmanji C_λ u (1.6) jednak

$$C = C_{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{4}} = \pi.$$

Štoviše, pokazat ćemo da za bilo koji C koji zadovoljava nejednakost (1.1) vrijedi $C \geq \pi$.

Želimo definirati nizove $(a_n(\epsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n(\epsilon))_{n\in\mathbb{N}}$, $\epsilon > 0$, koji će nam uvrštavanjem u nejednakost (1.1) dati niz donjih ograda za C čiji članovi teže k π kako $\epsilon \to 0$.

Možemo uzeti

$$a_n(\epsilon) = b_n(\epsilon) = n^{-\frac{1}{2}-\epsilon}. \tag{1.8}$$

Uvrštavanjem u članove s desne strane Hilbertove nejednakosti (1.1) dobijemo

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2(\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2(\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\epsilon}}.$$

Kako je $1 + 2\epsilon > 1$, po lemi 1.1.9 slijedi da integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2\epsilon}}\, dx$ konvergira. Sada po teoremu 1.1.7 konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\epsilon}}$ te vrijedi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2\epsilon}}\, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\epsilon}} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2\epsilon}}\, dx. \tag{1.9}$$

Uvodimo oznaku $I(\epsilon) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2\epsilon}}\, dx$. Po lemi 1.1.9 znamo da $I(\epsilon) \to \infty$ kada $\epsilon \to 0$, stoga iz nejednakosti (1.8) slijedi

$$1 = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{I(\epsilon)}{I(\epsilon)} \leq \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\epsilon}}}{I(\epsilon)} \leq \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1 + I(\epsilon)}{I(\epsilon)} = 1,$$

to jest

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\epsilon}} \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2\epsilon}}\, dx = \frac{1}{2\epsilon}$$

kada $\epsilon \to 0$.

Preostaje nam još pokazati da lijeva strana nejednakosti (1.1) teži k $\frac{\pi}{2\epsilon}$ kada $\epsilon \to 0$. Za nizove $(a_n(\epsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n(\epsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ definirane u (1.8) vrijedi

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{m+n}.$$

Kao i za desnu stranu nejednakosti, vrijedi

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{m+n} \sim \int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{y^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{x+y}\, dx\, dy = \hat{I}(\epsilon)$$

kada $\epsilon \to 0$.

Provedemo li zamjenu varijabli $u = \frac{y}{x}$ dobijemo

$$\hat{I}(\epsilon) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2\epsilon}} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{1}{u^{1+2\epsilon}(1+u)}\, du \right) dx. \tag{1.10}$$

Kako bi se olakšalo računanje integrala u (1.10), promijenimo donju granicu unutarnjeg integrala na 0. Time dolazi do greške u računanju, no možemo pokazati da ona nije značajna. Naime, promjenom granica smo izrazu pod vanjskim integralom u (1.10) pribrojili član $\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+\epsilon}(1+u)}\, du$ koji je ograničen s

$$0 < \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+\epsilon}(1+u)}\, du < \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\, du = \frac{x^{-\frac{1}{2}+\epsilon}}{\frac{1}{2}-\epsilon}.$$

Koristeći Landauovu notaciju, integral (1.10) nakon promjene granica možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\hat{I}(\epsilon) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2\epsilon}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+\epsilon}(1+u)}\, du \right) dx + O\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2\epsilon}} \frac{x^{-\frac{1}{2}+\epsilon}}{\frac{1}{2}-\epsilon}\, dx \right) \\
&= \left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2\epsilon}}\, dx \right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+\epsilon}(1+u)}\, du \right) + O\left(\int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}+\epsilon}\, dx \right) \\
&= \frac{1}{2\epsilon} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+\epsilon}(1+u)}\, du + O(1)\,.
\end{aligned}$$

Vidimo da je greška reda veličine $O(1)$, tj. odgovara nekoj konstanti $C' \in \mathbb{R}$.

Možemo primijetiti da kada $\epsilon \to 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^{1+2\epsilon}(1+u)}\, du \to \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+\epsilon}(1+u)}\, du = \pi,$$

što slijedi iz jednakosti (1.6) i (1.7), te

$$\hat{I}(\epsilon) \to \frac{\pi}{2\epsilon}.$$

1.4 Integralna verzija Hilbertove nejednakosti

Hilbertova nejednakost iskazana u (1.1) nam je korisna ako promatramo nizove, no često ćemo promatrati funkcije, gdje će nam biti potrebna integralna verzija.

Teorem 1.4.1. *Neka su $f, g \in L^2(\langle 0, \infty \rangle)$. Tada*

$$\left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(x)\, g(y)}{x+y}\, dx\, dy \right| \leq \pi \|f\|_2 \|g\|_2. \tag{1.11}$$

Konstanta π je najmanja moguća.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su funkcije f i g nenegativne.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)\,g(y)}{x+y}\,dx\,dy &= \begin{bmatrix} x=\hat{x}^2 & y=\hat{y}^2 \\ dx=2\hat{x}\,d\hat{x} & dy=2\hat{y}\,d\hat{y} \end{bmatrix} \\
&= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\hat{x}\hat{y}f\left(\hat{x}^2\right)g\left(\hat{y}^2\right)}{\hat{x}^2+\hat{y}^2}\,d\hat{x}\,d\hat{y} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{x}=r\cos\theta \\ \hat{y}=r\sin\theta \\ d\hat{x}\,d\hat{y}=r\,dr\,d\theta \end{bmatrix} \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\int_0^{\infty}f\left(r^2\cos^2\theta\right)g\left(r^2\sin^2\theta\right)r\,dr\,d\theta \\
&\text{(primijenimo Cauchyjevu nejednakost)} \\
&\leq 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\left(\int_0^{\infty}\left|f\left(r^2\cos^2\theta\right)\right|^2 r\,dr\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\times\left(\int_0^{\infty}\left|g\left(r^2\sin^2\theta\right)\right|^2 r\,dr\right)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \\
&= \begin{bmatrix} t_1=r^2\cos^2\theta & t_2=r^2\sin^2\theta \\ \hat{\theta}=\theta & \hat{\theta}=\theta \\ dt_1\,d\hat{\theta}=2r\cos^2\theta & dt_2\,d\hat{\theta}=2r\sin^2\theta \end{bmatrix} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\infty}f(t_1)^2\,dt_1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty}g(t_2)^2\,dt_2\right)^{\frac{1}{2}}\,d\hat{\theta} \\
&= \pi\|f\|_2\|g\|_2.
\end{aligned}
$$

Time smo pokazali da nejednakost (1.11) vrijedi, no još ne znamo je li π najmanja takva konstanta.

Definirajmo sada funkcije $f_N(x) = g_N(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[1,N]}(x)$ te skupove $Q_N = \left[1, \sqrt{N}\right]\times\left[1, \sqrt{N}\right]$, $E_N = \left([0,1\rangle\times\left[1, \sqrt{N}\right]\right)\bigcup\left(\left[1, \sqrt{N}\right]\times[0,1\rangle\right)$ i $A_N = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \sqrt{N}\leq r\leq \sqrt{N}, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$.

Primijetimo da je za f_N i g_N

$$
\|f_N\|_2\|g_N\|_2 = \left(\int_1^N\frac{1}{x}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_1^N\frac{1}{x}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \ln N,
$$

pa vrijedi

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y}\,dx\,dy = \begin{bmatrix} x = \hat{x}^2 & y = \hat{y}^2 \\ dx = 2\hat{x}\,d\hat{x} & dy = 2\hat{y}\,d\hat{y} \end{bmatrix} = 4 \iint_{Q_N} \frac{d\hat{x}\,d\hat{y}}{\hat{x}^2+\hat{y}^2}.$$

Također je

$$\int_0^1 \int_1^{\sqrt{N}} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} \le \int_0^1 \left(\int_1^{\sqrt{N}} \frac{dy}{y^2} \right) dx \le \int_1^\infty \frac{dy}{y^2} = 1$$

i, pošto su $[0,1\rangle \times \left[1, \sqrt{N}\right]$ i $\left[1, \sqrt{N}\right] \times [0,1\rangle$ disjunktni,

$$\iint_{E_N} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^1 \int_1^{\sqrt{N}} \left(\frac{dy}{x^2+y^2} \right) dx + \int_0^1 \int_1^{\sqrt{N}} \left(\frac{dx}{x^2+y^2} \right) dy \le 2.$$

Sada iz $A_N \subset E_N \bigcup Q_N$ i $E_N \cap Q_N = \emptyset$ slijedi

$$\begin{aligned} 4 \iint_{Q_N} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} &\ge 4 \iint_{A_N} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} - 4 \iint_{E_N} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = \begin{bmatrix} x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \\ dx\,dy = r\,dr\,d\theta \end{bmatrix} \\ &\ge 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{N}} \frac{r\,dr\,d\theta}{r^2} - 8 \\ &= \pi(\ln N - \ln 2) - 8 \\ &\sim \pi \|f_N\|_2 \|g\|_2 \end{aligned}$$

kada $N \to \infty$.

Pokažimo sada da tvrnja uistinu vrijedi i za funkcije koje nisu nenegativne.

Neka su $f, g \in L^2(\langle 0, \infty \rangle)$, ne nužno nenegativne. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y}\,dx\,dy \right| &\le \int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{f(x)\,g(y)}{x+y} \right| dx\,dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)|\,|g(y)|}{x+y}\,dx\,dy \\ &\le \pi \|(|f|)\|_2 \|(|g|)\|_2 \\ &= \pi \|f\|_2 \|g\|_2, \end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost slijedi jer su funkcije $|f|$ i $|g|$ nenegativne.

□

Kod nejednakosti se često možemo zapitati hoće li se jednakost ikada postići ili nejednakost možemo zamijeniti strogom nejednakošću. Pokažimo da je za Hilbertovu nejednakost jednakost moguća samo u trivijalnim slučajevima.

Korolar 1.4.2. *Za $f, g \in L^2(\langle 0,\infty\rangle)$ vrijedi*

$$\left|\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y}\,dx\,dy\right| = \pi\|f\|_2\|g\|_2$$

ako i samo ako je $f \equiv 0$ ili $g \equiv 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da su f, g netrivijalne funkcije takve da vrijedi

$$\left|\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y}\,dx\,dy\right| = \pi\|f\|_2\|g\|_2.$$

Slijedimo izvod Hilbertove nejednakosti kao u teoremu 1.4.1 pa dobivamo:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y}\,dx\,dy\right| &= \left|\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)}{\sqrt{x+y}}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac14} \frac{g(y)}{\sqrt{x+y}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac14}\,dx\,dy\right| \\
&\text{(primijenimo Cauchyjevu nejednakost)} \\
&\le \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)^2}{x+y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac12}\,dx\,dy\right)^{\frac12} \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{g(y)^2}{x+y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac12}\,dx\,dy\right)^{\frac12} \\
&= \left(\int_0^\infty f(x)^2 \int_0^\infty \frac{1}{x+y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac12}\,dy\,dx\right)^{\frac12} \\
&\quad\cdot \left(\int_0^\infty g(y)^2 \int_0^\infty \frac{1}{x+y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac12}\,dx\,dy\right)^{\frac12} \\
&= \begin{bmatrix}\text{prvi integral} \\ y = xt \\ dy = x\,dt\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\text{drugi integral} \\ x = yt \\ dx = y\,dt\end{bmatrix} \\
&= \left(\int_0^\infty f(x)^2 \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}\,dt\,dx\right)^{\frac12} \\
&\quad\cdot \left(\int_0^\infty g(y)^2 \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}\,dt\,dy\right)^{\frac12} \\
&= \pi\left(\int_0^\infty f(x)^2\,dx\right)^{\frac12} \left(\int_0^\infty g(y)^2\,dy\right)^{\frac12} \\
&= \pi\|f\|_2\|g\|_2.
\end{aligned}$$

Pritom smo koristili da je $\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}\,dt = \pi$, što slijedi iz jednakosti (1.6) i (1.7).

Zbog pretpostavljene jednakosti mora vrijediti jednakost u Cauchyjevoj nejednakosti, što znači da postoji $\lambda > 0$ takav da je

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x+y}}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{4}} = \lambda \frac{g(y)}{\sqrt{x+y}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Odnosno, postoji $C > 0$ takav da je

$$f(x)\,x^{\frac{1}{2}} = \lambda g(y)\,y^{\frac{1}{2}} = C.$$

Izrazimo li f preko x i C dobijemo

$$f(x) = Cx^{-\frac{1}{2}}$$

pa je tada

$$\|f\|_2 = \int_0^\infty Cx^{-\frac{1}{2}}\,dx = \begin{cases} 0, & C = 0 \\ \infty, & C \neq 0. \end{cases}$$

Dobili smo da je f trivijalna funkcija, što se kosi s početnom pretpostavkom pa možemo zaključiti da u Cauchyjevoj nejednakosti vrijedi jednakost ako i samo ako je $f \equiv 0$ ili $g \equiv 0$. Iz toga slijedi tvrdnja.

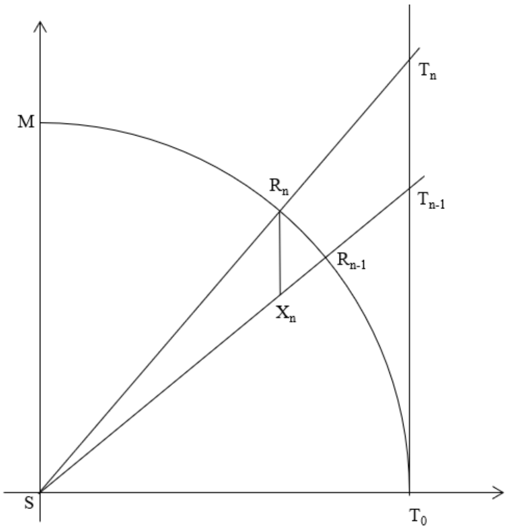
□

1.5 Geometrijski dokaz

Pokazali smo kako je najmanja konstanta C u nejednakostima (1.1) i (1.11) jednaka π. Pojava π u nejednakosti nas uglavnom asocira na kružnicu pa se pitamo postoji li kakvo geometrijsko objašnjenje Hilbertove nejednakosti koje bi ju i povezalo s kružnicom. Možemo primijetiti određenu sličnost sa sljedećim rezultatom.

Lema 1.5.1. *Za svaki prirodan broj m vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}} < \pi.$$



Slika 1.1:

Dokaz. Označimo točke $(0,0)$, $\left(0, \sqrt{m}\right)$ i $\left(\sqrt{m}, \sqrt{n}\right)$ sa S, M i T_n $(n = 0, 1, 2...)$ kao na slici 1.1. Neka je A površina kružnog isječka kružnice sa središtem u S i polumjerom $\sqrt{m}$ kojemu je pripadni luk od T_0 do M te R_n sjecište kružnice i dužine $\overline{ST_n}$. Povucimo iz točke R_n okomicu na dužinu $\overline{ST_0}$ te s X_n označimo njeno sjecište s dužinom $\overline{ST_{n-1}}$. Neka je A_n površina kružnog isječka čiji je pripadni kružni luk od R_{n-1} do R_n, a s $A_{\triangle PQR}$ ćemo označiti površinu trokuta s vrhovima P, Q i R.

Kružni isječak određen točkama S, T_0 i M jednak je četvrtini kruga pa vrijedi

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi m}{4} = A \geq \sum_{n=1}^{\infty} A_n &> \sum_{n=1}^{\infty} A_{\triangle S X_n R_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|SR_n|}{|ST_n|} \right)^2 A_{\triangle S T_{n-1} T_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{|ST_0|^2 + |T_0 T_n|^2} \cdot \frac{|ST_0| \cdot |T_{n-1} T_n|}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\sqrt{m}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)}{2(m+n)} \\
&> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{4(m+n)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Iz toga slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m+n} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}} < \pi.$$

□

Sada pomoću te leme i nejednakosti (1.2) možemo dokazati nejednakost (1.1):

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{4}}\sqrt{m+n}} a_m \frac{n^{\frac{1}{4}}}{m^{\frac{1}{4}}\sqrt{m+n}} b_n \right] \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\,(m+n)} a_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\,(m+n)} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\,(m+n)} \right) a_m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\,(m+n)} \right) b_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \pi \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

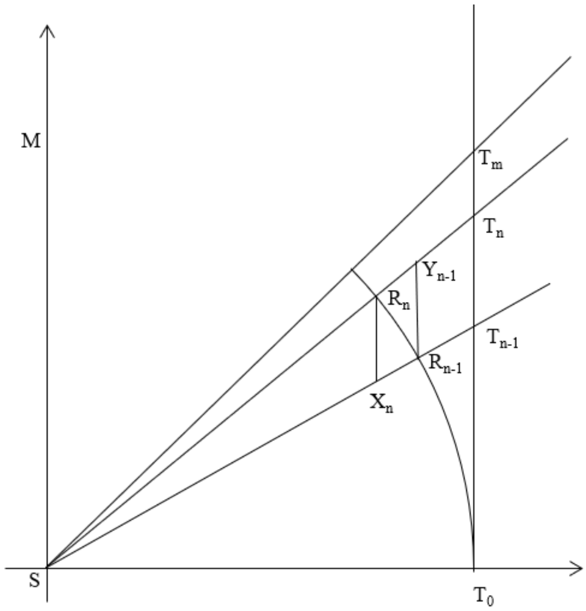
Preostaje pokazati kako je upravo π najmanja konstanta koja se može pojaviti, za što nam treba još jedna pomoćna tvrdnja.

Lema 1.5.2. *Za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{mn}\,(m+n)} > \frac{\pi}{2m} - \frac{2}{m\sqrt{m}}.$$

Dokaz. Neka je Y_n sjecište dužine $\overline{ST_{n+1}}$ i dužine $\overline{R_nX_n}$, $(n = 0, 1, ..., m-1)$ te neka je A' površina kružnog odsječka s pripadnim kružnim lukom od T_0 do R_m, a $A_{\triangle ST_{n-1}T_n}$ površina trokuta s vrhovima u točkama S, T_{n-1} i T_n, kao što je označeno na slici 1.2.

Točka R_m se nalazi na dužini $\overline{ST_m}$ pa je $\angle R_mST_0 = \angle T_mST_0 = \frac{\pi}{4}$ pošto je $\angle T_mST_0$ kut uz osnovicu jednakokračnog trokuta $\triangle ST_0T_m$, odnosno kružni odsječak određen točkama S, T_0 i R_m je jednak osmini cijelog kruga.



Slika 1.2:

Slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{\pi m}{8} = A' < \sum_{n=0}^{m-1} A_{\triangle SR_nY_n} &= \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{|SR_n|}{|ST_n|}\right)^2 A_{\triangle ST_nT_{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1}\frac{m\sqrt{m}|T_nT_{n+1}|}{2\left(|ST_0|^2+|T_0T_n|^2\right)} \\
&= \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1}\frac{m\sqrt{m}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{2\left(m+n\right)} \\
&< \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1}\frac{m\sqrt{m}}{4\sqrt{n}\left(m+n\right)}.
\end{aligned}$$

Odnosno

$$\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{mn}\,(m+n)} > \frac{\pi}{2m} - \frac{2}{m\sqrt{m}}.$$

□

Promatramo nizove $(a_l)_{l\in N}$ i $(b_l)_{l\in N}$ definirane s

$$a_l = b_l = l^{-\frac{1}{2}}, \quad l \le k \quad \text{i} \quad a_l = b_l = 0, \quad l > k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sada iz leme 1.5.2 slijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} &\geq \sum_{m=2}^{k}\left(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{mn}\,(m+n)}\right)+\sum_{n=2}^{k}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{mn}\,(m+n)}\right)+\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{2l^2}\\
&\geq 2\sum_{m=2}^{k}\left(\frac{\pi}{2m}-\frac{2}{m\sqrt{m}}\right)\\
&\geq \left(\sum_{m=1}^{k}\frac{\pi}{m}-\pi\right)-\sum_{m=1}^{k}\frac{4}{m\sqrt{m}}\\
&= \pi\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}-\left(\pi+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\sqrt{m}}\right).
\end{aligned}$$

Kada $k \to \infty$ vrijedi

$$\frac{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}}{\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}} \geq \pi - \frac{\pi+4\sum_{m=1}^{\infty}m^{-\frac{3}{2}}}{\sum_{m=1}^{k}m^{-1}} \to \pi.$$

Iz toga slijedi da je π optimalna konstanta u nejednakosti (1.1).

1.6 Poopćenja Hilbertove nejednakosti

Poopćenje pomoću Hölderove nejednakosti

Promatrajući nejednakost (1.1) možemo se zapitati vrijedi li za nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i neki općenitiji oblik.

Teorem 1.6.1. *Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi realnih brojeva, $C > 0$ te $p, q > 1$ konjugirane potencije. Tada je*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < C\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.12}$$

Kako bismo to pokazali trebamo dokazati poopćenje leme 1.5.2.

Lema 1.6.2. *Za svaki pozitivan realan broj m i realan broj $p > 1$ vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}}(m+n)} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

Dokaz. Funkcija $f : [0, \infty\rangle \to \infty$ definirana s $f(x) = \frac{m^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{p}}(m+x)}$ je nenegativna i padajuća po x pa iz leme 1.1.6 slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}}(m+n)} \leq \int_0^{\infty} \frac{m^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{p}}(m+x)}\,dx = \begin{bmatrix} t = mx \\ dt = m\,dx \end{bmatrix} = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}(1+t)}\,dt.$$

Iz jednakosti (1.6) i (1.7) za $2\lambda = \frac{1}{p}$ slijedi

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}(1+t)}\,dt = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

□

Dokaz teorema 1.6.1 slijedi dokaz klasične Hilbertove nejednakosti, uz korištenje Hölderove nejednakosti (1.4) umjesto Cauchyjeve (1.2).

Koristeći nejednakost (1.4) i lemu 1.6.2, za nizove realnih brojeva $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ te realne brojeve $p, q > 1$ takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dobijemo

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m^{\frac{1}{pq}}}{n^{\frac{1}{pq}}(m+n)^{\frac{1}{p}}} a_m \frac{n^{\frac{1}{pq}}}{m^{\frac{1}{pq}}(m+n)^{\frac{1}{q}}} b_n \right] \\
&\leq \left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{q}}(m+n)} a_m^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{p}}}{m^{\frac{1}{p}}(m+n)} b_n^q \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{q}}(m+n)} \right) a_m^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{p}}}{m^{\frac{1}{p}}(m+n)} \right) b_n^q \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{q}} a_m^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} b_n^q \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\pi}{\left(\sin\frac{\pi}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sin\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{1}{q}}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

pri čemu je u zadnjem koraku iskorišteno

$$\sin\frac{\pi}{q} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{p}\right) = \sin\frac{\pi}{p}.$$

Time smo dobili nejednakost

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.13}$$

Dokažimo da je konstanta $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ optimalna.

Primijetimo da za integrabilne funkcije f i g takve da je $f(n) = a_n$ te $g(n) = b_n$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} \sim \int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{f(x)\,g(y)}{x+y}\,dy\,dx,$$

stoga ćemo dokazom optimalnosti konstante $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ za integralnu verziju pokazati i njenu optimalnost za diskretnu verziju. Pri tome ćemo velikim dijelom pratiti dokaz optimalnosti konstante u klasičnoj Hilbertovoj nejednakosti.

Neka je

$$\iint \frac{f(x)g(y)}{x+y}\,dx\,dy \le C\|f\|_p\|g\|_q, \quad C > 0,$$

za konjugirane potencije p i q, $p, q > 1$. Biramo $f(x) = x^{-\frac{1}{p}-\frac{\epsilon}{p}}$ i $g(y) = y^{-\frac{1}{q}-\frac{\epsilon}{q}}$, $\epsilon > 0$, pa je

$$\|f\|_p = \left(\int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{1}{p}-\frac{\epsilon}{p}}\right)^p\,dx\right) = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}}$$

te analogno $\|g\|_q = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{q}}$.

Slijedi da je

$$\|f\|_p\|g\|_q = \frac{1}{\epsilon}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y}\,dy\,dx &= \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{p}+\frac{\epsilon}{p}}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{1}{q}+\frac{\epsilon}{q}}} \cdot \frac{1}{x+y}\,dy\,dx \\
&= \begin{bmatrix} y = xu \\ dy = x\,du \end{bmatrix} \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{p}+\frac{\epsilon}{p}}} \int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{q}+\frac{\epsilon}{q}}} \cdot \frac{1}{u^{\frac{1}{q}+\frac{\epsilon}{q}}} \cdot \frac{1}{1+u}\,du\,dx \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+\epsilon}} \left(\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{1}{(1+u)\,u^{\frac{1}{q}+\frac{\epsilon}{q}}}\,du \right) dx \\
&\quad \left[0 < \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{(1+u)\,u^{\frac{1}{q}+\frac{\epsilon}{q}}}\,du < \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{u^{\frac{1}{q}+\frac{\epsilon}{q}}}\,du = \frac{x^{-\frac{1}{p}+\frac{\epsilon}{q}}}{\frac{1}{p}-\frac{\epsilon}{q}} \right] \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+\epsilon}} \left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+u)\,u^{\frac{1}{q}+\frac{\epsilon}{q}}}\,du \right) dx + O\left(\int_1^\infty \frac{1}{x^{1+\epsilon}} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{p}+\frac{\epsilon}{q}}}{\frac{1}{p}-\frac{\epsilon}{q}}\,dx \right) \\
&= \left(\int_1^\infty \frac{1}{x^{1+\epsilon}}\,dx \right) \left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+u)\,u^{\frac{1}{q}+\frac{\epsilon}{q}}}\,du \right) + O\left(\int_1^\infty x^{-1-\frac{1}{p}-\epsilon+\frac{\epsilon}{q}}\,dx \right) \\
&= \frac{1}{\epsilon} \left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+u)\,u^{\frac{1}{q}+\frac{\epsilon}{q}}}\,du \right) + O(1),
\end{aligned}$$

stoga je

$$C \geq \frac{\iint \frac{f(x)+g(y)}{x+y}\,dx\,dy}{\|f\|_p \|g\|_q} = \int_0^\infty \frac{1}{(1+u)\,u^{\frac{1}{q}+\frac{\epsilon}{q}}}\,du + O(1) \cdot \epsilon.$$

$O(1)$ je jednako nekoj konstanti $C' \in \mathbb{R}$ pa kada $\epsilon \to 0$, iz jednakosti (1.6) i (1.7) slijedi

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+u)\,u^{\frac{1}{q}+\frac{\epsilon}{q}}}\,du + O(1) \cdot \epsilon \to \int_0^\infty \frac{1}{(1+u)\,u^{\frac{1}{q}}}\,du = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{q}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}},$$

to jest $C = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}$ je optimalna konstanta.

Još neka poopćenja

Hilbertovu nejednakost možemo zapisati i kao

$$\left| \sum_{r \neq s} \frac{u_r \bar{u}_s}{r-s} \right| \leq \pi \sum |u_r|^2,$$

gdje je u_r proizvoljni niz kompleksnih brojeva.

Takav zapis nam koristi prilikom dokazivanja općenitijih nejednakosti za bilinearne forme. Bez dokaza ćemo navesti dva teorema iz članka Montgomeryja i Vaughana [7], koji su bitni za analitičku teoriju brojeva i teoriju funkcija.

Teorem 1.6.3. *Neka su $x_1, x_2, ..., x_R$ realni brojevi koji su različiti modulo 1 i pretpostavimo da je $\delta = \min_{r,s} \|x_r - x_s\|$. Tada vrijedi*

$$\left|\sum_{r,s} u_r \overline{u}_s \csc \pi (x_r - x_s)\right| \leq \delta^{-1} \sum_r |u_r|^2 .$$

Također, ako je $0 < \delta_r \leq \min_s \|x_r - x_s\|$, onda

$$\left|\sum_{r,s} u_r \overline{u}_s \csc \pi (x_r - x_s)\right| \leq \frac{3}{2} \sum_r |u_r|^2 \delta^{-1}.$$

Teorem 1.6.4. *Neka su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_R$ različiti realni brojevi i $\delta_r = \min_{r,s} |\lambda_r - \lambda_s|$. Tada vrijedi*

$$\left|\sum_{r,s} \frac{u_r \overline{u}_s}{\lambda_r - \lambda_s}\right| \leq \pi \delta^{-1} \sum_r |u_r|_2 .$$

Nadalje, ako je $\delta_r = \min_s |\lambda_r - \lambda_s|$, onda je

$$\left|\sum_{r,s} \frac{u_r \overline{u}_s}{\lambda_r - \lambda_s}\right| \leq \frac{3}{2} \pi \sum_r |u_r|_2 \, \delta_r^{-1}.$$

Napomenimo kako su sve sume u članku [7] konačne, ali analogni rezultati vrijede i za beskonačne sume.

1.7 Varijanta s maksimumom

U klasičnoj Hilbertovoj nejednakosti prikazanoj u (1.1), izraz kojim množimo nizove s lijeve strane jednakosti jednak je $\frac{1}{m+n}$, gdje su $m, n \in \mathbb{N}$ indeksi realnih nizova $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Međutim, može se pokazati da slične nejednakosti vrijede i za određene druge izraze. Dokazat ćemo nejednakost za izraz $\frac{1}{\max(m,n)}$ te odrediti optimalnu konstantu.

Teorem 1.7.1. *Neka su $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dva niza realnih brojeva i $C > 0$. Tada vrijedi*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{\max(m,n)} < C\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.14}$$

Dokaz. Dokaz velikim dijelom prati dokaz klasične Hilbertove nejednakosti. Neka je $S = \{(m,n) \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ skup svih uređenih parova prirodnih brojeva te neka su $(\alpha_s)_{s\in S}$ i $(\beta_s)_{s\in S}$ kolekcije realnih brojeva indeksirane sa S definirane s

$$\alpha_s = \frac{a_m}{\sqrt{\max(m,n)}}\left(\frac{m}{n}\right)^{\lambda} \quad \text{i} \quad \beta_s = \frac{b_n}{\sqrt{\max(m,n)}}\left(\frac{n}{m}\right)^{\lambda}, \quad s = (m,n), \quad \lambda > 0.$$

Uvrstimo α_s i β_s u nejednakost (1.2):

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{\max(m,n)} &\le \left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{\max(m,n)}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{\max(m,n)}\left(\frac{n}{m}\right)^{2\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= \left[\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\max(m,n)}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\max(m,n)}\left(\frac{n}{m}\right)^{2\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Dovoljno je pokazati kako unutarnje sume s desne strane nejednakosti konvergiraju za neki $\lambda > 0$. Zapravo ćemo odmah pokazati da konvergiraju za $\lambda = \frac{1}{4}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\max(m,n)}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\max(m,n)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{m}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\\ &\le \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{m}\int_{m}^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx\\ &< \frac{1}{\sqrt{m}}\cdot 2\sqrt{m} + \sqrt{m}\cdot\frac{2}{\sqrt{m}}\\ &\le 4,\end{aligned}$$

pritom nejednakost $\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} \le \int_m^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ vrijedi jer je suma s lijeve strane donja Darbouxova suma integrala s desne strane nejednakosti. Time smo pokazali da nejednakost

(1.14) vrijedi. Odredimo još i optimalnu konstantu.

Iz prethodnog koraka znamo da nejednakost (1.14) vrijedi za $C = 4$. Pokažimo da za svaki C koji zadovoljava (1.14) vrijedi $C \geq 4$.

Uzmimo opet

$$a_n(\epsilon) = b_n(\epsilon) = n^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \tag{1.15}$$

te ih uvrstimo u desnu stranu nejednakosti (1.14):

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2(\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2(\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\epsilon}}.$$

Već smo pokazali da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\epsilon}} \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2\epsilon}}\, dx = \frac{1}{2\epsilon}$$

kada $\epsilon \to 0$. Za $(a_n(\epsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n(\epsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ iz (1.15) vrijedi

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{\max(m,n)} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{\max(m,n)}$$

te je

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{\max(m,n)} \sim \int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{y^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{\max(x,y)}\, dx\, dy = \bar{I}(\epsilon)$$

kada $\epsilon \to 0$.

$$\begin{aligned}
\bar{I}(\epsilon) &= \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \cdot \frac{1}{\max(x,y)}\, dy\, dx \\
&= \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \left(\frac{1}{x}\chi_{\{x\geq y\}} + \frac{1}{y}\chi_{\{x<y\}}\right) dy\, dx \\
&= \int_1^{\infty}\left(\int_1^{x} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}+\epsilon}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\, dy + \int_x^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{3}{2}+\epsilon}}\, dy\right) dx \\
&= \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x^{1+2\epsilon}} \int_1^{x} \frac{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}}{xy^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\, dy + \frac{1}{x^{1+2\epsilon}} \int_x^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}+\epsilon}}{xy^{\frac{3}{2}+\epsilon}}\, dy\right) dx \\
&= \begin{bmatrix} u = \dfrac{y}{x} \\ du = \dfrac{dy}{x} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+2\epsilon}} \left(\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\,du \right) dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+2\epsilon}} \left(\int_1^\infty \frac{1}{u^{\frac{3}{2}+\epsilon}}\,du \right) dx \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+2\epsilon}} \left(\frac{2}{1-2\epsilon} u^{\frac{1}{2}-\epsilon} \Big|_{\frac{1}{x}}^1 \right) dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+2\epsilon}} \left(\frac{-2}{1+2\epsilon} u^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \Big|_1^\infty \right) dx \\
&= \frac{2}{1-2\epsilon} \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+2\epsilon}}\,dx - \frac{2}{1-2\epsilon} \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}+\epsilon}}\,dx + \frac{2}{1+2\epsilon} \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+2\epsilon}}\,dx \\
&= \frac{1}{\epsilon(1-2\epsilon)} - \frac{4}{(1-2\epsilon)(1+2\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon(1+2\epsilon)} \\
&= \frac{2}{\epsilon(1+2\epsilon)} \\
&= \frac{2}{\epsilon} - \frac{4}{1+2\epsilon}.
\end{aligned}
$$

Odnosno, za $\epsilon \to 0$ je

$$\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \cdot \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \cdot \frac{1}{\max(m,n)} = \frac{2}{\epsilon} + O(1).$$

Kako je za $\epsilon \to 0$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1+2\epsilon}} = \frac{1}{2\epsilon} + O(1),$$

slijedi da je $C \geq 4$.

□

1.8 Nenegativnost

Nakon što smo pronašli gornju ogradu za $\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{a_m a_n}{m+n}$, pokušajmo odrediti i donju.

Propozicija 1.8.1. *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva. Tada je*

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_j a_k}{j+k} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

Dokaz. Vidimo da je

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k x^j x^k = \left(\sum_{j=1}^n a_j x^j \right)^2 \geq 0.$$

Integriranjem dobijemo

$$0 \leq \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k x^j x^k \right) dx = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k+1} < \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k}.$$

□

Možemo pokazati i nešto općenitiji slučaj.

Korolar 1.8.2. *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva te neka je $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih brojeva. Tada je*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_j a_k}{\lambda_j + \lambda_k} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Dokaz. Analogno prethodnoj propoziciji vidimo da je za $x \in [0,1]$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k x^{\lambda_j} x^{\lambda_k} \geq 0.$$

i

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k x^{\lambda_j} x^{\lambda_k} \right) dx < \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_j a_k}{\lambda_j + \lambda_k}.$$

□

Poglavlje 2

Primjene Hilbertove nejednakosti

2.1 Bilinearne i kvadratne forme, norma matrice

U ovom poglavlju ćemo pročavati primjenu Hilbertove nejednakosti, većinom na Hilbertove matrice, odnosno Hilbertove operatore. No, prije nego što krenemo dalje, bilo bi korisno prisjetiti se nekih osnovnih rezultata vezanih uz norme matrica te bilinearne i kvadratne forme.

Uvedimo prvo oznaku za prostore koje ćemo promatrati.

Definicija 2.1.1. *Neka je $\mathbb{F}$ polje takvo da je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Ako je na vektorskom prostoru $\mathbb{F}^n$ definiran skalarni produkt s $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j$, tada je to unitaran prostor te ga označavamo s ℓ_2^n. S ℓ_2 označavamo prostor realnih ili kompleksnih beskonačnih nizova $\left(x_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ takvih da je $\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^2 < \infty$.*

Navedimo neke osnovne definicije koje će nam biti potrebne.

Definicija 2.1.2. *Neka je $A = \left(a_{j,k}\right)$ matrica te (x_k) i (y_k) nizovi brojeva. Bilinearna forma $A(x, y)$ je definirana kao*

$$A(x, y) = \sum_j \sum_k a_{j,k} x_j y_k.$$

Možemo primijetiti da vrijedi

$$\langle Ay, x\rangle = \sum_j \sum_k a_{j,k} y_k \overline{x}_j, \tag{2.1}$$

odnosno $A(x, y) = \langle Ay, \overline{x}\rangle$.

Definicija 2.1.3. *Neka je $A = \left(a_{j,k}\right)$ matrica te (x_k) niz brojeva. Kvadratna forma $A(x, x)$ je definirana kao*

$$A(x, x) = \sum_j \sum_k a_{j,k} \overline{x}_j x_k = A(\overline{x}, x).$$

Definicija 2.1.4. *Linearni operator $A : U \to V$ između unitarnih prostora U i V je ograničen ako postoji konstanta $M > 0$ takva da je*

$$||Ax|| \leq M||x||, \quad \forall x \in U.$$

Najmanju takvu konstantu M nazivamo normom operatora A te ju označavamo s $||A||$.

Prisjetimo se i rezultata koji će nam olakšati određivanje norme operatora.

Propozicija 2.1.5. *Neka je $A : U \to V$ linearan operator između unitarnih prostora U i V. Tada vrijedi*

$$||A|| = \sup \{|\langle Ax, y\rangle| : ||x|| = ||y|| = 1\}.$$

Definicija 2.1.6. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A : V \to V$ linearan operator. Operator $A^* : V \to V$ sa svojstvom $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$, $\forall x, y \in V$, zove se hermitski adjungiran operator operatoru A. Kažemo da je operator A hermitski ako vrijedi $A^* = A$.*

Propozicija 2.1.7. *Za hermitski operator A vrijedi*

$$||A|| = \sup \{|\langle Ax, x\rangle| : ||x|| = 1\}.$$

Pomoću sljedeće propozicije ćemo lakše uspoređivati norme matrica.

Propozicija 2.1.8.

1. *Ukoliko se neki retci ili stupci matrice uklone ili zamijene s 0, norma matrice se neće povećati.*
2. *Ako je $a_{j,k} \geq 0$ i $|b_{j,k}| \leq a_{j,k}$ za sve j, k, onda je $||B|| \leq ||A||$.*
3. *Matrica A s realnim koeficijentima ima jednaku normu kao operator na $\mathbb{R}^n$ i operator na $\mathbb{C}^n$, čiji je matrični prikaz jednak A.*

Propozicija 2.1.9. *Neka je $A = \left(a_{j,k}\right)_{j,k=1}^{\infty}$ beskonačna matrica te $A^{(n)} = \left(a_{j,k}\right)_{j,k=1}^{n}$ konačna matrica. A je ograničen operator na ℓ_2 ako i samo ako postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|A^{(n)}\| \leq M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A^{(n)}\|$.*

Sljedeća dva teorema opisuju Schurov test, koji se koristi pri određivanju gornje ograde norme matrica. Prvi teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 2.1.10. *Neka je $A = \left(a_{j,k}\right)$ matrica (konačna ili beskonačna) takva da je $a_{j,k} \geq 0$ za sve j, k te postoje $M_1, M_2 > 0$ za koje vrijedi*

$$\sum_k a_{j,k} \leq M_1, \quad \forall j \quad \text{i} \quad \sum_j a_{j,k} \leq M_2, \quad \forall k.$$

Odnosno, sume svih redaka su manje ili jednake M_1, a sume svih stupaca su manje ili jednake M_2.

Tada je $A \in B(\ell_2)$ te je $\|A\| \leq \sqrt{M_1 M_2}$.

Teorem 2.1.11. *Neka je $A = \left(a_{j,k}\right)$ matrica (konačna ili beskonačna) takva da je $a_{j,k} \geq 0$ za sve j, k te neka postoji stogo pozitivan niz $\left(w_j\right)$ i $M_1, M_2 > 0$ za koje vrijedi*

$$\sum_k a_{j,k} w_k \leq M_1 w_j, \quad \forall j \quad \text{i} \quad \sum_j a_{j,k} w_j \leq M_2 w_k, \quad \forall k.$$

Tada je $\|A\| \leq \sqrt{M_1 M_2}$.

Dokaz. Neka su $\left(x_j\right)$ i (y_k) proizvoljni nenegativni realni vektori te $A(x, y) = \sum_j \sum_k x_j a_{j,k} y_k$. Za

$$r_{j,k} = a_{j,k}^{\frac{1}{2}} x_j \left(\frac{w_k}{w_j}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{i} \quad s_{j,k} = a_{j,k}^{\frac{1}{2}} y_k \left(\frac{w_j}{w_k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

je tada $A(x, y) = \sum_j \sum_k r_{j,k} s_{j,k}$.

Također definiramo

$$R = \sum_j \sum_k r_{j,k}^2 = \sum_j \frac{x_j^2}{w_j} \sum_k a_{j,k} w_k \leq M_1 \sum_j x_j^2$$

i

$$S = \sum_k \sum_j s_{j,k}^2 = \sum_k \frac{y_k^2}{w_k} \sum_j a_{j,k} w_j \leq M_2 \sum_k y_k^2.$$

Iz Cauchyjeve nejednakosti (1.2) slijedi $A(x, y) \leq (RS)^{\frac{1}{2}}$ pa je

$$A(x, y) \leq (M_1 M_2)^{\frac{1}{2}} \|x\| \cdot \|y\| .$$

□

Iako Schurov test može biti vrlo koristan, za Hilbertove matrice, kojima ćemo se dalje baviti, je korisnija primjena Hilbertove nejednakosti - pomoću nje možemo točno odrediti norme Hilbertovih matrica, a ne samo njihove gornje ograde.

2.2 Hilbertove matrice

Primjenu Hilbertove nejednakosti ćemo promatrati na posebnom tipu matrica, koje se nazivaju Hilbertovim matricama.

Definicija 2.2.1. *Za svaki $r \in \mathbb{Z}$ definiramo c_r s*

$$c_r = \begin{cases} \frac{1}{r} & r \neq 0, \\ 0 & r = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Matrice $H_1 = (c_{j+k})_{j,k\in\mathbb{N}}$, $H_0 = (c_{j+k-1})_{j,k\in\mathbb{N}}$ i $H_{-1} = (c_{j-k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ nazivamo Hilbertovim matricama.

Oznaku c_r definiranu kao u (2.2) ćemo koristiti i u ostatku rada kao oznaku elementa neke određene Hilbertove matrice. Ukoliko nije bitno je li Hilbertova matrica o kojoj govorimo H_1, H_0 ili H_{-1}, njene elemente ćemo označavati s $h_{j,k}$.

Ispišimo prvo matrice H_1, H_0 i H_{-1}:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad H_0 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad H_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \dots \\ 1 & 0 & -1 & \dots \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Matrice H_1 i H_0 su simetrične te su im sporedna i njoj paralelne dijagonale konstantne, dok je matrica H_{-1} antisimetrična te su joj glavna dijagonala i sve ostale njoj paralelne konstantne. To jest H_1 i H_0 su Hankelove matrice, a H_{-1} je Toeplitzova.

Također, elementi svake od matrica se mogu zapisati kao $\frac{1}{x_j - y_k}$, $j, k \in \mathbb{N}$. Konkretno $x_j = j$, dok je y_k jednak $-k$ za H_1, $1 - k$ za H_0 i k za H_{-1}. Takav tip matrica nazivamo Cauchyjevim matricama.

Determinanta Cauchyjeve matrice $A = \left(a_{j,k}\right)_{j,k=1}^{n}$, $a_{j,k} = \frac{1}{x_j - y_k}$ se može odrediti formulom

$$\det A = \frac{\prod_{j=2}^{n} \prod_{k=1}^{j-1} \left(x_j - x_k\right)\left(y_k - y_j\right)}{\prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{n} \left(x_j - y_k\right)}$$

pa je npr.

$$\det H_0^{(n)} = \frac{[1!2! \cdots (n-1)!]^4}{1!2! \cdots (2n-1)!}.$$

Determinanta matrice $H_0^{(n)}$ je pozitivna pa je $H_0^{(n)}$ regularna, ali kako je determinanta vrlo mala, njen inverz je često vrlo teško izračunati. Slično se može pokazati i za $H_1^{(n)}$ i $H_{-1}^{(n)}$.

Formula po kojoj se elementi inverza računaju je navedena u [3]: za $\left(H_0^{(n)}\right)^{-1} = \left(h'_{j,k}\right)_{j,k=1}^{n}$ je

$$h'_{j,k} = (-1)^{j+k} (j + k + 1) \binom{n + j - 1}{n - k} \binom{n + k - 1}{n - j} \binom{j + k - 2}{j - 1}^2.$$

Vidimo da su elementi inverza cijeli brojevi te da su na glavnoj dijagonali svi pozitivni. Dijagonale paralelne njoj su naizmjenice cijele negativne i cijele pozitivne.

Promotrimo sada norme Hilbertovih matrica. Primijetimo prvo kako su gore definirane Hilbertove matrice beskonačnodimenzionalne. Za matrice konačnih dimenzija $n \times n$ koristimo oznake $H_1^{(n)}$, $H_0^{(n)}$ i $H_{-1}^{(n)}$, pri čemu je $H_1^{(n)} = (c_{j+k})_{1 \le j,k \le n}$. Drugim riječima, matricu $H_1^{(n)}$ možemo dobiti tako da matrici H_1 uklonimo sve retke i stupce nakon n-tog.

Odmah možemo vidjeti da je za $H \in \{H_1, H_0, H_{-1}\}$, $\|H\| \ge \left\|H^{(n)}\right\|$. Štoviše, iz propozicije 2.1.9 slijedi da je $\|H\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|H^{(n)}\right\|$.

Matrica H_1 se može dobiti tako da matrici H_0 maknemo prvi redak pa je $\|H_1\| \le \|H_0\|$. Također, za sve $j, k \in \mathbb{N}$ vrijedi $0 < c_{j+k} < c_{j+k-1}$ pa je po propoziciji 2.1.8 i $\left\|H_1^{(n)}\right\| \le \left\|H_0^{(n)}\right\|$.

Uvest ćemo i oznake $\tilde{H}_1 = \left(c_{j+k}\right)_{j,k \in \mathbb{Z}}$ te $\tilde{H}_{-1} = \left(c_{j-k}\right)_{j,k \in \mathbb{Z}}$. Za konačnodimenzionalne verzije imamo $\tilde{H}_1^{(n)} = \left(c_{j+k}\right)_{j,k=-n}^{n}$ i $\tilde{H}_{-1}^{(n)} = \left(c_{j-k}\right)_{j,k=-n}^{n}$ te vrijedi $\left\|\tilde{H}\right\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|\tilde{H}^{(n)}\right\|$.

Vidimo da vrijedi $\tilde{H}_1 x = \tilde{H}_{-1} y$ za $y_j = x_{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Možemo pokazati i da je $\left\|\tilde{H}_{-1}\right\| = \|H_{-1}\|$. Naime, ukoliko redove i stupce u matrici $\tilde{H}_{-1}^{(n)}$ umjesto s $-n$ do n indeksiramo s 1 do $2n+1$, dobit ćemo matricu $H_{-1}^{(n)}$ pa je $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\tilde{H}_{-1}^{(n)}\right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|H_{-1}^{(n)}\right\|$.

Na kraju, neka je $\left\|\tilde{H}_{-1}\right\| = M$ i $\left(x_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva. Proširimo ga do $\left(x_j^*\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ tako da je $x_j^* = 0$ za svaki $j \le 0$. Za $j \ge 1$ vrijedi

$$\left(\tilde{H}_{-1}x^*\right)_j = \left(H_{-1}x\right)_j,$$

dok je za $j \ge 0$

$$\left(\tilde{H}_{-1}x^*\right)_{-j} = \sum_{k\ge 1} c_{-j-k}x_k = -\sum_{k\ge 1} c_{j+k}x_k = -\left(H_0x\right)_{j+1}.$$

Slijedi da je

$$\|H_{-1}x\|^2 + \|H_0x\|^2 = \left\|\tilde{H}_{-1}x^*\right\|^2 \le M^2\|x\|^2.$$

Iz čega dobijemo $\|H_0\| \le \|H_{-1}\|$.

Sada imamo

$$\|H_1\| \le \|H_0\| \le \|H_{-1}\| = \left\|\tilde{H}_{-1}\right\| = \left\|\tilde{H}_1\right\|. \tag{2.3}$$

U nastavku ćemo odrediti čemu su jednake te norme, za što će nam poslužiti trigonometrijski polinomi.

2.3 Trigonometrijski polinomi

Uvedimo oznaku $e(x) = e^{2\pi ix}$. Za tako definiranu funkciju vrijedi $e(x)e(y) = e(x+y)$ i $\int_0^1 e(rt)\,dt = 0$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \ne 0$.

Definicija 2.3.1. *Neka je $\left(x_j\right)_{j=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ niz realnih brojeva. Funkciju $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika*

$$X(t) = \sum_{j=1}^n x_j e(jt)$$

zovemo trigonometrijski polinom.

Za njih vrijedi

$$|X(t)|^2 = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n x_j\bar{x}_k e\left[(j-k)t\right] = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 + \sum_{j=1}^n\sum_{k\ne j} x_j\bar{x}_k e\left[(j-k)t\right],$$

iz čega slijedi

$$\int_0^1 |X(t)|^2\,dt = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = \|x\|^2.$$

Trigonometrijski polinomi su nam posebno zanimljivi jer je upravo njih koristio Hilbert kako bi dokazao nejednakost (1.1). Koristit ćemo sličan dokaz.

Teorem 2.3.2. *Neka je $H = \left(h_{j,k}\right)_{j,k\in\mathbb{N}}$ matrica jednaka H_1, H_0 ili H_{-1}. Za $x, y \in \ell_2$ je $H(x,y) = \sum_j \sum_k h_{j,k} x_j y_k < \infty$ te vrijedi*

$$|H(x,y)| \leq \pi\,\|x\| \cdot \|y\|\,. \tag{2.4}$$

Dokaz. Želimo pokazati da norme matrica H_1, H_0 i H_{-1} nisu veće od π. Iz (2.3) vidimo da je dovoljno pokazati kako je $\|H_{-1}\| \leq \pi$. Također, zbog propozicije 2.1.9, potrebno je samo pokazati da je $\|H_{-1}^{(n)}\| \leq \pi$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Neka su $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ kompleksni vektori te $X(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j e(jt)$ i $Y(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k e(kt)$. Tada je

$$X(t)\,\overline{Y(t)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j \overline{y}_k e\left[(j-k)\,t\right].$$

Uvedimo oznaku

$$I_{-1} = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) X(t)\,\overline{Y(t)}\,dt.$$

Vidimo kako je

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = 0$$

te za svaki $r \in \mathbb{Z}$, $r \neq 0$ vrijedi

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) e(rt)\,dt = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2\pi i r} - \frac{1}{2\pi i r}\int_0^1 e(rt)\,dt = \frac{1}{2\pi i r}.$$

Stoga je

$$I_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{j-k} x_j \overline{y}_k = \frac{1}{2\pi i} H_{-1}^{(n)}(x, \overline{y})\,.$$

Za $t \in [0,1]$ je $|t - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ pa iz definicije 2.3.1 i nejednakosti (1.3) slijedi

$$|I_{-1}| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |X(t)\,\overline{Y(t)}|\,dt \leq \frac{1}{2}\|x\| \cdot \|\overline{y}\|.$$

Sada imamo

$$\left|\frac{1}{2\pi i}H_{-1}^{(n)}(x,\overline{y})\right| \leq \frac{1}{2}\|x\|\cdot\|\overline{y}\|.$$

Odnosno, ako zamijenimo $\overline{y}$ s y,

$$\left|H_{-1}^{(n)}(x,y)\right| \leq \pi\|x\|\cdot\|y\|,$$

čime je teorem dokazan.

□

Uspješno smo odredili da je π gornja ograda norme Hilbertovih matrica, ali ne znamo koliko je ona dobra. Može se pokazati kako je norma beskonačnih Hilbertovih matrica upravo jednaka π, no za taj dokaz nam je potrebna sljedeća lema.

Lema 2.3.3. *Za $a > 0$ vrijedi*

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t+a)\,t^{\frac{1}{2}}}\,dt = \frac{\pi}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

Dokaz. Neka je

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(t+a)\,t^{\frac{1}{2}}}\,dt.$$

Tada je

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(1+u)\,(au)^{\frac{1}{2}}}\,du = \frac{\pi}{a^{\frac{1}{2}}},$$

gdje prva jednakost slijedi primjenom supstitucije $t = au$.

□

Teorem 2.3.4. *Za Hilbertove matrice vrijedi*

$$\|H_1\| = \|H_0\| = \|H_{-1}\|.$$

Dokaz. Neka je $\left(x_j\right)_{j=1}^n$ niz definiran s $x_j = j^{\frac{1}{2}}$. Uvedimo oznaku $l_n := \|x\|^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$. Neka je $y = H_1^{(n)}x$, tj.

$$y_j = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(j+k)\,k^{\frac{1}{2}}}.$$

Pošto je $f(t) = \frac{1}{(j+t)t^{\frac{1}{2}}}$ padajuća funkcija, vrijedi

$$y_j \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(j+k)\,k^{\frac{1}{2}}} \geq \int_1^n \frac{1}{(t+j)\,t^{\frac{1}{2}}}\,dt,$$

gdje druga nejednakost slijedi iz nejednakosti Riemannovog integrala i njegove gornje Darbouxove sume.

Primijetimo da vrijede i sljedeće nejednakosti:

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+j)\,t^{\frac{1}{2}}}\,dt \leq \frac{1}{j}\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt = \frac{2}{j},$$

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{(t+j)\,t^{\frac{1}{2}}}\,dt \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt = \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Iz njih i leme 2.3.3 slijedi

$$y_j \geq \int_0^{\infty} \frac{1}{(t+j)\,t^{\frac{1}{2}}}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{(t+j)\,t^{\frac{1}{2}}} - \int_n^{\infty} \frac{1}{(t+j)\,t^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{\pi}{j^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{j} - \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}},$$

odnosno

$$y_j^2 \geq \frac{\pi^2}{j} - 4\pi\left(\frac{1}{j^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(jn)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

pa je

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \geq \pi^2 l_n - 4\pi\zeta\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{4\pi}{n^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{\frac{1}{2}}},$$

gdje je $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ Riemannova zeta funkcija.

Za Riemannovu zeta funkciju $\zeta(s)$ je poznato da konvergira za sve $s \in \mathbb{C}$ takve da je $\mathrm{Re}(s) > 0$ te je zbog nejednakosti Riemannovog integrala i njegove donje Darbouxove sume

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{\frac{1}{2}}} \leq \int_0^n t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2n^{\frac{1}{2}}.$$

Iz toga slijedi

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \geq \pi^2 l_n - 4\pi\zeta\left(\frac{3}{2}\right) - 8\pi = \pi^2 l_n - c,$$

za $c = 4\pi\zeta\left(\frac{3}{2}\right) + 8\pi > 0$.

Sada imamo

$$\left\|H^{(n)}\right\|^2 \geq \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} \geq \pi^2 - \frac{c}{l_n},$$

pa je

$$\|H_1\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|H_1^{(n)}\right\| = \pi.$$

Iz tog izraza te nejednakosti (2.3) i (2.4) slijedi

$$\pi \leq \|H_1\| \leq \|H_0\| \leq \|H_{-1}\| \leq \pi.$$

$\square$

Primijetimo da su matrice $H_1^{(n)}$, $H_0^{(n)}$ i $H_{-1}^{(n)}$ konačne te su im svi elementi racionalni, što znači da su njihove norme algebarski brojevi, a π to nije. Zaključujemo da za $H^{(n)} \in \left\{H_1^{(n)}, H_0^{(n)}, H_{-1}^{(n)}\right\}$ vrijedi $\left\|H^{(n)}\right\| < \pi$.

U [6] dobivena je ocjena za normu konačne Hilbertove matrice $H_1^{(n)}$:

$$\left\|H_1^{(n)}\right\| \leq \pi - \frac{\pi^5}{2(\log n)^2} + O\left(\frac{\log(\log n)}{(\log n)^3}\right).$$

Pokažimo još jednu korisnu primjenu trigonometrijskih polinoma pri određivanju norme matrica sličnih Hilbertovima.

Sljedeći teorem će nam služiti kao pomoćni rezultat.

Teorem 2.3.5. *Neka je ϕ integrabilna funkcija takva da je $|\phi(t)| \leq M$, $0 \leq t \leq 1$, za neki $M > 0$. Za $r \in \mathbb{Z}$ definiramo*

$$d_r = \int_0^1 \phi(t)e(rt)\,dt.$$

Neka su D i $\tilde{D}$ matrice $\left(d_{j-k}\right)_{j,k\in\mathbb{N}}$ i $\left(d_{j-k}\right)_{j,k\in\mathbb{Z}}$. Tada vrijedi $\|D\|, \|\tilde{D}\| \leq M$. Također, ako je $\phi(t)$ realna funkcija i postoje $M_1, M_2 > 0$ takvi da je $M_1 \leq \phi(t) \leq M_2$, onda je D hermitska te za sve $x = \left(x_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ vrijedi

$$M_1\|x\|^2 \leq \langle Dx, x\rangle \leq M_2\|x\|^2.$$

Dokaz. Neka je $D^{(n)} = \left(d_{j,k}\right)_{j,k=1}^n$ te $X(t) = \sum_{j=1}^n x_j e(jt)$ i $Y(t) = \sum_{k=1}^n y_k e(kt)$. Također, neka je

$$I = \int_0^1 \phi(t)X(t)\overline{Y(t)}\,dt.$$

Tada je

$$I = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{j-k} x_j \overline{y}_k = D^{(n)}(x, \overline{y}).$$

Iz nejednakosti (1.3) slijedi $|I| \leq M\|x\| \cdot \|y\|$ te, analogno Hilbertovim matricama, promjenom indeksa redaka i stupaca dobijemo $\|\tilde{D}\| = \|D\|$.

Ako je $\phi(t)$ realna funkcija takva da je $M_1 \leq \phi(t) \leq M_2$, onda je $d_{-r} = \overline{d_r}$ pa je D hermitska.

Neka je

$$\hat{I} = \int_0^1 \phi(t)|X(t)|^2 \, dt.$$

Tada je

$$\hat{I} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{j-k} x_j \overline{x}_k = \left\langle D^{(n)} x, x \right\rangle,$$

pa slijedi da je $M_1\|x\|^2 \leq \hat{I} \leq M_2\|x\|^2$.

□

Sve Hilbertove matrice koje smo do sada promatrali su imale elemente oblika $\frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{Z}$. No što ako je $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$?

Teorem 2.3.6. *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ te A_α matrica $\left(a_{j,k}\right)_{j,k\in\mathbb{Z}}$, gdje je $a_{j,k} = \frac{1}{j-k+\alpha}$. Tada je $\|A_\alpha\| \leq \left|\frac{\pi}{\sin \alpha\pi}\right|$.*

Dokaz. Neka je $\phi(t) = e(\alpha t)$. Znamo da je $\left|e^{2\pi i \alpha t}\right| \leq 1$, odnosno $M = 1$. Računamo

$$d_r = \int_0^1 e(\alpha t)\, e(rt) \, dt = \frac{1}{2\pi i (r + \alpha)} (e(\alpha) - 1) = \frac{e^{\pi i \alpha} \sin \alpha\pi}{\pi (r + \alpha)}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Tada je $D = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} e^{\pi i \alpha} A_\alpha$ i $\|D\| \leq 1$, iz čega slijedi tvrdnja.

Pokažimo i da je ta ograda najbolja moguća. Pri tome ćemo koristiti poznati identitet

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(j + \alpha)^2} = \zeta(2, \alpha) + \zeta(2, -\alpha) - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \alpha\pi},$$

gdje je $\zeta(s, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)s}$ Hurwitzova zeta funkcija.

Neka je $\left(w_j\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ niz takav da je $w_0 = 1$ te $w_j = 0$, $j \neq 0$. Tada je

$$(A_\alpha w)_j = \frac{1}{j+\alpha}.$$

Slijedi da je

$$\|A_\alpha w\| = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(j+\alpha)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

□

Primijetimo kako je gornja ograda norme takve matrice jednaka gornjoj ogradi u poopćenom obliku Hilbertove nejednakosti (1.13).

2.4 Integrali polinoma

Za polinom $f(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$ s realnim koeficijentima a_j vrijedi

$$f(t)^2 = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_j a_k t^{j+k},$$

pa je

$$\int_0^1 f(t)^2\, dt = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k+1} = H_0^{(n+1)}(a, a).$$

Primijetimo da je $f(t)^2 \geq 0$ pa je i $\int_0^1 f(t)^2\, dt > 0$, iz čega slijedi da je matrica H_0 pozitivno semidefinitna.

Primjenom Hilbertove nejednakosti (2.4) dobivamo sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.4.1. *Neka je $f(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$, gdje su a_j realni. Tada vrijedi*

$$\int_0^1 f(t)^2\, dt \leq \pi \sum_{j=0}^{n} a_j^2.$$

Gornja propozicija se može iskoristiti i za određivanje donje ograde integrala $\int_0^1 f(t)^2\, dt$.

Propozicija 2.4.2. *Neka je f integrabilna realna funkcija na $[0,1]$ i neka je $\mu_j = \int_0^1 t^j f(t)\,dt$ za $j \geq 0$. Tada je*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j^2 \leq \pi \int_0^1 f(t)^2\,dt.$$

Dokaz. Dovoljno je pokazati da $\sum_{j=0}^{n} \mu_j^2$ zadovoljava nejednakost za svaki $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\sum_{j=0}^{n} \mu_j^2 = \sum_{j=0}^{n} \mu_j \int_0^1 t^j f(t)\ dt = \int_0^1 f(t)\, g(t)\ dt,$$

gdje je $g(t) = \sum_{j=0}^{n} \mu_j t^j$. Po propoziciji 2.4.1 slijedi

$$\int_0^1 g(t)^2\,dt \leq \pi \sum_{j=0}^{n} \mu_j^2.$$

Primjenom nejednakosti (1.3) dobijemo

$$\left(\sum_{j=0}^{n} \mu_j^2\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\ dt \int_0^1 g(t)^2\ dt \leq \pi \left(\sum_{j=0}^{n} \mu_j^2\right) \int_0^1 f(t)^2\ dt.$$

Podijelimo li izraz s $\sum_{j=0}^{n} \mu_j^2$, dobit ćemo

$$\sum_{j=0}^{n} \mu_j^2 \leq \pi \int_0^1 f(t)^2\ dt,$$

čime je tvrdnja dokazana.

□

Već smo pokazali da je H_0 pozitivno semidefinitna, no sada to možemo pokazati i za općenitije simetrične matrice.

Propozicija 2.4.3. *Neka je $\lambda_j > 0$ za $1 \leq j \leq n$ i neka je $r > 0$. Tada je simetrična matrica $\left(\frac{1}{(\lambda_j+\lambda_k)^r}\right)_{j,k=1}^{n}$ pozitivno semidefinitna.*

Dokaz. Neka su x_1, x_2, ..., x_n realni brojevi te $f(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j e^{-\lambda_j t}$. Slijedi da je $f(t)^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k e^{-(\lambda_j+\lambda_k)t}$. Sada je

$$\int_0^\infty t^{r-1} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha^r} \int_0^\infty u^{r-1} e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(r)}{\alpha^r},$$

pa imamo

$$0 \leq \int_0^{\infty} t^{r-1} f(t)^2 \, dt = \Gamma(r) \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_j x_k}{\left(\lambda_j + \lambda_k\right)^r},$$

gdje je $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} \, dx$ gama funkcija.

□

Pozitivnu semidefinitnost smo već dokazali za slučaj $r = 1$ kada smo u nejednakosti (1.17) pokazali nenegativnost lijevog člana Hilbertove nejednakosti (1.1). Dovoljno je uvrstiti $a_j = 1, \forall j \in \mathbb{N}$.

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] Q. Chen, B. Yang, *A survey on the study of Hilbert-type inequalities*, J Inequal Appl 302 (2015.), dostupno na https://doi.org/10.1186/s13660-015-0829-7 (veljača 2022.)

[3] M. D. Choi, *Tricks or Treats with the Hilbert Matrix*, The American Mathematical Monthly 90 (1983.), 301–312

[4] B. Guljaš, *Matematička analiza I & II*, dostupno na https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/MATANALuR.pdf (veljača 2022.)

[5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1988.

[6] G. J. O. Jameson, *Hilbert's inequality and related results*, dostupno na https://www.maths.lancs.ac.uk/~jameson/hilbert.pdf (veljača 2022.)

[7] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *Hilbert's inequality*, Journal of the London Mathematical Society 2 (1974.), 73–82

[8] R. Mrazović, Z. Vondraček, *Mjera i integral, 6. Produktna mjera*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mii/files/mii-prezentacija-6.pdf (veljača 2022.)

[9] K. Oleszkiewicz, *An Elementary Proof of Hilbert's Inequality*, The American Mathematical Monthly 100 (1993.), 276–280

[10] J. M. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Cambridge University Press, 2004.

[11] M. Stojić, *3 Teorem o reziduumima i primjene*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~stojic/KA-3.pdf (veljača 2022.)

[12] H. Šikić, I. Krijan, *Mjera i integral*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mii/files/mii-predavanja-sikic.pdf (veljača 2022.)

[13] D. C. Ulrich, *A Simple Elementary Proof of Hilbert's Inequality*, The American Mathematical Monthly 120(2013.), 161–164

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_matrix (veljača 2022.)

[15] https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function (veljača 2022.)

[16] https://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert (veljača 2022.)

[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Hankel_matrix (veljača 2022.)

[18] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_matrix (veljača 2022.)

[19] https://en.wikipedia.org/wiki/Hurwitz_zeta_function (veljača 2022.)

[20] https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function (veljača 2022.)

[21] https://en.wikipedia.org/wiki/Toeplitz_matrix (veljača 2022.)

[22] https://math.stackexchange.com/questions/837832/is-the-norm-of-the-hilbert-matrix-equal-to-pi (veljača 2022.)

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo izveli Hilbertovu nejednakost te pokazali neke njene primjene.

U prvome dijelu rada smo izveli Hilbertovu nejednakost u diskretnom i integralnom obliku te odredili da je optimalna konstanta u oba slučaja jednaka π. Za nejednakost u diskretnom obliku smo ponudili i alternativni dokaz pomoću geometrijske interpretacije. Također, izveli smo poopćenu Hilbertovu nejednakost koja vrijedi za konjugirane potencije $p, q > 1$ te pokazali da, uz različitu optimalnu konstantu, mogu vrijediti i slične nejednakosti, npr. varijanta s maksimumom koja nastaje zamjenom izraza $m + n$ u nazivniku s $\max(m, n)$. Na kraju smo pokazali da je lijeva strana Hilbertove nejednakosti nenegativna.

U drugome dijelu smo se bavili primjenama Hilbertove nejednakosti. Za primjene su nam najbitnije Hilbertove matrice pa smo im, nakon što smo ih definirali, iskazali i neka od njihovih važnijih svojstava, poput (anti)simetričnosti i regularnosti. Zatim smo uveli trigonometrijske polinome pomoću kojih smo dokazali još jedan oblik Hilbertove nejednakosti te odredili normu Hilbertovih matrica. Na kraju smo Hilbertovu nejednakost primijenili na integrale polinoma.

Summary

In this thesis, we derive Hilbert's inequality and present some of its applications.

In the first chapter, we derive Hilbert's inequality in its discrete and integral forms and determine that in both cases, π is the optimal constant. Additionally, we offer an alternative proof of discrete Hilbert's inequality using a geometric interpretation. We also derive a generalization of the discrete Hilbert's inequality for conjugate exponents $p, q > 1$ and show that similar inequalities, such as the maximum variant where the expression $m + n$ in the denominator on the left side is replaced with $\max(m, n)$, also hold. In the end, we prove that the left-hand side of the discrete Hilbert's inequality is non-negative.

In the second chapter, after once again reviewing the key notions, we define Hilbert matrices and state some of their properties, such as (skew)symmetry and regularity. Next, we introduce trigonometric polynomials and use them to prove another form of Hilbert's inequality, as well as determine the norm of Hilbert matrices. In the end, we apply Hilbert's inequality to integrals of polynomials.

Životopis

Rođena sam 25. listopada 1997. godine u Zagrebu. Obrazovanje započinjem 2004. godine u Osnovnoj školi Žuti brijeg te ga nastavljam 2012. godine upisom u XV. gimnaziju u Zagrebu. Nakon završene prirodoslovno-matematičke gimnazije, 2016. godine upisujem preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2019. završavam preddiplomski studij te na istom fakultetu upisujem diplomski studij, smjer Financijska i poslovna matematika.