Aproksimacija geometrijske optike u zakrivljenom prostor-vremenu u nelinearnoj elektrodinamici

Bilić, Šimun

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:245913

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-24**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Šimun Bilić

APROKSIMACIJA GEOMETRIJSKE OPTIKE U ZAKRIVLJENOM PROSTOR-VREMENU U NELINEARNOJ ELEKTRODINAMICI

Diplomski rad

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

Šimun Bilić

Diplomski rad

Aproksimacija geometrijske optike u zakrivljenom prostor-vremenu u nelinearnoj elektrodinamici

Voditelj diplomskog rada: Izv. prof. dr. sc., Maro Cvitan

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2022.

Zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc. Cvitanu na korisnim raspravama tijekom izrade ovog rada.

Sažetak

U ovome radu prikazali smo metodu geometrijske optike na primjeru elektromagnetskih i gravitacijskih valova u zakrivljenom prostor-vremenu te efekte nelinearnih pozadinskih elektromagnetskih polja na propagaciju linearnih elektromagnetskih valova u pozadini ravnoga prostora. Prvo smo primjenom standarnih pristupa geometrijske optike izveli osnovne relacije koje opisuju propagacijske krivulje i polarizacijske vektore elektromagnetskih i lineariziranih gravitacijskih valova. Potom smo povezali dobivene rezultate s metodama aproksimacije spinske geometrijske optike i dali pregled nekoliko recentnih članaka koji opisuju navedenu metodu. Na kraju smo prikazali općenite efekte nelinearnih pozadinskih elektromagnetskih polja na propagaciju elektromagnetskih valova visokih frekvencija u aproksimaciji slaboga polja.
Ključne riječi: aproksimacija geometijske optike, aproksimacije spinske geometrijske optike, vakuumski dvolom

Geometrical Optics Approximation in Curved Spacetime in Nonlinear Electrodynamics

Abstract

In this thesis, we have presented a method of geometric optics approximation for electromagnetic and gravitational waves in curved space-time background and effects of nonlinear background electromagnetic fields on propagation of linear electromagnetic waves in flat background metric. First, we used standard approaches of geometric optics to derive all basic equations that describe propagation curves and polarization vectors of electromagnetic and linearized gravitational waves. Then we connected those results with methods of spin optics approximation and gave a review of several papers that describe that method. Lastly, we presented general effects of nonlinear background electromagnetic fields on propagation of weak field high frequency electromagnetic waves.

Keywords: geometric optics approximation, spin optics approximation, vacuum birefringence

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Aproksimacija geometrijske optike u linearnoj elektrodinamici **6**

2.1 Osnovni model aproksimacije 6

2.2 Korekcije viših redova geometrijske optike 11

2.3 Geometrijska optika u Hamiltonovom i Lagrangeovom formalizmu . . 15

2.4 Aproksimacija spinske geometrijske optike 21

3 Gravitacijski valovi u granici geometrijske optike **32**

3.1 Linearizacija valne jednadžbe gravitacijskih valova 32

3.2 Osnovni model 37

3.3 Spinska optika za gravitacijske valove 40

4 Propagacija svjetlosti u nelinearnoj elektrodinamici **43**

4.1 Efektivna metrika sa pozadinskim poljima u ravnome prostoru 43

5 Zaključak **56**

6 Metodički dio diplomskog rada: Hubble-Lemaitreov zakon i širenje svemira **58**

6.1 Uvodna rasprava 58

6.2 Tijek nastavnoga sata 60

Literatura **67**

1 Uvod

U ovome radu bavimo se problemom propagacije valova visokih frekvencija u zakrivljenom prostor-vremenu. Općenito je ovakva vrsta problema poprilično univerzalna, javlja se u svim fizikalnim teorijama koje uključuju opis bilo kakvih valnih pojava. Teorijski se ovaj problem tretira asimptotskom analizom valne jednadžbe, što podrazumjeva za početak određene aproksimacije nad samom valnom jednadžbim kako bismo postigli linearni oblik valne jednadžbe. Zatim se rješavanje takve linearizirane valne jednadžbe provodi korištenjem asimptotski valjanog oblika rješenja. Time će se problem rješavanja neke općenite parcijalne diferencijalne jednadžbe svesti na problem rješavanja sustava diferencijalnih jednadžbi. Najčešće je slučaj da će fizikalno relevantan opis biti moguć korištenjem najnižega reda ili dodatno prvoga reda takvih aproksimacija. Dakle, iz temeljnih jednadžbi asimptotske analize možemo izvesti sve fizikalno relevantne veličine, a viši redovi će potom dati samo korekcije na već definirane fizikalne veličine u nižim redovima. Mi ćemo se u ovome radu baviti konkretnim primjerima od fizikalne važnosti u općoj teoriji relativnosti: slučaj valne jednadžbe klasične (linearne) elektrodinamike u zakrivljenom prostoru, zatim linearizirane valne jednadžbe za gravitacijske valove i konačno slučaj nelinearne elektrodinamike s konkretnim primjerima valnih jednadžbi koje se javljaju u efektivnim teorijama jakih pozadinskih polja. Ovakva teorijska razmatranja bitna su i u interpretaciji raznih opažanja u opservacijskoj kozmologiji. Naime, glavnina opažanja sastoji se u mjerenju raznih zračenja iz svemira i to elektromagnetskih i gravitacijskih valova koji se u takvim situacijama u širokom rasponu frekvencija mogu tretirati kao valovi visokih frekvencija u usporedbi s tipičnim prostornim skalama na kojima propagiraju. U takvim opažanjima često se pokušava naći neki signal koji bi upućivao na možebitnu korekciju klasične gravitacije ili na neki drugi značajniji kvantni efekt raznih alternativnih teorija. Već u klasičnoj gravitaciji mogu se naći razni netrivijalni efekti koji bi dali male korekcije na opažanja pa je bitno razlučiti koje bi korekcije dolazile od klasične teorije, kao i upućuju li takve korekcije na nekonzistentnosti unutar same teorije.

Početni zadatak u ovom diplomskom radu bio je provesti standardni pristup aproksimacije geometrijske optike na primjeru linearne elektrodinamike. Ovdje je ideja bila elementarnim metodama izvesti sve bitne relacije koje se u raznim znanstvenim

člancima mogu naći u okviru raznih nelementarnih formalizama, poput Newman-Penrose formalizma, raznih metoda diferencijalne geometrije i slično. Zatim je drugi korak bio iz recentne literature izdvojiti neki zanimljivi efekt koji slijedi iz analize viših redova korekcija geometrijske optike. Ovdje je odabran i prezentiran efekt spinske geometrijske optike koji opisuje utjecaj cirkularne polarizacije elektromagnetskoga vala na njegovu propagaciju u zakrivljenom prostor-vremenu. Zatim su iste procedure standardnoga pristupa geometrijske optike i razvijenih metoda spinske geometrijske optike iz linearne elektrodinamike primjenjene u drukčijem kontekstu gravitacijskih valova. Temeljni znanstveni članci koje smo uzeli kao referentnima za slučaj linearne elektrodinamike su [6] i [4], čije smo ideje i rezultate povezali s našim elementarnim metodama, a u slučaju gravitacijskih valova referenti članak je [5]. U nastavku rada prezentirani su efekti pozadinskih polja nelinearne elektrodinamike na propagaciju elektromagnetskih valova, uz korištenje referentnih članaka [12] i [13].

U ovome uvodnome dijelu demonstrirane su osnove aproksimacije geometrijske optike na primjeru jednostavnije skalarne valne jednadžbe [18]

$$\nabla^2\psi(\vec{r},t) - \frac{1}{n^2(\vec{r})c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\vec{r},t) = 0. \tag{1.1}$$

Separacijom varijabli $\psi(\vec{r},t) = u(\vec{r})T(t)$ dobivamo

$$n^2(\vec{r})\frac{\nabla^2 u(\vec{r})}{u(\vec{r})} - \frac{1}{c^2T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = 0. \tag{1.2}$$

Uvođenjem konstante ω vremenski dio je separiran u obliku obične diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0, \tag{1.3}$$

čija su rješenja $T(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$. Prostorni dio zadovoljava Helmholtzovu diferencijalnu jednadžbu

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(\vec{r})u(\vec{r}) = 0. \tag{1.4}$$

Uvodimo ansatz geometrijske optike

$$u(\vec{r}) = \mathcal{A}(\vec{r})e^{i\Phi(\vec{r})}, \tag{1.5}$$

čijim uvrštavanjem u početnu diferencijalnu jednadžbu (1.4) dobivamo

$$(\vec{\nabla}\Phi)\cdot(\vec{\nabla}\Phi)\mathcal{A} - i(\nabla^2\Phi)\mathcal{A} - 2i(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\mathcal{A}) - \nabla^2\mathcal{A} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2\mathcal{A} = 0. \tag{1.6}$$

Na razini ove jednadžbe potrebno je utvrditi sve karakteristične skale problema, koje su određene ponašanjem fukcija $\Phi(\vec{r})$,$\mathcal{A}(\vec{r})$ i $n(\vec{r})$. Skale problema možemo simbolički bolje shvatiti reskaliranjem derivacija navedenih funkcija

$$|\vec{\nabla}\Phi| \sim \frac{1}{l_\Phi}|\vec{\nabla}'\Phi|, |\vec{\nabla}'\Phi| \sim 1, \tag{1.7}$$

$$|\vec{\nabla}\mathcal{A}| \sim \frac{1}{l_A}|\vec{\nabla}'\mathcal{A}|, |\vec{\nabla}'\mathcal{A}| \sim 1, \tag{1.8}$$

$$|\vec{\nabla}n| \sim \frac{1}{l_n}|\vec{\nabla}'n|, |\vec{\nabla}'n| \sim 1. \tag{1.9}$$

Simboličkim uvođenjem ovih skala u (1.6) bolje se vidi odnos pojedinih članova pod pretpostavkom nekih odnosa skala

$$\left(\tfrac{l_A}{l_\Phi}\right)^2(\vec{\nabla}'\Phi)\cdot(\vec{\nabla}'\Phi)\mathcal{A} - i\left(\tfrac{l_A}{l_\Phi}\right)l_A\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}'\Phi)\mathcal{A} - 2i\left(\tfrac{l_A}{l_\Phi}\right)(\vec{\nabla}'\phi)\cdot(\vec{\nabla}'\mathcal{A}) - l_A\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}'\mathcal{A}) - l_A^2\left(\tfrac{\omega}{c}\right)^2 n^2\mathcal{A} = 0. \tag{1.10}$$

Skala promjene faze Φ zapravo je skala valne duljine pa je u posljednjem članu faktor $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sim \left(\frac{1}{l_\phi}\right)^2$, čime vidimo da su prvi i posljednjii članovi istog reda veličine te će u aproksimaciji geometrijske optike ovo biti dominantni članovi. Zanima nas asimptotski oblik rješenja u granici visokih frekvencija, što odgovara odnosu skala $l_\Phi >> l_A, l_n$. Nakon što smo zadali skale problema, poželjno je radi sistematičnosti asimptotskoga razvoja uzeti bezdimenzionalni oblik početne diferencijalne jednadžbe (1.4). Zadajmo skalu valne duljine preko $l_\Phi = \frac{\omega}{c}$. Radimo sljedeću transformaciju

$$\vec{r} \to \vec{r'} = \frac{1}{l_A}\vec{r}, \tag{1.11}$$

$$\nabla^2 \to \nabla'^2 = l_A^2\nabla^2, \tag{1.12}$$

čime dobijemo bezdimenzionalni oblik

$$\nabla'^2 u(\vec{r'}) + \epsilon^{-2}n^2(\vec{r'})u(\vec{r'}) = 0. \tag{1.13}$$

Tablica 1.1: Sustav transportnih jednadžbi

Red	
$\epsilon^{-2} : n = 0$	$\vec{k}^2 = n^2$
$\epsilon^{-1} : n = 1$	$2\vec{k} \cdot \vec{\nabla} a_0 + (\vec{\nabla} \cdot \vec{k}) a_0 = 0$
$\epsilon^{-(2-n)} : n > 1$	$2\vec{k} \cdot \vec{\nabla} a_{n-1} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{k}) a_{n-1} + \nabla^2 a_{n-2} = 0$

Dalje nastavljamo raditi s bezdimenzionalnim varijablama pa izostavljamo zapis sa crtanim varijablama jer podrazumjevamo da su bezdimenzionalne. Asimptotski oblik rješenja zadajemo s

$$u(\vec{r}) = \mathcal{A}(\vec{r}, \epsilon) e^{iS(\vec{r})/\epsilon}, \mathcal{A}(\vec{r}, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n a_n(\vec{r}). \tag{1.14}$$

S pretpostavljenim malim parametrom ϵ često se ističe da anastz ima oblik slabo varirajuće amlitude i jako varirajuće faze. Funkcija $S(\vec{r})$ obično se zove eikonalnom funkcijom koja određuje trajektorije vala, dok je sa $\mathcal{A}(\vec{r}, \epsilon)$ opisana amplituda takvoga vala. Uvedimo vektor $\vec{k} = \vec{\nabla} S$ koji daje prostorni smjer propagacije vala. Uvrštavanjem asimptotskog ansatza u (1.4) dobivamo

$$\epsilon^{-2} \vec{k}^2 \mathcal{A} - i\epsilon^{-1} \vec{\nabla} \cdot \vec{k} \mathcal{A} - 2i\epsilon^{-1} \vec{k} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{A} - \nabla^2 \mathcal{A} - \epsilon^{-2} n^2 \mathcal{A} = 0. \tag{1.15}$$

Popisivanjem članova po asimptotskom parametru dobivamo popisan sustav transporntih diferencijalnih jednadbži. Najniži red daje disperzijsku relaciju koja je zapravo parcijalna diferencijalna jednadžba za $S(\vec{r})$

$$(\vec{\nabla} S(\vec{r})) \cdot (\vec{\nabla} S(\vec{r})) = n^2(\vec{r}) \tag{1.16}$$

iz koje možemo odrediti eikonalne krivulje. Vidimo da nam je za određivanje trajektorija bila sasvim dovoljna jednadžba najnižega reda. Eikonalnu jednadžbu mogli smo prepoznati još ranije u (1.10), naime ako zanemarimo sve ostale članove i uzmemo samo prvi i zadnji najdominantiji član, dobivamo istu disperzijski relaciju. Dodatno, kako bi aproksimacija bila valjana, drugi član ne smije biti istoga reda veličine kao i dominantni članovi. To znači da bi moralo vrijediti $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}' \Phi) << \frac{1}{l_\Phi}$, odnosno u bezdimenzionalnom zapisu $\vec{\nabla} \cdot \vec{k} << \frac{1}{\epsilon}$. To znači da aproksimacija više nije valjana u područjima gdje se sjeku eikonalne krivulje, dakle u mjestima gdje postoji singulari-

tet u divergenciji smjerova propagacije. Iz viših redova možemo odrediti amplitudu vala do proizvoljne točnosti, čime se mi na ovom primjeru nećemo baviti.

2 Aproksimacija geometrijske optike u linearnoj elektrodinamici

2.1 Osnovni model aproksimacije

Zakoni geometrijske optike izvorno su formulirani fenomenološki u optici, a potom su teorijski utemeljeni u klasičnoj elektrodinamici kroz aproksimaciju visokih frekvencija u valnoj jednadžbi. Često su iskazani u kontekstu propagacije svjetlosti u sredstvima, kao zakoni refleksije i loma, međutim mi ćemo odvojiti problem propagacije svjetlosti u medijima u zakrivljenom prostoru kao zaseban problem. Za sada, formulirajmo zakone geometrijske optike u ravnome prostoru bez prisutnosti medija u jeziku opće teorije relativnosti [1]:

- Zrake svjetlosti su nul geodezici
- Polarizacijski četverovektor okomit je na zrake svjetlosti i paralelno je transportiran po geodezicima
- Vrijedi geometrijski zakon sačuvanja intenziteta

Prva tvrdnja istovjetna je tvrdnji propagacije po pravcima, dakle pravci su nul geodezici ravnoga prostora. Geometrijski zakon sačuvanja intenziteta u slučaju radijalnog širenja zraka svjetlosti odgovarao tvrdnji da intenzitet opada sa kvadratom udaljenosti, ali je iskazano puno općenitije u obliku određene jednadžbe sačuvanja za intenzitet, u literaturi se još govori o ovome zakonu kao o sačuvanju broja fotona. Napomenimo da navedene tvrdnje nisu aksiomi naše teorije, već ih dobivamo iz asimptotske analize valne jednadžbe u ravnome prostoru bez medija. Naš je zadatak ponoviti isti postupak asimptotske analize u generaliziranom slučaju linearne elektrodinamike u zakrivljenom prostor-vremenu, posebno u najnižem redu ove aproksimacije, a kasnije se bavimo korekcijama viših redova. Pitanje je vrijede li isti zakoni geometrijske optike koje smo uočili u ravnome prostoru i pri prelasku u zakrivljeni prostor. Primjerice, često se prešutno identificira propagacija svjetlosti s nul-geodezicima pa se postavlja pitanje vrijedi li navedena tvrdnja na općenitim pozadinama zakrivljenog prostor-vremena. Ili se možemo pitati kako se modificira propagacija polarizacijskog četverovektora u višim redovima ove aproksimacije?

Ovdje ćemo prezentirati standardni pristup kakav se može naći primjerice u [1]. Za nas je polazna točka valna jednažba za baždarni potencijal

$$-\nabla^\nu \nabla_\nu A^\mu + R^\mu{}_\nu A^\nu = 4\pi J^\mu. \tag{2.1}$$

Promatramo slučaj u praznom prostoru gdje je $J^\mu = 0$ te pretpostavljamo Lorenzov uvjet baždarenja

$$\nabla_\mu A^\mu = 0. \tag{2.2}$$

Zadajemo ansatz geometrijske optike sa

$$A^\mu(x) = \mathcal{A}^\mu(x,\epsilon) e^{iS(x)/\epsilon}, \mathcal{A}^\mu(x,\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n a_n{}^\mu(x). \tag{2.3}$$

Za razliku od drugih pristupa gdje se uzima ansatz oblika

$$A^\mu(x) = Re\left(\mathcal{A}^\mu(x,\epsilon) e^{iS(x)/\epsilon}\right), \tag{2.4}$$

mi taj korak odgađamo do trenutka određivanja elektromagnetskoga tenzora

$$F_{\mu\nu} = 2Re\left(\nabla_{[\mu} A_{\nu]}\right). \tag{2.5}$$

Dopuštamo $\mathcal{A}^\mu \in \mathbb{C}$ jer želimo opisati slučaj cirkularne polarizacije. Faza $S(x)/\epsilon$ brzo je varirajuća zbog malog ϵ te u njoj sa $S(x)$ označavamo eikonalnu funkciju za koju dodatno zahtijevamo $S(x) \in \mathbb{R}$. U standardnome pristupu se vektorom $k_\mu = \nabla_\mu S$ identificira smjer propagacije. Asimptotski razvoj ima smisla samo ako vrijedi određeni odnos fizikalnih skala u našemu problemu. Primjerice u (2.1) Riccijev tenzor zadaje prostornu skalu zakrivljenosti pozadinske metrike izraženu duljinom l_R koju možemo bolje uočiti reskaliranjem derivacija tako da je

$$R_{\mu\nu} \sim 1/l_R^2 \tilde{R}_{\mu\nu}, \tilde{R}_{\mu\nu} \sim 1. \tag{2.6}$$

Ansatzom (2.3) oblika $\mathcal{A}^\mu e^{i\Phi}$ zadane su skale promjene amplitude l_A i skala promjene faze l_Φ takve da je

$$\nabla_\nu \mathcal{A}^\mu \sim \frac{1}{l_A} \tilde{\nabla}_\nu \mathcal{A}^\mu, \tilde{\nabla}_\nu \mathcal{A}^\mu \sim 1, \tag{2.7}$$

$$\nabla_\nu \Phi \sim \frac{1}{l_\Phi} \tilde{\nabla}_\nu \Phi, \tilde{\nabla}_\nu \Phi \sim 1. \tag{2.8}$$

Uvrštavanjem ansatza oblika $\mathcal{A}^\mu e^{i\Phi}$ u početnu valnu jednadžbu i reskaliranjem derivacija po izrazima (2.6), (2.7) i (2.8) dobivamo

$$\tilde{\nabla}^\nu \Phi \tilde{\nabla}_\nu \Phi \mathcal{A}^\mu - 2i \left(\frac{l_\Phi}{l_A}\right) \tilde{\nabla}^\nu \Phi \tilde{\nabla}_\nu \mathcal{A}^\mu - i \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \Phi \mathcal{A}^\mu - \left(\frac{l_\Phi}{l_A}\right)^2 \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}_\nu \mathcal{A}^\mu + \left(\frac{l_\Phi}{l_R}\right)^2 \tilde{R}^\mu{}_\nu \mathcal{A}^\nu = 0. \tag{2.9}$$

U dobivenom izrazu lakše se vide doprinosi pojedinih članova pod pretpostavkama raznih odnosa skala. Pretpostavka je aproksimacije (2.3) da je skala promjene faze Φ puno manja od svih ostalih skala, odnosno $l_\Phi << l_A, l_R$. Time bezdimenzionalni parametar asimptotskoga razvoja možemo povezati sa $\epsilon \sim \frac{l_\Phi}{\min(l_A, l_R)}$. Nastavljamo uvrštavanjem ansatza u uvjet Lorenzovoga baždarenja

$$i\epsilon^{-1} k_\mu \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n a_n{}^\mu + \nabla_\mu \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n a_n{}^\mu = 0. \tag{2.10}$$

U (2.10) lako je prepoznati rekurzivni niz uvjeta

$$k_\mu a_0{}^\mu = 0, \tag{2.11}$$

te za $n > 0$

$$k_\mu a_n{}^\mu = i \nabla_\mu a_{n-1}{}^\mu. \tag{2.12}$$

U nultome redu aproksimacije možemo definirati skalar intenziteta $f_0 := \sqrt{a_{0\mu} a_0{}^{*\mu}}$ i normalizirani vektor polarizacije $z_0{}^\mu$ takav da je $z_{0\mu} z_0{}^{*\mu} = 1$. Time baždarni potencijal u nultome redu možemo zapisati u obliku $f_0 z_0{}^\mu e^{iS/\epsilon}$. Ako identificiramo k_μ sa smjerom propagacije, uvjet (2.11) možemo prepoznati kao uvjet ortogonalnosti polarizacijskoga vektora i vektora propagacije, što je jedan od zakona geometrijske optike koji smo naveli na početku. Dalje istim postupkom uvrštavamo ansatz u valnu jednadžbu

$$\epsilon^2 k^\nu k_\nu \mathcal{A}^\mu - 2i\epsilon^{-1} k^\nu \nabla_\nu \mathcal{A}^\mu - i\epsilon^{-1} \nabla_\nu k^\nu \mathcal{A}^\mu - \nabla^\nu \nabla_\nu \mathcal{A}^\mu + R^\mu{}_\nu \mathcal{A}^\nu = 0. \tag{2.13}$$

U tablici 2.1 popisujemo sustav diferencijalnih jednadžbi koje dobijemo iz prethodne relacije. Kontrakcijom jednadžbe najnižega reda $n = 0$ sa $a_0{}^*{}_\mu$, uz pretpos-

Tablica 2.1: Sustav transportnih jednadžbi

Red	
$\epsilon^{-2} : n = 0$	$k^\nu k_\nu {a_0}^\mu = 0$
$\epsilon^{-1} : n = 1$	$k^\nu k_\nu {a_1}^\mu - i\left(\nabla^\nu k_\nu + 2k^\nu \nabla_\nu\right){a_0}^\mu = 0$
$\epsilon^{-(2-n)} : n > 1$	$k^\nu k_\nu {a_n}^\mu - i\left(\nabla^\nu k_\nu + 2k^\nu \nabla_\nu\right){a_{n-1}}^\mu - \nabla^\nu \nabla_\nu {a_{n-2}}^\mu + R^\mu{}_\nu {a_{n-2}}^\nu = 0$

tavku ${a_0}^*{}_\mu {a_0}^\mu \neq 0$ dobivamo

$$k^\nu k_\nu = 0. \tag{2.14}$$

Dakle, dobili smo da je k^μ nul-vektor. Ako identificiramo k^μ sa smjerom propagacije, relacija (2.15) bit će nam dovoljna da izvedemo jednadžbu krivulje koja bi opisivala propagaciju vala. Deriviranjem (2.15) dobivamo

$$k^\nu \nabla_\mu k_\nu = k^\nu \nabla_\nu k_\mu = 0. \tag{2.15}$$

U zadnjem koraku iskoristili smo činjenicu da je k^μ definiran kao kovarijantna derivacija skalarne funkcije za koju vrijedi komutacija kovarijantnih derivacija $\nabla_\mu \nabla_\nu S = \nabla_\nu \nabla_\mu S$. Parametrizirajmo krivulju $x^\mu(\lambda)$ s parametrom λ, takvim da je njezino tangentno vektorsko polje $\frac{dx^\mu}{d\lambda} = k^\mu$. Time (2.15) možemo izraziti kao parametarsku jednadžbu krivulje oblika

$$\frac{D^2 x^\mu}{D\lambda^2} = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0. \tag{2.16}$$

Identifikacjom smjera propagacije sa k^μ koji je nul-vektor dobivamo da je krivulja opisana s (2.16) nul-geodezik te bismo tom interpretacijom reproducirali prethodno naveden prvi zakon geometrijske optike. Napomenimo da je relacija (2.14) valjana u svim redovima, što je jednostavna posljedica oblika ansatza u kojemu nismo pretpostavili ovisnost eikonalne funcije o asimptotskom parametru. To nam omogućava da već u najnižem redu aproksimacije geometrijske optike u potpunosti odredimo eikonalnu trajektoriju, dok viši redovi daju samo korekcije na amplitudnu funkciju. Analizirajmo sada jednadžbu iz reda n = 1. Zbog (2.14) otpada prvi član, dodatno uvrstimo i ${a_0}^\mu = f_0 {z_0}^\mu$

$$f_0 {z_0}^\mu \nabla^\nu k_\nu + 2{z_0}^\mu k^\nu \nabla_\nu f_0 + 2 f_0 k^\nu \nabla_\nu {z_0}^\mu = 0, \tag{2.17}$$

te kontrahiramo sa ${z_0}^*{}_\mu$

$$f_0 \nabla^\nu k_\nu + 2k^\nu \nabla_\nu f_0 + 2f_0 {z_0}^*{}_\mu k^\nu \nabla_\nu {z_0}^\mu = 0. \tag{2.18}$$

Prva dva člana su realna, dok je treći imaginaran zbog

$$Re({z_0}^*{}_\mu \nabla_\nu {z_0}^\mu) = \frac{1}{2}\left({z_0}^*{}_\mu \nabla_\nu {z_0}^\mu + z_{0\mu} \nabla_\nu {z_0}^{*\mu}\right) = \frac{1}{2}\nabla_\nu \left({z_0}^*{}_\mu {z_0}^\mu\right) = 0. \tag{2.19}$$

Realni dio jednadžbe možemo prepoznati kao sačuvanje vektorskoga polja $f_0^2 k^\mu$

$$\nabla_\mu \left(f_0^2 k^\mu\right) = 0 \tag{2.20}$$

i interpetiramo ju kao geometrijski zakon sačuvanja intenziteta, čiju je geometrijsku interpretaciju lakše vidjeti u integralnom obliku primjenom Gauss-Stokesova teorema

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla_\mu \left(f_0^2 k^\mu\right) \sqrt{-g} d^4x = \oint_{\partial\mathcal{V}} f_0^2 k^\mu d^3\Sigma_\mu = 0, \tag{2.21}$$

uz interpretaciju da je ”broj” zraka vektorskog polja $f_0^2 k^\mu$ koji ulazi u proizvoljni volumen jednak ”broju” zraka koji izlazi iz toga volumena, što se gleda kao sačuvanje broja fotona. Time smo dobili točan oblik trećega zakona geometrijske optike u zakrivljenom prostoru koji smo naveli na početku. Konačno nam preostaje pokazati da je polarizacijski vektor paralelno transportiran po eikonalnim krivuljama. To možemo vidjeti vraćanjem (2.20) u (2.17), čime smo eliminirali prva dva člana pa nam preostaje jednadžba za paralelni transport polarizacijskoga vektora

$$k^\nu \nabla_\nu {z_0}^\mu = 0. \tag{2.22}$$

Prethodnom smo analizom aproksimacije geometrijske optike u najnižem redu, uz pretpostavku da propagaciju možemo poistovjetiti s gradijentom eikonalne funkcije, reproducirali zakonitosti propagacije geometrijske optike te ih generalizirali na zakrivljeno prostor-vrijeme što se može preciznije iskazati kroz relacije (2.14),(2.15), (2.11), (2.22) i (2.20). U literaturi se obično staje na analizi najnižega reda, s obzirom da gotovo svi fenomeni geometrijske optike slijede iz najnižega reda. Mi nastavljamo dalje te se pitamo kako se navedeni zakoni modificiraju uvođenjem korekcija viših redova?

2.2 Korekcije viših redova geometrijske optike

Započinjemo korekcijama prvoga reda na skalar intenziteta koji u višim redovima ima oblik

$$f^2 := \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}^{*\nu} = \left(a_{0\nu} + \epsilon a_{1\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right)\left({a_0}^{*\nu} + \epsilon {a_1}^{*\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) = \\ = a_{0\nu}{a_0}^{*\nu} + \epsilon\left(a_{0\nu}{a_1}^{*\nu} + {a_0}^*{}_\nu {a_1}^\nu\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{2.23}$$

Zanima nas može li se (2.20) generalizirati na viši red

$$\nabla_\mu \left(f^2 k^\mu\right) = 0, \tag{2.24}$$

gdje koristimo skalar intenziteta f^2 s korekcijom prvoga reda. Iskoristimo transportnu jednadžbu za a_1 iz tablice 2.1 s redom koji odgovara $n = 2$

$$(\nabla_\mu k^\mu){a_1}^\nu + 2k^\mu \nabla_\mu {a_1}^\nu = i\nabla_\mu \nabla^\mu {a_0}^\nu - R_\mu{}^\nu {a_0}^\mu. \tag{2.25}$$

Kontrahiramo prethodnu relaciju sa ${a_0}^*{}_\nu$ i uzimamo njezin realni dio

$$(\nabla_\mu k^\mu)\left(a_{0\nu}{a_1}^{*\nu} + {a_0}^*{}_\nu {a_1}^\nu\right) + 2k^\mu\left(a_{0\nu}\nabla_\mu {a_1}^{*\nu} + {a_0}^*{}_\nu \nabla_\mu {a_1}^\nu\right) = i\left({a_0}^*{}_\nu \nabla_\mu \nabla^\mu {a_0}^\nu - a_{0\nu}\nabla_\mu \nabla^\mu {a_0}^{*\nu}\right) \\ + R_{\mu\nu}\left({a_0}^{*\mu}{a_0}^\nu - {a_0}^\mu {a_0}^{*\nu}\right). \tag{2.26}$$

Posljednji član desne strane jednakosti propada zbog simetrije Riccijeva tenzora te uz nešto preuređivanja relaciju možemo pisati u obliku

$$\nabla_\mu\left[k^\mu\left(a_{0\nu}{a_1}^{*\nu} + {a_0}^*{}_\nu {a_1}^\nu\right)\right] + k^\mu \nabla_\mu\left(a_{0\nu}{a_1}^{*\nu} + {a_0}^*{}_\nu {a_1}^\nu\right) - 2k^\mu\left({a_1}^\nu \nabla_\mu {a_0}^*{}_\nu + {a_1}^{*\nu}\nabla_\mu a_{0\nu}\right) \\ = i\nabla_\mu\left({a_0}^*{}_\nu \nabla_\mu {a_0}^\nu - a_{0\nu}\nabla_\mu {a_0}^{*\nu}\right). \tag{2.27}$$

Za daljnje pojednostavljenje moramo iskoristiti transportnu jednadžbu nižega reda u tablici 2.1 pod $n = 1$

$$\left(\nabla_\mu k^\mu + 2k^\mu \nabla_\mu\right){a_0}^\nu = 0. \tag{2.28}$$

Ponovno istom metodom, kontrahiramo sa ${a_1}^*{}_\nu$ i dobivamo da je realni dio relacije

$$-2k^\mu \left({a_1}^\nu \nabla_\mu {a_0}^*{}_\nu + {a_1}^{*\nu} \nabla_\mu a_{0\nu}\right) = \left(\nabla_\mu k^\mu\right) \left(a_{0\nu} {a_1}^{*\nu} + {a_0}^{*\nu} {a_1}^\nu\right). \tag{2.29}$$

Ovdje prepoznajemo posljednji član u lijevoj strani jednakosti (2.27), što nam omogućuje značajno pojednostavljenje

$$\nabla_\mu \left[k^\mu \left(a_{0\nu} {a_1}^{*\nu} + {a_0}^*{}_\nu {a_1}^\nu\right)\right] = \frac{i}{2} \nabla_\mu \left({a_0}^*{}_\nu \nabla_\mu {a_0}^\nu - a_{0\nu} \nabla_\mu {a_0}^{*\nu}\right). \tag{2.30}$$

Dobili smo izraz koji uključuje korekciju prvog reda skalara intenziteta, te se zajedno sa zakonom sačuvanja (2.20) može pisati kao

$$\nabla_\mu \left(f^2 k^\mu\right) = i\epsilon \nabla_\mu \left(f_0^2 {z_0}^*{}_\nu \nabla^\mu {z_0}^\nu\right). \tag{2.31}$$

Ovime smo pokazali da ne vrijedi generalizacija (2.24), tj. da vektorsko polje $f^2 k^\mu$ neće biti sačuvana veličina. Medutim, relacija (2.31) sugerira postojanje vektorskoga polja q^μ takvo da je $f^2 q^\mu$ sačuvana veličina. To možemo vidjeti tako da zamijenimo $f_0 \to f$ s desne strane jednakosti (2.31), što je moguće jer relacija vrijedi do prvoga reda

$$\nabla_\mu \left(f^2 q^\mu\right) = \nabla_\mu \left[f^2 \left[k^\mu - i\epsilon {z_0}^*{}_\nu \nabla^\mu {z_0}^\nu\right)\right] = \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{2.32}$$

gdje izdvajamo poseban efektivni vektor

$$q^\mu = k^\mu - i\epsilon {z_0}^*{}_\nu \nabla^\mu {z_0}^\nu. \tag{2.33}$$

Možemo još i pokazati da je q^μ nul-vektor

$$\tilde{k}_\mu \tilde{k}^\mu = k_\mu k^\mu - 2i\epsilon {z_0}^*{}_\nu k^\mu \nabla_\mu {z_0}^\nu + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{2.34}$$

što vrijedi zbog toga što ${z_0}^*{}_\nu k^\mu \nabla_\mu {z_0}^\nu = 0$ slijedi iz (2.22). Efektivni vektor q^μ te pripadna relacija (2.34) uočena je u [4] i izvedena drugim metodama, koje se razlikuju od naših. Takvu relaciju kasnije ćemo shvatiti kao disperzijsku relaciju višega reda koja će imati veliku važnost u spinskoj optici.

Slične algebarske manipulacije koje smo radili u prethodnom izvodu možemo

nastaviti i u višim redovima skalara intenziteta

$$f^2 = a_{0\nu}{a_0}^{*\nu} + \epsilon\left(a_{0\nu}{a_1}^{*\nu} + {a_0}^*{}_\nu {a_1}^\nu\right) + \epsilon^2\left(a_{0\nu}{a_2}^{*\nu} + a_{1\nu}{a_1}^{*\nu}\mathcal{O} + a_{2\nu}{a_0}^{*\nu}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (2.35)$$

S obzirom da je postupak nešto zahtijevniji, izostavljamo detalje izvoda sljedećeg rezultata

$$\nabla_\mu\left[k^\mu\left(a_{0\nu}{a_2}^{*\nu} + a_{1\nu}{a_1}^{*\nu}\mathcal{O} + a_{2\nu}{a_0}^{*\nu}\right)\right] = \tfrac{i}{2}\nabla_\mu\left[{a_1}^*{}_\nu\nabla^\mu{a_0}^\nu - {a_0}^\nu\nabla^\mu{a_1}^*{}_\nu + {a_1}^\nu\nabla^\mu{a_0}^*{}_\nu - {a_0}^*{}_\nu\nabla^\mu{a_1}^\nu\right]. \quad (2.36)$$

Korištenjem prethodnih rezultata može se pokazati da vrijedi isti zakon sačuvanja $\nabla_\mu\left(f^2 q^\mu\right) = \mathcal{O}(\epsilon^3)$ do trećega reda uz efektivni vektor q^μ koji je sada oblika

$$\begin{aligned} q^\mu = k^\mu &- \epsilon\tfrac{i}{2}\frac{{a_0}^*{}_\nu\nabla^\mu{a_0}^\nu - {a_0}^\nu\nabla^\mu{a_0}^*{}_\nu}{a_{0\rho}{a_0}^{*\rho}} \\ &-\epsilon^2\tfrac{i}{2}\left[\frac{{a_1}^*{}_\nu\nabla^\mu{a_0}^\nu - {a_0}^\nu\nabla^\mu{a_1}^*{}_\nu + {a_1}^\nu\nabla^\mu{a_0}^*{}_\nu - {a_0}^*{}_\nu\nabla^\mu{a_1}^\nu}{a_{0\rho}{a_0}^{*\rho}} - \frac{{a_0}^*{}_\nu\nabla^\mu{a_0}^\nu - a_{0\nu}\nabla^\mu{a_0}^{*\nu}}{a_{0\rho}{a_0}^{*\rho}}\,\frac{a_{0\nu}{a_1}^{*\nu} + {a_0}^*{}_\nu{a_1}^\nu}{a_{0\rho}{a_0}^{*\rho}}\right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nastavljanjem ovoga postupka naslućujemo da postoji efektivan vektor q^μ s asimptotskim razvojem

$$q^\mu(\epsilon, a_0, {a_0}^*, ..., a_n, {a_n}^*, ...) = k^\mu + \sum_{n>0}\epsilon^n {K_n}^\mu(a_0, {a_0}^*, ..., a_{n-1}, {a_{n-1}}^*) \quad (2.38)$$

takav da vrijedi zakon sačuvanja $\nabla_\mu\left(f^2 q^\mu\right)$ u svim redovima. U višim redovima je s ${K_n}^\mu$ opisana ovisnost o korekcijama amplitude viših redova. Kao što vidimo već u drugome redu ${K_n}^\mu$ ima poprilično kompliciranu ovisnost. Općenito se sve relacije geometijske optike u višim redovima sve više kompliciraju, tako da određivanje viših redova ima više smisla u slučaju neke numeričke primjene u kojoj je bitna veća preciznost, dok će nama za određivanje i opisivanje osnovnih svojstava biti zanmiljiviji niži redovi.

Za zaključak ovoga dijela još ćemo izvesti oblik tenzora energije i impulsa geometrijske optike. Za općenito elektromagnetsko polje opisano elektromagnetskim tenzorom $F_{\mu\nu}$, simetrični tenzor energije i impulsa je

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\lambda F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}. \quad (2.39)$$

Elektromagnetski tenzor u najnižem redu je

$$F_{\mu\nu} = 2Re(\nabla_{[\mu}A_{\nu]}) = 2Re\left[\left(\nabla_{[\mu}\mathcal{A}_{\nu]} + \frac{i}{\epsilon}k_{[\mu}\mathcal{A}_{\nu]}\right)e^{iS/\epsilon}\right] = \frac{2f_0}{\epsilon}Re\left(ik_{[\mu}z_{0\nu]}e^{iS/\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^0). \tag{2.40}$$

Drugi član tenzora energije i impulsa sadrži elektromagnetsku invarijantu

$$\mathcal{F} = F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} = -\frac{f_0^2}{\epsilon^2}\left(k_{[\lambda}z_{0\sigma]}k^{[\lambda}{z_0}^{\sigma]} - k_{[\lambda}z_{0\sigma]}k^{[\lambda}{z_0}^{*\sigma]} + (k.k.)\right). \tag{2.41}$$

S (k.k.) označen je kompleksni konjugat prvih dvaju članova. Primjećujemo članove tipa

$$k_{[\lambda}z_{0\sigma]}k^{[\lambda}{z_0}^{\sigma]} = \frac{1}{2}\left(k_\lambda k^\lambda z_{0\sigma}{z_0}^\sigma - k_\lambda k^\sigma z_{0\sigma}{z_0}^\lambda\right) = 0, \tag{2.42}$$

što vrijedi zbog $k_\mu k^\mu = 0$ i orotogonalosti $k_\mu {z_0}^\mu = 0$. Ovime smo pokazali da je $\mathcal{F} = 0$. Izvrijednjavanjem tenzora $F^\mu{}_\lambda F^{\nu\lambda}$ dobivamo članove $k^{[\mu}{z_{0\lambda}}^{]}k^{[\nu}{z_0}^{*\lambda]} = \frac{1}{4}k^\mu k^\nu$ i $k^{[\mu}{z_{0\lambda}}^{]}k^{[\nu}{z_0}^{\lambda]} = \frac{1}{4}z_{0\lambda}{z_0}^\lambda k^\mu k^\nu$. To sve skupa daje

$$T^{\mu\nu} = \frac{f_0^2}{2\epsilon^2}k^\mu k^\nu\left[1 - Re\left(z_{0\lambda}{z_0}^\lambda e^{2iS/\epsilon}\right)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^{-1}). \tag{2.43}$$

Usrednjavanjem po ansamblu krivulja koje prolaze duž prostorne osi nekog opažača, kroz više valnih duljina, za koje se prođe po cijelom periodu eikonalne funkcije, dobivamo

$$\langle T^{\mu\nu}\rangle = \frac{f_0^2}{2\epsilon^2}k^\mu k^\nu + \mathcal{O}(\epsilon^{-1}) \tag{2.44}$$

U granici beskonačnih frekvencija $\epsilon \to 0$ dobivamo divergenciju usrednjenog $\langle T^{\mu\nu}\rangle$ što je u skladu s očekivanjem da takav val nosi beskonačnu gustoću energije $\langle T^{00}\rangle$. Primjetimo da sačuvanje tenzora energije i impulsa $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ daje

$$\nabla_\mu\langle T^{\mu\nu}\rangle \sim \nabla_\mu\left(f_0^2k^\mu\right)k^\nu + f_0^2k^\mu\nabla_\mu k^\nu = 0, \tag{2.45}$$

što je konzistentno sa zakonima sačuvanja intenziteta i propagacijske jednadžbe geometrijske optike pripadnoga najnižeg reda. Ovakva razmatranja usrednjenog tenzora energije i impulsa mogu se naći u [9], dok je u [16] napravljena cijela analiza usrednjenih tenzora energije i impulsa sa višim korekcijama u formalizmu bispinora.

2.3 Geometrijska optika u Hamiltonovom i Lagrangeovom formalizmu

Ranije smo izveli da iz vodećega reda standarnoga pristupa geometrijske optike slijedi disperzijska relacija (2.15), koju ćemo sada zapisati u jasnijem obliku

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0. \tag{2.46}$$

Faktor $1/2$ dodali smo iz notacijskih razloga koji će postati jasan u izvodu jednadžbe krivulje u Hamiltonovom formalizmu. Elementarnim smo metodama pokazali kako iz disperzijske relacije slijedi diferencijalna jednadžba krivulje (2.16). Ovakve elementarne operacije nad disperzijskom relacijom prikrivaju činjenicu da je disperzijska relacija zapravo parcijalna diferencijalna jednadžba prvoga reda

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu S \nabla_\nu S = 0, \tag{2.47}$$

iz koje treba odrediti eikonalnu funkciju $S(x)$ uz postavljene rubne uvjete na nekoj hiperplohi Σ. Ovdje ćemo izložiti precizniji opis rješavanja općenitijih parcijalnih jednadžbi metodom karakteristika iz teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi [20]. Poveznice metode karakteristika i Hamiltonova formalizma često su izostavljene u literaturi s područja fizike, naime Hamiltonov i Lagrangeov formalizam obično se u fizici shvaća u kontekstu klasične mehanike putem metoda varijacijskoga računa. To zna prouzrokovati konfuziju u fizici kada se pokušaju primjeniti metode Hamiltonova formalizma u drugom kontekstu poput geometrijske optike. Kako ćemo mi koristiti takve metode u spinskoj optici, ovo kratko podpoglavlje napisano je kako bi se otklonile buduće nejasnoće.

Promatramo općenite parcijalne diferencijalne jednadžbe prvoga reda oblika

$$F(\partial_\mu S, S, x^\mu) = 0, \tag{2.48}$$

gdje je F općenita glatka funkcija

$$F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \tag{2.49}$$

$x^\mu \in \mathbb{R}^4$, a $S(x^\mu)$ je funkcija

$$S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \tag{2.50}$$

koja je rješenje početne parcijalne diferencijalne jednadžbe s rubnim uvjetom na hiperplohi Σ

$$S(x^\mu)|_\Sigma = g(x^\mu). \tag{2.51}$$

U našem slučaju eikonalne fukcije obično je rubni uvjet konstantna fukcija $g(x^\mu) = S_0$. Osnovna ideja metode karakteristika sastoji se u pretvaranju parcijalne diferencijalne jednadžbe u sustav običnih diferencijalnih jednadžbi. Uzmimo da $S(x^\mu)$ rješava (2.48) s rubnom zadaćom (2.51). Fiksirajmo točku x^μ koja nije na hiperplohi Σ. Želimo odrediti krivulju koja povezuje x^μ i bilo koju točku na hiperplohi ${x_0}^\mu$ na kojoj možemo odrediti funkciju S. Dakle, potrebno je pronaći takvu krivulju na kojoj bi se parcijalna diferencijalna jednadžba svela na običnu diferencijalnu jednadžbu. Takvu krivulju zvati ćemo karakterističnom krivuljom, a ona će biti određena karakterističnim sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi koje ćemo sada odrediti. Parametrizirajmo takvu krivulju $x^\mu(\lambda)$ parametrom $\lambda \in I \subseteq \mathbb{R}$. Definirajmo funkciju

$$z(\lambda) := S\left[x^\mu(\lambda)\right] \tag{2.52}$$

i vektor gradijenta

$$k_\rho(\lambda) := \partial_\rho S\left[x^\mu(\lambda)\right]. \tag{2.53}$$

Oboje smo definirali kroz restrikcije funkcije S i njezinoga gradijenta na krivulji. Derivirajmo (2.53) po parametru λ

$$\frac{dk_\rho(\lambda)}{d\lambda} := \dot{k}_\rho(\lambda) = \partial_\rho\partial_\sigma S\left[x^\mu(\lambda)\right]\dot{x}^\sigma(\lambda). \tag{2.54}$$

Kako bismo odredili derivaciju $\partial_\rho\partial_\sigma S$. derivirajmo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (2.48) po x^ρ

$$\frac{\partial F(\partial_\mu S, S, x^\mu)}{\partial(\partial_\sigma S)}\partial_\rho\partial_\sigma S + \frac{\partial F(\partial_\mu S, S, x^\mu)}{\partial S}\partial_\rho S + \frac{\partial F(\partial_\mu S, S, x^\mu)}{\partial x^\rho} = 0. \tag{2.55}$$

Odabir krivulje $x^\mu(\lambda)$ fiksiramo preko diferencijalne jednadžbe

$$\dot{x}^\rho(\lambda) = \frac{\partial F(k_\mu(\lambda), z(\lambda), x^\mu(\lambda))}{\partial k_\rho}. \tag{2.56}$$

Time restrikciju od (2.55) na krivulji $x^\mu(\lambda)$ možemo pisati kao

$$\dot{x}^\rho(\lambda)\partial_\rho\partial_\sigma S\left[x^\mu(\lambda)\right] + \frac{\partial F(k_\mu(\lambda), z(\lambda), x^\mu(\lambda))}{\partial z}k_\rho(\lambda) + \frac{\partial F(k_\mu(\lambda), z(\lambda), x^\mu(\lambda))}{\partial x^\rho} = 0. \tag{2.57}$$

Odabir krivulje koja zadovoljava (2.56) sada nam omogućava da preko (2.57) izrazimo (2.54) kao običnu diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{k}_\rho(\lambda) = -\frac{\partial F(k_\mu(\lambda), z(\lambda), x^\mu(\lambda))}{\partial z}k_\rho(\lambda) - \frac{\partial F(k_\mu(\lambda), z(\lambda), x^\mu(\lambda))}{\partial x^\rho}. \tag{2.58}$$

Iz sustava običnih diferencijalnih jednadžbi (2.56) i (2.58) možemo odrediti karakterističnu krivulju. Konačno možemo pokazati da će se na takvoj krivulji funckija $z(\lambda)$ također moći odrediti preko obične diferencijalne jednadžbe. To vidimo ako deriviramo (2.52) po λ

$$\dot{z}(\lambda) = \partial_\rho S\left[x^\mu(\lambda)\right]\dot{x}^\rho(\lambda) = k_\rho(\lambda)\dot{x}^\rho(\lambda). \tag{2.59}$$

U pojednostavljenoj notaciji osnovne rezultate metode karakteristika možemo prikazati kao

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial F}{\partial k_\mu}, \tag{2.60}$$

$$\dot{k}_\mu = -\frac{\partial F}{\partial x^\mu} - \frac{\partial F}{\partial z}k_\mu, \tag{2.61}$$

$$\dot{z} = k_\mu\dot{x}^\mu. \tag{2.62}$$

Dodatno, možemo pokazati da su obične diferencijalne jednadžbe (2.60)-(2.62) konzistentne s početnom parcijalnom diferencijalnom jednadžbom (2.48). Derivirajmo restrikciju od (2.48) na krivulji $x^\mu(\lambda)$ po λ

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial k_\mu}\dot{k}_\mu + \frac{\partial F}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial F}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu = 0. \tag{2.63}$$

Kako na krivulji x^λ vrijede diferencijalne jednadžbe (2.60)-(2.62), dobili smo $\dot{F} = 0$. Dobili smo da je funkcija F konstantna na krivulji, a kako je zasebno $F = 0$ na hiperplohi Σ dobivamo da je parcijalna diferencijalna jednadžba (2.48) zadovoljena na cijeloj krivulji

$$F(k_\mu(\lambda), z(\lambda), x^\mu(\lambda)) = 0, \forall\lambda. \tag{2.64}$$

Sada smo u stanju ovaj općeniti rezultat primjeniti na našu početnu eikonalnu jednadžbu (2.47) koja spada u općenitu klasu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koja nema ovisnost po eikonalnoj funkciji

$$F(\partial_\mu S, S, x^\mu) = H(\partial_\mu S, x^\mu) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S. \tag{2.65}$$

Metoda karakteristika sada daje

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial k_\mu}, \tag{2.66}$$

$$\dot{k}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu}, \tag{2.67}$$

$$\dot{z} = k_\mu \dot{x}^\mu, \tag{2.68}$$

$$H(k_\mu(\lambda), z(\lambda), x^\mu(\lambda)) = 0, \forall \lambda. \tag{2.69}$$

Diferencijalne jednadžbe (2.66) i (2.67) imaju oblik Hamiltonovih jednadžbi gibanja kao u klasičnoj mehanici. Funkciju

$$H(k_\mu, x^\mu) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \tag{2.70}$$

možemo zvati Hamiltonijanom geometrijske optike. U zapisu Hamiltonijana posebno smo izdvojili metriku $g^{\mu\nu}$ kako bi bila vidljiva eksplicitna ovisnost Hamiltonijana o x^μ i k_μ varijablama, koje ovdje shavaćamo kao varijable faznoga prostora. U analogiji s klasičnom mehanikom, ovaj Hamiltonijan opisivao bi slobodne bezmasene čestice. To fizikalno znači da bi krivulje koje opisuju propagaciju valova visoke frekvencije u geometrijskoj optici bile identične krivuljama bezmasenih čestica, odnosno fotona. Na razini Hamiltonovih jednadžbi možemo izvesti jednadžbe krivulja u obliku jednadžbe geodezika. Hamiltonove jednadžbe gibanja daju

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial k_\mu} = g^{\mu\nu} k_\nu, \tag{2.71}$$

$$\dot{k}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} k_\alpha k_\beta = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\mu} k_\alpha k_\beta. \tag{2.72}$$

U prethodnom koraku iskoristili smo identitet $\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = -g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\mu}$. Ideja je ovog zapisa olakšavanje prepoznavanje Christoffelova simbola u budućim koracima. Dalje

izvodimo diferencijalnu jednadžbu krivulje kroz eksplicitan raspis od $\ddot{x}^\mu$ takav da sadrži varijable tipa $\dot{x}$

$$\ddot{x}^\mu = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\gamma}\dot{x}^\gamma k_\nu g^{\mu\nu}\dot{k}_\nu = -g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\gamma}\dot{x}^\gamma g_{\alpha\nu}\dot{x}^\alpha + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\lambda}g^{\beta\rho}\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu}g_{\kappa\alpha}g_{\eta\beta}\dot{x}^\kappa\dot{x}^\eta. \quad (2.73)$$

Nakon svih pokrata možemo preurediti sve u izraz

$$\ddot{x}^\mu = -g^{\mu\lambda}\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\gamma}\dot{x}^\gamma\dot{x}^\rho + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\rho = -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\gamma\rho}}{\partial x^\lambda}\right)\dot{x}^\gamma\dot{x}^\rho. \quad (2.74)$$

Prepoznavanjem Christoffelova simbola možemo zapisati konačan rezultat u obliku jednadžbe geodezika

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\gamma\rho}\dot{x}^\gamma\dot{x}^\rho = 0. \quad (2.75)$$

Uz uvjet da uvijek odaberemo početne uvjete u kojima bi $\dot{x}^\mu$, odnosno k^μ bio nulvektor, početno zadan Hamiltonijan reproducira iste krivulje geometrijske optike. Iako nam se za sada uvođenje efektivnoga Hamiltonijana geometrijske optike može učiniti kao nepotrebna komplikacija, kasnije će se pokazati korisnim uvođenje modifikacija geometrijske optike upravo na razini efektivnoga Hamiltonijana. Alternativno isti problem možemo gledati u Lagrangeovom formalizmu. Iz Legedendreova transformata $\mathcal{L} = \dot{x}^\mu k_\mu - H$ slijedi da je pripadajući Lagrangian oblika

$$\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \quad (2.76)$$

U ovome formalizmu možemo izvesti jednadžbu geodezika varijacijskim postupkom nad akcijom $I = \frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu d\lambda$. Varijacija akcije daje

$$\delta I = \frac{1}{2}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + 2g_{\mu\nu}\frac{\delta\dot{x}^\mu}{\delta x^\rho}\dot{x}^\nu\right)\delta x^\rho d\lambda. \quad (2.77)$$

Parcijalnom integracijom drugoga člana te uz napomenu da rubni član iščezava, dobivamo

$$\delta I = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\nu - g_{\rho\nu}\ddot{x}^\nu\right)\delta x^\rho d\lambda. \quad (2.78)$$

Nakon nešto preuređivanja možemo pisati

$$\delta I = -\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\left(g_{\rho\nu}\ddot{x}^\nu + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right)\delta x^\rho d\lambda. \quad (2.79)$$

Uz stacionarnost akcije $\delta S = 0$ i fiksiranje rubnih točaka $\delta x(\lambda_0) = \delta x(\lambda_1) = 0$ lako prepoznajemo istu jednadžbu geodezika kao u (2.52). Napomenimo da se u izvodima jednadžbe geodezika za masivne čestice koristi akcija oblika $I = \tau_{12} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)^{1/2} d\lambda$, što odgovara funkcionalu vlastitoga vremena između dviju točaka. U našem slučaju ne možemo koristiti taj oblik jer pri varijaciji krivulja svjetlosnoga tipa iščezava vlastito vrijeme, što će dati divergenciju jednoga podintegralnoga faktora u varijacijskom postupku. Stoga afini parametar λ, koji koristimo za opis krivulje svjetlosnoga tipa, nije vlastito vrijeme.

2.4 Aproksimacija spinske geometrijske optike

Za opis cirkularno polariziranih valova iskoristit ćemo zapis polarizacijskoga vektora u bazi kompleksne nul-tetrade $\{l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}$. Za takvu bazu zadani su sljedeći ortonormalizacijski uvjeti

$$l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0, \tag{2.80}$$

$$l_\mu m^\mu = l_\mu \bar{m}^\mu = n_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0, \tag{2.81}$$

$$m_\mu \bar{m}^\mu = -l_\mu n^\mu = 1. \tag{2.82}$$

Ovakva baza postavlja se u odnosu na kongruenciju fiksiranih krivulja svjetlosnoga tipa tako da je l^μ tangentno vektorsko polje te kongruencije krivulja. U odabiru baze obično uzimamo krivulje koje opisuju propagaciju svjetlosti pa možemo identificirati l^μ sa k^μ valnim vektorom kojeg smo dobili u aproksimaciji geometrijske optike. S parovima kompleksnih vektora m^μ i $\bar{m}^\mu$ opisivat ćemo dva moguća tipa cirkularne polarizacije vala. Možemo ih bolje shvatiti u vezi s drugačijom bazom $\{l^\mu, n^\mu, e_1^\mu, e_2^\mu\}$ u kojoj su e_1^μ i e_2^μ realni ortogonalni vektori prostornoga tipa, kojima predstavljamo prostorne osi u odnosu na koje promatrač mjeri polarizaciju vala. Vektori naše početne kompleksne nul-tetrade mogu se konstruirati preko $m^\mu = e_1^\mu + ie_2^\mu$ i $\bar{m}^\mu = e_1^\mu - ie_2^\mu$. Ortonormalizacijski uvjeti invarijantni su na sljedeće transformacije: [6]

$$l^\mu \to Al^\mu, n^\mu \to A^{-1}n^\mu, \tag{2.83}$$

$$l^\mu \to l^\mu, n^\mu \to n^\mu + a^* m^\mu + a\bar{m}^\mu + aa^* l^\mu, m^\mu \to m^\mu + al^\mu, \bar{m}^\mu \to \bar{m}^\mu + a^* l^\mu, \tag{2.84}$$

$$m^\mu \to m^\mu e^{i\Phi}, \bar{m}^\mu \to \bar{m}^\mu e^{-i\Phi}, \tag{2.85}$$

gdje su A i Φ proizvoljne realne skalarne funkcije, a a kompleksna funkcija. Ove transformacije predstavljaju baždarne slobode naše tetrade i moguće ih je ograničiti zadavanjem propagacijskih jednadžbi vektora baze. Primjerice, sloboda transformacije (2.83) može biti ograničena ako zadamo l^μ preko jednadžbe paralelnoga transporta po zadanoj krivulji $l^\nu \nabla_\nu l^\mu = 0$. Rezidualna sloboda koja ovdje preostaje ista je transformacija samo s konstantnom funkcijom A duž krivulje. Za sada nećemo ograničavati preostale stupnjeve slobode te ćemo koristiti općenitiju bazu. U nastavku izlažemo pristup iz [4].

Iskažimo polarizacijski vektor geometrijske optike nultoga reda u zadanoj bazi

kompleksne nul-tetrade $\{k^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}$ adaptirane na eikonalne krivulje

$$z_0{}^\mu(x) = C_1(x)m^\mu(x) + C_2(x)\bar{m}^\mu(x) + C_3(x)k^\mu(x) + C_4(x)n^\mu(x). \tag{2.86}$$

Zbog uvjeta Lorenzova baždarenja vrijedi $z_0{}^\mu k_\mu$, pa je $C_4(x) = 0$. Korištenjem rezidualne baždarne slobode baždarnoga potencijala možemo dodatno eliminirati longitudinalni mod, te staviti $C_3(x) = 0$. Stoga nam preostaje zapis polarizacijskoga vektora u najnižem redu

$$z_0{}^\mu(x) = C_1(x)m^\mu(x) + C_2(x)\bar{m}^\mu(x). \tag{2.87}$$

Funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ možemo odrediti iz propagacijske jednažbe za polarizacijski vektor (2.22)

$$k^\mu \nabla_\mu z_0{}^\nu = C_1 k^\mu \nabla_\mu m^\nu + C_2 k^\mu \nabla_\mu \bar{m}^\nu + k^\mu m^\nu \nabla_\mu C_1 + k^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\mu C_2 = 0. \tag{2.88}$$

Kontrakcijom prethodne jednadžbe s $\bar{m}_\nu$, te s m_ν dobivamo dvije jednadžbe

$$k^\mu \nabla_\mu C_1 - i(k^\mu b_\mu)C_1 = 0, \tag{2.89}$$

$$k^\mu \nabla_\mu C_2 + i(k^\mu b_\mu)C_2 = 0, \tag{2.90}$$

gdje smo definirali poseban vektor

$$b^\mu := i\bar{m}_\nu \nabla^\mu m^\nu = -i m_\nu \nabla^\mu \bar{m}^\nu. \tag{2.91}$$

Primjetimo da su evolucijske jednadžbe za C_1 i C_2 razvezane, tj. svaka komponenta dvije moguće cirkularne polarizacije evoluira nezavisno. To znači da ako zadamo orijentaciju cirkularne polarizacije pri početnim uvjetima, recimo $C_2 = 0$, tada će $C_2 = 0$ vrijediti tijekom cijele evolucije te će orijentacija cirkularne polarizacije biti sačuvana veličina. Odredimo C_1 duž nekog nul-geodezika $x^\mu(\lambda)$. Tada se (2.89) svodi na $\frac{dC_1}{d\lambda} = i(k^\mu b_\mu)C_1$. Iz ovoga se dobije rješenje

$$C_1(\lambda) = C_1(0)e^{i\gamma(\lambda)}, \tag{2.92}$$

gdje smo označili dodatnu fazu

$$\gamma(\lambda) = \int_0^\lambda k^\mu b_\mu d\lambda'. \tag{2.93}$$

Rješenje za suprotnu orijentaciju polarizacije bilo bi

$$C_2(\lambda) = C_2(0)e^{-i\gamma(\lambda)}. \tag{2.94}$$

Ako smo zadali početne uvjete $C_1(0) = 1$ i $C_2(0) = 0$, tada je ukupno rješenje za polarizacijski vektor duž propagacijske krivulje

$$z_0{}^\mu\left(x(\lambda)\right) = m^\mu\left(x(\lambda)\right)e^{i\gamma(\lambda)}. \tag{2.95}$$

Dobivamo da je ukupno rješenje za baždarni potencijal u vodećem redu

$$A^\mu\left(x(\lambda)\right) = f_0 m^\mu\left(x(\lambda)\right)e^{i\gamma(\lambda)}e^{iS(x(\lambda))/\epsilon}. \tag{2.96}$$

Vidimo da duž svake eikonalne propagacijske krivulje vala polarizacijski vetkor daje fazni doprinos $\gamma(\lambda)$. Ovo uvodi dvosmislenost u intepretaciji rješenja s obzirom da fazni doprinos možemo pridružiti faktoru koji sadrži eikonalnu fazu, na primjer

$$A^\mu\left(x(\lambda)\right) = f_0 m^\mu\left(x(\lambda)\right)e^{i[S(x(\lambda))+i\epsilon\gamma(\lambda)]/\epsilon}. \tag{2.97}$$

Općenito je oblik baždarnoga potencijala $A^\mu = \mathcal{A}^\mu e^{iS}$ invarijantan na transformacije amplitudnog faktora i eikonalne funkcije

$$\mathcal{A}^\mu \to \mathcal{A}^\mu e^{-i\psi}, \tag{2.98}$$

$$S \to S + i\epsilon\psi. \tag{2.99}$$

Primjetimo da ovakve transformacije možemo interpretirati kao promjenu smjera propagacije vala u $\mathcal{O}(\epsilon)$ redu

$$k^\mu \to k^\mu + \epsilon\nabla^\mu\psi. \tag{2.100}$$

Ovo nam daje mogućnost da reinterpretiramo značenje dodatne faze cirkularno po-

lariziranih valova. Dakle, korištenjem prethodne transformacije uklanjamo dobivenu fazu iz amplitudne funkcije te ju pridružujemo prethodnoj eikonalnoj fazi, što kao rezultat daje korekciju propagacijskih krivulja u $\mathcal{O}(\epsilon)$ redu. Kako je po (2.92) i (2.94) za valove suprotnih cirkularnih polarizacija dobivena faza suprotnih smjerova, dobili bismo različite krivulje propagacije za različite orijentacije cirkularne polarizacije. Time bi bio opisan efekt "spinski" ovisne propagacije svjetlosti.

Dalje izlažemo izvode spinski ovisnih propagacijskih krivulja u Hamiltonovom formalizmu. U prethodnom potpoglavlju pokazali smo vezu Hamiltonovih jednadžbi krivulja i općenitijih eikonalnih jednadžbi s kojima se susrećemo u optici. Za opis efekta spinske optike potrebna nam je disperzijska relacija, odnosno eikonalna jednadžba u višem redu koja sadrži polarizacijski ovisnu korekciju. Takvu smo relaciju ranije izveli u (2.34) te ju ovdje ponavljamo

$$k^\mu k_\mu - 2i\epsilon k^\mu {z_0}^*{}_\nu \nabla_\mu {z_0}^\nu = \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{2.101}$$

Polarizacijski vektor cirkularne polarizacije u prethodno zadanoj bazi ima oblik ${z_0}^\nu = m^\nu e^{i\gamma}$, dok polarizacijski vektor suprotne orijentacije cirkularne polarizacije ima oblik ${z_0}^\nu = \bar{m}^\nu e^{-i\gamma}$. Uvrštavamo oba slučaja u disperzijsku relaciju, iz čega dobijemo dvije disperzijske relacije, svaku za zasebnu orijentaciju. Oba slučaja možemo objediniti u obliku jedne disperzijske relacije

$$k^\mu k_\mu + 2\epsilon s k^\mu \nabla_\mu \gamma - 2\epsilon s k^\mu b_\mu = \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{2.102}$$

gdje sa $s = \pm 1$ opisujemo dvije moguće orijentacije, a $b^\mu = i\bar{m}_\nu \nabla_\mu m^\nu$ isti je uveden kao u (2.91). Sada prevodimo polarizacijsku fazu γ u ukupnu eikonalnu fazu po transformacijama (2.98) i (2.99). Disperzijsku relaciju možemo iskazati preko novog vektora propagacije s korekcijom $\tilde{k}^\mu = k^\mu + \epsilon s \nabla_\mu \gamma$,

$$\tilde{k}^\mu \tilde{k}_\mu - 2\epsilon s \tilde{k}^\mu b_\mu = \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{2.103}$$

Metodama prethodnoga potpoglavlja zadajemo Hamiltonijan sustava

$$H(x^\mu, \tilde{k}_\mu) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \tilde{k}_\mu \tilde{k}_\nu - \epsilon s g^{\mu\nu} b_\mu \tilde{k}_\nu + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{2.104}$$

U usporedbi s Hamiltonijanom iz (2.70), ovaj sadrži dodatni član koji će opisivati utjecaj "spinskog" stupnja slobode na propagaciju efektivne čestice. Za izvod diferencijalne jednadžbe krivulje koristit ćemo prikladniji oblik Hamiltonijana

$$H(x^\mu, \tilde{k}_\mu) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\tilde{k}_\mu - \epsilon s b_\mu\right) \left(\tilde{k}_\nu - \epsilon s b_\nu\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{2.105}$$

Hamiltonove jednažbe gibanja su

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial \tilde{k}_\mu} = g^{\mu\nu} \left(\tilde{k}_\nu - \epsilon s b_\nu\right), \tag{2.106}$$

$$\dot{\tilde{k}}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \left(\tilde{k}_\alpha - \epsilon s b_\alpha\right) \left(\tilde{k}_\beta - \epsilon s b_\beta\right) + \epsilon s g^{\alpha\beta} \left(\tilde{k}_\alpha - \epsilon s b_\alpha\right) \frac{\partial b_\beta}{\partial x^\mu}. \tag{2.107}$$

Izrazimo $\dot{\tilde{k}}_\nu$ preko $\dot{x}$ varijabli

$$\dot{\tilde{k}}_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho + \epsilon s \frac{\partial b_\beta}{\partial x^\nu} \dot{x}^\beta. \tag{2.108}$$

Sličnim metodama kao u (2.73) dobivamo

$$\begin{aligned} \ddot{x}^\mu = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} \left(\tilde{k}_\nu - \epsilon s b_\nu\right) \dot{x}^\gamma - \epsilon s g^{\mu\nu} \frac{\partial b_\nu}{\partial x^\gamma} \dot{x}^\gamma + g^{\mu\nu} \dot{\tilde{k}}_\nu = -g^{\mu\lambda} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\gamma} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\rho - \epsilon s g^{\mu\nu} \frac{\partial b_\nu}{\partial x^\gamma} \dot{x}^\gamma \\ + \epsilon s g^{\mu\nu} \frac{\partial b_\beta}{\partial x^\nu} \dot{x}^\beta + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Izraz možemo preurediti u obliku

$$\ddot{x}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho + \epsilon s g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial b_\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial b_\nu}{\partial x^\lambda} \right) \dot{x}^\lambda. \tag{2.110}$$

U prvom članu prepoznajemo Christoffelov simbol, dok ćemo u drugom članu definirati novi tenzor

$$\Phi_{\mu\nu} := \nabla_\mu b_\nu - \nabla_\nu b_\mu = \frac{\partial b_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial x^\nu}. \tag{2.111}$$

Sve zajedno daje diferencijalnu jednadžbu propagacijskih krivulja spinske optike

$$\frac{D^2 x^\mu}{D\lambda^2} = \epsilon s \Phi^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu. \tag{2.112}$$

Ova jednadžba i dalje opisuje krivulje koje će biti svjetlosnoga tipa, ali na konačnim frekvencijama dodatni član opisuje odstupanje od geodezika, tako da krivulja neće više biti geodezik. U granici beskonačnih frekvencija $\epsilon \to 0$ ponovno se svodi na jednadžbu nul-geodezika. Dakle, efekt spinski ovisne propagacije veći je na nižim frekvencijama, što će za valove koji su superpozicija više frekvencija dati prostornu disperziju valova po frekvencijama. Ovisno o orijentaciji cirkularne polarizacije $s = \pm 1$ korekcija s desne strane mijenja predznak. Ovo je važan rezultat jer pokazuje da se cirkularno polarizani valovi propagiraju po različitim krivuljama. Štoviše, ako promatramo i linearno polarizirani val kao superpoziciju valova suprotnih cirkularnih polarizacija, dobit ćemo razdvajanje linearno polariziranoga vala na valove suprotne cirkularne polarizacije zbog čega se ovaj efekt u literaturi zna nazivati spinski Hallov efekt za svjetlost. Nadalje, odstupanje od nul-geodezika se eksperimentalno može interpretirati i kao kašnjenje svjetlosnih signala pa se postavlja pitanje narušava li ovaj efekt Einsteinov princip ekvivalencije u relativnosti. Odgovor je negativan jer se radi o efektu koji ovisi o protežnim svojstvima vala, a Einsteinov princip ekvivalencije vrijedi samo za testne čestice koje nemaju dimenziju. Iako smo mi koristili u izvodu Hamiltonijan efektivne čestice, stvarni fizikalni objekt koji opisujemo je val koji ne možemo tretirati poput testne čestice.

U dosadašnjim izvodima koristili smo općenitiju bazu za koju nismo specificirali točne propagacijske jednadžbe za vektorska polja n^μ,m^μ i $\bar{m}^\mu$. Efekt spinske optike opisan sa (2.112) ovisan je o izboru baze, odnosno o izboru promatrača, stoga se javlja problem koji odabir baze napraviti, tako da efekt spinske optike bude nabolje "izmjeren". U našem referentnom članku [4] detaljnije se diskutira o ovome, što možemo sažeti u nekoliko sljedećih bitnih navoda. Efekt s jedne strane ima doprinos od intrinzične zakrivljenosti prostor-vremena, dok s druge strane postoji doprinos koji potječe od izbora opažača, te to dvoje nije moguće razdvojiti na razini naših jedndadžbi s kojima opisujemo efekt. Jedina je prednost ta da će utjecaj izbora opažača puno manje utjecati na krivulju propagacije, dok će se osnovni efekt biti kumulativno pojačan propagacijom na dužim skalama.

Problem odabira opažača možemo riješiti za konkrente primjere pozadine prostor-vremena, recimo, za statične pozadine pogodno je uzeti Killingove opažače. Nakon toga odabira moguće je eksplicitno konstruirati vektore m^μ i $\bar{m}^\mu$ u odnosu na te opažače. Međutim, onda se javlja problem kako odabrati opažače na općenitijim

pozadinama prostor-vremena koje mogu biti ne-statične. Razni autori biraju razne opažače u tim situacijama, a mi ćemo uzeti odabir kakav je napravljen u [6] i koji možemo korisiti na općenitim pozadinama prostor-vremena. Konačni rezultat navedenog odabira baze bit će procedura određivanja propagacijskih krivulja spinske optike predložena u navedenome članku.

Započinjemo s općenitom kompleksnom nul-tetradom $\{l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}$, u kojoj je l^μ tangentno vektorsko polje kongruencije nul-krivulja. Za ovu nul-tetradu podsjećamo da vrijede ortonormalizacijski uvjeti (2.80)-(2.82). Definirajmo novi vektor akceleracije u l^μ smjeru

$$w^\mu := l^\nu \nabla_\nu l^\mu. \tag{2.113}$$

Uzmimo iz kongruencije nul-krivulja krivulju $x^\mu(\lambda)$. Neka su u točki krivulje koja odgovara parametru $\lambda = \lambda_0$ ostvareni ortonormalizacijski uvjeti $n_\mu(\lambda_0)n^\mu(\lambda_0) = 0$ i $n_\mu(\lambda_0)l^\mu(\lambda_0) = -1$. Zadajemo propagacijsku jednadžbu za n^μ duž odabrane krivulje kao jednadžbu paralelnog transporta

$$l^\nu \nabla_\nu n^\mu = 0. \tag{2.114}$$

Sada definirajmo operator Fermijeve derivacije duž vektora l^μ koja djeluje na općeniti vektor V^μ

$$\mathcal{F}_l V^\mu = l^\nu \nabla_\nu V^\mu + (n_\nu A^\nu)\, w^\mu - (w_\nu A^\nu)\, n^\mu. \tag{2.115}$$

Generalizirana Fermijeva derivacija za općenite tenzore $T^{\mu\ldots}{}_{\nu\ldots}$ definirana je sa

$$\mathcal{F}_l T^{\mu\ldots}{}_{\nu\ldots} = l^\lambda \nabla_\lambda T^{\mu\ldots}{}_{\nu\ldots} + \mathcal{V}^\mu{}_\lambda T^{\lambda\ldots}{}_{\nu\ldots} + \ldots - \mathcal{V}^\lambda{}_\nu T^{\mu\ldots}{}_{\lambda\ldots} - \ldots, \tag{2.116}$$

gdje smo uzeli pokratu $\mathcal{V}^\mu{}_\nu := w^\mu n_\nu - n^\mu w_\nu$. Za vektor V^μ kažemo da je Fermi-transportiran ukoliko vrijedi $\mathcal{F}_l V^\mu = 0$. Primjetimo da je vektor l^μ Fermi-transportiran

$$\mathcal{F}_l l^\mu = l^\nu \nabla_\nu l^\mu + (n_\nu l^\nu)\, w^\mu - (w_\nu l^\nu)\, n^\mu = l^\nu \nabla_\nu l^\mu - w^\mu = 0. \tag{2.117}$$

Međutim, paralelno transportiran m^μ općenito nije Fermi-transportiran

$$\mathcal{F}_l n^\mu = l^\nu \nabla_\nu n^\mu + (n_\nu n^\nu)\, w^\mu - (w_\nu n^\nu)\, n^\mu = -\,(w_\nu n^\nu)\, n^\mu, \tag{2.118}$$

ali pogodnim odabirom baždarne slobode (2.83) nul-tetrade uvijek je moguće postići

$w_\nu n^\nu = 0$. Naime, to možemo vidjeti preko

$$(w_\nu n^\nu) \to A^2 (w_\nu n^\nu) - A l^\nu \nabla_\nu A, \tag{2.119}$$

tako da odaberemo $l^\nu \nabla_\nu A = A (w_\nu n^\nu)$. Ovim smo ograničili parametrizacijsku slobodu tetrade, ali još uvijek preostaje rezidualna sloboda gdje je A konstanta duž krivulje. Ovim smo izborom postigli da n^μ dodatno bude Fermi-transportiran. Dalje se može pokazati i da je metrički tenzor Fermi-transportiran duž zadane krivulje

$$\mathcal{F}_l g^{\mu\nu} = l^\lambda \nabla_\lambda g^{\mu\nu} + \mathcal{V}^\mu{}_\lambda g^{\lambda\nu} + \mathcal{V}^\nu{}_\lambda g^{\mu\lambda} = \mathcal{V}^{\mu\nu} + \mathcal{V}^{\nu\mu} = 0. \tag{2.120}$$

U prethodnom izvodu iskoristili smo $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$ i antisimetričnost tenzora $\mathcal{V}^{\mu\nu}$. Fermi-transport ima sljedeće važno svojstvo: za dva proizvoljna Fermi-transportirana vektora, vrijedi da je njihov skalarni produkt konstantan duž krivulje. To možemo vidjeti preko

$$\mathcal{F}_l (g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu) = (\mathcal{F}_l g^{\mu\nu}) A_\mu B_\nu + g^{\mu\nu} (\mathcal{F}_l A_\mu) B_\nu + g^{\mu\nu} A_\mu (\mathcal{F}_l B_\nu) = 0. \tag{2.121}$$

Prethodni raspis vrijedi jer Fermijeva derivacija ima isto svojstvo Leibnintzova pravila pri deriviranju produkata kao obična derivacija. Kako se Fermijeva derivacija skalara svodi na

$$\mathcal{F}_l (A_\mu B^\mu) = l^\nu \nabla_\nu (A_\mu B^\mu) = 0, \tag{2.122}$$

možemo zaključiti da je $A_\mu(\lambda) B^\mu(\lambda) = A_\mu(\lambda_0) B^\mu(\lambda_0), \forall \lambda$ na krivulji. To znači da ako zadamo sve vektore kompleksne nul-tetrade $\{l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}$ u nekoj točki krivulje sa λ_0 takve da zadovoljavaju sve ortonormalizacijske uvjete u toj točki, tada Fermijevim transportom cijele tetrade po krivulju ostaju očuvani ortonormalizacijski uvjeti koje smo zadali. Prema tome, u našoj konstrukciji potrebno je na isti način zadati početne vektore m^μ i $\bar{m}^\mu$ u nekoj točki λ_0 tako da zadovoljavaju ortonormalizacijske uvjete tetrade te ih Fermi-transportirati duž krivulje. Takvu konstrukciju napravimo za svaku krivulju iz kongruencije nul-krivulja. Nametanjem uvjeta Fermijeva transporta na vektore tetrade nameću se restrikcije na baždarne slobode. Primjerice promotrimo kako Fermijev tansport utječe na spinsku baždarnu slobodu

$$\mathcal{F}_l \left(m^\mu e^{i\Phi}\right) = \mathcal{F}_l (m^\mu) e^{i\Phi} + i m^\mu e^{i\Phi} l^\nu \nabla_\nu \Phi \overset{!}{=} 0. \tag{2.123}$$

Iz ovoga slijedi da duž svake krivulje vrijedi $l^\nu \nabla_\nu \Phi = 0$ te da je baždarna sloboda ograničena na uvjet konstantnosti Φ duž svake krivulje. To možemo interpretirati kao zabranu rotacije prostornih vektora e_1^μ i e_2^μ duž krivulje. Ograničenje slobode (2.84) slijedi po

$$\mathcal{F}_l \left(m^\mu + a l^\mu\right) = \mathcal{F}_l m^\mu + a \mathcal{F}_l l^\mu + l^\mu \mathcal{F}_l a = l^\mu l^\nu \nabla_\nu a \stackrel{!}{=} 0. \tag{2.124}$$

Dakle dobivamo da je $l^\nu \nabla_\nu a = 0$, odnosno da je a konstanta duž krivulje. Cijela kosntrukcija može se sažeti u obliku tri propagacijske jednadžbe za vektore tetrade

$$l^\nu \nabla_\nu n^\mu = 0, \tag{2.125}$$

$$l^\nu \nabla_\nu m^\mu = \left(w_\nu m^\nu\right) n^\mu = -\kappa n^\mu, \tag{2.126}$$

$$l^\nu \nabla_\nu \bar{m}^\mu = \left(w_\nu \bar{m}^\nu\right) n^\mu = -\kappa^* n^\mu. \tag{2.127}$$

Koristimo pokrate $\kappa = -m^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu$ i $\kappa^* = -\bar{m}^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu$, koje slijede iz raspisa vektora u bazi $w^\mu = -\kappa^* m^\mu - \kappa \bar{m}^\mu$. Ovaj raspis u bazi vrijedi zbog dodatnih uvjeta $w_\mu n^\mu = 0$ i $w_\mu l^\mu = 0$.

Sada imamo sve potrebne jednadžbe da izrazimo (2.112) u ovako konstruiranoj bazi. Tenzor $\Phi_{\mu\nu}$ može se zapisati kao

$$\Phi_{\mu\nu} = \nabla_\mu b_\nu - \nabla_\nu b_\mu = i \bar{m}^\lambda \left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\right) m_\lambda + i \left[\left(\nabla_\mu \bar{m}^\lambda\right)\left(\nabla_\nu m_\lambda\right) - \left(\nabla_\nu \bar{m}^\lambda\right)\left(\nabla_\mu m_\lambda\right)\right]. \tag{2.128}$$

U prvome članu možemo iskoristi identitet za komutaciju kovarijantnih derivacija

$$\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\right) m_\lambda = -R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} m_\sigma. \tag{2.129}$$

(2.112) sada možemo zapisati kao

$$\frac{D^2 x^\mu}{D\lambda^2} = -i\epsilon s \dot{x}^\nu R^\mu{}_{\nu\sigma\lambda} m^\sigma \bar{m}^\lambda + i\epsilon s \left[\left(\nabla^\mu \bar{m}^\lambda\right)\left(\dot{x}^\nu \nabla_\nu m_\lambda\right) - \left(\dot{x}^\nu \nabla_\nu \bar{m}^\lambda\right)\left(\nabla^\mu m_\lambda\right)\right]. \tag{2.130}$$

U jednadžbi se pojavljuju članovi tipa $l^\nu \nabla_\nu m_\lambda$ koje ćemo izvrijedniti do $\mathcal{O}(\epsilon)$ reda

$$l^\nu \nabla_\nu m_\lambda = -\kappa n_\lambda = \left(m^\alpha l^\beta \nabla_\beta l_\alpha\right) n_\lambda = \left(m^\alpha k^\beta \nabla_\beta k_\alpha\right) n_\lambda + \mathcal{O}(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon). \tag{2.131}$$

U prethodnom koraku koristili smo činjenicu da je $l^\mu = k^\mu + \mathcal{O}(\epsilon)$, odnosno da l^μ odstupa od vektora nul-geodezika k^μ tek sa $\mathcal{O}(\epsilon)$ korekcijom. Stoga odbacujemo sve članove u uglatim zagradama, što daje

$$\frac{D^2 x^\mu}{D\lambda^2} = -i\epsilon s \dot{x}^\nu R^\mu{}_{\nu\sigma\lambda} m^\sigma \bar{m}^\lambda. \tag{2.132}$$

Numerička metoda određivanja krivulja bi bila istodobno rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi (2.132), (2.125), (2.126), (2.127). U propagacijskim jednadžbama za bazu napravljena je identifikacija l^μ sa $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ te je potrebno koristiti κ koji slijedi iz (2.132)

$$\kappa = -m^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu = -m_\mu \frac{D^2 x^\mu}{D\lambda^2} = i\epsilon s R_{\mu\nu\sigma\lambda} \dot{x}^\nu m^\mu m^\sigma \bar{m}^\lambda. \tag{2.133}$$

Ovime smo izveli proceduru određivanja krivulja spinske optike, i to je trenutno najviše što možemo izvući iz prezentirane metode. Za sada nije jasno kako bi izgledala ekstenzija metode spinske optike koja bi bila valjana u višim redovima, pa nećemo moći za sada izvesti sve korekcije na ostale fizikalne veličine kao u standardnoj geometrijskoj optici. Značajna prednost ove metode određivanja krivulja spinske optike jest što je primjenjiva na općenitijim pozadinama prostor-vremena, za razliku od dosadašnjih pristupa u literaturi. Primjerice, raniji radovi poput [7] i [9] bave se istim problemom sa dodatnim ograničenjem stacionarne pozadine prostor-vremena. Pristupi sa takvim ograničenjem se koriste jer se u takvim metrikama mogu odabrati Killingovi opažači za konstrukciju baze, što ima prednosti u izvodima jednadžbi spinske optike. Ali onda se javlja problem u općenitijim metrikama, primjerice Kerrovoj, u kojoj nije moguće u ergo područjima zadati stacionarne opažače. U prezentiranom pristupu mi smo povezali rezultate dvaju ranije spomenutih članaka [4] i [6], ali treba spomenuti da se u [4] koriste ponešto drugačiji pristupi. Glavna razlika je što se dodatno u ansatzu geometrijske optike uzima dodatna ovisnost amplitude o gradijentu eikonalne funkcije, što se u navedenom radu argumentira pozivom na rigoroznije pristupe matematičke literature. Osnovni argumenti koje autor toga rada izlaže jest da je u disperzijskoj relaciji propagacijski vekotor k_μ zadan kao gradijent skalarne funkcije, pa se disperzijska relacija odnosi na vektore koji se nalaze u Lagrangeovoj podmnogostrukosti T^*M. Dodatno, znamo da u samoj geometrijskoj optici postoje relacije koje daju uvjete ortogonalnosti između vektora amplitude i propagacijskog

vektora. U pronalaženju krivulja metodom karakteristika koristimo Hamiltonijan čija je domena fazni prostor, u kojem je k_μ općenitija varijabla koja više nije gradijent skalarne funkcije. Iz toga razloga bi bilo potrebno eksplicitno pratiti ovisnost amplitude o k_μ pri prelasku na općenitije varijable faznoga prostora. Dodatno autor radi poveznicu svojih metoda sa Berryjevom fazom, koje mi ovdje nismo prezentirali. Postoje i članci poput [10] u kojima se efekt spinske optike tretira u vezi sa efektom Faradayeve rotacije. Problem sa člancima toga tipa je što efekt Faradayeve rotacije iščezava za izbor slobodno padajućih opažača, pa takvi opažaći ne bi mjerili efekt spinske optike. Ovo je nekonzistento sa prezentiranim metodama, pa takve članke nismo uzimali u naša razmatranja.

3 Gravitacijski valovi u granici geometrijske optike

3.1 Linearizacija valne jednadžbe gravitacijskih valova

Polazimo od Einsteinove jednadžbe polja

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \,. \tag{3.1}$$

Zanima nas slučaj praznoga prostora u kojemu tenzor energije i impulsa iščezava $T_{\mu\nu} = 0$. Kontrakcijom (3.1) sa $g^{\mu\nu}$ dobivamo identitet za Riccijev skalar $R = 8\pi G T^{\mu}{}_{\mu}$ što daje

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda} \right) . \tag{3.2}$$

Stoga je valna jednažba za gravitacijske valove u praznome prostoru

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{3.3}$$

Raspis Riccijeva tenzora preko Christoffelova simbola je

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu_\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\mu_\nu} + \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta}. \tag{3.4}$$

Vidimo da je valna jednažba za gravitacijske valove nelinearna te je u tom izvornom obliku teško analitički doći do valnih rješenja. Međutim, možemo raditi dodatne aproksimacije tako da dobijemu linearni oblik valne jednadžbe. Jedna od takvih metoda zove se aproksimacija slaboga polja. Pretpostavljamo da je rješenje oblika

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.5}$$

gdje je $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, +1, +1, +1)$ pozadinska ravna metrika, a $h^{\mu\nu}$ valni dio rješenja koji predstavlja malu perturbaciju u odnosu na pozadinsku metriku. Postupak linearizacije je uvrštavanje (3.5) u (3.4) i popisivanje vodećih linearnih doprinosa. Za to uvedimo knjigovodstveni parametar ξ u $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \xi h_{\mu\nu}$. Uz ovu pokratu, popisujemo samo doprinose reda $\mathcal{O}(\xi)$. Najprije ćemo odrediti Christoffelov simbol $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha_\beta}$

izvrijednjen u $\tilde{g}^{\mu\nu}$.

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\lambda}\left(\partial_\beta \tilde{g}_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha \tilde{g}_{\lambda\beta} - \partial_\lambda \tilde{g}_{\alpha\beta}\right) = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \xi\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\left(\partial_\beta h_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha h_{\lambda\beta} - \partial_\lambda h_{\alpha\beta}\right)$$
$$-\xi h_\sigma{}^\mu \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (3.6)$$

S obzirom da Christoffelov simbol $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$izvrijednjen u pozadinskoj ravnoj metrici $\eta^{\mu\nu}$ iščezava, možemo pisati

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} = \xi\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\left(\partial_\beta h_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha h_{\lambda\beta} - \partial_\lambda h_{\alpha\beta}\right) + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (3.7)$$

Dalje raspisujemo prva dva člana Riccijeva tenzora

$$\partial_\nu \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu_\lambda} - \partial_\lambda \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu_\nu} = \xi\frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}\left(\partial_\lambda\partial_\sigma h_{\mu\nu} + \partial_\nu\partial_\mu h_{\sigma\lambda} - \partial_\lambda\partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\lambda}\right) + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (3.8)$$

Zadnja su dva člana Riccijevog tenzora reda $\mathcal{O}(\xi^2)$ pa ih odbacujemo. Napomenimo da u $\mathcal{O}(\xi)$ redu možemo koristiti metriku $\eta^{\mu\nu}$ za dizanje i spuštanje indeksa na $h^{\mu\nu}$. Stoga uz nešto preuređivanja možemo pisati lineariziranu valnu jednadžbu gravitacijskih valova u pozadini ravnoga prostora

$$\partial_\lambda\partial^\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu h^\lambda{}_\lambda - \partial_\mu\partial^\lambda h_{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial^\lambda h_{\mu\lambda} = 0. \quad (3.9)$$

Kontrakcijom sa $\eta^{\mu\nu}$ dobivamo sljedeći koristan identitet

$$\partial_\mu\partial^\mu h^\lambda{}_\lambda - \partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.10)$$

Valna jednažba (3.8) invarijantna je na transformacije

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu. \quad (3.11)$$

Stoga možemo iskoristiti ovu slobodu za nametanje Lorenzova baždarnog uvjeta

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\mu h^\lambda{}_\lambda = 0. \quad (3.12)$$

Ubacivanjem baždarnog uvjeta u valnu jednadžbu dobivamo

$$\partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h^\lambda{}_\lambda - \frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu h^\lambda{}_\lambda - \frac{1}{2}\partial_\nu \partial_\mu h^\lambda{}_\lambda = 0. \tag{3.13}$$

Time se (3.9) svodi na običnu valnu jednadžbu

$$\partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu} = 0. \tag{3.14}$$

Dalje nad ovakvom valnom jednadžbom možemo provesti analizu preko razvoja geometrijske optike, međutim to je za nas nezanimljiv slučaj budući da želimo provesti analizu geometrijske optike kao u slučaju elektromagnetskih valova na općenitijim pozadinama prostor-vremena. Iz toga ćemo razloga generalizirati provedenu linearizaciju za općenitiju pozadinu, zadajmo stoga aproksimaciju slaboga polja preko

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{3.15}$$

Uzimamo da je $g^{\mu\nu}$ općenita pozadinska metrika takva da zadovoljava Einsteinovu jednadžbu polja u praznome prostoru $R_{\mu\nu} = 0$. Izvod valne jednadžbe po prethodnoj konstrukciji bio bi uvrštavanje (3.15) u općenitu valnu jednadžbu $\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$ i izdvajanje vodećih linearnih članova. Međutim, u tome slučaju ne možemo više tvrditi da iščezava Christoffelov simbol $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ za pozadinsku metriku. To značajno komplicira prethodnu konstrukciju, stoga ćemo se poslužiti identitetima varijacijskoga računa da pojednostavimo pristup. Iskoristimo Palatinijev identitet za Riccijev tenzor

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}. \tag{3.16}$$

Varijacija Christoffelova simbola je

$$\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} \right). \tag{3.17}$$

Uvrštavanjem varijacije Christoffelova simbola u varijaciju Riccijeva tenzora dobivamo

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\nabla^\sigma \nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \nabla^\sigma \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla^\sigma \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g^\sigma{}_\sigma \right). \tag{3.18}$$

Ako shvatimo varijaciju metrike $\delta g_{\mu\nu}$ kao perturbaciju pozadinske metrike $h_{\mu\nu}$, možemo pisati lineariziranu valnu jednadžbu kao

$$\nabla_\lambda \nabla^\lambda h_{\mu\nu} + \nabla_\nu \nabla_\mu h^\lambda{}_\lambda - \nabla^\lambda \nabla_\mu h_{\lambda\nu} - \nabla^\lambda \nabla_\nu h_{\mu\lambda} = 0. \tag{3.19}$$

Kontrakcijom sa $g^{\mu\nu}$ dobivamo identitet

$$\nabla_\mu \nabla^\mu h^\lambda{}_\lambda - \nabla^\mu \nabla^\nu h_{\mu\nu} = 0. \tag{3.20}$$

Valna jednažba (3.19) ponovno će biti invarijantna na transformacije

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu, \tag{3.21}$$

što nam omogućuje da zadamo Lorenzov baždarni uvjet

$$\nabla^\mu h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu h^\lambda{}_\lambda. \tag{3.22}$$

Da bismo iskoristili Lorenzov uvjet u valnoj jednadžbi, potrebno je dodatno iskomutirati kovarijantne derivacije posljednjih dvaju članova. Komutacija kovarijantnih derivacija za tenzor tipa (0,2) je

$$\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\right) T_{\alpha\beta} = -R_{\mu\nu}{}^\sigma{}_\alpha T_{\sigma\beta} - R_{\mu\nu}{}^\sigma{}_\beta T_{\sigma\alpha}\,. \tag{3.23}$$

Korištenjem ovoga identiteta dobivamo za posljednja dva člana valne jednadžbe (3.19)

$$\begin{aligned}\nabla^\lambda \nabla_\mu h_{\lambda\nu} + \nabla^\lambda \nabla_\nu h_{\lambda\mu} &= \nabla_\mu \nabla^\lambda h_{\lambda\nu} + \nabla_\nu \nabla^\lambda h_{\lambda\mu} + R_\mu{}^\sigma h_{\sigma\nu} + R_\nu{}^\sigma h_{\sigma\mu} + \left(R_{\lambda\mu\sigma\nu} - R_{\lambda\nu\sigma\mu}\right) h^{\lambda\sigma} \\ &= \nabla_\nu \nabla_\mu h^\lambda{}_\lambda - 2R_{\lambda\mu\sigma\nu} h^{\lambda\sigma} + R_{\lambda\sigma\mu\nu} h^{\lambda\sigma}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

U prethodnom izvodu koristili smo Lorenzov uvjet baždarenja (3.22), članovi s Riccijevim tenzorom propadaju zbog uvjeta da pozadinska metrika zadovoljava $R_{\mu\nu} = 0$ te je iskorišteno svojstvo Riemannova tenzora $R_{\lambda\nu\sigma\mu} + R_{\lambda\sigma\mu\nu} + R_{\lambda\mu\nu\sigma} = 0$. Posljednji član isto otpada zbog anti-simetrije Riemannova tenzora i simetrije pozadinske

metrike po indeksima λ i σ. Sve daje pojednostavljeni oblik valne jednadžbe (3.19)

$$\nabla_\lambda \nabla^\lambda h_{\mu\nu} + 2R_{\mu\lambda\nu\sigma} h^{\lambda\sigma} = 0. \tag{3.25}$$

Korištenjem identiteta (3.20) možemo dobiti diferencijalnu jednadžbu za evoluciju traga $h^\lambda{}_\lambda$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu h^\lambda{}_\lambda = 0. \tag{3.26}$$

Nametanjem početnog uvjeta $h^\lambda{}_\lambda|_\Sigma = 0$ na hiperplohi Σ dobivamo po (3.26) da je $h^\lambda{}_\lambda = 0$ svugdje. Stoga se Lorentzov uvjet baždarenja svodi na

$$\nabla^\mu h_{\mu\nu} = 0. \tag{3.27}$$

Valna jednadžba (3.25) i uvjet baždarenja (3.27) bit će naš početni korak u stanadardnome pristupu geometrijske optike. Zbog velike sličnosti sa valnom jednadžbom (2.1) u elektromagnetskom slučaju, očekujemo da ćemo doći do istih temeljnih rezultata geometrijske optike otprije. Ovdje smo napravili linearizaciju gravitacijskih valova kao u [5] i [8].

3.2 Osnovni model

Zadajemo ansatz geometrijske optike lineariziranih gravitacijskih valova u režimu slaboga polja sa

$$h^{\mu\nu}(x,\epsilon) = \mathcal{A}^{\mu\nu}(x,\epsilon)e^{iS(x)/\epsilon}. \tag{3.28}$$

$\mathcal{A}^{\mu\nu}$ je slabo varirajući tenzor amplitude koji ima asimptotski razvoj

$$\mathcal{A}^{\mu\nu}(x,\epsilon) = {a_0}^{\mu\nu}(x) + \epsilon {a_1}^{\mu\nu}(x) + \epsilon^2 {a_2}^{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{3.29}$$

Dopuštamo $\mathcal{A}^{\mu\nu} \in \mathbb{C}$ radi opisa cirkularno polariziranih valova. Stvarna fizikalna opervabla gravitacijskog vala mora biti realna pa će biti potrebno uzeti $H^{\mu\nu} = 2Re\,(h^{\mu\nu})$. Karakteristične skale problema iste su kao u elektromagnetskom slučaju (2.9), asimptotski razvoj vrijedi u istom odnosu skala $\epsilon \sim \frac{l_\Phi}{min(l_A,l_R)}$. U standarndome pristupu identificiramo smjer propagacije vala s gradijentom eikonalne funkcije $k_\mu = \nabla_\mu S$. Uvrstimo ansatz u baždarni uvjet (3.27)

$$i\epsilon^{-1}k_\mu\left({a_0}^{\mu\nu} + \epsilon {a_1}^{\mu\nu} + \epsilon^2 {a_2}^{\mu\nu}\right) + \nabla_\mu\left({a_0}^{\mu\nu} + \epsilon {a_1}^{\mu\nu} + \epsilon^2 {a_2}^{\mu\nu}\right) = \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{3.30}$$

Ovdje prepoznajemo rekurzivni niz uvjeta

$$k_\mu {a_0}^{\mu\nu} = 0, \tag{3.31}$$

$$k_\mu {a_n}^{\mu\nu} = i\nabla_\mu {a_{n-1}}^{\mu\nu}. \tag{3.32}$$

Uvrštavanjem ansatza u valnu jednadžbu (3.25) dobijemo

$$\epsilon^{-2}k^\lambda k_\lambda \mathcal{A}^{\mu\nu} - 2i\epsilon^{-1}k^\lambda\nabla_\lambda\mathcal{A}^{\mu\nu} - i\epsilon^{-1}\nabla_\lambda k^\lambda\mathcal{A}^{\mu\nu} - \nabla^\lambda\nabla_\lambda\mathcal{A}^{\mu\nu} - 2R^\mu{}_\lambda{}^\nu{}_\sigma h^{\lambda\sigma} = 0. \tag{3.33}$$

Popisujemo sve transportne jednadžbe koje dobijemo za svaki red u tablicu 3.1. koja zajedno s baždarnim uvjetima (3.31) i (3.32) sadrži sve potrebne sustave jednažbi za određivanje rješenja do proizvoljnog reda asimptotskog razvoja.

Tablica 3.1: Sustav transportnih jednadžbi

Red	
$\epsilon^{-2} : n = 0$	$k^\lambda k_\lambda {a_0}^{\mu\nu} = 0$
$\epsilon^{-1} : n = 1$	$k^\lambda k_\lambda {a_1}^{\mu\nu} - i\left(\nabla^\lambda k_\lambda + 2k^\lambda\nabla_\lambda\right){a_0}^{\mu\nu} = 0$
$\epsilon^{-(2-n)} : n > 1$	$k^\lambda k_\lambda {a_n}^{\mu\nu} - i\left(\nabla^\lambda k_\lambda + 2k^\lambda\nabla_\lambda\right){a_{n-1}}^{\mu\nu} - \nabla^\lambda\nabla_\lambda {a_{n-2}}^{\mu\nu} - 2R^\mu{}_\lambda{}^\nu{}_\sigma {a_{n-2}}^{\lambda\sigma} = 0$

Kontrakcijom transportne jednadžbe najnižega reda sa ${a_0}^*{}_{\mu\nu}$ dobivamo uz pretpostavku ${a_0}^{\mu\nu}{a_0}^*{}_{\mu\nu} \neq 0$

$$k^\lambda k_\lambda = 0, \tag{3.34}$$

$$k^\nu \nabla_\nu k_\mu = 0. \tag{3.35}$$

Po ovome, u interpretaciji standardne geometrijske optike, gravitacijski valovi se propagiraju po krivuljama koje su nul-geodezici pozadinske metrike. Definirajmo skalar intenziteta gravitacijskoga vala u najnižem redu preko $f_0 := \sqrt{{a_0}^{\mu\nu}{a_0}^*{}_{\mu\nu}}$, te polarizacijski tenzor preko ${z_0}^{\mu\nu} = \frac{{a_0}^{\mu\nu}}{f_0}$. Transportna jednadžba prvoga reda izražena preko polarizacijskoga tenzora je

$$f_0 {z_0}^{\mu\nu} \nabla^\lambda k_\lambda + 2{z_0}^{\mu\nu} k^\lambda \nabla_\lambda f_0 + 2 f_0 k^\lambda \nabla_\lambda {z_0}^{\mu\nu} = 0, \tag{3.36}$$

nakon kontrakcije sa ${z_0}^*{}_{\mu\nu}$

$$f_0 \nabla^\lambda k_\lambda + 2k^\lambda \nabla_\lambda f_0 + 2 f_0 {z_0}^*{}_{\mu\nu} k^\lambda \nabla_\lambda {z_0}^{\mu\nu} = 0. \tag{3.37}$$

Realni dio ove jednažbe daje zakon sačuvanja polja $f_0^2 k^\mu$

$$\nabla_\lambda \left(f_0^2 k^\lambda \right) = 0. \tag{3.38}$$

Vraćanjem (3.38) u (3.36) dobivamo jednadžbu za paralelni transport polarizacijskoga tenzora

$$k^\lambda \nabla_\lambda {z_0}^{\mu\nu} = 0. \tag{3.39}$$

Uz paralelni transport po baždarnom uvjetu (3.31) vrijedi okomitost polarizacijskoga tenzora sa smjerom propagacije

$$k_\mu {z_0}^{\mu\nu} = 0. \tag{3.40}$$

Time smo kroz jednadžbe (3.34), (3.35), (3.39), (3.40) i (3.38) pokazali da vrijede svi zakoni geometrijske optike za gravitacijske valove u vodećem redu aproksimacije. Primjenom preostalih jednadžbi viših redova moguće je dobiti korekcije viših redova skalara intenziteta i polarizacijskoga tenzora. Za nas će najvažnija biti generalizacija

jednadžbe (3.38) na viši red skalara intenziteta

$$f^2 = a_{0\mu\nu}{a_0}^{*\mu\nu} + \epsilon\left(a_{0\mu\nu}{a_1}^{*\mu\nu} + {a_0}^*{}_{\mu\nu}{a_1}^{\mu\nu}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.41}$$

Uzimamo transportnu jednadžbu za ${a_1}^{\mu\nu}$

$$\left(\nabla_\lambda k^\lambda\right){a_1}^{\mu\nu} + 2k^\lambda\nabla_\lambda{a_1}^{\mu\nu} = i\left(\nabla_\lambda\nabla^\lambda{a_0}^{\mu\nu} + 2R^\mu{}_\lambda{}^\nu{}_\sigma{a_0}^{\lambda\sigma}\right). \tag{3.42}$$

Kontrahiramo prethodnu relaciju sa ${a_0}^*{}_{\mu\nu}$ i uzimamo njezin realni dio

$$\begin{aligned}\left(\nabla_\lambda k^\lambda\right)\left({a_0}^*{}_{\mu\nu}{a_1}^{\mu\nu} + a_{0\mu\nu}{a_1}^{*\mu\nu}\right) + 2k^\lambda\left({a_0}^*{}_{\mu\nu}\nabla_\lambda{a_1}^{\mu\nu} + a_{0\mu\nu}\nabla_\lambda{a_1}^{*\mu\nu}\right) = \\ i\left({a_0}^*{}_{\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla^\lambda{a_0}^{\mu\nu} - a_{0\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla^\lambda{a_0}^{*\mu\nu}\right) + 2iR_{\mu\lambda\nu\sigma}\left({a_0}^{*\mu\nu}{a_0}^{\lambda\sigma} - {a_0}^{\mu\nu}{a_0}^{*\lambda\sigma}\right).\end{aligned} \tag{3.43}$$

Član s Riemannovim tenzorom otpada zbog simetrije Riemannova tenzora i antisimetrije izraza u zagradi na zamjenu grupe indekasa $(\mu\nu) \longleftrightarrow (\lambda\sigma)$. Korištenjem transportne jednadžbe za ${a_0}^{\mu\nu}$ izraz se može pojednostaviti

$$\nabla_\lambda\left[k^\lambda\left(a_{0\mu\nu}{a_1}^{*\mu\nu} + {a_0}^*{}_{\mu\nu}{a_1}^{\mu\nu}\right)\right] = \frac{i}{2}\nabla_\lambda\left({a_0}^*{}_{\mu\nu}\nabla^\lambda{a_0}^{\mu\nu} - {a_0}^*{}_{\mu\nu}\nabla^\lambda{a_0}^{\mu\nu}\right). \tag{3.44}$$

Sada možemo pisati

$$\nabla_\lambda\left(f^2k^\lambda\right) = i\epsilon\nabla_\lambda\left(f_0^2{z^*}_{\mu\nu}\nabla^\lambda{z_0}^{\mu\nu}\right) \tag{3.45}$$

Uvođenjem efektivnoga vektora q^λ dobivamo efektivnu jednadžbu sačuvanja do prvoga reda

$$\nabla_\lambda\left(f^2q^\lambda\right) = \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.46}$$

$$q^\lambda = k^\lambda - i\epsilon{z_0}^*{}_{\mu\nu}\nabla^\lambda{z_0}^{\mu\nu}. \tag{3.47}$$

Primjenom jednadžbe paralelnoga transporta za ${z_0}^{\mu\nu}$ može se pokazati da vrijedi ${z_0}^*{}_{\mu\nu}k^\lambda\nabla_\lambda{z_0}^{\mu\nu} = 0$. Iz toga slijedi da je q^λ nul vektor, odnosno

$$q_\lambda q^\lambda = k_\lambda k^\lambda - 2i\epsilon{z_0}^*{}_{\mu\nu}k^\lambda\nabla_\lambda{z_0}^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.48}$$

3.3 Spinska optika za gravitacijske valove

Ovdje izlažemo ekstenziju spinske optike za gravitacijske valove prateći [5]. Za opis cirkularno polariziranih gravitacijskih valova iskoristit ćemo istu nul-tetradnu bazu $\{l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}$ kao u potpoglavlju 2.4. Iskazat ćemo polarizacijski tenzor najnižega reda geometrijske optike u nul-tetradnoj bazi $\{k^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}$ koja je adaptirana na eikonalne krivulje. S obzirom da je polarizacijski tenzor simetričan, dovoljno je uzeti u obzir samo simetrične kombinacije vektora tetrade

$$\begin{aligned} {z_0}^{\mu\nu} &= C_1 m^\mu m^\nu + C_2 \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu + 2C_3 m^{(\mu}\bar{m}^{\nu)} + C_4 k^\mu k^\nu \\ &\quad + 2C_5 k^{(\mu} m^{\mu)} + 2C_6 k^{(\mu}\bar{m}^{\nu)} + 2C_7 k^{(\mu} n^{\nu)} + C_8 n^\mu n^\mu + 2C_9 n^{(\mu} m^{\mu)} + 2C_{10} n^{(\mu}\bar{m}^{\mu)}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Zbog Lorenzova uvjeta baždarenja, vrijedi okomitost $k_\mu {z_0}^{\mu\nu} = 0$, pa posebno gledamo

$$k_\mu {z_0}^{\mu\nu} = -C_7 k^\nu - C_8 n^\nu - C_9 m^\nu - C_{10}\bar{m}^\nu. \tag{3.50}$$

Kako vrijedi $k_\mu k_\nu {z_0}^{\mu\nu} = k_\mu n_\nu {z_0}^{\mu\nu} = k_\mu m_\nu {z_0}^{\mu\nu} = k_\mu \bar{m}_\nu {z_0}^{\mu\nu} = 0$, možemo zaključiti da iščezavaju svi koeficijenti od C_7 do C_{10}. Dalje možemo vidjeti da je trag polarizacijskoga tenzora određen koeficijentom C_3, odnosno ${z_0}^\lambda{}_\lambda = 2C_3$. Lorenzov baždarni uvjet (3.27) išao je uz pretpostavku početnoga uvjeta traga $h^\lambda{}_\lambda|_\Sigma = 0$, za koji smo ranije utvrdili da vrijedi duž cijele krivulje propagacije. To znači da otpada i $C_3 = 0$. Preostale stupnjeve slobode C_4, C_5 i C_6 dodatno možemo ukloniti koristeći rezidualnu slobodu baždarenja. Preostaje nam zapis polarizacijskoga tenzora u obliku superpozicije dva moda cirkularne polarizacije suprotnih orijentacija

$${z_0}^{\mu\nu}(x) = C_1(x) m^\mu(x) m^\nu(x) + C_2(x)\bar{m}^\mu(x)\bar{m}^\nu(x). \tag{3.51}$$

Funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ možemo odrediti iz jednadžbe (3.39) za paralelni transport polarizacijskog tenzora u najnižem redu

$$\begin{aligned} k^\lambda \nabla_\lambda {z_0}^{\mu\nu} &= C_1 m^\mu k^\lambda \nabla_\lambda m^\nu + C_1 m^\nu k^\lambda \nabla_\lambda m^\mu + C_2 \bar{m}^\mu k^\lambda \nabla_\lambda \bar{m}^\nu + C_1 \bar{m}^\nu k^\lambda \nabla_\lambda \bar{m}^\mu \\ &\quad + m^\mu m^\nu k^\lambda \nabla_\lambda C_1 + \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu k^\lambda \nabla_\lambda C_2 \overset{!}{=} 0. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Kontrakcijom prethodne relacije s tenzorima $\bar{m}_\mu \bar{m}_\nu$ i $m_\mu m_\nu$ dobivamo dvije razvezane diferencijalne jednadžbe

$$C_1 k^\lambda \bar{m}_\nu \nabla_\lambda m^\nu + C_1 k^\lambda \bar{m}_\mu \nabla_\lambda m^\mu + k^\lambda \nabla_\lambda C_1 = 0, \tag{3.53}$$

$$C_2 k^\lambda m_\nu \nabla_\lambda \bar{m}^\nu + C_2 k^\lambda m_\mu \nabla_\lambda \bar{m}^\mu + k^\lambda \nabla_\lambda C_2 = 0. \tag{3.54}$$

Kao i u elektromagnetskom slučaju, diferencijalne jednadžbe za koeficijente baze sadrže poseban vektor

$$b^\mu = i\bar{m}_\nu \nabla^\mu m^\nu = -i m_\nu \nabla^\mu \bar{m}^\nu, \tag{3.55}$$

dobivamo diferencijalne jednadžbe s rješenjima duž nekoga zadanog nul-geodezika parametriziranog sa $x^\mu(\lambda)$

$$k^\mu \nabla_\mu C_1 - 2i\left(k^\mu b_\mu\right) C_1 = 0 \rightarrow C_1(\lambda) = C_1(0) e^{2i\gamma(\lambda)}, \tag{3.56}$$

$$k^\mu \nabla_\mu C_2 + 2i\left(k^\mu b_\mu\right) C_2 = 0 \rightarrow C_2(\lambda) = C_2(0) e^{-2i\gamma(\lambda)}, \tag{3.57}$$

$$\gamma(\lambda) = \int_0^\lambda k^\mu b_\mu d\lambda'. \tag{3.58}$$

Rješenja polarizacijskih tenzora, za svaku orijentaciju cirkularnih polarizacija su

$$z_0{}^{\mu\nu}\left(x(\lambda)\right) = m^\mu\left(x(\lambda)\right) m^\nu\left(x(\lambda)\right) e^{2i\gamma(\lambda)}, \tag{3.59}$$

$$z_0{}^{\mu\nu}\left(x(\lambda)\right) = \bar{m}^\mu\left(x(\lambda)\right) \bar{m}^\nu\left(x(\lambda)\right) e^{-2i\gamma(\lambda)}. \tag{3.60}$$

Usporedbom s rješenjima za polarizacijske vektore elektromagnetskoga slučaja (2.95) zaključujemo da gravitacijski valovi dobivaju dvostruko veću fazu γ, pa očekujemo da će efekt spinske optike biti dvostruko veći. Provodimo isti postupak reinterpretacije eikonalne faze s transformacijama (2.89)-(2.90). U toj interpretaciji shvaćamo relaciju (3.48) kao efektivnu disperzijsku relaciju spinske optike, dakle

$$k^\lambda k_\lambda - 2i\epsilon k^\lambda z_0{}^*{}_{\mu\nu} \nabla_\lambda z_0{}^{\mu\nu} = \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.61}$$

Objedinjena disperzijska relacija za obje orijentacije cirkularne polarizacije glasi

$$k^\lambda k_\lambda + 2\epsilon s k^\lambda \nabla_\lambda \gamma - 2\epsilon s k^\lambda b_\lambda = \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.62}$$

Ova je relacija identična oblikom elektromagnetskom slučaju (2.102), uz drukčji spinski parametar $s = \pm 2$. Stoga sve relacije spinske optike iz elektromagnetskoga slučaja vrijede uz uvrštavanje spinskoga parametra $s = \pm 2$ za gravitacijske valove. Tako će diferencijalna jednadžba za krivulje spinske optike za slučaj gravitacijskih valova

$$\frac{D^2 x^\mu}{D\lambda^2} = \epsilon s \Phi^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu, \tag{3.63}$$

predviđati dvostruko veći efekt u odnosu na elektromagnetski slučaj.

4 Propagacija svjetlosti u nelinearnoj elektrodinamici

4.1 Efektivna metrika sa pozadinskim poljima u ravnome prostoru

Pretpostavimo da se nalazimo u pozadini ravnoga prostora $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, +1, +1, +1)$ u koji uvodimo nelinearno elektromagnetsko polje, opisano generalnom klasom dvoparametarskih lagranžijana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ koji su funkcija relativističkih invarijanti elektromagnetskoga polja $\mathcal{F} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ i $\mathcal{G} = F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$. Bavimo se problemom propagacije elektromagnetskih poremećaja u prostoru u slučaju nelinearne elektrodinamike te nas posebno zanima propagacija valova u granici visokih frekvencija. Općenito će propagacija elektromagnetskih valova biti opisana nekom kompliciranom nelinearnom valnom jednadžbom koja slijedi iz zadanoga lagranžijana nelinearne elektrodinamike. Takva nelinearna valna jednažba ujedno će opisivati nelinearne efekte prilikom propagacije te je za potpunu analizu svih nelinearnih efekata potrebno koristiti metode koje su izvan opsega ovoga diplomskoga rada. Stoga ćemo se fokusirati na problem propagacije elektromagnetskih valova u pozadini elektromagnetskih polja. Namjera je promatrati elektromagnetske valove u režimu slaboga polja u kojemu će biti moguće linearizirati valnu jednadžbu, ali će u prisutnosti pozadinskih polja preostati utjecaj nelinearne elektrodinamike statičnih pozadinskih polja na efektivna svojstva medija (vakuuma) u kojem se propagiraju linearni valovi slaboga polja. Ovdje ćemo izložiti pristup prema [12] i [13], gdje se koristi metoda Hadamardove teorije propagacije diskontinuiteta. Rezultati ove metode bit će istovjetni rezultatima geometrijske optike u najnižem redu.

Definirajmo za proizvoljnu skalarnu funkciju f na nekoj hiperplohi Σ operaciju

$$[f]_\Sigma = \lim_{\delta \to 0+} \left(f|_{\Sigma+\delta} - f|_{\Sigma-\delta} \right). \tag{4.1}$$

Definirana operacija daje iznos skoka funkcije u svakoj točki zadane hiperplohe. Pretpostavimo da je svaka komponenta tenzora elektromagnetskoga polja $F_{\mu\nu}$ neprekidna skalarna funkcija na cijelom prostoru na kojem je zadana, što znači da za svaku hiperplohu Σ vrijedi

$$\left[F_{\mu\nu}\right]_\Sigma = 0. \tag{4.2}$$

Odaberimo proizvoljnu glatku hiperplohu Σ te pretpostavimo da derivacija elektromagnetskoga tenzora ima skok u normalnom smjeru na toj hiperplohi, odnosno to možemo prikazati sa

$$\left[\partial_\lambda F_{\mu\nu}\right]_\Sigma = f_{\mu\nu} k_\lambda, \tag{4.3}$$

gdje je k_λ normala na plohu, a tenzor $f_{\mu\nu}$ definiran u svakoj točki hiperplohe daje iznos diskontinuiteta. Hiperplohu diskontinuiteta možemo fizikalno interpretirati kao valnu frontu vala te zadavanje takve hiperplohe odgovara zadavanju početnih uvjeta geometrijske optike u smislu zadavanja početne plohe na kojoj je eikonalna funkcija konstantna. Sada ćemo pokazati kako iz jednadžbi gibanja početnog lagranžijana možemo izvesti jednadžbe propagacije diskontinuiteta.

Započinjemo razmatranjima jednoparametarskih lagranžijana oblika $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{F})$. Varijacijskim postupkom nad akcijom $S = \int \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) d^4x$ slijede Euler-Lagrangeove jednadžbe gibanja

$$\delta S = 0 \rightarrow \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\nu A_\mu\right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0. \tag{4.4}$$

Kako invarijanta $\mathcal{F}$ ovisi samo o derivacijama potencijala

$$\mathcal{F} = \eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu} \left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right) \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right), \tag{4.5}$$

drugi član Euler-Lagrangeove jednadžbe iščezava. Preostaje nam odrediti

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\nu A_\mu\right)} = \frac{d\mathcal{L}(\mathcal{F})}{d\mathcal{F}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \left(\partial_\mu A_\nu\right)} = 2\mathcal{L}^{'}(\mathcal{F}) F^{\mu\nu}, \tag{4.6}$$

i dobivamo jednadžbu polja

$$\partial_\mu \left(\mathcal{L}^{'}(\mathcal{F}) F^{\mu\nu} \right) = 2\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F}) \partial_\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}^{'}(\mathcal{F}) \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{4.7}$$

Nad jednadžbom polja primjenjujemo operaciju (4.1), uz pretpostavke (4.2) i (4.3) dobivamo

$$\left[\partial_\mu \left(\mathcal{L}^{'}(\mathcal{F}) F^{\mu\nu} \right)\right]_\Sigma = 2\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F}) \left[\partial_\mu F_{\alpha\beta}\right]_\Sigma F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}^{'}(\mathcal{F}) \left[\partial_\mu F^{\mu\nu}\right]_\Sigma. \tag{4.8}$$

Funkcija $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ i njezine derivacije po $\mathcal{F}$ ovise samo o invarijantama $\mathcal{F}$ koje nemaju prekida na plohi Σ stoga prelaze samo u predfaktore limesa. Uvrštavanjem

$\left[\partial_\mu F_{\alpha\beta}\right]_\Sigma = f_{\alpha\beta}k_\mu$ i $[\partial_\mu F^{\mu\nu}]_\Sigma = f^{\mu\nu}k_\mu$ i uz definiciju skalara $\xi = f_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ možemo pisati

$$\mathcal{L}^{'}(\mathcal{F})f^{\mu\nu}k_\nu + 2\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F})\xi F^{\mu\nu}k_\nu = 0. \tag{4.9}$$

Za potpuni opis elektromagnetskoga polja potreban nam je još Bianchijev identitet

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \tag{4.10}$$

Primjenom operacije (4.1) nad ovim identitetom dobivamo

$$f_{\mu\nu}k_\lambda + f_{\nu\lambda}k_\mu + f_{\lambda\mu}k_\nu = 0. \tag{4.11}$$

Sada ćemo ukratko ilustrirati vezu metode diskontinuiteta sa standarnim pristupom geometrijske optike koji smo koristili ranije. Dakle, pokažimo da smo iste relacije (4.9) i (4.11) mogli dobiti i standarnim pristupom, tj. aproksimacijom slaboga polja i aproksimacijom geometrijske optike vodećega reda. Pokažimo to eksplicitno, u jednadžbu polja (4.8) uvrstimo aproksimaciju slaboga polja $F^{\mu\nu} = F_B{}^{\mu\nu} + \tilde{f}^{\mu\nu}$ gdje je $F_B{}^{\mu\nu}$ pozadinsko polje za koje pretpostavljamo da zadovoljava jednadžbu gibanja, a $\tilde{f}^{\mu\nu}$ je perturbirajuće polje. Tada dobivamo lineariziranu jednadžbu do prvoga reda po perturbirajućem polju

$$\begin{aligned}2\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F}_B)\partial_\mu\tilde{f}_{\alpha\beta}F_B{}^{\alpha\beta}F_B{}^{\mu\nu} + \mathcal{L}^{'}(\mathcal{F}_B)\partial_\mu\tilde{f}^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F}_B)\partial_\mu F_{B\alpha\beta}\tilde{f}^{\alpha\beta}F_B{}^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F}_B)\partial_\mu F_{B\alpha\beta}F_B{}^{\alpha\beta}\tilde{f}^{\mu\nu}\\ +4\mathcal{L}^{'''}(\mathcal{F}_B)\partial_\mu F_{B\alpha\beta}F_B{}^{\alpha\beta}F_B{}^{\mu\nu}F_{B\rho\sigma}\tilde{f}^{\rho\sigma} + 2\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F}_B)\partial_\mu F_B{}^{\mu\nu}F_{B\rho\sigma}\tilde{f}^{\rho\sigma} = 0.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Uzmimo da perturbirajuće polje ima oblik ansatza geometrijske optike $\tilde{f}^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}e^{i\Phi}$. To daje za derivacije $\partial_\mu\tilde{f}_{\alpha\beta} = \partial_\mu f_{\alpha\beta}e^{i\Phi} + i\partial_\mu\Phi f_{\alpha\beta}e^{i\Phi}$. Najniži red geometrijske optike odgovarao bi uzimanju najdominantnijih članova uz određene vjete odnosa skala l_Φ, l_f, l_B zadanih derivacijama $\partial_\mu\Phi$, $\partial_\mu f^{\alpha\beta}$ i $\partial_\mu F_B{}^{\alpha\beta}$. Pretpostavimo da je odnos skala takav da je skala valna duljine $l_\Phi << l_f, l_B$. Uz pretpostavke navedenih odnosa skala, u (4.12) vidimo da će takva dva dominantna člana točno odgovarati onima u (4.9) pa je i opravdano interpretirati tenzor diskontinuiteta $f^{\mu\nu}$ kao polarizacijski tenzor geometrijske optike. Možemo ga zapisati i preko polarizacijskih vektora koje smo koristili otprije u asimptotskom ansatzu baždarnoga potencijala $A^\mu = fz^\mu e^{iS/\epsilon}$ preko

$f^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ i to u vodećem redu

$$f^{\mu\nu} = \frac{i}{\epsilon} f \left(k^\mu z^\nu - k^\nu z^\mu\right) + \mathcal{O}(\epsilon^0). \tag{4.13}$$

U nastavku ćemo koristi oblik tenzora polarizacije uz pripadne ortonormalizacijske uvjete

$$f^{\mu\nu} = a \left(k^\mu z^\nu - k^\nu z^\mu\right), \tag{4.14}$$

$$z^\mu k_\mu = 0, z^\mu z^*{}_\mu = 1. \tag{4.15}$$

Uveli smo novi skalar inteziteta tenzora polarizacije $a = f/\epsilon$. U (4.13) dodatni faktor i predstavlja globalnu fazu koju možemo apsorbirati u $e^{i(S+\epsilon\pi/2)/\epsilon}$ te je ta globalna faza nebitna jer neutječe na propagaciju vala pa smo je zanemarili u konačnome zapisu. Očita je prednost metode diskontinuiteta u tome što daje jednostavniju analizu propagacije elektromagnetskih valova bez frekvecijski ovisnih efekata. Ovakvu metodu možemo koristiti na jednostavnijim lagranžijanima poput $\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. U općenitijim lagranžijanima mogu se javiti dodatne ovisnosti o derivacijama $\partial_\lambda F^{\mu\nu}$ pa će u tim situacijama potrebno koristiti potpuniju asimptotsku analizu pripadne jednadžbe gibanja jer nismo sigurni da bi metoda diskontinuiteta, koja je ovdje prikazana, dala ispravne rezultate.

Nastavljamo s analizom osnovih jednadžbi koje smo izveli. Relacije (4.9) i (4.11) daju uvjete koje moraju zadovoljavati propagacijski vektori u uvjetima nelinearnih pozadinskih polja. Iz tih jednadžbi možemo izvesti skalarnu jednadžbu koja će predstavljati disperzijsku relaciju za propagacijske vektore. Kontrahirajmo relaciju (4.11) sa $k_\alpha \eta^{\alpha\lambda} F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \eta^{\alpha\lambda} k_\lambda k_\alpha + F^{\mu\nu} f_\nu{}^\alpha k_\mu k_\alpha + F^{\mu\nu} f^\alpha{}_\mu k_\nu k_\alpha = \xi \eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu + 2 F^{\mu\nu} f_\nu{}^\lambda k_\lambda k_\mu = 0. \tag{4.16}$$

Relaciju (4.9) možemo također uz odgovarajuću kontrakciju pisati pisati u obliku

$$-\mathcal{L}'(\mathcal{F}) F^{\mu\nu} f_\nu{}^\lambda k_\lambda k_\mu + 2\mathcal{L}''(\mathcal{F}) \xi F^{\mu\nu} F^\lambda{}_\nu k_\mu k_\lambda = 0 \tag{4.17}$$

Izrazimo li prvi član preko (4.16) te uz pretpostavku $\xi \neq 0$ dobivamo disperzijsku

relaciju

$$\left[\mathcal{L}^{'}(\mathcal{F})\eta^{\mu\nu} - 4\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F})F^{\mu\lambda}F_{\lambda}{}^{\nu}\right]k_{\mu}k_{\nu} = 0. \tag{4.18}$$

Ovdje se može vidjeti da u općenitijim nelinearnim poljima postoji mogućnost da je $k^{\mu}k_{\mu} \neq 0$, odnosno diskontinuiteti se mogu propagirati po krivuljama koje nisu nul-geodezici ravne metrike $\eta^{\mu\nu}$. Primjetimo da disperzijska relacija sugerira postojanje simetričnoga tenzora

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \mathcal{L}^{'}(\mathcal{F})\eta^{\mu\nu} - 4\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F})F^{\mu\lambda}F_{\lambda}{}^{\nu}, \tag{4.19}$$

takvoga da vrijedi

$$\tilde{g}^{\mu\nu}k_{\mu}k_{\nu} = 0. \tag{4.20}$$

Pomoću ovoga tenzora možemo opisati utjecaj nelinearne elektrodinamike na propagaciju diskontinuiteta preko efektivne geometrije čiji bi metrički tenzor bio $\tilde{g}^{\mu\nu}$. Takva efektivna geometrija odnosila bi se samo na propagaciju elektromagnetskih poremećaja dok bi stvarna metrika prostor-vremena i dalje bila metrički tenzor ravnoga prostora $\eta^{\mu\nu}$. Korisno je i izraziti efektivnu metriku preko tenzora energije i impulsa elektromagnetskoga polja $T^{\mu\nu}$. U slučaju nelinearne elektrodinamike $T^{\mu\nu}$ neće više imati oblik koji smo koristili u linearnoj elektrodinamici, ali općenitiji tenzor možemo izvesti varijacijom akcije $S = \int \sqrt{-g}\mathcal{L}d^4x$ po metrici. To će dati u slučaju naše ravne metrike

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu}A^{\lambda}\right)}F^{\lambda}{}_{\nu} - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{4.21}$$

Za slučaj jednoparametarskoga lagranžijana $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ dobivamo da je tenzor energije i impulsa

$$T_{\mu\nu} = -4\mathcal{L}^{'}(\mathcal{F})F_{\mu}{}^{\alpha}F_{\alpha\nu} - \mathcal{L}(\mathcal{F})\eta_{\mu\nu}. \tag{4.22}$$

Time možemo zapisati efektivnu metriku kao

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \left(\mathcal{L}^{'}(\mathcal{F}) + \frac{\mathcal{L}(\mathcal{F})\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F})}{\mathcal{L}^{'}(\mathcal{F})}\right)\eta^{\mu\nu} + \frac{\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F})}{\mathcal{L}^{'}(\mathcal{F})}T^{\mu\nu}. \tag{4.23}$$

U ovome zapisu možemo gledati efekt nelinearne elektrodinamike kao odstupanje od ravne metrike koje se pojačava u područjima veće gustoće energije i impulsa pozadinskih polja. Primjetimo da u slučaju $\mathcal{L}^{''}(\mathcal{F}) = 0$ dobivamo da će efektivna metrika biti uvijek ravna i neovisna o pozadinskim poljima. Taj slučaj odgovara linearnoj

elektrodinamici, dakle za lagranžijan linearne elektrodinamike $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ dobivamo da se efektivna metrika svodi na $\tilde{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$. Prednost je ovog pristupa efektivne metrike u tome što utjecaj nelinearne elektrodinamike na propagaciju svjetlosti možemo analizirati standarnim metodama diferencijalne geometrije koje smo navikli koristiti u općoj teoriji relativnosti. Primjerice, krivulje propagacije svjetlosti možemo gledati kao nul-geodezike efektivne geometrije. Za korištenje takvih metoda u efektivnoj geometriji potrebno je konstruirati inverz efektivne metrike $\tilde{g}_{\mu\nu}$ i kovarijantnu derivaciju. Inverzna metrika $\tilde{g}^{-1}{}_{\mu\nu}$ mora zadovoljavati

$$\tilde{g}^{\mu\lambda}\tilde{g}^{-1}{}_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{4.24}$$

Može se pokazati da inverzna metrika ima oblik

$$\tilde{g}^{-1}{}_{\mu\nu} = a\eta_{\mu\nu} + bT_{\mu\nu}\,, \tag{4.25}$$

$$a = -b\left(\frac{\mathcal{L}'(\mathcal{F})^2}{\mathcal{L}''(\mathcal{F})} + \mathcal{L}''(\mathcal{F}) + \frac{1}{2}T\right), \tag{4.26}$$

$$b = 16\frac{\mathcal{L}''(\mathcal{F})}{\mathcal{L}'(\mathcal{F})}\left[\left(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2\right)\mathcal{L}''(\mathcal{F})^2 - 16\left(\mathcal{L}'(\mathcal{F}) + \mathcal{F}\mathcal{L}''(\mathcal{F})\right)^2\right]^{-1}. \tag{4.27}$$

Nakon što smo odredili inverznu metriku, možemo konstruirati efektivnu kovarijantnu derivaciju. Mora vrijediti uvjet kompatibilnosti efektivne metrike

$$\tilde{\nabla}_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu} = \partial_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu} + \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda}\tilde{g}^{\sigma\nu} + \tilde{\Gamma}^{\nu}_{\sigma\lambda}\tilde{g}^{\sigma\mu} = 0. \tag{4.28}$$

Kompatibilnost efektivne metrike može se zadovoljiti odabirom Christoffelove konekcije

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\lambda}\left(\partial_\beta \tilde{g}^{-1}{}_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha \tilde{g}^{-1}{}_{\lambda\beta} - \partial_\lambda \tilde{g}^{-1}{}_{\alpha\beta}\right). \tag{4.29}$$

Ovako konstruirana kovarijantna derivacija u efektivnoj geometriji ima sva potrebna svojstva kao i obična kovarijantna derivacija na općenitim mnogostrukostima. Sada smo u stanju izvesti jednadžbu propagacijskih krivulja u efektivnoj geometriji. Primjenimo kovarijantnu derivaciju efektivne geometrije na disperzijsku relaciju (4.20)

$$2\tilde{g}^{\mu\nu}k_\nu \tilde{\nabla}_\lambda k_\mu = 0. \tag{4.30}$$

Kako je $k_\mu = \partial_\mu S = \tilde{\nabla}_\mu S$ gradijent skalarne funkcije, vrijedi $\tilde{\nabla}_\lambda k_\mu = \tilde{\nabla}_\mu k_\lambda$. Smjer

propagacije identificiramo s vektorom $l^\mu = \tilde{g}^{\mu\nu} k_\nu$. Kontrakcijom (4.30) sa $\tilde{g}^{\lambda\alpha}$ dobivamo jednadžbu geodezika

$$l^\mu \tilde{\nabla}_\mu l^\alpha = 0. \tag{4.31}$$

Kako je po disperzijskoj relaciji l^μ nul-vektor, dobivamo da su propagacijske krivulje nul-geodezici efektivne geometrije. Poželjno je još iskazati (4.31) kao parametarsku jednadžbu krivulje $x^\mu(\lambda)$ s tangetnim vektorskim poljem $\frac{dx^\mu}{d\lambda} = l^\mu$

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \tag{4.32}$$

Na razini diferencijalnih jednadžbi krivulja lakše je vidjeti još jedan važan rezultat. U homogenim pozadinskim poljima propagacijske krivulje ponovno će biti pravci ravnoga prostora. Naime, za homogena polja iščezava Christoffelova konekcija pa se kovarijantna derivacija svodi na običnu parcijalnu derivaciju te onda diferencijalne jednadžbe (4.31 i (4.32) imaju za rješenja obične pravce. Ovo je u skladu s iskustvom propagacije elektromagnetskih valova u medijima, dakle tamo je uzrok savijanja zraka svjetlosti upravo u nehomogenostima medija.

Prelazimo na analizu općenitijih dvoparametarskih lagranžijana $\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Jednadžba polja je

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\nu A_\mu \right)} \right) = \partial_\nu \left[\mathcal{L}_\mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \left(\partial_\mu A_\nu \right)} + \mathcal{L}_\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\partial_\mu A_\nu \right)} \right] = 0. \tag{4.33}$$

Koristimo pokrate $\mathcal{L}_\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}}$ i $\mathcal{L}_\mathcal{G} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}}$. Za derivacije invarijanti vrijedi $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 4F^{\mu\nu}$ i $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 4 * F^{\mu\nu}$. Nastavljamo s eksplicitnim raspisom jednadžbe polja

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mathcal{F} \left(\partial_\mu F^{\mu\nu} \right) + \mathcal{L}_\mathcal{G} \left(\partial_\mu * F^{\mu\nu} \right) + 2\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \left(\partial_\mu F_{\alpha\beta} \right) F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{G}} \left(\partial_\mu F_{\alpha\beta} \right) * F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\ + 2\mathcal{L}_{\mathcal{G}\mathcal{F}} \left(\partial_\mu F_{\alpha\beta} \right) F^{\alpha\beta} * F^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{\mathcal{G}\mathcal{G}} \left(\partial_\mu F_{\alpha\beta} \right) * F^{\alpha\beta} * F^{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Primjenimo operaciju (4.1) kao i u prethodnim izvodima. Jednadžbu polja nakon

toga možemo svesti na oblik

$$[\mathcal{L}_{\mathcal{F}} f^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\mathcal{G}} * f^{\mu\nu} + 2AF^{\mu\nu} + 2B * F^{\mu\nu}]\, k_\nu = 0, \tag{4.35}$$

$$A = \xi\mathcal{L}_{\mathcal{FF}} + \chi\mathcal{L}_{\mathcal{FG}}, B = \xi\mathcal{L}_{\mathcal{GF}} + \chi\mathcal{L}_{\mathcal{GG}}, \xi = f_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \chi = f_{\alpha\beta} * F^{\alpha\beta}. \tag{4.36}$$

Kontrakcijom (4.34) sa $F^{\alpha}{}_{\mu} k_\alpha$ i $*F^{\alpha}{}_{\mu} k_\alpha$, te primjenom (4.11) i identiteta

$$F^{\mu\lambda} * F_{\lambda}{}^{\nu} = -\frac{1}{4}\mathcal{G}\eta^{\mu\nu}, \tag{4.37}$$

$$F^{\mu\lambda}F_{\lambda}{}^{\nu} - *F^{\mu\lambda} * F_{\lambda}{}^{\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\eta^{\mu\nu}. \tag{4.38}$$

dobivamo dvije relacije

$$[\xi\mathcal{L}_{\mathcal{F}} + B\mathcal{G}]\, \eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu - 4AF^{\mu}{}_{\alpha}F^{\alpha\nu}k_\mu k_\nu = 0, \tag{4.39}$$

$$[\chi\mathcal{L}_{\mathcal{F}} - 2B\mathcal{F} + A\mathcal{G}]\, \eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu - 4BF^{\mu}{}_{\alpha}F^{\alpha\nu}k_\mu k_\nu = 0, \tag{4.40}$$

iz kojih možemo vidjeti da za općeniti $k_\mu k^\mu$ mora vrijediti

$$\left[\frac{\xi\mathcal{L}_{\mathcal{F}} + B\mathcal{G}}{A} - \frac{\chi\mathcal{L}_{\mathcal{F}} - 2B\mathcal{F} + A\mathcal{G}}{B}\right] k_\mu k^\mu = 0. \tag{4.41}$$

Iz ove jednadžbe, uz pretpostavku $k_\mu k^\mu \neq 0$, možemo odrediti vezu između skalara ξ i χ. Definirajmo $\Omega = \frac{\chi}{\xi}$. Prethodna relacija (4.42) je tada obična kvadranta jednadžba za Ω

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\mathcal{GF}} + \mathcal{L}_{\mathcal{GG}}\Omega)\left[\mathcal{L}_{\mathcal{F}} + \mathcal{G}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{GF}} + \mathcal{L}_{\mathcal{GG}}\Omega\right)\right] - \\ (\mathcal{L}_{\mathcal{FF}} + \mathcal{L}_{\mathcal{FG}}\Omega)\left[\mathcal{L}_{\mathcal{F}}\Omega - 2\mathcal{F}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{GF}} + \mathcal{L}_{\mathcal{GG}}\Omega\right) + \mathcal{G}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{FF}} + \mathcal{L}_{\mathcal{FG}}\Omega\right)\right] = 0.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Dobivamo dva rješenja

$$\Omega_{\pm} = \frac{-\Omega_2 \pm \sqrt{(\Omega_2)^2 - 4\Omega_1\Omega_3}}{2\Omega_1}, \tag{4.43}$$

$$\Omega_1 = -\mathcal{L}_{\mathcal{F}}\mathcal{L}_{\mathcal{FG}} + 2\mathcal{F}\mathcal{L}_{\mathcal{FG}}\mathcal{L}_{\mathcal{GG}} + \mathcal{G}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{GG}}^2 - \mathcal{L}_{\mathcal{FG}}^2\right), \tag{4.44}$$

$$\Omega_2 = \left(\mathcal{L}_{\mathcal{F}} + 2\mathcal{G}\mathcal{L}_{\mathcal{FG}}\right)\left(\mathcal{L}_{\mathcal{GG}} - \mathcal{L}_{\mathcal{FF}}\right) + 2\mathcal{F}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}\mathcal{L}_{\mathcal{GG}} + \mathcal{L}_{\mathcal{FG}}^2\right), \tag{4.45}$$

$$\Omega_3 = \mathcal{L}_{\mathcal{F}}\mathcal{L}_{\mathcal{FG}} + 2\mathcal{F}\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}\mathcal{L}_{\mathcal{FG}} + \mathcal{G}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{FG}}^2 - \mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^2\right). \tag{4.46}$$

Vraćanjem ovih rješenja u (4.35) kontrahirano sa $F^{\alpha}{}_{\mu}\, k_{\alpha}$ dobivamo uz pretpostavku $\xi \neq 0$ dva rješenja za efektivnu metriku

$$\tilde{g}_{\pm}{}^{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}}\eta^{\mu\nu} - 4\left[\left(\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} + \Omega_{\pm}\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{G}}\right) F^{\mu}{}_{\lambda} F^{\lambda\nu} + \left(\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{G}} + \Omega_{\pm}\mathcal{L}_{\mathcal{G}\mathcal{G}}\right) F^{\mu}{}_{\lambda} * F^{\lambda\nu}\right]. \quad (4.47)$$

Primjenom identiteta (4.37) korisno je zapisati efektivnu metriku u obliku

$$\tilde{g}_{\pm}{}^{\mu\nu} = \left[\mathcal{L}_{\mathcal{F}} + \mathcal{G}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{G}} + \Omega_{\pm}\mathcal{L}_{\mathcal{G}\mathcal{G}}\right)\right]\eta^{\mu\nu} - 4\left(\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} + \Omega_{\pm}\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{G}}\right) F^{\mu}{}_{\lambda} F^{\lambda\nu}. \quad (4.48)$$

Tenzora energije i impulsa je za dvoparametarske lagranžijane po (4.21) oblika

$$T^{\mu\nu} = -4\mathcal{L}_{\mathcal{F}} F^{\mu}{}_{\lambda} F^{\lambda\nu} - 4\mathcal{L}_{\mathcal{G}} * F^{\mu}{}_{\lambda} F^{\lambda\nu} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} = -4\mathcal{L}_{\mathcal{F}} F^{\mu}{}_{\lambda} F^{\lambda\nu} - \left(\mathcal{L} - \mathcal{G}\mathcal{L}_{\mathcal{G}}\right)\eta^{\mu\nu}. \quad (4.49)$$

Zapis efektivne metrike preko ovog tenzora je

$$\tilde{g}_{\pm}{}^{\mu\nu} = \left[\mathcal{L}_{\mathcal{F}} + \mathcal{G}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{G}} + \Omega_{\pm}\mathcal{L}_{\mathcal{G}\mathcal{G}}\right) + \tfrac{1}{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} + \Omega_{\pm}\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{G}}\right)\left(\mathcal{L} - \mathcal{G}\mathcal{L}_{\mathcal{G}}\right)\right]\eta^{\mu\nu} + \tfrac{1}{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{G}} + \Omega_{\pm}\mathcal{L}_{\mathcal{G}\mathcal{G}}\right) T^{\mu\nu}. \quad (4.50)$$

Dobivanje dvaju rješenja za efektivnu metriku sugerira postojanje dviju krivulja propagacije elektromagnetskoga vala. Ove dvije krivulje moguće je povezati s dvama dopuštenim stanjima polarizacije, u nastavku ćemo izvesti svojstvenu jednadžbu polarizacijskih vektora iz koje ćemo dobiti polarizacijske vektore pridružene svakoj od tih dviju krivulja. Pretpostavimo da su dvije propagacijske krivulje rješenja dviju disperzijskih relacija

$$\tilde{g}_{\pm}{}^{\mu\nu} k_{\mu} k_{\nu} = 0. \quad (4.51)$$

Na svakoj propagacijskoj krivulji uz pomoć pozadinskih elektromagnetskih polja možemo prirodno uvesti vektore

$$c_1{}^{\mu} = F^{\mu\nu} k_{\nu}, c_2{}^{\mu} = *F^{\mu\nu} k_{\nu}, c_3{}^{\mu} = F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} k_{\nu}. \quad (4.52)$$

Za takve vektore vrijede relacije

$$(c_1)^2 := c_1{}^\mu c_{1\mu} = F^{\mu\alpha} F_\mu{}^\beta k_\alpha k_\beta, \tag{4.53}$$

$$(c_2)^2 := c_2{}^\mu c_{2\mu} = *F^{\mu\alpha} * F_\mu{}^\beta k_\alpha k_\beta = (c_1)^2 - \frac{1}{2}\mathcal{F}k^2, \tag{4.54}$$

$$(c_1 \cdot c_2) := c_1{}^\mu c_{2\mu} = F^{\mu\alpha} * F_\mu{}^\beta k_\alpha k_\beta = \frac{1}{4}\mathcal{G}k^2, \tag{4.55}$$

$$c_1{}^\mu c_{3\mu} = F^{\mu\alpha} F_\mu{}^\beta F_\beta{}^\sigma k_\alpha k_\sigma = 0, \tag{4.56}$$

$$c_2{}^\mu c_{3\mu} = *F^{\mu\alpha} F_\mu{}^\beta F_\beta{}^\sigma k_\alpha k_\sigma = \frac{1}{4}\mathcal{G}F^{\alpha\sigma} k_\alpha k_\sigma = 0, \tag{4.57}$$

$$c_1{}^\mu k_\mu = F^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0, \tag{4.58}$$

$$c_2{}^\mu k_\mu = *F^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0. \tag{4.59}$$

U prethodnim relacijama koristili smo identitete (4.37) i (4.38). Relacije (4.56) - (4.59) iščezavaju zbog kontrackije antisimetričnih i simetričnih tenzora. Zapišimo polarizacijski vektor u bazi $\{k^\mu, c_1{}^\mu, c_2{}^\mu, \tilde{c}_3{}^\mu\}$ koja je zadana propagacijskim vektorom, te prirodnim smjerovima koji su zadani pozadinskim elektromagnetskim poljima

$$z^\mu = C_1 c_1{}^\mu + C_2 c_2{}^\mu + C_3 \tilde{c}_3{}^\mu. \tag{4.60}$$

Treći vektor baze odabran je sa

$$\tilde{c}_3{}^\mu = c_3{}^\mu - \frac{c_3{}^\rho k_\rho}{k^2} k^\mu. \tag{4.61}$$

kako bismo ostvarili uvjet okomitosti $z^\mu k_\mu = 0$. Primjetimo da će i dalje vrijediti ortogonalnosti $c_1{}^\mu \tilde{c}_{3\mu} = 0$ i $c_2{}^\mu \tilde{c}_{3\mu} = 0$. Polarizacijski tenzor $f^{\mu\nu}$ s polarizacijskim vektorom u zadanoj bazi uvrštavamo u početnu jednadžbu polja (4.35). Eksplicitan raspis jednadžbe polja za potrebe ovog izvoda je

$$\mathcal{L}_\mathcal{F} f^{\mu\nu} k_\nu + \mathcal{L}_\mathcal{G} * f^{\mu\nu} k_\nu + 2\left(\xi \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} + \chi \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{G}}\right) c_1{}^\mu + 2\left(\xi \mathcal{L}_{\mathcal{G}\mathcal{F}} + \chi \mathcal{L}_{\mathcal{G}\mathcal{G}}\right) c_2{}^\mu = 0. \tag{4.62}$$

Za prvi član dobivamo

$$\mathcal{L}_\mathcal{F} f^{\mu\nu} k_\nu = a\mathcal{L}_\mathcal{F}\left(k^\mu z^\mu k_\nu - z^\mu k^2\right) = -a\mathcal{L}_\mathcal{F} k^2 z^\mu. \tag{4.63}$$

Drugi član iščezava zbog

$$*f^{\mu\nu}k_\nu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\alpha\beta}k_\nu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}k_\alpha k_\nu z_\beta - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}k_\beta k_\nu z_\alpha = 0. \tag{4.64}$$

Kontrakcijom (4.62) sa $c_{3\mu}$ dobivamo

$$-ak^2(c_3)^2C_3 = 0. \tag{4.65}$$

Iz ovoga zaključujemo da je $C_3 = 0$. Odredimo skalare ξ i χ

$$\xi = f_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = a\left(k_\alpha z_\beta - k_\beta z_\alpha\right)F^{\alpha\beta} = 2ak_\alpha z_\beta F^{\alpha\beta} = -2ac_1{}^\beta z_\beta = -2a\left((c_1)^2C_1 + (c_1\cdot c_2)C_2\right), \tag{4.66}$$

$$\chi = f_{\alpha\beta} * F^{\alpha\beta} = 2ak_\alpha z_\beta * F^{\alpha\beta} = -2ac_2{}^\beta z_\beta = -2a\left((c_1\cdot c_2)C_1 + (c_2)^2C_2\right). \tag{4.67}$$

Kontrakcijom jednadžbe polja (4.62) sa $c_{1\mu}$ i $c_{2\mu}$ dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\mathcal{L}_\mathcal{F}}{4}(c_1)^2k^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{FF}}(c_1)^2(c_1)^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{FG}}(c_1)^2(c_1\cdot c_2) + \mathcal{L}_{\mathcal{GF}}(c_1)^2(c_1\cdot c_2) + \mathcal{L}_{\mathcal{GG}}(c_1\cdot c_2)^2\right]C_1\\ &+\left[\frac{\mathcal{L}_\mathcal{F}}{4}(c_1\cdot c_2)k^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{FF}}(c_1)^2(c_1\cdot c_2) + \mathcal{L}_{\mathcal{FG}}(c_1)^2(c_2)^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{GF}}(c_1\cdot c_2)^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{GG}}(c_1\cdot c_2)(c_2)^2\right]C_2 = 0,\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\mathcal{L}_\mathcal{F}}{4}(c_1\cdot c_2)k^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{FF}}(c_1)^2(c_1\cdot c_2) + \mathcal{L}_{\mathcal{FG}}(c_1\cdot c_2)^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{GF}}(c_1)^2(c_2)^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{GG}}(c_1\cdot c_2)(c_2)^2\right]C_1\\ &+\left[\frac{\mathcal{L}_\mathcal{F}}{4}(c_2)^2k^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{FF}}(c_1\cdot c_2)^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{FG}}(c_1\cdot c_2)(c_2)^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{GF}}(c_1\cdot c_2)(c_2)^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{GG}}(c_1)^2(c_2)^2\right]C_2 = 0.\end{aligned} \tag{4.69}$$

Slična analiza u izvodu ovog sustava jednadžbi može se pronaći i u [13]. Uvrštavanjem dvaju vektora k^μ od dviju krivulja koje su rješenja disperzijske relacije (4.51) iz navedenog linearnog homogenog sustava jednadžbi možemo odrediti dva svojstvena polarizacijska tenzora. Alternativno, iz ovog sustava se može dobiti ista disperzijska relacija kao otprije. Naime, za postojanje netrivijalnog rješenja ovog homogenog sustava možemo koristi uvjet iščezavanja determinante sustava. Kako je ta procedura algebarski zahtjevna za slučaj dvoparametarskih lagranžijana mi ćemo pokazati

ekvivalentnost disperzijske relacije koja se dobije iz ovog sustava sa prethodnim metodama samo za slučaj jednoparametarskog lagranžijana. U tome posebnome slučaju sustav se značajno pojednostavljuje

$$\left[\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}{4}(c_1)^2k^2+\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(c_1)^2(c_1)^2\right]C_1 \;+\; \left[\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}{4}(c_1\cdot c_2)k^2+\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(c_1)^2(c_1\cdot c_2)\right]C_2 \;=\; 0, \tag{4.70}$$

$$\left[\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}{4}(c_1\cdot c_2)k^2+\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(c_1)^2(c_1\cdot c_2)\right]C_1+\left[\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}{4}(c_2)^2k^2+\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(c_1\cdot c_2)^2\right]C_2=0. \tag{4.71}$$

Uzimanjem determinante sustava te uz potrebna pojednostavljenja dobivamo

$$\left(\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}{4}\right)k^2\left[(c_1)^2(c_2)^2-(c_1\cdot c_2)^2\right]\left[\left(\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}{4}\right)k^2+\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(c_1)^2\right]=0. \tag{4.72}$$

Uz pretpostavku $k^2 \neq 0$ posljednja dva faktora bi dala disperzijsku relaciju. Posljednji faktor bi egzaktno odgovarao disperzijskoj relaciji sa efektivnom metrikom iz (4.19). Obzirom da su krivulje efektivne metrike invarijantne na konformne transformacije $\tilde{g}^{\mu\nu} \to \Omega^2(x)\tilde{g}^{\mu\nu}$, disperzijska relacija iz (4.72) sa dodatnim faktor, koji sada možemo shvatiti kao konformni faktor, daje iste krivulje kao i efektivna metrika. Time smo pokazali konzistentnost korištenih dviju metoda za određivanje propagacijskih krivulja.

Izvedena metoda određivanja disperzijskih relacija je analogna metodama koje se javljaju u optici pri analizi elektromagnetskih valova u anizotropnim medijima, primjerice u [18] ili [19]. Stoga će interpretacija dobivenih efekata u našim slučajevima biti analogna interpretacijama koje se tamo javljaju. Dakle, općenito vidimo da je nelinearni utjecaj pozadinskih polja na vakuum takav da stvori anizotropan efektivni medij. Dobivene propagacijske krivulje će u slučaju homogenih polja egzaktno odgovarati propagaciji dvaju nezavisnih modova polarizacije. U slučaju nehomogenosti pozadinskih polja ne možemo više tvrditi da dolazi do nezavisne propagacije takvih modova te tada nećemo moći pridjeliti jasnu krivulju propagacije koja bi odgovarala pojedinom modu. Međutim, kako smo na početku utvrdili da su naša pozadinska polja slabo varirajuća, možemo približno tvrditi da će svaki mod polarizacije propagarati po krivuljama u različitim efektivnim metrikama koje ”vidi” svaki mod polari-

zacije. Time smo opisali nelinearni efekt dvoloma pozadinskih polja.

Provedena analiza vrijedi za posve općenite dvoparametarske lagranžijane i pogodna je za primjenu na tipičnim primjerima poput Euler-Heisenbergova lagranžijana. Napomenimo da navedena analiza vrijedi samo za pozadine ravnoga prostora. Moguće je napraviti ekstenziju na zakrivljene pozadine u slučaju da je skala zakrivljenosti puno veća od skale valne duljine. Tada je moguće minimalnom supstitucijom ravne metrike s metrikom zakrivljenog prostor-vremena i dalje koristiti rezultate ovih metoda. Potpunija generalizacija na zakrivljenu pozadinu prostor-vremena bi tražila ponavljanje postupka izvoda efektivne teorije u okviru metoda kvantne elektrodinamike. Takva analiza provedena je u [21], čiji je rezultat Drummond-Hathrell efektivna akcija koja uključuje vezanje tenzora zakrivljenosti na pozadinska polja.

5 Zaključak

U ovome radu prošli smo kroz temeljitiju analizu aproksimacije geometrijske optike na primjeru propagacije elektromagnetskih i gravitacijskih valova u zakrivljenom prostor-vremenu i na primjeru pozadinskih polja nelinearne elektrodinamike u ravnome prostoru. Naglasak ovog rada je više bio na anlitičkom razumijevanju ove metode u raznim kontekstima. Na početku rada primijenili smo standardni pristup u izvodu temeljnih relacija koje se mogu naći u raznim znanstvenim radovima slične tematike. Ono što se u takvim radovima često izostavlja ili prešutno pretpostavlja, ovdje je temeljitije naglašeno i razjašnjeno. Tako smo standardni pristup upotpunili s dodatnim pristupom Hamiltonova formalizma u kojemu smo pokazali vezu sa metodom karakteristika iz teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Iako standardni pristup geometrijske optike daje matematički ispravnu asimptotsku analizu i asimptotski valjana rješenja pripadnih valnih jednadžbi, bilo je potrebno napraviti precizniju fizikalnu interpretaciju takvih rješenja. To se posebno vidi u potpoglavljima spinske geometrijske optike. Tu smo prikladnom fizikalnom interpretacijom značenja dodatnih faza, koje se javljaju pri propagaciji valova, izolirali efekt utjecaja cirkularne polarizacije na propagaciju vala. Usporednom analizom geometrijske optike elektromagnetskih i gravitacijskih valova ustanovili smo da su oba slučaja analogna, što može motivirati i daljnju generalizaciju na širu klasu valnih fenomena u gravitacijskoj fizici i šire. Svi opisani efekti elektromagnetskih i gravitacijskih valova u zakrivljenom prostor-vremenu su u potpunosti klasični efekti. Međutim u okviru formalizma klasične gravitacije i dalje je moguće tretirati kvantne efekte koji utječu na propagaciju valova. To smo prikazali u posljednjem poglavlju ovog rada, analizirajući efekt pozadinskih polja u vakuumu. Metodama kvantne elektrodinamike mogu se izvesti efektivne teorije koje su tada u pretpostavljenome rasponu energija primjenjive u okviru klasičnih metoda. Bavili smo se s općenitijim dvoparametarskim efektivnim lagranžijanima te opisali kako se tada općenito javlja efekt dvoloma analogan istom efektu u anizotropnim medijima klasične elektrodinamike.

Prezentirane metode i rezultati predstavljaju samo mali dio vrlo opsežne literature slične tematike u gravitacijskoj fizici. One se mogu primijeniti na raznim konkretnim fizikalnim primjerima. Primjerice, može se analizirati efekt spinske optike u raznim pozadinskim metrikama prostor-vremena, poput Schwarzshildove metrike u blizini

crnih rupa, Kerrove metrike rotirajućih crnih rupa ili nekih metrika kozmoloških modela svemira itd. Efekti nelinearne elektrodinamike mogu se analizirati u primjerima koji uključuju uvjete ekstremnih pozadinskih elektromagnetskih polja, primjerice kod neutronskih zvijezda. Potom se mogu razmatrati i općenitiji lagranžijani nelinearne elektrodinamike koji bi uključivali vezanje elektromagnetskih polja na zakrivljenost prostor-vremena, što se javlja u generalizaciji efekta polarizacije vakuuma u zakrivljenom prostor-vremenu. Potpunija analiza svakog od navedenih primjera tražila bi primjenu zahtjevnijih numeričkih metoda i analitičkih pristupa pa takve primjere nismo mogli sadržajno obuhvatiti u ovaj diplomski rad.

6 Metodički dio diplomskog rada: Hubble-Lemaitreov zakon i širenje svemira

6.1 Uvodna rasprava

U ovome dodatku diplomskoga rada izložen je primjer nastavne pripreme na temu: Hubbleov zakon i širenje svemira koji je u trenutnom kurikulumu gimnazijskoga programa predviđen za 4. razred. Nastavna priprema pisana je slijedeći trenutno propisane nastavne metode prema kurikulumu, tj. metode istraživački usmjerene nastave. Naša tema donekle se razlikuje od tipičnih sadržaja kurikuluma. Za većinu ostalih sadržaja gotovo uvijek je lako naći eksperimentalni pokus koji se dobro uklapa u zahtjeve nastavnih metoda istraživački usmjerene nastave. Zatim, većina sadržaja kurikuluma zamišljena je s ciljem stjecanja temeljnih kompetencija fizike koje bi se trebale dobro translatirati na ostale predmete te učenike pripremiti na zahtjeve njihova budućeg obrazovanja. Za većinu učenika tema širenja svemira možda i nije od osobitoga značaja za stjecanje temeljnih kompetencija primjenjivih u svakodnevnom životu stoga se obično u praksi pridodaje mala važnost toj temi. Često se prikaže u popularno-znanstvenom duhu ili obavi u obliku nekoga učeničkoga samostalnog istraživanja. Stoga se postavlja pitanje postoji li opravdanje za posvećivanja temeljitijega sata u nastavi prema ovoj temi? Za nas je posebno bitno znati da će učenički osobni stavovi prema znanosti, znanstvenim metodama i kritičkom načinu razmišljanja biti temeljeno i na iskustvu koje dobiju u susretu s ovakvim popularno-znanstvenim temama iz suvremene znanosti. Stoga je dobra ideja posvetiti jednaku pažnju takvim sadržajima kao i u ostalih djelovima kurikuluma.

U nastavku navodimo predmetne ishode, nastavne metode i oblike rada u izloženome satu.

PREDMETNI ISHODI:

FIZ SŠ D.4.8. Opisuje model nastanka i strukturu svemira

- Objašnjava nastanak i razvoj svemira.
- Izražava Hubbleov zakon.
- Navodi ekeperimentalne dokaze velikoga praska.
- Opisuje pojavu crvenoga pomaka.

FIZ SŠ D.4.8. Opisuje i primjenjuje osnovne ideje specijalne relativnosti (STR-a).

- Provjerava postulate STR na primjeru širenja svemira.

FIZ SŠ D.4.9.

- Kvalitativno zaključuje primjenjujući fizičke koncepte i zakone.
- Matematički modelira.

FIZ SŠ D.4.10.

- Istražuje prirodne pojave.
- Istražuje pojavu izvodeći učenički pokus.

NASTAVNE METODE:

- Učeničko izvođenje pokusa /mjerenja u skupinama
- Metoda razgovora - razredna rasprava
- Konceptualna pitanja s karticama
- Metoda pisanja /crtanja

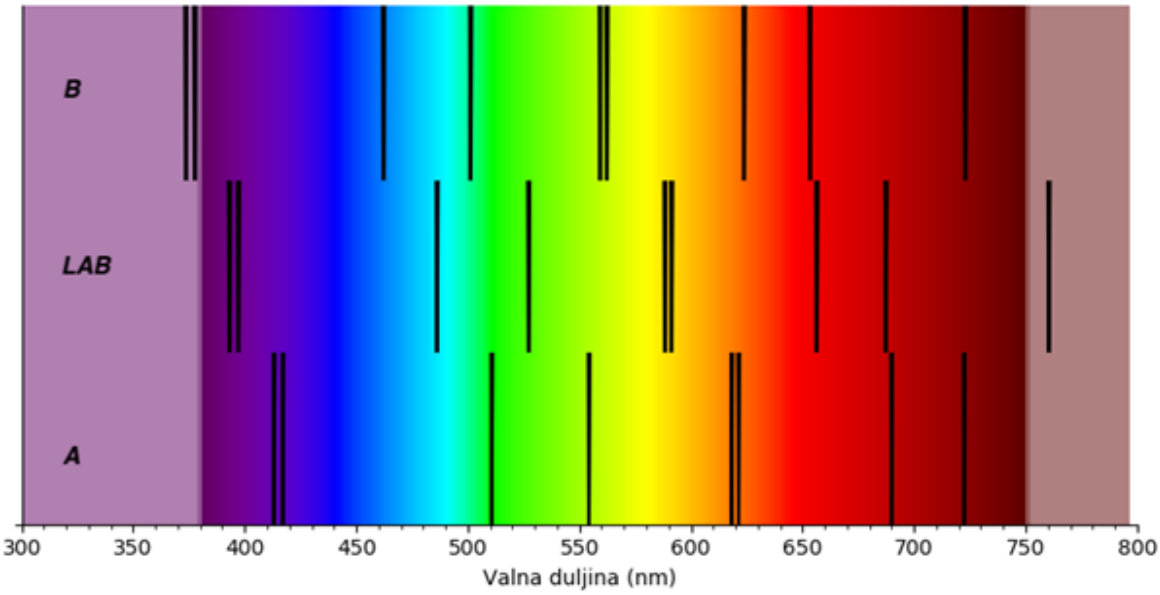
OBLICI RADA:

- Frontalni
- Individualni
- Rad u skupinama

NASTAVNA POMAGALA I SREDSTVA:

- Udžbenik, prezentacija
- Računalo, pribor za pokuse (baloni, metar), pisaći pribor

LITERATURA: [22], [23], [24], [25]



Slika 6.1: Spektar zvijezde.

6.2 *Tijek nastavnoga sata*

1) Uvodni dio sata

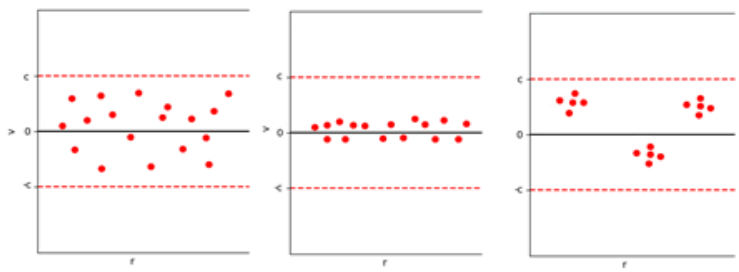
Prije izlaganja uvodnog eksperimentalnog problema koji je doveo do otkrića širenja svemira potrebno je s učenicima proći nekoliko ključnih pitanja.

Kako mjeriti brzinu udaljenih objekata u svemiru? Objekte u svemiru jedino možemo pasivno promatrati raznim teleskopima, a rasprava s učenicima ići će u smjeru određivanja brzine gibanja zvijezda i galaksija opažanjem njihova elektromagnetskoga zračenja. Učenici će vjerojatno povući vezu s Dopplerovim efektom.

Na Slici 6.1 prikazani su spektri zvijezda A i B uspoređeni sa spektrom mirujuće zvijezde čiji spektar prikazuje zvijezdu koja se udaljava? Na spektru A vidimo da su sve apsorpcijske linije istog uzorka kao i laboratorijski spektar, ali su pomaknute prema crvenom dijelu spektra, odnosno linije su se pomakle ka većim vrijednostima valne duljine. Prema Dopplerovom efektu to odgovara zvijezdi koja se udaljava.

Kako biste mjerili udaljenost objekata u svemiru?

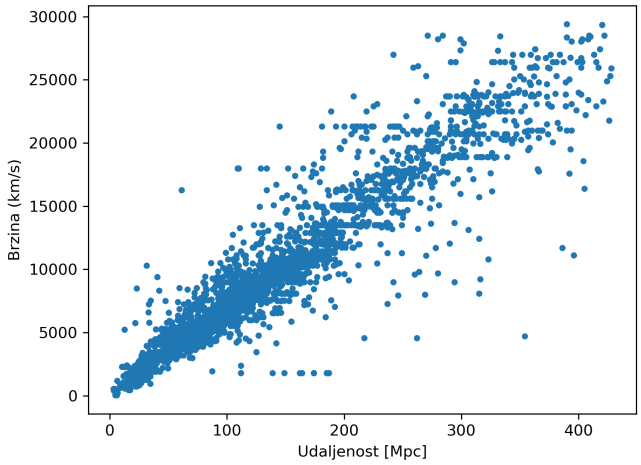
Možemo očekivati učeničke odgovore temeljene na svakodnevnom iskustvu, primjerice, udaljeni objekt imat će manju mjerenu kutnu veličinu, ili će predlagati razne aktivne metode mjerenja, primjerice radarom itd. Za jako udaljene objekte u svemiru teško je koristiti iskustvo koje imamo s relativno bliskim objektima. Za takve objekte možemo mjeriti intenzitet njihova zračenja. Dodatno znamo da intenzitet zračenja



Slika 6.2: Moguća učenička predviđanja.

opada o kvadratu udaljenosti. Kada bismo znali odrediti apsolutni sjaj zvijezde ili galaksije, tj. ”laboratorijski” sjaj, kada bismo se nalazili blizu zvijezde” onda bismo mogli odrediti udaljenost. Zvijezde ili procese u svemiru za koje znamo odrediti apsolutni sjaj zovemo ”kozmičkim” svijećama. Primjer kozmičkih svijeća su zvijezde cefeide čiji intenzitet zračenja oscilira s nekim periodom. Apsolutni sjaj zvijezde povezan je sa njezinim periodom oscilacija, tako da mjerenjem perioda oscilacija možemo ujedno odrediti udaljenost takve zvijezde. Postoje brojne druge metode u opažačkoj kozmologiji za mjerenje udaljenosti, ali za učenike je dovoljno deskriptivno poznavati metodu sa cefeidama.

Postavljamo eksperimentalni problem: određujemo sve relativne položaje okolnih galaksija prema Zemlji metodom cefeida (tj. za koje je moguće pronaći cefeide preko kojih možemo odrediti udaljenosti), zatim za svaku galaksiju mjerimo njezin spektar i određujemo pomak valnih duljina prema laboratorijskom spektru i time odredimo njihove brzine. Mjerene podatke unosimo u $v - r$ graf u kojem svaka točka mjerenja predstavlja mjerenu galaksiju na položaju r s brzinom v. **U v-r grafu ucrtavanjem točaka dajte svoje predviđanje mjerenja koje bi dobili u takvome eksperimentu.** Prikupljamo učeničke ideje i crtamo sve razumne prijedloge. Na Slici 2 su prikazani očekivani prijedlozi koje bi učenici mogli dati. Grafovi u koje bi učenici ucrtavali točke potrebno je naznačiti linije koje označavaju brzine svjetlosti. Svi prikazani grafovi imaju točke unutar linija koje označavaju granice brzine svjetlosti. Očekujemo da će učenici shvaćati gibanje galaksija isključivo kao lokalno gibanje ograničeno s maksimalnom brzinom svjetlosti u specijalnoj teoriji relativnosti. Graf slijeva bi predstavljao model u kojem se galaksije gibaju nasumično poput čestica plina, moguće je da će učenici preferirati distribuciju radijalnih brzina koja je više koncentrirana oko v=0, te će smatrati veće brzine manje vjerojatnim. Središnji graf predstavlja situaciju u kojoj bi sve galaksije uglavnom mirovale u odnosu na nas. Graf zdesna predstav-



Slika 6.3: Mjerenja crvenoga pomaka.

lja model velike nehomogenosti u kojem bi galaksije bile raspoređene po grupama, gdje se svaka grupa giba nekom zajedničkom brzinom. Moguće je da će učenici dati i razne nekonzistentne modele koji se ne slažu s njihovim grafovima. Cilj je ovdje povesti raspravu i pomoći učenicima da ispravno prezentiraju svoje prijedloge i ispravno ih povežu s predviđanjem mjerenja.

Usporedite grafove vaših predviđanja sa stvarnim mjerenjima. Prikazujemo rezultate iz NED (NASA Extragalactic Database) baze podataka [25] u kojoj se nalaze sva službeno objavljena mjerenja sa zadnjom izmjenom u 2020. godini. Iz navedene baze preuzeli smo samo podatke o udaljenost i crvenim pomacima. Na grafu su prikazani filtrirani podaci za mjerenja preko metode cefeida i sa udaljenostimo do 400 Mpc.

Navedite sve bitne karakteristike grafova.

Od učenika očekujemo da prepoznaju sljedeće bitne karakteristike grafa:

- sve točke mjerenja pokazuju pomak prema crvenom, dakle sve galaksije se udaljavaju
- mjerene točke pokazuju trend porasta brzine udaljavanja s udaljenosti
- rasap točaka se povećava na većim udaljenostima

Kako objašnjavate činjenicu da se sve galaksije udaljavaju od nas? Dajte svoje prijedloge modela svemira koji bi mogao opisati ovu pojavu. Neizgledno je objasniti ovu pojavu s tumačenjem da smo se baš našli na pravome mjestu u svemiru koji

	Udaljenost nakon	Udaljenost prije	Promjena udaljenosti
Galaksija 1	59 mm	32 mm	27 mm
Galaksija 2	110 mm	60 mm	50mm
Galaksija 3	196 mm	110 mm	86 mm

Slika 6.4: Mjerenja učeničkog pokusa.

bi bio centar širenja svih galaksija. Očito da je mjereni crveni pomak posljedica posve drugoga mehanizma, a ne lokalnoga gibanja galaksija u prostoru. Dakle, ispravan bi model trebao biti onaj koji nema centra širenja galaksija, odnosno onaj u kojem bi opažač u svakoj točki prostora utvrdio da je spektar svih galaksija uvijek pomaknut prema crvenom. Kako je tema vrlo popularna, učenici će vrlo vjerojatno predložiti model širenja svemira.

2) Središnji dio sata

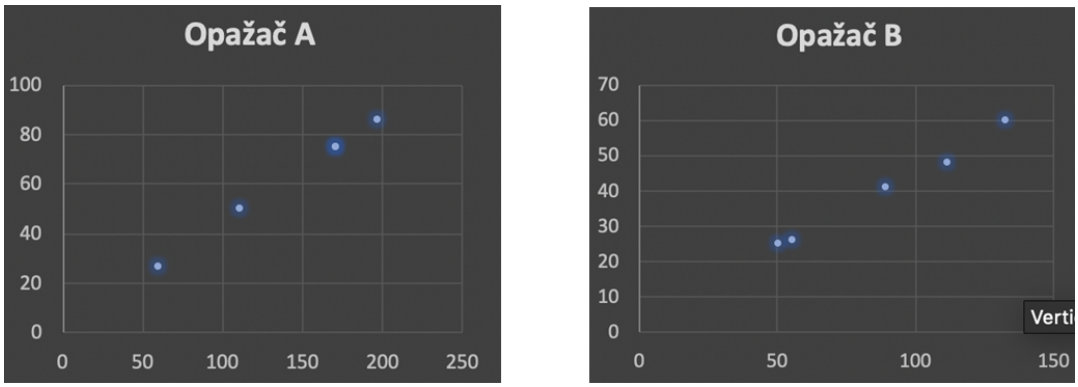
ISTRAŽIVAČKO PITANJE: Kako ovisi brzina udaljavanja galaksija o udaljenosti u modelu širenja svemira?

Ispitat ćemo model širenja svemira analogijom balona koji se širi, i to pomoću učeničkoga pokusa koji će se izvoditi po grupama. Na balonu proizvoljno označimo točke koje će nam predstavljati galaksije. Površina balona predstavlja dvodimenzionalni prostor. Upuhivanjem zraka u balon možemo „simulirati“ širenje svemira.

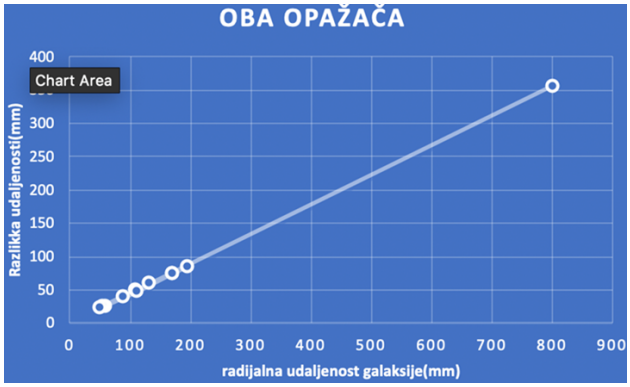
Zadatak za učenike: Odaberite proizvoljnu galaksiju iz koje ćete „promatrati“ svemir. Simulirajte širenje svemira upuhivanjem zraka u balon. Vaš je zadatak izmjeriti kako ovisi brzina udaljavanja galaksija o udaljenosti od promatrača. Podatke zapišite u tablicu i prikažite ih grafički.

Očekujemo od učenika da obave pokus na sljedeći način: da bismo izmjerili brzinu udaljavanja galaksija potrebno je uzeti dva sukcesivna vremenska trenutka između širenja balona. To znači da mjerimo udaljenosti za dva različita napuhnuta stanja balona. Između dva napuhnuta stanja možemo uzeti proizvoljno vremensko razdoblje. Brzinu udaljavanja dobivamo jednostavno kao kvocijent promjene udaljenosti i vremenskog intervala.

Odaberite sada drugog opažača i obavite ista mjerenja. Nakon mjerenja učenici



Slika 6.5: Graf opažača A i B.



Slika 6.6: Oba opažača.

dobivaju dva grafa koji prikazuju ovisnost promjene udaljenosti o udaljenosti od promatrača.

Iz grafova zaključite kakva je ovisnost brzine udaljavanja o udaljenosti.

Vidimo da su grafovi linearni i možemo ih produžiti i uvjeriti se da se pravci sijeku u ishodištu, dakle vidimo proporcionalnu ovisnost promjene udaljenosti o udaljenosti promatrača, brzina udaljavanja ovisi proporcionalno o udaljenosti!

Superponirajte grafove oba opažača. Što sada zaključujete?

Točke se od oba promatrača nalaze se na istome pravcu, dakle svi promatrači na balonu vide istu brzinu udaljavanja galaksija s istom konstantom proporcionalnosti.

Usporedite svoje rezultate mjerenja sa stvarnim rezultatima mjerenja galaksija. Zašto su stvarna mjerenja više raspršena?

Raspršenost mjerenja proizlazi iz činjenice da galaksije imaju neku lokalnu brzinu u prostoru. Vidimo da su lokalne brzine slučajno raspoređene, tako da ako korigiramo na dodatne brzine, preostao bi nam čisti linearni graf kao u našemu pokusu. Druga mogućnost je i veća neodređenost mjerenja pri većim udaljenostima.

Kako biste matematički najbolje opisali ovisnost brzine galaksija o udaljenosti?

Zaključak: brzina udaljavanja galaksija ovisi o udaljenosti od opažača kao

$$v = H_0 r \tag{6.1}$$

što se zove Hubble-Lemaitreov zakon. U stvarnim mjerenjima konstanta proporcionalnosti zove se Hubbleova konstanta i razne metode mjerenja daju različite vrijednosti Hubbleove konstante koje se kreću u rasponima od približno $67\frac{km}{sMpc}$ do $74\frac{km}{sMpc}$ (1 pc = 3.26 s.g.)

Što bi u modelu širenja svemira dao uzrok pomaka valnih duljina prema crvenom?

Ako se prostor širi, možemo očekivati da će se valne duljine fotona također proširiti tijekom propagacije. Time bi crveni pomak morali pripisati posve drugom mehanizmu širenja svemira, a ne lokalnoga gibanja.

Za jako udaljene galaksije Hubble-Lemaitreov zakon daje da bi galaksije mogle imati brzinu udaljavanja koja je veća od brzine svjetlosti. Je li to moguće?

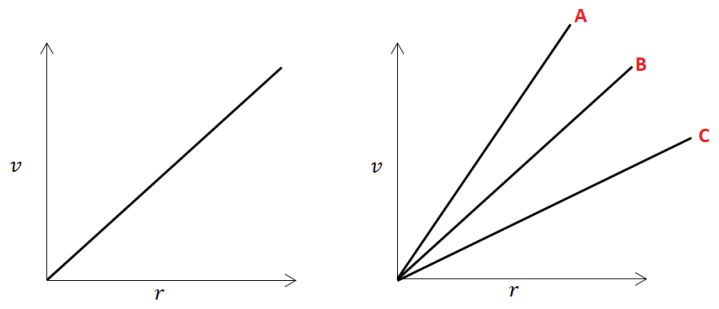
Učenici bi mogli uočiti kako je ovo naizgled kontradiktorno sa postulatima specijalne teorije relativnosti. Međutim, kako uzrok crvenoga pomaka nije lokalno gibanje već širenje samoga prostora, takav rezultat je sasvim moguć.

Hubble-Lemaitreov zakon sugerira da su se sve galaksije morale nalaziti u nekom trenutku beskonačno blizu jedna drugoj. Odredite kada se taj trenutak zbio.

Učenici mogu time procijeniti starost svemira preko Hubbleove konstante $t = 1/H_0$. Za kraj se može diskutirati činjenica kako ovaj zakon daje temeljni eksperimentalni dokaz teorije velikoga praska.

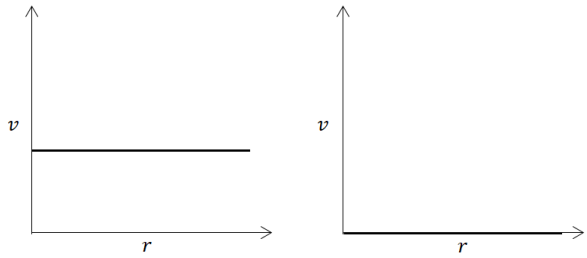
3) Završni dio sata

1) Na slici lijevo je izgled grafa mjerenih brzina udaljavanja galaksija u ovisnosti o udaljenosti kakve mjerimo danas. Odredite na slici desno ispravan izgled istoga grafa u puno kasnijem vremenskom trenutku evolucije svemira.



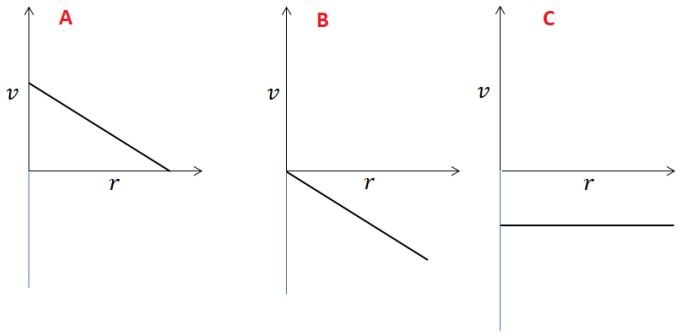
Slika 6.7: Koncept 1.

2) Odaberite ispravan graf koji opisuje model statičnoga svemira koji se ne širi.



Slika 6.8: Koncept 2.

3) Odaberite ispravni graf modela svemira koji se skuplja.



Slika 6.9: Koncept 3.

Bibliography

[1] Misner, C.W.;Thorne, K.S.; Wheeler, J.A. Gravitation. 1st ed. San Francisco: W.H. Freeman And Company, 1973.

[2] Wald, R.M. General Relativity. 1st ed. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.

[3] Carroll, S. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Pearson New International Edition, 2014.

[4] Oancea, M.A.; Joudioux, J.; Dodin, I.Y.; Ruiz, D.E.; Paganini, C.F.; Andersson, L. Gravitational spin Hall effect of light. // Phys. Rev. D 102, 024075 (2020)

[5] Andersson, L.; Joudioux, J.; Oancea, M.A.; Raj, A. Propagation of polarized gravitational waves. // Phys. Rev. D 103, 044053 (2020)

[6] Frolov, V.P. Maxwell equations in a curved spacetime: Spin optics approximation. arXiv e-Print gr-qc/2007.03743 (2020)

[7] Frolov, V.P.; Shoom A.A. Spinoptics in a stationary spacetime. // Phys. Rev. D 84, 044026 (2011)

[8] Dahal, P.K. Spin optics for gravitational waves. arXiv e-Print gr-qc/2107.02761 (2020)

[9] Chul-Moon Yoo. Notes on spinoptics in a stationary spacetime. // Phys. Rev. D 86, 084005 (2012)

[10] Shoom, A.A. Gravitational Faraday and Spin-Hall Effects of Light. // Phys. Rev. D 104, 084007 (2021)

[11] Dolan, S.R. Geometrical optics for scalar, electromagnetic and gravitational waves on curved spacetime. // International Journal of Modern Physics D Vol. 27, No. 11, 1843010 (2018)

[12] Novello, M.; De Lorenci, V.A.; Salim, J.M.; Klippert R. Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics. // Phys. Rev. D 61, 045001 (2000)

[13] De Lorenci, V.A.; Klippert R.; Novello M.; Salim, J.M.. Light propagation in non-linear electrodynamics. // Phys.Lett. B482 (2000) 134-140

[14] Visser, M.; Barcelo, C.; Liberati, S. Birefringence versus bimetricity. // arXiv e-Print gr-qc/0204017 (2003)

[15] Bialynicka-Birula, Z.;Bialynicka-Birula, I. Nonlinear Effects in Quantum Electrodynamics. Photon Propagation and Photon Splitting in an External Field. // Phys. Rev. D 2, 2341 (1970)

[16] Anile, A. M. Geometrical optics in general relativity: A study of the higher order corrections. // J. Math. Phys. 17, 576 (1976)

[17] Born, M.; Wolf W. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. Elsevier, 2013.

[18] Kravtsov, Y.A.; Orlov Y.I. Geometrical Optics of Inhomogeneous Media. Springer Berlin Heidelberg, 1990.

[19] Singer, W.;Totzeck, M.; Gross H. Handbook of Optical Systems, Volume 2: Physical Image Formation. Wiley, 2006.

[20] Evans, L.C. Partial Differential Equations. 2nd ed. American Mathematical Society, 1998.

[21] Drummond, I. T.; Hathrell, S. J. QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons. // Phys. Rev. D 22, 343 (1980)

[22] Labor, J. Fizika 4, udžbenik za 4-razred gimnazije. Alfa, 2014.

[23] Paar, V. Fizika 4, udžbenik za 4-razred gimnazije. Školska knjiga, 2009.

[24] Wallace, C.S.; Prather, E.E. Teaching physics with Hubble's law and dark matter. // American Journal of Physics 80, 382 (2012)

[25] NED $https://ned.ipac.caltech.edu/Library/Distances/$, 1.2.2022.