

# Diferencirana nastava matematike

---

Mihaljević, Tea

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:867862>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-20**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Tea Mihaljević

**DIFERENCIRANA NASTAVA**  
**MATEMATIKE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Ana Prlić  
Suvoditelj rada:  
doc. dr. sc. Daria Rovanić

Zagreb, ožujak, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Bogu hvala i slava! Hvala Mu na silnoj ljubavi s kojom me stvorio ovakvu kakva jesam, s kojom me vodio kroz svaki trenutak mog života i usmjeravao da postignem sve što sam do sada postigla. Hvala Mu na svim ljudima kroz koje me oblikovao! Hvala mojoj obitelji što su me odgojili i usmjerili da postanem ono što želim, što su mi sve omogućili, što su mi iskazivali podršku i vjerovali da će ishod uvijek biti: "Mijaljević prošlo!". Hvala sestri što me uvijek podsjećala što je zapravo bitno. Hvala Karli na posebnom prijateljstvu koje me pratilo sve ove godine, na svim uspomenama, na svakom dolasku i odgođenom odlasku kući, a posebno na radosti, iskrenosti, povjerenju i podršci. Hvala Žigi, Ani, Ana Mariji i Sušiju, mojoj zagrebačkoj obitelji, što su me na ovom putu podržavali, kako riječima, tako i molitvom. Hvala im što su vjerovali u mene i proživljavali uspone i padove sa mnom, radovali se sa mnom, tješili me i hrabрили, a uz sve to oblikovali i poticali da budem bolja osoba. "Ispiši se s faksa" ipak nije uspjelo! Hvala Anji i Ivani na prekrasnom suživotu u studentskoj sobici, na tome što su na mene svojim učenjem naglas pobudili interes i prenijeli znanje i ljubav prema učenicima s posebnim odgojnim-obrazovnim potrebama, i na svemu nezaboravnom što smo radili da preživimo ispitne dane. Posebno hvala mom bff-u Luki, čoviku po kojem je Bog posebno djelovao, koji je uvijek bio u pravo vrijeme na pravom mjestu s pravim riječima. Hvala svojoj mojoj djeci koja su mi donosila radost i naučila me da ljubim. Hvala svima onima koji su na bilo koji način bili dio mog studentskog života. Hvala mojim mentoricama na zainteresiranosti, dostupnosti, strpljenju, razumijevanju i usmjeravanju.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>9</b>
<b>1 Istraživanje iskustava nastavnika matematike u radu s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju</b>	<b>10</b>
1.1 Cilj i metodologija istraživanja . . . . .	10
1.2 Sudionici . . . . .	11
1.3 Postupak . . . . .	11
1.4 Rezultati . . . . .	12
1.5 Rasprava . . . . .	27
1.6 Zaključak . . . . .	29
<b>2 Konkretni prijedlozi za poučavanje učenika s posebnim odgojno-obrazovnim potrebama</b>	<b>31</b>
2.1 Aritmetika . . . . .	31
2.2 Analitička geometrija . . . . .	38
2.3 Stereometrija . . . . .	45
2.4 Zadatci riječima . . . . .	53
<b>Prilozi</b>	<b>60</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>61</b>

# Uvod

Diferencirana ili razlikovna nastava jedan je od oblika socijalne nastave u kojem učenik u određenoj mjeri radi samostalno. Ovakav oblik nastave podrazumijeva inkluzivno okruženje i didaktičko-metodički pristup u provođenju nastave, stavljajući naglasak na uvažavanje razlika među učenicima na pojedinim područjima razvoja. U provedbi diferencirane nastave brine se o konkretnoj situaciji u razredu te se nastoje optimalno istaknuti sposobnosti učenika. Činjenica da je svaki učenik jedinka za sebe, sa svojim osobinama, intelektom, sposobnostima i interesima, opravdava potrebu za provođenjem diferenciranog oblika nastave. Osobitosti svakog učenika na područjima sposobnosti ogledaju se kao odgojno-obrazovne potrebe učenika za odgovarajućom potporom: ili programskom i/ili didaktičko-metodičkom, u svim etapama nastavnoga procesa. Programska potpora se pruža u planiranju učeniku primjerenih ciljeva poučavanja i učenja sadržaja problemskih nastavnih predmeta, dok didaktičko-metodička potpora obuhvaća planiranje primjerenih strategija rada (metode, oblici, situacije) i aktivnosti poučavanja i školskog učenja. [24]

Planiranje poučavanja počinje razmišljanjem o željenim ishodima učenja, a manifestira se u odabiru sadržaja i ciljeva učenja. Učenicima je bitno dati uvid u to što će učiti i kada, objasniti im zašto je to važno te im dati do znanja što se od njih očekuje i kako to najbolje mogu postići. Potpora u odabiru sadržaja i ciljeva poučavanja uključuje određivanje sadržaja za poučavanje i učenje, određivanje učenicima dostižnih ciljeva poučavanja i učenja ili određivanje mogućeg zamjenskog kurikula [24].

Planiranje strategija poučavanja i učenja sukladno učenikovim potrebama omogućuje da učenik najbolje razumije sadržaj, zapamti ga, iskaže znanje koje je stekao i na taj način izgradi pozitivnu sliku o sebi. U radu nastavnika, tome pridonosi korištenje metoda, sredstava i oblika rada koji najbolje odgovaraju stilu učenja pojedinog učenika. Potpora u ovom obliku očituje se u primjeni metoda, strategija i oblika rada, u postavljanju zahtjeva, posredovanjem u nastavnom procesu te u aktivnostima školskog učenja. [24]

Potpora koja se pruža u praćenju, vrednovanju i ocjenjivanju postignuća učenika temelji se na tome da se procjenjuje uspješnost učenika s obzirom na postavljene ishode. Osim što je bitno pratiti napredak učenika, važno je i posvetiti se pripremi ispita: vrijeme ispita, način ispitivanja te što se od učenika očekuje. Kod provođenja ispita, važno je obratiti pozornost na didaktičko-metodičku potporu koja uključuje: provjeru sadržaja po manjim cjelinama,

manji broj zadataka, češću provjeru ispravnosti uratka, usmjeravanje na uočavanje mogućih pogrešaka, češće usmene provjere, produljeno vrijeme rada i poticanje na samokontrolu ispravnosti uratka. [24] Ocjenjivanje kao povratna informacija o postignućima i ishodima učenja treba biti pouzdano, transparentno i pravedno, a uz to treba služiti i kao poticaj za daljnje učenje.

Diferencirana nastava matematike važna je za što bolji napredak učenika, upravo zato što uvažava razlike među učenicima, potiče razvoj sposobnosti učenika, pa tako i matematičkih, te omogućuje podjednak razvoj svih učenika. Nastava se može bolje i učinkovitije organizirati, a ovakva struktura razbija monotonost i jednoličnost, što samu nastavu čini zanimljivijom i lakše shvatljivom.

Postoje razni oblici diferencirane nastave: rad u homogenim grupama, rad u nehomogenim grupama, timski rad i individualni rad. [25]

Rad u homogenim grupama odnosi se na grupiranje učenika po njihovim sposobnostima, primjerice grupiranje učenika u tri grupe: manje uspješni učenici, uspješni učenici, vrlo uspješni učenici. U takvom radu svaka grupa dobiva primjerene zadatke u odnosu na svoje znanje, što omogućava aktivnost svih učenika i odmjerenu brzinu znanja. Mana ovakvog grupnog rada jest da pretpostavka o sposobnosti učenika određuje njegovo postignuće, a i učenici se ne uspoređuju s boljima od sebe, što možda sprječava njihov napredak.

Kod rada u nehomogenim grupama broj grupa ili broj učenika po grupama nije fiksno određen, a zadatci koji se zadaju mogu biti različiti. Najčešće grupe sadrže 4 do 6 učenika i njihov sastav se ne mijenja često. Objedinjuje se individualni rad, a grupe rade približno istim tempom.

Timski rad karakterizira manja grupa ljudi koji imaju različita znanja i vještine koje se međusobno nadopunjuju, rade i individualno i zajedno kako bi ostvarili cilj, a imaju definirane uloge u timu. Karakteristike dobrog i uspješnog tima su: jasno i transparentno definirani opći i specifični ciljevi, dobro raspoređena pojedinačna i zajednička odgovornost, poštivanje razlika, otvorena komunikacija, efikasno donošenje odluka, konstruktivno rješavanje konflikata i međusobno povjerenje.

Pri individualizaciji posebno se stavlja naglasak na uvažavanje osobina učenika, a osobito na mišljenje, pamćenje, sluh, motivaciju, vid i osobine ličnosti. [2] Kao rezultat tih različitosti kod učenika javljaju se različite individualne brzine usvajanja istog nastavnog sadržaja. Neke mogućnosti individualizacije nastave su: programirana nastava, mentorska nastava, problemska nastava, dopunska nastava (manje uspješni učenici), dodatna nastava, izborna i fakultativna nastava (vrlo uspješni učenici), matematičke i informatičke grupe.

Ovakav oblik nastave svakako ima brojne prednosti, a posebno koristi u obrazovanju učenika s posebnim odgojno-obrazovnim potrebama.

## Učenici s posebno odgojno-obrazovnim potrebama

Učenici s posebnim odgojno-obrazovnim potrebama su učenici kojima je potrebna posebna pomoć i resursi kako bi u obrazovnom okruženju mogli ostvariti svoje pune potencijale, a uključuje darovite učenike i učenike s teškoćama. Neki od tih učenika mogu pripadati i jednoj i drugoj skupini, tzv. dvostruko posebni učenici. U ovom radu fokus će biti na darovitim učenicima i učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju (disleksija, disgrafija, diskalkulija).

Postoje razne definicije **darovitosti** koje su usmjerene na različite aspekte tog pojma. Po tim aspektima, razlikuju se definicije usmjerene na urođenost, definicije usmjerene na kognitivne modele, definicije usmjerene na postignuće te definicije na sustavskim pristupom. Svaki od navedenih pristupa ima znanstveno utemeljenje, te na osnovu toga prijedloge za rad s darovitim učenicima. [40] Prema [38] (prema [24]) postoje neke zajedničke točke svim pristupima:

- darovitost je više od samog kvocijenta inteligencije
- darovitost se sastoji od kognitivnih i nekognitivnih činitelja
- okolina je ključna za realizaciju darovitosti
- postoje različiti oblici darovitosti, ona nije jedinstven konstrukt
- načini identifikacije darovitih bi trebali provjeravati teorije.

Prema [31], darovitost se definira kao skup osobina koji učeniku omogućavaju trajno postignuće iznadprosječnih rezultata u jednom ili više područja ljudske djelatnosti, a uvjetovano je visokim stupnjem razvoja pojedinih sposobnosti, osobnom i vanjskom motivacijom. Prema sposobnostima, područja darovitosti dijele se na:

1. opće intelektualne sposobnosti
2. stvaralačke (kreativne) sposobnosti
3. sposobnosti za pojedina nastavna i znanstvena područja
4. socijalne i rukovodne sposobnosti
5. sposobnosti za pojedina umjetnička područja
6. psihomotorne sposobnosti.



Identifikacija darovitih učenika opisuje se kao utvrđivanje identiteta i stupanj darovitosti učenika. To je vrlo dinamičan i kontinuiran proces, s obzirom na to da se različite vrste darovitosti mogu pojaviti u različito doba kod pojedinaca. Postupci identifikacije trebali bi biti temeljeni na znanju o darovitosti i metodama, a moraju biti dinamički, kontinuirani i nepristrani. Sva područja darovitosti trebala bi biti obuhvaćena, uključujući ranu identifikaciju i identifikaciju na svim razinama učeničkog razvoja. Identifikacija se vrši u tri etape: nominacija, provjeravanje, nadgledanje. [44] Nominacija je prvi korak koji mogu provesti učitelji, roditelji i ostali članovi edukacijske zajednice, a tijekom nominacije prikupljaju se subjektivni podatci. U fazi provjeravanja provode se različiti mjerni testovi koji daju objektivniju sliku. U trećem koraku nadgledanja prati se učenika i prikupljaju se informacije o postignućima, interesima, sposobnostima, jačim i slabijim stranama učenika. Uočavanje, utvrđivanje i procjenjivanje darovitosti učenika je stručan i kontinuiran proces kojeg obavljaju učitelji i stručni suradnici škole, uzimajući u obzir mišljenja roditelja, odgajatelja u dječjim vrtićima i učitelja u nižim razredima osnovne škole. [31] Na osnovu toga, stručni tim utvrđuje kod učenika darovitost za jedno ili više od gore spomenutih područja. U svrhu poticanja razvoja darovitih učenika, osnovna škola bi trebala omogućiti:

1. rad po programima različite težine i složenosti za sve učenike opće intelektualne sposobnosti
2. izborne programe
3. grupni i individualni rad
4. rad s mentorom
5. raniji upis
6. akceleraciju ili završavanje osnovnog obrazovanja u kraćem vremenu od propisanog
7. izvannastavne i izvanškolske aktivnosti
8. kontakte sa stručnjacima iz područja interesa
9. pristup izvorima specifičnog znanja.

**Učenici s teškoćama** su učenici koji imaju teškoće u odgojno-obrazovnom procesu zbog: [24]

- međudjelovanja dugotrajnih tjelesnih, mentalnih, intelektualnih ili osjetilnih oštećenja s preprekama iz okoline koje sprječavaju učenikovo potpuno i učinkovito sudjelovanje u odgojno-obrazovnom procesu

- međudjelovanja privremenih i dugotrajnih teškoća učenja, emocionalnih poremećaja te poremećaja ponašanja s preprekama iz okoline koje sprječavaju učenikovo potpuno i učinkovito sudjelovanje u odgojno-obrazovnom procesu
- međudjelovanja odgojnih, socijalnih, ekonomskih, kulturalnih i jezičnih čimbenika s preprekama iz okoline koje sprječavaju učenikovo potpuno i učinkovito sudjelovanje u odgojno-obrazovnom procesu.

Prema članku 65. Zakona o odgoju i obrazovanju u osnovnoj i srednjoj školi [5], učenicima s teškoćama smatraju se tri skupine učenika: učenici s teškoćama u razvoju, učenici s teškoćama u učenju, učenici s problemima u ponašanju i emocionalnim problemima, te učenici s teškoćama uvjetovanim odgojnim, socijalnim, ekonomskim, kulturalnim i jezičnim čimbenicima.

Prema edukacijsko-rehabilitacijskoj stručnoj terminologiji, teškoće koje razlikujemo su: oštećenja vida, oštećenja sluha, poremećaji glasovno-jezično-govorne komunikacije, motorički poremećaji i kronične bolesti, intelektualne teškoće, poremećaj pažnje/hiperaktivnost, specifične teškoće učenja, poremećaji u ponašanju i emocionalni poremećaji, poremećaji iz spektra autizma. [24]. Kao naječešće teškoće pojavljuju se specifične teškoće u učenju, a zatim poremećaj pažnje/hiperaktivnost (ADHD) i poremećaji iz spektra autizma. S obzirom na učestalost specifičnih teškoća u učenju, detaljno ćemo se osvrnuti na njih.

**Specifične teškoće u učenju** su teškoće u jednom ili više temeljnih psiholoških procesa koji su uključeni u razumijevanje ili korištenje jezika i mogu se očitovati u smanjenoj sposobnosti čitanja, pisanja ili matematičkih vještina. S obzirom na to unutar koje se vještine javlja teškoća, razlikujemo disleksiju, disgrafiju i diskalkuliju. Disleksiju karakteriziraju teškoće u čitanju, disgrafiju teškoće u pisanom izražavanju, a diskalkuliju teškoće u matematici. Prema klasifikaciji DSM-5 [1], specifične teškoće u učenju su teškoće u učenju i korištenju akademskih vještina, koje se očituju u prisutnosti najmanje jednog od navedenih simptoma koji traju najmanje 6 mjeseci, unatoč intervencijama koje su usmjerene na prevladavanje tih teškoća:

1. netočno ili sporo ili teško čitanje riječi
2. teško razumijevanje značenja onoga što pročita
3. teškoće u slovkvanju
4. teškoće s pismenim izražavanjem
5. teškoće u svladavanju pojma broja ili u računanju
6. teškoće u matematičkom rezoniranju

Specifične teškoće u učenju zovu se specifične zato što se ne mogu bolje objasniti nekim drugim teškoćama: nisu vezane uz intelektualnu onesposobljenost ili intelektualni razvojni poremećaj kao niti uz poremećaje vida ili sluha, neurološke ili motoričke poremećaje.

Prema [36], disleksija se definira kao različitost u načinu obrade i obilježavaju je teškoće u stjecanju pismenosti koje se odražavaju na čitanje, pisanje i sricanje. Disleksija tako može imati utjecaja na kognitivne procese, kao što su pamćenje, brzina obrade, vremensko upravljanje, koordinacija i automatizacija. Kod djece s disleksijom prije početka školovanja primjećuje se da teže prate ritmičke igre i teže uče pjesmice u rimi, da ne sudjeluju rado u slušanju i prepričavanju priča. U školskoj dobi, disleksija se manifestira u:

- neprepoznavanju grafema, otežanom pamćenju grafema
- miješanju grafema - fonema (P, B; Z, S; p,b,d; m,n,u; z,s; c,č,ć; s,š; z,ž; lj,nj; a,o)
- ispuštanju grafema ili fonema pri pisanju ili čitanju (pravo - prvo), zamjeni (kotač - kolač; domar - modar) i dodavanju (kriv - krivo) fonema ili slogova
- zrcalnom pisanju
- slovkanjem pri čitanju
- čitanju i pisanju napamet (dovršavanje riječi po prvom slovu ili slogu)
- nerazumijevanju pročitano g i nemogućnosti odgovaranja na pitanja o tekstu ili prepričavanja sadržaja
- u rukopisu i pravopisu.

U nastavi matematike, učenici s disleksijom mogu imati dobre rezultate, dobre matematičke sposobnosti i razumjeti određene matematičke koncepte, ali pri interpretaciji pitanja često čine pogreške u sljedećim primjerima [22]:

- zamjena simbola
- slabije znanje matematičkog rječnika
- nerazumijevanje uputa i zadataka
- teškoće pri uvođenju određenih slova u algebri („b”, „d”, „p”, „q”)
- teškoće u imenovanju matematičkih simbola i geometrijskih likova
- teškoće u učenju, pamćenju i reproduciranju tablica (tablica množenja).

Disgrafija je nemogućnost djeteta u svladavanju vještine pisanja, koja se da primijetiti u tipičnim pogrješkama koje su trajno zastupljene. Neke od tipičnih pogrješaka su teškoće u sricanju, nečitak rukopis, pisanje u suprotnom smjeru, zamjena malog i velikog slova te problem oblikovanja misli u pisanoj formi. U predškolskoj dobi, disgrafija se može uočiti u nepravilnom držanju olovke i nepravilnom držanju tijela prilikom pisanja, te u nevoljkom sudjelovanju u aktivnostima crtanja, pisanja i bojanja. Najčešća obilježja disgrafije su [9]:

- nepravilan hvat olovke
- izbjegavanje pisanja
- nečitak rukopis
- miješanje grafema (velikih i malih, tiskanih i pisanih)
- nedosljedan razmak između grafema i riječi
- nedovršeni grafemi, riječi i rečenice
- ispuštanje grafema, slogova, riječi i cijelih rečenica
- teškoće organiziranja misli i prenošenja u pisani oblik.

Disgrafija ima utjecaja na usvajanje matematičkog sadržaja, a problemi koji se pojavljuju su [30]:

- zrcalno pisanje znamenki i slova
- proceduralne pogrješke
- nedovršeni likovi (linije ostaju otvorene)
- učenik jedno zapisuje, a drugo čita
- razvrstavanje predmeta prema obliku, veličini ili boji
- teškoće u pismenom računanju koje zahtijeva tablice mjesne vrijednosti.

Diskalkulija se definira kao *djelomičan poremećaj procesa usvajanja matematike, koji se može pojavljivati u svim ili samo određenim područjima matematike*. [30] Učenik s diskalkulijom napreduje u svladavanju matematičkih sadržaja i koncepata, ali znatno No comments Hit Enter to reply Current file Overview 134 sporije u odnosu na svoje vršnjake i neprikladno u odnosu na svoju mentalnu dob. Česte pogrješke kod učenika s diskalkulijom su [30]:

- parafazične supstitucije (neispravna upotreba brojeva pri čitanju, pisanju i računanju)

- perseveracije (nemogućnost prelaska na novu radnju, tj. ponavljanje broja ili iste računske operacije u svim zadacima)
- zrcalne pogriješke (zrcalno okretanje znamenki ili slova, ili okretanje redoslijeda znamenki)
- sporo računanje
- zaboravljanje matematičkih postupaka (osobito složenih)
- vizualne pogriješke (pogrješno prepoznavanje simbola ili brojeva)
- slabo pamćenje i prepoznavanje niza brojeva
- visoka razina matematičke anksioznosti.

Uz diskalkuliju, postoji i akalkulija koja predstavlja potpunu odsutnost matematičkog mišljenja i nesposobnost usvajanja matematičkog sadržaja.

Što se tiče **pristupa poučavanju učenika sa specifičnim teškoćama u učenju**, on se temelji na više čimbenika: koje je okruženje najprikladnije za učenika, koji kurikulum je najprikladniji, te koje su nastavne metode najučinkovitije.[27] Preporučuje se da, ukoliko je moguće, učenici sa specifičnim teškoćama u učenju pohađaju nastavu u inkluzivnim školama, a da u osmišljavanju nastavnog plana sudjeluje stručna služba. Učinkovita nastava za učenike sa specifičnim teškoćama u učenju postiže se tako da je nastavnik čini eksplicitnijom, sustavnijom i više podržavajućom. Eksplicitne upute učenicima jasno daju do znanja što se od njih očekuje i na taj način im usmjerava pažnju na ono što je bitno. Sustavna nastava uključuje logički slijed znanja i vještina koje se postupno grade od najjednostavnijih pojmova i najlakših vještina do najsloženijih znanja i najtežih vještina. Podržavajuća nastava pruža dovoljno ohrabrenja i pozitivnog potkrepljenja koji održavaju motivaciju učenika. [27]

U nastavi matematike, u svakodnevnom radu potrebno je težiti tomu da učenik sa specifičnim teškoćama usvaja znanje u skladu sa svojim sposobnostima, pokazuje svoje znanje i doživljava uspjeh. [23] Poželjno je učenike uključivati u rad i poticati na aktivnost na satu, izbjegavati situacije u kojima će se učenik osjećati neuspješnim te omogućiti situacije u kojima će učenik moći sudjelovati. Pri planiranju aktivnosti, važno je predvidjeti dulje vrijeme izvođenja aktivnosti, a prethodno ih upoznati s time što se provodi i što se od njih očekuje. S obzirom na specifične teškoće, preporuča se izbjegavati učenikovo čitanje na glas ili pisanje po ploči pred razredom, osim ako učenik izrazi želju. U praktičnom radu i izvođenju pokusa, od pomoći može biti rad u paru ili skupini kako bi učenik mogao usmjeravati učenika sa specifičnim teškoćama u učenju ili mu pomagati. Nakon praktičnog rada dobro je postavljanjem pitanja potaknuti ih na pisanje sažetka izvedenog rada, koji će moći upotrijebiti za ponavljanje gradiva. Pri rješavanju zadataka, upute trebaju biti jasno

izrečene. Ako se radi o složenijim zadacima, potrebno ih je razdijeliti po koracima, kako bi učenici mogli lakše primijeniti postupak. Raspored zadataka treba biti takav da se izmjenjuju lakši i teži zadatci, a važno je i predvidjeti manju količinu teksta za pisanje. Preporuča se i zadati manji broj zadataka, pa po njihovu rješavanju dati drugi set zadataka. Zadatci bi trebali biti s manjim brojevima, a ukoliko je potrebno, od pomagala se može dozvoliti i uporaba kalkulatora ili podsjetnika: ili onih koji si učenici sami napišu ili riješeni primjer koji nastavnik pripremi. Ključno je odrediti optimalan broj zadataka za ponavljanje, vježbanje i provjeru nastavnoga sadržaja te osigurati dovoljno vremena za rješavanje. Znanje učenika provjerava se na uvježbanim i poznatim primjerima. Nastavni listići za učenike sa specifičnim teškoćama u učenju trebali bi sadržavati kratke i jasne upute, jednostavne i kratke rečenice uvećanog fonta i istaknutih ključnih pojmova. Preporuča se korištenje sanserifnog fonta, podebljavanje tiska, povećanje razmaka, dvostruki prored između riječi i rečenica, poravnanje teksta s lijeve strane, povećanje veličine slova na minimalno 14 pt te jednostavan izgled teksta. Također, na nastavnom listiću bi bilo dobro da su označena mjesta za odgovore, s dovoljno mjesta za pisanje. Pisano rješavanje za učenike sa specifičnim teškoćama u učenju vremenski ne bi trebalo ograničavati, a pogreške tipa disleksije ne ocjenjivati: pogreške u pisanju ne ispravljati, nego ih samo podcrtati kako bi učenik sam naučio i ispravio pogreške uz pomoć udžbenika ili rječnika. Kod nekih učenika, pismeno ispitivanje dobro je zamijeniti usmenim ispitivanjem, kako bi se izbjegle moguće greške koje nastaju zbog specifičnih teškoća u učenju. Između ostalog, uspostavljanje dobrog i pozitivnog odnosa prema učeniku od velike je važnosti za stvaranje inkluzivnog okruženja. Bitno je imati topao odnos s učenikom, poticati ga da stvara pozitivnu sliku o sebi i da usvoji emocionalne i socijalne vještine, poticati suradnju i razumijevanje među učenicima provođenjem zajedničkih aktivnosti.

U ovom radu provedeno je i opisano istraživanje među nastavnicima matematike o radu s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju. Prema literaturi, nastavnicima su dostupne općenite preporuke za rad s učenicima s posebnim odgojno-obrazovnim potrebama, no ono što nedostaje su smjernice za rad vezane uz pojedine nastavne sadržaje, koji se razlikuju prema zahtjevima koji se postavljaju pred učenika. Iako je svaki učenik jedinka za sebe, svakako bi nastavnicima bilo korisno dobiti ideje i prijedloge kako približiti određeno gradivo učeniku. Stoga rad sadržava i konkretne prijedloge za individualizaciju nastave za učenike sa specifičnim teškoćama u učenju i za darovite učenike, za određene grane matematike koje su se, prema istraživanju, pokazale da zadaju dodatne poteškoće učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju.

# Poglavlje 1

## Istraživanje iskustava nastavnika matematike u radu s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju

### 1.1 Cilj i metodologija istraživanja

Kvalitativno istraživanje provedeno je među nastavnicima matematike u osnovnim i srednjim školama u Hrvatskoj, u svrhu prikupljanja informacija o radu s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju. Provođenjem istraživanja nastojalo se provjeriti kako se provodi individualizacija za učenike sa specifičnim teškoćama u nastavi matematike: koriste li se prilagodbe u pripremi nastavnih materijala i pisanih provjera znanja, prilagođavaju li se zadatci sukladno učeničkim sposobnostima, kako se provode pismena i usmena ispitivanja, produljuje li se vrijeme rada, potiče li se učenike na aktivnost na satu te ohrabruje li ih se da pokažu svoje znanje. Istraživanje je orijentirano na najčešće poteškoće spomenutih učenika u nastavi matematike i svladavanju nastavnog sadržaja matematike, na prilagodbe nastavnog sadržaja i nastavnih metoda i na konkretne postupke koje koriste nastavnici matematike.

Cilj ovog istraživanja bio je utvrditi iskustva nastavnika matematike u radu s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju, opisati najčešće teškoće s kojima se ti učenici susreću pri učenju matematike te saznati koje sve postupke koriste nastavnici matematike kako bi prilagodili proces poučavanja učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju.

U skladu s ciljem istraživanja, postavljena su sljedeća istraživačka pitanja:

1. Koliko iskustva nastavnici imaju u radu s učenicima s teškoćama?
2. Na koji način specifične teškoće u učenju dolaze do izražaja na nastavi matematike?

3. Koje sve prilagodbe nastavnici primjenjuju u radu s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju?
4. Koje prilagodbe smatraju posebno važnima kako bi se adekvatno individualizirao pristup učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju?
5. Kakav je osjećaj kompetentnosti nastavnika za rad s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju i o čemu sve ovisi?

## **1.2 Sudionici**

U istraživanju je sudjelovalo 13 nastavnika matematike, od kojih je 6 nastavnika s iskustvom rada u osnovnoj školi, 5 nastavnika u srednjoj školi, a 2 nastavnika i u osnovnoj i u srednjoj školi. Detaljnije, s obzirom na iskustvo rada u srednjim školama, od sudionika je 1 nastavnik u srednjoj strukovnoj školi, 1 nastavnik u gimnaziji, 3 nastavnika s iskustvom rada u gimnaziji i srednjoj strukovnoj školi, te 2 nastavnika s iskustvom rada u osnovnoj školi, gimnaziji i srednjoj strukovnoj školi.

S obzirom na radni staž, 6 nastavnika ima manje od 10 godina radnog staža, 4 nastavnika između 11-20 godina radnog staža, 2 nastavnika između 21-30 godina radnog staža, te 1 nastavnik između 31-40 godina radnog staža.

## **1.3 Postupak**

Istraživanje je provedeno u razdoblju od listopada do prosinca 2021. godine. Nastavnici su se dobrovoljno javili na poziv na sudjelovanje u istraživanju, a provodilo se u obliku polustrukturiranog intervjua uživo ili koristeći Zoom platformu. Pitanja korištena u vodiču za intervju nalaze se u prilogu 1.

Kako bi se olakšala priprema pitanja za polustrukturirani intervju, provedena su dva intervjua sa studentima Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu koji imaju specifične teškoće u učenju. Svrha tih intervjua bila je dobiti uvid u moguće teškoće prilikom školovanja i prilikom svladavanja određenih grana matematike koje će se detaljnije ispitati u istraživanju.

Intervjui s nastavnicima su u prosjeku trajali pola sata, a uz dozvolu sudionika, snimljen i potom transkribiran. Odgovori nastavnika su zatim kodirani, u svrhu kategoriziranja i prikazivanja rezultata i donošenja zaključaka.



## 1.4 Rezultati

Kako bi se odgovorilo na istraživačka pitanja, provedena je tematska analiza transkripata intervjua s nastavnicima. Teme utvrđene kodiranjem transkripata svrstane su u pet tematskih cjelina u skladu s istraživačkim pitanjima:

1. iskustva s učenicima s teškoćama
2. teškoće na nastavi matematike
3. iskustva s prilagodbom metoda poučavanja
4. prijedlozi prilagodbe metoda poučavanja
5. kompetentnost nastavnika za rad s učenicima s teškoćama.

### Iskustva s učenicima s teškoćama

Nastavnici koji su sudjelovali u istraživanju, u svom su se radu susreli s učenicima čije se teškoće mogu svrstati u sljedeće kategorije: specifične teškoće u učenju, teškoće iz spektra autizma, intelektualne teškoće, ADHD, emocionalne i ponašajne teškoće, problemi sa sluhom, problemi s vidom, dispraksija i cerebralna paraliza. U sljedećoj tablici prikazane su kategorije teškoća s kojima se veći broj nastavnika susreo:

Naziv teškoće	Broj odgovora
Specifične teškoće u učenju	13
Teškoće iz spektra autizma	6
Intelektualne teškoće	5
ADHD	4
Emocionalne i ponašajne teškoće	3

Svi nastavnici susreli su se sa specifičnim teškoćama u učenju, od kojih se 12 susrelo s disleksijom, 11 s disgrafijom, te 12 s diskalkulijom. Kao najčešće teškoće s kojima su se susreli u svom radu, 7 nastavnika navodi specifične teškoće u učenju, 3 ADHD, 3 emocionalne i ponašajne teškoće, i 1 teškoće iz spektra autizma. Vezano za specifične teškoće u učenju, od 7 nastavnika, 4 navodi disleksiju kao najčešću.

### Teškoće na nastavi matematike

U nastavi matematike daju se primijetiti teškoće učenika sa specifičnim teškoćama u učenju. Pritom nastavnici najčešće primjećuju različite simptome disleksije, diskalkulije te

disgrafije. Osim toga, na nastavi matematike primjećuju i druge teškoće kao što su ispitna anksioznost ili problemi u koncentraciji, ali u manjoj mjeri.

Nastavnici primjećuju **disleksiju** kod učenika u sljedećim situacijama: teškoće u čitanju, čitanje bez razumijevanja, preskakanje i previdi pri čitanju, teškoće u rješavanju zadataka riječima, teškoće u zapisivanju, te zamjena slova ili znamenki.

*Pri čitanju, većinom ni ne žele čitati, a kada čitaju, čitaju pogrešno.* [intervju 6]

Nastavnici opisuju **čitanje bez razumijevanja** na sljedeći način:

*Još kako sam mogao primijetiti – krivo čitaju zadatke... Nekad krivo čitaju, a dobro zapisuju, a nekad krivo čitanje dovede do greške.* [intervju 11]

*Kod učenika sam najviše primijetila na testovima – vidjelo se da bi krivo pročitao zadatak,...* [intervju 9]

Kao čest problem, pojavljuje se i **zamjena slova ili znamenki**, a nastavnici to primjećuju na razne načine:

*U osnovnoj školi to dobro primijetim već u petom razredu – kada im usmeno govorite ono što trebaju matematički zapisati, znaju vrlo često mijenjati znamenke. Također to primijetim kad na ploču napišem npr. 39, učenik mi pročita 93. Neki mijenjaju znakove računskih operacija...* [intervju 7]

*Kod numeričkih zadataka, u računanju, događa se da učenik nije siguran piše li broj 5, 3, 2 ili 8, miješa te znamenke. Također, preokretanje znamenki (23 umjesto 32 i slično). U pisanju primjećujem okretanje slova: b-p, b-d.* [intervju 4]

Poseban problem predstavljaju **zadatci riječima**:

*U tekstualnim zadacima pogriješe smisao zadatka – vidi se nerazumijevanje u čitanju. Često su takvi zadatci apstraktni, a naša apstrakcija nije ista kao njihova, a to je da istu sliku ne vidimo jednako. To se primjećuje kod zadataka s postotcima. Većina drugih zadataka se da uvježbati, dok recimo, kod konkretnog gradiva postotaka, moraš prepoznati što je postotak, što je postotni iznos, osnovna vrijednost – teško im je svladavati zadatke u kojima nemaju klasičnu rutinu rješavanja, nego moraju primijeniti neku inovativnost u rješavanju.* [intervju 10]

Kao glavni pokazatelji **disgrafije** na nastavi matematike najčešće se pojavljuju teškoće u zapisivanju, zamjena znamenaka i nerazumljiv rukopis. **Teškoće u zapisivanju** i **nerazumljiv rukopis** opisani su ovako:

*Učenici imaju problema s rukopisom – jako nerazumljiv rukopis, miješaju mala i velika slova, tiskana i pisana. Učenik ni sam ne zna pročitati puno puta.* [intervju 3]

*Problem im zna biti rukopis – nečitko pišu, a u brzini recimo znak „puta“ napišu kao*

da je „minus“, i u sljedećem redu nastavlja računati s minusom. [intervju 10]

**Zamjena znamenki ili brojeva** možda najviše utječe na točno rješavanje zadataka u matematici:

*Zamjena broja – prilikom pisanja i prepisivanja broja s moga papira u svoju bilježnicu događa se ili zamjena znamenaka ili ispuštanje neke znamenke: npr. zadam broj 123, učenik prepíše 12 ili 13, dakle izgubi ili srednji ili zadnji broj, nikada prvi neće preskočiti. Također, zamjena znamenaka: npr. učenik izračuna rezultat 25, ali u sljedećem koraku piše 52. To se događa pri pismenim radovima i pri vježbanju zadataka. [intervju 5]*

Upravo zbog toga što je specifična teškoća koja utječe na usvajanje matematičkog sadržaja, uz **diskalkuliju** se veže najveći broj učenih simptoma na nastavi matematike. Učenici s diskalkulijom također mijenjaju znamenke, brojeve ili znakove računskih operacija, imaju problema s računanjem, a osobito s potpisivanjem znamenaka jedinica, desetica, stotica pri obavljanju računskih operacija, rade pogreške pri preračunavanju mjernih jedinica, te se primjećuje nemogućnost shvaćanja matematičkih pojmova i problem pri matematičkom zaključivanju.

Nastavnici su **teškoće pri računanju** opisali ovako:

*Prilikom računanja kad potpisuje u zbrajanju ili oduzimanju, miješa jedinice, desetice, tisućice, ne potpisuje ih pravilno. Na kraju učenik u glavi dobro izračuna, na papiru krivo, ali rezultat bude točan. [intervju 3]*

*Učenica zna zbrajati, to znam, ali često radi greške:  $10+5=25$ , ili  $18+2=83$  (u ovom slučaju učenica zbraja 2 i 1 i stavlja na mjesto jedinica, tj. zbraja kao da piše  $81+2$ ). [intervju 3]*

**O mijenjanju poretka, znamenaka, znakova i izraza**, nastavnici su rekli sljedeće:

*Neki znaju spajati znamenke, npr. ako dam  $22+13$ , učenik u nekom trenutku izbaci: 233, zbroji ove unutarne znamenke... To mi je bilo jako čudno, razgovarala sam sa stručnom službom pa su mi rekli da je to povezano s diskalkulijom, jedan od mogućih pokazatelja iste. [intervju 7]*

*Drugi primjer učenika, imao je diskalkuliju, i događalo se da dobro piše, a krivo izgovara, npr. govori „tri sedmine“, a piše 3.7, što je i zadano u zadatku... Isto je i on znao krivo prepisati, zamijeniti znamenke i slično. [intervju 11]*

*Učenica s diskalkulijom miješa brojeve, miješa znakove (+ i -). Čak i pri govoru kada kažem:  $8+3$ , učenica zapisuje  $8-3$ . [intervju 1]*

Problem s **matematičkim razmišljanjem i zaključivanjem** stvara veliki problem u rješavanju matematičkih zadataka, osobito zadataka riječima. Nerijetko se primijeti da učenici nisu shvatili zadatak, te ga riješili nekom metodom koja se pojavljuje u drugim zadacima, ali

nije primjenjiva na taj konkretni zadatak.

*Primjećuje se da inače učenici nemaju baš jako logičko zaključivanje: recimo, koriste određeni postupak rješavanja za sve, a osobito se primjećuje to u problemskim zadacima. Npr. „U svakoj košari ima 5 jabuka, a ima 6 košara. Koliko ima jabuka?“ – učenici će to pomnožiti. No u sljedećem zadatku: „Ima ukupno 30 jabuka, i 5 košara, koliko je jabuka u svakoj košari?“ – učenici će koristiti isti postupak, pomnožit će 30 i 5. Dakle, ne čitaju s razumijevanjem. Većinom zadatke rješavaju šablonski. [intervju 8]*

Osim navedenih simptoma specifičnih teškoća na učenju, u nastavi matematike primjećuju se i **druge teškoće** s kojima se susreću učenici sa specifičnim teškoćama u učenju u većoj mjeri nego ostali učenici: **problem s koncentracijom, nedostatak motivacije, nerazumijevanje** te **ispitna anksioznost**. Primjećuje se da su učenici često manje zainteresirani za rad, ne prate nastavu, te pri rješavanju ispita znanja predaju prazan list. Osim na ispitima znanja, nerazumijevanje se da lako uočiti i u razgovoru, pisanju na ploči, a i u neverbalnoj komunikaciji: nastavnici po pogledu i stavu učenika lako shvate da učenici nisu usvojili što je za taj sat bilo predviđeno, te da teško prate nastavu. Ispitnu anksioznost je lako osjetiti: učenike hvata panika od sata matematike, a posebno pri usmenom i pismenom ispitu. Neki nastavnici to su opisali ovako:

*Na nastavi, kad treba riješiti zadatak, nešto pročitati ili na ploči pročitati ili riješiti – odmah primijetim odbojnost, strah, ne žele surađivati, povlače se u sebe, ne žele ništa reći. [intervju 6]*

*Pri izlasku na ploču, primjećujem da imaju puno veći strah nego drugi – to su uglavnom učenici koji su u osnovnoj školi bili sa strane, imaju problem s matematikom svakako pa im to stvara dodatan stres. [intervju 13]*

Odgovori nastavnika ukazuju da sve navedene poteškoće dolaze do izražaja u **raznim situacijama na nastavi matematike**. Najviše se daju zamijetiti na pisanim ispitima znanja, no opažaju se i pri usmenom ispitivanju i na satovima obrade novog gradiva i satovima ponavljanja. Na inicijalnim ispitima ili satovima ponavljanja prošlogodišnjeg gradiva, zamjećuje se da učenici imaju lošije predznanje u odnosu na druge učenike i da im je potrebno više vremena za podsjećanje, no nakon mjesec, dva kontinuiranog rada situacija se stabilizira. U samostalnom radu, navedeni učenici se teže snalaze: često im nije jasno što se od njih traži u zadatku, ne čitaju s razumijevanjem, pa tako dolazi do krivo riješenih zadataka.

*U zadatku učenicima često nije jasno što ih tražim u zadatku, pa su sukladno tome rečenice nesuvisle i ne odgovaraju na pitanja, dok usmeno primijetim da znaju što treba. [intervju 2]*

*Kod tekstualnih zadataka vidim da ne čitaju s razumijevanjem i da ne razumiju što se od njih traži, pa sukladno tome upotrebljavaju krivi postupak za rješavanje zadatka ili ga*

uopće ne rješavaju. [intervju 3]

Na nastavi se primjećuje *pogrješno prepisivanje*: ili s ploče, radnog listića, udžbenika, ili pogrješno prepisivanje u njihovom računu: primjerice, i ako točno prepisu zadatak s ploče ili iz udžbenika, u drugom redu krivo prepisu računski znak ili broj, pa tako nastavljaju rješavati zadatak. Također, nerijetko se dogodi da tako krivo prepisane činjenice ili postupke učenici tako zapamte, pa samim time i pogrješno nauče matematičke činjenice i postupke. Kod računanja, primjećuje se teškoća zamjene slova brojem:

*Također, kod učenika s diskalkulijom, teško im je pojam broja zamijeniti slovom, to je za njih apstraktno. Tipa: „Izračunaj brojevni izraz  $a + b = ?$ , ako je  $a = 2$ ,  $b = 3$ .“ Teško im je shvatiti da je slovo tu u službi broja.* [intervju 8]

Kao što se i dosad dalo naslutiti, najveći problem predstavljaju *zadatci riječima*. S obzirom na poteškoće na koje učenici sa specifičnim teškoćama u učenju nailaze, za očekivati je da tekstualni zadatci stvaraju problem. To se primjećuje i na nastavi matematike, u samostalnom radu te na pismenim i usmenim ispitima.

*Vezano za čitanje, u pravilu ako je to djetetu problem, usmeno ne čita pred razredom. Ako imaju zadatke riječima na ispitu, najčešće ni ne dođu do zadatka riječima – jako puno vremena gube na one početne zadatke. Većina djece je svjesna svojih nedostataka – oni već od 1. do 4. razreda imaju pomoć od strane učitelja, defektologa, logopeda, pa će često takva djeca vraćati se na početne zadatke i provjeravati jesu li ih točno riješili, pa na taj način vrlo rijetko dođu do zadatka riječima. Ako dođu do toga, u pravilu ne razumiju zadatak.* [intervju 5]

*Kod tekstualnih zadataka, vidi se nerazumijevanje, račun je često pogrešan i vidi se da nisu shvatili što je zadano, a što se od njih traži; odgovor rečenicom je često nesuvisli i ne odgovara na pitanje postavljeno u zadatku. Od njih tražim da mi objasne logiku kojom su rješavali zadatak, i tako primijetim da je došlo do nerazumijevanja u tome što zadatak od njih traži.* [intervju 6]

*Pri čitanju, osobito tekstualnih problemskih zadataka, teško shvaćaju poantu zadatka i nerijetko koriste krivi postupak za rješavanje zadatka. Primjećujem da su usporeniji, tj. da im svakako treba puno više vremena za rješavanje zadataka u odnosu na druge učenike. U takvim zadacima se fokusiraju na sadržaj i čitaju ga više puta kako bi shvatili zadatak. Definitivno kad čitaju zadatke to logičko razmišljanje i planiranje je u minusu kod takvih učenika.* [intervju 7]

Sukladno tomu, u bilo kojoj grani matematike, zadatci riječima stvaraju problem. Nastavnici koji su sudjelovali u istraživanju naveli su neke sadržaje koji kod učenika sa specifičnim teškoćama u učenju posebno stvaraju problem u usvajanju gradiva. Neki nastavnici navode kako je to individualno te kako ne mogu imenovati područje koje im posebno

teško ide, nego da to ovisi o učeniku, njegovim interesima i stavu prema matematici. Šest nastavnika navelo je kako im geometrija stvara veliki problem, osobito **analitička geometrija, stereometrija i snalaženje u prostoru**, a poneki nastavnici srednjih škola navode i trigonometriju kao problem.

*Općenito im najgore ide geometrija – trokuti, kvadrati, prepoznavanje geometrijskih likova, računanja opsega, površine, kutova... Sve im to jako loše ide. Recimo tijela – to nikako ne mogu shvatiti. Računanje nekako i prolazi kao neka šablona, a geometrija baš slabo. [intervju 2]*

*Geometrija – recimo konstrukcije. Kad radimo te konstrukcije, zahtijevam prvo da si sa strane naprave skicu, a njima je to jako teško. Iako je to prvi korak u mom poučavanju geometrijskih konstrukcija, i tu imaju problem, a još kada dodemo do prave konstrukcije i korištenja geometrijskog pribora – tu imaju problem s usklađivanjem pokreta, npr. vući paralelne pravce, korištenje šestara. Konkretno, u ovim slučajevima se kod njih više baziram na zaokruživanje: dobiju gotove slike pa odabiru što je točno. [intervju 3]*

No, mišljenja oko geometrije ipak su podijeljena: neki nastavnici tvrde kako ovi učenici nemaju problem u geometriji, osobito u shvaćanju geometrijskih pojmova, opisivanju odnosa pravaca i ravnina, te u preslikavanju ravnina.

*Općenito im leži geometrija. Svoj djeci sveukupno je geometrija teža jer je apstraktna, moraju to vidjeti u prostoru, snalaziti se, zaključivati, ali primjenom određenih metoda zornog prikaza učenici mogu to lakše shvatiti. Date im lik ili tijelo koje mogu opisati, objasniti, doći do pojma opsega, površine, duljina stranica, veličine kutova – to im ne stvara probleme. [intervju 6]*

*Preslikavanja ravnine – u pravilu imaju prekrasne crteže. Fascinantno mi je to, npr. kocku ne vidi, ali će trokut savršeno translatirati. Problem nastaje kada je potrebno translatirati u koordinatnoj ravnini, ili točno na nekom mjestu u koordinatnoj ravnini nešto nacrtati. Ali ako mu dam bijeli papir gdje mora napraviti osnu simetriju, tu najčešće neće biti nikakvih problema, ništa više nego neka druga djeca. Sve što ne uključuje brojeve, dobro je. [intervju 5]*

*U principu, pravci i ravnina ne stvaraju problem. Ako učenik nema problema s prostornim deficitom, prilično dobro znaju opisivati odnose pravaca i ravnina. U praksi pojednostavim to promatrajući učionicu: tu pronalazimo ravnine, pravce koji su usporedni, sijeku se, okomiti su i slično. Dosta je praktično, u stvarnom životu, i to mi se baš uvijek pokazalo da im je jasno. Ne izražavaju se u potpunosti matematički, ali vidim da im je jasno kada je nešto usporedno, leži u ravnini, okomito, siječe se, itd. [intervju 7]*

Kod analitičke geometrije, kao čest problem navodi se **snalaženje u koordinatnom sustavu u ravnini**: učenici mijenjaju  $x$  i  $y$  koordinate, pa samim time dolaze do krivih

točaka u koordinatnoj ravnini.

*Koordinatni pravac, koordinatna ravnina – tu se dosta gube, lijevo, desno, gore, dolje, to im bude veliki problem. Isto tako i geometrija prostora, snalaženje naprijed, nazad. U ostalim gradivima više-manje nema nekih odstupanja. [intervju 5]*

Zamjena znamenki, brojeva, slova i računskih znakova dovodi do problema u **aritmetici**: iako učenici većinom konceptualno shvaćaju postupak i matematičku logiku, i znaju kako je zadatak potrebno riješiti, krivo prepisivanje ili zamjena dovodi do pogrešnog rezultata.

*Račun sa zagradama: u aritmetici, imaju velik problem s oslobađanjem od zagrada i mijenjanjem predznaka, u principu imaju problem s cijelim brojevima. U aritmetici također imaju problem s potpisivanjem i računom: mijenjaju desetice, jedinice, tisućice. [intervju 1]*

Pri izabiranju sadržaja koji stvaraju teškoće, navedena je i **algebra**, osobito algebarski izrazi, te računanje sa skupovima. Učenicima je teško shvatiti da slova predstavljaju brojeve, primjenjivati kvadrat zbroja ili razlike i razliku kvadrata na druge slučajeve.

*Algebarski izrazi i razlomci, zbog toga što moraju istovremeno miješati pismeni prikaz i konceptualni – u principu im je lako riješiti zadatak npr. s jednadžbom jer nemaju toga za odraditi, nego imaju jedan koncept za odraditi. Kod algebarskih izraza moraš paziti na predznake, i ako pri prepisivanju pogriješiš jednom, vjerojatno si u sljedećem redu zakomplicirao izraz toliko da ga ne možeš skratiti i srediti do kraja, ne možeš ga pojednostavniti... Također, tu ih zbunjuje i kvadrat razlike i razlika kvadrata – kod njih već i taj naziv koji je sličan stvara problem. [intervju 10]*

U principu, nastavnici su složni u tome da učenici rijetko griješe u tzv. šablonskim zadacima, primjerice kod rješavanja linearnih jednadžbi. Kada je postupak jasan i uvijek isti, učenici ga lako svladaju i primijene. Problem nastaje kada moraju upotrijebiti inovativnost, proučiti ideju zadatka, sami ga postaviti i provjeriti smislenost rješenja, koristeći matematičku logiku.

## Iskustva s prilagodbom metoda poučavanja

Učenici sa specifičnim teškoćama u učenju zahtijevaju određene prilagodbe, kako bi im se olakšalo svladavanje gradiva u matematici. Nastavnici prilagođavaju svoje metode poučavanja, provjere znanja te domaće zadaće. Kao važan čimbenik, 9 nastavnika naglašava **intenzivno praćenje i podršku**: na taj način, nastavnici dobiju bolji uvid u učenikovo znanje i teškoće s kojima se suočava, učenik dobije sigurnost da uvijek može računati na nastavnika i da mogu uvijek dodatno pitati i razgovarati o bilo kakvim nejasnoćama vezano za gradivo. Nastavnici to provode češćim obilaženjem učenika, dodatnim pojašnjavanjem

zadataka, pregledom njihovog samostalnog rada te poticanjem da slobodno postavljaju pitanja. Uz to, navode kako je korisno da učenici sjede u prvim klupama, kako bi im bilo lakše i neprimjetnije pristupiti. Također, na taj način se razbija i ispitna anksioznost, koja učenike blokira da uspješno pokažu svoje znanje. Jedan od nastavnika situaciju pred pločom opisuje ovako:

*Primjećujem ispitnu anksioznost, osobito na izlasku na ploču, pa pokušavam to razbiti. Pitam ih u trenutku „Kako se zoveš?“, a učenik čeka i čeka... Teško mu je odgovoriti i na to pitanje, vidi se da je učenik pod stresom. [intervju 7]*

Pružanjem podrške i intenzivnim praćenjem, učenik stječe povjerenje u nastavnika, ne ustručava se postavljati pitanja, te se manje boji svojih pogrešaka, što pospješuje smanjenje ispitne anksioznosti. Uz to, jedan od nastavnika potiče rješavanje zadataka na ploču ako učenik to želi, kako bi razbio strah od izlaska pred razred, razgovora s nastavnikom i pokazivanja svoga znanja.

Za sam proces poučavanja, nastavnici koriste brojne prilagodbe: posebne nastavne listiće, isprintane planove ploče, vizualne prikaze, mnemotehlike, potiču usmjerenost na osnovna znanja te rješavanje zadataka na ploči. Najviše nastavnika koristi **posebne nastavne listiće**: budući da udžbenici danas svakako nemaju dovoljno zadataka, dobiju posebne zadatke, gdje je često napisan i riješeni primjer zadatka, opisan postupak, te istaknuti ključni dijelovi i pojmovi.

*Trudim se uvijek napraviti i nastavne listiće svima – u udžbenicima nema dovoljno zadataka, a onda ovim učenicima napravim njihove listiće gdje je objašnjen postupak, imaju riješen primjer, sve je u bojama, važni pojmovi su podebljani i slično. [intervju 1]*

*Dopuštam upotrebu razno raznih listića na kojima im je već prikazan postupak rada: tipa, u petom razredu tablica množenja, gdje kad će morati pomnožiti  $23 \cdot 15$ , imat će sa strane standardnu tablicu množenja. [intervju 5]*

Korištenjem prilagođenih nastavnih listića, učenici dobiju uvid u to što se od njih očekuje, što je potrebno znati, te se na taj način potiče razvijanje učenikovih sposobnosti. **Korištenje vizualnih prikaza** nekim nastavnicima pokazalo se jako korisno, naročito u stereometriji i analitičkoj geometriji, ali i u aritmetici, primjerice kod razlomaka. Nastavnici spominju da često koriste alate poput *Geogebra* ili *SketchPad*-a kako bi prikazivali likove i tijela u ravnini i prostoru, pa na taj način opisuju tijela i njihove značajke. Također, za stereometriju često koriste i fizičke modele geometrijskih tijela.

No, neki od nastavnika su konstatali kako koriste **univerzalni način rada** na matematici, jednak prema svim učenicima. Sat pripremaju jednako za sve učenike, bazirajući se na usvajanje osnovnih i ključnih pojmova i postupaka. Jedan od razloga tomu je kako se učenici sa specifičnim teškoćama ne bi osjetili manje vrijednima, kao što jedan nastavnik spominje:



*Poučavam sve učenike jednako – ne volim da učenici s teškoćama dolaze do izražaja, kako ne bi došlo do omalovažavanja među učenicima. [intervju 3]*

Drugi navode kako se trude da učenici prate redovitu nastavu dok god mogu, uz dodatno pojašnjavanje gradiva, ako je potrebno. Na taj način žele osigurati da učenici dobiju osnovno znanje. Neki od njih to opisuju ovako:

*Sa svima radim jednako – metoda rada je prilagođena svim učenicima. Najvažnije je kod učenika pobuditi interes – ako je učenik zainteresiran, i ako ne ide iz prve, pronaći će način. . . Radim na tome da imam s učenicima otvorenu komunikaciju, pa je svatko slobodan pitati bilo kad i bilo što što mu nije jasno. . . Iako naravno, pokušavam njima biti malo više na raspolaganju. [intervju 10]*

*Što se tiče predavanja i metoda izlaganja, zadavanja domaće zadaće, uvijek pripremam sat općenito, za sve učenike, s tim da ako primijetim da ne pišu ili im nešto nije jasno, pridem im i dodatno pojašnjavam. Naravno, ako ne bi znali riješiti domaću zadaću, ne bih ih kažnjavala. Najveća razlika je bila u provjerama znanja. [intervju 9]*

Nastavnici su primijetili da učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju pomaže i **vršnjačka podrška**: učenici mogu puno pomoći jedno drugom, osobito u timskom radu ili radu u paru. Tada učenik koji je svladao gradivo može pomoći učeniku koji ima poteškoće s usvajanjem gradiva, a uz to se međusobno povezuju i grade odnos povjerenja.

*Na satu često koristim timski rad, pa sam zapravo svima dostupna za česta pitanja. U takvom načinu rada se povezuju – pitaju nekog drugog, puno nauče jedni od drugih. [intervju 10]*

*Za ovog drugog učenika – on je bio u super razredu, i tu je bio učenik koji je bio jako nadaren, bilo mu je dosadno na satu, pa bi on kad bi bio gotov s regularnim zadatkom, pomagao učeniku koji je imao poteškoća. Naravno, obilazila sam ih češće i kada god su me pozvali, pripomogla u objašnjavanju. [intervju 2]*

Od **dodatnih pomagala** u aritmetici, u istraživanju su se spominjali kalkulator, abakus, brojevni pravac. Abakus i brojevni pravac spomenut je kod jednog nastavnika, koji je dozvolio učenicima korištenje istih, u svrhu olakšavanja računanja i vizualizacije brojeva. Kalkulator kao pomagalo podijelilo je mišljenja nastavnika. Neki od njih dozvoljavaju raniju upotrebu kalkulatora nego što je to uobičajeno, neki od njih smatraju da za to nema potrebe te da se na taj način učenici previše naviknu na korištenje kalkulatora, pa ne razvijaju osnovne matematičke vještine.

Kao pomagala nastavnici koriste još i **konkretne materijale**, i određene radne listiće. Primjerice:

*Posebno za koordinatni sustav u ravnini, učenicima dajem nastavni listić. Npr. učenik u sedmom razredu je stalno miješao koordinate,  $x, y$ . Umjesto  $(x, y)$  ucrtavao je  $(y, x)$ . Tada*

je dobio nastavni listić: na njemu je veliki koordinatni sustav, na kojem je zadano  $A(4,5)$ . Broj 4 je bio crveni, i crveno označen na  $x$ -osi, broj 5 je bio plavi, i plavo označen na  $y$ -osi. Na taj način smo rekli: pazi kako ucrtavaš. ... On je to imao na satu, kad smo god vježbali. Na testu mu nisam dozvolila da to ima, čisto da vidimo je li to uvježbano. ...treba biti jako pažljiv s doziranjem dodatnih materijala, lako se dogodi da se učenik veže za materijal, i onda bez toga ne može apsolutno sam. [intervju 5]

Koristim jako puno konkretnih materijala koje izrađujem sama – npr. vektori od kartona i pravokutnik, pa na taj način pojašnjavam zbrajanje vektora po pravilu paralelograma. [intervju 4]

Kad smo radili odnose pravaca u ravnini, obično bi ta djeca imala slamke, olovke, plastične igle za štrikanje – na taj način predočavam i presjek pravca i ravnine, papir lako probušite s tom plastičnom iglom. S tim objašnjavam i ortogonalnu projekciju, zamolim ih da pokušaju to vizualizirati i prebaciti na papir, na taj način ti učenici puno lakše vizualiziraju nego na drugi način. Obično to rade svi učenici na uvodnom satu, ali učenicima s teškoćama ti fizički modeli uvijek ostanu na korištenje, i za druge sate, da zadatak koji dobije par sati nakon može riješiti barem pomoću te vizualizacije, ako ne ide isprva stavljanje na papir. [intervju 4]

Najveće prilagodbe primjećuju se na provjerama znanja, što potvrđuje činjenica da ih provode svi nastavnici koji su sudjelovali u istraživanju. U pismenim provjerama znanja, nastavnici stavljaju **manji broj zadataka i/ili produljuju vrijeme pisanja**. Neki od njih kombiniraju obje metode, a neki izabiru jednu od njih, ovisno o mogućnostima.

Provjera znanja bude drugačija – dobivaju manje zadataka, i to budu zadaci s nastavnih listića. Neki od njih (recimo za ocjenu dobar) su doslovno zadatci s istim brojevima, a ostali su isti tipovi zadataka s različitim brojevima, no vidim da od toga nema puno koristi. ... Vrijeme rada je kao i ostalim učenicima, ali imaju puno manje zadataka na testu. [intervju 1]

Vrijeme rada je produženo – u pravilu, oni mi kažu kada su gotovi. Ja im ne određujem da imaju 60 minuta umjesto 45 minuta, nego im kažem da pišu dok ne napišu sve što znaju. Nekada to bude 5 minuta dulje, a nekada je to 15 minuta, a nekada su čak cijela dva školska sata. Dakle, dobiva apsolutno vrijeme koje mu je potrebno za riješiti zadatke, da ima sigurnost da će imati dovoljno vremena sve provjeriti, da nema pritisak da se mora žuriti jer neće stići riješiti zadatke. [intervju 5]

Kako bi ispitni materijal bio pregledniji, nastavnici ga, često prema naputcima svoje stručne službe, prilagođavaju. Česte prilagodbe su **povećanje fonta ili specijalni font, veći razmak među zadatcima ili svaki zadatak na svoj list, veći prored u tekstu i podebljavanje ključnih pojmova**.

*U pisanim provjerama povećavamo font – kod većeg fonta su manje pogreške. Rade se veći razmaci među zadacima. Pazimo i koji se fontovi pišu – Calibri i Ariel, to su fontovi kod kojih se pokazalo da ima najmanje krivo pročitanih brojeva i teksta. [intervju 5]*

Također, kod nekih učenika pokazalo se da su za njih povoljniji **posebni uvjeti kod pisanja ispita**, te da im puno znači mirno okruženje. Zato neki nastavnici omogućuju učenicima da pisane ispite ili ispravke pisanih ispita pišu sami: u knjižnici, u uredu stručne službe ili na dopunskoj nastavi.

Pri ispravljanju pisanih provjera znanja, nastavnici se, osobito kod pogrešaka u prepisivanju u aritmetici, koriste principom „slijedi grešku”. Ako krivo prepisani zadatak ne mijenja kontekst zadatka ili područje ispitivanja znanja, nastavnici ocjenjuju zadatak ne kažnjavajući pogrešku u prepisivanju, nego prateći rješavanje tog novog zadatka.

*Pri ispravljanju ispita i krivom prepisivanju zadataka, ocjenjujem to principom „slijedi grešku“ – ukoliko je učenik krivo prepisao zadatak bez da ga je bitno promijenio, a došao do točnog rezultata, ocjenjujem njegove matematičke kompetencije i točno rješavanje tog „njegovog“ zadatka. To se odnosi na sve učenike, ne samo na učenike sa specifičnim teškoćama u učenju. [intervju 10]*

Što se tiče usmenih ispita, nastavnici o tome odlučuju ovisno o učeniku. Nekad primjećuju kako to kod učenika stvara dodatan stres, pa izbjegavaju usmena ispitivanja, i dogovaraju se s učenicima o provjerama znanja. No neki nastavnici i usmeno ispituju svoje učenike, kako bi im dali priliku da pokažu svoje znanje, te kako bi mogli koristiti pomoć i podršku nastavnika.

Osim u klasičnoj nastavi, podrška nastavnika od velike važnosti je i za vrijeme pisanja pisane provjere znanja. Nastavnici obilaze učenike, daju dodatne upute, pomažu u shvaćanju zadatka, te ih potiču da se prisjete da su takve zadatke već uspješno riješili.

### **Prijedlozi prilagodbe metoda poučavanja**

Kako bi se lakše izdvojili upravo oni postupci koji su ključni za učinkovitu prilagodbu učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju, od nastavnika se tražilo da daju konkretne prijedloge prilagodbe. U svojim odgovorima nastavnici su se najviše osvrnuli na prilagodbu teksta: **povećanje veličine fonta i odabir posebnog fonta, podebljavanje ključnih dijelova teksta, veći prored među tekstom**. Fontovi koje su nastavnici naveli da koriste za učenike sa specifičnim teškoćama u učenju su: *Verdana, Calibri, Ariel*, i posebni fontovi za disleksiju koji se mogu instalirati. Također, primijećeno je i da je bolje koristiti podebljanje teksta, nego podcrtavanje:

*Boldanje, i nikako podcrtavanje. Primijetila sam da djeci s disgrafijom podcrtavanje stapa riječi, i onda jednostavno taj dio teksta ne vide, bar mi tako kažu. Npr. „Poredaj po veličini počevši od najvećeg.“ U ovakvom zapisu, oni taj dio ne vide, ne razumiju. Kada*

samo napišem „Poredaj po veličini“, oni to bez problema naprave. Ne znaju mi reći je li problem u „počevši od najvećeg“ ili u tome što je podcrtano. Ali kada samo podebljam tekst, takav problem se rjeđe ponavlja. [intervju 5]

Poželjno je da učenici dobiju **jasne upute** o tome što se od njih očekuje na nastavi, ili u konkretnom zadatku, te da im se pri zadavanju domaće zadaće konkretno napiše što se traži od njih. Bitno je da nastavnik prema učeniku ima **podržavajući individualiziran pristup**: kao što nastavnici kažu, svaka dva učenika su različita, pa se ne može dati svima ista uputa za konkretno gradivo.

*Ono što bih izdvojila kao najbitnije od svega nije neka konkretna ili tehnička prilagodba, nego stvoriti topli odnos s tim učenicima. Budući da iz iskustva vidim da je svaki učenik drugačiji, i da im se ne može pristupiti jednako, smatram da je najbitnije steći odnos povjerenja, gdje ćete se upoznati i stvoriti individualizirani pristup. [intervju 4]*

*Potrebno je oslušivati djecu – i stvarno ih učiti ono što je potrebno... Teško je ukomponirati sve to – kada imaš 22 učenika, a među njima nekoliko s teškoćama, teško se posvetiti njima, a da razred ne pati, da uspiješ odraditi svo gradivo namijenjeno... Čak bi predložila i da nastavnici matematike za učenike s teškoćama mogli imati dodatne sate, gdje bi imali dopunsku nastavu samo za učenike s teškoćama, smatram da bi tada nastavnik mogao provesti više vremena s učenikom i posvetiti se samo njemu. [intervju 2]*

Svakako se učenicima, ako ne mogu pratiti redovnu nastavu, treba prilagoditi nastavni sadržaj. To se često provodi pisanjem posebnih nastavnih listića, na kojima je odabrani sadržaj koji je potrebno usvojiti. Također, nastavnici potiču učenike da pišu svoje memo tablice s definicijama i postupcima rješavanja, tzv. „šalabahtere“, na koje se mogu osloniti pri rješavanju zadataka.

Pri usvajanju novog gradiva, učenicima puno pomažu konkretni modeli i korištenje tehnologije, za koju se pokazalo da ju vole koristiti i da im olakšava učenje.

*Koristimo razne 3D kockice – na satu sam koristila i Lego kockice za predočavanje i vizualizaciju. 3D modeli koji se mogu i doma napraviti, a koriste za lakše predočavanje i vizualizaciju, npr. kocka od slamki, 3D pravac... [intervju 7]*

*Primjerice, jednog učenika sam ispitivala koordinatni sustav igricom potapanja brodova. Nacrtala sam koordinatni sustav tako da ima četiri kvadranta (inače igrica ima samo 2). Konkretno taj učenik, kad je imao ispred sebe tu igricu, nije imao nikakvih problema s iščitavanjem koordinata, ali kada je to imao na papiru na stolu, nikako nije točno iščitavao. Onda sam napravila na čvršćoj podlozi koordinatni sustav i dala mu da ga drži okomito – tada je imao manje problema. Ne znam zašto i u čemu je tu bio problem, ali evo, pronašli smo način da to riješimo. [intervju 7]*

*Za geometriju prostora: najčešće imam modele napravljene od štapića, slamki, kocke*

ili kvadre. Na taj način mogu gurnuti ruku kroz taj kvadar, mogu okretati, pa na prostoru mogu gledati paralelnost pravaca, okomitost ravnina i to. [intervju 5]

Osim korištenja već spomenutih alata *GeoGebre* i *Sketchpad*-a, učenici se svakako dobro snalaze s tehnologijom:

*Vole upotrebljavati tehnologiju, recimo Google obrasce koje im često šaljem – lakše im je poklikati odgovore, spojiti, prepoznati itd. Pri ocjenjivanju matematičke komunikacije, lakše im je tako doći do točnog odgovora, nego kada sami moraju napisati.* [intervju 10]

Ono što se još pokazalo kao dobra metoda je **praktična timska nastava**, kada učenici moraju sami izraditi nešto, smisliti ideju ili doći do nekog zaključka. Jedan nastavnik to opisuje ovako:

*Sa svim razredima radim projektnu nastavu, da moraju na zadanu temu osmisliti nešto, kreativno se izraziti, napraviti, i primijetila sam da učenici s teškoćama u učenju to jako vole, s tim da im je dozvoljena i pomoć u izradi takvih projekata. Npr. od različitih vrsta trokuta treba složiti neki lik – imaju pomoć u izrezivanju, a lik će kreativno složiti samostalno. Isto tako, pri računanju površina tog lika: imaju pomoć u tome kako će jedan lik podijeliti na dva kojem mogu izračunati površinu, zatim po istom principu dalje sami.* [intervju 6]

I naravno, **rad sa stručnom službom** znatno olakšava poučavanje učenika sa specifičnim teškoćama u učenju. Ako je stručna služba uključena, u suradnji s nastavnikom matematike dolaze do zajedničkih rješenja i novih načina poučavanja.

*U suradnji sa stručnom službom, koja više zna o tome, radim preporuke koje oni donesu, poput gore spomenutih. Meni moja defektologinja dosta pomaže jer povremeno ona uzima te učenike sebi sa sata, i onda ona radi s njima jedan na jedan, uz moju uputu što je potrebno napraviti. . . Tamo im je bolja atmosfera, sami su, mogu se lakše koncentrirati jer nema buke u razredu.* [intervju 8]

## Kompetentnost nastavnika za rad s učenicima s teškoćama

S obzirom na osjećaj kompetentnosti za rad s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju, nastavnici su se izjasnili ovako:

Procjena osjećaja kompetentnosti	Broj odgovora
visok	4
zadovoljavajuć	5
nizak	4

Nastavnici koji su se izjasnili da su zadovoljni svojim radom, navode da su puno naučili iskustvom i od samih učenika, a neki od njih i sami ulažu u dodatnu edukaciju. Ostali nastavnici smatraju da nisu dovoljno educirani, a i da nemaju toliko vremena ni prostora posvetiti se tim učenicima.

Što se tiče pomoći stručne službe, od ispitanih nastavnika 2 ih je izdvojilo kako su zadovoljni sa suradnjom, a čak njih 6 kako je pomoć stručne službe nedostatna. Nastavnici smatraju kako je pomoć stručne službe ključna, te kako bi suradnja sa stručnom službom puno pomogla u metodama poučavanja učenika, no puno puta ta suradnja nije na zadovoljavajućoj razini. Nastavnici koji su utvrdili da nemaju dobru suradnju sa stručnom službom, pristupaju toj činjenici s razumijevanjem, s obzirom na to da je previše učenika na mali broj radnika stručne službe. No, stručna služba puno više zna o teškoćama nego što to znaju nastavnici matematike, a nastavnici matematike puno više znaju o matematici nego što to zna stručna služba, stoga bi jedino njihova suradnja mogla donijeti ploda.

*Veća pomoć stručnih suradnika definitivno – oni su strgani svakako, razumijem da je puno učenika u školi i da ne mogu za sve imati jednako vremena, ali suradnja s njima je manjkava i mislim da bi veća suradnja donijela puno više ploda. Dobijemo smjernice koje su općenite, a svaki učenik je specifičan...* [intervju 3]

*Veća uključenost stručnih suradnika, koji bi se direktno uključili u nastavu... Znam da i nemaju toliko znanja o poučavanju matematike, niti bi morali imati, ali mislim da bi kvalitetna suradnja donijela veće rezultate.* [intervju 13]

Također, 4 nastavnika se osvrnulo na svoje inicijalno znanje o radu s učenicima s teškoćama: ističu da je bilo nedovoljno, da po ulasku u razred nisu mnogo znali o tome, te da na se na fakultetu ne poučava dovoljno o tome.

Na pitanje što bi im u radu s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju moglo pomoći, kao najčešći odgovori pojavili su se:

Izvori podrške	Broj odgovora
edukacija	10
podrška stručne službe	9
gotovi materijali	7
sustručnjačka podrška	5

Vezano za edukacije, nastavnici ističu kako se održavaju edukacije o samim teškoćama, ali da bi im bile potrebne edukacije s konkretnim primjerima i metodama poučavanja, koje su realne i izvedive u razredu s ukupno 25 učenika. Iako su svjesni da je svaki učenik individua za sebe, da ne uspijeva svaka metoda uvijek i da svaki učenik zahtijeva svoj pristup, ne znači da neka od konkretnih metoda neće uspjeti u usvajanju potrebnih ishoda.

*Imali smo jako puno edukacija – nigdje nismo dobili ništa konkretno kako bismo s takvim učenicima trebali raditi, više je bilo usmjereno na to što je teškoća, kako oni to vide, kako procesuiraju... Nismo dobili lepezu metoda kako bismo mogli, pa da si ja prilagodim koja bi mi od tih metoda mogla pasati za određenu teškoću i određeni razred. Ono što bi mi koristilo je edukacija kako bih ja trebala raditi, s konkretnim prijedlozima za poučavanje, koje ću isprobati i odabrati najbolje za određenog učenika. [intervju 6]*

*Edukacije – smatram da bi to bilo najpotrebnije... Škola me zasad još nije uputila u te stvari, tražim stalno te edukacije, ali smatram da bi to puno pomoglo. Već imam primjer kako sam sudjelovala na nekom stručnom skupu o problemskim zadacima, bio je dosta konkretan – što bi se trebalo vrednovati i kako, i to mi je dosta pomoglo. Smatram da bi mi koristila edukacija o poučavanju učenika s teškoćama u učeniku... Problem jest što je svaki učenik individualan, ne uspijeva svaka metoda uvijek, ali baš zato edukacija s više konkretnih metoda bi sigurno dala ploda. [intervju 1]*

Kao što je već spomenuto, dobra suradnja sa stručnim timom dala bi dobre rezultate, budući da se na taj način ujedinjuje znanje o matematici i radu s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju. Uključenost stručne službe u rad s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju nastavnicima daje sigurnost da koriste sve općenite prilagodbe koje su dane za takve učenike, a dublji uvid u napredak svakog posebnog učenika omogućuje stvaranje novih ideja za usvajanje konkretnog gradiva. Što se tiče gotovih materijala, nastavnici su podijeljenog mišljenja. Neki smatraju da dati gotovi materijal nije dovoljno, upravo zbog toga što učenik zahtijeva individualan pristup. No svakako se svi mogu složiti da je posjedovanje gotovih materijala korisno, u svrhu postizanja ciljeva, biranja zadataka te na koncu olakšavanja osmišljavanja zadataka za uvježbavanje.

*Gotovi materijali bi mi sigurno olakšali rad. Oni imaju svaki svoj udžbenik, prilagođen njima, ali da imam više pripremljenih materijala, to bi mi sigurno olakšalo rad. Neko gradivo im bude lagano, pa rješavaju te zadatke brzo, no ja ne mogu pripremiti toliko zadataka za njih... [intervju 8]*

*Gotovi materijali možda neki bazični, ali za svaku generaciju radim nove pripreme, i kao što sam gore rekla, svaki učenik s teškoćama je drugačiji, pa zahtijeva poseban pristup. Ti gotovi materijali bi se trebali dodatno doradivati onda, nadograđivati i prilagođavati učeniku – bez toga, mislim da neće moći. [intervju 7]*

Iskustvo u radu s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju znači mnogo: svaka nova situacija donosi nove ideje i prijedloge za prilagodbe u poučavanju tih učenika. Stoga je sustručnjačka podrška prepoznata kao dobar način za poboljšanje u poučavanju učenika sa specifičnim teškoćama u učenju.

*Razmjena iskustava s drugim nastavnicima matematike svakako, ali i s drugim ko-*

*legama – nekako sam se uvijek na to obazirala i to mi je dosta pomagalo u pristupu učenicima. Kolege nastavnici matematike bi uvijek rado dijelili iskustva i npr. ispite znanja i slično, smatram da bi toga trebalo biti više jer je meni osobno bilo od pomoći. [intervju 9]*

Drugi čimbenici koji bi nastavnicima olakšali rad s učenicima sa specifičnim teškoćama su: dopunska nastava, suradnja s roditeljima, smanjenje broja učenika po razredima, suradnja matematičara i stručnjaka za inkluzivno obrazovanje i veći broj pomoćnika u nastavi. Dopunska nastava kao takva dala bi učenicima više vremena individualne podrške i poučavanja nastavnika, kada bi nastavnik mogao dobiti bolji uvid u poteškoće i dobiti više vremena da učeniku pristupi na drugi način. Prevelik broj učenika po razredima smatra se problemom, jer na taj način učenici ne mogu dobiti individualni pristup i podršku koju trebaju: u tom slučaju pate ili učenici s teškoćama zbog nedovoljne individualizacije programa, ili ostali učenici koji bi trebali svladavati sve ishode. Tu se javlja i problem inkluzije, gdje se vide manjkavosti sustava, koje nastavnici opisuju na sljedeći način:

*Kada učenici sa specifičnim teškoćama u učenju izlaze iz osnovne škole, oni izlaze jednaki s drugima, više nitko ne zna da imaju teškoće, upisuju se po redovnom programu u srednje škole. Njihov „odličan“ nije jednak „odličnom“ učenika koji nema teškoće, ali se jednako vrednuje pri upisu u srednje škole. Kada dođu u srednje škole, nailaze na problem, a zato što se tek tada saznaje da imaju teškoće i da taj njihov „odličan“ na drugoj razini. [intervju 6]*

*Značajno je za reći da u zadnje vrijeme imamo sve više i više takvih učenika, pa je potrebno se više posvetiti tome. Ponekad je to realno, ponekad se taj papir iskorištava, ali je svakako generalno sve više takvih učenika. Svakako, ja sam za inkluziju, ali mislim da bi trebalo dobro razgraničiti jasnije da neke učenike je ipak potrebno poslati u odvojenu školu – mislim da bi se i oni tamo bolje snalazili. [intervju 7]*

Uloga roditelja u obrazovnom procesu učenika sa specifičnim teškoćama u učenju također je važna za njihov napredak, a može biti i otežavajuća i podržavajuća. Nastavnici svjedoče kako je podrška roditelja i rad doma vrlo bitan, te da se na taj način puno lakše premoste poteškoće s kojima se učenici susreću. No s druge strane, roditelji mogu i otežati i usporiti napredak učenika: odbijajući činjenicu da je učenicima potrebna individualizacija, ili opravdavajući nerad učenika korištenjem dijagnoze.

## 1.5 Rasprava

Rezultati ovog istraživanja u velikoj se mjeri podudaraju sa znanstvenim činjenicama i istraživanjima vezanim za učenike sa specifičnim teškoćama u učenju. Najveći dio opisanih teškoća i situacija u kojima se one primjećuju proizlazi iz kliničke slike specifičnih teškoća



u učenju.

Prema rezultatima istraživanja, kao najčešća teškoća kod učenika s disleksijom je čitanje bez razumijevanja, što se očituje osobito u zadacima riječima. Ovi rezultati su očekivani, s obzirom na dosadašnja teorijska saznanja o specifičnim teškoćama u učenju. Neki od kriterija za utvrđivanje disleksije prema [1] su upravo teškoće u čitanju, nerazumijevanje pri čitanju i teškoće u sricanju. Očekivano je da će se ove teškoće translatirati posebno na zadatke riječima. Prema [42], problemi koji se očituju pri čitanju su izobličenja, zamjene ili izostavljanja, duljina vremena potrebnog za dovršetak zadatka i pogrešno razumijevanje. Prema [39] zamjene u poretku i zrcaljenja slova i brojki češća su kod osoba s disleksijom u odnosu na učenike urednog razvoja.

Istraživanje je pokazalo da učenici s disgrafijom najčešće imaju nerazumljiv rukopis i mijenjaju slova i znamenke, što se u većoj mjeri podudara s teorijskim spoznajama. Prema [42], najčešće teškoće su pogreške u gramatici, interpunkciji, pravopisnim pogreškama i lošem rukopisu. Također, [8] opisuju da učenici imaju često poteškoće u pisanju, rukopisu i sricanju.

Kao najčešće teškoće kod diskalkulije u istraživanju su se pokazale teškoće u učenju, mijenjanje poretka znamenaka, znamenki i računskih znakova, te matematičko razmišljanje i zaključivanje. Rezultati su u skladu s DSM-5 kriterijima za utvrđivanje diskalkulije, od kojih su navedeni teškoće u razumijevanju broja i pamćenjem matematičkih činjenica, kao i teškoće u računanju i matematičkom zaključivanju. Prema [17], učenici s diskalkulijom postižu znatno lošije rezultate od učenika urednog razvoja pri rješavanju zadataka riječima. Rezultati ovog istraživanja pokazuju da su specifične teškoće u učenju najučestalije teškoće, što potvrđuje i istraživanje [7] činjenicom da su se ispitanici nastavnici u najvećem postotku susretali s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju. Također, [29] prenosi činjenicu da više od 60% učenika sa specifičnim teškoćama u učenju manifestira poteškoće u matematici.

Prema istraživanju, pokazano je da učenici sa specifičnim teškoćama u učenju imaju veću ispitnu anksioznost i strah od matematike, što je i za očekivati. [32] potvrđuje da su učenici sa specifičnim teškoćama u učenju pokazali znatno veće rezultate u mjerenju ispitne anksioznosti od učenika urednog razvoja. Prema [10], anksioznost dodatno utječe na poteškoće u učenju matematike, budući da može dovesti i do podcjenjivanja stvarnih sposobnosti. Također, učenici imaju manjak samopouzdanja u rješavanju matematike, a osobito pokazuju nesigurnost u točnost svojih postupaka i odgovora. [37]

Još jedna od dodatnih teškoća s kojima se, prema istraživanju, učenici sa specifičnim teškoćama susreću više nego učenici urednog razvoja jest nedostatak motivacije. Motivacija je jedan od važnih čimbenika u procesu učenja. Prema [13], motivacija učenika s teškoćama manja je od učenika urednog razvoja, a vršnjačka podrška i zajednički rad dobri su mehanizmi za motivaciju učenika sa teškoćama.

Kvalitativnom analizom prikupljenih podataka pokazalo se da su na planu ovladavanja

gradivom iz područja geometrije i stereometrije iskustva nastavnika proturječna. Dosadašnja istraživanja na učenicima s disleksijom mahom su orijentirana na njihove vizuoprostorne sposobnosti, budući da se one smatraju osnovnim prediktorima ovladavanja vještinom čitanja, ali i navedenih područja matematike [19]. Rezultati ovih istraživanja također nisu jednoznačni, upućujući većinski na pojavu teškoća kod učenika s disleksijom u vidu suženog opsega vizualne pažnje i pamćenja te probleme na planu provođenja vizuokonstruktivnih zadataka (primjerice, [43]). S druge strane, prema [41], djeca s disleksijom superiorna su djeci urednog razvoja na području niza vizuospcijalnih sposobnosti. Razlike navedenih istraživanja, kao i razlike pronađene u ovom istraživanju, mogu biti objašnjene različitom lokalizacijom razvojnih abnormalnosti u mozgu i posljedičnim formiranjem podtipova učenika sa specifičnim teškoćama u učenju. Tako disfunkcije desne hemisfere uzrokuju teškoće primjene aritmetičkih znanja pri rješavanju problemskih zadataka, snalaženja u prostoru i razumijevanja količine, a disfunkcije locirane u lijevoj hemisferi vode k teškoćama razumijevanja apstraktnih značenja brojeva, sekvencioniranja i rješavanja matematičkih operacija [34]. Neovisno o uzroku uočenih razlika, njihova je identifikacija, razumijevanje i uvažavanje od velike važnosti za planiranje rada s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju.

Aritmetika se, prema istraživanju, pokazala kao još jedna grana matematike koja predstavlja poseban problem učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju. Ovaj rezultat istraživanja je za očekivati, s obzirom na kriterij utvrđivanja po [1], koji opisuje teškoće u usvajanju aritmetičkih činjenica i teškoće u računu. U skladu s rezultatima istraživanja, [18] potvrđuje činjenicu da učenici često rade pogriješke u osnovnim računskim operacijama, da su neučinkoviti u računu te da imaju poteškoće u svladavanju osnovnih matematičkih činjenica.

Kao rezultat istraživanja o najistaknutijim prilagodbama koje nastavnici koriste u radu s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju, istaknulo se korištenje posebnih fontova za disleksiju, veći font i razmak, te korištenje dodatnih materijala i vizualnih prikaza. Suprotno prikupljenim podacima, suvremena istraživanja pokazuju da primjena specifičnih fontova za disleksiju nema statistički značajnih utjecaja na brzinu i točnost čitanja kod osoba s disleksijom [16], ali da je povećanje razmaka između slova povezano s boljim postignućima na zadacima čitanja (npr. [33]; i [35]). Prema [15], korištenje digitalnih prikaza i alata važno je za razvijanje matematičkih vještina i matematičkog načina razmišljanja. Dobro je učenike poticati na vizualizaciju matematičkih koncepata, te im pokazati da se njihove ideje mogu izraziti na više načina, primjerice slikama, grafovima ili simbolima.

## **1.6 Zaključak**

Na temelju analize intervjua provedenih s nastavnicima matematike, može se zaključiti da se nastavnici često susreću s učenicima s teškoćama, a ponajviše s učenicima sa spe-

cifičnim teškoćama u učenju. Na nastavi matematike, nastavnici primjećuju karakteristične teškoće učenika sa specifičnim teškoćama u učenju. Najčešći simptomi koji se pojavljuju su previdi pri čitanju, čitanje bez razumijevanja, zamjena slova i/ili znamenki i problemi s računanjem.

Istraživanje je pokazalo da se nastavnici trude prilagoditi nastavne materijale i metode poučavanja. Velik broj nastavnika osobito se osvrće na intenzivno praćenje i podršku tih učenika, čime pokušavaju uspostaviti pozitivan i topao odnos s učenikom. Također, nastavnici koriste općenite postupke za rad s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju: koriste povećani i posebni font, podebljavaju ključne pojmove, stavljaju veći razmak i prored u tekstu, produljuju vrijeme rada i/ili smanjuju broj zadataka na pisanim provjerama znanja. Nastavnici rade i posebne nastavne listiće, na kojima se često nalazi riješeni primjer zadatka i jasne upute što se od učenika očekuje.

Kao grane matematike koje učenicima s teškoćama stvaraju najviše poteškoća, u ovom istraživanju izdvojile su se aritmetika, analitička geometrija te stereometrija. U svakoj grani matematike, kao najproblematičniji tip zadataka izdvajaju se zadatci riječima.

S obzirom na svoje iskustvo, većina nastavnika je zadovoljna sa svojim radom s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju, iako smatraju da na početku rada nisu bilo dovoljno educirani. Kao važne čimbenike za poboljšanje rada s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju, nastavnici najčešće navode edukacije s konkretnim primjerima i materijalima, podršku i suradnju sa stručnom službom, gotove materijale te sustručnjačku podršku kao dobar način za razmjenu iskustava i nove ideje.

S obzirom na rezultate istraživanja koji upućuju na to da nastavnicima nedostaje konkretnih primjera rada s učenicima s posebnim odgojno-obrazovnim potrebama, u nastavku rada ponuđeni su konkretni prijedlozi za diferenciranu nastavu matematike.

## Poglavlje 2

# Konkretni prijedlozi za poučavanje učenika s posebnim odgojno-obrazovnim potrebama

U svrhu provođenja kvalitetne diferencirane nastave matematike, navode se konkretni prijedlozi za poučavanje darovitih učenika i učenika sa specifičnim teškoćama u učenju. S obzirom na rezultate istraživanja, dat će se prijedlozi za određene grane matematike: aritmetika, analitička geometrija i stereometrija.

### 2.1 Aritmetika

#### Učenici sa specifičnim teškoćama u učenju

Učenici sa specifičnim teškoćama u učenju često rade pogreške pri prepisivanju, pa tako i u potpisivanju brojeva pri zbrajanju, oduzimanju, množenju i dijeljenju. Kako bi se smanjio broj pogrešaka pri obavljanju osnovnih računskih operacija, postoje načini kako lakše računati s brojevima.

**Prijedlog 1:** Označavanje jedinica, desetica, stotica, tisućica, desettisućica, itd., različitim bojama.

Kako ne bi došlo do krivog potpisivanja, dobro je odrediti boju za svako mjesto koje pojedina znamenka zauzima: primjerice, jedinice plavom, desetice crvenom, stotice zelenom, tisućice ljubičastom, itd. Na taj način, učenici u zbrajanju i oduzimanju potpisivanjem pišu boju ispod boje, pa bi se time broj pogrešaka mogao smanjiti. Na sljedećoj slici nalazi se primjer.

$$\begin{array}{r} 2634 \\ + 4537 \\ \hline 7171 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 62149 \\ - 932 \\ \hline 61217 \end{array}$$

Slika 2.1: Označavanje različitim bojama

Primjer

**Prijedlog 2:** Razdvajanje broja

Kako bi se olakšalo zbrajanje i oduzimanje brojeva, predlaže se razdvajanje jednog od pribrojnika na dva broja: na dio koji nadopunjujemo do desetice, te ostatak koji u zbroju daje drugi pribrojnik.

Primjer [6]

$$\begin{array}{c} 28 + 7 \rightarrow \\ \swarrow \quad \searrow \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{5} \end{array} \qquad (28 + 2) + 5 = 35$$

Broju 28 treba 2 do prve sljedeće desetice, pa sukladno tomu, broj 7 razdvajamo na 2 i 5. U složenijem primjeru, kada se primjerice zbrajaju dva dvoznamenkasta ili troznamenkasta broja, zbrajanje se provodi tako da se zbrajaju jedinice s jedinicama, desetice s deseticama, stotice sa stoticama, te ako je potrebno, opet se provodi razdvajanje broja. Detaljnije je objašnjeno na sljedećem primjeru:

Primjer [6]

$$\begin{array}{c} \boxed{64 + 64 = 120 + 8 = 128} \\ \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad 40 \quad 20 \end{array}$$

Zbrajajući znamenke jedinica, nije došlo do prelaženja broja 10, pa razdvajanje znamenki jedinica u drugom pribrojniku nije bilo potrebno. No zbrajajući znamenke desetica,

dolazi do prelaženja broja 100, pa se broj 60 razdvaja na 40 i 20, i tako dolazimo do  $120 + 8$ , što dovodi do točnog rezultata od 128. Ovakav način direktno se može primijeniti i u pisanom zbrajanju:

Primjer [6]

$$(a) 576 + 396 = 800 + 160 + 12 \quad (b) \begin{array}{r} 576 \\ + 396 \\ \hline 800 \\ 160 \\ + 12 \\ \hline \hline \end{array}$$

Kod oduzimanja, pokazalo se da je učinkovito razdvajanje broja „prema gore”. Temelji se na nadopunjavanju umanjitelja do umanjenika. Razdvajanje broja „prema gore” objašnjeno je po sljedećem primjeru:

Primjer

$$365 - 147 = ?$$

Broj 147 prvo s 3 nadopunimo do 150, zatim s 50 do 200, potom sa 100 do 300, te nam ostaje 65 da bismo nadopunili do 365. U tom slučaju, dobili smo da će naš rezultat biti zbrajanje svih nadopunjavanja:  $3 + 50 + 100 + 65 = 218$ .

Ovakav način oduzimanja može se prikazati i na brojevnom pravcu, te taj vizualni prikaz može dodatno olakšati oduzimanje:

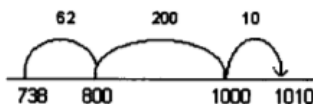
Primjer [6]

$$35 - 18 = \begin{array}{c} +2 \quad +15 \\ \overbrace{18 \quad 20} \quad \overbrace{20 \quad 35} \\ \hline \end{array} = 17$$

$$63 - 41 = 22$$

$$\begin{array}{c} +9 \quad +13 \\ \overbrace{41 \quad 50} \quad \overbrace{50 \quad 63} \\ \hline \end{array}$$

$$1010 - 738 = 272$$



Ovakav način oduzimanja također se može dobro koristiti i u oduzimanju potpisivanjem:

Primjer [6]

$$\begin{array}{r} 356 \\ -189 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 300 + 50 + 6 \\ -100 + 80 + 9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 200 + 140 + 16 \\ -100 + 80 + 9 \\ \hline 100 + 60 + 7 = 167 \end{array}$$

U ovom primjeru oduzima se 189 od 356. Broj 356 rastavlja se kao  $300 + 50 + 6$ , a broj 189 kao  $100 + 80 + 9$ . Potpisivajući, dolazi se do zaključka da 80 ne možemo oduzeti od 50, te da 9 ne možemo oduzeti od 6. Zbog toga se „posuđuje” jedna stotica od 300, te jedna desetica od 50. Tako dobivamo rastav broja 396 na  $200 + 140 + 16$ . U tom slučaju lako možemo oduzeti brojeve:  $200 - 100 = 100$ ,  $140 - 80 = 60$  i  $16 - 9 = 7$ . Konačan rezultat jest  $100 + 60 + 7 = 167$ .

### **Prijedlog 3:** Cuisenaireovi štapići

Jedan od didaktičkih materijala za poučavanje učenika sa specifičnim teškoćama u učenju su Cuisenaireovi štapići. To su drveni štapići u različitim bojama i veličinama, a svaka veličina ima svoju određenu boju. To omogućava lako prepoznavanje duljine štapića bez dodatnog mjerenja i prebrojavanja jedinica. Najmanji štapić je bijele boje i duljine 1 cm, a najveći je narančaste boje i ima duljinu 10 cm. [11]

Cuisenaireovi štapići olakšavaju zbrajanje i oduzimanje, a mogu se dobro koristiti i u aktivnostima poput zbrajanja i oduzimanja razlomaka i svođenja na zajednički nazivnik, rješavanja linearnih jednadžbi i slično. Korištenje Cuisenaireovih štapića objašnjeno je na aktivnosti računanja s novcem:

Primjer

Petra je u trgovini kupila čokoladu za 12 kuna, te platila novčanicom od 20 kuna. Koliko novca joj prodavačica mora vratiti?



$$20 - 12 = 8$$

Narančasti štapić predstavlja novčanicu od 20 kuna, žuti predstavlja novčanicu od 10 kuna, crveni kovanicu od 5 kuna, a bijeli od 1 kunu. Novčanice, odnosno štapiće, rastavljamo dok god ne dobijemo iznos od 12 kuna koji lako možemo prebrojati: Ta kombinacija je zadnja u nizu: jedna novčanica od 10 kuna (žuti štapić), jedna kovanica od 5 kuna (crveni štapić) i pet kovanica od 1 kune (bijeli štapići). Kada pomoću Cuisenaireovih štapića



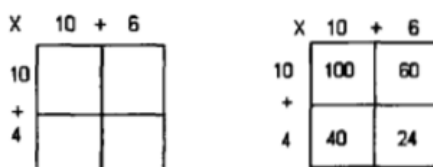
zbrojimo 12, odnosno:  $10 + 1 + 1 = 12$ , vidimo da nam ostaje  $5 + 1 + 1 + 1 = 8$ .

**Prijedlog 4:** Model kutije

Model kutije prijedlog je kako olakšati množenje, koristeći se zbrajanjem. Na sljedećem primjeru pojašnjeno je kako metoda funkcionira.

Primjer [6]

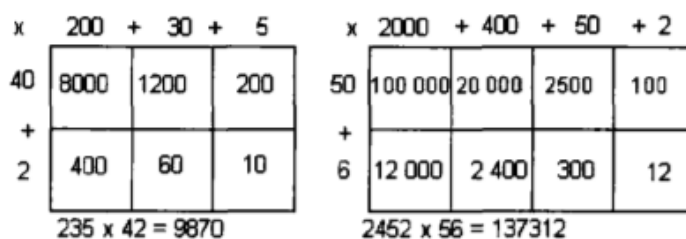
$14 \cdot 16 = ?$



$14 \cdot 16 = 100 + 60 + 40 + 24 = 224$

Dakle, ova metoda se zasniva na tome da svaki od faktora rastavimo na zbroj brojeva koje nam je lako pomnožiti. Skiciramo kvadrat ili pravokutnik, te ga podijelimo na stupce i retke. Broj stupaca i redaka ovisi o broju pribrojnika na koje je faktor rastavljen. Zatim u svako polje „kutije” upisujemo umnožak brojeva koji su pridodani stupcu i retku tog polja. Konačan rezultat bit će zbroj svih polja.

Primjer [6]



**Daroviti učenici**

Prijedlozi za poučavanje aritmetike darovitih učenika odnose se na konkretne tipove zadataka koji bi učenicima mogli biti zanimljivi, korisni i izazovni.

### Prijedlog 1

Primjer 1 [Matematička liga 2019./20., 5. razred] [20]

Znakovi  $\bigcirc$ ,  $\nabla$  i  $\square$  predstavljaju pozitivne prirodne brojeve različite od 1. Koliko je  $\nabla$  ako vrijedi:

$$\bigcirc \cdot \nabla = 80 \quad \text{i} \quad \bigcirc \cdot \square \cdot \square = 50 ?$$

Rješenje:

Koristeći činjenicu da je rastav broja na proste faktore jedinstven, broj 50 rastavlja se kao  $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$ . Uvrštavajući u  $\bigcirc \cdot \square \cdot \square = 50$ , dobije se:  $\bigcirc \cdot \square \cdot \square = 2 \cdot 5 \cdot 5$ . Postavljajući jednakost na ovaj način, lako se da zaključiti da vrijedi:  $\square = 5$ , te  $\bigcirc = 2$ . Uvrštavajući  $\bigcirc = 2$  u  $\bigcirc \cdot \nabla = 80$ , dobije se rezultat:  $\nabla = 40$ .

Primjer 2 [Županijsko natjecanje iz matematike 2021., 5. razred] [20]

Umetni jednu ili više zagrada tako da vrijednost izraza  $5 \cdot 12 + 6 \div 3 - 1$  bude:

- a) 21
- b) 25
- c) 33
- d) 63

Učenici zadatke mogu rješavati isprobavajući razne kombinacije, najviše se oslanjajući na to da je rješenje prirodan broj, te da se pritom najviše mora paziti na djeljivost brojeva. Rješenja zadatka su:

- a)  $(5 \cdot 12 + 6) \div 3 - 1 = 21$
- b)  $5 \cdot ((12 + 6) \div 3 - 1) = 25$
- c)  $(5 \cdot 12 + 6) \div (3 - 1) = 33$
- d)  $5 \cdot 12 + 6 \div (3 - 1) = 63$

Primjer 3 [Županijsko natjecanje iz matematike 2020., 5. razred] [20]

Količnici  $A = \overline{2a4b} \div 15$  i  $B = \overline{3c8d} \div 18$  su prirodni brojevi. Odredi zbroj najmanjeg mogućeg broja  $A$  i najvećeg mogućeg broja  $B$ .

Rješenje:

Kako bi riješili ovaj zadatak, učenici moraju znati kada je broj djeljiv s 15 i kada je broj djeljiv s 18.

Broj je djeljiv s 15 ako je djeljiv i s 5 i s 3, a to znači da zadnja znamenka mora biti 5 ili 0 te da zbroj znamenki mora biti djeljiv s 3. Kod broja  $\overline{2a4b}$ , razmatraju se dva slučaja:  $b = 0$  i  $b = 5$ .

Ako je  $b = 0$ , onda  $a$  mora biti 0, 3, 6 ili 9, pa su opcije za  $A$  jednake 2040, 2340, 2640, 2960. Ako je  $b = 5$ , onda  $a$  mora biti 1, 4 ili 7, pa su opcije za  $A$  jednake 2145, 2445, 2745.

Broj je djeljiv s 18 ako je djeljiv i s 2 i s 9, a to znači da zadnja znamenka u  $\overline{3c8d}$  mora biti 0, 2, 4, 6 ili 8, a zbroj znamenki mora biti djeljiv s 9. Dakle, za  $d = 0$ , mora vrijediti  $c = 7$ ; za  $d = 2$ , mora vrijediti  $c = 5$ ; za  $d = 4$ , mora vrijediti  $c = 3$ ; za  $d = 6$ , mora vrijediti  $c = 1$ ; za  $d = 8$ , mora vrijediti  $c = 8$ .

Stoga, opcije za  $B$  su 3780, 3582, 3384, 3186, 3888.

Najmanji mogući broj  $A$  dobije se ako se najmanji broj oblika  $\overline{2a4b}$  podijeli s 15 :  $A = 2040 \div 15 = 136$ .

Najveći mogući broj  $B$  dobije se ako se najveći broj oblika  $\overline{3c8d}$  podijeli s 18 :  $B = 3888 \div 18 = 216$ .

Njihov zbroj iznosi:  $A + B = 136 + 216 = 352$ .

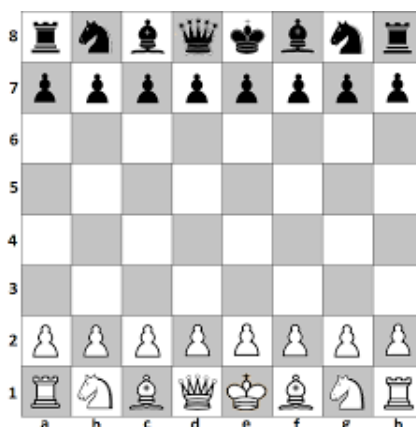
## 2.2 Analitička geometrija

### Koordinatni sustav u ravnini

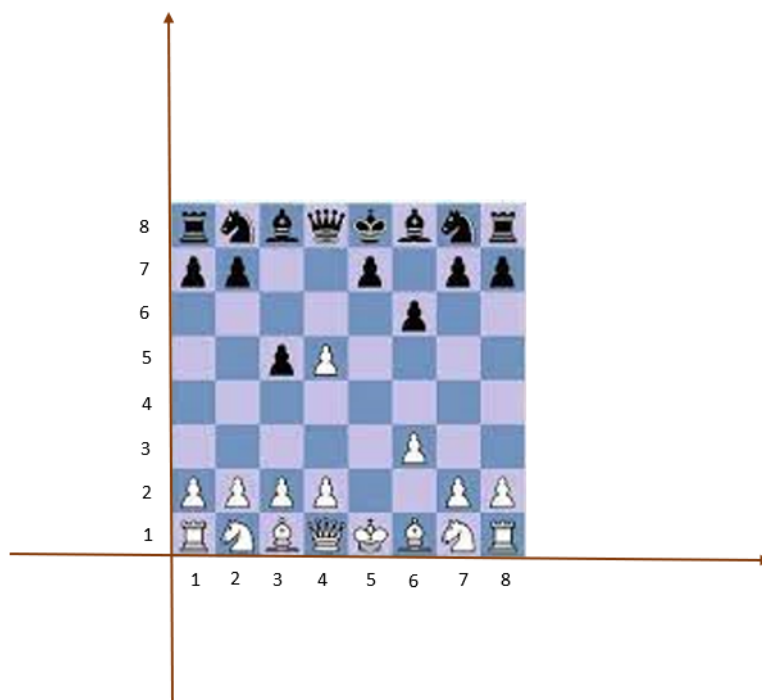
#### Učenici sa specifičnim teškoćama u učenju

##### Prijedlog 1: Šahovska ploča

Uvođenje koordinatnog sustava u ravnini kroz primjer iz života može znatno doprinijeti shvaćanju važnosti koordinatnog sustava. To možemo učiniti promatrajući šahovsku ploču:



Učenike se može navesti da, pomoću notacije koja je navedena, imenuju na kojim mjestima se nalazi koja figura, potičući ih da prvo kažu slovo, a zatim broj. Primjerice, bijeli konji nalaze se na mjestima „b1” i „g1”, bijeli lovci na mjestima „c1” i „f1”, a crna kraljica na mjestu „d8”. Također, postavljajući pitanje koja figura se nalazi na mjestu „e1”, učenici već mogu steći dojam da je oznakom slova i broja položaj figure jedinstveno određen.



Slika 2.2: Šahovska ploča u koordinatnom sustavu u ravnini

Na ovaj način, šahovska ploča postavljena je u koordinatni sustav u ravnini. Učenike se upoznaje s Kartezijevim koordinatnim sustavom u ravnini,  $x$  i  $y$  koordinatnim osima, te točkama kao uređenim parovima  $(x, y)$ . Na ovom primjeru da se utvrditi da je redoslijed bitan:  $(2, 1)$  nije isto što i  $(1, 2)$ .

### Prijedlog 2: Potapanje brodova

Još jedan zgodan način kako povezati koordinatni sustav u ravnini sa stvarnim životom jest popularna igra *Potapanje brodova*. Za ovu igru za dva igrača zapravo su dovoljna dva papira na kojima su nacrtane mreže kvadratića  $10 \cdot 10$ , koji su s lijeve strane označeni brojevima 1-10, a s gornje strane slovima A-L. Svaki igrač na svom papiru crta flotu: 1 borbeni brod (6 kvadratića), 2 krstarice (4 kvadratića), 3 razarača (3 kvadratića), te 4 podmornice (2 kvadratića). Kada su brodovi postavljeni, igrači koristeći koordinate (broj i slovo u

kombinaciji) pokušavaju pogoditi položaj nekog od brodova suprotnog igrača. Cilj je da igrač pokuša prvi otkriti položaj suigračevih brodova. Ako je protivnik „pogodio” brod, igrač križićem označava polje i obaviještava suigrača da je pogođen jedan od brodova. Igra završava kada je jednom od igrača potopljena cijela flota.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
1										
2										
3										
4			×							
5						×	×			
6		×						×		×
7				×						×
8	×	×						×		
9										
10										

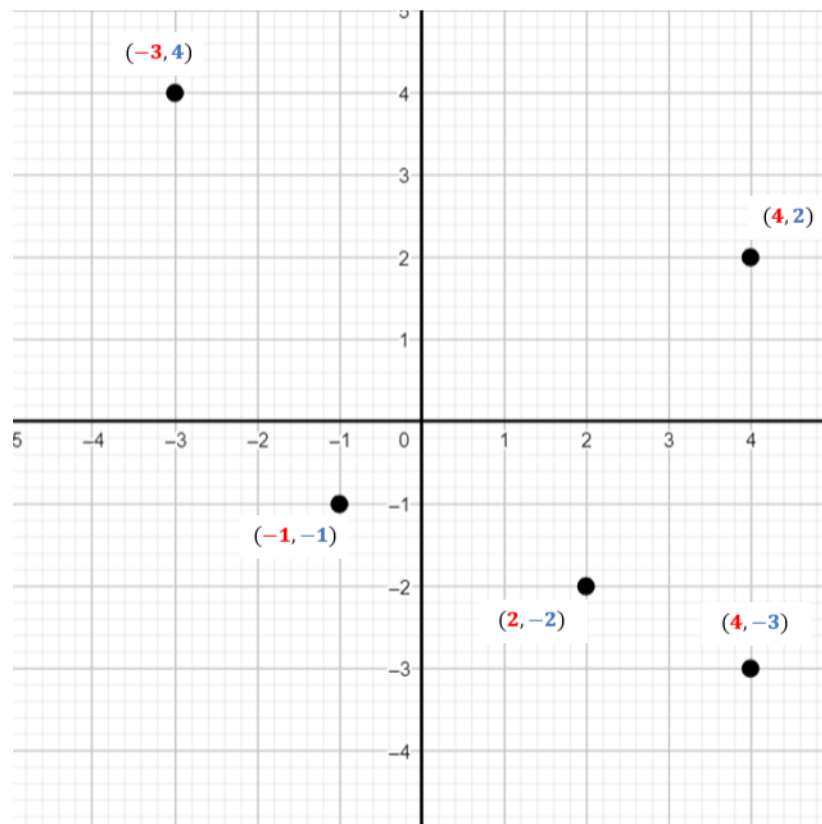
Slika 2.3: Potapanje brodova

Slova na gornjoj strani mreže kvadrata mogu se pisati i na donjoj strani, zatim zamijeniti brojevima, pa usporediti s koordinatnim sustavom u ravnini. Na ovaj način, učenicima se, kao i kod modela šahovske ploče, uvodi koordinatni sustav u ravnini, te na isti način pojašnjavaju svojstva Kartezijevog koordinatnog sustava u ravnini, točke kao uređeni parovi, te važnost redoslijeda koordinata.

### Prijedlog 3: Koordinate u bojama

Nastavni listić kao podsjetnik učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju može biti od znatne pomoći u ucrtavanju točaka u koordinatnom sustavu u ravnini. Budući da učenici često znaju mijenjati  $x$  i  $y$  koordinate, i samim time ucrtati drugačije točke nego što je zadano, ideja da se koordinatne osi  $x$  i  $y$  koordinate označe u različitim bojama mogla bi pridonijeti smanjenju broja pogrešaka.

Prilaganjem ovog nastavnog listića kao dodatnog materijala za korištenje pri rješavanju zadataka, učenici uviđaju da je bitno prvo gledati  $x$  koordinatu, a zatim  $y$  koordinatu, a to povezuju i po bojama koje su pridodane: crvena kao  $x$  koordinata ide prva, a plava kao  $y$  koordinata ide druga. Posebno mogu obratiti pozornost da kada koordinatama zamijenimo mjesta, da ne dobijemo istu točku:  $(-3, 4)$  nije isto kao  $(4, -3)$ .



Slika 2.4: koordinatni sustav u bojama

Dodatan prijedlog koji može pomoći u svladavanju koordinatnog sustava u ravnini jest promatranje koordinatnog sustava vertikalno: ili na ploči, ili postavljanje papira s ucrtanim koordinatnim sustavom vertikalno. Neki nastavnici koji su sudjelovali u istraživanju su potvrdili kako se učenici nisu mogli snaći gledajući u koordinatni sustav u ravnini na školskoj klupi, ali promatrajući ga vertikalno, učenici nisu imali problema sa snalaženjem u koordinatnom sustavu u ravnini. Također, u rješavanju zadataka i pisanim provjerama znanja, učenicima bi moglo biti od pomoći da već dobiju nacrtani koordinatni sustav u kojemu je određena jedinična dužina  $i$  u kojem su ucrtani brojevi.

### Daroviti učenici

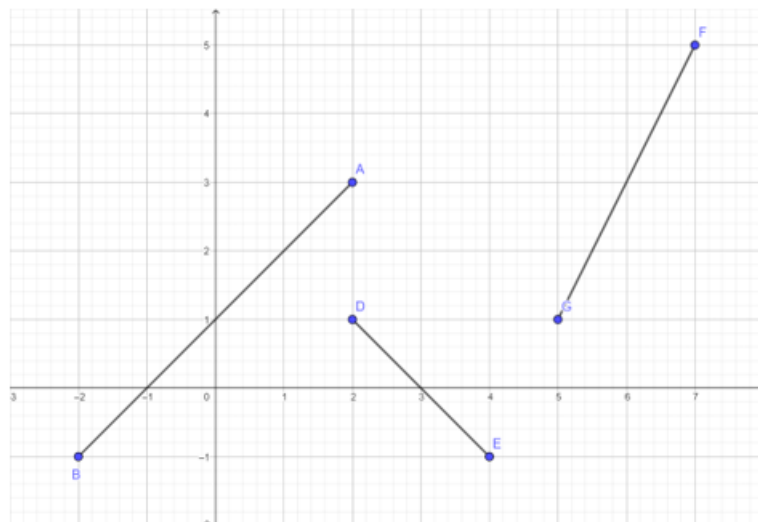
#### Prijedlog 1

Darovitim učenicima može se ponuditi aktivnost koja ih usmjerava da sami dođu do

zaključka kako doći do koordinata polovišta dužine, ako su poznate koordinate krajnjih točaka.

Primjer 1.

U koordinatnom sustavu prikazane su tri dužine:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{DE}$ ,  $\overline{FG}$ .



a) Konstruiraj polovište  $P_1$  dužine  $\overline{AB}$ ,  $P_2$  dužine  $\overline{DE}$ ,  $P_3$  dužine  $\overline{FG}$ .

b) Popuni tablicu koordinatama točaka:

$A = ( \quad , \quad )$	$D = ( \quad , \quad )$	$F = ( \quad , \quad )$
$B = ( \quad , \quad )$	$E = ( \quad , \quad )$	$G = ( \quad , \quad )$
$P_1 = ( \quad , \quad )$	$P_2 = ( \quad , \quad )$	$P_3 = ( \quad , \quad )$

c) Polovište dužine jednako je udaljeno od krajnjih točaka dužine. Kako možemo računski za točke  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$  doći do koordinata polovišta  $P(x, y)$ ? Uočavaš li pravilnost iz navedenih primjera?

Kroz ovaj nastavni listić učenici bi trebali doći do zaključka kako za koordinate polovišta  $P$  vrijedi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

i

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

U slučaju da učenici ne dođu sami do tog zaključka, može ih se navesti tako da se postavi pitanje: *Koliko iznosi  $\frac{2+(-2)}{2}$ , a koliko  $\frac{3+(-1)}{2}$ ?* Na taj način učenici bi trebali uvidjeti da su u brojcima razlomaka  $x$  i  $y$  koordinate krajnjih točaka, a rezultati upravo koordinate polovišta  $P_1$ . Sukladno tomu, trebali bi poopćiti formulu i provjeriti ju na druge dvije dužine.

Dodatno je dobro upoznati učenike s pojmom aritmetičke sredine, te napomenuti da je  $x$  koordinata polovišta jednaka aritmetičkoj sredini  $x$  koordinata krajnjih točaka, a  $y$  koordinata polovišta jednaka aritmetičkoj sredini  $y$  koordinata krajnjih točaka.

## Odnosi pravaca i ravnina

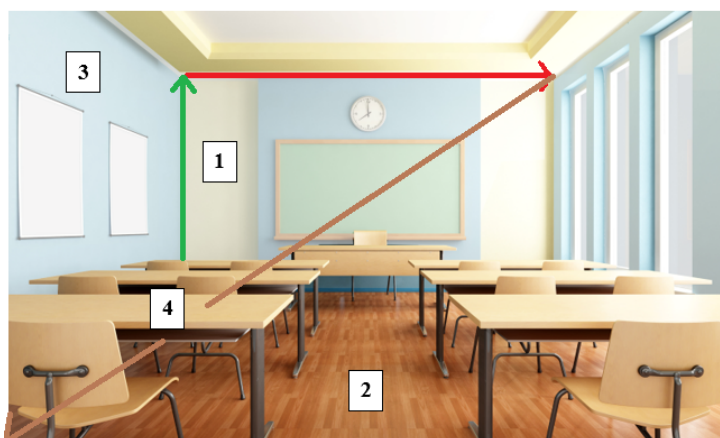
### Učenici sa specifičnim teškoćama u učenju

#### Prijedlog 1: Model učionice

Budući da učenici mogu imati problem s vizualizacijom i shvaćanjem međusobnih odnosa ravnina i pravaca, učionica u kojoj se nalaze može poslužiti kao dobar model za razumijevanje tih odnosa. Zidovi i plohe školskih klupa predstavljaju ravnine, a bridovi pravce. Pomoću sljedećeg primjera objašnjeno je kako bi se moglo lakše vizualizirati i pojasniti odnos među pravcima i ravninama.

#### Primjer





Ravnina „1” označava zid na kojem se nalazi ploča, „2” je pod učionice, „3” lijevi bočni zid, a „4” je ravnina koja sadrži plohu školske klupe. Objasnjavajući odnose i postavljajući pitanja, nastavnici zajedno s učenicima dolaze do odnosa među ravninama: „1” i „2” se sijeku po bridu koji spaja pod i zid na kojem je ploča; „1” i „3” se sijeku po zelenom pravcu; „2” i „3” se sijeku po bridu koji spaja pod i lijevi bočni zid. Budući da je ravnina beskonačna, ravnina „4” se promatra kao ploha školske klupe koja se širi sa sve 4 strane. Tako se dolazi do zaključka da se i ravnine „3” i „4” sijeku, kao i ravnine „1” i „4”. Budući da ravnine „2” i „4” nemaju zajedničkih točaka, one su usporedne. Budući da su zeleni i crveni pravac dio ravnine „1”, kaže se da ti pravci leže u ravnini „1”. Smeđi pravac s ravninom „1” ima samo jednu zajedničku točku, upravo u kutu učionice, pa smeđi pravac probada ravninu „1”. Budući da je pravac beskonačan, smeđi pravac probada i sve druge ravnine: „2”, „3” i „4”. Crveni pravac leži u ravnini „1”, probada ravninu „3”, a budući da nema nijednu zajedničku točku s ravninama „2” i „4”, usporedan je s tim ravninama. Zeleni pravac je zajednički pravac ravninama „1” i „3”, pa leži u obje ravnine. Također, zeleni pravac probada ravnine „2” i „4”. Ako se promatraju odnosi među pravcima, lako se iz ovog primjera da primijetiti da se zeleni i crveni pravac sijeku, kao i crveni i smeđi. Uz to, zeleni i crveni pravac se sijeku pod pravim kutom, stoga su okomiti. Budući da se nalazimo u prostoru, a zeleni i smeđi pravac nemaju zajedničkih točaka, oni su mimoilazni pravci. Osim što ih možemo opisati tako da učenicima bude jasno, zgodno je koristiti i laser kako bi se prikazali pravci u učionici.

### Prijedlog 2: Fizički model

Za prikaz odnosa među pravcima i ravninama u prostoru može se poslužiti papirom i olovkom ili plastičnim iglama za pletenje. Na taj način, papiri predstavljaju ravnine, a olovke ili plastične igle za pletenje predstavljaju pravce. U odnosu na ravninu, pravac se može postaviti tako da leži u ravnini (npr. olovka na papiru), da siječe ravninu (npr.

probosti papir olovkom), ili da je pravac okomit na ravninu (npr. probosti papir olovkom koja je postavljena pod pravim kutem). Na isti način se mogu promatrati i dvije ravnine, te opisati međusobni položaj: usporedne ili okomite. Imajući pred sobom fizički model, učenici bi trebali moći lakše predočiti i nacrtati reprezentaciju odnosa pravaca i ravnina u svojim bilježnicama.

## 2.3 Stereometrija

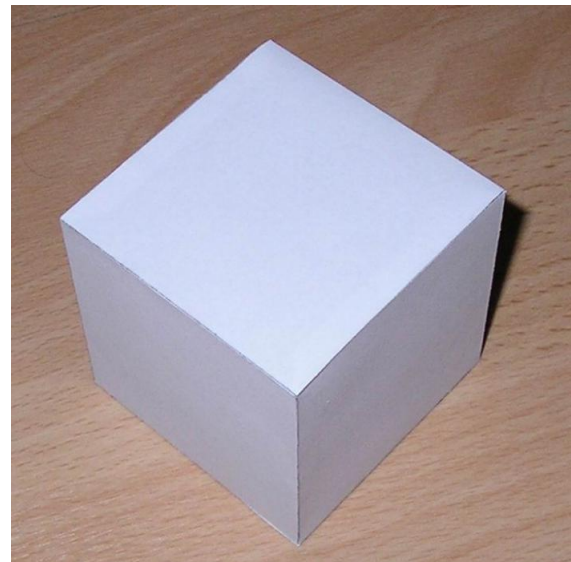
**Učenici sa specifičnim teškoćama u učenju**

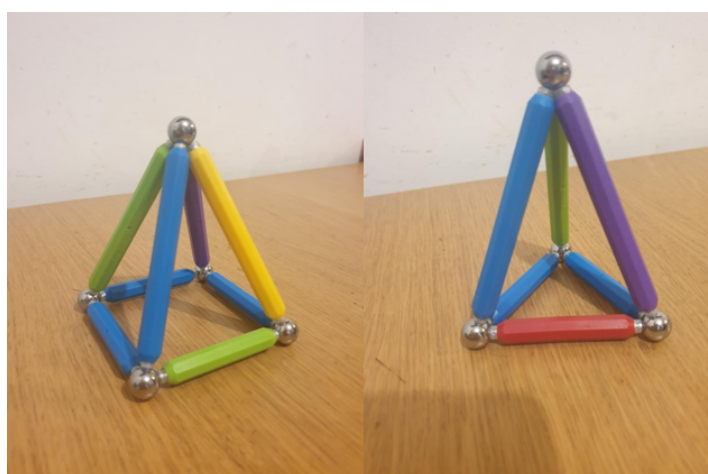
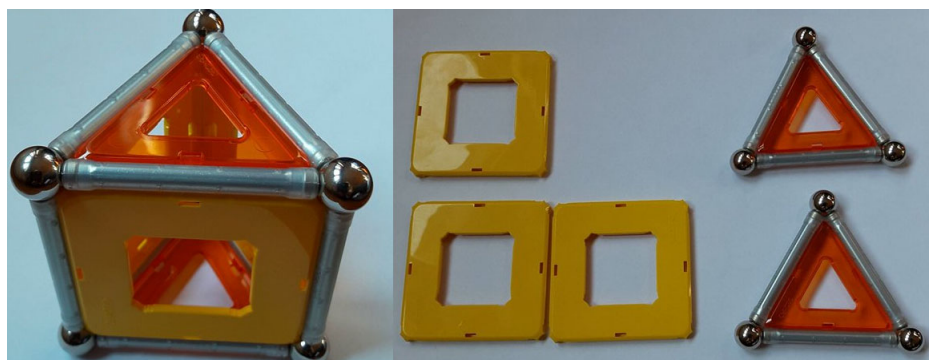
**Prijedlog 1:** Fizički modeli

Crtanje 3D modela na papiru može učenicima stvarati problem: može se dogoditi da ne mogu dovoljno precizno nacrtati sliku, promatrati odnose pravaca i ravnina, računati oplošje i volumen i slično. Zbog toga, fizički modeli geometrijskih tijela mogu im znatno pomoći u prebrojavanju bazi i pobočki, razlikovanju različitih tijela i primjećivanju njihovih razlika, računanju oplošja i volumena, crtanju mreže, te računanju duljina bočnih bridova i visina.

Fizički modeli mogu biti napravljeni na razne načine: papir ili karton, slamke, žica ili razni didaktički materijali.

Primjeri





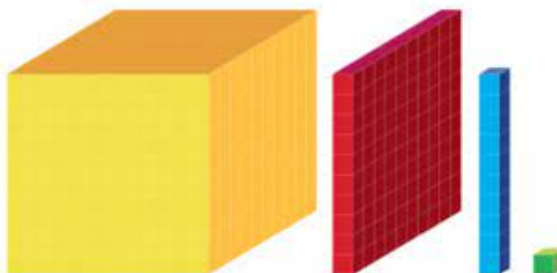
Koristeći modele napravljene od papira ili kartona, učenici mogu lakše odrediti bazu i pobočke, izračunati oplošje i nacrtati mrežu. Koristeći modele napravljene od žice, slamki ili didaktičkih materijala, učenici mogu lakše odrediti bazu i pobočke, prikazati i izračunati visinu, odrediti prostornu dijagonalu i doći do zaključka kako izračunati njezinu duljinu.

**Prijedlog 2:** Stern blokovi ili Dienesovi blokovi

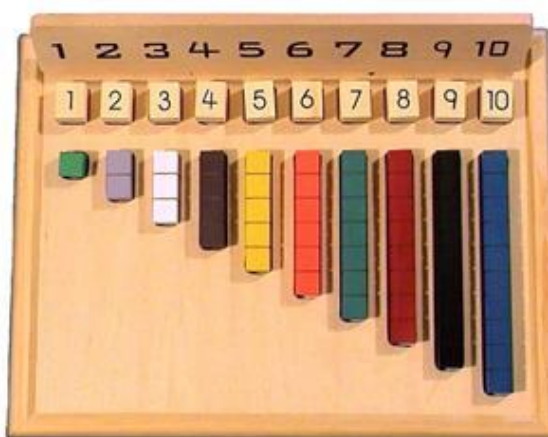
Stern blokovi i Dienesovi blokovi su didaktički materijali koji služe za poučavanje učenika s diskalkulijom. Stern blokovi su plastične ili drvene kockice koje predstavljaju jedinicu i štapić koji se sastoji od deset spojenih kockica, a predstavlja desetice. [26]

Dienesovi blokovi su komplet drvenih ili plastičnih blokova u istoj boji koji čine kocku, stupić, kvadratnu pločicu ili blokove. Jedna kockica čini kocku, deset kockica čini stupić, sto kockica čini kvadratnu pločicu, a tisuću kockica čini blok.

Stern ili Dienesovi blokovi koriste za izradu fizičkog modela pravilnih četverostranih prizmi, a s obzirom na svojstvo kockica, pomaže u izračunavanju volumena tijela.



Slika 2.5: Dienesovi blokovi (slika preuzeta iz diplomskog rada *Rad s učenicima s teškoćama u nastavi matematike: diskalkulija*)



Slika 2.6: Stern blokovi (slika preuzeta iz diplomskog rada *Rad s učenicima s teškoćama u nastavi matematike: diskalkulija*)

### Prijedlog 3: KRA [14]

KRA, skraćeno od Konkretno-Reprezentativno-Apstraktno, model je koji učenicima omogućuje lakše zaključivanje i povezivanje s „gotovom formulom”. Model se provodi u tri faze:

Faza	Nastavna praksa
konkretno	fizički model
reprezentativno	prikaz slike
apstraktno	apstraktni zapis

Primjer

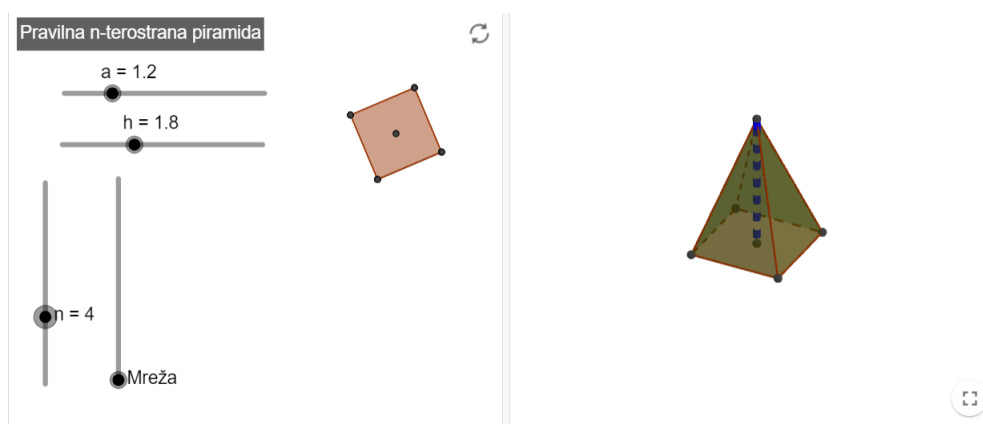
Faza	Nastavna praksa	Primjer
konkretno	fizički model	trostrana prizma od papira
reprezentativno	prikaz slike	slika trostrane prizme na papiru
apstraktno	apstraktni zapis	formula za oplošje trostrane prizme

Koristeći KRA, učenici promatrajući fizički model crtaju skicu trostrane prizme u bilježnicu, te povezuju formulu za oplošje trostrane prizme s fizičkim modelom i skicom.

#### Prijedlog 4: GeoGebra

Kao jedan od matematičkih alata, *GeoGebra* se pokazala kao dobar alat za prikaz geometrijskih tijela. Koristeći *GeoGebra*, učenici mogu nacrtati geometrijsko tijelo, promotriti njegova svojstva, razviti tijelo u mrežu i slično. Detaljnije je objašnjeno na primjeru piramide:

#### Primjer

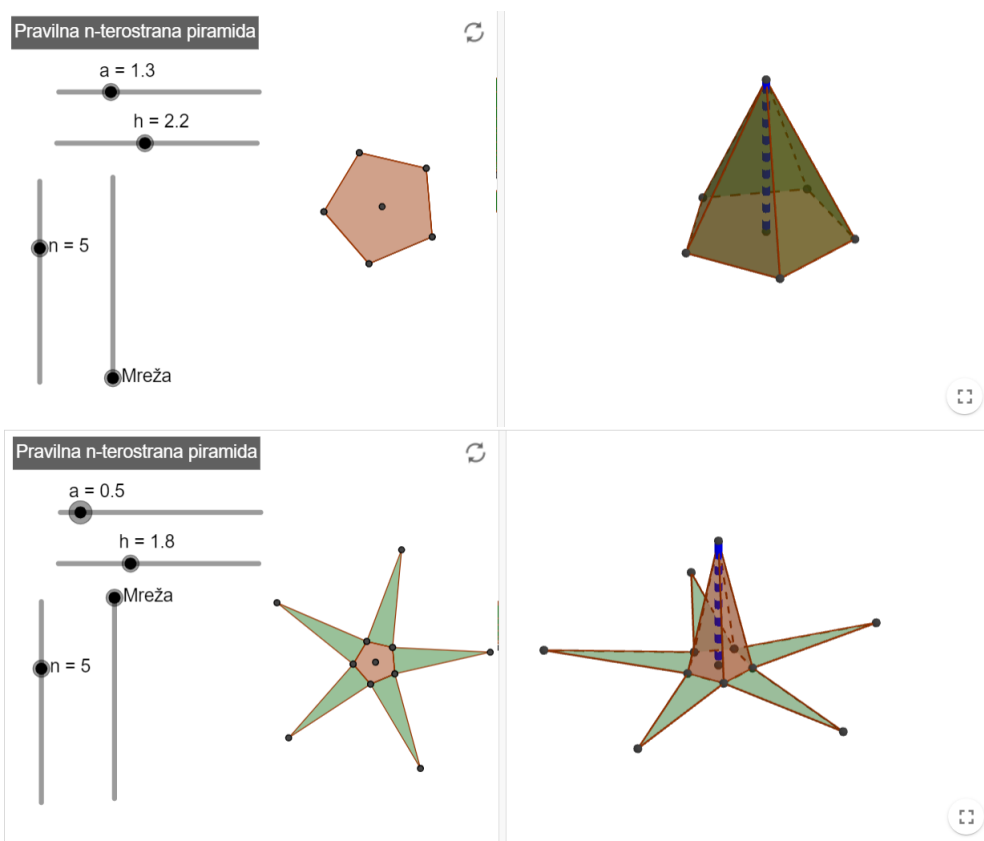


Slika 2.7: Piramida (slike preuzete iz <https://www.geogebra.org/m/NV3euGk7>)

Na slici je prikazana pravilna četverostrana piramida. U *GeoGebri* su napravljena tri klizača:  $a$  (duljina osnovnog brida),  $h$  (visina piramide) i  $n$  (broj vrhova). Konstruira se dulžina zadane duljine  $a$  (vrijednost klizača  $a$ ), pravilan mnogokut s brojem stranica  $n$  (vrijednost klizača  $n$ ), kružnica kroz tri točke (tri vrha baze), te se odredi središte te kružnice (središte baze). Vrh piramide definira se tako da se u *Traku za unos* upiše:  $V = (x(\text{ime središta kružnice}), y(\text{ime središta kružnice}), h)$ . Zatim se konstruira piramida klikom

na bazu i vrh (točka  $V$ ). Klikom na opciju *Mreža*, napravi se mreža piramide, a spajanjem središta baze i vrha, konstruira se visina piramide.

Koristeći klizače, lako možemo dobiti sliku npr. peterostrane pravilne piramide mijenjanjem klizača  $n$  na  $n = 5$ . S lijeve strane vidljiva je njezina baza, a povlačenjem klizača *Mreža* do kraja, dobije se nacrtana i mreža peterostrane piramide.



## Daroviti učenici

### Prijedlog 1: Cavalierijev princip

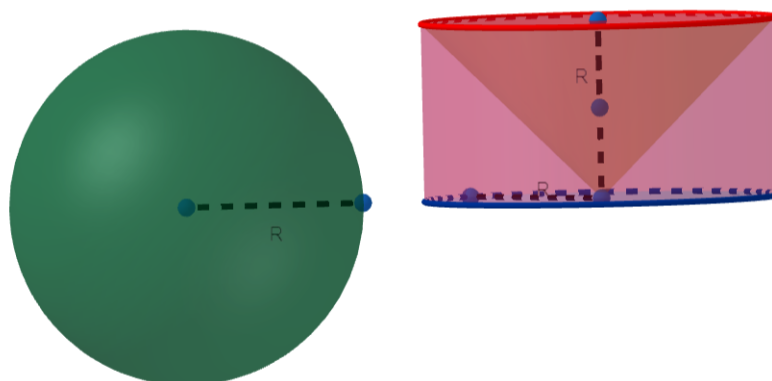
Cavalierijev princip za tijela glasi: Ako se dva geometrijska tijela nalaze između dviju paralelnih ravnina i svaka ravnina paralelna tim ravninama siječe tijela tako da presjeci imaju istu površinu, tada tijela imaju jednake volumene. [12] To se dobro vidi na sljedećoj slici: jednak je broj žetona i u prvom i u drugom stupcu, stoga je volumen jednak. [4]





Primjer Volumen kugle

Koristeći Cavalierijev princip, izvedi formulu za volumen kugle radijusa  $R$ , koristeći se valjkom i stošcem čiji su radijus baze i visina jednaki  $R$ .

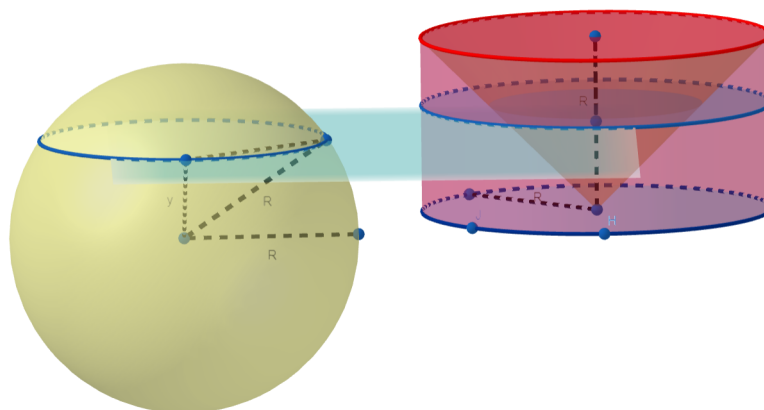


Slika 2.8:

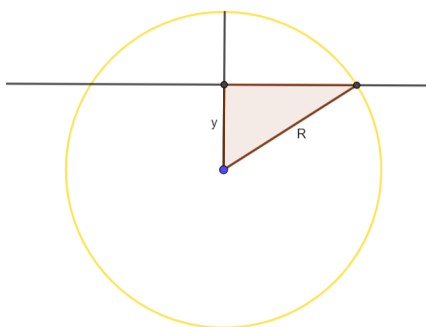
Rješenje:

Potrebno je usporediti volumen polukugle radijusa  $R$  s volumenom valjka izvan stošca baze radijusa  $R$  i visine  $R$ .

Neka se na visini  $y$  od vrha stošca odabere ravnina koja je usporedna s bazama valjka, te s bazom polukugle. Presjek te ravnine i dijela valjka izvan stošca ima površinu:  $R^2\pi - y^2\pi$ . Na presjeku kugle i ravnine, upotrijebi se Pitagorin poučak:



Odnosno, promatra li se presjek u 2D, dobije se:



Po Pitagorinom poučku, presjek kugle i te ravnine ima površinu:  $(R^2 - y^2)\pi$ . Budući da presjek polukugle i dijela valjka bez stošca na jednakoj visini imaju jednaku površinu, prema Cavalierijevom principu slijedi da polukugla i dio valjka bez stošca imaju jednak volumen.

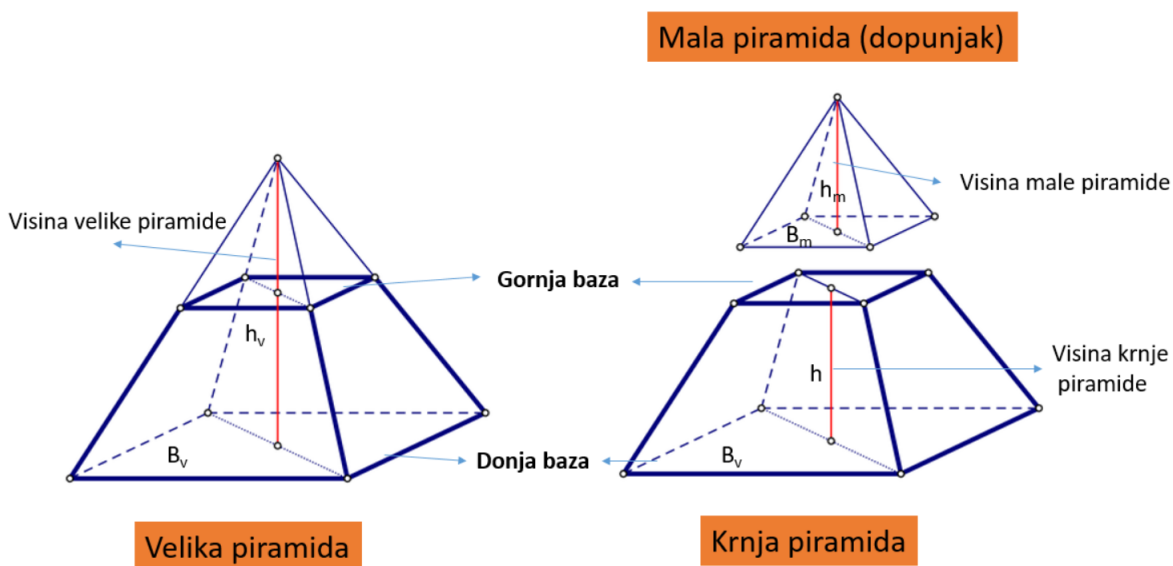
Poznajući formule za volumen valjka i stošca, dobije se da je volumen ovog valjka jednak  $R^2\pi \cdot R$ , a volumen ovog stošca  $\frac{1}{3}R^2\pi \cdot R$ . Stoga je volumen dijela valjka bez stošca jednak:  $R^3\pi - \frac{1}{3}R^3\pi = \frac{2}{3}R^3\pi$ .

Dakle, po Cavalierijevom principu volumen polukugle iznosi  $\frac{2}{3}R^3\pi$ , što dovodi do formule za volumen kugle:  $\frac{4}{3}R^3\pi$ .

### Prijedlog 2: Krnja piramida [3]

Krnja piramida je geometrijsko tijelo nastalo presijecanjem piramide ravninom paralelnom s bazom i odbacivanjem manje piramide. Na donjoj slici prikazani su nazivi, oznake i dijelovi piramide:





Slika 2.9: Dijelovi krnje piramide (slika preuzeta iz [3])

### Primjer

Na osnovu slike i oznaka na slici, odredi obujam krnje piramide.

Rješenje:

Bitno je uočiti da su mala i velika piramida slične, kao što su i baze velike i male piramide slični likovi, te da je obujam krnje piramide jednak razlici obujma velike piramide i obujma male piramide. Stoga, koristeći oznake, može se odrediti koeficijent sličnosti  $k$ :

$$k = \frac{h_v}{h_m} = \frac{h + h_m}{h_m}$$

Tada su baze slične s koeficijentom

$$k^2 = \frac{B_v}{B_m} = \frac{(h + h_m)^2}{h_m^2}$$

Iz ovog izraza može se iskazati visina manje piramide:

$$h_m = \frac{h \sqrt{B_m}}{\sqrt{B_v} - \sqrt{B_m}} = \frac{h \sqrt{B_m} (\sqrt{B_v} + \sqrt{B_m})}{B_v - B_m}$$

Budući da vrijedi:

$$V = V_v - V_m$$

dobije se:

$$V = \frac{1}{3}B_v h_v - \frac{1}{3}B_m h_m = \frac{1}{3}B_v(h + h_m) - \frac{1}{3}B_m h_m = \frac{1}{3}B_v h + \frac{h_m}{3}(B_v - B_m)$$

Uvrštavajući dobivenu formulu za  $h_m$ , dobije se konačna formula za obujam krnje piramide:

$$V = \frac{h}{3}(B_v + \sqrt{B_v B_m} + B_m)$$

## 2.4 Zadatci riječima

### Učenici sa specifičnim teškoćama u učenju

Zadatci riječima, u bilo kojoj grani matematike, učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju stvaraju poteškoće. Sljedeći prijedlozi za učenike sa specifičnim teškoćama u učenju odnose se na mnemotehnike, koje pomažu učenicima da shvate što je u zadatku zadano, što se od njih traži te koji bi postupak trebali primijeniti.

#### Prijedlog 1: RIDE [21]

Učenici koji imaju poteškoća s apstraktnim zaključivanjem, pozornošću, pamćenjem i vizualizacijom, mogu imati koristi od mnemotehnike RIDE. RIDE označava:

- R = Remember the problem correctly
- I = Identify the relevant information
- D = Determine the operations and the unit for expressing the answers
- E = Enter the correct numbers, calculate and check the answer

Dakle, R stoji za *Remember*, odnosno zapamti problem ispravno. I stoji za *Identify*, tj. prepoznaj važne informacije. D stoji za *Determine*, odrediti operacije koje treba koristiti i jedinice u kojoj će odgovor biti izražen. E stoji za *Enter*, a odnosi se na unos točnih brojeva, točan račun i provjeru rješenja.

Na sljedećem zadatku riječima provedena je ova strategija:

#### Primjer

Mama Anita radi sok od bazge. Planira ga uliti u boce obujma  $\frac{5}{8}$  litara. Kada je završila pripremu, dobila je sveukupno 18 litara soka. Koliko boca će joj trebati kako bi prelila sok?

Rješenje:

Koristeći mnemotehniku RIDE, označava se:

R = Izrađeno je 18 litara soka, koje treba razdijeliti u boce obujma  $\frac{5}{8}$  litara. Nije poznato koliko boca je potrebno.

I = Količina soka koja je izrađena je 18 litara. Boce su obujma  $\frac{5}{8}$  litara.

D = Da bi dobili broj boca, moramo podijeliti sav sok u boce obujma  $\frac{5}{8}$  litara. Budući da je i količina soka i obujam boca izražen u litrama, ne treba pretvarati mjerne jedinice. Dovoljno je podijeliti količinu soka s obujmom jedne boce:  $18 \div \frac{5}{8}$ .

$$E = 18 \div \frac{5}{8} = 18 \cdot \frac{8}{5} = \frac{144}{5} = 28\frac{4}{5}.$$

Budući da u zadatku traži broj boca,  $28\frac{4}{5}$  nije dobar odgovor jer nije moguće uzeti  $\frac{4}{5}$  boce. U 28 boca neće stati sva količina soka, zato je bitno uzeti 29 boca.

### Prijedlog 2: MIJO [21]

MIJO je mnemotehnika gdje svako slovo predstavlja sljedeće:

<b>M - Misao</b>	Razmisli što je potrebno napraviti za rješavanje zadatka i zaokruži ključne riječi.
<b>I - Informacija</b>	Zaokruži i zapiši informacije potrebne za rješavanje zadatka; nacrtaj sliku; prekriži nepotrebne informacije.
<b>J - Jednakost</b>	Zapiši matematički reprezentaciju problema.
<b>O - Odgovor</b>	Zapiši odgovor na pitanje i objasni svoj odgovor.

### Primjer

Od ukupno 720 učenika neke škole, s odličnim uspjehom prolazi 15%, s vrlo dobrim 40%, s dobrim 30%, s dovoljnim 5%, a preostali ponavljaju razred. Koliko je ponavljača?

Rješenje:

Koristeći mnemotehniku MIJO, zadatak se rješava na sljedeći način:

M = Za rješavanje ovog zadatka potrebno je doznati koliki je postotak ponavljača, te izračunati koliko je to učenika.

Od ukupno 720 učenika neke škole, s odličnim uspjehom prolazi 15%, s vrlo dobrim 40%, s dobrim 30%, s dovoljnim 5%, a preostali ponavljaju razred. Koliko je ponavljača?

I = Važne informacije u ovom zadatku su:

- ukupan broj učenika: 720
- postotak odličnih: 15%
- postotak vrlo dobrih: 40%
- postotak dobrih: 30%
- postotak dovoljnih: 5%

J = Budući da svi učenici škole jesu 100%, lako je dobiti postotak ponavljača:  $100 - 15 - 40 - 30 - 5 = 10$ . Dakle, postotak ponavljača jest 10%. Matematički, 10% od 720 zapisuje se i računa na sljedeći način:  $10\% \cdot 720 = 0.1 \cdot 720 = 72$ .

O = U školi ima 72 ponavljača.

## Daroviti učenici

### Prijedlog 1 Matematičko modeliranje

Matematičko modeliranje proces je oblikovanja stvarnog problema u matematički model, te vraćanje nazad. U sljedećem primjeru prikazano je na koji se način može darovitim učenicima ponuditi da razmišljaju o tome što sve može utjecati na neki problem.

#### Primjer 1

Učencima se podijele dva nastavna listića, koje rješavaju u sljedećem redosljedu:

Ana i Marko, prijatelji koji žive u različitim dijelovima grada, jedan dan odlučili su mjeriti broj koraka od kuće do škole. Oboje su izmjerili da im treba 820 koraka do škole.

- a) Ako Ana i Marko hodaju istom brzinom, znači li to su im kuće jednako udaljene od škole? Obrazloži odgovor.
- b) Ako Ana i Marko imaju jednaku duljinu koraka, znači li to da im je potrebno jednako vrijeme da dođu do škole? Obrazloži odgovor.

a1) Ako Ana i Marko hodaju istom brzinom, odredi pretpostavke za duljinu njihovih koraka ako želiš da vrijedi:

- udaljenost od kuće do škole im je jednaka
- Anina kuća je udaljenija od škole nego Markova
- Markova kuća je udaljenija od škole nego Anina.

Jedan od ovih slučajeva potkrijepi svojim primjerom.

a2) Ako je Anin korak dug 70 cm, odredi duljinu Markova koraka ako je udaljenost njegove kuće od škole za 260 metara veća nego udaljenost Anine kuće od škole.

b1) Ako Ana i Marko imaju jednaku duljinu koraka, odredi pretpostavke za vrijeme koje im je potrebno da dođu do škole ako želiš da vrijedi:

- potrebno im je jednako vrijeme
- Ani treba manje vremena nego Marku
- Marku treba manje vremena nego Ani.

Jedan od ovih slučajeva potkrijepi svojim primjerom.

Učenici bi, rješavajući prvi nastavni listić, trebali doći do zaključka da broj koraka sam po sebi nije dovoljna informacija da odredimo udaljenost od njihovih kuća do škole te vrijeme koje je potrebno za prijeći tu udaljenost. Uz to, potrebno je paziti na duljinu koraka i na brzinu kojom Ana i Marko hodaju.

Na drugom nastavnom listiću, učenici uvode pretpostavke o duljini koraka ili vremenu

koje je potrebno da se prijeđe udaljenost. Na taj način, dodatno ih se potiče da sami uvedu podatke o duljini koraka ili vremenu, kako bi potvrdili svoje pretpostavke.

Još jedan način kako bi učenici mogli modelirati zadatak je dati im matematički model ili zapis kojem oni moraju pridodati „priču”. Takvo nešto korisno je primjerice za linearnu funkciju.

Primjer 2 Osmisli zadatak riječima koji, po mogućnosti realistično, opisuje funkciju:

$$f(x) = 5x + 13.$$

Jedna ideja za rješavanje ovog primjera je kontekst vožnje taksijem. „Jedna taksi služba za start naplaćuje 13 kuna, a svaki prijeđeni kilometar 5 kuna. Koliko košta vožnja od 10 kilometara? Koliko se kilometara možeš voziti za 36 kuna?”

### **Prijedlog 2:** Logički zadatci [28]

Neki logički zadatci lako se rješavaju koristeći tablice i označavajući s + i – istinitost tvrdnje.

#### Primjer 1

U kupeu brzoga vlaka nalazi se 6 naših zemljaka koji se vraćaju iz inozemstva. Njihova su prezimena po abecednom redu: Horvat, Kralj, Marić, Petek, Savin i Zvrko, a gradovi u kojima žive su: Karlovac, Osijek, Pula, Rijeka, Sisak i Županja. Evo nekih činjenica iz njihovog razgovora:

1. Horvat i Karlovčanin su profesori, Savin i Osječčanin odvjetnici, a Marić i Puljanin novinari.
2. Kralj i Zvrko su po prvi puta bili u inozemstvu, dok Puljanin svake godina barem jedanput prelazi granicu.
3. Sišččanin je stariji od Horvata, a Županjac od Marića.
4. Kralj i Karlovčanin su oženjeni, a Marić i Sišččanin nisu.

U kojem gradu živi i što je po zanimanju svaki od ovih šest putnika?

Rješenje:

Preporuča se kreirati tablicu kako bi se lakše pratile činjenice koje proizlaze iz tvrdnji:

	Karlovac	Osijek	Pula	Rijeka	Sisak	Županja
Horvat						
Kralj						
Marić						
Petek						
Savin						
Zvrko						

Iz (1) se vidi da Horvat, Savin i Marić nisu iz Karlovca, Osijeka ni Pule. Iz (2) se vidi da Kralj i Zvrko nisu iz Pule. Tvrdnja (3) daje informaciju da Horvat nije Sišćanin, a Marić nije Županjac. Iz (4) se iščitava da Kralj ni Marić nisu iz Karlovca i Siska. Uvrštavajući te podatke u tablicu, dobije se:

	Karlovac	Osijek	Pula	Rijeka	Sisak	Županja
Horvat	-	-	-		-	
Kralj	-		-		-	
Marić	-	-	-		-	-
Petek						
Savin	-	-	-			
Zvrko			-			

Iščitavajući iz tablice, lako se dođe do zaključaka: Petek je iz Pule, Marić je iz Rijeke, Zvrko iz Karlovca, Kralj iz Osijeka, Horvat iz Županje, a Savin iz Siska.

	Karlovac	Osijek	Pula	Rijeka	Sisak	Županja
Horvat	-	-	-	-	-	+
Kralj	-	+	-	-	-	-
Marić	-	-	-	+	-	-
Petek	-	-	+	-	-	-
Savin	-	-	-	-	+	-
Zvrko	+	-	-	-	-	-

Uz informacije iz teksta, lako se dođe do njihovih zanimanja: Horvat i Zvrko su profesori, Savin i Kralj odvjetnici, a Marić i Petek novinari.

### Primjer 2

U nekoj osnovnoj školi šest predmeta: biologiju, engleski jezik, kemiju, matematiku, povijest i geografiju, predaju tri učitelja, svaki po dva predmeta. Njihova su prezimena kratka i neobična: Kos, Rak i Zec. Otkrijte što predaje svaki od ove trojice iz sljedećih činjenica:

1. Učitelj geografije i učitelj engleskog jezika školski su kolege.
2. Učitelj biologije stariji je od učitelja matematike, a Rak je najmlađi.
3. Prvi sat ponedjeljkom u sva tri osma razreda imaju Kos, učitelj biologije i učitelj engleskoga jezika.
4. Učitelj matematike, učitelj kemije i Rak nedjeljom idu zajedno na nogometnu utakmicu.

Rješenje:

Učitelj/Predmet	BIO	ENG	KEM	MAT	POV	GEO
KOS	-	-	-	+	-	+
RAK	-	+	-	-	+	-
ZEC	+	-	+	-	-	-

Iz (2) se vidi da Rak nije učitelj biologije, a iz (3) da Kos nije učitelj biologije ni engleskog jezika. Iz (4) se vidi da Rak nije učitelj matematike ni kemije. To znači da je Zec učitelj biologije. Iz (3) vidimo da Zec nije učitelj engleskoga jezika, što dovodi do toga da Rak mora biti učitelj engleskog jezika. Iz (1) se dolazi do zaključka da Rak nije učitelj geografije, pa je zaključak da je Rak učitelj povijesti. Iz (4) se vidi da tko god predaje kemiju, ne može predavati matematiku, a iz (2) da učitelj biologije ne predaje matematiku. Stoga, Kos predaje matematiku, a s obzirom na (4), uz to predaje geografiju. Preostalo je još jedino da Zec predaje kemiju.



# Prilozi

## Prilog 1

1. U Vašem dosadašnjem radu s učenicima s posebnim odgojno-obrazovnim potrebama, s kojim teškoćama ste se susreli? Prema Vašem iskustvu, koje vrste teškoća su najčešće?
2. S kojim specifičnim teškoćama u učenju (disleksija, disgrafija, diskalkulija) ste se susreli? U čemu na nastavi matematike možete primijetiti teškoće učenika s tim teškoćama? U kojim situacijama dolaze do izražaja (npr. zamjena slova, preskakanje i previdi pri čitanju zadataka, nedovoljna preciznost, pogreške pri prepisivanju)? Jeste li primijetili da su neke vrste nastavnih sadržaja (npr. vektori) učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju posebno zahtjevne? Postoje li neke vrste nastavnih sadržaja kod kojih ne dolaze do izražaja njihovi problemi (npr. dijelovi geometrije)?
3. Na koji način prilagođavate način poučavanja učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju (uključujući metode rada, provjere znanja (pismeno/usmeno), vrijeme rada, aktivnost i samostalnost učenika, korištenje pomagala (npr. kalkulator, brojevni pravac...), motiviranje učenika (pogotovo ako ima ispitnu anksioznost))?
4. Možete li navesti neke konkretne prijedloge za prilagodbu nastavnih metoda i nastavnog sadržaja za učenike sa specifičnim teškoćama u učenju (npr. prilagodba veličine slova, vizualizacije, korištenje pomagala i alata)?
5. Koliko ste zadovoljni sa svojim radom s djecom sa specifičnim teškoćama u učenju? Imate li neku ideju što bi Vam moglo olakšati rad s njima kad bi Vam bilo dostupno (npr. veća pomoć stručnih suradnika, osobito logopeda; edukacije; razmjena iskustava s drugim nastavnicima matematike; materijali s primjerima prilagodbe nastavnih sadržaja djeci sa specifičnim teškoćama u učenju)?
6. Ima li još nešto što biste o ovoj temi voljeli reći, a što nisam obuhvatila prethodnim pitanjima?

# Bibliografija

- [1] *DSM-5 Dijagnostički i statistički priručnik za duševne poremećaje*. APA, 2014.
- [2] *Diferencirana nastava*. dostupno na <https://www.yumpu.com/xx/document/read/13758803/2-diferencirana-nastava-pmf>, siječanj 2022.
- [3] *Krnje piramide*. dostupno na [https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/b9455aeb-16ae-4c3a-a6b1-da720c38c54d/html/10738\\_krnje\\_piramide.html](https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/b9455aeb-16ae-4c3a-a6b1-da720c38c54d/html/10738_krnje_piramide.html), veljača 2022.
- [4] *Obujam tijela. Cavalierijev princip*. dostupno na [https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/b9455aeb-16ae-4c3a-a6b1-da720c38c54d/html/10731\\_obujam\\_tijela\\_cavalierijev\\_princip.html](https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/b9455aeb-16ae-4c3a-a6b1-da720c38c54d/html/10731_obujam_tijela_cavalierijev_princip.html), veljača 2022.
- [5] *Zakon o odgoju i obrazovanju u osnovnoj i srednjoj školi*. Narodne novine, Zagreb, 2008.
- [6] BA, D. Yeo: *Dyslexia, Dyspraxia and Mathematics*. Emerson House, London, 2003.
- [7] Baggett, D.: *A Study of Faculty Awareness of Students with Disabilities*. ERIC Clearinghouse, 1994.
- [8] Beers, S.F., Mikail T. Abbott R. Berninger V.W.: *Effects of transcription ability and transcription mode on translation: Evidence from written compositions, language bursts, and pauses when students in grades 4 to 9, with and without persisting dyslexia or dysgraphia, compose by pen or by keyboard*. Journal of Writing Research, 2017.
- [9] Bjelica, J., Posokhova I. Galić Jušić I.: *Priručnik o disleksiji, disgrafiji i sličnim teškoćama u čitanju, pisanju i učenju*. 2009.
- [10] Cawley, J.F., Parmar R.S. Yan W.F. Mille J.H.: *Arithmetic computation abilities of students with learning disabilities: Implications for instruction*. Learning Disabilities Research Practice, 1996.

- [11] Corn, P.: *Cuisenaireovi štapići*. Osječki matematički list 16, 2016.
- [12] Dakić, B.: *Cavalierijeva načela*. Matematika i škola, Zagreb, 2009.
- [13] Daniel, J. R., Cooc N.: *Teachers' Perceptions of Academic Intrinsic Motivation for Students With Disabilities*. The Journal of Special Education, 2018.
- [14] Dobbins, A., Calvin Gagnon J. Ulrich T.: *Teaching Geometry to Students With Math Difficulties Using Graduated and Peer-Mediated Instruction in a Response-to-Intervention Model*. 2013.
- [15] Freeman, B., Higgins K.N. Horney M.: *How Students Communicate Mathematical Ideas: An Examination of Multimodal Writing Using Digital Technologies*. Contemporary educational technology, 2016.
- [16] Galliussi, J., Perondi L Chia G. Gerbino W. Bernardis P.: *Inter-letter spacing, inter-word spacing, and font with dyslexia-friendly features: testing text readability in people with and without dyslexia*. Ann Dyslexia, 2020.
- [17] García, A.I., Jiménez J.E. Hess S.: *Solving Arithmetic Word Problems*. Journal of Learning Disabilities, 2006.
- [18] Garnett, K.: *Developing Fluency with Basic Number Facts: Intervention for Students with Learning Disabilities*. Learning Disabilities Research Practice, 1992.
- [19] Giovagnoli, G., Vicari S. Tomassetti S. Menghini D.: *The Role of Visual-Spatial Abilities in Dyslexia: Age Differences in Children's Reading?* Front. Psychol., 2016.
- [20] Horvatek, A.: *Natjecanja iz matematike u RH*. dostupno na <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-OS.htm>, veljača 2022.
- [21] Hott, B.L., Isbell L. Oettinger Montani T.: *Strategies and Interventions to Support Students with Mathematics Disabilities*. Council for Learning Disabilities, 2014.
- [22] Hudson, D.: *Specifične teškoće u učenju: Što učitelji i nastavnici trebaju znati*. EDUCA 92, 2018.
- [23] Igrić, Lj., Dumančić Z. Ivančić Đ. Schmidt D. Stančić Z.: *Didaktičko-metodičke upute za prirodoslovne predmete i matematiku za učenike s teškoćama*. Hrvatska akademska i istraživačka mreža CARNET, 2017.
- [24] Igrić, Lj.: *Osnove edukacijskog uključivanja: Škola po mjeri svakog djeteta je moguća*. Edukacijsko-rehabilitacijski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Školska knjiga, Zagreb, 2015.

- [25] Ivanović, J., Törteli Telek M.: *Basics of Differentiated Instruction and its Organization Forms*. Život i škola, br. 31, 2014.
- [26] Jerec, H., Glasnović Gracin D.: *Stern blokovi*. Matematika i škola 13, Zagreb, 2012.
- [27] Kauffman, J.M., Hallahan D.P.: *Handbook of special education*. Routledge, New York, 2011.
- [28] Kurnik, Z.: *Logički zadatci*. dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/Bilten9.pdf>, veljača 2022.
- [29] Light, J.G. i J.C. DeFries: *Comorbidity of Reading and Mathematics Disabilities: Genetic and Environmental Etiologies*. 1995.
- [30] M. C., Sharma: *Matematika bez suza*. Lekenik: Osvarenje, 2001.
- [31] Ministarstvo prosvjete, kulture i športa: *Pravilnik o osnovnoškolskom odgoju i obrazovanju darovitih učenika*. Narodne novine, Zagreb, 1991.
- [32] Nelson, J.M., Hardwood H.: *Learning Disabilities and Anxiety: A Meta-Analysis*. Journal of Learning Disabilities, 2010.
- [33] O'Brien, B. A., Mansfield J.S. Legge G.E.: *The effect of print size on reading speed in dyslexia*. Journal of Research in Reading, 2005.
- [34] Pandey, S., Agarwal S.: *A specific learning disability among children*. 2014.
- [35] Perea, M., Panadero V. Moret Tatay C. Gómez P.: *The effects of inter-letter spacing in visual-word recognition: evidence with young normal readers and developmental dyslexics*. Learning and instruction, 2012.
- [36] Reid, G.: *Dyslexia. A Practitioner's Handbook. Fifth Edition*. John Wiley Sons Ltd, UK, 2016.
- [37] Sheila, V.: *Understanding dyscalculia for teaching*. Education, 2004.
- [38] Sternberg, R.J.: *Definitions and Conceptions of Giftedness*. SAGE Publications Inc, United States, 2004.
- [39] Terepocki, M., Kruk R.S. Willows D.M.: *The incidence and nature of letter orientation errors in reading disability*. Journal of Learning Disabilities, 2002.

- [40] Vlahović-Štetić, V., Vizek Vidović V. Arambašić L. Vojnović N. Pavlin Bernardić N.: *Daroviti učenici: teorijski pristup i primjena u školi*. Institut za društvena istraživanja u Zagrebu, Zagreb, 2008.
- [41] West, T.: *In the mind's eye: visual thinkers, gifted people with dyslexia and other learning difficulties, computer images, and the ironies of creativity*. Amherst: Prometheus, 1997.
- [42] Wilmshurst, L.: *Abnormal child and adolescent psychology: A Developmental Perspective, 2nd edition*. New York, 2017.
- [43] Winner, i sur.: *Dyslexia and Visual-Spatial Talents: Compensation vs Deficit Model*. 2001.
- [44] Škoda, J.: *Identifikacija darovitih učenika u osnovnoj školi*. Sveučilište u Zagrebu, Filozofski fakultet, odsjek za pedagogiju, 2015.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu opisana je diferencirana nastava matematike i njezini oblici. Provedeno je kvalitativno istraživanje iskustava nastavnika matematike u radu s učenicima sa specifičnim teškoćama u učenju. U prvom poglavlju navedeni su cilj i metodologija istraživanja, opisan je postupak istraživanja te su razrađeni rezultati i rasprava istraživanja. U drugom poglavlju navedeni su konkretni prijedlozi za poučavanje učenika sa specifičnim teškoćama u učenju i darovitih učenika za aritmetiku, analitičku geometriju, stereometriju, te za rad sa zadacima riječima.

# Summary

This thesis describes the differentiated teaching of mathematics and its forms. A qualitative research of the experiences of mathematics teachers in working with students with specific learning difficulties was conducted. The first chapter states the goal and methodology of the research, describes the research procedure and presents the results and elaborates on them in the discussion of the research. The second chapter presents concrete proposals for teaching students with specific learning difficulties and gifted students arithmetic, analytical geometry, stereometry, and for working with mathematical word problems.

# Životopis

Rođena sam 17. listopada 1996. godine. Osnovnu školu i jezičnu gimnaziju pohađala sam u Sinju gdje sam i stanovala. Nakon gimnazije, 2015. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2019. godine, na istom sam upisala nastavnički smjer na Diplomskom sveučilišnom studiju.