Bayesovsko zaključivanje za razliku očekivanja

Rimac, Antonio

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Antonio Rimac

BAYESOVSKO ZAKLJUČIVANJE ZA RAZLIKU OČEKIVANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Snježana Lubura Strunjak

Zagreb, ožujak 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Obitelji, za bezuvjetnu ljubav, pomoć i potporu.
Hvala mentorici na strpljenju i pomoći u pisanju ovog rada, te svim kolegama i prijateljima na zajedničkim uspomenama, dobrom društvu i međusobnoj motivaciji tijekom ove nezaboravne avanture.
Posebno hvala Anti i Marinu, dvojici izvrsnih ljudi i još boljih prijatelja, za život ispunjen smijehom, optimizmom i neizmjernom podrškom.

Sadržaj

Uvod

Statistika je jedna od najrasprostranjenijih grana matematike, koja se bavi analizom i obradom podataka, te donošenjem zaključaka o promatranom fenomenu uz pomoć provedene analize. Njena glavna karakteristika jest da na temelju manjeg broja podataka, kojeg najčešće nazivamo uzorkom, pokušavamo donijeti zaključke koji vrijede za čitavu populaciju. Zbog toga postoji određena razina nesigurnosti te nikad ne možemo biti u potpunosti sigurni u ispravnost naših rezultata, pa se oslanjamo na uporabu raznih statističkih alata čiji su temelj rezultati teorije vjerojatnosti.

U današnjem svijetu prevladavaju dva osnovna pristupa statističkoj analizi: klasični, frekvencionistički, koji je većini ljudi dobro poznat, te Bayesovski, koji tretira parametre od interesa na nešto drugačiji način. Glavna razlika među njima jest način na koji interpretiramo vjerojatnosti. Klasični pristup vjerojatnost doživljava kao limes relativnih frekvencija ponavljajućeg pokusa. U praksi često nije moguće držati se ovakvog pristupa ukoliko se radi o događajima ili fenomenima koji se rijetko javljaju, stoga se podvrgavamo Bayesovskoj statistici koja vjerojatnost tretira kao stupanj uvjerenja koji se mijenja dolaskom novih informacija.

Bayesovska statistika dobila je ime po engleskom matematičaru Thomasu Bayesu koji je prvi dokazao specijalan slučaj danas poznatog Bayesovog teorema. Iako su mu danas priznate sve zasluge, do općenitijeg oblika teorema i mnogih njegovih primjena došao je krajem 18. stoljeća i francuski matematičar Pierre Simon Laplace. U to vrijeme je naišao na mnoge kontroverze i kritike od svojih kolega, budući da su mnogi smatrali kako subjektivnošću nije mjesto u znanosti. Takve metode nisu bile široko prihvaćene sve do ranih devedesetih godina prošlog stoljeća, kada su ostvarena razna nova otkrića zbog naglog razvoja računskih metoda.

Cilj ovog rada je dati pregled teorije koja služi kao temelj Bayesovske statistike, a zatim i opisati Bayesovske metode za zaključivanje o razlici očekivanja dvaju uzoraka iz normalnih razdioba.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti i statistike

Za razumijevanje Bayesovske statistike, koja se temelji na Bayesovom teoremu i njegovim primjenama, potrebno je uvesti osnovne pojmove i strukture iz teorije vjerojatnosti i statistike, koje će nam poslužiti kao temelj i alat pri daljnjem istraživanju.

1.1 Uvod u vjerojatnost

Definicija 1.1.1. *Neka je Ω neprazan skup. Familija podskupova $\mathcal{F}$ od Ω zove se σ-algebra (σ-algebra događaja), ako vrijede sljedeća tri svojstva:*

i) $\Omega \in \mathcal{F}$

ii) Ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^c \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na komplement);

iii) Ako su $A_i \in \mathcal{F},\ i \in \mathbb{N}$, onda je i $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na prebrojive unije).

Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se izmjeriv prostor.

Definicija 1.1.2. *Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja. Vjerojatnost na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ koja zadovoljava sljedeća tri aksioma:*

(A1) Za sve $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$ (nenegativnost);

(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normiranost);

(A3) Za svaki niz $A_i, i \in \mathbb{N}$ po parovima disjunktnih događaja $A_i \in \mathcal{F}$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$) vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zove se vjerojatnosni prostor.

Elemente σ-algebre $\mathcal{F}$ zovemo događaji, a broj $\mathbb{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$ zovemo vjerojatnost događaja A. Pomoću prethodna tri aksioma, odnosno iz definicije, moguće je izvesti niz svojstava funkcije vjerojatnosti, koje su dane sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.1.3. *(Osnovna svojstva vjerojatnosti):*

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$*;*

b) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki konačan niz $A_1, \ldots, A_n$ po parovima disjunktnih događaja iz $\mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

To svojstvo naziva se konačna aditivnost.

c) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$*;*

d) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$*;*

e) Ako su $A, B \in \mathcal{F}$ i $A \subseteq B$, onda je $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. Ovo svojstvo naziva se monotonost.

f) Za vjerojatnost unije ne nužno disjunktnih događaja vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

g) (Sylvestrova formula) To je generalizacija prethodnog rezultata na više od dva događaja. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ događaji u $\mathcal{F}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}).$$

h) (σ-subaditivnost) Neka je $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz događaja iz $\mathcal{F}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i),$$

s time da red na desnoj strani može divergirati u $+\infty$.

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [6]. □

Sada dolazimo do iznimno važnog pojma u teoriji vjerojatnosti, a to je pojam nezavisnosti.

Definicija 1.1.4. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.*

(a) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su nezavisni ako vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

(b) Familija događaja $(A_i)_{i \in I}$ (konačna, prebrojiva ili neprebrojiva) je nezavisna ako vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in F} A_i\right) = \prod_{i \in F} \mathbb{P}(A_i),$$

za svaki konačan podskup $F \subseteq I$.

(c) Familija događaja $(A_i)_{i \in I}$ je po parovima nezavisna ako za sve $i, j \in I, i \neq j$ vrijedi $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

Važno je napomenuti da nezavisnost povlači i po parovima nezavisnost, no obrat općenito ne vrijedi. Nezavisni događaji najčešće se javljaju u primjenama kao rezultati nezavisnih pokusa.

1.2 Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost. Bayesov teorem

Definicija 1.2.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$. Uvjetna vjerojatnost događaja A uz dano B definira se formulom*

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \ A \in \mathcal{F}.$$

Broj $\mathbb{P}(A|B)$ zovemo vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B.

Propozicija 1.2.2. *Neka je $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$. Tada je $\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Dokaz. Dokaz slijedi iz definicije, provjeravanjem aksioma funkcije vjerojatnosti $\mathbb{P}_B$. □

Definicija 1.2.3. *Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su uvjetno nezavisni uz dani $C \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(C) > 0$, ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C).$$

Definicija 1.2.4. *Neka je $(H_i)_{i\in I}$ konačna ili prebrojiva familija događaja iz $\mathcal{F}$ takva da je*

i) $\mathbb{P}(H_i) > 0$ *za sve* $i \in I$*;*

ii) $H_i \cap H_j = \emptyset$ *za* $i \neq j$*;*

iii) $\bigcup_{i\in I}^{+\infty} H_i = \Omega$.

Takvu familiju zovemo potpun sustav događaja, a događaje H_i često nazivamo hipotezama.

Drugim riječima, potpun sustav događaja konačna je ili prebrojiva particija skupa Ω s time da su elementi particije događaji. U primjenama elemente H_i potpunog sustava događaja obično zovemo *hipoteze*. Hipoteze se uzajamno isključuju, a točno jedna među njima mora se dogoditi.

Propozicija 1.2.5. *(Formula potpune vjerojatnosti) Neka je $(H_i)_{i\in I}$ potpun sustav događaja. Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i).$$

Dokaz. Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcup_{i\in I} H_i\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} (A \cap H_i)\right) \\
&= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap H_i) \\
&= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i),
\end{aligned}$$

gdje, redom, koristimo činjenice da je $\cup_{i\in I} H_i = \Omega$, σ-aditivnost te identitet $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$. □

Pojmovi, koje ćemo kasnije detaljnije proučiti, a sada samo spomenuti, su pojmovi *apriorne i aposteriorne vjerojatnosti*. Ugrubo rečeno, originalne vjerojatnosti hipoteza $\mathbb{P}(H_j)$, $j \in J$ zovemo apriorne vjerojatnosti. To su vjerojatnosti koje imamo i prije no što znamo da se neki događaj dogodio. Nakon što dobijemo neku dodatnu informaciju o procesu, npr. da se dogodio događaj $C \in \mathcal{F}$, dolazimo i do aposteriornih vjerojatnosti $\mathbb{P}(H_j|C)$.

Sljedeći teorem jedan je od najvažnijih teorema ovoga rada. Pomoću njega možemo vrlo efikasno računati prethodno spomenute aposteriorne vjerojatnosti, odnosno, možemo ažurirati vlastita predviđanja o nekom događaju na temelju onoga što smo do određenog trenutka saznali o njemu. Njegovu diskretnu verziju navodimo u sklopu uvodnog poglavlja, dok ćemo kasnije spomenuti i neprekidnu verziju.

Teorem 1.2.6. *(Bayesova formula) Neka je $(H_i)_{i\in I}$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A) > 0$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(H_j|A) = \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}. \tag{1.1}$$

Dokaz. Računamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_j|A) &= \frac{\mathbb{P}(H_j \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}\end{aligned}$$

U prvoj jednakosti koristili smo definiciju uvjetne vjerojatnosti, u drugoj jednakosti svojstvo $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)$, a u posljednjoj jednakosti formulu potpune vjerojatnosti. □

1.3 Slučajne varijable

Vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ osnovna je struktura u teoriji vjerojatnosti, te glavni alat za analizu i istraživanje slučajnih pokusa i događaja. Često u praksi provodimo razna mjerenja nad dobivenim rezultatima, te je stoga prirodno i važno promatrati realne funkcije na Ω, koje nazivamo slučajnim varijablama. Prije same definicije, potrebni su nam pojmovi Borelovih skupova te Borelovih funkcija.

Definicija 1.3.1. *Neka je $\mathbb{R}$ skup svih realnih brojeva, te neka je $\mathcal{B}$ σ-algebra generirana familijom svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$.*

(i) $\mathcal{B}$ zovemo σ-algebrom Borelovih skupova na $\mathbb{R}$, ili Borelovom σ-algebrom, a njene elemente nazivamo Borelovi skupovi.

(ii) Funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je Borelova funkcija ako je $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$, odnosno $g^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$.

Za k-dimenzionalne realne prostore, Borelovu σ-algebru generiranu svim otvorenim pravokutnicima na $\mathbb{R}^k$ označavano s $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

Definicija 1.3.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Izmjerivo preslikavanje $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ za koje vrijedi $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ naziva se slučajna varijabla (za $k = 1$) ili slučajni vektor (za $k \geq 2$).*

Glavno od obilježja koje teoriju vjerojatnosti čini interesantnom i razlikuje od teorije mjere jest pojam funkcije distribucije pripadne slučajne varijable. Funkcije distribucije su u praksi puno operabilniji i efektivniji alat za promatranje slučajnih varijabli, jer jezik teorije mjere prevode na jezik matematičke analize i baratanje funkcijama, koje je u većini slučajeva vrlo prirodno i intuitivno. Skup Ω na kojem je X definirana može biti sasvim općenit, no ta nam općenitost može smetati ako nas zanima problem vezan za određenu slučajnu varijablu X. Da bismo to izbjegli, uvodimo vjerojatnosni prostor karakterističan za nju, odnosno vjerojatnosni prostor induciran s X.

Definicija 1.3.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ izmjeriv prostor i X slučajna varijabla na Ω. Funkciju $\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \to [0, 1]$ definiranu s*

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \tag{1.2}$$

nazivamo vjerojatnosnom mjerom induciranom s X, a vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$ zovemo vjerojatnosnim prostorom induciranim s X. Lako se vidi da je $\mathbb{P}_X$ vjerojatnost, odnosno vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}$.

Dakle, svakoj slučajnoj varijabli na prirodan način možemo preko (1.2) pridružiti odgovarajući vjerojatnosni prostor te na njemu rješavati probleme vezane za tu slučajnu varijablu. $\mathbb{P}_X$ često nazivamo i zakon razdiobe od X.

Definicija 1.3.4. *Neka je X slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Funkcija distribucije od X je funkcija $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana sa*

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X(\langle -\infty, x]) = \mathbb{P}(X \in \langle -\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

Kao izravne posljedice svojstava vjerojatnosti, slijede sljedeća svojstva funkcija distribucije:

Teorem 1.3.5. *Neka je X slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka je F pripadna funkcija distribucije. Tada vrijedi*

(i) F je neopadajuća;

(ii) F je neprekidna zdesna u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$;

(iii) *F ima limes slijeva u svakoj točki* $x \in \mathbb{R}$*;*

(iv) $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(X) = 0$ *i* $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(X) = 1$.

Dokaz. Dokaz se nalazi u [6]. □

Slučajne varijable klasificiraju se u dva glavna tipa: diskretne i neprekidne slučajne varijable, te o njima ovisi način na koji računamo vjerojatnosti događaja vezanih za tu slučajnu varijablu.

Definicija 1.3.6. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *zove se diskretna slučajna varijabla ako postoji konačan ili prebrojiv skup* $D = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ *takav da je* $\mathbb{P}_X(D) = \mathbb{P}(X \in D) = 1$.

Diskretne slučajne varijable obično zadajemo tako da zadamo skup $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ i brojeve $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$, a to elegantno možemo zapisati u sljedeću tablicu:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Gornju tablicu zovemo distribucija ili zakon razdiobe slučajne varijable X.

Napomena 1.3.7. *(i) Svaka diskretna slučajna varijabla je ujedno i slučajna varijabla. Obratno, slučajna varijabla koja poprima prebrojivo mnogo vrijednosti je diskretna slučajna varijabla.*

(ii) Neka je Ω *konačan ili prebrojiv, te* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$*. Tada je svaka funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *diskretna slučajna varijabla.*

Ako je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $D = \{x_1, x_2, \dots\}$, onda je $F(x_j) - F(x_j-) = \mathbb{P}(X = x_j) > 0$, $j = 1, 2, \dots$, tj. funkcija distribucije nije neprekidna. No ako je F neprekidna u $x \in \mathbb{R}$, onda je $\mathbb{P}(X = x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Time dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 1.3.8. *Slučajna varijabla* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *je apsolutno neprekidna ako postoji nenegativna realna Borelova funkcija* $f : \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle$ *takva da za sve* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Integrabilna funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ *za koju dodatno vrijedi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

zove se funkcija gustoće od X*.*

Nezavisnost slučajnih varijabli definiramo analogno kao nezavisnost događaja. Ovo svojstvo posebice je važno u statistici jer se pomoću njega dobivaju mnoge korisne veze među specijalnim razdiobama koje se javljaju u primjenama.

Definicija 1.3.9. *Neka su $X_1, \dots, X_n$ slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kažemo da su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne ako za proizvoljne $B_i \in \mathcal{B}, i = 1, \dots, n$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B_i). \tag{1.4}$$

Sada dolazimo do pojma matematičkog očekivanja slučajne varijable. Očekivanje, ugrubo rečeno, zamišljamo kao prosjek svih mogućih vrijednosti neke slučajne varijable.

Definicija 1.3.10. *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty,$$

onda postoji matematičko očekivanje od X koje definiramo sa

$$\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

te ga najčešće označavamo s μ.

Osim očekivanja slučajne varijable, na sličan način možemo računati i očekivanje funkcija slučajnih varijabli, tj. kompozicija slučajnih varijabli i funkcija koje zadovoljavaju određena svojstva.

Teorem 1.3.11. *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X i neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija koja zadovoljava određena svojstva, npr. ima najviše prebrojivo mnogo prekida. Definirajmo $Y := g \circ X = g(X)$. Ako*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty,$$

onda Y ima matematičko očekivanje i vrijedi

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx.$$

Dokaz. Vidi [6]. □

Matematičko očekivanje zadovoljava sljedeća zanimljiva svojstva:

Teorem 1.3.12. *Neka su X i Y apsolutno neprekidne slučajne varijable te neka je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljan.*

(i) Ako su $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije takve da $g(X)$ i $h(X)$ imaju očekivanje, onda vrijedi

$$\mathbb{E}(g(X) + h(X)) = \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X)).$$

(ii) Ako je $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1$ za $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, onda $a \leq \mathbb{E}(X) \leq b$.

(iii) $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}X$.

(iv) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$.

(v) Ako je $X \leq Y$, tada je $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$.

(vi) Ako je $X \geq 0$, tada je $\mathbb{E}X \geq 0$.

Dokaz. Vidi [6] i [7]. □

Nakon očekivanja, definiramo i pojam varijance. Intuitivno, nju zamišljamo kao mjeru odstupanja neke slučajne varijable X od njezinog matematičkog očekivanja.

Definicija 1.3.13. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $r > 0$.*

(i) $\mathbb{E}(X^r)$ zovemo r-ti moment od X, a $\mathbb{E}|X^r|$ zovemo r-ti apsolutni moment od X. Dogovorno vrijedi $\mathbb{E}(X^0) = \mathbb{E}|X^0| = 1$.

(ii) Neka $\mathbb{E}X$ postoji, tj. konačno je. Tada $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^r)$ zovemo r-ti centralni moment od X, a $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}X|^r)$ zovemo r-ti apsolutni centralni moment od X.

(iii) Varijanca od X, koju označavamo sa $Var(X)$ ili σ^2, je drugi centralni moment od X, dakle

$$Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2).$$

Pozitivan drugi korijen iz varijance zovemo standardna devijacija od X i označavamo sa σ.

Koristeći definiciju matematičkog očekivanja i varijance, dobivamo sljedeće:

$$Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

Kvadriranjem posljednjeg izraza dobivamo

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx,$$

zatim korištenjem linearnosti integrala slijedi

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

a odavde direktno dobivamo alternativni izraz za varijancu, koji glasi

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2.$$

Za kraj ovog pododjeljka, navodimo neke od najpoznatijih primjera neprekidnih slučajnih varijabli, koje ćemo koristiti i u nastavku rada.

Primjer 1.3.14. *(i) Neprekidna slučajna varijabla X ima uniformnu distribuciju na segmentu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, što označavamo s $X \sim U(a, b)$, ako joj je gustoća f dana s*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{1.5}$$

(ii) Neprekidna slučajna varijabla X ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$, u oznaci $X \sim Exp(\lambda)$, ako joj je gustoća f dana s

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{1.6}$$

(iii) Neka su $\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Neprekidna slučajna varijabla X ima normalnu distribuciju s parametrima μ i σ^2 ako joj je gustoća f dana s

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Oznaka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Ukoliko je $X \sim N(0, 1)$, govorimo o jediničnoj normalnoj razdiobi i njena funkcija gustoće je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Parametar μ predstavlja očekivanje, a σ^2 varijancu ove slučajne varijable.

(iv) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neprekidna slučajna varijabla X ima Studentovu t-distribuciju sa n stupnjeva slobode, u oznaci $X \sim t(n)$ ako joj je gustoća dana s

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

gdje je $\Gamma(x)$ gama-funkcija definirana s

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, x > 0. \tag{1.10}$$

(v) Neprekidna slučajna varijabla X ima gama-distribuciju s parametrima α i β, $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, ako joj je gustoća f dana s

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{1.11}$$

(vi) Neka su $p > 0, q > 0$ fiksni. Neprekidna slučajna varijabla X ima beta-distribuciju s parametrima p i q ako joj je gustoća f dana s

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & inače, \end{cases} \tag{1.12}$$

gdje je, za $x, y > 0$, $B(x, y)$ beta-funkcija definirana sa

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt. \tag{1.13}$$

1.4 Neprekidni slučajni vektori

Slučajne varijable možemo promatrati i u dvije ili više dimenzija, te tada govorimo o slučajnim vektorima. Sve definicije su potpuno analogne i prirodno proširenje teorije iz jedne dimenzije.

Definicija 1.4.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. n-dimenzionalni slučajni vektor je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, gdje je $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, pri čemu su $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ slučajne varijable.*

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, ponovno na prirodan način možemo slučajnom vektoru X pridružiti odgovarajući vjerojatnosni prostor induciran njime. Za $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ stavimo

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)). \tag{1.14}$$

Relacijom (1.14) ponovno je definirana funkcija vjerojatnosti $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, 1]$ na n-dimenzionalnom realnom prostoru, koju ponovno nazivamo zakon razdiobe od X.

Definicija 1.4.2. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajni vektor, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Funkcija distribucije od X je funkcija $F_X : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ definirana sa*

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X(\langle -\infty, x]) = \mathbb{P}(X \in \langle -\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.4.3. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajni vektor, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ i neka je F_X njegova funkcija distribucije.*

X je diskretan slučajni vektor ako postoji konačan ili prebrojiv podskup D od $\mathbb{R}^n$ takav da je $\mathbb{P}(X \in D) = 1$.

X je (apsolutno) neprekidan slučajni vektor ako postoji nenegativna Borelova funkcija $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty\rangle$ takva da je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Funkciju f nazivamo funkcijom gustoće slučajnog vektora X.

Na jednostavan način moguće je izračunati funkcije distribucije te funkcije gustoće svake od n slučajnih varijabli. Neka je $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ slučajni vektor s funkcijom gustoće f i neka je $x_1 \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Vrijedi:

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x_1) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \in \mathbb{R}, \dots, X_n \in \mathbb{R}) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n, \end{aligned}$$

a odavde prema definiciji neprekidne slučajne varijable slijedi da X_1 ima gustoću danu s

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n.$$

Ovaj postupak integriranja po svim varijablama osim x_i možemo provesti za svaku slučajnu varijablu X_i, $i \in 1, \dots, n$ kako bismo dobili pripadnu funkciju gustoće f_{X_i}, koju još nazivamo i marginalnom funkcijom gustoće.

Postoji mnogo karakterizacija nezavisnosti slučajnih varijabli, a najčešće od njih, pomoću funkcija distribucije, odnosno gustoće, dane su sljedećim teoremima, čiji se dokazi nalaze u [7]:

Teorem 1.4.4. *Neka su $X_1, \dots, X_n$ slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je $X = (X_1, \dots, X_n)$. Neka je nadalje F_i funkcija distribucije od $X_i, i = 1, \dots, n$ i F funkcija distribucije od X. Tada su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne ako i samo ako je*

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n), \tag{1.15}$$

za proizvoljno $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorem 1.4.5. *Ako slučajni vektor $X = (X_1, \dots, X_n)$ ima gustoću f, tada svaka slučajna varijabla X_i ima gustoću $f_i, i = 1, \dots, n$. Osim toga, u tom slučaju su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne ako i samo ako je*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n), \tag{1.16}$$

za gotovo sve $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Slučajni vektori potrebni su nam kako bismo mogli definirati uvjetne funkcije gustoće, čija se primjena javlja u Bayesovim formulama.

Definicija 1.4.6. *Neka je (X, Y) slučajni vektor s funkcijom gustoće $f = f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ako je $y \in \mathbb{R}$ takav da je $f_Y(y) > 0$, onda definiramo*

(i) Uvjetnu funkciju gustoće

$$f(\cdot|y) = f_{X|Y}(\cdot|y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

slučajne varijable X uz uvjet $Y = y$ formulom

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}. \tag{1.17}$$

(ii) Uvjetnu razdiobu $\mathbb{P}_{X|Y} : \mathcal{B} \to [0, 1]$ od X uz dano $Y = y$ kao

$$\mathbb{P}_{X|Y}(X \in B|Y = y) = \int_B f_{X|Y}(x|y)dx. \tag{1.18}$$

Ako u (1.18) stavimo $B = \langle -\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, dobivamo

$$\mathbb{P}_{X|Y}(X \leq x|Y = y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)dt, \ f_Y(y) > 0, \tag{1.19}$$

dakle za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)dt, \ f_Y(y) > 0, \tag{1.20}$$

čime dobivamo uvjetnu distribuciju od X uz dano $Y = y$.

Funkciju gustoće slučajnog vektora moguće je definirati i kada je jedna od slučajnih varijabli neprekidna, a druga diskretna. Neka je X neprekidna slučajna varijabla, a Y diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti na prebrojivom skupu $D = \{y_1, y_2, \dots\}$. Tada je marginalna funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X dana sa

$$f_X(x) = \sum_j f_{X,Y}(x, y_j),$$

dok je marginalna funkcija gustoće slučajne varijable Y dana sa

$$f_Y(y_j) = \int f_{X,Y}(x, y_j)dx.$$

Uvjetna funkcija gustoće od X uz dano $Y = y_j$ definira se kao

$$f_{X|Y}(x|y_j) = \frac{f_{X,Y}(x, y_j)}{f_Y(y_j)} = \frac{f_{X,Y}(x, y_j)}{\int f_{X,Y}(x, y_j)dx},$$

dok se uvjetna funkcija gustoće od Y uz dano $X = x$ definira kao

$$f_{Y|X}(y_j|x) = \frac{f_{X,Y}(y_j, x)}{f_X(x)} = \frac{f_{X,Y}(x, y_j)}{\sum_j f_{X,Y}(x, y_j)}.$$

1.5 Slučajni uzorak. Funkcija vjerodostojnosti

Preostalo je definirati osnovne statističke pojmove koje ćemo koristiti u nastavku ovoga rada.

Definicija 1.5.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je X slučajna varijabla na Ω s funkcijom distribucije F. Slučajni uzorak duljine n za X je niz od n nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli $X_1, X_2, \dots, X_n$ kojima je distribucija jednaka (populacijskoj) razdiobi varijable X. Realizaciju slučajnog uzorka, odnosno opažene vrijednosti x_i od X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ zovemo uzorkom.*

Definicija 1.5.2. *Neka je X statistička varijabla čiju populacijsku distribuciju promatramo, te neka je $X_1, X_2, \dots, X_n$ slučajni uzorak za X iz te populacije. Parametrom razdiobe od X nazivamo onu vrijednost koja je funkcija populacijske razdiobe od X. Statistika je funkcija slučajnog uzorka.*

Intuitivno, slučajni uzorak duljine n odgovara nizu od n nezavisnih mjerenja nekog slučajnog svojstva u populaciji koje se opisuje slučajnom varijablom X.

U primjenama se najčešće promatraju sljedeće dvije statistike:

$$\overline{X} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1.21}$$

koju zovemo *aritmetička sredina* ili *očekivanje uzorka* i

$$S^2 = S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{1.22}$$

koju zovemo *varijanca uzorka*.

Dokaz sljedeće važne propozicije može se pronaći u [7], a govori o tome da očekivanje uzorka može poslužiti kao "dobra" procjena za očekivanje populacije, ako je to očekivanje nepoznato.

Propozicija 1.5.3. *Neka je $X_1, \ldots, X_n$ slučajan uzorak iz funkcije distribucije F i neka je μ očekivanje od F, i σ^2 varijanca od F. Tada je*

$$E\overline{X} = \mu, \quad Var\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad ES^2 = \sigma^2. \tag{1.23}$$

Ako funkcija F ima gustoću f, često kažemo da je uzorak uzet iz gustoće f.
Neka je $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak iz gustoće f. S

$$f(x|\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)$$

označavamo zajedničku funkciju gustoće slučajnog uzorka, uz parametar $\theta \in \Theta$, gdje je Θ parametarski prostor.

Definicija 1.5.4. *Neka je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jedna realizacija slučajnog uzorka $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sa zajedničkom funkcijom gustoće $f(x|\theta), x \in \mathbb{R}^n$ te neka je $\theta \in \Theta$ nepoznati parametar. Funkcija vjerodostojnosti je funkcija $L : \Theta \to \mathbb{R}$ definirana sa*

$$L(\theta) := \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta).$$

Procjena metodom maksimalne vjerodostojnosti parametra θ je ona vrijednost $\hat{\theta} \in \Theta$ za koju funkcija vjerodostojnosti poprima maksimalnu vrijednost:

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta\in\Theta} L(\theta).$$

Očito je $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dakle, procjenitelj metodom maksimalne vjerodostojnosti, ili kraće MLE, parametra θ je statistika $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Primjer 1.5.5. *(Funkcija vjerodostojnosti normalne slučajne varijable) Koristeći definiciju, možemo lako izračunati funkciju vjerodostojnosti dane normalne slučajne varijable. Neka je $x_1, \ldots, x_n$ uzorak iz $N(\mu, \sigma^2)$. Računamo:*

$$
\begin{aligned}
L(\mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\mu, \sigma^2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1.24)
\end{aligned}
$$

Poglavlje 2

Bayesovska koncepcija

Nakon postavljenih matematičkih temelja potrebnih za Bayesovsku analizu, sada se fokusiramo na njene ključne principe.

Klasične statističke metode, poznate većini ljudi, temelje se isključivo na informacijama dobivenih iz samog uzorka. Takve metode interpretiraju vjerojatnosti kao relativne frekvencije. Primjerice, 95% pouzdani interval

$$\mathbb{P}(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$$

interpretiramo na način da će se u 95% slučajeva, nakon što mnogo puta ponovimo eksperiment, vrijednost Z nalaziti između krajnjih rubova tog intervala. Za uzorak iz normalne distribucije s poznatom varijancom, vrijednost od Z je dana sa

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$$

i tada je vjerojatnosna interpretacija gornjeg intervala da će upravo 95% slučajnih intervala oblika

$$\left(\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

sadržavati pravu vrijednost parametra μ.

Drugi pristup analizi podataka je pomoću Bayesovske statistike. Glavni alat, a ujedno i motivacija, je Bayesov teorem opisan u prethodnom poglavlju. Ključna razlika u odnosu na klasične statističke metode jest da su ovdje parametri promatrani kao slučajne varijable, dok su u klasičnim metodama oni fiksirani.

Subjektivna vjerojatnost

Subjektivna vjerojatnost je temelj Bayesovske koncepcije. U klasičnim statističkim metodama, određivanju vjerojatnosti nekog događaja se najčešće pristupa na dva načina -

računanjem relativne frekvencije u ponavljanim mjerenjima te objektivnim pristupom. Primjerice, želimo li odrediti vjerojatnost da će košarkaš pogoditi koš u slobodnom bacanju, mogli bismo mjeriti pogotke košarkaša u nekoliko slobodnih bacanja. Vjerojatnost bi tada bila upravo omjer broja pogodaka i svih bacanja, odnosno relativna frekvencija. S druge strane. Ako nas netko priupita ”Koja je vjerojatnost da na igraćoj kocki padne broj 5?”, prirodno ćemo odgovoriti $\frac{1}{6}$, jer nemamo razloga pomisliti da se ne radi o regularnoj igraćoj kocki.

No, u mnogo situacija postavljaju se pitanja za koje se prethodni principi ne mogu tako jednostavno primijeniti. Naprimjer, ”Koja je vjerojatnost da će sutra padati kiša?”, ”Koja je vjerojatnost da će vrijednost određene dionice porasti do kraja mjeseca?” i slično. Odgovori na ova pitanja mogu se vrlo razlikovati od osobe do osobe, te pristup kojim dolazimo do tih vjerojatnosti naziva se subjektivna vjerojatnost i ona predstavlja osobni stupanj uvjerenja.

Uvjetna perspektiva

Kao što smo već napomenuli, standardna statistička zaključivanja uglavnom se temelje na činjenici da su parametri nepoznati, ali fiksirani, dok u Bayesovskoj statistici to nije tako.

Budući da su opaženi podaci jedino što imamo u istraživanju, statističko zaključivanje se temelji na stvarnim, opaženim vrijednostima tokom istraživanja. Takav pristup naziva se *uvjetna perspektiva*. Budući da je parametar kojeg promatramo slučajna varijabla, možemo specificirati njegovu vjerojatnosnu distribuciju koristeći subjektivnu vjerojatnost. Takva distribucija naziva se *apriornom distribucijom* i predstavlja naša uvjerenja o parametru. Ona se tokom istraživanja zadržava i unapređuje dolaskom novih informacija.

U uvodnom poglavlju dan je pregled diskretne verzije Bayesovog teorema. Podsjetimo, ako sa A označimo skup informacija kojima raspolažemo prije nego smo proučili podatke B i s $\mathbb{P}(A)$ označimo našu, subjektivnu vjerojatnost od A, tada iz Bayesovog teorema slijedi da se naše vjerovanje u A, nakon proučenih podataka B, mijenja po formuli

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)}. \tag{2.1}$$

Uočimo da ovim pristupom slučajnost opisujemo pomoću dva izvora informacija - iz naših apriornih uvjerenja, te iz obrađenih podataka. U nastavku rada koncentriramo se na neprekidni analogon toga teorema koji prati istu koncepciju, u slučaju neprekidnih distribucija.

2.1 Neprekidna verzija Bayesovog teorema

Bayesov teorem se često koristi u neprekidnom obliku, pogotovo u ekonomiji, financijama i srodnim granama matematike. Kako bismo ga uspješno iskazali i dokazali, potreban nam je analogon diskretne formule potpune vjerojatnosti.

Teorem 2.1.1. *(Neprekidna formula potpune vjerojatnosti). Neka je B proizvoljan Borelov skup i neka su X i Y neprekidne slučajne varijable. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X \in B | Y = y) f_Y(y) dy. \tag{2.2}$$

Dokaz. Računamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in B) &= \int_{\mathbb{R}} \int_B f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_B f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_B f_{X|Y}(x|y) dx \right) f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X \in B | Y = y) f_Y(y) dy.\end{aligned}$$

□

Teorem 2.1.2. *(Neprekidna verzija Bayesovog teorema). Neka su X i Y neprekidne slučajne varijable. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaki $y \in \mathbb{R}$ takav da je $f_Y(y) > 0$ vrijedi*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{\int_{\mathbb{R}} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx}. \tag{2.3}$$

Dokaz. Koristeći definiciju uvjetne funkcije gustoće (1.17), dobivamo

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x). \tag{2.4}$$

Uvrštavanjem u (2.3), slijedi

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{f_Y(y)},$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi korištenjem neprekidne verzije formule potpune vjerojatnosti. □

Prisjetimo se, u diskretnoj verziji Bayesove formule (1.1), vjerojatnosti $\mathbb{P}(H_i)$ zvali smo apriornim vjerojatnostima, dok smo vjerojatnosti $\mathbb{P}(H_i|A)$ zvali aposteriornim vjerojatnostima. Ako usporedimo diskretnu s neprekidnom verzijom Bayesovog teorema, vidimo da je analogon apriornih vjerojatnosti upravo funkcija gustoće $f_X(x)$, dok je analogon aposteriornih vjerojatnosti uvjetna funkcija gustoće $f_{X|Y}(x|y)$.

2.2 Bayesovsko zaključivanje

Pretpostavimo da promatramo podatke X pri čemu nam je poznato iz koje distribucije potječu, ali ne i s kojim parametrom θ. Glavna ideja Bayesovske statistike jest opisati nepoznati parametar θ kao slučajnu varijablu.

Neka je $x = (x_1, \ldots, x_n)$ jedna realizacija slučajnog uzorka $X = (X_1, \ldots, X_n)$ sa zajedničkom funkcijom gustoće $f(x|\theta), x \in \mathbb{R}^n$ te neka je $\theta \in \Theta$ nepoznati parametar. Funkciju gustoće $f(x|\theta)$ možemo promatrati i kao funkciju parametra θ te ona tada postaje funkcija vjerodostojnosti tog parametra. Uvedimo oznake:

- $L(\theta|x)$ - funkcija vjerodostojnosti nepoznatog parametra θ
- $f(\theta)$ - apriorna distribucija parametra θ, ovisi o jednom ili više parametara koje često zovemo hiperparametri
- $f(\theta|x)$ - aposteriorna distribucija parametra θ
- $f_X(x)$ - marginalna distribucija slučajne varijable X, dana s

$$f_X(x) = \int L(\theta|x) f(\theta) d\theta \tag{2.5}$$

Kako bismo iskoristili Bayesov teorem, potrebna nam je apriorna distribucija $f(\theta)$ koja, podsjetimo, predstavlja naša uvjerenja o mogućim vrijednostima parametra θ prije samog proučavanja podataka. Važno je napomenuti da ta distribucija ne smije dolaziti iz samih podataka, jer je množenje u Bayesovom teoremu opravdano samo onda kada je apriorna distribucija nezavisna od funkcije vjerodostojnosti.

Budući da marginalna funkcija gustoće $f_X(x)$ ne ovisi o θ kažemo da je aposteriorna distribucija proporcionalna s vjerodostojnošću i apriornom distribucijom i pišemo

$$f(\theta|x) \propto L(\theta|x) f(\theta). \tag{2.6}$$

Ovime dobivamo uvid u oblik aposteriorne distribucije, odnosno gustoće, ali ne i egzaktnu gustoću. Potrebno je skalirati dobiveni rezultat s određenom konstantom kako bismo osigurali da se uistinu radi o vjerojatnosnoj distribuciji, odnosno da površina ispod grafa te funkcije bude jednaka 1. Tu konstantu upravo dobijemo integriranjem $L(\theta|x) f(\theta)$ po cijeloj domeni.

Dakle, možemo izračunati aposteriornu distribuciju parametra θ na sljedeći način:

$$f(\theta|x) = \frac{L(\theta|x) f(\theta)}{f_X(x)} = \frac{L(\theta|x) f(\theta)}{\int L(\theta|x) f(\theta) d\theta}. \tag{2.7}$$

U ovisnosti o tome koju apriornu distribuciju smo odabrali, rješavanje integrala ne mora nužno biti egzaktno i u zatvorenoj formi, pa se često podvrgavamo i numeričkim metodama integriranja.

Vratimo se na trenutak na gornji izraz i pretpostavimo da imamo samo jednu realizaciju x_1 iz neke distribucije X. Iz (2.6) slijedi

$$f(\theta|x_1) \propto L(\theta|x_1)f(\theta) \tag{2.8}$$

Nadalje, pretpostavimo da smo opazili i drugu realizaciju, x_2, nezavisno od prve, iz iste distribucije. Koristeći definiciju funkcije vjerodostojnosti i uvrštavanjem (2.8), dobivamo

$$\begin{aligned} f(\theta|x_1, x_2) &\propto L(\theta|x_1)L(\theta|x_2)f(\theta) \\ &\propto L(\theta|x_2)f(\theta|x_1) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dakle, kako uzorak raste, tako se prvotna apriorna distribucija ažurira u aposteriornu, a zatim ta ista distribucija poprima ponovno ulogu apriorne distribucije u većem uzorku. Ovaj postupak možemo ponavljati po volji mnogo puta, i ono predstavlja mijenjanje stupnja našega uvjerenja, a jednostavna je posljedica Bayesove formule.

2.3 Odabir apriornih distribucija. Bayesovsko zaključivanje za očekivanje normalne razdiobe

Prije no što krenemo proučavati Bayesovsku statistiku za razliku očekivanja, potrebno je objasniti postupak kada se radi samo o jednoj populaciji, odnosno jednom uzorku iz jedne normalne distribucije. Zaključci o razlici očekivanja prirodna su proširenja metode za jedan uzorak.

Bayesov teorem za očekivanje normalne distribucije s neprekidnim apriornim distribucijama

Neka je $X_1, \ldots, X_n$ slučajan uzorak iz normalne distribucije s očekivanjem μ i poznatom varijancom σ^2. Realistično je za pretpostaviti da su sve vrijednosti parametra μ kojeg promatramo, barem na nekom intervalu, moguća opcija. Zbog toga moramo koristiti neprekidne apriorne distribucije. Prisjetimo se, iz posljedica Bayesovog teorema slijedi da je aposteriorna distribucija proporcionalna apriornoj pomnoženoj s funkcijom vjerodostojnosti, odnosno

$$f(\mu|x_1, \ldots, x_n) \propto f(\mu)L(\mu|x_1, \ldots, x_n),$$

gdje je $f(\mu)$ neprekidna apriorna distribucija. Koristeći (2.7), računamo vrijednosti aposteriorne distribucije na način da podijelimo umnožak apriorne distribucije s vjerodostojnošću, te sve podijelimo integralom tog istog umnoška po cijeloj domeni. Dobivamo

$$f(\mu|x_1,\ldots,x_n) = \frac{f(\mu)L(\mu|x_1,\ldots,x_n)}{\int f(\mu)L(\mu|x_1,\ldots,x_n)d\mu}. \tag{2.10}$$

Promotrimo faktor $L(\mu|x_1,\ldots,x_n)$ u (2.10), koji predstavlja funkciju vjerodostojnosti. U (1.24) dana je funkcija vjerodostojnosti slučajnog uzorka iz normalne distribucije. Uočimo, faktor $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n$ ne ovisi o nepoznatom parametru μ, pa se on može apsorbirati u konstantu proporcionalnosti, odnosno, skratit će se u gornjem izrazu. Dakle, možemo pisati

$$\begin{aligned} L(\mu|x_1,\ldots,x_n) &\propto e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &\propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((x_1-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2)} \end{aligned}$$

Napišimo izraz u zagradi na sljedeći način

$$\begin{aligned} (x_1-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2 &= x_1^2-2x_1\mu+\mu^2+\cdots+x_n^2-2x_n\mu+\mu^2 \\ &= (x_1+\cdots+x_n)^2-2\mu(x_1+\cdots+x_n)+n\mu^2 \end{aligned}$$

Vraćanjem u gornji izraz te nadopunjavanjem do potpunog kvadrata i faktoriziranjem n, slijedi

$$\begin{aligned} L(\mu|x_1,\ldots,x_n) &\propto e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu^2-2\mu\bar{x}+\bar{x}^2-\bar{x}^2+\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}\right)} \\ &\propto e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu^2-2\mu\bar{x}+\bar{x}^2)} \cdot e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2\right)} \end{aligned}$$

Apsorbiranjem konstante proporcionalnosti dobivamo

$$L(\mu|x_1,\ldots,x_n) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\bar{x}-\mu)^2}$$

Uočimo, ova funkcija vjerodostojnosti ima oblik normalne distribucije s parametrima μ i $\frac{\sigma^2}{n}$. Sjetimo se, po (1.23) slijedi da je uzoračka aritmetička sredina uzorka iz normalne distribucije upravo normalno distribuirana s tim istim parametrima. Dakle, vrijedi

$$L(\mu|\bar{x}) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\bar{x}-\mu)^2}, \tag{2.11}$$

iz čega slijedi da je funkcija vjerodostojnosti slučajnog uzorka za parametar μ proporcionalna funkciji vjerodostojnosti uzoračkog očekivanja, za istu vrijednost parametra. Za

$n = 1$, odnosno za samo jednu opaženu vrijednost iz uzorka, gornja funkcija postaje proporcionalna normalnoj distribuciji s parametrima koji su jednaki upravo μ i σ^2.

Uvrštavanjem gornjeg izraza u (2.10), slijedi da je neprekidna verzija Bayesove formule za normalnu distribuciju

$$f(\mu|x_1,\dots,x_n) = \frac{f(\mu)e^{-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\bar{x}-\mu)^2}}{\int f(\mu)e^{-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\bar{x}-\mu)^2}d\mu}. \tag{2.12}$$

Gornji izraz vrijedi za bilo koju neprekidnu apriornu distribuciju $f(\mu)$. Jedini problem preostaje računanje integrala, koje općenito nije moguće egzaktno provesti, stoga se pristupa numeričkim metodama. U nastavku pododjeljka navodimo neke specifične apriorne distribucije uz koje nije potrebno računati integral.

Jeffreyjeva apriorna distribucija

Jeffreyjeva apriorna distribucija jedna je od najjednostavnijih izbora za apriornu distribuciju. Ona svakoj mogućoj vrijednosti parametra μ prilaže jednaku relativnu težinu, $f(\mu) = 1$. Općenito, nije nam bitno kolike su te težine, budući da znamo da se konstante krate u Bayesovoj formuli. Važno je jedino da su jednake za svaku vrijednost parametra.

Budući da vrijednost od μ može biti bilo koji realni broj, Jeffreyjeva apriorna distribucija nije regularna distribucija s obzirom na to da integral te funkcije ne mora biti jednak 1. No, zbog već spomenutog kraćenja, to neće stvarati problem u računu te će aposteriorna distribucija uistinu postati regularna.

Neka je $X_1,\dots,X_n$ slučajan uzorak iz normalne distribucije s parametrima μ i σ^2. Uz činjenicu da je $f(\mu) = 1$, slijedi

$$\begin{aligned} f(\mu|x_1,\dots,x_n) &\propto f(\mu)L(\mu|x_1,\dots,x_n) \\ &\propto L(\mu|x_1,\dots,x_n) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\bar{x}-\mu)^2} \end{aligned}$$

Dakle, aposteriorna distribucija je proporcionalna funkciji gustoće normalne slučajne varijable s parametrima μ i $\frac{\sigma^2}{n}$.

Kao i ranije, ponovno za $n = 1$, gornja funkcija postaje proporcionalna normalnoj distribuciji s parametrima μ i σ^2.

Normalna apriorna distribucija

Račun pri odabiru normalnih apriornih distribucija nešto je kompliciraniji, stoga prvo promatramo slučaj kada imamo samo jednu opaženu vrijednost.

Jedna opažena vrijednost

Neka je dano jedno opažanje x iz normalne distribucije s očekivanjem μ i poznatom varijancom σ^2. Neka je apriorna distribucija normalna s očekivanjem m i varijancom s^2. Oblik takve apriorne distribucije je

$$f(\mu) \propto e^{-\frac{1}{2s^2}(\mu-m)^2},$$

gdje, zbog već navedenog kraćenja, ponovno ignoriramo faktor koji ne sadrži parametar μ. Također, već smo vidjeli da je funkcija vjerodostojnosti proporcionalna s normalnom distribucijom parametara μ i σ^2,

$$L(\mu|x) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}.$$

Množenjem tih dviju funkcija, dobivamo sljedeću proporcionalnost:

$$f(\mu)L(\mu|x) \propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu-m)^2}{s^2}+\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)}$$

Sređivanjem izraza u eksponentu, slijedi

$$\begin{aligned} f(\mu)L(\mu|x) &\propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2(\mu^2-2\mu m+m^2)+s^2(x^2-2x\mu+\mu^2)}{\sigma^2 s^2}\right)} \\ &\propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma^2+s^2)\mu^2-2(\sigma^2 m+s^2 x)\mu+m^2\sigma^2+x^2 s^2}{\sigma^2 s^2}\right)} \\ &\propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2 s^2/(\sigma^2+s^2)}\left(\mu^2-2\frac{\sigma^2 m+s^2 x}{\sigma^2+s^2}\mu+\left(\frac{\sigma^2 m+s^2 x}{\sigma^2+s^2}\right)^2\right)} \\ &\propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2 s^2/(\sigma^2+s^2)}\left(\mu-\frac{\sigma^2 m+s^2 x}{\sigma^2+s^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Iz posljednjeg, uočavamo da je produkt tih dviju funkcija proporcionalan funkciji gustoće normalne razdiobe s parametrima očekivanja i varijance, redom

$$m' = \frac{\sigma^2 m + s^2 x}{\sigma^2 + s^2}, \quad (s')^2 = \frac{\sigma^2 s^2}{\sigma^2 + s^2}. \tag{2.13}$$

Zaključujemo da smo odabirom normalne apriorne distribucije, za aposteriornu distribuciju ponovno dobili normalnu distribuciju. Dakle, nije potrebno računati integral u (2.12), već samo pronaći pravilo po kojem ćemo ažurirati parametre.

Izrazi u (2.13) mogu se pojednostavniti. Uvedimo pojam *preciznosti* distribucije, definiranu kao recipročna vrijednost varijance:

$$\frac{1}{(s')^2} = \left(\frac{\sigma^2 s^2}{\sigma^2 + s^2}\right)^{-1} = \frac{\sigma^2 + s^2}{\sigma^2 s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{\sigma^2}$$

Odavde slijedi da je preciznost aposteriorne distribucije jednaka sumi preciznosti apriorne distribucije i preciznosti distribucije opažene vrijednosti. Tada je aposteriorno očekivanje jednako

$$\begin{aligned} m' &= \frac{(\sigma^2 m + s^2 y)}{\sigma^2 + s^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + s^2} m + \frac{s^2}{\sigma^2 + s^2} x \\ &= \frac{1/s^2}{1/\sigma^2 + 1/s^2} m + \frac{1/\sigma^2}{1/\sigma^2 + 1/s^2} x, \end{aligned} \tag{2.14}$$

iz čega slijedi da je ono jednako težinskoj sredini apriornog očekivanja i opažanja, a težine su upravo proporcije preciznosti tih distribucija.

Ovo pravilo također vrijedi i kada su Jeffreyjeve distribucije u pitanju. Budući da je njihova varijanca beskonačna, preciznost im je jednaka 0, a tada slijedi da je preciznost aposteriorne distribucije upravo jednaka preciznosti apriorne distribucije:

$$\frac{1}{\sigma^2} = 0 + \frac{1}{\sigma^2},$$

odnosno, varijanca aposteriorne distribucije jednaka je varijanci apriorne distribucije. S druge strane, Jeffreyjeve distribucije nemaju dobro definirano apriorno očekivanje. No, to nije problematično, budući da zbog preciznosti jednake 0, u (2.14) prvi član sume postaje 0, a drugi član sume se pokrati, pa preostaje samo x. Dakle, aposteriorno očekivanje Jeffreyjeve distribucije jednako je opažanju x.

Slučajni uzorak

Neka je $X_1, \ldots, X_n$ slučajni uzorak iz normalne distribucije s očekivanjem μ i poznatom varijancom σ^2. Pretpostavimo da je za apriornu distribuciju uzeta normalna distribucija s očekivanjem m i varijancom s^2, dakle oblika

$$f(\mu) \propto e^{-\frac{1}{s^2}(\mu - m)^2}.$$

Podsjetimo, konstante koje ne ovise o μ ignoriramo, jer se krate u izrazu Bayesove formule.

Koristimo funkciju vjerodostojnosti uzoračkog očekivanja, $\overline{x}$, za koje iz (1.23) znamo da je normalno distribuirano s očekivanjem μ i varijancom $\frac{\sigma^2}{n}$. Po definiciji, preciznost od $\overline{x}$ jednaka je upravo $\frac{n}{\sigma^2}$, a to je upravo suma svih preciznosti opaženih vrijednosti iz uzorka.

Dakle, jedino trebamo ažurirati parametre kao da se radi o jednoj vrijednosti, $\overline{x}$. Preciznost aposteriorne distribucije jednaka je preciznosti apriorne distribucije i preciznosti od $\overline{x}$:

$$\frac{1}{(s')^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{n}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2 + ns^2}{\sigma^2 s^2}, \tag{2.15}$$

odakle slijedi da je varijanca aposteriorne distribucije jednaka $\frac{\sigma^2 s^2}{\sigma^2+ns^2}$. Slično, očekivanje aposteriorne distribucije je, kao i ranije, jednako težinskoj sredini očekivanja apriorne distribucije i $\overline{x}$:

$$m' = \frac{1/s^2}{n/\sigma^2 + 1/s^2}m + \frac{n/\sigma^2}{n/\sigma^2 + 1/s^2}\overline{x}. \tag{2.16}$$

Apriorne distribucije trebaju odražavati naša osobna uvjerenja o nepoznatom parametru. Prvo odabiremo parametar m, a zatim parametar s. Općenito, standardnu devijaciju možemo odabrati tako da uzmemo jednu šestinu raspona intervala koji bi mogao sadržavati sve vrijednosti nepoznatog parametra, sukladno našim uvjerenjima.

Poglavlje 3

Bayesovsko zaključivanje za razliku očekivanja

Često u raznim istraživanjima želimo uspoređivati dobivene vrijednosti iz dvaju ili više skupova podataka, no to nije uvijek moguće lako načiniti. Potencijalne greške pri opservaciji i unosu podataka ili pretjerane varijacije među promatranim jedinkama nerijetko nam otežavaju da uočimo postoje li značajnije razlike između tih dvaju skupova podataka. Zbog toga naše podatke često ne analiziramo direktno, već uspoređujemo očekivanja distribucija iz kojih oni potječu. U većini slučajeva podaci dolaze iz normalnih distribucija, dakle uspoređujemo očekivanja dvaju takvih distribucija.
Najučestalija situacija u takvim istraživanjima je onda kada su uzorci međusobno nezavisni i slučajno odabrani, te na svaku skupinu primijenjeni isti tretmani, a zatim mjerena opažanja. Drugi način kako bismo mogli promatrati podatke iz različitih uzoraka jest da ih, po nekoj osnovi, uparimo, te na jedan od članova primijenimo jedan(ili više) tretmana, dok drugi član pripada kontrolnoj skupini. Za takvu situaciju smatramo da su uzorci iz dvaju populacija zavisni.

3.1 Nezavisni uzorci iz dvaju normalnih distribucija

Pretpostavimo da želimo provjeriti utječe li određeni tretman(npr. određena vrsta hrane) na brzinu rasta janjadi. Jedan od pristupa ovom problemu jest taj da na slučajan način, nezavisno jedne od drugih, podijelimo stado u dvije skupine: skupinu koja će primiti taj tretman, te kontrolnu skupinu. Ovakav pristup je poželjan, budući da znamo da je svako janje individua za sebe te zbog toga postoji variranje u brzini rasta među njima, a slučajnom raspodjelom janjadi u dvije grupe upravo eliminiramo taj problem - pretpostavljamo da će se podjednaka količina varijacije nalaziti u obje grupe.

Pretpostavimo da brzinu rasta opisuje normalna slučajna varijabla s istim očekivanjem μ i varijancom σ^2. Očekivanje prve skupine, μ_1, jednako je sumi očekivanja početne slučajne varijable i efekta tretmana. Očekivanje druge, kontrolne skupine, μ_2, jednako je upravo početnom očekivanju, budući da kontrolna skupina nije podvrgnuta nikakvom tretmanu.

Postoje dvije razlike u samom efektu tretmana. Ako je on konstantan, varijance obje grupe će ostati jednake. Ovo slijedi direktno iz svojstava varijance, budući da dodavanje konstante slučajnoj varijabli ne mijenja njenu varijancu. No, ako se tretmani međusobno razlikuju od janjeta do janjeta, varijance grupa će biti različite. Prvi pristup se naziva *aditivnim*, a drugi *neaditivnim modelom*.

Želimo provjeriti je li tretman koristan, dakle želimo provjeriti hoće li μ_1 biti veći od μ_2. U nastavku razvijamo Bayesovske metode za testiranje razlike tih očekivanja, $\mu_1 - \mu_2$, za oba modela, čije ćemo primjene ilustrirati kroz primjere preuzete iz [2].

Prije svega, navedimo nekoliko tehničkih rezultata koji će nam biti od koristi u nastavku rada, a njihovi dokazi mogu se pogledati u [7]. Sjetimo se, u teoremu 1.3.12 pokazana je linearnost matematičkog očekivanja. Slična stvar vrijedi i za varijancu sume slučajnih varijabli, ali uz uvjet da su nezavisne. O tome govori sljedeći teorem:

Teorem 3.1.1. *Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne varijable čije varijance postoje, tada postoji i varijanca od $\sum_{i=1}^n X_i$ i vrijedi*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} VarX_i. \tag{3.1}$$

Lema 3.1.2. *i) Ako je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i $Y = aX + b, a \neq 0$, tada je*

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2). \tag{3.2}$$

ii) Ako su $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne slučajne varijable tada je

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2). \tag{3.3}$$

Uzorci jednakih varijanci

Pretpostavimo da nam je poznata varijanca σ^2. Budući da znamo da su oba uzorka nezavisni jedan od drugoga, koristit ćemo i nezavisne apriorne distribucije za oba očekivanja.

Iz nezavisnosti apriornih distribucija i nezavisnosti uzoraka, slijedi da su i aposteriorne distribucije također nezavisne.

Pretpostavimo da imamo dva opažena uzorka, $x_{11}, \dots, x_{n_1 1}$, duljine n_1 iz normalne distribucije s očekivanjem μ_1 i varijancom σ^2, te $x_{12}, \dots, x_{n_1 2}$, duljine n_2 iz normalne distribucije s očekivanjem μ_2 i istom, poznatom varijancom σ^2. Iz prethodnog dijela ovog odjeljka dobivamo da su aposteriorne distribucije oblika

$$f(\mu_1 | x_{11}, \dots, x_{n_1 1}) \sim N(m_1', (s_1')^2),$$

te

$$f(\mu_2 | x_{12}, \dots, x_{n_2 2}) \sim N(m_1', (s_1')^2),$$

gdje su vrijednosti $m_1', (s_1')^2, m_2'$ i $(s_2')^2$ dobivene pomoću formula (2.15) i (2.16).

Budući da su aposteriorne distribucije nezavisne jedna od druge, iz teorema 3.1.1 i leme 3.1.2 slijedi da je aposteriorna distribucija razlike $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ dana sa

$$f(\mu_d | x_{11}, \dots, x_{n_1 1}, x_{12}, \dots, x_{n_2 2}) \sim N(m_d', (s_d')^2), \tag{3.4}$$

gdje su $m_d' = m_1' - m_2'$ te $(s_d')^2 = (s_1')^2 + (s_2')^2$ dobivene vrijednosti parametara. Ovu aposteriornu distribuciju možemo iskoristiti kako bismo donijeli zaključke o razlici očekivanja $\mu_1 - \mu_2$.

Interval vjerodostojnosti za razliku očekivanja - poznata varijanca

Općenito, pravilo nalaženja $(1-\alpha)\cdot 100\%$ Bayesovskog intervala vjerodostojnosti u slučaju da je aposteriorna distribucija normalna s parametrima m' i $(s')^2$ jest

$$\textit{aposteriorno očekivanje} \pm \textit{kritična vrijednost} \cdot \textit{aposteriorna standardna devijacija}. \tag{3.5}$$

Kada je opažena varijanca poznata, kritična vrijednost može se odrediti pomoću tablice jedinične normalne razdiobe. U tom slučaju, $(1-\alpha)\cdot 100\%$ Bayesovski interval vjerodostojnosti za razliku očekivanja $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ je

$$m_d' \pm z_{\alpha/2} \cdot s_d'. \tag{3.6}$$

Ovo se može zapisati u obliku

$$m_1' - m_2' \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{(s_1')^2 + (s_2')^2}. \tag{3.7}$$

Dakle, vjerojatnost da razlika očekivanja μ_d, uz uvjet da je dan uzorak, leži unutar gornjeg intervala je upravo $(1-\alpha)\cdot 100\%$.

Interval pouzdanosti za razliku očekivanja - poznata varijanca

U frekvencionističkom pristupu, pouzdani interval za razliku očekivanja $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$, u slučaju kada obje distribucije imaju jednaku, poznatu varijancu, jest

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \tag{3.8}$$

gdje su $\overline{x}_1$ i $\overline{x}_2$ uzoračke aritmetičke sredine uzoraka duljina n_1 i n_2. Uočavamo da je ovo identičan izraz za Bayesovski interval pouzdanosti u slučaju da koristimo Jeffreyjeve apriorne distribucije za μ_1 i μ_2, ali interpretacije se razlikuju. U frekvencionističkom pristupu, krajnje točke intervala su slučajne te očekujemo da će $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ ovako izračunatih intervala pouzdanosti sadržavati fiksnu, nepoznatu vrijednost parametra μ_d.

Primjer 3.1.3. *U sljedećoj tablici dane su dvije serije mjerenja brzine svjetlosti, iz 1879. i 1882:*

1879.		*1882.*	
850	*740*	*883*	*816*
900	*1070*	*778*	*796*
930	*850*	*682*	*711*
950	*980*	*611*	*599*
980	*880*	*1051*	*781*
1000	*980*	*578*	*796*
930	*650*	*774*	*820*
760	*810*	*772*	*696*
1000	*1000*	*573*	*748*
960	*960*	*748*	*797*
		851	*809*
		723	

Pretpostavimo da je svako mjerenje brzine svjetlosti normalno distribuirano s poznatom standardnom devijacijom 100. *Neka su apriorne distribucije normalno distribuirane s parametrima m i s^2, gdje je $m = 300000$ i $s^2 = 500^2$.*

Koristeći formule (2.15) *i* (2.16), *dobivamo parametre aposteriorne distribucije za očekivanje prve skupine, označimo ga s μ_{1879}, na sljedeći način:*

$$\frac{1}{(s'_{1879})^2} = \frac{1}{500^2} + \frac{20}{100^2} = 0.002004$$
$$\Rightarrow (s'_{1879})^2 = 499.$$

Slično, za parametar m'_{1879} dobivamo

$$\begin{aligned} m'_{1879} &= \frac{\frac{1}{500^2}}{0.002004} \cdot 300000 + \frac{\frac{20}{100^2}}{0.002004} \cdot (299000 + 909) \\ &= 299909. \end{aligned}$$

Analogno, za drugu skupinu i parametre $(s'_{1882})^2$ te m'_{1882} dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s'_{1882})^2} &= \frac{1}{500^2} + \frac{23}{100^2} = 0.002304 \\ \Rightarrow (s'_{1882})^2 &= 434. \\ m'_{1882} &= \frac{\frac{1}{500^2}}{0.002304} \cdot 300000 + \frac{\frac{23}{100^2}}{0.002304} \cdot (299000 + 756) \\ &= 299757. \end{aligned}$$

Dakle, aposteriorna distribucija razlike očekivanja $\mu_d = \mu_{1879} - \mu_{1882}$ bit će normalno distribuirana s parametrima m'_d i $(s'_d)^2$, gdje je

$$m'_d = m'_{1879} - m'_{1882} = 299909 - 299757 = 152,$$

te

$$(s'_d)^2 = (s'_{1879})^2 + (s'_{1882})^2 = 499 + 434 = 30.5^2$$

Uvrštavanjem dobivenih rezultata u (3.7)*, dobivamo* 95% *Bayesovski interval vjerodostojnosti za razliku očekivanja $\mu_d = \mu_{1879} - \mu_{1882}$:*

$$152 \pm 1.96 \cdot 30.5 = \langle 92.1, 211.9 \rangle .$$

Bayesovsko testiranje jednostranih hipoteza - poznata varijanca

Vratimo se na motivacijski primjer s početka poglavlja. Ukoliko želimo ispitati je li očekivanje skupine koja dobiva tretman, označimo ga s μ_1, veće od očekivanja kontrolne skupine, označimo ga s μ_2, testirat ćemo sljedeće hipoteze:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_d = \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \\ H_1 &: \mu_d = \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{aligned}$$

Kako bismo testirali gornje hipoteze u Bayesovskoj statistici, moramo izračunati aposteriornu vjerojatnost nulte hipoteze, $\mathbb{P}(\mu_d \leq 0|\mathbf{x})$, gdje je $\mathbf{x}$ uzorak nastao spajanjem dvaju uzoraka $x_{11}, \ldots, x_{n_1 1}$ te $x_{12}, \ldots, x_{n_2 2}$. Klasičnim postupkom standardiziranja dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mu_d \leq 0|\mathbf{x}) &= \mathbb{P}\left(\frac{\mu_d - m'_d}{s'_d} \leq \frac{0 - m'_d}{s'_d}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{0 - m'_d}{s'_d}\right), \end{aligned} \tag{3.9}$$

gdje Z ima jediničnu normalnu distribuciju. Ako je dobivena vjerojatnost manja od razine značajnosti α, odbacujemo nultu hipotezu u korist alternative i zaključujemo da je očekivanje prve skupine uistinu veće od onog kontrolne skupine.

Bayesovsko testiranje dvostranih hipoteza - poznata varijanca

Pretpostavimo da želimo ispitati postoji li razlika u očekivanjima dvaju skupina. Tada testiramo sljedeću, dvostranu hipotezu:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 &: \mu_d = \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Za razliku od jednostranih testova, u ovom slučaju ne možemo računati aposteriornu vjerojatnost, budući da je nulta hipoteza istinita samo za jednu vrijednost $\mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0$. Ako koristimo neprekidne apriorne distribucije, znamo da ćemo dobiti i neprekidne aposteriorne distribucije, a vjerojatnost da takve poprime vrijednost u jednoj točki je jednaka nuli.

Umjesto toga, koristimo Bayesovski interval pouzdanosti za parametar μ_d. Ako 0 upada u dobiveni interval, ne možemo odbaciti nultu hipotezu u korist alternative te 0 predstavlja pouzdanu vrijednost za razliku očekivanja. U protivnom, odbacujemo nultu hipotezu i zaključujemo da postoji statistički značajna razlika u očekivanjima, za danu razinu značajnosti α.

Primjer 3.1.4. *Vratimo se na prethodni primjer o mjerenju brzine svjetlosti i ispitajmo postoji li statistički značajna razlika među dvama očekivanjima μ_{1879} i μ_{1882}. Dakle, testiramo sljedeće hipoteze:*

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_{1879} - \mu_{1882} = 0 \\ H_1 &: \mu_{1879} - \mu_{1882} \neq 0 \end{aligned}$$

Prisjetimo se, 95% *Bayesovski interval vjerodostojnosti je*

$$\langle 92.1, 211.9 \rangle .$$

Budući da se 0 ne nalazi u dobivenom intervalu, na razini značajnosti $\alpha = 0.05$ *odbacujemo nultu hipotezu u korist alternative, odnosno zaključujemo da postoji statistički značajna razlika u očekivanju između tih dviju grupa.*

Do sada smo pretpostavljali da je varijanca poznata. U nastavku pretpostavljamo da je nepoznata, te da koristimo nezavisne Jeffreyjeve apriorne distribucije za μ_1 i μ_2. Tada je

$$(s_1')^2 = \frac{\sigma^2}{n_1}, \ (s_2')^2 = \frac{\sigma^2}{n_2},$$

te

$$m_1' = \overline{x}_1, \ m_2' = \overline{x}_2.$$

Interval vjerodostojnosti za razliku očekivanja - nepoznata varijanca

Prisjetimo se, u slučaju kada nam je poznata vrijednost varijance σ^2, interval vjerodostojnosti bismo mogli napisati kao

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

Međutim, sada nam je ta vrijednost nepoznata i morat ćemo je procijeniti iz samih podataka. Najbolje što možemo napraviti jest da udružimo oba uzorka u jedan zajednički, te izračunamo varijancu združenog uzorka na sljedeći način:

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{i1} - \overline{x}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_{j2} - \overline{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}. \tag{3.10}$$

Budući da procjena varijance dolazi iz združenog uzorka, morat ćemo proširiti interval vjerodostojnosti kako bismo se prilagodili mogućim odstupanjima od stvarne, prave vrijednosti varijance σ^2. Umjesto normalne razdiobe, koristimo Studentovu t razdiobu s $n_1 + n_2 - 2$ stupnja slobode. Tada aproksimativni $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ Bayesovski interval pouzdanosti postaje

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \tag{3.11}$$

gdje kritičnu vrijednost Studentove t razdiobe iščitavamo iz statističkih tablica, ili računamo koristeći računalo.

Interval pouzdanosti za razliku očekivanja - nepoznata varijanca

U frekvencionističkom pristupu, interval pouzdanosti za razliku očekivanja $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ pri čemu je varijanca obje skupine jednaka, ali nepoznata, je upravo dan sa (3.11), kao u slučaju kada koristimo Jeffreyjeve apriorne distribucije za μ_1 i μ_2. Naravno, kao i ranije, iako su intervali isti, interpretacije su različite.

Bayesovska interpretacija govori da (3.11) zapravo predstavlja aposteriornu vjerojatnost da slučajni parametar μ_d leži u danom intervalu, i ona je jednaka upravo $1 - \alpha$. Kod frekvencionističkog pristupa, nepoznati parametar μ_d je fiksan, a $(1-\alpha) \cdot 100\%$ pouzdanih intervala će sadržavati njegovu vrijednost, dakle, kao i ranije, ovdje su rubovi intervala slučajni brojevi.

Bayesovsko testiranje jednostranih hipoteza - nepoznata varijanca

Ponovno pretpostavljamo da uzorci dolaze iz normalnih razdioba s jednakom, nepoznatom varijancom σ^2 i testiramo sljedeće hipoteze:

$$H_0 : \mu_d = \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$
$$H_1 : \mu_d = \mu_1 - \mu_2 > 0$$

Uz pretpostavke o nezavisnosti Jeffreyjevih apriornih distribucija za μ_1 i μ_2, te korištenje $\hat{\sigma}_p^2$ za procjenu varijance, aposteriornu vjerojatnost nulte hipoteze računamo pomoću (3.9), ali sada, umjesto normalne distribucije, koristimo Studentovu t distribuciju s $n_1 + n_2 - 2$ stupnja slobode.

Bayesovsko testiranje dvostranih hipoteza - nepoznata varijanca

Uz iste pretpostavke kao i ranije, za testiranje hipoteza

$$H_0 : \mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_d = \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

koristimo interval vjerodostojnosti za $\mu_1 - \mu_2$ dan sa (3.11). Zaključivanje se provodi na isti način kao i u slučaju poznate varijance. Ako 0 upada u dobiveni interval, ne možemo odbaciti nultu hipotezu u korist alternative te 0 predstavlja pouzdanu vrijednost za razliku očekivanja. U protivnom, odbacujemo nultu hipotezu i zaključujemo da postoji statistički značajna razlika u očekivanjima, za danu razinu značajnosti α.

Uzorci različitih varijanci

Do sada smo pretpostavljali da uzorci dolaze iz normalnih distribucija s jednakom varijancom, odnosno proučavali smo aditivni model. Sada ćemo se pozabaviti neaditivnim modelom na isti način kao i ranije - prvo u slučaju poznatih, a zatim u slučaju nepoznatih varijanci.

Neka su $x_{11}, \ldots, x_{n_1 1}$ i $x_{12}, \ldots, x_{n_2 2}$ dva uzorka iz normalnih distribucija, redom, s parametrima μ_1 i σ_1^2, odnosno μ_2 i σ_2^2, pri čemu su uzorci međusobno nezavisni, a vrijednosti varijanci su poznate.

Kao i ranije, ponovno možemo koristiti nezavisne apriorne distribucije za μ_1 i μ_2, koje mogu biti ili normalne, ili Jeffreyjeve. Zbog nezavisnosti uzoraka i apriornih distribucija, slijedi i da su aposteriorne distribucije nezavisne te ih možemo odrediti nezavisno jednu od druge. To radimo standardno, pomoću formula danih sa (2.15) i (2.16). Postupak je u potpunosti analogan kao i u slučaju jednakih varijanci, te je aposteriorna distribucija dana sa (3.4), uz jednako definirane vrijednosti parametara m'_d i $(s'_d)^2$.

Interval vjerodostojnosti za razliku očekivanja - poznate varijance

Kao i u slučaju jednakih varijanci, interval je identičan i dan sa (3.6), odnosno (3.7):

$$m'_1 - m'_2 \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{(s'_1)^2 + (s'_2)^2}. \tag{3.12}$$

Interval pouzdanosti za razliku očekivanja - poznate varijance

Budući da se u ovom slučaju radi o različitim varijancama, u frekvencionističkom pristupu, interval pouzdanosti za razliku očekivanja $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ je jednak

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}. \tag{3.13}$$

Kao i ranije, uočavamo da je ovo identičan izraz za Bayesovski interval vjerodostojnosti u slučaju da koristimo Jeffreyjeve apriorne distribucije za μ_1 i μ_2, ali interpretacije se ponovno razlikuju, na isti način kako je opisano u prethodnom dijelu poglavlja.

Preostalo je istražiti slučaj kada su varijance različite, ali nepoznate. U tom slučaju, svaku varijancu moramo procijeniti zasebno iz odgovarajućeg uzorka, stoga dobivamo procjene

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{i1} - \overline{x}_1)^2, \tag{3.14}$$

odnosno

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}(x_{j2} - \overline{x}_2)^2. \tag{3.15}$$

Ove procjene koristimo u formulama (2.15) i (2.16) umjesto pravih, nepoznatih vrijednosti varijanci σ_1^2 i σ_2^2. Ponovno se trebamo prilagoditi mogućim odstupanjima od stvarnih vrijednosti, stoga koristimo Studentovu t distribuciju za kritične vrijednosti. No, za razliku od prije, više nije jasno koliko stupnjeva slobode odabrati. Jedan od mogućih načina je da izračunamo prilagođeni broj stupnjeva slobode pomoću formule

$$\frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(\hat{\sigma}_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \frac{(\hat{\sigma}_2^2/n_2)^2}{n_2+1}}, \tag{3.16}$$

te dobivenu vrijednost zaokružimo na najbliži cijeli broj.

Interval vjerodostojnosti za razliku očekivanja - nepoznate varijance

Koristeći procjene varijanci $\hat{\sigma}_1^2$ i $\hat{\sigma}_2^2$ te formule (2.15) i (2.16), dobivamo aproksimativni $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ interval pouzdanosti za razliku očekivanja $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$, dan sa

$$m_1' - m_2' \pm t_{\alpha/2}\sqrt{(s_1')^2 + (s_2')^2}, \tag{3.17}$$

gdje je broj stupnjeva slobode dobiven koristeći (3.16). Ako koristimo nezavisne Jeffreyjeve apriorne distribucije, ovaj interval se može napisati i kao

$$m_1' - m_2' \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}. \tag{3.18}$$

Interval pouzdanosti za razliku očekivanja - nepoznate varijance

Aproksimativni $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ pouzdani interval u ovom slučaju je dan sa (3.18). Kao i ranije, iako je interval jednak dobivenom intervalu vjerodostojnosti u slučaju da su apriorne distribucije Jeffreyjeve i nezavisne, interpretacije se ponovno razliku, a objašnjene su u ranijem dijelu poglavlja.

Bayesovsko testiranje jednostranih hipoteza

Kao i ranije, testiramo sljedeće hipoteze uz zadanu razinu značajnosti α:

$$H_0 : \mu_d = \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$
$$H_1 : \mu_d = \mu_1 - \mu_2 > 0$$

Postupak računanja aposteriorne vjerojatnosti nulte hipoteze je analogan i dan je s (3.9). Ako su varijance σ_1^2 i σ_2^2 poznate, kritičnu vrijednost određujemo iz tablice jedinične normalne razdiobe. U protivnom, ako koristimo procjene varijanci $\hat{\sigma}_1^2$ i $\hat{\sigma}_2^2$, tada vjerojatnosti određujemo koristeći Studentovu t distribuciju s prilagođenim brojem stupnjeva slobode, danim s (3.16). Zaključci se sprovode identično kao i do sada: ako je izračunata vjerojatnost manja od razine značajnosti α, odbacujemo nultu hipotezu u korist alternative i zaključujemo da je $\mu_1 > \mu_2$, odnosno, tretman ima efekta. U suprotnom ju ne možemo odbaciti, tj. ne možemo tvrditi da je tretman efektivan.

3.2 Bayesovsko zaključivanje za razliku dvaju proporcija

Osim razlike očekivanja, često u znanstvenim istraživanjima želimo usporediti i proporcije nekih svojstava u dvama populacijama. U ovom potpoglavlju ilustrativno navodimo samo krajnje rezultate, a više o Bayesovskoj analizi za proporcije može se naći u [2]. Neka su π_1 i π_2 prave vrijednosti proporcije toga svojstva u prvoj, odnosno drugoj populaciji. Jedan od načina na koji bismo mogli pristupiti ovom problemu je taj da na slučajan način odaberemo uzorak iz prve populacije te zabilježimo opaženu proporciju sa zadanim svojstvom, te slično napravimo i s drugom populacijom. Tada je apriorna distribucija od $f(x_1|\pi_1)$ binomna s parametrima n_1 i π_1, a $f(x_2|\pi_2)$ binomna s parametrima n_2 i π_2.

Već otprije znamo da, ukoliko odaberemo nezavisne apriorne distribucije za parametre π_1 i π_2, kao rezultat ćemo dobiti nezavisne aposteriorne distribucije. Neka su apriorne distribucije za π_1 i π_2 beta distribucije s parametrima a_1 i b_1, odnosno a_2 i b_2. Prema [2], slijedi da su aposteriorne distribucije za π_1 i π_2 nezavisne beta distribucije s parametrima

$$a_1' = a_1 + x_1 \text{ i } b_1' = b_1 + n_1 - x_1, \tag{3.19}$$

te

$$a_2' = a_2 + x_2 \text{ i } b_2' = b_2 + n_2 - x_2 \tag{3.20}$$

Sada aproksimiramo svaku aposteriornu distribuciju normalnom distribucijom čije su vrijednosti očekivanja i varijance jednake vrijednostima očekivanja i varijanci danih beta razdioba. Dakle, aposteriorna distribucija razlike proporcija $\pi_d = \pi_1 - \pi_2$ je aproksimativno normalna s parametrima m_d' i $(s_d')^2$, gdje je aposteriorni parametar očekivanja

$$m_d' = \frac{a_1'}{a_1' + b_1'} - \frac{a_2'}{a_2' + b_2'}, \tag{3.21}$$

a aposteriorni parametar varijance

$$(s_d')^2 = \frac{a_1' b_1'}{(a_1' + b_1')^2 (a_1' + b_1' + 1)} + \frac{a_2' b_2'}{(a_2' + b_2')^2 (a_2' + b_2' + 1)}. \tag{3.22}$$

Interval vjerodostojnosti za razliku proporcija

Kako bismo pronašli $(1-\alpha)\cdot 100\%$ Bayesovski interval vjerodostojnosti za razliku proporcija $\pi_d = \pi_1 - \pi_2$, koristimo već dobro poznato pravilo (3.5). Dakle, traženi interval je

$$m'_d \pm z_{\alpha/2} \cdot s'_d. \tag{3.23}$$

Bayesovsko testiranje jednostranih hipoteza za razliku proporcija

Pretpostavimo da želimo ispitati je li određeno svojstvo dominantnije u prvoj populaciji. Drugim riječima, zanima nas je li proporcija tog svojstva u prvoj populaciji veća od proporcije u drugoj populaciji. Uz prethodne oznake, tada bismo testirali sljedeće hipoteze:

$$H_0 : \pi_d = \pi_1 - \pi_2 \leq 0$$
$$H_1 : \pi_d = \pi_1 - \pi_2 > 0$$

Ponovno moramo izračunati aproksimativnu aposteriornu vjerojatnost nulte hipoteze. Slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\pi_d \leq 0) &= \mathbb{P}\left(\frac{\pi_d - m'_d}{s'_d} \leq \frac{0 - m'_d}{s'_d}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{0 - m'_d}{s'_d}\right).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Ako je gornja vjerojatnost manja od zadane razine značajnosti α, tada odbacujemo nultu hipotezu u korist alternative i zaključujemo da je proporcija svojstva uistinu veća u prvoj populaciji. U protivnom, ne možemo odbaciti nultu hipotezu i donijeti takav zaključak.

Bayesovsko testiranje dvostranih hipoteza za razliku proporcija

Uz prethodne oznake, promotrimo sada sljedeće hipoteze:

$$H_0 : \pi_d = \pi_1 - \pi_2 = 0$$
$$H_1 : \pi_d = \pi_1 - \pi_2 \neq 0$$

Ovakav test se sprovodi jednakom paradigmom kao i u slučaju prijašnjih dvostranih Bayesovskih testova - pronalazimo interval vjerodostojnosti za parametar μ_d dan sa (3.23), a zatim provjeravamo nalazi li se 0 u dobivenom intervalu. Ako 0 leži u intervalu, ne možemo odbaciti nultu hipotezu na zadanoj razini značajnosti α. U protivnom, odbacujemo H_0 u korist alternative te zaključujemo da se proporcije statistički značajno razlikuju.

Primjer 3.2.1. *Studenti jednog sveučilišta žele istražiti pušačke navike svojih kolega. Odabrali su slučajan uzorak od 200 studenata, od čega 100 mladića, te 100 djevojaka, u dobi od 16 do 21 godine, koji su se morali izjasniti konzumiraju li cigarete. Od 100 mladića, 22 ih je reklo da redovno konzumiraju cigarete, dok je istu stvar priznala 31 od ukupno 100 djevojaka.*

Studenti su pretpostavili da su uzorci muških i ženskih studenata međusobno nezavisni. Također, pretpostavili su da samo manjina studenata puši, stoga su odabrali nezavisne $\beta(1,2)$ *apriorne distribucije za proporciju muških i ženskih pušača, u oznakama* π_m *i* π_f*, redom.*

Računanjem aposteriornih distribucija pomoću (3.19) *i* (3.20)*, dobivene su* $\beta(23,80)$ *i* $\beta(32,71)$ *razdiobe za muškarce, odnosno žene. Dakle, aposteriorna distribucija za razliku proporcija* $\pi_d = \pi_m - \pi_f$ *je aproksimativno normalna s parametrima* m'_d *i* $(s'_d)^2$*, gdje je*

$$\begin{aligned} m'_d &= \frac{a'_1}{a'_1 + b'_1} - \frac{a'_2}{a'_2 + b'_2} \\ &= \frac{23}{23 + 80} - \frac{32}{32 + 71} \\ &= -0.087, \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} (s'_d)^2 &= \frac{a'_1 b'_1}{(a'_1 + b'_1)^2 (a'_1 + b'_1 + 1)} + \frac{a'_2 b'_2}{(a'_2 + b'_2)^2 (a'_2 + b'_2 + 1)} \\ &= \frac{23 \cdot 80}{(23 + 80)^2 \cdot (23 + 80 + 1)} + \frac{32 \cdot 71}{(32 + 71)^2 \cdot (32 + 71 + 1)} \\ &= 0.061^2 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u (3.23)*, dobili su da je traženi* 95% *interval vjerodostojnosti jednak*

$$\langle -0.207, 0.032 \rangle .$$

Budući da 0 leži u dobivenom intervalu, na razini značajnosti $\alpha = 0.05$ *nisu mogli odbaciti nultu hipotezu u korist alternative, odnosno, nisu mogli zaključiti da postoji statistički značajna razlika u proporcijama pušača kod muških i ženskih studenata sveučilišta.*

3.3 Upareni uzorci iz dvaju normalnih distribucija

Varijacija između jedinki nad kojima vršimo ispitivanje često pridonosi varijaciji u cjelokupnim podacima. Kada primijenimo dva tretmana na dva nezavisna uzorka, spomenuta varijacija otežava uočavanje potencijalne razlike među efektima tretmana, ako ona uopće postoji.

Kako bismo otklonili takav problem, opredjeljujemo se za uparivanje podataka. Kod takvog istraživanja, eksperimentalni podaci su podijeljeni u parove po nekoj logičkoj osnovi ili zajedničkoj karakteristici. Nakon što provedemo uparivanje, svakom od članova para dodjeljujemo jedan od dva tretmana. Ovakva praksa se često naziva *randomizacijski blok-dizajn* nekog eskperimenta, a svaki par predstavlja po jedan *blok*.

Postoje i drugi slučajevi u kojima je uparivanje podataka od koristi. Naprimjer, oba tretmana možemo dati samo jednom od članova para u određenom vremenskom razmaku, kako bismo uključili i promotrili efekt prolaska vremena. Nadalje, možemo i promatrati *prije-poslije* efekt nekog tretmana. Posljednje je čest slučaj u farmakološkim istraživanjima, gdje se proučava efikasnost nekog lijeka. Naprimjer, jedan par podataka može biti iznos sistoličkog krvnog tlaka određenog pacijenta prije i nakon konzumiranja lijeka za snižavanje tlaka.

Nedostatak ovakvog pristupa je taj što ne možemo uzorke smatrati nezavisnima. Iako značajno eliminiramo varijaciju među jedinkama, postoji razlika u opažanjima unutar samog para i opažanjima među parovima. Razlika unutar para je jedino u efektu tretmana i eventualnim pogreškama u mjerenju. Razlika među parovima je, osim gore navedenog, je i varijacija same jedinke, odnosno bloka. Stoga će, u pravilu, opažanja unutar jednog bloka često biti sličnija nego opažanja među blokovima.

Pretpostavljamo da oba slučajna uzorka dolaze iz normalnih razdioba s očekivanjem μ_A, odnosno, μ_B, gdje su s A i B označeni tretmani primijenjeni na uzorke. Ako se radi o aditivnom modelu, populacije će imati jednake varijance σ^2. Smatramo da varijanca dolazi iz dva izvora: pogrešaka u mjerenju te varijacije među samim jedinkama.

Neka su s x_{i1} i x_{i2} dana opažanja iz para i na koja su, redom, primijenjeni tretmani A i B. Ako promotrimo razlike u opažanjima unutar tog para, $d_i = x_{i1} - x_{i2}$, tada će vrijednosti d_i tvoriti slučajan uzorak iz normalne distribucije s očekivanjem $\mu_d = \mu_A - \mu_B$ i varijancom σ_d^2. Ovakve podatke možemo tretirati kao jedan uzorak i, sukladno tome, provoditi Bayesovsko testiranje za očekivanje (jedne) normalne razdiobe.

Primjer 3.3.1. *Dizajnirano je istraživanje kako bi se utvrdilo imaju li određeni suplementi za stočnu hranu utjecaja na godišnju količinu mlijeka koje krave daju. U istraživanju je sudjelovalo 15 parova krava blizanki. U svakom paru, jedna od krava je na slučajan način odabrana da konzumira hranu s dodanim suplementima, dok je druga krava jela standardnu stočnu hranu. Količina mlijeka (u litrama) prikazana je u sljedećoj tablici:*

Par	*Hrana bez suplemenata*	*Hrana sa suplementima*
1	*3525*	*3340*
2	*4321*	*4279*
3	*4763*	*4910*
4	*4899*	*4866*
5	*3234*	*3125*
6	*3469*	*3680*
7	*3439*	*3965*
8	*3658*	*3849*
9	*3385*	*3297*
10	*3226*	*3124*
11	*3671*	*3218*
12	*3501*	*3246*
13	*3842*	*4245*
14	*3998*	*4186*
15	*4004*	*3711*

Pretpostavimo da uzorak skupine koja je dobila suplemente u hranu dolazi iz normalne razdiobe s očekivanjem μ_1 *i* σ_1^2*, a uzorak kontrolne skupine iz normalne razdiobe s parametrima* μ_2 *i* σ_2^2*. Prirodno je za pretpostaviti da će rezultati unutar jednog para biti sličniji, budući da su krave blizanke genetički puno sličnije od ostalih krava u uzorku.*

Promotrimo razlike $d_i = x_{i1} - x_{i2}, i = 1, \ldots, 15$*. Tada* d_i *tvori slučajan uzorak iz normalne distribucije s očekivanjem* $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ *i varijancom* σ_d^2*, za koju pretpostavljamo da je poznata i iznosi* 270^2*. Želimo ispitati pomažu li suplementi u povećanju količine mlijeka koje krava može dati, pa na razini značajnosti od* 95% *testiramo sljedeće hipoteze:*

$$H_0 : \mu_d = \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$
$$H_0 : \mu_d = \mu_1 - \mu_2 > 0$$

Ukoliko koristimo Jeffreyjevu apriornu distribuciju za parametar μ_d*, iz ranijeg dijela poglavlja znamo da je aposteriorna distribucija normalno distribuirana s parametrima* $m' = \overline{d} = 7.07$*, te* $(s') = \sqrt{\frac{270^2}{15}} = 69.71$.

Ako koristimo normalnu apriornu distribuciju s parametrima $m = 0$ *i* $s = 200$*, tada aposteriornu normalnu distribuciju dobivamo koristeći formule* (2.15) *i* (2.16)*, pa dobi-*

vamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s')^2} &= \frac{1}{200^2} + \frac{15}{270^2} = 0.000230761 \\ \Rightarrow s' &= 65.83,\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}m' &= \frac{\frac{1}{200^2}}{0.000230761} \cdot 0 + \frac{\frac{15}{270^2}}{0.000230761} \cdot 7.07 \\ &= 6.33\end{aligned}$$

Budući da se radi o normalnim aposteriornim distribucijama te jednostranom testu, preostalo je izračunati aposteriorne vjerojatnosti nulte hipoteze dane s (3.9). *Dobiveni rezultati prikazani su u sljedećoj tablici:*

Apriorna distribucija	*Aposteriorna distribucija*	$\mathbb{P}(\mu_d \leq 0 \vert d_1, \ldots, d_n)$	*Zaključak*
Jeffreyjeva	$N(7.07, 69.71^2)$	*0.4596*	*ne odbacujemo* H_0
$N(0, 200^2)$	$N(6.33, 65.83^2)$	*0.4619*	*ne odbacujemo* H_0

Dakle, u oba slučaja ne možemo tvrditi da postoji razlika u količini dobivenog mlijeka, odnosno, ne možemo tvrditi da suplementi imaju učinka.

Poglavlje 4

Primjeri i primjene

U posljednjem poglavlju ovog rada demonstriramo primjenu obrađene teorije kroz još nekoliko zadataka, uz pomoć programskog paketa R. Izvor zadataka je [2]. Radi jednostavnosti, u primjerima je uglavnom preskočen račun i dani su samo krajnji rezultati, a popratni kod priložen je na kraju rada.

Primjer 4.0.1. *Sektor za odnose s javnošću jedne tvrtke želi usporediti dvije metode osposobljavanja novih radnika. Odabrano je* 20 *radnika te je na slučajan način 10 od njih obučavano metodom A, dok je preostalih 10 podučavano metodom B. Nakon obuke, radnicima je mjerena brzina vremena izvršavanja određenog zadatka (u minutama), a dana su u sljedećoj tablici:*

Metoda A	*Metoda B*
115	*123*
120	*131*
111	*113*
123	*119*
116	*123*
121	*113*
118	*128*
116	*126*
127	*125*
129	*128*

a) Pretpostavimo da opažanja dolaze iz normalne distribucije s parametrima, redom μ_A *i* σ^2 *za prvu skupinu, te* μ_B *i* σ^2 *za drugu skupinu, gdje je* $\sigma^2 = 6^2$. *Pronađimo aposteriorne distribucije parametara* μ_A *i* μ_B*, ako je apriorna distribucija normalno distribuirana* *s parametrima $m = 100$ i $s^2 = 20^2$.*

Rješenje. Koristeći formule (2.15) *i* (2.16)*, računamo parametre aposteriorne distribucije i dobivamo:*

$$m_1' = 119.4, (s_1')^2 = 1.88^2$$

za prvu skupinu, odnosno

$$m_2' = 122.7, (s_2')^2 = 1.88^2$$

za drugu skupinu.

Dakle, aposteriorna distribucija za μ_A je $N(119.4, 1.88^2)$, a za μ_B je $N(122.7, 1.88^2)$.

b) Pronađimo aposteriornu distribuciju za $\mu_A - \mu_B$.

Rješenje. Iz (3.4) *vrlo jednostavno slijedi da je aposteriorna distribucija*

$$N(m_1' - m_2', (s_1')^2 + (s_2')^2) = N(-3.27, 2.67^2).$$

c) Pronađimo 95% *Bayesovski interval vjerodostojnosti za $\mu_A - \mu_B$.*

Rješenje. Iz (3.7) *slijedi da je interval vjerodostojnosti dan sa*

$$\begin{gathered} m_d' \pm z_{\alpha/2} * s_d' \\ \Leftrightarrow \langle -8.506, 1.965 \rangle \end{gathered}$$

d) Testirajmo postoji li statistički značajna razlika u efikasnosti ovih dviju metoda.

Rješenje. Potrebno je testirati sljedeće hipoteze:

$$\begin{gathered} H_0 : \mu_A - \mu_B = 0 \\ H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0 \end{gathered}$$

Budući da se radi o dvostranom testu, potrebno je provjeriti jedino nalazi li se vrijednost 0 u dobivenom intervalu vjerodostojnosti iz c).

Vidimo da se 0 doista nalazi u izračunatom intervalu pa na razini značajnosti od 5% *ne možemo odbaciti H_0 u korist H_1, odnosno ne možemo zaključiti da postoji statistički značajna razlika u očekivanom trajanju obavljanja posla. Dakle, mogli bismo pretpostaviti da su obje metode jednako učinkovite.*

Primjer 4.0.2. *Termoelektrana odbacuje iskorištenu vodu u obližnju rijeku. Znanstvenik želi utvrditi utječe li to na razinu kisika u vodi iz rijeke. Uzeto je nekoliko uzoraka vode iz rijeke uzvodno, odnosno nizvodno od elektrane i izmjerena je razina kisika. Podaci su dani u sljedećoj tablici:*

Uzvodno	*Nizvodno*
10.1	*9.7*
10.2	*10.3*
13.4	*6.4*
8.2	*7.3*
9.8	*11.7*
	8.9

Pretpostavimo da uzorci dolaze iz normalnih razdioba s parametrima, redom μ_1 i σ^2 za uzorak vode uzvodno od termoelektrane, te μ_2 i σ^2 za uzorak nizvodno od termoelektrane. Pretpostavimo da je varijanca poznata i iznosi $\sigma^2 = 2^2$. Koristeći nezavisne, normalne apriorne distribucije s parametrima $m = 10$ i $s^2 = 2^2$, na razini značajnosti 5% testirajte je li koncentracija kisika u vodi veća uzvodno od termoelektrane.

Rješenje. Potrebno je testirati sljedeće hipoteze:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \\
H_1 &: \mu_1 - \mu_2 > 0
\end{aligned}
$$

Prije svega, trebamo odrediti aposteriornu distribuciju razlike očekivanja $\mu_1 - \mu_2$. Kao i ranije, prema formulama (2.15) *i* (2.16)*, dobivamo*

$$m_1' = 10.283, (s_1')^2 = 0.816^2$$

za prvu skupinu, odnosno

$$m_2' = 9.186, (s_2')^2 = 0.756^2$$

za drugu skupinu.

Iz (3.4) *slijedi da je aposteriorna distribucija*

$$N(m_1' - m_2', (s_1')^2 + (s_2')^2) = N(1.097, 1.113^2).$$

Budući da se radi o jednostranom testu, računamo aposteriornu vjerojatnost nulte hipoteze koristeći (3.9) *i dobivamo*

$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{0 - m_d'}{s_d'}\right) = 0.1619.$$

Budući da je dobivena vjerojatnost veća od zadane razine značajnosti $\alpha = 0.05$*, ne odbacujemo* H_0 *u korist* H_1*, odnosno ne možemo tvrditi da je razina kisika uzvodno od termoelektrane veća.*

Primjer 4.0.3. *Na Novom Zelandu je provedeno istraživanje kako bi se utvrdilo je li trend zapošljavanja među ženama porastao unatrag zadnjih nekoliko desetljeća. Odabrana su dva uzorka žena. Prvi se sastoji od žena u dobnom rasponu* $25 - 29$ *godina, a drugi od žena u dobi* $50 - 54$ *godine. Od* 314 *žena iz prve skupine,* 171 *ih je zaposleno, dok je od* 219 *žena iz druge skupine zaposleno njih* 137*. Koristeći uniformne apriorne distribucije za proporcije* π_1 *i* π_2*, na razini značajnosti* 1% *potrebno je testirati postoji li statistički značajna razlika u proporciji zaposlenih žena.*

Rješenje. *Potrebno je testirati sljedeće hipoteze:*

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$$
$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 \neq 0$$

Kao i ranije, prvo je potrebno pronaći aposteriornu distribuciju parametra $\pi_1 - \pi_2$*. U primjeru iz poglavlja* 3 *imali smo slučaj kada se za apriorne distribucije uzimala beta razdioba. Uzimanje uniformne distribucije nešto je jednostavnije, a prema [2] slijedi da su aposteriorne distribucije ponovno beta distribucije s parametrima*

$$a_1' = x_1 + 1 = 172$$
$$b_1' = n_1 - x_1 + 1 = 144$$

za prvu skupinu, odnosno

$$a_2' = x_2 + 1 = 138$$
$$b_2' = n_2 - x_2 + 1 = 83$$

za drugu skupinu. Ovdje n_1 *i* n_2 *predstavljaju duljine uzoraka, a* x_1 *i* x_2 *broj zaposlenih žena u danim uzorcima.*

Po (3.21) *i* (3.22)*, slijedi da je aposteriorna distribucija razlike proporcija aproksimativno normalna s parametrima*

$$m_d' = -0.080$$
$$s_d' = 0.0429^2.$$

Budući da se radi o dvostranom testu, potrebno je pronaći 99% *Bayesovski interval vjerodostojnosti te provjeriti nalazi li se vrijednost 0 u njemu. Po* (3.23)*, interval je dan sa*

$$
\begin{aligned}
&m_d' \pm z_{\alpha/2} * s_d' \\
\Leftrightarrow &\langle -0.191, 0.0302 \rangle
\end{aligned}
$$

Vidimo da se 0 doista nalazi u izračunatom intervalu pa na razini značajnosti od 1% *ne možemo odbaciti H_0 u korist H_1, odnosno ne možemo zaključiti da postoji statistički značajna razlika u proporciji zaposlenih žena među različitim dobnim skupinama.*

Primjer 4.0.4. *Goveda, kao biljojedi, imaju nekoliko različitih klijetki u želucu. Stimuliranjem specifičnih receptora utvrđeno je kako se određeni dijelovi želuca zatvaraju kako bi tekućina i hrana što prije mogli doći do posljednjeg dijela želuca, zaduženog za proizvodnju sirišta koje se koristi u izradi sira. Odabran je uzorak od* 7 *krava te im je na dva različita načina u organizam unesena ugljik-13-oktanska kiselina, koja se koristi za mjerenje brzine pražnjenja želuca. Nakon prvog načina, pričekano je da se sva kiselina probavi, a zatim je primijenjen i drugi način. Koncentracija kiseline mjerila se u dahu krave, a podaci su dani u tablici:*

1. način	*2. način*
1.1	*3.5*
0.8	*3.6*
1.7	*5.1*
1.1	*5.6*
2.0	*6.2*
1.6	*6.5*
3.1	*8.3*

Budući da se radi o zavisnim uzorcima, jer se unutar jednog para radi o istoj kravi, prema poglavlju 3 potrebno je izračunati razlike $d_i = x_{i1} - x_{i2}, i = 1, \dots, 7$.

Pretpostavimo da je distribucija razlike ovih dviju uzoraka normalna s parametrima μ_d i $\sigma_d^2 = 1$. Koristeći normalnu apriornu distribuciju s parametrima $m = 0$ i $s^2 = 3^2$, na razini značajnosti 95% *testirajte postoji li statistički značajna razlika u brzini probave između spomenuta dva načina.*

Rješenje. Testiramo sljedeće hipoteze:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu_d = 0 \\
H_1 &: \mu_d \neq 0
\end{aligned}
$$

Koristeći (2.15) *i* (2.16)*, dobivamo parametre normalne aposteriorne distribucije*

$$m_d' = -3.853, (s_d')^2 = 0.375^2$$

za uzorak razlika d.

Slično kao i ranije, i u ovom slučaju se radi o dvostranom testu, pa je potrebno pronaći 95% *Bayesovski interval vjerodostojnosti te provjeriti nalazi li se vrijednost 0 u njemu. Po* (3.6)*, interval je dan sa*

$$\begin{aligned} &m_d' \pm z_{\alpha/2} * s_d' \\ \Leftrightarrow &\langle -4.588, -3.118 \rangle \end{aligned}$$

Vidimo da se 0 ne nalazi u izračunatom intervalu pa na razini značajnosti od 5% *odbacujemo* H_0 *u korist* H_1*, odnosno zaključujemo da postoji statistički značajna razlika u brzini probavljanja kiseline s obzirom na način na koji dospije u želudac.*

Primjer 4.0.5. *U kriminalistici, komadići stakla na cipelama osumnjičene osobe često se koriste kako bi se ona povezala s mjestom zločina, na način da se indeks loma pronađenih komadića stakla uspoređuje s indeksom loma stakla koje se nalazilo na mjestu zločina. Kako bi usporedba bila precizna i rigorozna, potrebno je prvo poznavati varijabilnost indeksa loma određene staklene ploče. U sljedećoj tablici dana su dva uzorka indeksa loma, s ruba i sa sredine staklene ploče:*

Rub staklene ploče		*Sredina staklene ploče*	
1.51996	*1.51997*	*1.52001*	*1.51999*
1.51998	*1.52000*	*1.52004*	*1.51997*
1.51998	*1.52004*	*1.52005*	*1.52000*
1.52000	*1.52001*	*1.52004*	*1.52002*
1.52000	*1.51997*	*1.52004*	*1.51996*

Uz pretpostavku da je indeks loma ruba staklene ploče normalno distribuiran s parametrima μ_1 *i* $\sigma_1^2 = 0.00003^2$*, a indeks loma sredine staklene ploče normalno distribuiran s parametrima* μ_2 *i* $\sigma_2^2 = 0.00003^2$*, koristeći apriornu* $N(m = 1.52000, s^2 = 0.0001^2)$ *distribuciju za oba uzorka, na razini značajnosti* 5% *ispitajte postoji li statistički značajna razlika u očekivanju indeksa loma stakla s različitih dijelova staklene ploče.*

Rješenje. Testiramo sljedeće hipoteze:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_d = 0 \\ H_1 &: \mu_d \neq 0, \end{aligned}$$

gdje je $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ *razlika očekivanja. Ponovno, koristeći* (2.15) *i* (2.16) *računamo aposteriorne distribucije parametara* μ_1 *i* μ_2*, te dobivamo*

$$m_1' = 1.51999, (s_1')^2 = 0.000009444^2$$

za prvi uzorak, odnosno

$$m_2' = 1.52001, (s_2')^2 = 0.000009444^2$$

za drugi uzorak.

Dakle, aposteriorna distribucija razlike očekivanja je, po (3.4),

$$N(m_1' - m_2', (s_1')^2 + (s_2')^2) = N(-0.00002, 0.000013^2).$$

Uočavamo da se opet radi o dvostranom testu, pa je potrebno pronaći 95% *Bayesovski interval vjerodostojnosti te provjeriti nalazi li se vrijednost 0 u njemu. Iz* (3.7) *slijedi da je interval vjerodostojnosti dan sa*

$$\begin{aligned} &m_d' \pm z_{\alpha/2} * s_d' \\ \Leftrightarrow &\langle -0.000046, 0.000006 \rangle \end{aligned}$$

Vidimo da se 0 doista nalazi u izračunatom intervalu pa na razini značajnosti od 5% *ne možemo odbaciti* H_0 *u korist* H_1*, odnosno ne možemo zaključiti da se indeksi loma stakla s različitih dijelova staklene ploče statistički značajno razlikuju.*

Dodatak A

Rješenja primjera u programskom jeziku R

Primjer 4.0.1

```
#a)

#podaci
uz1 <- c(115,120,111,123,116,121,118,116,127,129)
uz2 <- c(123,131,113,119,123,113,128,126,125,128)

m <- 100
s <- 20
sig <- 6
n <- length(uz1)

#uzoracka ocekivanja
xc1 <- mean(uz1)
xc2 <- mean(uz2)

#formule za aposteriornu distribuciju
mc1 <- (1/s^2)/(n/sig^2 + 1/s^2)*m +
(n/sig^2)/(n/sig^2 + 1/s^2)*xc1

sc <- sqrt((sig^2 * s^2)/(sig^2 + n*s^2))

mc2 <- (1/s^2)/(n/sig^2 + 1/s^2)*m +
```

```
(n/sig^2)/(n/sig^2 + 1/s^2)*xc2

#b)

#parametri aposteriorne distribucije razlike
md <- mc1 - mc2
sd <- sqrt(sc^2 + sc^2)

#c) 95% bayesovski interval vjerodostojnosti

alfa <- 0.05
zq <- qnorm(alfa/2, lower.tail = FALSE)

lij <- md - zq*sd
des <- md + zq*sd
```

Primjer 4.0.2

```
#podaci
uz1 <- c(10.1,10.2,13.4,8.2,9.8)
uz2 <- c(9.7,10.3,6.4,7.3,11.7,8.9)

m <- 10
s <- 2

sig <- 2
n1 <- length(uz1)
n2 <- length(uz2)

#uzoracka ocekivanja
xc1 <- mean(uz1)
xc2 <- mean(uz2)

#formule za aposteriornu distribuciju
mc1 <- (1/s^2)/(n1/sig^2 + 1/s^2)*m +
(n1/sig^2)/(n1/sig^2 + 1/s^2)*xc1
sc1 <- sqrt((sig^2 * s^2)/(sig^2 + n1*s^2))

mc2 <- (1/s^2)/(n2/sig^2 + 1/s^2)*m +
```

```
(n2/sig^2)/(n2/sig^2 + 1/s^2)*xc2
sc2 <- sqrt((sig^2 * s^2)/(sig^2 + n2*s^2))

#parametri aposteriorne distribucije razlike
md <- mc1 - mc2
sd <- sqrt(sc1^2 + sc2^2)

#racunanje aposteriorne vjerojatnosti nulte hipoteze
z <- (0-md)/sd
pnorm(z, lower.tail = TRUE)
```

Primjer 4.0.3

```
#podaci
n1 <- 314
x1 <- 171

n2 <- 219
x2 <- 137

#parametri aposteriornih beta distribucija
a1c <- x1 +1
b1c <- n1 -x1+1

a2c <- x2 +1
b2c <- n2 -x2+1


#parametri aposteriorne normalne distribucije
#za razliku proporcija

md <- a1c/(a1c+b1c) - a2c/(a2c+b2c)
sd <- sqrt(a1c*b1c/(((a1c + b1c)^2 * (a1c+b1c+1)))
+ a2c*b2c/(((a2c + b2c)^2 * (a2c+b2c+1))))

#interval vjerodostojnosti
alfa <- 0.01
zq <- qnorm(alfa/2, lower.tail = FALSE)
```

```
lij <- md - zq*sd
des <- md + zq*sd
```

Primjer 4.0.4

```
#podaci
uz1 <- c(1.1,0.8,1.7,1.1,2.0,1.6,3.1)
uz2 <- c(3.5,3.6,5.1,5.6,6.2,6.5,8.3)


#parametri apriorne normalne distribucije
m <- 0
s <- 3
sig <- 1

#razlike
d <- uz1 - uz2
n <- length(d)

#uzoracko ocekivanje razlika
xc <- mean(d)

#parametri aposteriorne normalne distribucije
md <- (1/s^2)/(n/sig^2 + 1/s^2)*m +
(n/sig^2)/(n/sig^2 + 1/s^2)*xc
sd <- sqrt((sig^2 * s^2)/(sig^2 + n*s^2))

#95 % Bayesovski interval vjerodostojnosti
alfa <- 0.05
zq <- qnorm(alfa/2, lower.tail = FALSE)

lij <- md - zq*sd
des <- md + zq*sd
```

Primjer 4.0.5

```
#podaci
uz1 <- c(1.51996,1.51997,1.51998,1.52000,
         1.51998,1.52004,1.52000,1.52001,
```

```
          1.52000,1.51997)
uz2 <- c(1.52001,1.51999,1.52004,1.51997,
          1.52005,1.52000,1.52004,1.52002,
          1.52004,1.51996)

m <- 1.52000
s <- 0.0001
n <- length(uz1)
sig <- 0.00003

#uzoracke aritmeticke sredine i varijance
xc1 <- mean(uz1)
sd1 <- sd(uz1)

xc2 <- mean(uz2)
sd2 <- sd(uz2)

#formule parametara za aposteriornu distribuciju
mc1 <- (1/s^2)/(n/sig^2 + 1/s^2)*m +
(n/sig^2)/(n/sig^2 + 1/s^2)*xc1
mc2 <- (1/s^2)/(n/sig^2 + 1/s^2)*m +
(n/sig^2)/(n/sig^2 + 1/s^2)*xc2
sc <- sqrt((sig^2 * s^2)/(sig^2 + n*s^2))

#parametri aposteriorne distribucije razlike
md <- mc1 - mc2
sd <- sqrt(sc^2 + sc^2)

#95% bayesovski interval vjerodostojnosti

alfa <- 0.05
zq <- qnorm(alfa/2, lower.tail = FALSE)

lij <- md - zq*sd
des <- md + zq*sd
```

Bibliografija

[1] M. Huzak, *Matematička statistika , predavanja*, 2020.

[2] W. M. Bolstad, *Introduction to Bayesian Statistics*, A John Wiley & Sons, 2007.

[3] M. Huzak, *Statistika - predavanja*, 2019.

[4] R. E. Walpole i R. H. Myers i S. L. Myers i K. Ye, *Probability and Statistics for Enginners and Scientists*, Pearson Education International, 2007.

[5] T. M. Donovan i R. M. Mickey, *Bayesian Statistics for Beginners*, Oxford University Press, 2019.

[6] N. Sandrić i Z. Vondraček, *Vjerojatnost - predavanja*, 2019.

[7] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.

Sažetak

Ovaj rad obrađuje Bayesovske metode za donošenje zaključaka o razlici očekivanja dvaju normalnih razdioba. U uvodnom poglavlju navedeni su osnovni statistički i vjerojatnosni pojmovi korišteni u nastavku rada. Također, u sklopu istog poglavlja dan je iskaz i dokaz diskretne verzije Bayesovog teorema, na čijem se konceptu temelji cjelokupna Bayesovska statistika, te motivacija za ključne pojmove poput apriorne i aposteriorne distribucije.

Drugo poglavlje rada posvećeno je samoj Bayesovoj koncepciji i načinu na koje ona funkcionira. Poglavlje je započeto prirodnim proširenjem diskretne verzije Bayesovog teorema na neprekidnu verziju, a zatim su detaljnije opisani i proučeni pojmovi apriornih i aposteriornih distribucija, te funkcija vjerodostojnosti. Kraj poglavlja detaljno opisuje neke od najčešćih odabira apriornih distribucija te razrađuje proces samog zaključivanja kada se radi o jednoj populaciji iz normalne razdiobe, odnosno jednom parametru očekivanja.

U trećem poglavlju, uz pomoć nekoliko dodatnih rezultata iz teorije vjerojatnosti, sistematično proširujemo prethodno obrađenu koncepciju na dva uzorka iz dvaju normalnih distribucija, u ovisnosti o tome jesu li varijance uzoraka jednake ili različite, te jesu li one poznate ili ne. Nadalje, po uzoru na analizu za razliku očekivanja, ilustrativno je prikazana i analiza razlike dvaju proporcija nekog svojstva u dvama populacijama. Poglavlje je završeno metodom uparivanja dvaju uzoraka, koje se vrlo jednostavno svodi na analizu jedne populacije, opisanu u prethodnom poglavlju.

U posljednjem poglavlju dan je niz zadataka na kojima primjenjujemo svaku od proučenih metoda, a koji su potom riješeni pomoću programskog jezika R, uz priloženi kod na kraju samoga rada.

Summary

This paper describes various methods of Bayesian inference for difference between normal means. The first chapter consists of listing various definitions and basic concepts from statistics and probability theory, which we use throughout the paper. We also introduce discrete version of Bayes theorem, together with some key terms such as apriori and aposteriori distributions, which are all essential for further analysis of Bayesian statistics.

The second chapter further describes the concepts and ideas of Bayesian statistics. First, we introduce continuous version of Bayes theorem and then study the concepts of likelihood functions and apriori and aposteriori distributions more thoroughly. At the end of this chapter we discuss some of the most common picks for apriori distributions and develop the method of Bayesian inference for a normal mean from a single normal population.

In the third chapter, with the help of several additional results from probability theory, we systematically expand previously studied concepts to two samples from two normal distributions, depending on whether the sample variances are the same or different, and whether they are known or not. Furthermore, we show and illustrate similar ideas of Bayesian inferences for the difference between two proportions and for paired samples from two normal populations.

In the final chapter, we apply all of those methods on selected problems with the help of statistical programming language R.

Životopis

Rođen sam 26.10.1996. u Zagrebu, gdje živim do svoje pete godine, nakon čega s obitelji selim u Zaprešić i ubrzo započinjem svoje obrazovanje u Osnovnoj školi Antuna Augustinčića. Nakon završenog općeg smjera X. gimnazije "Ivan Supek" u Zagrebu, 2015. godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, čijim završetkom upisujem i diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na istom odsjeku. Tijekom prve godine diplomskog studija zapošljavam se u tvrtki Slader, LLC te paralelno držim i demonstrature iz kolegija Modeli geometrije.