Distancijsko regularni grafovi

Škufca, Kristina

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:810981

Rights / Prava: In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-13**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Kristina Škufca

Distancijsko regularni grafovi

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, ožujak 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Graf je struktura koja opisuje odnose između nekih objekata. U teoriji grafova te objekte nazivamo vrhovima, a odnose među njima nazivamo bridovima. Ako uzmemo u obzir neku regularnost ili simetriju, grafove na neki način možemo klasificirati. Jedna od tih klasa su distancijsko regularni grafovi koje je uveo Biggs oko 1970. godine i razvio teoriju vezanu za njih zajedno s drugim matematičarima (Damerell, Gardiner, Meredith, Smith). Upravo takvi grafovi su tema kojom se bavi ovaj diplomski rad.

U prvoj cjelini ulazimo u teoriju grafova s osnovnim pojmovima kao što su sam graf, odnos vrhova, stupanj, regularnost, povezanost, potpunost, udaljenost, dijametar, itd. Slijedi najvažnija definicija, a to je definicija distancijsko regularnog grafa. Za povezan regularan graf Γ dijametra d kažemo da je distancijsko regularan ako za sve indekse $i, j \in \{0, \ldots, d\}$ i svaka dva vrha x, y na udaljenosti i broj vrhova z na udaljenosti j od vrha x i susjednih vrhu y ovisi samo o i i j, a ne o izboru vrhova x i y. Zatim uvodimo presječne brojeve distancijsko regularnog grafa, b_i, c_i i a_i, presječni niz kojeg oni čine, te neka njihova svojstva.

U nastavku slijede primjeri distancijsko regularnih grafova, gdje su najvažniji oni koji dolaze od pet pravilnih poliedara. Prikazano u jednom primjeru je računanje presječnog niza grafa kocke. Generalizacijom poliedara dobivaju se n-dimenzionalni politopi te su obrađeni oni najvažniji. Na kraju se još spominju Petersenov graf i Clebschov graf. Nadalje su definirani jako regularni grafovi koji su poseban slučaj distancijsko regularnih grafova dijametra $d = 2$.

U trećoj cjelini dane su matrice koje predstavljaju grafove (matrica susjedstva, matrica incidencije i matrica udaljenosti) i neka njihova svojstva. Dana je deficinija distancijsko regularnog grafa preko matrica, te su iskazani i dokazani neki važni rezultati vezani za odnos matrica udaljenosti distancijsko regularnih grafova. Naime, ako je Γ distancijsko regularan graf, produkt bilo koje dvije matrice udaljenosti grafa Γ može se zapisati kao linearna kombinacija svih matrica udaljenosti grafa Γ. Iz toga slijedi alternativna definicija distancijsko regularnog grafa: za sve indekse $i, j, k \in \{0, \ldots, d\}$ i svaka dva vrha x, y na udaljenosti i broj vrhova z na udaljenosti j od vrha x i na udaljenosti k od vrha y ovisi samo o i, j, k, a ne o izboru vrhova x i y.

U četvrtoj cjelini obrađene su asocijacijske sheme koje su usko povezane s distancijsko regularnim grafovima. Svaki distancijsko regularan graf definira neku asocijacijsku shemu, dok obrat ne vrijedi. Raspisan je primjer konačne afine ravnine reda n koji to dokazuje. U nastavku slijedi povezanost presječnih brojeva distancijsko regularnog grafa i presječnih brojeva asocijacijske sheme. Definirana je Bose-Mesnerova algebra, komutativna i asocijativna algebra koju generiraju matrice asocijacisjke sheme. Uvedene su i matrice E_j kao glavne idempotente asocijacijske sheme i dualni parametri presječnim brojevima sheme nazvani Kreinovim parametrima. Na kraju se spominju dvije važne klase asocijacijskih shema, P-polinomijalne i Q-polinomijalne sheme. P-polinomijalne sheme su ekvivalentne distancijsko regularnim grafovima pa su raspisani dokazi te tvrdnje. Opisane su Hammingova shema i Johnsonova shema kao najpoznatiji primjeri P-polinomijalnih asocijacijskih shema.

U dodatku su navedeni neki primjeri distancijsko regularnih grafova s najviše 288 vrhova i njihovi presječni nizovi.

2 Distancijsko regularan graf

U ovoj cjelini ćemo se najprije upoznati s pojmom grafa, nekim osnovnim rezultatima i pojmovima iz teorije grafova. Također ćemo definirati pojam distancijsko regularnog grafa, koji je ujedno i tema ovog diplomskog rada, te pojam jako regularnog grafa. Kroz cijelo poglavlje navodit ćemo primjere za bolje razumijevanje teorije.

2.1 Osnovni pojmovi

Definicija 2.1. Graf *je uređeni par* $\Gamma = (V, E)$ *gdje je* V *neprazan skup vrhova, a* E *skup bridova koji su dvočlani podskupovi od* V.

Za vrhove $x, y \in V$ kažemo da su *susjedni* ako su povezani bridom $e = \{x, y\} \in E$. Također, kažemo da je vrh x *incidentan* s bridom e ako je $x \in e$. Nadalje, *stupanj* vrha x jest broj bridova koji su incidentni s vrhom x te ga označavamo $\deg(x)$. Izolirani vrh je vrh stupnja nula, a krajnji vrh (ili list) je vrh stupnja jedan. Za graf sa samo jednim vrhom kažemo da je trivijalan. Definiciju grafa ponekad proširujemo s bridovima koji spajaju vrhove sa samim sobom. Takav brid nazivamo *petljom* te on povećava stupanj vrha za jedan. U ovom poglavlju nećemo koristiti to proširenje definicije grafa, ali koristit ćemo ga kasnije.

Definicija 2.2. *Za graf* Γ *kažemo da je* regularan *ako su svi vrhovi u* Γ *istog stupnja. Ukoliko taj stupanj iznosi* k*, kažemo da je graf* k*-regularan.*

Za daljnje razumijevanje potrebno je definirati još nekoliko osnovnih pojmova. *Šetnja* u grafu $\Gamma = (V, E)$ je niz vrhova $W = (x_0, x_1, \ldots, x_l)$ gdje su x_i i x_{i+1} susjedni vrhovi, za $i \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$. Za šetnju W kažemo da je x_0 njen početak, x_l njen kraj te $x_1, \ldots, x_{l-1}$ njeni unutarnji vrhovi, dok l zovemo duljinom te šetnje. Ukoliko je $x_0 = x_l$, kažemo da je šetnja zatvorena.

Neka su $e_1, \ldots, e_l$ bridovi u šetnji W tako da je e_i brid koji spaja susjedne vrhove x_{i-1} i x_i, za $i \in \{1, \ldots, l\}$. *Staza* je šetnja u kojoj su svi bridovi $e_1, \ldots, e_l$ međusobno različiti, dok je *put* šetnja u kojoj su svi vrhovi $x_0, x_1, \ldots, x_l$ međusobno različiti, osim eventualno prvog i zadnjeg. Ako je put zatvoren, tj. $x_0 = x_l$, tada takav put nazivamo ciklusom. Smatramo da u grafu uvijek postoji trivijalan put duljine 0, od bilo kojeg vrha do njega samoga.

Definicija 2.3. *Za graf* Γ *kažemo da je povezan ako su svaka dva vrha iz* Γ *povezana nekim putem. U suprotnom kažemo da je graf nepovezan.*

Potpun graf je graf u kojem je svaki par vrhova susjedan, a oznaka potpunog grafa je K_v, pri čemu je v ukupan broj vrhova u V. Nulgraf je graf u kojem je svaki vrh izoliran, tj. stupanj svakog vrha jednak je nuli.

Još valja definirati udaljenost $d(x, y)$ između dva vrha $x, y \in V$ u nekom povezanom grafu kao broj bridova u najkraćem putu koji ih povezuje, te *dijametar* grafa kao najveću udaljenost dva njegova vrha.

Propozicija 2.4. *Udaljenost* $d : V \times V \to \mathbb{N}_0$ *ima svojstva metrike, tj. za sve vrhove* $x, y, z \in V$ *vrijedi:*

(i) $d(x, y) \geq 0$,

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Dokaz. Svojstva *(i)–(iii)* slijede direktno iz definicije funkcije d. Naime, broj bridova u putu je uvijek nenegativan, a jednak je nuli samo ako se radi o trivijalnom putu duljine 0. Nadalje, ako je $(x, x_1 \ldots, x_{d-1}, y)$ najkraći put od x do y, onda je put obrnutog poretka $(y, x_{d-1}, \ldots, x_1, x)$ najkraći put od y do x. Zato vrijedi simetričnost, tj. $d(x, y) = d(y, x)$.

Svojstvo *(iv)*, nejednakost trokuta, dokazujemo na sljedeći način. Neka je $(x_0, \ldots, x_d)$ najkraći put od x do z duljine $d = d(x, z)$, a $(y_0, \ldots, y_e)$ najkraći put od z do y duljine $e = d(z, y)$. Vrijedi $x_0 = x$, $x_d = z = y_0$ i $y_e = y$. Onda je $(x_0, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_e)$ šetnja duljine $d+e$ od x do y. Moguće je da se u toj šetnji neku vrhovi ponavljaju, odnosno da nije riječ o putu, ali u tom slučaju možemo izbaciti dijelove između tih vrhova i dobiti put koji je kraći. Dakle, postoji put duljine najviše $d + e$ od x do y. Udaljenost $d(x, y)$ je duljina najkraćeg puta od x do y, pa je zato $d(x, y) \leq d + e = d(x, z) + d(z, y)$.

□

Neka je $x \in V$ vrh u grafu $\Gamma = (V, E)$. Skup svih susjednih vrhova od x u grafu Γ označavamo s $\Gamma(x)$, a skup svih vrhova na udaljenosti $i \geq 0$ od vrha x u grafu Γ označavamo s $\Gamma_i(x)$. Sada smo spremni za definiciju distancijsko regularnog grafa.

2.2 Definicija i svojstva distancijsko regularnih grafova

Definicija 2.5. *Neka je* $\Gamma = (V, E)$ *povezan regularan graf dijametra* d *i stupnja* k. *Za graf* Γ *kažemo da je* distancijsko regularan *ako postoje brojevi*

b_i *i* c_i *takvi da za svaka dva vrha* $x,\ y \in V$ *na udaljenosti* $i = d(x, y)$*, skup* $\Gamma_{i+1}(x)$ *sadrži točno* b_i *susjednih vrhova od* y*, dok skup* $\Gamma_{i-1}(x)$ *sadrži točno* c_i *susjednih vrhova od* y*. Niz brojeva*

$$\iota(\Gamma) = \{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$$

nazivamo presječnim nizom *grafa* Γ*, a brojeve* c_i*,* b_i *te* a_i*, gdje je* $a_i = k - b_i - c_i$ *broj susjednih vrhova od* y *u* $\Gamma_i(x)$ *nazivamo* presječnim brojevima *od* Γ.

Neka svojstva presječnih brojeva dana su sljedećom lemom.

Lema 2.6. *Neka je* Γ *distancijsko regularan graf dijametra* d *i stupnja* k*. Tada vrijedi:*

(i) $1 = c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_d$,

(ii) $k = b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{d-1}$,

(iii) $b_d = c_0 = 0$.

Dokaz. Prvo ćemo dokazati nejednakost u tvrdnji *(i)*. Neka je $y \in \Gamma_{i+1}(x)$, $i \in \{0, \dots, d-1\}$ i neka je $(x = x_0, x_1, \dots, x_i, y)$ put duljine $i + 1$. Očito je $d(x_1, y) = i$. Ako je $z \in \Gamma_{i-1}(x_1) \cap \Gamma_1(y)$, onda je $d(x, z) = i$ pa je $z \in \Gamma_i(x) \cap \Gamma_1(y)$. Slijedi da je $\Gamma_{i-1}(x_1) \cap \Gamma_1(y) \subseteq \Gamma_i(x) \cap \Gamma_1(y)$ tj. $c_i \leq c_{i+1}$. Analogno se dokazuje nejednakost u *(ii)*.

Još valja pokazati da je $c_1 = 1$ i $b_0 = k$. Prvo uzmemo proizvoljne susjedne vrhove x i y te prebrojavamo susjede od y u skupu $\Gamma_0(x) = \{x\}$ pa je očito $c_1 = 1$. Zatim uzmemo proizvoljni vrh x za koji vijedi $d(x, x) = 0$, te uočimo da skup $\Gamma_1(x)$ sadrži sve susjedne vrhove od x, a ima ih točno koliko iznosi stupanj svakog vrha, dakle $b_0 = k$.

Tvrdnja *(iii)* je trivijalna zbog indeksa i koji predstavlja udaljenost i ograničen je na skup $\{0, 1, \dots, d\}$. Skupovi $\Gamma_{-1}(x)$ i $\Gamma_{d+1}(x)$ su prazni, pa je zato $b_d = c_0 = 0$.

□

Neka je x bilo koji vrh grafa Γ. Uvodimo oznaku $k_i = |\Gamma_i(x)|$ za broj vrhova na udaljenosti i od vrha x. Očito je $k_0 = 1$ i $k_1 = k$. Sljedeća propozicija pokazuje da brojevi k_i ne ovise o izboru vrha x.

Propozicija 2.7. *Neka je* Γ *distancijsko regularan graf dijametra* d*, stupnja* k *i presječnog niza* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$*. Tada vrijedi jednakost*

$$k_{i-1}b_{i-1} = k_i c_i, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Dokaz. Skup $\Gamma_{i-1}(x)$ sadrži k_{i-1} vrhova i svaki od tih vrhova je povezan s b_{i-1} vrhova u skupu $\Gamma_i(x)$. Također, skup $\Gamma_i(x)$ sadrži k_i vrhova i svaki od tih vrhova je povezan sa c_i vrhova iz skupa $\Gamma_{i-1}(x)$. Dakle, broj bridova koji imaju jedan vrh u $\Gamma_{i-1}(x)$, a drugi u $\Gamma_i(x)$ je dan sa $k_{i-1}b_{i-1} = k_i c_i$. □

Uočimo da brojeve k_i možemo izračunati rekurzivno iz presječnih brojeva grafa:

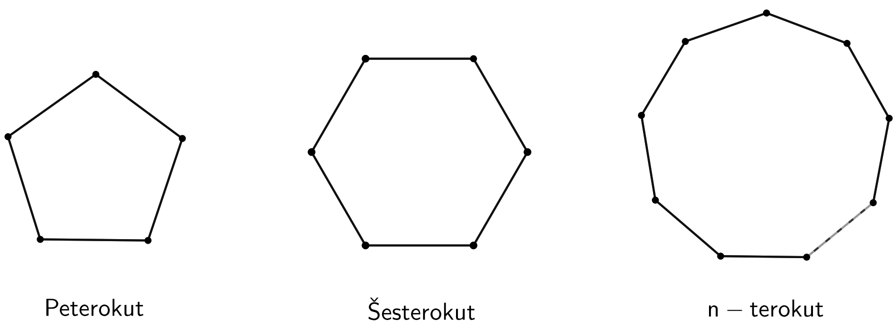
$$k_0 = 1,\ k_1 = k,\ k_{i+1} = \frac{k_i b_i}{c_{i+1}}, \quad i = 0, \ldots, d-1.$$

Skupovi $\Gamma_0(x), \Gamma_1(x), \ldots, \Gamma_d(x)$ čine particiju skupa svih vrhova grafa Γ pa je ukupan broj vrhova grafa Γ dan sa

$$v = k_0 + k_1 + \cdots + k_d.$$

2.3 Primjeri

Trivijalan primjer distancijsko regularnih grafova su mnogokuti. Mnogokut koji ima n vrhova naziva se n-terokutom. To je povezan graf s n vrhova, svaki stupnja 2.



Slika 1: Neki mnogokuti.

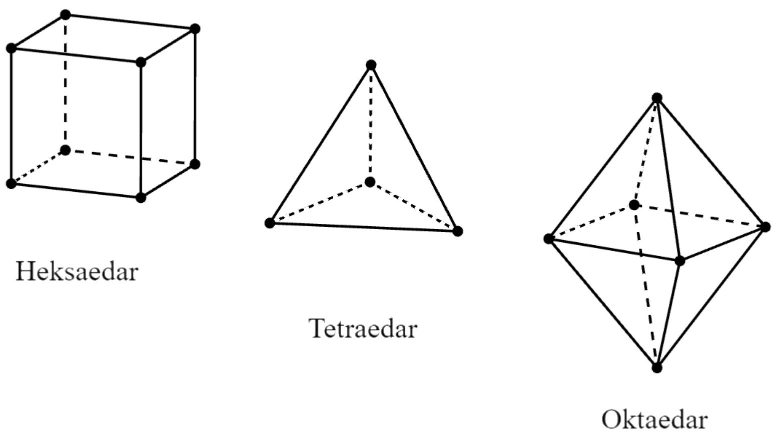
Budući da isti graf možemo prikazati na više različitih načina, valja uvesti pojam izomorfizma. Grafovi $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ i $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ su *izomorfni* ako postoji bijekcija $\theta : V_1 \to V_2$ takva da je $E_2 = \{\{\theta(x), \theta(y)\} \mid \{x, y\} \in E_1\}$. Izomorfne grafove možemo identificirati.

Povezan graf s n vrhova koji su stupnja 2 određen je do na izomorfizam tim svojstvima, što opravdava definiciju n-terokuta. Njegov dijametar je

$\lfloor n/2 \rfloor$, a presječni niz $\{2, 1, \ldots, 1; 1, \ldots, 1, c_d\}$, pri čemu je za n paran $c_d = 2$, a za n neparan $c_d = 1$.

Još neki od jednostavnih primjera su pravilni poliedri. Općenito, poliedar je geometrijsko tijelo u trodimenzionalnom prostoru koje zatvaraju barem četiri mnogokuta pri čemu se svaka dva mnogokuta ili ne sijeku ili imaju samo jedan zajednički vrh ili samo jednan zajednički brid. Pravilni poliedri su poliedri čije su strane sukladni pravilni mnogokuti, a iz svakog vrha izlazi jednak broj bridova.

Jednakostranični trokuti, kvadrati ili pravilni peterokuti mogu činiti strane konveksnog poliedra, ali ne i šesterokuti, sedmerokuti itd. U jednom vrhu poliedra može se sastati 3, 4 ili najviše 5 jednakostraničnih trokuta, te najviše 3 kvadrata ili pravilna peterokuta. Zaključujemo da postoji pet pravilnih poliedara: heksaedar (kocka), tetraedar, oktaedar, dodekaedar, ikosaedar.



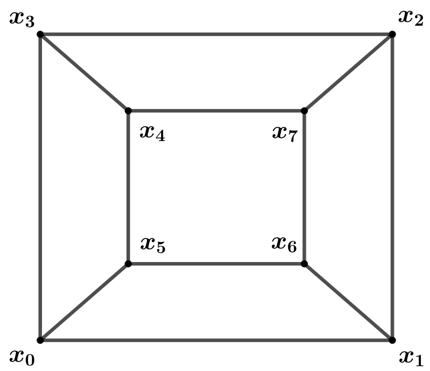
Slika 2: Neki pravilni poliedri.

Tetraedar	$\{3; 1\}$
Heksaedar (kocka)	$\{3, 2, 1; 1, 2, 3\}$
Oktaedar	$\{4, 1; 1, 4\}$
Ikosaedar	$\{5, 2, 1; 1, 2, 5\}$
Dodekaedar	$\{3, 2, 1, 1, 1; 1, 1, 1, 2, 3\}$

Tablica 1: Pravilni poliedri i njihovi presječni nizovi.

Glavni elementi pravilnih poliedara, bridovi i vrhovi, čine distancijsko regularan graf. Presječni nizovi pravilnih poliedara dani su u tablici 1.

Primjer 2.8 (Računanje presječnog niza kocke)**.** *Kocka ima* 12 *bridova i* 8 *vrhova. Ako graf određen kockom označimo s* $\Gamma = (V, E)$ *i skup vrhova* $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_7\}$*, onda je* Γ *povezan regularan graf stupnja* $k = 3$ *i dijametra* $d = 3$.



Slika 3: Graf određen kockom.

Uzmimo dva vrha, neka su to $x_0, x_7 \in V$ *za koje vrijedi* $i = d(x_0, x_7) = 3$. *Tada je skup* $\Gamma_4(x_0)$ *prazan skup jer je duljina najvećeg puta u grafu* 3*, pa je* $b_3 = 0$. *Skup* $\Gamma_2(x_0)$ *sadrži vrhove* x_2, x_4, x_6 *od kojih su sva tri vrha također susjedna vrhu* x_7*, pa je* $c_3 = 3$.

Nadalje, uzmimo dva vrha $x_0, x_2 \in V$ *za koje vrijedi* $i = d(x_0, x_2) = 2$. *Tada je skup* $\Gamma_3(x_0) = \{x_7\}$*, a* x_7 *je susjednan vrhu* x_2*, pa je* $b_2 = 1$. *Skup* $\Gamma_1(x_0) = \{x_1, x_3, x_5\}$*, od kojih su samo vrhovi* x_1 *i* x_3 *susjedni vrhu* x_2*, pa je* $c_2 = 2$.

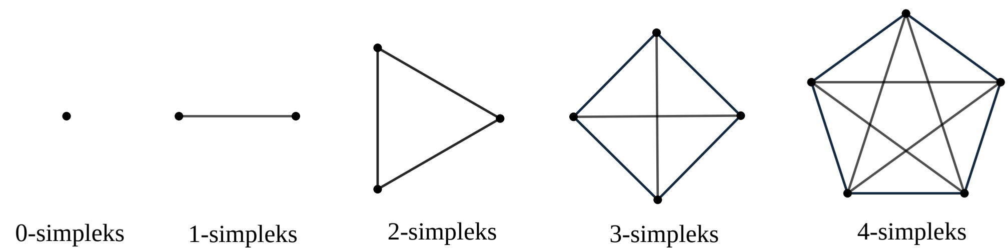
Zatim ponovo uzmimo dva vrha $x_0, x_1 \in V$*, za koje vrijedi* $i = d(x_0, x_1) = 1$. *Tada je skup* $\Gamma_2(x_0) = \{x_2, x_4, x_6\}$*, od kojih su samo vrhovi* x_2 *i* x_6 *susjedni vrhu* x_1*, pa je* $b_1 = 2$. *Skup* $\Gamma_0(x_0) = \{x_0\}$*, a* x_0 *je susjedni vrh vrhu* x_1*, pa je* $c_1 = 1$.

Naposljetku, uzmimo sam vrh $x_0 \in V$ *za koji vrijedi* $i = d(x_0, x_0) = 0$. *Tada skup* $\Gamma_1(x_0) = \{x_1, x_3, x_5\}$ *sadrži sve susjedne vrhove vrha* x_0*, pa je* $b_0 = 3$. *Skup* $\Gamma_{-1}(x_0)$ *je prazan, pa je* $c_0 = 0$.

Dakle, za presječni niz kocke dobivamo $\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\} = \{3, 2, 1; 1, 2, 3\}$.

Trodimenzionalne poliedre možemo generalizirati na n-dimenzionionalne politope ili n-politope. Jasno, mnogokuti su 2-politopi, a poliedri su 3-

politopi. Analogno kao pravilne poliedre definiramo pravilne politope, a tri najpoznatije klase pravilnih politopa koje postoje u svakoj dimenziji su *simpleks* (generalizacija tetraedra), *hiperkocka* (generalizacija kocke) i *ortopleks* (generalizacija oktaedra).



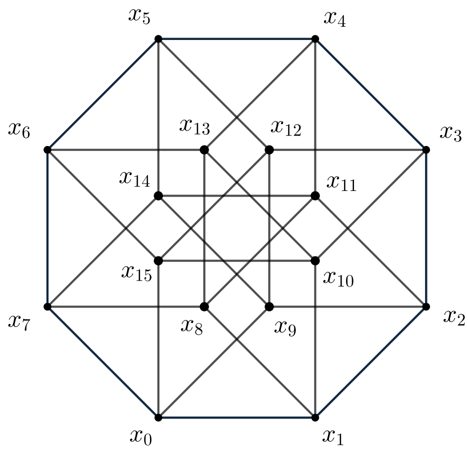
Slika 4: Grafovi regularnih simpleksa.

Najjednostavniji politop je simpleks. Preciznije možemo definirati n-simpleks kao konveksnu ljusku $n+1$ točaka u općem položaju u euklidskom prostoru dimenzije n. Pripadni graf je potpuni graf s $n+1$ vrhova, stupnja n, te dijametra 1. Takav graf zadovoljava definiciju distancijsko regularnog grafa jer su odgovarajući presječni brojevi $b_0 = n$ i $c_1 = 1$, pa je presječni niz grafa određenog n-simpkeksom $\{n; 1\}$. U prostorima malih dimenzija 0-simpleks je zapravo točka, 1-simpleks je dužina, 2-simpleks je trokut, 3-simpleks je tetraedar, a 4-simpleks je 5-ćelija (engl. *5-cell*). Grafovi ovih simpleksa su prikazani slikom 4.

Hiperkocka je generalizacija kocke na n dimenzija, a još je nazivamo n-kockom ili n-dimenzionalnom kockom. Broj vrhova u n dimenzija je 2^n, te je pripadni graf također distancijsko regularan graf. Radi jednostavnosti, uzmimo 4-dimenzionalnu kocku (engl. *4-cube, tesseract*) i odredimo joj presječne brojeve.

Primjer 2.9 (Računanje presječnog niza 4-dimenzionalne kocke)**.** *Kako n-kocka ima 2^n vrhova, 4-kocka ima $2^4 = 16$ vrhova. Graf određen 4-kockom označimo s $\Gamma = (V, E)$ i skup vrhova $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{15}\}$. Graf Γ je povezan regularan graf stupnja $k = 4$ i dijametra $d = 4$.*

Bez smanjenja općenitosti uzmimo dva vrha, $x_0, x_4 \in V$, za koje vrijedi $i = d(x_0, x_4) = 4$. Tada je $\Gamma_5(x_0)$ prazan skup, pa je $b_4 = 0$. Skup $\Gamma_3(x_0)$ je

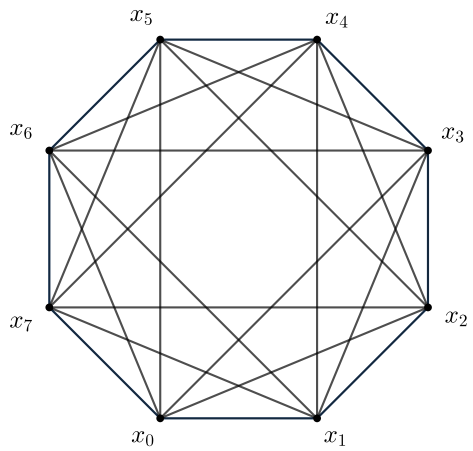


Slika 5: Graf određen 4-kockom.

$\{x_3, x_5, x_{11}, x_{15}\}$, *od kojih su sva četiri vrha susjedna vrhu* x_4*, pa je* $c_4 = 4$*. Postupak je dalje analogan onom za* 3*-dimenzionalnu kocku i dobivamo* $b_3 = 1$*,* $b_2 = 2$*,* $b_1 = 3$ *i* $b_0 = 4$ *te* $c_3 = 3$*,* $c_2 = 2$*,* $c_1 = 1$ *i* $c_0 = 0$*. Dakle, presječni niz* 4*-kocke je* $\iota(\Gamma) = \{4, 3, 2, 1; 1, 2, 3, 4\}$.

Uzimajući u obzir prve četiri dimenzije, zaključujemo da je presječni niz n-dimenzionalne kocke dan s

$$\iota(\Gamma) = \{n, n-1, \ldots, 1; 1, 2, \ldots, n\}.$$



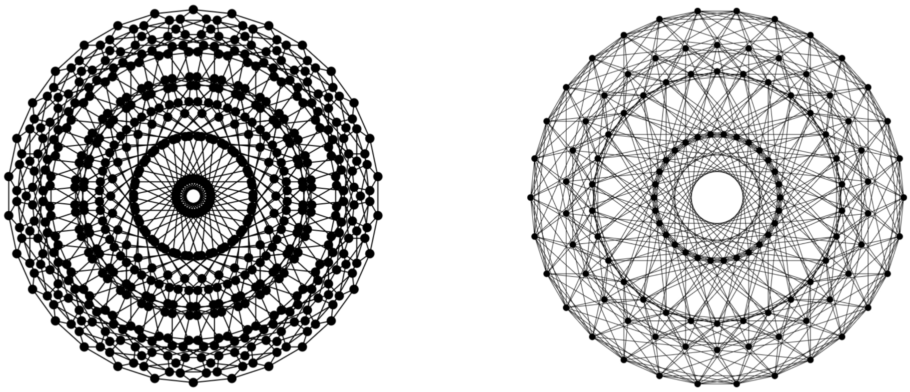
Slika 6: Graf određen 4-dimenzionalnim ortopleksom.

Dual hiperkocke je ortopleks (engl. *orthoplex, cross-polytope*), ujedno i zadnji pravilni politop koji se pojavljuje u svakoj dimenziji $n \geq 3$. Broj vrhova ortopleksa u n dimenzija je $2n$, te je pripadni graf također distancijsko regularan graf. Uzmemo li 4-dimenzionalni ortopleks (engl. *hexadecachoron, 16-cell*), prikazan slikom 6, koji ima $2 \cdot 4 = 8$ vrhova, i izračunamo li mu presječne brojeve, dobivamo niz $\{6, 1; 1, 6\}$.

Ponovo uzimajući u obzir prve četiri dimenzije, zaključujemo da je presječni niz n-dimenzionalnog ortopleksa dan s

$$\iota(\Gamma) = \{2(n-1), 1; 1, 2(n-1)\}.$$

Zadržimo li se u 4-dimenzionalnom euklidskom prostoru, naći ćemo još tri pravilna 4-politopa koji ne daju distancijsko regularne grafove ali ih valja spomenuti: oktapleks (engl. *24-cell*), dodekapleks (engl. *120-cell*) i tetrapleks (engl. *600-cell*).

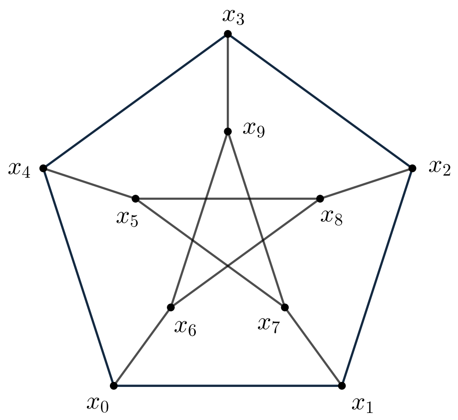


Dodekapleks   Tetrapleks

Slika 7: Neki pravilni 4-politopi (slike preuzete iz [10] i [11]).

Primjer 2.10 (Petersenov graf). *Zanimljiv primjer distancijsko regularnog grafa je Petersenov graf, nazvan po Juliusu Petersenu koji ga je otkrio* 1898. *godine. Petersenov graf čini* 10 *vrhova i* 15 *bridova, te je prikazan slikom* 8. *Vidimo da je povezan, regularan stupnja* $k = 3$ *i dijametra* $d = 2$.

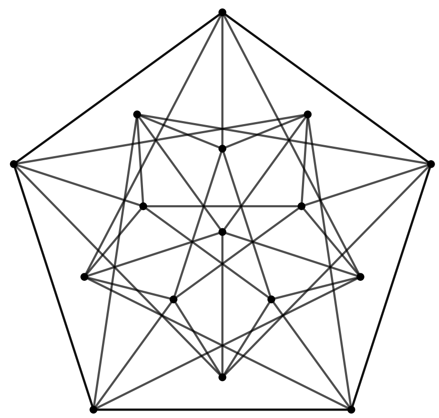
Označimo Petersenov graf s $\Gamma = (V, E)$*, pri čemu je skup vrhova* $V = \{x_0, \ldots, x_9\}$*. Uzmimo dva vrha* $x_0, x_2 \in V$ *za koje vrijedi* $i = d(x_0, x_2) = 2$*. Tada je skup* $\Gamma_3(x_0) = \emptyset$*, pa je* $b_2 = 0$*. Skup* $\Gamma_1(x_0)$ *je* $\{x_1, x_4, x_6\}$*, od kojih je samo vrh* x_1 *susjedan vrhu* x_2 *pa je* $c_2 = 1$*. Nadalje, uzmimo dva vrha* $x_0, x_1 \in V$ *za koje vrijedi* $i = d(x_0, x_1) = 1$*. Tada je skup* $\Gamma_2(x_0) = \{x_2, x_3, x_5, x_7, x_8, x_9\}$*, od kojih su samo* x_2 *i* x_7 *susjedni vrhu* x_1 *pa je* $b_1 = 2$*. Skup* $\Gamma_0(x_0) = \{x_0\}$*, a* x_0 *je susjedan vrhu* x_1*, pa je* $c_1 = 1$*. Naposljetku,*



Slika 8: Petersenov graf.

uzmimo sam vrh $x_0 \in V$ *za koji vrijedi* $i = d(x_0, x_0) = 0$. *Tada skup* $\Gamma_1(x_0) = \{x_1, x_4, x_6\}$ *sadrži točno sve susjedne vrhove od* x_0 *pa je* $b_0 = 3$*, dok je skup* $\Gamma_{-1}(x_0) = \emptyset$*, pa je* $c_0 = 0$.

Dobiveni presječni brojevi daju presječni niz $\iota(\Gamma) = \{3, 2; 1, 1\}$ *za Petersenov graf.*



Slika 9: Clebschov graf.

Primjer 2.11 (Clebschov graf)**.** *Još jedan zanimljiv primjer distancijsko regularnog grafa je Clebschov graf, poznat i kao Greenwood-Gleasonov graf otkriven* 1955. *godine. Clebschov graf čini* 16 *vrhova i* 40 *bridova, te je prikazan slikom* 9.

Računanjem presječnih brojeva dobije se presječni niz $\{5, 4; 1, 2\}$ *za Clebschov graf.*

2.4 Jako regularni grafovi

Petersenov i Clebschov graf pripadaju važnoj klasi grafova koju uvodimo sljedećom definicijom.

Definicija 2.12. *Za* k*-regularan graf* Γ *sa* v *vrhova kažemo da je* jako regularan *s parametrima* (v, k, λ, μ) *ako za svaka dva vrha* x *i* y *u grafu* Γ *vrijedi da je broj njihovih zajedničkih susjednih vrhova jednak:*

(i) λ*, ako su* x *i* y *susjedni vrhovi,*

(ii) μ*, ako* x *i* y *nisu susjedni vrhovi.*

Propozicija 2.13. *Za svaki jako regularan graf s parametrima* (v, k, λ, μ) *vrijedi:*

$$k(k - \lambda - 1) = (v - k - 1)\mu.$$

Dokaz. Neka je graf $\Gamma = (V, E)$ jako regularan i $x \in V$. Promatramo skup parova susjednih vrhova (y, z) pri čemu je y susjedan s x, a z nije susjedan s x. Zapis takvog skupa je $\{(y, z) \mid y, z \in V, y \in \Gamma_1(x), z \notin \Gamma_1(x), z \in \Gamma_1(y)\}$. Prebrojavamo elemente toga skupa na dva načina.

S jedne strane, vrh x ima k susjeda, pa y možemo odabrati na k načina. Vrh z zatim biramo na $k-\lambda-1$ načina jer za odabrani y koji ima k susjednih vrhova moramo isključiti zajedničke susjede s x, njih ima λ, te sam vrh x. Dakle, broj parova je $k(k - \lambda - 1)$. S druge strane, vrh z možemo izabrati na $v - k - 1$ načina jer od ukupnog broja vrhova v isključujemo k susjeda od x te sam vrh x. Za odabrani z preostaje μ izbora za y jer je y zajednički susjed od x i z koji nisu susjedni vrhovi. Dakle, broj parova je $(v - k - 1)\mu$.

Budući da smo isti skup prebrojali na dva načina, slijedi jednakost. $\square$

Teorem 2.14. *Svaki distancijsko regularan graf dijametra* 2 *je ujedno i povezan jako regularan graf. Obrnuto, svaki povezan jako regularan graf koji nije potpun je distancijsko regularan dijametra* 2*. U terminima parametara* (v, k, λ, μ) *presječni je niz dan sa* $\{k, k - \lambda - 1; 1, \mu\}$.

Potpun graf K_v se obično ne ubraja u jako regularne jer parametar μ nije određen. Taj graf je distancijsko regularan dijametra 1 s presječnim nizom $\{v - 1; 1\}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\Gamma = (V, E)$, $|V| = v$, distancijsko regularan graf dijametra $d = 2$ s presječnim nizom $\{b_0, b_1; c_1, c_2\}$. Tada za bilo koje $x, y \in V$ udaljenosti $d(x, y) = i \in \{0, 1, 2\}$, vrijedi

$$b_i = |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma_1(y)|, \ c_i = |\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma_1(y)|.$$

Za $x = y$ vrijedi $i = d(x, y) = 0$ te imamo $b_0 = |\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)| = k$ što je stupanj svakog vrha iz V pa je graf k-regularan. Neka su sada x i y različiti i nesusjedni vrhovi, tj. $i = d(x, y) = 2$. Vrijedi $c_2 = |\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)|$ što je broj zajedničkih susjednih vrhova vrhovima x i y kojeg označimo s μ. Neka su sada x i y susjedni vrhovi, tj. $i = d(x, y) = 1$. Vrijedi $b_1 = |\Gamma_2(x) \cap \Gamma_1(y)|$ što označava skup vrhova susjednih vrhu y, ali nesusjednih vrhu x, tj. udaljenih od x za 2. Sada od stupnja vrha y koji iznosi k oduzmemo vrhove susjedne vrhu y, ali nesusjedne vrhu x, njih ima b_1, te oduzmemo i sam vrh x. Time dobivamo broj zajedničkih susjednih vrhova vrhovima x i y kojeg označimo s $\lambda = k - b_1 - 1$. Po definiciji slijedi da je Γ jako regularan graf s parametrima $(v, k, k - b_1 - 1, c_2)$.

Pretpostavimo sada da je $\Gamma \neq K_v$ povezan jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ). Raspišemo li tvrdnju iz definicije u terminima skupa susjednih vrhova na određenoj udaljenosti, imamo da za svaka dva vrha $x, y \in V$, $x \neq y$ vrijedi:

$$|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)| = \begin{cases} \lambda, & d(x, y) = 1, \\ \mu, & d(x, y) \neq 1. \end{cases}$$

Pretpostavimo da je $\mu = 0$. Tada je relacija "biti susjedan" očito refleksivna, simetrična te traznitivna (jer za $x, y, z \in V$ vrijedi da ako je x susjedan s y i y susjedan sa z zbog $\mu = 0$ slijedi da je x susjedan sa z), pa je relacija ekvivalencije na skupu vrhova V. Klase ekvivalencije su potpuni grafovi što znači da je Γ potpun graf ili je disjunktna unija potpunih grafova, a u tom slučaju je nepovezan. Dakle, vrijedi $\mu > 0$, tj. svaka dva nesusjedna vrha imaju bar jednog zajedničkog susjeda. Iz toga direktno slijedi da je $d(x, y) \leq 2$ za svaka dva vrha $x, y \in V$. Budući da Γ nije potpun, postoje vrhovi koji nisu susjedni, tj. vrhovi za koje je $d(x, y) = 2$, pa je $d = 2$.

Neka su sada $x, y \in V$ takvi da vrijedi $d(x, y) = 1$. Pogledajmo skup $\Gamma_2(x)$. Vrijedi $y \notin \Gamma_2(x)$, ali postoji vrh $z \in \Gamma_1(y)$ takav da je $z \in \Gamma_2(x)$. Takvih vrhova z ima točno $k - \lambda - 1$ jer od ukupnog broja susjeda od y oduzimamo one koji su u $\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)$ i vrh x. Time smo dobili presječni broj $b_1 = k - \lambda - 1$. Slično se dobiju presječni brojevi $b_0 = k$, $c_1 = 1$ i $c_2 = \mu$. Slijedi da je Γ distancijsko regularan graf dijametra 2 s presječnim nizom $\{k, k - \lambda - 1; 1, \mu\}$. □

Vratimo se sada grafovima iz primjera 2.10. i 2.11. Lako se vidi da je Petersenov graf jako regularan s parametrima $(10, 3, 0, 1)$, a Clebschov graf jako regularan s parametrima $(16, 5, 0, 2)$.

3 Matrice grafova

Svaki graf potpuno je određen susjedstvom među vrhovima ili incidencijom vrhova s bridovima. Tu informaciju ponekad je spretno izražavati u obliku matrica. Postoje tri bitne matrice vezane za grafove: matrica susjedstva, matrica incidencije i matrica udaljenosti.

Neka je $\Gamma = (V, E)$ graf takav da je $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

Definicija 3.1. Matrica susjedstva *je kvadratna matrica* $A = [a_{ij}]$ *reda* n *pri čemu je*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{ako su } x_i \textit{ i } x_j \textit{ susjedni,} \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Primijetimo da je matrica A simetrična matrica s nulama na glavnoj dijagonali, te da je suma retka ili stupca jednaka stupnju odgovarajućeg vrha.

Definicija 3.2. Matrica incidencije *je* $n \times m$ *matrica* $B = [b_{ij}]$ *pri čemu je*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } x_i \textit{ incidentan s } e_j, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

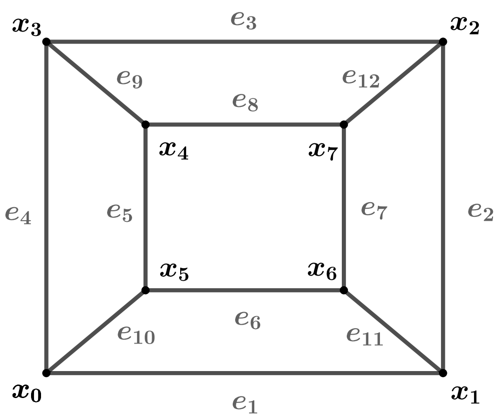
Obzirom da svaki brid čine dva vrha, suma svakog stupca u B iznosi 2. Nadalje, budući da svaka jedinica u i-tom retku odgovara bridu incidentnom s x_i, suma i-tog retka jednaka je stupnju vrha x_i, tj. $\deg(x_i)$.

Definicija 3.3. Matrica udaljenosti *je kvadratna matrica* $D = [d_{ij}]$ *reda* n *pri čemu je* $d_{ij} = d(x_i, x_j)$, *tj. udaljenost između vrhova* x_i *i* x_j.

Primjer 3.4. *Matrica susjedstva* A, *matrica incidencije* B *i matrica udaljenosti* D *grafa kocke prikazanog slikom* 10 *dane su sa:*

$$A = \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0&1&2&1&2&1&2&3\\ 1&0&1&2&3&2&1&2\\ 2&1&0&1&2&3&2&1\\ 1&2&1&0&1&2&3&2\\ 2&3&2&1&0&1&2&1\\ 1&2&3&2&1&0&1&2\\ 2&1&2&3&2&1&0&1\\ 3&2&1&2&1&2&1&0 \end{bmatrix}.$$



Slika 10: Graf kocke s oznakama vrhova i bridova.

Primijetimo da je matrica D simetrična s nulama na glavnoj dijagonali te, za razliku od matrice susjedstva i matrice incidendije, ne sadrži samo nule i jedinice. Zato uvodimo jednu praktičniju definiciju matrice udaljenosti.

Definicija 3.5. r-ta matrica udaljenosti *je kvadratna matrica* $D_r = [d_{ij}^r]$ *reda* n *pri čemu je*

$$d_{ij}^{r} = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } d(x_i, x_j) = r, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Matrica D_r sadrži jedinice na mjestima na kojima se u matrici D nalazi broj r, a na ostalim mjestima sadrži nule. Matrica D_r zapravo je matrica susjedstva grafa $\Gamma_r = (V, E_r)$ u kojem su vrhovi $x, y \in V$ susjedni ako je $d(x, y) = r$ u polaznom grafu Γ.

Neka je dijametar grafa Γ jednak d. Uočimo da je matrica D_0 jedinična matrica, tj. $D_0 = I$, a za $r > d$ je $D_r = 0$. Uočimo, i-ti redak matrice D_r predstavlja vrh x_i i mjesta u tom retku različita od nule predstavljaju vrhove koji su od x_i udaljeni za r. Isto tako, j-ti stupac matrice D_s predstavlja vrh x_j i mjesta u tom stupcu različita od nule predstavljaju vrhove koji su od x_j udaljeni za s. Tada je očito element (i, j) produkta matrica $D_r D_s$ jednak broju vrhova koji su od vrha x_i udaljeni za r i od vrha x_j udaljeni za s, tj. $(D_r D_s)_{ij} = |\Gamma_r(x_i) \cap \Gamma_s(x_j)|$.

Propozicija 3.6. *Vrijedi $D_0 + D_1 + \cdots + D_d = J$ pri čemu je J matrica koja na svakom mjestu sadrži jedinicu.*

Dokaz. Neka je x vrh u grafu Γ. Po definiciji r-te matrice udaljenosti

$$(D_r)_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } d(x, y) = r, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Redak matrice $D_0 + \cdots + D_d$ koji odgovara vrhu x će za svaki element imati jedinicu jer je x na udaljenosti $r \in \{1, \ldots, d\}$ sa svakim vrhom y u grafu Γ i na udaljenosti 0 sa samim sobom. Dakle, suma svih r-tih matrica udaljenosti bit će jednaka matrici koja sadrži sve jedinice. $\square$

Sada definiciju distancijsko regularnih grafova možemo izraziti i u terminima matrica.

Propozicija 3.7. *Graf Γ je distancijsko regularan ako i samo ako je produkt $D_1 D_i$ linearna kombinacija matrica udaljenosti D_{i-1}, D_i i D_{i+1}, za $i = 1, \ldots, d$.*

Dokaz. Neka su vrhovi x, y iz grafa Γ. Pretpostavimo da je $\Gamma_1(x) \cap \Gamma_i(y)$ neprazan. Tada postoji neki vrh z takav da je $d(x, z) = 1$ i $d(z, y) = i$. Iz nejednakosti trokuta slijedi $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = 1 + i$, odnosno $i = d(z, y) \leq d(x, z) + d(x, y) = 1 + d(x, y)$, tj. $d(x, y) \geq i - 1$. Dakle, $i - 1 \leq d(x, y) \leq i + 1$. To znači da je $|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_i(y)| = 0$ ako $d(x, y) \notin \{i - 1, i, i + 1\}$.

Pretpostavimo li da je Γ distancijsko regularan graf, za $d(x,y) = i$ presječni brojevi dani su sa

$$b_i = |\Gamma_1(x) \cap \Gamma_{i+1}(y)|, \ a_i = |\Gamma_1(x) \cap \Gamma_i(y)|, \ c_i = |\Gamma_1(x) \cap \Gamma_{i-1}(y)|.$$

Dakle, vrijedi

$$(D_1 D_i)_{xy} = |\Gamma_1(x) \cap \Gamma_i(y)| = \begin{cases} b_{i-1}, & d(x,y) = i-1, \\ a_i, & d(x,y) = i, \\ c_{i+1}, & d(x,y) = i+1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Vidimo da je svaki vrh iz $\Gamma_{i-1}(y)$ susjedan s b_{i-1} vrhova iz $\Gamma_i(y)$, svaki vrh iz $\Gamma_i(y)$ susjedan je s a_i vrhova iz $\Gamma_i(y)$, te svaki vrh iz $\Gamma_{i+1}(y)$ susjedan je s c_{i+1} vrhova iz $\Gamma_i(y)$, za $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ i $y \in V$. Očito vrijedi

$$|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_i(y)| = b_{i-1}(D_{i-1})_{xy} + a_i(D_i)_{xy} + c_{i+1}(D_{i+1})_{xy},$$

pa slijedi

$$D_1 D_i = b_{i-1} D_{i-1} + a_i D_i + c_{i+1} D_{i+1}. \tag{1}$$

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (1) i pokažimo da je Γ distancijsko regularan. Neka su x i y vrhovi iz Γ i neka je $d(x,y) = i$. Jednadžba (1) vrijedi za $i = 1, \ldots, d$, posebno slijedi

$$D_1 D_{i+1} = b_i D_i + a_{i+1} D_{i+1} + c_{i+2} D_{i+2}, \tag{2}$$

$$D_1 D_{i-1} = b_{i-2} D_{i-2} + a_{i-1} D_{i-1} + c_i D_i. \tag{3}$$

Promotrimo što je svaki element ovih produkata. Ako udaljenost između x i y iznosi i, matrica D_i na elementu xy sadrži jedinicu dok matrice D_{i+1} i D_{i+2} sadrže nulu. Element produkta $(D_1 D_{i+1})_{xy}$ iz jednadžbe (2) iznosi b_i, a s druge strane taj element je jednak kardinalnosti skupa $|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_{i-1}(y)|$. Analogno, element produkta $(D_1 D_{i-1})_{xy}$ iz jednadžbe (3) iznosi c_i, a s druge strane taj element je jednak kardinalnosti skupa $|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_{i+1}(y)|$. Dakle, b_i i c_i su točno presječni brojevi iz definicije distancijsko regularnog grafa (definicija 2.5). □

Lema 3.8. *Matrice D_i mogu se zapisati kao polinomi u D_1 stupnja i, tj. $D_i = p_i(D_1)$.*

Dokaz. Vrijedi $D_0 = D^0 = I$. Zatim je $D_1 = (D_1)^1$. Raspišimo sada kako dobivamo D_2:

$$(D_1)^2 = D_1 \cdot D_1 \overset{(1)}{=} b_0 D_0 + a_1 D_1 + c_2 D_2 = b_0 I + a_1 D_1 + c_2 D_2.$$

Prebacivanjem D_2 na jednu stranu i uređivanjem jednadžbe dobivamo

$$D_2 = \frac{1}{c_2} D_1^2 - \frac{a_1}{c_2} D_1 - \frac{b_0}{c_2} I.$$

Definirajmo sada polinome $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ i $p_2(x) = \frac{1}{c_2}x^2 - \frac{a_1}{c_2}x - \frac{b_0}{c_2}$. Dakle, $p_0(D_1) = D_0$, $p_1(D_1) = D_1$ i $p_2(D_1) = D_2$. Nastavimo li takav raspis za dobivanje D_3, iz produkta $D_1 D_2 \overset{(1)}{=} b_1 D_1 + a_2 D_2 + c_3 D_3$ slijedi

$$D_3 = \frac{D_1 - a_2}{c_3} D_2 - \frac{b_1}{c_3} D_1.$$

U terminima polinoma to je

$$p_3(x) = \frac{x - a_2}{c_3} p_2(x) - \frac{b_1}{c_3} p_1(x).$$

Dakle, $p_3(D_1) = D_3$.

Dalje rekurzivno definiramo polinome p_i stupnja i kao:

$$p_{-1}(x) = 0, \; p_0(x) = 1, \; p_1(x) = x,$$

$$p_{i+1}(x) = \frac{x - a_i}{c_{i+1}} p_i(x) - \frac{b_{i-1}}{c_{i+1}} p_{i-1}(x), \quad i = 0, \ldots, d. \tag{4}$$

Znamo da zbog povezanosti grafa vrijedi $c_i \neq 0$ za svaki $i \in \{1, \ldots, d\}$, a za $i > d$ je $D_i = 0$. □

Teorem 3.9. *Neka je Γ distancijsko regularan graf dijametra d i neka su $D_0, \ldots, D_d$ njegove matrice udaljenosti. Tada je $D_i D_j$ linearna kombinacija matrica $D_0, \ldots, D_d$, za sve indekse $i, j \in \{1, \ldots, d\}$.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Iz propozicije 3.7 vrijedi da je $D_1 D_i$ linearna kombinacija matrica D_{i-1}, D_i, D_{i+1} pa također i matrica $D_0, \ldots, D_d$. Pretpostavimo sada da je $D_1^j D_i$ linearna kombinacija matrica $D_0, \ldots, D_d$ za neki $j \in \mathbb{N}$, tj. $D_1^j D_i = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k D_k$. Raspišimo korak indukcije:

$$D_1^{j+1} D_i = D_1 (D_1^j D_i) = D_1 \sum_{k=0}^{d} \alpha_k D_k = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k D_1 D_k.$$

Znamo da je $D_1 D_k$ linearna kombinacija matrica $D_0, \ldots, D_d$, pa je i cijela suma također linearna kombinacija matrica $D_0, \ldots, D_d$.

Nadalje, iz leme 3.8 vrijedi $D_i = p(D_1) = \sum_{k=0}^{i} \alpha_k D_1^k$ pa onda slijedi

$$D_i D_j = p(D_1) D_j = \Big(\sum_{k=0}^{i} \alpha_k D_1^k \Big) D_j = \sum_{k=0}^{i} \alpha_k D_1^k D_j.$$

Iz prethodno dokazanog znamo da je $D_1^k D_j$ linearna kombinacija matrica $D_0, \ldots, D_d$, pa je i cijela suma također linearna kombinacija matrica $D_0, \ldots, D_d$. □

Iz prethodnog teorema slijedi alternativna definicija distancijsko regularnog grafa. Uvjet iz sljedeće definicije je jači, dok je uvjet iz definicije 2.5 njegov specijalni slučaj. Zbog teorema 3.9 ta dva uvjeta su ekvivalentna.

Definicija 3.10. *Neka je Γ povezan regularan graf dijametra d i neka su $D_0, \ldots, D_d$ njegove matrice udaljenosti. Graf Γ je* distancijsko regularan *ako za bilo koje indekse i, j broj $|\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)| = (D_i D_j)_{xy}$ ovisi samo $d(x, y)$, a ne i o izboru vrhova x i y.*

Osim klasičnog množenja matrica ulančanih dimenzija, uvedimo i množenje po elementima, još poznato kao *Schurov* ili *Hadamardov produkt.* Ako su obje matrice A i B dimenzija $m \times n$, onda je Schurov produkt $A \circ B$ dimenzije $m \times n$ definiran kao

$$(A \circ B)_{ij} = (A)_{ij} (B)_{ij}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Za razliku od klasičnog množenja matrica, množenje po elementima je komutativno, a za oba produkta vrijedi asocijativnost i distributivnost prema zbrajanju matrica.

Za kasniju uporabu valjda spomenuti i *Kroneckerov produkt.* Ako je matrica A dimenzija $m \times n$ i matrica B dimenzija $p \times q$, onda je Kroneckerov produkt $A \otimes B$ dimenzije $mp \times nq$ definiran kao

$$(A \otimes B)_{ij} = (A)_{ij} B \quad i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\},$$

tj. kao blok matrica čije blokove dobivamo množenjem pojedinih elemenata matrice A s matricom B.

4 Asocijacijske sheme

Prvi dio ovog poglavlja sadrži kratak uvod u teoriju asocijacijskih shema. Takve sheme su zapravo particije potpunih grafova u regularne razapinjuće podgrafove koji su na poseban način u međusobnoj vezi. U ovom poglavlju upoznajemo koncepte i rezultate koji nam pomažu u daljnjem razvoju teorije distancijsko regularnih grafova.

4.1 Definicija i svojstva asocijacijskih shema

Lema 4.1. *Neka su $D_0, \dots, D_d$ matrice udaljenosti distancijsko regularnog grafa Γ s dijametrom d. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) $D_0 = I$,

(ii) $D_0 + D_1 + \cdots + D_d = J$,

(iii) D_i *je simetrična za* $i = 0, \dots, d$,

(iv) $D_i D_j$ *je linearna kombinacija od* $D_0, \dots, D_d$, *za svaki* i, j,

(v) $D_i D_j = D_j D_i$, *za svaki* i, j,

pri čemu je I jedinična matrica, a matrica J na svakom mjestu ima jedinicu.

Dokaz. Sve tvrdnje osim *(v)* dokazane su u prošlom poglavlju. Tvrdnja *(v)* slijedi iz činjenice da je $D_i D_j$ kao linearna kombinacija simetričnih matrica $D_0, \dots, D_d$ također simetrična. Stoga vrijedi $D_i D_j = (D_i D_j)^\tau = D_j^\tau D_i^\tau = D_j D_i$. $\square$

Navedena lema je poseban slučaj definicije koja slijedi.

Definicija 4.2. *Neka su $A_0, A_1, \dots, A_d$ kvadratne matrice reda n čiji su elementi iz skupa $\{0, 1\}$ i koje zadovoljvaju uvjete:*

(i) $A_0 = I$,

(ii) $A_0 + A_1 + \cdots + A_d = J$,

(iii) A_i *je simetrična, tj.* $A_i = A_i^\tau$ *za svaki* $i = 0, \dots, d$,

(iv) $A_i A_j$ *je linearna kombinacija od* $A_0, \dots, A_d$, *za svaki* i, j.

Tada skup $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ nazivamo asocijacijskom shemom *s d klasa.*

Uočimo povezanost svojstva matrica iz leme 4.1 i definicije 4.2. Vidimo da matrice udaljenosti distancijsko regularnog grafa dijametra d čine asocijacijsku shemu s d klasa. Prirodno je zaključiti da definiciju asocijacijske sheme možemo iskazati preko grafova jer su oni jedinstveno određeni svojim matricama susjedstva.

Definicija 4.3. *Neka je X konačan skup, $|X| = n$.* Asocijacijsku shemu s d klasa *čine grafovi $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_d$ kojima je skup vrhova X i koji imaju sljedeća svojstva. Graf Γ_0 sadrži sve petlje i nema drugih bridova, a grafovi $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_d$ čine particiju bridova potpunog grafa K_n. Neka su zadani indeksi i, j, k i dva vrha x, y koji su susjedni u grafu Γ_k. Tada broj vrhova z takvih da su x i z susjedni u grafu Γ_i, a z i y susjedni u grafu Γ_j ne ovisi o x i y, nego samo o indeksima i, j, k. Broj takvih vrhova z označavamo s p_{ij}^k i zovemo presječnim brojem ili parametrom asocijacijske sheme. Za vrhove x i y koji su susjedni u grafu Γ_i kažemo da su i-asocirani.*

Ako je $\Gamma = (X, E)$ distancijsko regularan graf dijametra d, onda on definira asocijacijsku shemu s d klasa gdje je $\Gamma_1 = \Gamma$, a grafovi Γ_i dobivaju se tako da vrhovi $x, y \in X$ koji su u Γ_1 udaljeni za i, u grafu Γ_i budu susjedni. Svaka matrica udaljenosti D_i je matrica susjedstva grafa Γ_i. Graf Γ_0 je graf koji se sastoji isključivo od petlja, tj. brid $\{x, x\}$ je u Γ_0 za svaki $x \in X$. Obrat ne vrijedi, odnosno ne dolazi svaka asocijacijske shema od nekog distancijsko regularnog grafa.

Definicija 4.4. *Neka je $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ uređeni par pri čemu je $\mathcal{T}$ konačan skup točaka, a $\mathcal{B}$ konačan skup pravaca koji su podskupovi od $\mathcal{T}$. Ako je $p \in B$ za $p \in \mathcal{T}$ i $B \in \mathcal{B}$, onda kažemo da pravac B prolazi kroz točku p. Takvu strukturu sa svojstvima:*

(i) na svakom pravcu leži n točaka,

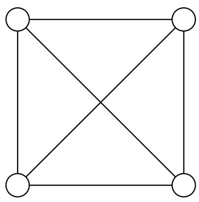
(ii) kroz svake dvije točke prolazi jedinstven pravac,

(iii) za svaki pravac B i svaku točku p koja ne leži na pravcu B postoji jedinstven pravac C takav da prolazi točkom p i C nema zajedničkih točaka s B,

(iv) potoje tri različite nekolinearne točke,

nazivamo konačnom afinom ravninom *reda n, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

Za pravac C u *(iii)* kažemo da prolazi kroz točku p i paralelan je s pravcem B. Preciznije, pravci B i C su paralelni ako je $B = C$ ili je $B \cap C = \emptyset$. Lako se vidi da je relacija paralelnosti relacija ekvivalencije, a klase ekvivalencije su klase paralelnih pravaca i svaku klasu nazivamo smjerom. Svakom točkom afine ravnine prolazi po jedan pravac svakog smjera. Smjer definira particiju skupa točaka $\mathcal{T}$, pri čemu su blokovi particije paralelni pravci. Afina ravnina ukupno ima barem 4 točke i barem 6 pravaca, što ujedno odgovara najmanjoj afino ravnini reda 2.



Slika 11: Afina ravnina reda 2 (slika preuzeta iz [12]).

Propozicija 4.5. *U afinoj ravnini reda n ukupan broj točaka je n^2, a pravaca $n(n+1)$. Također, kroz svaku točku prolazi $n+1$ pravaca.*

Dokaz. Neka je L pravac u afinoj ravnini reda n. Prema definiciji, na pravcu L leži n točaka i jednu od njih označimo s x. Postoji točka p koja ne leži na pravcu L i pravac kroz točke x i p, u oznaci M, je različit od pravca L. Prema definiciji, na tom pravcu M leži n točaka. Kroz svaku od tih $n-1$ točaka, izuzev x, prolazi pravac paralelan s pravcem L. Tvrdimo da za svaku točku afine ravnine vrijedi da leži ili na pravcu L ili na jednom od $n-1$ pravaca paralelnih s L. Neka je $y \neq x, p$ točka afine ravnine. Ako y leži na L, tvrdnja vrijedi. Ako y ne leži na L, postoji jedinstven pravac N kroz točku y paralelan s L. Ako se pravci M i N ne sijeku, onda su oni međusobno paralelni. Ali N i L su paralelni što povlači i da su L i M paralelni, a to je kontradikcija. Dakle, N i M nisu paralelni pa se sijeku u točki z. Točka z leži na pravcu M pa je pravac N ubrojana u $n-1$ pravaca paralelnih s L. Drugim riječima, familija paralelnih pravaca particionira skup točaka ravnine. Zaključujemo da ima n paralelnih pravaca pri čemu svaki sadrži n točaka, te nema drugih točaka u afinoj ravnini. Slijedi da afina ravnina sadrži $n \cdot n = n^2$ točaka.

Neka je sada p točka u afinoj ravnini reda n. Postoji pravac L koji ne prolazi točkom p. Pošto na pravcu L leži n točaka i svaki par točaka određuje jedinstven pravac, kroz p prolazi n pravaca. Još postoji pravac kroz p paralelan s L, dakle ukupan broj pravaca kroz točku p je $n+1$.

Neka je L pravac u afinoj ravnini reda n. Po definiciji, na pravcu L leži n točaka. Iz prethodno dokazanog, kroz svaku točku prolazi $n + 1$ pravac. Nadalje, kroz svaku točku pravca L prolazi n pravaca i pravac L. To ukupno čini $n \cdot n + 1 = n^2 + 1$ pravaca. Ali iz prethodno dokazanog postoji $n - 1$ pravaca paralelnih s L, tako da ukupno postoji $n^2 + 1 + n - 1 = n(n + 1)$ pravaca u afinoj ravnini reda n. $\square$

Broj q je prim potencija ako se može zapisati kao $q = p^d$, gdje je p primbroj i d prirodan broj. To će biti potrebno za teorem koji slijedi.

Teorem 4.6. *Za svaku prim potenciju q postoji afina ravnina reda q.*

Vektorski prostor možemo definirati nad bilo kojim poljem ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$). Jednostavno se konstruira vektorski prostor V dimenzije n nad poljem $\mathbb{F}$ kao skup $\mathbb{F}^n$ svih uređenih n-torki elemenata iz $\mathbb{F}$. Ako konačno polje $\mathbb{F}$ ima q elemenata ($\mathbb{F}$ je reda q, oznaka $GF(q)$ ili F_q), onda je vektorski prostor $\mathbb{F}^n$ konačan i ima q^n elemenata tj. vektora.

Neka je V vektorski prostor dimenzije 2 nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$. Skup točaka $\mathcal{T}$ neka je skup vektora u prostoru $V = \mathbb{F}_q^2$, ukupno ih je q^2, a skup pravaca $\mathcal{B}$ je skup svih 1-dimenzionalnih linearnih mnogostrukosti prostora V koji su oblika $\{\alpha(x, y) + (x_0, y_0) \mid \alpha \in \mathbb{F}_q\}$. Tvrdimo da je takav uređeni par $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ afina ravnina reda q koju označavamo $AG(2, \mathbb{F}_q)$ ili $AG(2, q)$. Provjeravamo aksiome iz definicije 4.4. Iz općeg zapisa svakog pravca vidimo da za skalar α postoji q izbora pa zaključujemo da na svakom pravcu leži q točaka i time smo pokazali da vrijedi *(i)*. Nadalje, neka su (x_1, y_1) i (x_2, y_2) neke dvije točke, tj. vektori. Smjer pravca kroz ta dva vektora dan je njihovom razlikom pa je općeg zapisa takvog pravca dan s $\{\alpha[(x_2, y_2) - (x_1, y_1)] + (x_1, y_1) \mid \alpha \in \mathbb{F}_q\}$. Lako se izračuna da taj pravac sadrži i (x_1, y_1), za $\alpha = 0$, i (x_2, y_2), za $\alpha = 1$. Time je dokazan aksiom *(ii)*. Za aksiom *(iii)* prisjetimo se da je paralelnost pravaca ekvivalentna imanju istog smjera. Neka je $B = (x_0, y_0) + W$ pravac pri čemu je $W = \{\alpha(x, y) \mid \alpha \in \mathbb{F}_q\}$ smjer pravca. Neka je $p = (x_1, y_1)$ točka koja ne leži na pravcu B. Tada je pravac $C = p + W$ jedinstven pravac koji prolazi točkom p i paralelan je s pravcem B. Konačno, egzistencija tri različite nekolinearne točke opravdana je točkama $(0, 0), (1, 0)$ i $(0, 1)$. Time su dokazani svi aksiomi i takav par skupova $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ je afina ravnina reda q pri čemu je q prim potencija, dakle $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, \dots\}$ Prirodno pitanje koje se postavlja je postoje li afine ravnine reda 6? Ili 14?

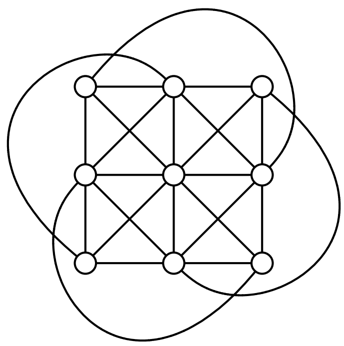
Teorem 4.7 (Bruck-Ryser)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}$ red afine ravnine pri čemu je $n \equiv 1$ ili $2 \pmod 4$. Tada se n može prikazati kao zbroj dva kvadrata cijelih brojeva.*

Dakle, iz prethodnog teorema slijedi da afine ravnine reda $6, 14, 22, \ldots$ ne postoje. Zanimljivo je da je uz pomoć računala C.W.H Lam [8] dokazao da ne postoji ni afina ravnina reda 10.

Iz afine ravnine reda n možemo konstruirati asocijacijsku shemu na sljedeći način. Točke afine ravnine su vrhovi asocijacijske sheme. Za svaku od $n+1$ klasa paralelnih pravaca afine ravnine definiramo graf u kojemu su svaka dva vrha susjedna ako i samo ako pripadaju istom pravcu iz te klase. Dobiveni grafovi čine particiju potpunog grafa: svaka dva vrha su sadržana u jednom i samo jednom pravcu, a on je sadržan u jednoj i samo jednoj klasi. Nadalje, ako uzmemo bilo koja dva vrha, x i y, promatramo broj vrhova z koju su u grafu nastalom iz i-te klase susjedi s x, te koji su u grafu nastalom iz j-te klase susjedni s y. Taj broj ovisi samo o izboru klasa, a ne i o izboru vrhova x i y. Pošto kroz svaku točku afine ravnine prolazi točno jedan pravac iz svake klase, znamo da samo jedan pravac iz i-te klase prolazi kroz x, te da jedan pravac iz j-te klase prolazi kroz y. Ako je $i \neq j$, onda se ti pravci sigurno sijeku i broj vrhova z je jedan. Ako je $i = j$, onda imamo dva slučaja: ako je $x = y$ onda broj vrhova z iznosi n, ali ako je $x \neq y$ onda broj vrhova z iznosi nula. Drugim riječima, presječni brojevi asocijacijske sheme dani su sa

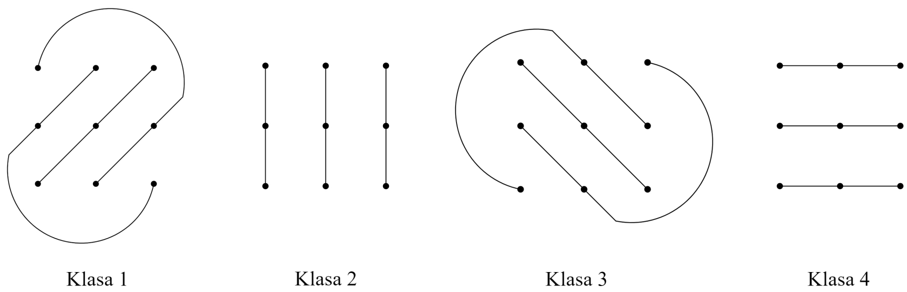
$$p_{ij}^k = \begin{cases} 0, & \text{ako je } i = j, k \neq i, k \neq j, \\ 1, & \text{ako je } i \neq j \neq k, \\ n, & \text{ako je } i = j = k. \end{cases}$$

Iz geometrijskih aksioma slijedi da je tako dobiven skup grafova asocijacijska shema s $n+1$ klasa gdje su svi grafovi sheme nepovezani stupnja $n-1$. Time smo pokazali da ona nije distancijsko regularan graf jer ne vrijedi povezanost.

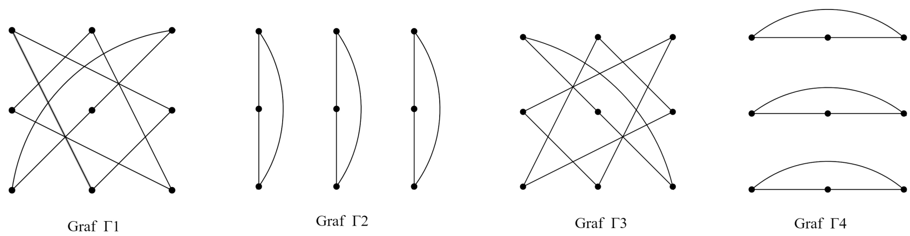


Slika 12: Afina ravnina reda 3 (slika preuzeta iz [12]).

Primjer 4.8 (Afina ravnina reda 3)**.** *Promotrimo* 9 *točaka u ravnini povezanih s* 12 *pravaca kao na slici* 12. *Na svakom pravcu leže* 3 *točke, te kroz svaku točku prolaze* 4 *pravca. Ali možemo primijeniti sljedeću analizu. Primijetimo particiju skupa točaka na klase po smjerovima. Takvih klasa ukupno ima* 4 *i prikazane su slikom* 13. *Grafove* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ *tada dobivamo tako da točke iz iste klase prezentiramo kao susjedne vrhove u pojedinom grafu, kao na slici* 14.



Slika 13: Prikaz svih klasa afine ravnine reda 3.



Slika 14: Prikaz grafova dobivenih iz klasa afine ravnine reda 3.

Uz to, graf Γ_0 *sadrži sve petlje. Tada se lako vidi da grafovi* $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4\}$ *čine asocijacijsku shemu s* 4 *klase.*

No, vratimo se na asocijacijske sheme. Svaki graf Γ_i asocijacijske sheme generira matricu susjedstva A_i definiranu kao

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \{x, y\} \text{ brid u } \Gamma_i, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za matrice A_i vrijede svojstva *(i)*-*(iv)* iz definicije 4.2. Naime, ako je $\{x, y\}$ brid u grafu Γ_k onda je $(A_k)_{xy} = 1$. Po definiciji ima p_{ij}^k vrhova z za koje vrijedi da je $\{x, z\}$ brid u grafu Γ_i i $\{z, y\}$ brid u grafu Γ_j, te je $(A_i)_{xz} = 1$

i $(A_j)_{zy} = 1$. Što znači da produkt matrica A_iA_j na (x, y) mjestu ima zbroj svih tih jedinica koji iznosi p_{ij}^k. Zato A_iA_j možemo prikazati kao linearnu kombinaciju matrica A_k s koeficjentima p_{ij}^k, tj. svojstvo *(iv)* glasi:

$$A_iA_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k, \quad i, j \in \{1, \dots, d\}. \tag{5}$$

Uvodimo oznaku $n_i := p_{ii}^0$ koja prestavlja stupanj grafa Γ_i, pa je ukupan broj vrhova u X dan s

$$n = \sum_{i=0}^{d} n_i.$$

Uočimo da vrijedi $n_0 = 1$ jer ako je $\{x, y\}$ brid u Γ_0 onda je $x = y$ te jedini $z \in X$ takav da $\{x, z\}$ brid u Γ_0 je $z = x$.

Lema 4.9. *Neka je n_i stupanj grafa Γ_i i p_{ij}^k presječni brojevi asocijacijske sheme s d klasa. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

(i) $p_{0j}^k = \delta_{jk}$,

(ii) $p_{ij}^0 = \delta_{ij} n_j$,

(iii) $p_{ij}^k = p_{ji}^k$,

(iv) $p_{ij}^k n_k = p_{ik}^j n_j$,

(v) $\displaystyle\sum_{j=0}^{d} p_{ij}^k = n_i$,

(vi) $\displaystyle\sum_{l=0}^{d} p_{ij}^l p_{lk}^m = \sum_{r=0}^{d} p_{ir}^m p_{jk}^r$.

Ovdje je δ_{ij} Kroneckerov simbol koji ovisi o dva indeksa, i i j, te je definiran formulom:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j, \\ 0, & \text{ako je } i \neq j. \end{cases}$$

Dokaz. Primijetimo da je $p_{ij}^k = |\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)|$ gdje su x, y susjedni vrhovi u grafu Γ_k. Sada svojstva *(i)*-*(v)* očito vrijede. Svojstvo *(iii)* koje slijedi iz simetričnosti sheme čini shemu komutativnom. Svojstvo *(vi)* vrijedi jer obje strane jednakosti prebrojavaju četvorke vrhova (z, w, x, y) tako da je $\{z, w\}$ brid u Γ_i, $\{w, x\}$ brid u Γ_j i $\{x, y\}$ brid u Γ_k za fiksan brid $\{z, y\}$ u Γ_m. $\square$

Postoji uska povezanost između presječnih brojeva asocijacijske sheme p_{ij}^k i presječnih brojeva distancijsko regularnog grafa b_i, c_i i a_i.

Teorem 4.10. *Neka su b_i, c_i i a_i presječni brojevi distancijsko regularnog grafa, te neka su p_{ij}^k presječni brojevi asocijacijske sheme nastale iz tog grafa. Vrijedi:*

$$p_{1k}^i = \begin{cases} c_i, & \textit{ako je } k = i-1, \\ a_i, & \textit{ako je } k = i, \\ b_i, & \textit{ako je } k = i+1, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Općenito:

$$p_{j+1k}^i = \frac{1}{c_{j+1}}(p_{jk-1}^i b_{k-1} + p_{jk}^i (a_k - a_j) + p_{jk+1}^i c_{k+1} - p_{j-1k}^i b_{j-1}).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je Γ distancijsko regularan graf. Tada za bilo koje vrhove x, y iz Γ udaljenosti $d(x,y) = i$ vrijedi:

$$\begin{aligned} c_i &= |\Gamma_1(x) \cap \Gamma_{i-1}(y)| = p_{1i-1}^i, \\ a_i &= |\Gamma_1(x) \cap \Gamma_i(y)| = p_{1i}^i, \\ b_i &= |\Gamma_1(x) \cap \Gamma_{i+1}(y)| = p_{1i+1}^i. \end{aligned}$$

Za dokaz općenite tvrdnje koristi se indukcija i svojstvo *(vi)* iz leme 4.9. □

4.2 Bose-Mesnerova algebra

Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ asocijacijska shema i $[\mathcal{A}]$ realan vektoriski prostor razapet matricama $A_0, A_1, \ldots, A_d$. To je podprostor od $M_n(\mathbb{R})$ koji sadrži matrice I i J, te je zatvoren na matrično množenje i Schurov produkt. On čini $(d+1)$-dimenzionalnu komutativnu algebru $\mathcal{A}$ koju nazivamo *Bose-Mesnerovom algebrom* asocijacijske sheme.

Kvadratna matrica A je *idempotentna* ako vrijedi $A = A^2$. Dvije simetrične idempotentne matrice A, B su ortogonalne ako vrijedi $AB = 0$. Matrice koje generiraju asocijacijsku shemu A_i su idempotentne obzirom na Schurov produkt te ih nazivamo Schurovim idempotentama. One su ortogonalne obzirom na Schurov produkt i čine bazu za $[\mathcal{A}]$. Ali postoji druga baza matrica za taj vektorski prostor koja se sastoji od matrica koje su idempotentne i u parovima ortogonalne obzirom na matrično množenje.

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijske shema s d klasa na skupu X, $|X| = n$, generirana kvadratnim $0-1$ matricama $A_0, A_1, \ldots, A_d$. Tada postoji skup u parovima ortogonalnih idempotentnih matrica $E_0, E_1, \dots, E_d$ koje čine bazu za $[\mathcal{A}]$ i realni parametri $p_i(j)$ tako da vrijedi:

(i) $E_0 = \frac{1}{n}J$

(ii) $E_0 + E_1 + \cdots + E_d = I$,

(iii) $A_i E_j = p_i(j) E_j$.

Matrice E_j nazvamo **glavnim idempotentama** asocijacisjke sheme $\mathcal{A}$, a parametre $p_i(j)$ svojstvenim vrijednostima od $\mathcal{A}$. Iz uvjeta *(ii)* i *(iii)* slijedi da svaku matricu A_i možemo prikazati kao linearnu kombinaciju matrica E_j:

$$A_i = A_i I = A_i \sum_{j=0}^{d} E_j = \sum_{j=0}^{d} p_i(j) E_j. \tag{6}$$

Kako je $A_0 = I$, vrijedi $p_0(j) = 1$ za svaki $j \in \{0, \dots, d\}$, te kako je $E_0 = \frac{1}{n}J$, vrijedi da je $p_i(0)$ jednak broju elemenata različitih od nula u svakom retku matrice A_i što je zapravo stupanj svakog vrha u Γ_i u oznaci n_i. Pošto su matrice E_j idempotentne, tj. $E_j^2 - E_j = 0$, svojstvene vrijednosti od E_j dolaze iz skupa $\{0, 1\}$. Trag matrice E_j jednak je rangu od E_j te ga označavamo s m_j, a još predstavlja dimenziju svojstvenog prostora koji sadrže baš E_j. Parametre $m_0, \dots, m_d$ nazivamo kratnostima od $\mathcal{A}$.

Budući da matrice $A_0, \dots, A_d$ čini bazu za $[\mathcal{A}]$, postoje parametri $q_i(j)$ takvi da vrijedi:

$$E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} q_i(j) A_j. \tag{7}$$

Parametre $q_i(j)$ nazivamo dualnim svojstvenim vrijednostima od $\mathcal{A}$. Primijetimo da su jednadžbe (7) i (6) analogne i zajedno daju jednadžbu

$$E_i \circ A_j = \frac{1}{n} q_i(j) A_j \tag{8}$$

koja je analogna uvjetu *(iii)*. Uvrštavanjem $j = 0$ u jednadžbu (8) dobivamo $q_i(0) = m_i$.

Promotrimo sada vezu između svojstvenih vrijednosti i dualnih svojstvenih vrijednosti asocijacijske sheme. Neka je P matrica koja na (i, j) mjestu ima $p_j(i)$ i Q matrica koja na (i, j) mjestu ima ima $q_j(i)$. Tada matricu P nazivamo svojstvenom matricom, a matricu Q dualnom svojstvenom matricom asocijacijske sheme. Uzimajući u obzir (7) i (6) slijedi

$$PQ = QP = nI.$$

4.3 Kreinovi parametri

Postoji još jedan dualan skup parametara asocijacijske sheme. Već ranije smo spomenuli presječne brojeve asocijacijske sheme p_{ij}^k, a sada uvodimo i dualne presječne brojeve q_{ij}^k, još poznate kao **Kreinovi parametri**. Kako je A_iA_j sadržan u $[\mathcal{A}]$, jer je $\mathcal{A}$ zatvorena na množenje, vrijedi:

$$A_iA_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k. \tag{9}$$

Kako je $E_i \circ E_j$ također sadržan u $[\mathcal{A}]$, jer je $\mathcal{A}$ zatvorena na Schurov produkt, vrijedi:

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k E_k. \tag{10}$$

Kreinovi parametri imaju svojstva dualna onima presječnih brojeva, pa analogno lemi 4.9 slijedi iduća lema.

Lema 4.11. *Neka su m_i kratnosti, a q_{ij}^k Kreinovi parametri asocijacijske sheme s d klasa. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

(i) $q_{0j}^k = \delta_{jk}$,

(ii) $q_{ij}^0 = \delta_{ij} m_j$,

(iii) $q_{ij}^k = q_{ji}^k$,

(iv) $q_{ij}^k m_k = p_{ik}^j m_j$,

(v) $\sum_{j=0}^{d} q_{ij}^k = m_i$,

(vi) $\sum_{l=0}^{d} q_{ij}^l q_{lk}^m = \sum_{r=0}^{d} q_{ir}^m q_{jk}^r$.

Jedna restrikcija na Kreinove parametre asocijacijske sheme, još poznata kao Kreinov uvjet, je da su q_{ij}^k nenegativni. To se pokaže tako da iz (10) slijedi da je $\frac{1}{n} q_{ij}^k$ svojstvena vrijednost od $E_i \circ E_j$ koja je glavna podmatrica Kroneckerovog produkta $E_i \otimes E_j$. Uz činjenicu da je $(E_i \otimes E_j)^2 = E_i \otimes E_j$, (idempotentnost) vrijedi da su svojstvene vrijednosti od $E_i \otimes E_j$ iz skupa $\{0, 1\}$, pa slijedi da je $E_i \circ E_j$ pozitivno semidefinitna što znači da su joj svojstvene vrijednosti nenegativne.

Općenito, postoji formalna dualnost između klasičnog množenja, parametra p_{ij}^k te matrica A_i i P s jedne strane, i Schurovog produkta, parametra q_{ij}^k te matrica E_i i Q s druge strane. Ako dvije asocijacijske sheme $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ imaju svojstvo da su presječni brojevi od $\mathcal{A}$ Kreinovi parametri od $\mathcal{B}$, vrijedi i obrat, tj. presječni brojevi od $\mathcal{B}$ su Kreinovi parametri od $\mathcal{A}$. U tom slučaju su sheme $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ formalno dualne jedna drugoj. Shema je formalno dualna sama sa sobom ako je $P = Q$ za neki poredak glavnih idempotenta. Tada vrijedi $m_i = n_i$ i $p_{ij}^k = q_{ij}^k$.

4.4 P-polinomijalne asocijacijske sheme

Dvije najvažnije klase asocijacijskih shema su P-polinomijalne i Q-polinomijalne asocijacijske sheme. Njima se bavio matematičar P. Delsarte [5] koji je definirao Q-polinomijalnu asocijacijsku shemu kao dualnu P-polinomijalnoj i pokazao da su asocijacijske sheme određene distancijsko regularnim grafovima zapravo P-polinomijalne asocijacijske sheme.

Definicija 4.12. *Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ asocijacijske shema s d klasa. Ako postoji poredak matrica $A_0, \ldots, A_d$ takav da je A_i polinom stupnja i od A_1, onda $\mathcal{A}$ nazivamo* P-polinomijalnom asocijacijskom shemom.

Teorem 4.13. *Asocijacijska shema $\mathcal{A}$ generirana matricama udaljenosti distancijsko regularnog grafa je P-polinomijalna asocijacijska shema.*

Dokaz. Neka je Γ distancijsko regularan graf dijametra d. Generiramo grafove Γ_i tako da od polaznog grafa uzimamo iste vrhove, a bridovi među njima su oni koji su u polaznom grafu na udaljenosti i, $i \in \{0, \ldots, d\}$. Pritom znamo da je matrica susjedstva od Γ_i baš matrica A_i asocijacijske sheme $\mathcal{A}$. Iz leme 3.8 slijedi da je A_i polinom u A_1 stupnja i, pa po definiciji $\{A_0, \ldots, A_d\}$ čine P-polinomijalnu asocijacijsku shemu. $\square$

Vrijedi obrat prethodnog teorema i on kaže da su matrice P-polinomijalne asocijacijske sheme $\mathcal{A}$ ujedno matrice udaljenosti distancijsko regularnog grafa. Naime, ako znamo da su matrice A_i polinomi od A_1, tj. $A_i = p_i(A_1)$ za $i = 0, \ldots, d$, onda je vektorski prostor razapet s $p_0, \ldots, p_d$ jednak prostoru polinoma stupnja najviše d. Koristeći se teorijom ortogonalnih polinoma pokaže se da je $xp_i(x)$ linearna kombinacija od p_{i-1}, p_i, p_{i+1} za svaki i. Slijedi da je $A_1 A_i$ linearna kombinacija od A_{i-1}, A_i, A_{i+1}. Iz propozicije 3.7 slijedi da je graf Γ_1 koji odgovara matrici A_1 distancijsko regularan i $A_0, \ldots, A_d$ su odgovarajuće matrice udaljenosti.

Najpoznatiji primjeri P-polinomijalnih shema koji se najviše koriste u teoriji kodiranja i teoriji dizajna su Hammingova shema $H(n,q)$ i Johnsonova shema $J(v,k)$. Neka je F skup kardinalnosti q, $q \geq 2$ i neka je $X = F^n$ n-ti kartezijev produkt od F. Hammingova udaljenost d_H između točaka $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dana je kao broj indeksa i za koje je $x_i \neq y_i$, $1 \leq i \leq n$. Neka je A_i matrica udaljenosti tako da je na mjestu $(A_i)_{xy}$ jedinica ako je $d_H(x,y) = i$, u suprotnom je nula. Tada asocijacijsku shemu $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ nazivamo Hammingovom shemom u oznaci $H(n,q)$. Hammingova shema $H(n,2)$ zapravo je n-kocka koja definira distancijsko regularan graf s presječnim nizom $\iota(\Gamma) = \{n, n-1, \ldots, 1; 1, 2, \ldots, n\}$. Za $q > 2$ matrica presječnih brojeva dana je s

$$\begin{bmatrix} * & 1 & \ldots & i & \ldots & n \\ 0 & q-2 & \ldots & i(q-2) & \ldots & n(q-2) \\ n(q-1) & (n-1)(q-1) & \ldots & (n-1)(q-1) & \ldots & * \end{bmatrix}.$$

Neka je S skup kardinalnosti v i neka je $X = \{T \subset S \mid |T| = k\}$, $k \leq \frac{v}{2}$. Udaljenost između T_1 i T_2 iz X dana je s $d_J = k - |T_1 \cap T_2|$. Neka je A_i matrica udaljnenosti tako da je na mjestu $(A_i)_{xy}$ jedinica ako je $d_J(T_1, T_2) = i$, u suprotnom je nula. Tada asocijacijsku shemu $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ nazivamo Johnsonovom shemom u oznaci $J(v,k)$. Johnsonova shema $J(v,1)$ zapravo v-simpleks koji definira potpun graf K_v s presječnim nizom $\{v; 1\}$. Za $k \geq 2$ matrica presječnih brojeva dana je s

$$\begin{bmatrix} * & 1 & \ldots & i^2 & \ldots & k^2 \\ 0 & v-2 & \ldots & i(v-2i) & \ldots & k(v-2k) \\ k(v-k) & (k-1)(v-k-1) & \ldots & (k-i)(v-k-i) & \ldots & * \end{bmatrix}.$$

A Dodatak

U ovom poglavlju dani su neki zanimljivi distancijsko regularni grafovi s brojem vrhova n i njihovi presječni nizovi. Podaci u tablicama 2 i 3 uzeti su iz [13].

n	Naziv grafa	Presječni niz
8	16-ćelija	$\{6, 1; 1, 6\}$
14	Heawoodov graf	$\{3, 2, 2; 1, 1, 3\}$
15	Generalizirani četverokut reda $(2, 2)$	$\{6, 4; 1, 3\}$
16	Shrikhandeov graf	$\{5, 4; 1, 2\}$
18	Pappusov graf	$\{3, 2, 2, 1; 1, 1, 2, 3\}$
20	Desarguesov graf	$\{3, 2, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 2, 3\}$
21	Generaliziran šesterokut reda $(2, 1)$	$\{4, 2, 2; 1, 1, 2\}$
24	Kleinov graf	$\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$
25	25-Paulusov graf	$\{12, 6; 1, 6\}$
26	26-Paulusov graf	$\{10, 6; 1, 4\}$
27	Schlaflijev graf	$\{16, 5; 1, 8\}$
28	Changov graf	$\{12, 5; 1, 4\}$
28	Coxeterov graf	$\{3, 2, 2, 1; 1, 1, 1, 2\}$
30	Levijev graf	$\{3, 2, 2, 2; 1, 1, 1, 3\}$
32	Hadamardov $(8, 1)$-graf	$\{8, 7, 4, 1; 1, 4, 7, 8\}$
32	Kummerov graf	$\{6, 5, 4; 1, 2, 6\}$
32	Wellsov graf	$\{5, 4, 1, 1; 1, 1, 4, 5\}$
36	Sylvesterov graf	$\{5, 4, 2; 1, 1, 4\}$
48	Hadamardov $(12, 1)$-graf	$\{12, 11, 6, 1; 1, 6, 11, 12\}$
50	Hoffman-Singletonov graf	$\{7, 6; 1, 1\}$
52	Generaliziran šesterokut reda $(3, 1)$	$\{6, 3, 3; 1, 1, 2\}$

Tablica 2: Neki distancijsko regularni grafovi i njihovi presječni nizovi.

n	Naziv grafa	Presječni niz
56	Gewirtzov graf	$\{10, 9; 1, 2\}$
56	Gossetov graf	$\{27, 10, 1; 1, 19, 27\}$
57	Perkelov graf	$\{6, 5, 2; 1, 1, 3\}$
63	Jako regularan graf $(63, 32, 16, 16)$	$\{32, 15; 1, 16\}$
65	Hallov graf	$\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$
70	Johnsonov graf $(8, 4)$	$\{16, 9, 4, 1; 1, 4, 9, 16\}$
72	Suetakeov graf	$\{12, 11, 8, 1; 1, 4, 11, 12\}$
77	Mesnerov graf	$\{28, 15; 1, 12\}$
81	Brouwer-Haemersov graf	$\{20, 18; 1, 6\}$
100	Hall-Jankov graf	$\{36, 21; 1, 12\}$
100	Higman-Simsov graf	$\{22, 21; 1, 6\}$
102	Biggs-Smithov graf	$\{3, 2, 2, 2, 1, 1, 1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3\}$
105	Generaliziran heksagon $(4, 1)$	$\{8, 4, 4; 1, 1, 2\}$
120	Jako regularan graf $(120, 56, 28, 24)$	$\{56, 27; 1, 24\}$
120	Jako regularan graf $(120, 63, 30, 36)$	$\{63, 32; 1, 36\}$
126	Johnsonov graf $(9, 4)$	$\{20, 12, 6, 2; 1, 4, 9, 16\}$
126	Zara graf	$\{45, 32; 1, 18\}$
126	Tutteova 12-rešetka	$\{3, 2, 2, 2, 2, 2; 1, 1, 1, 1, 1, 3\}$
130	Grassmannov graf $J_3(4, 2)$	$\{48, 27; 1, 16\}$
155	Grassmannov graf $J_2(5, 2)$	$\{42, 24; 1, 9\}$
162	Van Lint-Schrijverov graf	$\{6, 5, 5, 4; 1, 1, 2, 6\}$
176	Jako regularan graf $(176, 70, 18, 34)$	$\{70, 51; 1, 34\}$
176	Jako regularan graf $(176, 105, 68, 54)$	$\{105, 35; 1, 54\}$
210	Johnsonov graf $(10, 4)$	$\{24, 15, 8, 3; 1, 4, 9, 16\}$
253	Jako regularan graf $(253, 112, 36, 60)$	$\{112, 75; 1, 560\}$
266	Livingstonov graf	$\{11, 10, 6, 1; 1, 1, 5, 11\}$
275	McLaughlinov graf	$\{112, 81; 1, 56\}$
288	Leonardov graf	$\{12, 11, 8, 1; 1, 4, 11, 12\}$

Tablica 3: Neki distancijsko regularni grafovi i njihovi presječni nizovi.

Literatura

[1] E. Bannai, T. Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., London, 1984.

[2] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1974.

[3] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[4] F. Buckley, F. Harary, *Distance in Graphs*, Addison-Wesley Publishing Company, California, 1990.

[5] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. 1973, no. 10.

[6] C. D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman & Hall, London, 1993.

[7] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2007.

[8] C. W. H. Lam, *The search for a finite projective plane of order 10*, Amer. Math. Monthly 98 (1991), no. 4, 305–318.

[9] A. Pascoe, *Affine and Projective Planes*, Missouri State University, 2018., dostupno na `https://bearworks.missouristate.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4245&context=theses`

[10] T. Ruen, *600-cell graph in H4 Coxeter plane*, dostupno na `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11303776` (rujan 2021.).

[11] T. Ruen, *120-cell graph in H4 Coxeter plane*, dostupno na `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11303780` (rujan 2021.).

[12] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2012.

[13] E. W. Weisstein, *Distance-Regular Graph*, dostupno na `https://mathworld.wolfram.com/Distance-RegularGraph.html` (rujan 2021.)

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada su distancijsko regularni grafovi. Rad se sastoji od četiri poglavlja i dodatka. Nakon uvoda u teoriju grafova definirani su distancijsko regularni grafovi i dana su njihova osnovna svojstva. Navode se neki osnovni primjeri distancijsko regularnih grafova, te se obrađuju jako regularni grafovi koji su poseban slučaj kada je dijametar 2.

U daljnjem razvoju teorije uvode se matrice te definicija distancijsko regularnih grafova preko njih. Dani su glavni iskazi, dokazi i rezultati vezani za distancijske matrice distancijsko regularnih grafova i njihove produkte.

U zadnjem poglavlju uvode se asocijacijske sheme i njihovu povezanost s distancijsko regularnim grafovima. Navodi se i Bose-Mesnerova algebra te svi parametri vezani za asocijacijske sheme i kako su oni povezane sa presječnim brojevima distancijsko regularnih grafova. Za kraj se spominju P-polinomijalne sheme i njihovi najvažniji primjeri.

U dodatku su navedeni mali primjeri distancijsko regularnih grafova i njihovi presječni nizovi.

Summary

The topic of this master thesis are distance regular graphs. The thesis is divided into four sections and an appendix. After an introduction to graph theory we define distance regular graphs and their main properties. We give some essential examples of distance regular graphs, and we elaborate strongly regular graphs, which are the special case of diameter 2.

In further development of the theory we introduce matrices and give the definition of the distance regular graphs through them. We give some main statements, proofs and results regarding the distance matrices of the distance regular graphs and their products.

In the last section we introduce association schemes and their relation to distance regular graphs. We mention the Bose-Mesner algebra and all the parameters related to association schemes and how they are connected with intersection numbers of distance regular graphs. Lastly, we mention P-polynomial schemes and two most important examples.

The appendix contains a table of small distance regular graphs and their intersection arrays.

Životopis

Rođena sam 13. lipnja 1995. godine u Zagrebu. Cijeli život živim u Zagrebu gdje sam završila Osnovnu školu Ivana Cankara te opću Gimnaziju Tituša Brezovačkog. Tijekom srednje škole jako sam zavoljela matematiku te odlučila nastaviti obrazovanje prema toj struci. Godine 2014. upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Nakon preddiplomskog studija, upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na istom odsjeku.