SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Vojnović

RACIONALNA FUNKCIJA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Eva Špalj, prof.

Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, ožujak, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Najveća hvala Bogu koji me, po zagovoru svetoga Josipa, nije napuštao ni u najtežim trenutcima mog studiranja te mi je uvijek davao snage da idem dalje.

Zahvaljujem svojoj metorici prof. Špalj i suvoditeljici rada prof. dr. sc. Milin Šipuš na stručnom vodstvu, savjetima, uloženom vremenu i pomoći protekle dvije godine mog studiranja i prilikom izrade ovog diplomskog rada.

Veliko hvala mojim kolegicama Kristini i Ivani na nesebičnoj pomoći tokom studiranja i što su protekle dvije godine mog studiranja učinile lakim i zabavnim.

Zahvaljujem zaručniku Nikoli na bezuvjetnoj podršci, ljubavi i razumijevanju tijekom studiranja te što je uvijek bio uz mene.

I na kraju, najveću zaslugu za ono što sam postigla pripisujem svojoj OBITELJI, posebno mojim RODITELJIMA. Oni su zajedno sa mnom učili, pisali ispite i polagali kolegije. Bili su uz mene i u sretnim i u teškim trenutcima. Bez njih, sve što sam do sada postigla, ne bi bilo moguće. HVALA VAM!

Sadržaj

Uvod

Matematika je od davnina sastavni dio različitih obrazovnih programa, a riječ je o predmetu čiji se sadržaji kroz povijest nisu bitno mijenjali ne uzimajući u obzir na nastavne planove i programe koji su podložni čestim izmjenama. Odlika matematike je slojevitost zbog čega je nužno graditi stabilne i precizno postavljene temelje koji omogućuju razvoj, kako pojedinca, tako i ove znanstvene discipline, do neslućenih visina. Teret postavljanja spomenutih temelja leži upravo na osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj matematici.

Pojam funkcije u matematici jedan je od temeljnih i najvažnijih matematičkih pojmova. Vrlo je značajan unutar same matematike, u primjeni matematike, ali i u strukturiranju i modeliranju problema. Koliko je važan u obrazovanju učenika, govori i misao W. Servaisa i T. Varge: ”Pravo pitanje nije na kojoj razini uvesti pojam funkcije, nego što od pojma funkcije uvesti na danoj razini obrazovanja.”

Racionalna funkcija je temeljna, ali pomalo zapostavljena, elementarna funkcija i zato će se, ovim radom, nastojati približiti i učenicima i nastavnicima. U prvom poglavlju uveden je pojam racionalne funkcije te su proučena njena svojstva počevši od jednostavne obrnute proporcionalnosti, preko razlomljene racionalne funkcije do funkcije s kvadratnim izrazom u brojniku i nazivniku. Posebno je istražen utjecaj koeficijenata na graf pripadne funkcije te se uz to vežu metodički materijali pomoću kojih učenici mogu samostalno, i uz pomoć tehnologije, istraživati svojstva racionalnih poglavlja. Drugo poglavlje kroz projektni zadatak objedinjuje sve zaključke donesene u prethodnom poglavlju.

Poglavlje 1

Racionalna funkcija

Pojam funkcije jedan je od najvažnijih pojmova u matematici. Prema nekim izvorima, početci ovog bitnog pojma sežu još u doba Babilonaca i antičke Grčke. Babilonci su tablično prikazivali pridruživanje kvadrata i kubova prirodnim brojevima dok je Ptolomej u vrijeme antičke Grčke radio s objektima koji se smatraju začetcima trigonometrijskih funkcija. Bez obzira na podjeljenost povjesničara o prvim tragovima pojma funkcije, svi se slažu da tadašnja poimanja nisu imala poveznica s pojmom funkcije koji je danas poznat. Pojam funkcije je relativno moderan pojam te se notacija funkcije prvi put pojavljuje sredinom 14. stoljeća. Naime, francuski znanstvenik i katolički biskup Nicole Oresme[1] opisivao je zakone prirode korištenjem ovisnosti jedne veličine o drugoj. Njegovi spisi korišteni su u filozofskim školama u Oxfordu i Parizu. O pojmu funkcije pisao je i Descartes[2] koji tvrdi da jednadžba s dvije varijable, geometrijski prikazana krivuljom, inicira ovisnost između njezinih vrijednosti. Također, o potrebi za novim matematičkim alatom učio je i Galileo Galilei [3] prilikom proučavanja prirodnih fenomena poput prirodnog pada, putanje planeta i sl.

Svakako treba spomenuti i začetnike infinitezimalnog Isaaca Newtona[4] i Gottfrieda Leibniza[5]. U tim je začetcima uočena potreba za označavanjem funkcije kao individualne matematičke jedinice. Newton je uočio međusobnu inverznost dviju operacija prilikom

[1]Nicole Oresme (Normandija, prije 1330. – Lisieux, 11. srpnja 1382.), francuski znanstvenik i katolički biskup

[2]Rene Descartes (Descartes, 1596. – Stockholm, 1596.), francuski filozof, fizičar, matematičar i utemeljitelj analitičke geometrije

[3]Galileo di Vincenzo Bonaiuti de' Galilei (Pisa, 1564. - Arcetri, 1642.), talijanski matematičar, fizičar, astronom i filozof

[4]Isaac Newton (Woolsthorpe, 1642. – Kensington, 1727.), engleski fizičar, matematičar i astronom

[5]Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1646. – Hannover, 1716.), njemački filozof, matematičar, fizičar i diplomat

određivanja brzine iz puta, i obrnuto. Leinbitz je prvi upotrijebio pojam *funkcija* 1673. godine u djelu „Methodus tangentum inversa, sui de functionibus" gdje u vrlo općenitom smislu upotrebljava pojam funkcije. Uveo je i pojmove *konstanta*, *varijabla* i *parametar*. Istaknuti matematičar, koji se bavio pojmom funkcije, je i Johann Bernoulli [6] koji funkciju opisuje kao „veličinu koja je na neki način formirana iz neodređenih i konstantnih brzina". On je 1718. u članku objavio svoje poimanje funkcije što je ujedno i prva pojava pojma funkcije u javnosti. Uveo je i oznaku za funkciju: malo grčko slovo *fi*.

Prvi pomak u definiranju pojma funkcije javio se 1748. godine kada Euler[7] u jednom od svojih djela funkciju smatra ključnom te ju opisuje na sljedeći način: „Funkcija varijabilne veličine je analitički izraz koji je na bilo kakav način sastavljen od te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina." No, ova definicija postavila je mnoga pitanja. Euler nije objasnio značenje pojma „analitički izraz" već je podrazumijevao da će čitatelj shvatiti da se radi o izrazu formiranom pomoću uobičajenih matematičkih operacija. Vlastitu definiciju je pokušao prepraviti 1755. godine objasnivši da ukoliko neka veličina ovisi o drugoj veličini na način da se mijenja čim se mijenja i druga veličina, onda se ona naziva funkcijom druge veličine. Ta definicija prilično je općenita i smatra se modernom definicijom funkcije. Većina matematičara prihvatila je Eulerovu prvotnu definiciju te je pojam funkcije ostao nepromijenjen tijekom cijelog 18. stoljeća.

Tek 1939. godine, grupa matematičara, koja je djelovala pod pseudonimom Nicolas Bourbaki, definirala je funkciju u smislu uređenih parova:
„Neka su E i F dva skupa, koji mogu i ne moraju biti različiti. Odnos između promjenjivog elementa x iz skupa E i promjenjivog elementa y skupa F zove se funkcijska veza u y, ako za svaki x iz E postoji jedinstveni y iz F koji je u zadanom odnosu sa x".
Ovu definiciju prihvatili su mnogi matematičari smatrajući je sveobuhvatnom i sažetom. Dapače, ista se i danas koristi u mnogim matematičkim udžbenicima iz područja algebre.

Pojam funkcije od prvog spominjanja pa do danas doživio je veliku promjenu. Kroz razna istraživanja matematičara funkcija se razvila u jedan od temeljnih matematičkih pojmova korišten u gotovo svim područjima matematike.

1.1 Pojam

Obrazovni programi, gotovo na svim razinama, prožeti su funkcijama, u većoj ili manjoj mjeri. To je vrlo važan dio obrazovanja, kako učenika, tako i budućih nastavnika matema-

[6] Johann Bernoulli (Basel, 1667. - Basel, 1748.)
[7] Leonhard Euler (Basel, 1707. – Petrograd, 1783.), švicarski matematičar, fizičar i astronom

tike. Unatoč razlikama u programima, većina učenika obrađuje iste temeljne pojmove.

Iako se pojam funkcije spominje tek u prvom razredu srednje škole, on je implicitno zastupljen još u osnovnoj školi. U razrednoj nastavi učenici koriste mnoštvo primjera iz svakodnevnog života koji su bogati skupovima, relacijama i funkcijama koje se mogu jednostavno grafički prikazati. Na taj način, uz pomoć pojmova strukturiraju konkretne situacije, apstrahira se iz njih ono važno za određenu temu te se to grafički prikazuje. U predmetnoj nastavi prikazuje se jednostavna ovisnost dviju veličina riječima, tablicom pridruženih vrijednosti ili grafički. Pojam funkcije konkretnije se pojavljuje tek u sedmom razredu, ali samo kao ovisnost dviju veličina. U kurikulu za gimnazije predviđa se kako će učenici:

- opisati i izvesti ovisnost dviju veličina formulama, tablicama pridruženih vrijednosti, grafovima ili riječima;
- prepoznati i protumačiti karakteristična svojstva grafova funkcija i njihove karakteristične točke
- prepoznati, odrediti i protumačiti karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizirati linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te koristiti njihova svojstva
- primijeniti funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema.

Sam pojam funkcije detaljnije se obrađuje u drugom i četvrtom razredu. Mnogi autori i stručnjaci zato kritiziraju kurikul smatrajući da se pojam funkcije treba obrađivati na početku jednog ciklusa obrazovanja u kojem je taj pojam itekako važan.

Bez obzira na razlike u nastavnim programima, a uzimajući u obzir broj sati matematike godišnje, svi programi obuhvaćaju iste pojmove pa se u sljedećih nekoliko redaka navodi pojam općenite funkcije te važni pojmovi vezani uz isti.

U udžbeniku za četvrti razred prirodoslovno-matematičkih gimnazija, Antoliš i Copić, definiraju funkciju na sljedeći način [1]:

Definicija 1.1.1. *Neka su A i B neprazni skupovi. Funkcija sa skupa A u skup B je pravilo koje svakom elementu skupa A pridružuje samo jedan element skupa B.*

Funkciju se obično označava ovako: $f : A \to B$ te se čita funkcija f s A u B. Skup A naziva se domena ili područje definicije funkcije, a skup B kodomena ili područje vrijednosti funkcije. Također, gore spomenute autorice u istom udžbeniku navode kako se element $x \in A$ naziva original ili nezavisna varijabla, a element $f(x) \in B$ vrijednost funkcije ili zavisna varijabla.

Često se kod definicije funkcije izostavlja isticanje domene i kodomene. Tada se smatra da je domena skup svih realnih brojeva za koje se može izračunati vrijednost funkcije $f(x)$. Ta se domena naziva prirodna domena ili prirodno područje definicije funkcije. Oznaka: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$. Važan pojam je i slika funkcije. To je skup svih realnih brojeva $f(x)$ pri čemu je x iz domene funkcije f. Oznaka: $Imf = \left\{f(x) \mid x \in D_f\right\}$.

Ovdje treba istaknuti i jednakost funkcija: za dvije funkcije f i g kažemo da su jednake ako im se podudaraju domena, kodomena i ako za svaki element x iz domene vrijedi $f(x) = g(x)$.

Pojam racionalne funkcije spominje se u drugom razredu u programima sa 140, 175 i 210 sati godišnje, u četvrtom razredu četverogodišnjih strukovnih škola sa 64 sata godišnje te u drugom razredu četverogodišnjih strukovnih škola sa 105, 140 i 175 sati matematike godišnje. Bez obzira na razlike u broju sati matematike godišnje, kurikul obuhvaća sljedeće ishode:

- računski određuje domenu jednostavnih racionalnih i iracionalnih funkcija;
- grafički prikazuje funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ određujući funkcijsku vrijednost za neke vrijednosti varijable;
- na grafu određuje domenu, kodomenu, sliku funkcije i objašnjava bijekciju.

U preporuci za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda navodi se da racionalne funkcije u brojniku i nazivniku imaju polinom maksimalno drugog stupnja te da se učenici koriste programima dinamične geometrije i ostalim primjerenim i dostupnim interaktivnim računalnim programima i alatima.

Većini nastavnika muku zadaje uvođenje racionalne funkcije. Suhoparno ispisivanje definicije i njenih bitnih svojstava nije opcija za učenike bilo kojeg obrazovnog programa. Niti se konkretna definicija racionalne funkcije pojavljuje u udžbenicima predviđenima za gimnazije. Upravo zato racionalnoj funkciji treba pristupiti s oprezom, ali je i u najvećoj mogućoj mjeri približiti učenicima. Uvođenje racionalne funkcije ne mora biti ozbiljno i formalno, već se to može učiniti kroz igru, uspoređujući različite funkcije s racionalnim brojevima. Tako se, na primjer, s učenicima može prisjetiti linearne funkcije. Učenici se s pojmom linearne ovisnosti susreću još u sedmom razredu. Prepoznaju je, prikazuju grafički i analiziraju promjenu u linearnoj ovisnosti. U naputku proširenog sadržaja stoji kako učenici povezuju linearnu ovisnost i linearnu funkciju. Prisjetit će se kako linearna funkcija ili polinom prvog stupnja jest funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$, gdje su a,b realni brojevi i $a \neq 0$. Broj a nazivamo vodeći koeficijent, a broj b slobodni koeficijent. Poželjno je da opća formula linearne funkcije ostane zapisana na ploči ili na nekom drugom, učenicima vidljivom, mjestu.

Potom se učenike može prisjetiti i kvadratne funkcije ili polinoma drugog stupnja te na ploču zapisati $f(x) = ax^2 + bx + c$ pri čemu su koeficijenti a,b i c realni brojevi. Broj $a \neq 0$ je vodeći koeficijent polinoma f, b je linearni koeficijent, a c je slobodni član. Nju također treba zapisati na vidljivo mjesto. Kvadratnu funkciju učenici upoznaju u drugom razredu srednje škole bez obzira na obrazovni program. Još u osmom razredu upoznali su funkciju kvadriranja $f(x) = x^2$, a njen graf nazivali su parabolom.

Sada se na ploču, uz gore spomenute funkcije, zapisuju i sljedeće funkcije: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ i $f(x) = \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ te pitaju učenici o kojim se funkcijama radi. Oni će zasigurno primijetiti kako neke od njih imaju polinom prvog stupnja u brojniku i/ili u nazivniku, a druge pak polinom drugog stupnja u brojniku ili nazivniku. Potom se daje na razmišljanje učenicima kako se nazivaju takve funkcije. To je potrebno povezati s racionalnim brojevima. Uz gore navedeno može se spomenuti neki opći racionalni broj $\frac{a}{b}$. Vrlo brzo će učenici shvatiti da se radi o racionalnim funkcijama.

Još jedan uobičajeniji način uvođenja racionalne funkcije je promatranje grafičkog prikaza obrnute proporcionalnosti. Naime, poznato je kako pozitivni dio grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ odgovara grafičkom prikazu obrnute proporcionalnosti s kojom se učenici susreću u sedmom razredu osnovnoškolskog obrazovanja. Može se zadati jednostavan zadatak, npr. ako bi 15 radnika iskopalo temelje neke kuće za 8 sati, za koliko bi vremena to učinilo 10 radnika. Učenici u drugom razredu srednje škole ovo znaju izračunati, a i prikazati grafički. Sada na tom grafu učenici promatraju točke tog grafa. Uočit će da za bilo koji argument x vrijedi da je $y = \frac{1}{x}$. Na kraju učenici zajedno s nastavnikom zaključuju da se radi o racionalnoj funkciji oblika $f(x) = \frac{1}{x}$.

Kako udžbenici za srednjoškolske programe ne donose konkretnu definiciju racionalne funkcije, niti je ona predviđena kurikulom, ovdje se koristi definicija autora Pavković i Veljan, čije se knjige i zbirke koriste u visokoškolskom obrazovanju nastavnika matematike [7]:

Definicija 1.1.2. *Racionalna funkcija (nad $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) je kvocijent dvaju polinoma. Odnosno, racionalna funkcija je oblika $x \mapsto \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi i $Q_m(x) \neq 0$, tj. $Q_m(x)$ nije nulpolinom.*

Sada se može vratiti na linearnu funkciju s početka te pitati učenike je li i to racionalna funkcija. Poznavajući racionalne brojeve, učenici će moći odgovoriti kako je to racionalna funkcija. Slično i s kvadratnom funkcijom. Tu se zajedno s učenicima zaključuje kako polinom u nazivniku može biti konstantna funkcija. No, ako je $Q_m(x)$ konstantna funkcija, onda se radi o polinomu. Dakle, polinomi su racionalne funkcije.

Obzirom da definicija racionalne funkcije dozvoljava da je polinom u nazivniku $Q_m(x)$ konstantan polinom, racionalne funkcije dijele se na cijele racionalne funkcije ili polinome i razlomljene racionalne funkcije. Spomenute su neke cijele racionalne funkcije koje se smatraju bitnima za srednjoškolsko obrazovanje učenika: linearna, kvadratna i kubna funkcija.

Valja spomenuti kako za racionalnu funkciju $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ kažemo da je napisana u **kanonskoj formi** ako polinomi $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ nemaju zajedničkih korijena.

Također, u srednjoškolskom obrazovanju spominje se pojam prave racionalne funkcije:

Definicija 1.1.3. *Racionalna funkcija $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je **prava racionalna funkcija** ako je stupanj polinoma $P_n(x)$ manji od stupnja polinoma $Q_m(x)$. Inače je neprava.*

Ako je racionalna funkcija neprava, tada se polinom u brojniku može podijeliti polinomom u nazivniku te se dobije sumu polinoma i prave racionalne funkcije.

Funkcija oblika $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ naziva se razlomljena linearna funkcija.

Potrebno je spomenuti i racionalnu funkciju u dvije varijable. To je funkcija $\mathbb{Q} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ oblika

$$Q(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, g \neq 0,$$

pri čemu su f i g polinomi s dvjema varijablama. Analogno se definiraju i racionalne funkcije više varijabli.

1.2 Svojstva racionalne funkcije

Domena i kodomena

Bilo koja funkcija, pa tako i racionalna, ne sastoji se samo od pravila pridruživanja već i od dvaju skupova koji su izrazito važni za razumijevanje samog pojma funkcije – domena i kodomena. Učenici su se do sada već susreli s pojmom domene i kodomene te vrlo često domenu tumače kao skup vrijednosti koje neka nepoznanica x može poprimiti, a kodomenu kao skup vrijednosti koje neka funkcija $f(x)$ može postići. Iako ovakvo tumačenje nije matematički precizno, učenicima je intuitivno jasno što ova dva skupa označavaju.

Kada se govori o domeni temeljne racionalne funkcije oblika $f(x) = \frac{1}{x}$ treba biti oprezan. Naime, vrlo često se zaboravi na uvjet, a to je da nazivnik mora biti različit od nule. U ovom slučaju je $x \neq 0$ pa je domena ove racionalne funkcije $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sada se lako može poopćiti prethodna tvrdnja, odnosno, može se odrediti domena opće racionalne funkcije. Kako nazivnik racionalne funkcije $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ može biti polinom bilo kojeg stupnja, a uvjet govori da nazivnik mora biti različit od nule, zaključak je da domenu racionalne funkcije $R(x)$ čini skup realnih brojeva izuzev nultočaka polinoma$Q_m(x)$ u nazivniku, tj.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q_m(x) \neq 0\}.$$

Promatrajući funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ učenici lako mogu odrediti područje vrijednosti funkcije. Važno je uočiti kako funkcija može postići sve vrijednosti iz skupa realnih brojeva osim 0. Dakle, kodomenu funkcije $f(x)$ čini čitav skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Analogno, promatra se racionalna funkcija oblika $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Zaključuje se kako funkcija $R(x)$ može postići sve vrijednosti iz skupa realnih brojeva. Općenito se može zaključiti kako je kodomena opće racionalne funkcije skup realnih brojeva, a piše se $K_f = \mathbb{R}$.

Nultočke

Iako se pojam nultočke spominje tek u prvom razredu srednje škole, učenici su se još u osnovnoj školi indirektno upoznali s istim. Nultočka je realan broj za koji određena funkcija postiže vrijednost nula. Učenici znaju kako se nultočka neke funkcije u koordinatnom sustavu prikazuje kao sjecište grafa te funkcije s osi apscisa. Pitanje je za koju vrijednost x temeljna racionalna funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ postiže vrijednost nula. Promatrajući danu funkciju te promatrajući njen graf zaključuje se kako ova funkcija nema nultočaka.

No, postavlja se pitanje vrijedi li isto i za opću racionalnu funkciju oblika $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Za koju vrijednost x će dana funkcija postići vrijednost nula, odnosno, kada će vrijediti da je $R(x) = 0$? Kako je tražena funkcija oblika $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, za koji x će vrijediti $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$? Zaključuje se kako će se prethodno spomenuta jednakost postići ukoliko je polinom u brojniku jednak nuli. Dakle, nultočka ili korijen racionalne funkcije $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je broj x_0 za koji vrijedi $P_n(x_0) = 0$. Ukoliko je x_0 korijen kratnosti r polinoma $P_n(x)$, onda se x_0 naziva i korijenom kratnosti r funkcije $R(x)$.

Stručna literatura predviđena za visokoškolsko obrazovanje spominje još i kako broj x_0 nazivamo pol racionalne funkcije $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ako vrijedi $Q_m(x_0) = 0$. Također vrijedi, ako je x_0 nultočka kratnosti r polinoma $Q_m(x)$, onda je x_0 pol kratnosti ili reda r. Prava racionalna funkcija ima jednostruke nultočke i polove. Osim toga, nultočke i polove funkcije mogu se podijeliti na one parnog i na one neparnog reda, ovisno o tome je li broj r, koji označava kratnost, paran ili neparan broj.

Posebno se spominju nultočke razlomljene linearne funkcije oblika $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Za $a \neq 0$, nultočka ove funkcije je $x_1 = -\frac{b}{a}$, a pol je $x_2 = -\frac{d}{c}$. Razlomljena linearna funkcija može se zapisati i u sljedećem obliku:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2(x+\frac{d}{c})}, c \neq 0, bc-ad \neq 0.$$

Asimptote

Za crtanje grafa bilo koje funkcije, pa tako i racionalne, bitan je pojam asimptote. Asimptota se definira kao pravac čije se točke približavaju po volji blizu točkama zadane krivulje kada jedna ili više koordinata točaka krivulje teži u beskonačnost. Može se tumačiti i da je asimptota tangenta u beskonačnosti, odnosno tangenta u beskonačno dalekoj točki krivulje. Takvo tumačenje asimptote se najčešće koristi kod grafova realnih funkcija realnih varijabli. Asimptote funkcije mogu biti vertikalne, horizontalne i kose.

Vertikalna asimptota

Kod uvođenja asimptota racionalnih funkcija treba biti oprezan. Učenici već znaju kako racionalna funkcija nije definirana u nultočkama polinoma u nazivniku, no to nije dovoljno. Promotrimo prvo temeljnu racionalnu funkciju oblika $f(x) = \frac{1}{x}$. Asimptote racionalne funkcije mogu se otkriti proučavanjem sljedećih tablica vrijednosti. U tim tablicama zadane su vrijednosti koje su vrlo blizu nuli.

x	$f(x)$
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	
0.00001	

x	$f(x)$
-0.1	
-0.01	
-0.001	
-0.0001	
-0.00001	

U gornjoj tablici zadane su pozitivne vrijednosti, odnosno vrijednosti koje se nalaze desno od nule, a u donjoj tablici zadane su negativne vrijednosti, one koje se nalaze lijevo od nule. Potrebno je popuniti tablicu, odnosno izračunati funkcijske vrijednosti.

x	$f(x)$
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000
0.00001	100000

x	$f(x)$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10000
-0.00001	-100000

Pri korištenju ovakve aktivnosti učenicima se može napomenuti da mogu samostalno odabrati još neku vrijednost manju od 0.00001, odnosno veću od -0.00001, i provjeriti što se događa s funkcijskom vrijednošću. Potrebno je učenike navesti da razmisle kako se ponaša funkcijska vrijednost u odnosu na vrijednost x. Iz gornje tablice zaključuje se kako približavanjem vrijednosti x prema nuli, funkcijska vrijednost neograničeno raste. Iz donje tablice zaključuje se kako, također, približavanjem vrijednosti x k nuli, funkcijske vrijednosti neograničeno padaju. Kako temeljna racionalna funkcija nije definirana za $x = 0$ te na temelju tablica, zaključuje se kako ova racionalna funkcija ima vertikalnu asimptotu u točki $x = 0$.

Analogno se može provesti za bilo koju racionalnu funkciju.

Na primjer: neka je zadana racionalna funkcija $f(x) = \frac{5}{x-3}$. Iako će učenici odmah znati kako se u domeni ove funkcije ne nalaze nultočke polinoma u nazivniku, može im se postaviti sljedeća tablica:

x	$f(x)$
2.9	
2.99	
2.999	
2.9999	
2.99999	

x	$f(x)$
3.1	
3.01	
3.001	
3.0001	
3.00001	

Iz ovih tablica također se može zaključiti kako približavanjem s lijeva ili s desna vrijednosti nultočke polinoma u nazivniku, funkcijska vrijednost neograničeno pada ili neograničeno raste. Dakle, funkcija $f(x) = \frac{5}{x-3}$ ima vertikalnu asimptotu u točci $x = 3$.

Zaključak je da racionalna funkcija ima vertikalnu asimptotu u nultočkama nazivnika.

Ovakav pristup primjeren je za učenike drugih razreda srednjih škola koji još nisu upoznati sa pojmom limesa. Kod učenika četvrtih razreda srednjih škola zaključak ovakve aktivnosti otkrivanja može se donijeti na racionalnoj funkciji u općem slučaju.

Definicija 1.2.1. *Pravac $x = a$ je vertikalna asimptota grafa funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ s lijeva ako je*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \textit{ ili } \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

Pravac $x = a$je vertikalna asimptota grafa funkcije $f(x)$ s desna, ako je

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \textit{ ili } \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

Ukoliko je pravac $x = a$ vertikalna asimptota i s lijeva i s desna, tada se govori o obostranoj asimptoti.

Dakle, vertikalna asimptota je pravac $x = a$ ukoliko se vrijednost funkcije neograničeno povećava ili smanjuje kako se vrijednost x približava vrijednosti a. Učenici najčešće pamte kako se vertikalna asimptota nalazi tamo gdje je nazivnik racionalne funkcije jednak 0, odnosno, u nultočkama nazivnika racionalne funkcije.

Horizontalna asimptota

Osim vertikalnih, postoje još i kose asimptote unutar kojih se posebno razlikuju horizontalne asimptote. Kako bi iste i otkrili, ovdje se, također, može koristiti tablica sa zadanim vrijednostima te promatrati odnos danih vrijednosti sa izračunatim funkcijskim vrijednostima. Promatra se nekoliko funkcija: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{3x+2}{x}$ i $h(x) = \frac{x+2}{6x-5}$. Najprije se popuni tablica vrijednosti za funkciju $f(x)$.

x	$f(x)$
1	
352	
2500	
5437	
10876	
25453	
100000	

Na temelju popunjene tablice zaključuje se kako se s povećanjem vrijednosti argumenta x, funkcijska vrijednost približava nuli. Potrebno je argumentirati s učenicima što se događa s funkcijskim vrijednostima ukoliko vrijednosti argumenta x neograničeno padaju. Učenici će zaključiti da se u tom slučaju funkcijska vrijednost približava nuli.

Promatra se i funkcija $g(x) = \frac{3x+2}{x}$. Lako se vidi da je $g(x) = 3 + \frac{2}{x}$. Također možemo promatrati tablicu vrijednosti kao što je sljedeća:

x	$g(x)$
2	
5	
10	
25	
50	
125	
430	
835	
2500	

Ovdje učenici zaključuju da se funkcijske vrijednosti, s porastom argumenta x, približavaju vrijednosti 3, a ukoliko se radi o istim zadanim vrijednostima samo s negativnim predznakom, tada će se funkcijske vrijednosti opet približavati vrijednosti 3.

Učenike je potrebno potaknuti na razmišljanje postavljanjem pitanja što znači da se vrijednosti funkcije približavaju nekom broju. Poznavajući asimptote, odgovorit će kako je $y = 3$ horizontalna simptota funkcije. Povezujući taj odgovor sa zapisom funkcije $g(x) = 3 + \frac{2}{x}$, učenici će lako uočiti vezu te zaključiti kako horizintalnu asimptotu mogu odrediti i iz zapisa funkcije.

Kod učenika četvrtih razreda, ovu priču potrebno je nadograditi pojmom limesa. Kada se govori o približavanju funkcijskih vrijednosti nekoj drugoj vrijednosti, znat će kako se zapravo govori o limesu funkcije, što u kontekstu grafova označava asimptotu. Prethodni odgovor potrebno je povezati s pojmom limesa.

Definicija 1.2.2. *Pravac $y = b$ je horizontalna asimptota grafa funkcije f s lijeva ako je*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Pravac $y = b$ je horizontalna asimptota grafa funkcije f s desna ako je

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Također, ukoliko je pravac $y = b$ horizontalna asimptota i s lijeva i s desna, tada se govori o obostranoj asimptoti.

Promotrimo funkciju $h(x) = \frac{6x-5}{x+2}$, tj. $h(x) = 6 - \frac{17}{x+2}$. Korištenjem bilo koje tablice vrijednosti, ne može se vrlo jednostavno zaključiti kojoj se vrijednosti približava funkcijska vrijednost s povećanjem vrijednosti x. Zato je poželjno poslužiti se programima dinamične geometrije ukoliko su dostupni. Uz pomoć alata, učenici vrlo brzo i jednostavno mogu nacrtati graf funkcije $h(x)$. Potom nacrtaju proizvoljan pravac paralelan sa osi x. Sada pomicanjem nacrtanog pravca mogu uočiti kako graf dane funkcije ima horizontalnu asimptotu u $y = 6$. No, uzimajući u obzir prethodni primjer, također se iz zapisa funkcije $h(x) = 6 - \frac{17}{x+2}$ može zaključiti gdje se nalazi horizontalna asimptota te funkcije.

Obzirom na posljednja dva primjera valja napomenuti kako je kod racionalnih funkcija vrlo bitno i dijeljenje polinoma:

Definicija 1.2.3. *Polinom p je djeljiv polinomom $s \neq 0$ ako postoji polinom q takav da za svaki realan broj x vrijedi $p(x) = s(x) \cdot q(x)$.*

Sljedeći teorem ipak detaljnije govori o dijeljenju dva polinoma:

Teorem 1.2.4. *Za svaka dva polinoma $p, s \in \mathbb{R}[x]$, $s \neq 0$, postoje jedinstveni polinomi $q, r \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je*

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

pri čemu je $r = 0$ ili $deg r < deg s$.

Graf razlomljene linearne funkcije je hiperbola

Učenici još u osnovnoj školi znaju da pravilo pridruživanja kojim je zadana funkcija može biti definirano na različite načine. Funkcija može biti zadana analitički, implicitno, grafički, tablično i sl. Međutim, graf funkcije ne koristi se samo za definiranje pravila pridruživanja funkcije, već učenici isti koriste za uočavanje različitih svojstava. U srednjoškolskoj literaturi graf funkcije je skup

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid (x \in D)\}.$$

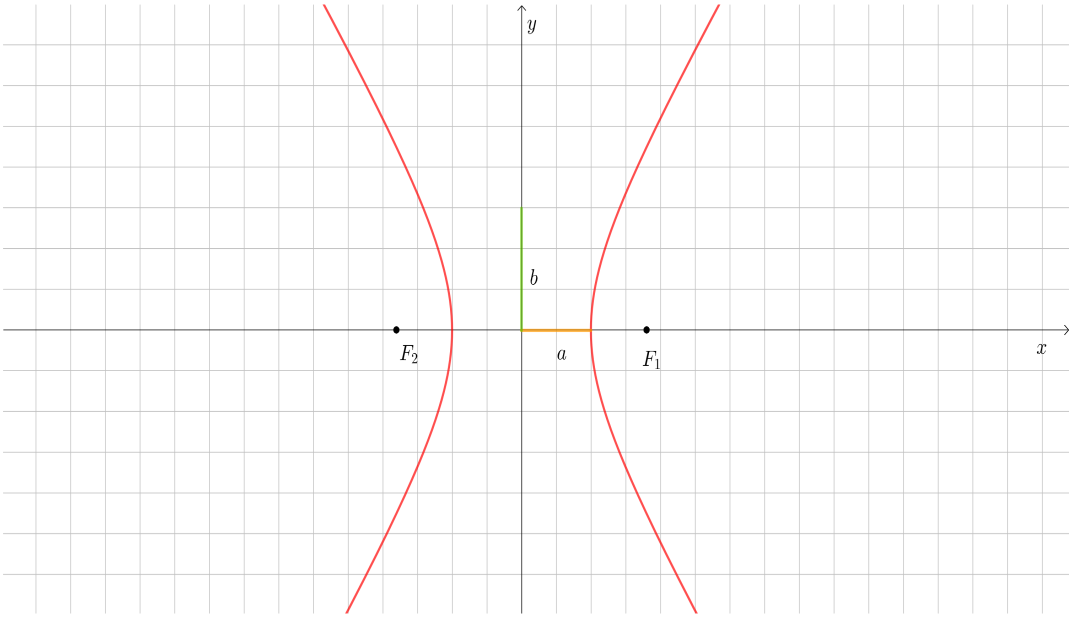
Da bi nacrtali graf neke funkcije, potrebno je nacrtati sve njegove točke $(x, f(x))$ u koordinatnom sustavu. Budući da funkcija svakom elementu domene pridružuje točno jedan element kodomene, na grafu funkcije ne možemo pronaći točke koje imaju istu x koordinatu, a različitu y koordinatu. Vrlo često, učenicima stvara problem odrediti je li zadani graf u koodinatnom sustavu graf neke funkcije. Upravo zato se koristi vertikalni test.

U udžbeniku za četvrti razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, autorica Antoliš i Copić, stoji sljedeća definicija vertikalnog testa [1]:

Definicija 1.2.5. *Skup točaka u koordinatnom sustavu je graf funkcije ako svaka paralela s y osi siječe skup u najviše jednoj točki.*

Prije nego se pokaže da je graf racionalne funkcije hiperbola, kako naslov ovog poglavlja tvrdi, potrebno je prisjetiti se što je to hiperbola.

Definicija 1.2.6. *Hiperbola je skup svih točaka u ravnini za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od dviju fiksnih točaka F_1 i F_2 konstantna veličina i iznosi $2a$.*



Slika 1.1: Hiperbola sa žarištima F_1 i F_2 te poluosima a i b

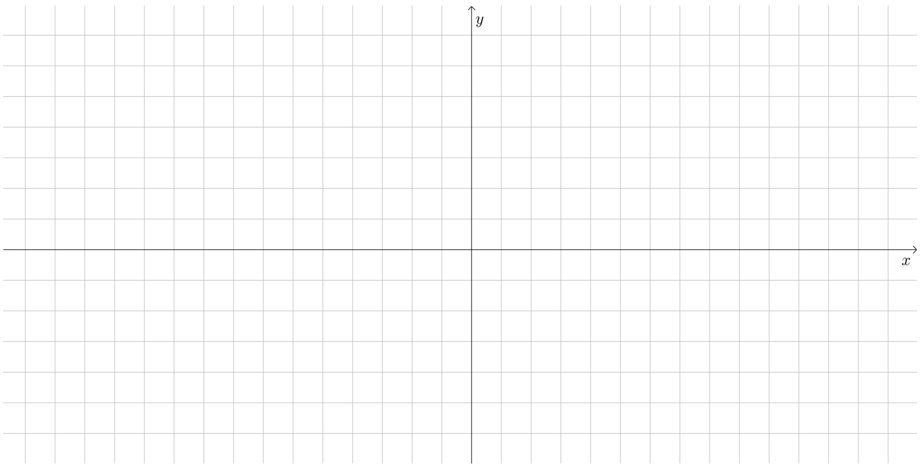
Točke F_1 i F_2 nazivamo fokusima ili žarištima hiperbole, a realnom poluosi hiperbole, b imaginarnom poluosi hiperbole te e linearnim ekscentricitetom za koji vrijedi $e^2 = a^2 + b^2$. Polovište dužine $\overline{F_1, F_2}$, točku O, nazivamo središte hiperbole (središte hiperbole je u ishodištu koordinatnog sustava, a osi se podudaraju s koordinatnim osima). Osna ili kanonska jednadžba hiperbole je

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ ili } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

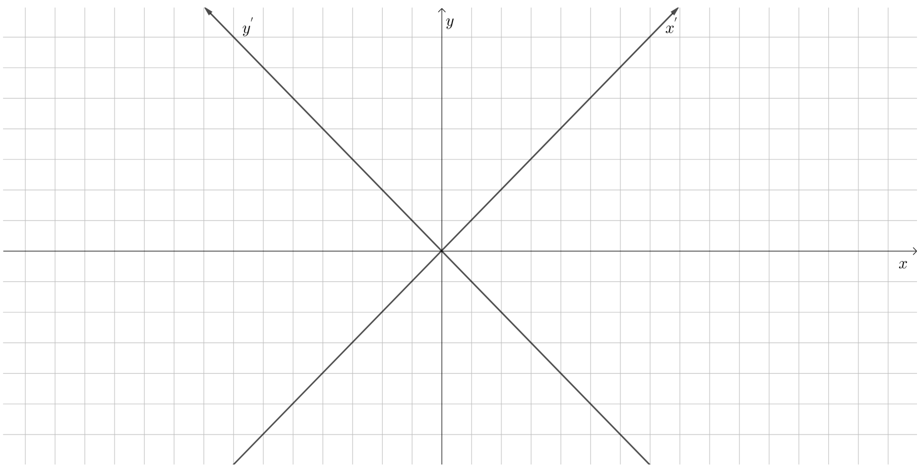
Pokazuje se sada tvrdnja da je graf razlomljene linearne funkcije hiperbola.

Krivulje općenito, pa tako i hiperbolu, može se prepoznati prema njenoj jednadžbi. Poznavajući graf temeljne racionalne funkcije, učenici pretpostavljaju da se radi o „rotiranoj“ hiperboli. Njena glavna os leži na pravcu $y = x$, a sporedna na pravcu $y = -x$. Potrebno je provesti dokaz kako bi se pokazalo da se doista radi o hiperboli. Stoga se uvodi novi koordinatni sustav u euklidskoj ravnini u kojem graf racionalne funkcije, odnosno skup točaka (x, y) oblika $y = \frac{1}{x}$, ima standardnu jednadžbu. To se postiže rotacijom koordinatnog sustava oko točke O za $45°$ u pozitivnom smjeru.

Potrebno je uvesti novi koordinatni sustav. S x,y označene su osi polaznog koordinatnom sustava, a s $x^{'}$,$y^{'}$ osi rotiranog koordinatnog sustava.



Slika 1.2: Kartezijev koordinatni sustav



Slika 1.3: Kartezijev koordinatni sustav rotiran za 45°

U polaznom koordinatnom sustavu je koordinata x jednaka

$$x = r\cos(\phi + \varphi) = r\cos\phi\cos\varphi - r\sin\phi\sin\varphi,$$

dok je u novom koordinatnom sustavu jednaka $x' = r\cos\phi$. Za y koordinatu u polaznom sustavu vrijedi

$$y = r\sin(\phi + \varphi) = r\sin\phi\cos\varphi + r\cos\phi\sin\varphi,$$

a u novom koordinatnom sustavu je $y' = r\sin\varphi$. Kut za koji je rotiran polazni koordinatni sustav označen je sa ϕ, a kut φ označava kut koji proizvoljna točka T zatvara s x' osi.

Veza među kooridnatama proizvoljne točke T je:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

Obzirom da je polazni koordinatni sustav rotiran za 45° u pozitivnom smjeru dobije se:

$$x = x'\cos 45^\circ - y'\sin 45^\circ = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = x'\sin 45^\circ + y'\cos 45^\circ = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Potrebno je u jednadžbu $y = \frac{1}{x}$ uvrstiti dobivene koordinate:

$$x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' + y'\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{4}\left(x' + y'\right)\left(x' - y'\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(x')^2 - (y')^2\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2}{2} - \frac{(xy')^2}{2} = 1.$$

Dakle, dobivena krivulja je hiperbola. Zaključak je da je graf razlomljene linearne funkcije hiperbola.

Poglavlje 2

Utjecaj koeficijenata na graf racionalne funkcije

Ovo poglavlje osmišljeno je kao metodički priručnik koji nastavnici mogu koristiti u nastavi matematike pri obradi nastavnih sadržaja iz cjeline Racionalna funkcija. Kao takav je interaktivan te sadrži poveznice na aktivnosti u programu dinamične gometrije.

U srednjoj školi, ali i na višim razinama obrazovanja, učenici i studenti susreću se sa zadatcima čiji sastavni dio je skiciranje grafova. Očekuje se da samo skiciranje grafa, koji služi kao zorna pomoć, bude brzo, lako i rutinski. Dakle, nameće se potreba za temeljitom obradom teme transformacije grafova.

Učenici su kroz prethodne nastavne cjeline već imali prilike susresti se s transformacijama grafova određenih funkcija, no ovdje se postavlja pitanje može li se graf racionalne funkcije oblika $f(x) = \frac{k}{x-a} + b$ nacrtati transformacijom grafa racionalne funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$. U ovom poglavlju će se odgovoriti na to pitanje.

Promatraju se i geometrijske transformacije koje se koriste za crtanje grafova. Kod većine navedenih transformacija govori se o preslikavanjima ravnine: translaciji i osnoj simetriji, a dodatno se spominje kontrakcija ilI dilatacija u smjeru koordinatnih osi. Transformacije se izvode po koracima. U prvom se koraku preslikaju sve karakteristične točke neke krivulje (pri tome se misli na sjecišta ili dirališta s koordinatnim osima, točke ekstrema, tjemena, žarišta konika ili neke povoljno odabrane točke grafa). Nakon toga se povezuju točke iz prethodnog koraka glatkom linijom imitirajući početnu krivulju.

Crtanje grafa razlomljenje linearne funkcije oblika $f(x) = \frac{k}{x-a} + b$ provodi se u četiri koraka:

1. Crtanje grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$
2. Utjecaj koeficijenta k na graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x}$
3. Utjecaj koeficijenta a na graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x-a}$
4. Utjecaj koeficijenta b na graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x-a} + b$

2.1 Crtanje grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$

Ovu funkciju učenici susreću još u sedmom razredu osnovne škole, ali na implicitan način. Naime, pozitivni dio grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ odgovara grafičkom prikazu obrnute proporcionalnosti pri čemu je domena skup prirodnih brojeva jer najčešće predstavlja broj radnika ili strojeva koji obavljaju određeni posao. Ova elementarna funkcija je monotona, ali kada se govori o njenoj domeni, treba biti oprezan. Vrlo često se dogodi da učenici zanemaruju uvjet ove funkcije. Nazivnik ove funkcije mora biti različit od nule, odnosno domena ove funkcije je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Upravo iz tog uvjeta proizlazi činjenica da je vertikalna asimptota ove funkcije zapravo pravac $x = 0$. Također, koristeći tvrdnje spomenute u prethodnim poglavljima, ovoj se funkciji može odrediti i horizontalna asimptota:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^- \text{ i } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

iz čega se lako zaključi da je pravac $y = 0$ horizontalna je asimptota.

Uz ove dvije činjenice, učenici će graf racionalne funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ najlakše skicirati ucrtavanjem točaka u koordinatni sustav. No, skiciranje ove funkcije, ili bilo koje druge, učenicima, nepoznate funkcije, najjednostavnije je napraviti pomoću tablice vrijednosti. Sljedeća aktivnost opisuje jedan od načina kako to napraviti s učenicima.

AKTIVNOST: Crtanje grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$

Cilj aktivnosti: učenici će pomoću tablice vrijednosti funkcije, te koristeći tehnologiju, nacrtati graf racionalne funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$.

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku individualnog rada.

Nastavna metoda:

- **prema oblicima zaključivanja:** metoda rada na pripremljenom materijalu
- **prema izvorima znanja:** heuristička metoda.

Potreban materijal: nastavni listić, program dinamične geometrije

Detaljan tijek aktivnosti: Na početku aktivnosti učenicima je dovoljno podijeliti nastavne listiće na kojima se nalazi sljedeća tablica vrijednosti:

x	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	3	5	9	13	67	10000
$f(x)$										

Učenici popunjavaju tablicu računanjem traženih funkcijskih vrijednosti.

x	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	3	5	9	13	67	10000
$f(x)$	10	3	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{67}$	$\frac{1}{10000}$

Te je točke, potom, potrebno nacrtati u programu dinamične geometrije na unaprijed pripremljenom predlošku.
Predložak se nalazi na sljedećoj poveznici: https://www.geogebra.org/m/xndvj4wh.
Nakon što učenici učine to, potrebno ih je potaknuti na razmišljanje pitanjem:

- Je li dobiven graf funkcije? Može li se nacrtati?

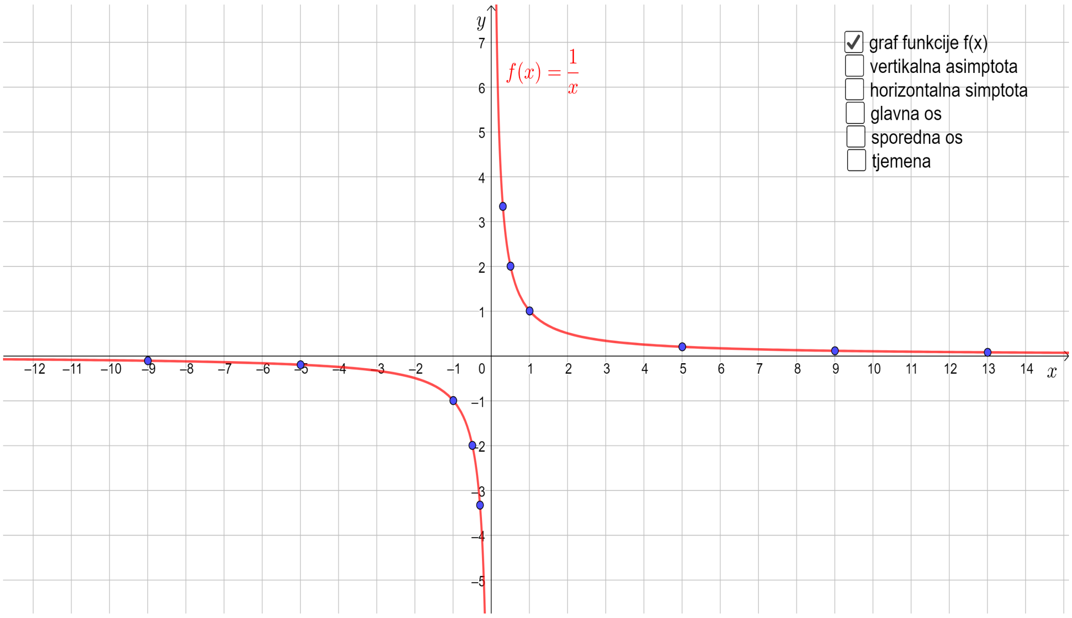
Učenici će na to odgovoriti da postoje neke točke grafa te funkcije i da je sada moguće skicirati graf funkcije. Također, postavlja se pitanje učenicima:

- Na što vas podsjeća taj graf funkcije? U kojem se kvadrantu nalazi?

Učenici će se sigurno prisjetiti grafa obrnute proporcionalnosti te ga povezati sa dobivenim grafom funkcije. Točke koje su nacrtane, odnosno, graf funkcije se nalazi u prvom kvadrantu. No, ovdje treba razjasniti s učenicima je li to onda graf funkcije ili samo dio grafa funkcije. Naime, učenicima je poznato kako temeljna racionalna funkcija ima uvjet koji ističe da u nazivniku ne smije biti nula, odnosno da je domena temeljne racionalne funkcije $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Gornjom tablicom nisu obuhvaćene negativne vrijednosti, odnosno brojevi koji se na brojevnom pravcu nalaze lijevo od nule.

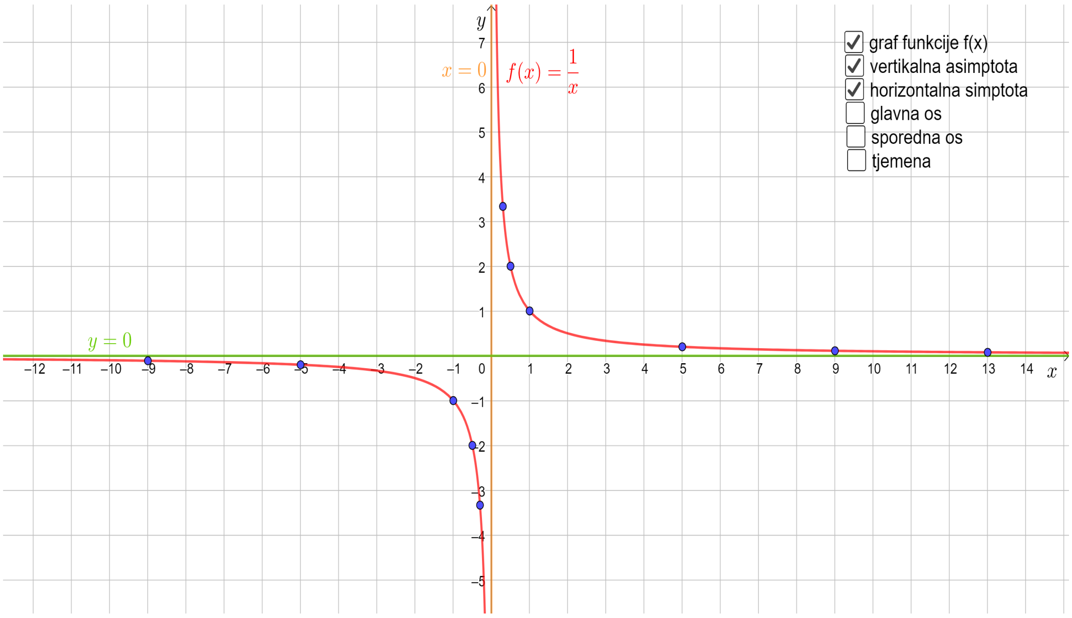
- Što biste dobili da se u tablici vrijednosti nalaze iste vrijednosti x, a s negativnim predznakom? Učinite to samostalno.

Nakon što učenici samostalno naprave drugu tablicu te uređene parove iz tablice nacrtaju u koordinatnom sustavu, učenike se pita što sada mogu uočiti. Oni će odgovoriti kako sada postoje točke koje pripadaju grafu funkcije $f(x)$. Da je to zaista tako, učenici mogu provjeriti klikom na potvrdni okvir „graf funkcije $f(x)$“. Time su nacrtali graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$.



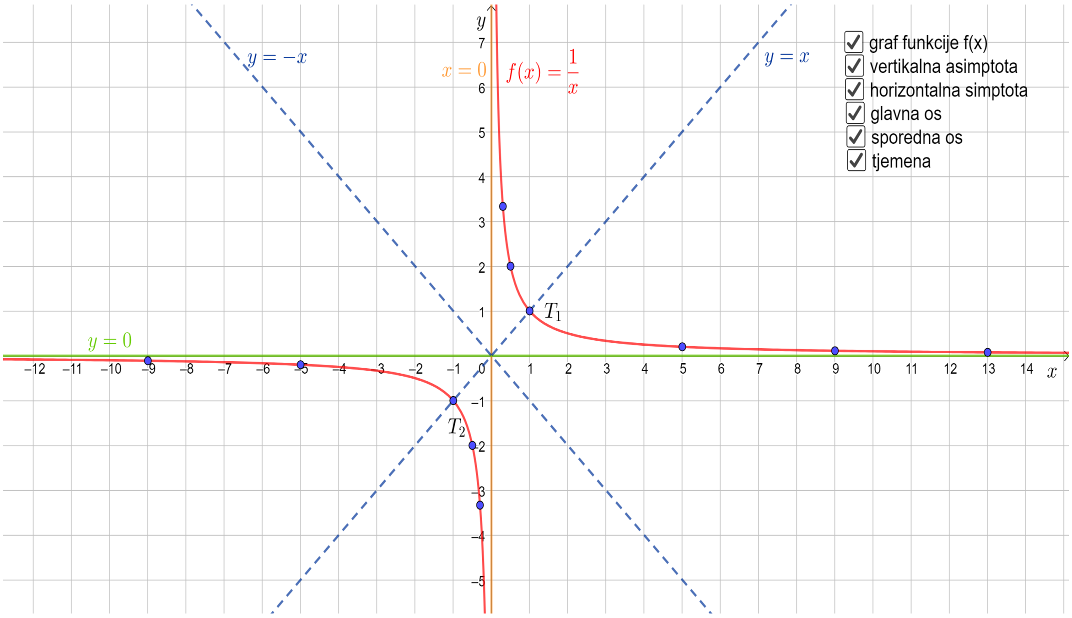
Slika 2.1: Graf temeljne racionalne funckije

Sada je poželjno s učenicima raspraviti o tome što zaključuju o funkciji na temelju grafa nacrtane funkcije. Uočit će kako se jasno vidi da funkcija nije definirana za $x = 0$, odnosno da je njena domena $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Također, povezat će to sa slikom funkcije i zaključiti da je slika funkcije $Im_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Povezujući s prethodnim, uočit će kako se graf funkcije približava koordinatnim osima, ali ih ne siječe, odnosno funkcija ima vertikalnu asimptotu $x = 0$ i horizontalnu asimptotu $y = 0$. Klikom na potvrdne okvire „vertikalna asimptota“ i „horizontalna asimptota“ u danom predlošku, učenicima će se istaknuti navedene asimptote.



Slika 2.2: Asimptote temeljne racionalne funkcije

Nadalje bi bilo dobro s učenicima raspraviti na što ih sada graf temeljne racionalne funkcije podsjeća. Obzirom na istaknute asimptote, učenici će lako zaključiti da se radi o hiperboli. Također, primijetit će da je ovo „rotirana" hiperbola. U tom slučaju, postavljanjem pitanja, treba utvrditi kako se glavna os hiperbole nalazi na pravcu $y = x$, a sporedna na pravcu $y = -x$. Tjemena hiperbole se nalaze na presjeku gore spomenutih pravaca i grafa krivulje od kojih se jedna nalazi u I., a druga u III. kvadrantu. Kada se spomene simetričnost, iz nacrtanog se jasno vidi kako je graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, odnosno graf hiperbole, osno simetričan s obzirom na pravce $y = x$ i $y = -x$. Time je analiziran graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ te su učenici sada u mogućnosti samostalno skicirati graf spomenute funkcije.



Slika 2.3: Graf temeljne racionalne funckije

2.2 Utjecaj koeficijenta k na graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x}$

AKTIVNOST: Utjecaj koeficijenta k na graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x}$

Cilj aktivnosti: učenici će pomoću programa dinamične geometrije otkriti vezu između grafova funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \frac{3}{x}$.

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku individualnog rada.

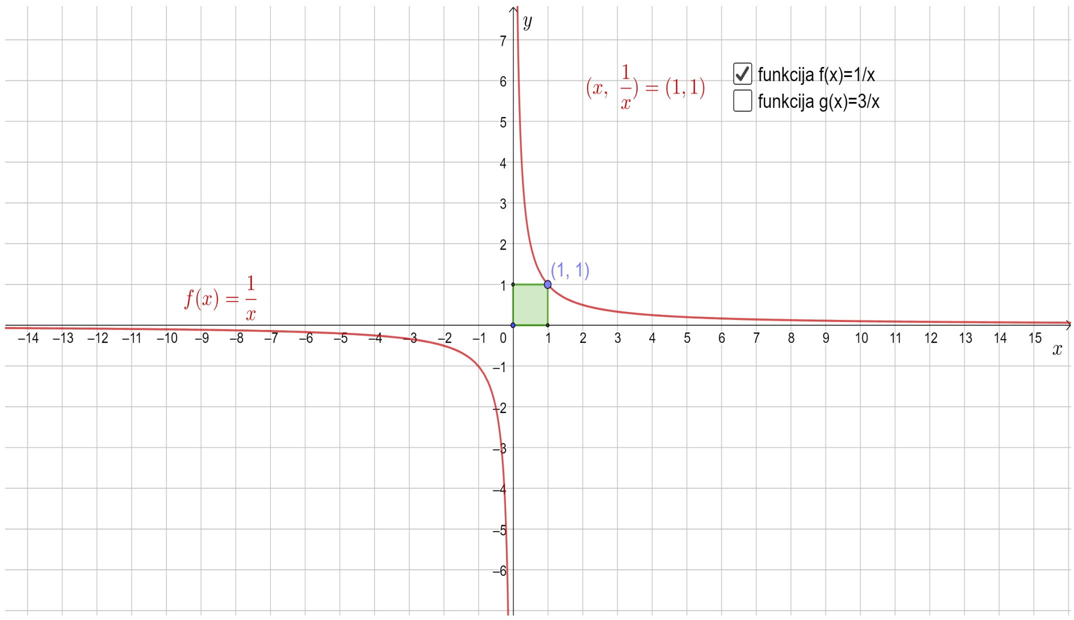
Nastavna metoda:

- **prema oblicima zaključivanja:** metoda rada na pripremljenom materijalu
- **prema izvorima znanja:** heuristička metoda.

Potreban materijal: program dinamične geometrije

Detaljan tijek aktivnosti: Na početku aktivnosti, učenicima je postavljen sljedeći zadatak:

Zadatak: Odredite sve pravokutnike kojima je površina jednaka 1.
Uz taj zadatak učenicima je potrebno dati uputu da stranice pravokutnika označe sa x i y. Gotovo je sigurno da će učenici početi razmišljati od formule za površinu pravokutnika. Uvažavajući danu uputu, zaključit će kako je površina takvog pravokutnika jednaka $P = xy$, no prema uvjetu zadatka slijedi da je ta površina jednaka $xy = 1$. Algebarskom transformacijom se dobije da je $y = \frac{1}{x}$, a upravo je to jednadžba temeljne racionalne funkcije. Učenici će zaključiti da su to svi pravokutnici čija duljina jedne stranice iznosi x, a druge $\frac{1}{x}$. No, učenike je potrebno potaknuti na razmišljanje postavljanjem pitanja kako te pravokutnike mogu prikazati u koordinatnom sustavu uzimajući u obzir racionalnu funkciju. Zaključit će kako će se jedna točka tog pravokutnika nalaziti na grafu funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, a stranice pravokutnika će se nalaziti na koordinatnim osima. Potom se učenici u unaprijed pripremljenom predlošku dinamične geometrije u isto mogu uvjeriti. Poveznica: https://www.geogebra.org/m/htczwfbz.



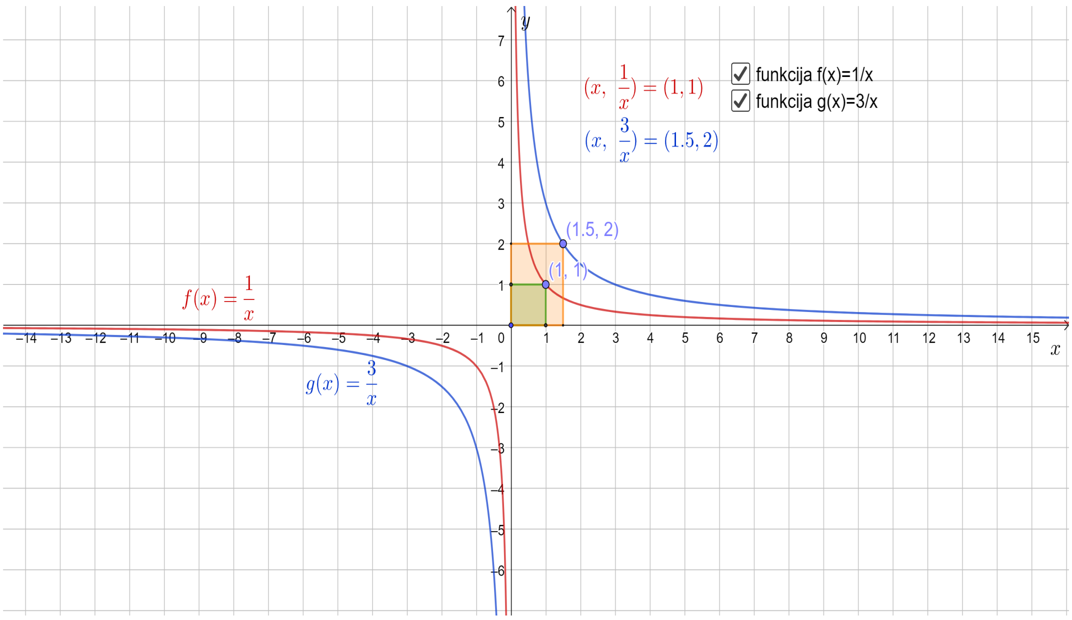
Slika 2.4: Kvadrat površine 1

Zatim, se postavlja sljedeći zadatak učenicima:

Zadatak: Odredite sve pravokutnike kojima je površina jednaka 3.

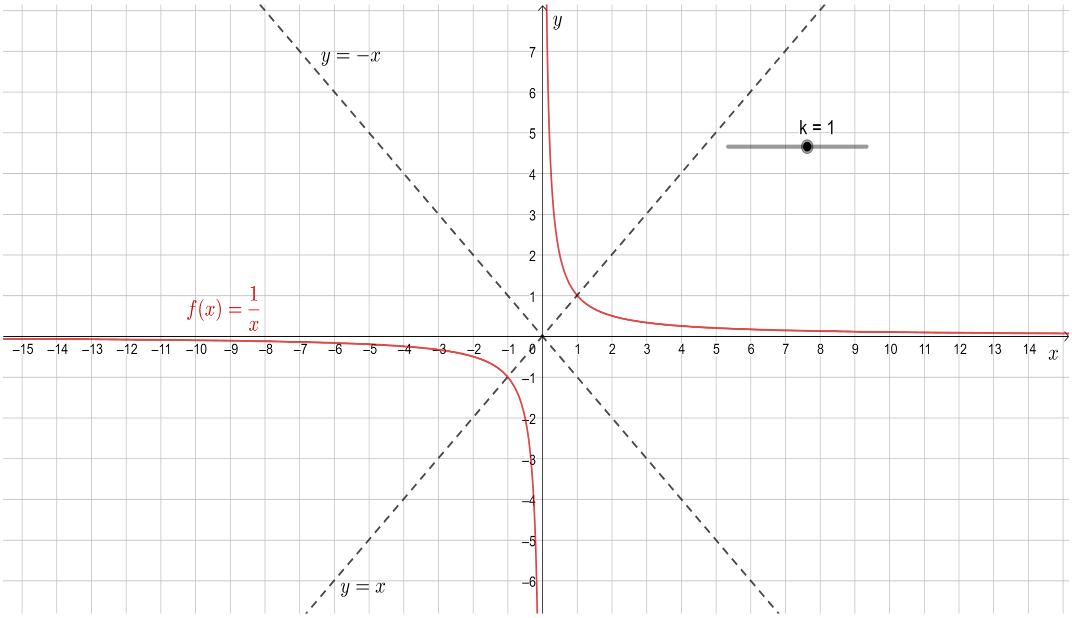
Analogno prethodnom, učenici će zaključiti kako vrijedi $xy = 3$, odnosno $y = \frac{3}{x}$. Sada će se jedna točka tog pravokutnika nalaziti na grafu funkcije $g(x) = \frac{3}{x}$, a susjedne stranice na koordinatnim osima. Isto mogu provjeriti u danom predlošku dinamične geometrije.

Učenici zatim trebaju uočiti razliku između grafa funkcije $f(x)$ i $g(x)$. Učenici samostalno razmišljaju kako to mogu napraviti. Zaključuju kako dani pravokutnici imaju jednu stranicu istih duljina, razlikuju se u duljini druge stranice. Pravokutnik čiji jedan vrh leži na grafu funkcije $f(x)$ imat će stranicu duljine $\frac{1}{x}$, a pravokutnik čiji jedan vrh leži na grafu funkcije $g(x)$ imate će stranicu duljine $\frac{3}{x}$. Također, uočit će kako je stranica drugog pravokutnika tri puta dulja od stranice prvog pravokutnika. Učenike se pita kako to utječe na izgled grafa. Zaključit će kako vrijedi $g(x) = 3 \cdot f(x)$.



Slika 2.5: Kvadrat površine 3

Uz pomoć nastavnika, učenici će zaključiti da se radi o rastezanju ili dilataciji grafa funkcije u smjeru osi x. Dakle, graf funkcije $g(x) = k \cdot f(x)$ nastaje rastezanjem ili dilatacijom grafa funkcije $f(x)$ k puta u smjeru osi x, pri čemu je $k \neq 0$.
Sada je potrebno učenicima podijeliti drugi, unaprijed pripremljeni predložak u programu dinamične geometrije. Poveznica:https://www.geogebra.org/m/ydkuuyhj. U predlošku je zadan klizač $k \neq 0$ i graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x}$. Učenici će samostalnim pomicanjem klizača otkriti na koji način se mijenja graf temeljne racionalne funkcije u ovisnosti o koeficijentu k.



Slika 2.6: Graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x}$

Pomicanjem klizača u desno, odnosno za $k > 0$, hiperbola je smještena u I. i III. kvadrantu. Presjek pravca $y = x$ i hiperbole su točke tjemena dane krivulje. Pomicanjem klizača u lijevo, za $k < 0$, hiperbola je smještena u II. i IV. kvadrantu. Presjek pravca $y = -x$ i hiperbole su tjemena dane hiperbole. Promatrajući hiperbolu za $k > 0$ i $k < 0$ zaključuje se da je osno simetrična s obzirom na pravce $y = x$ i $y = -x$.

2.3 Utjecaj koeficijenta a na graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x-a}$

AKTIVNOST: Utjecaj koeficijenta a na graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x-a}$

Cilj aktivnosti: učenici će pomoću programa dinamične geometrije otkriti utjecaj koeficijenta a na graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x-a}$.

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku individualnog rada.

Nastavna metoda:

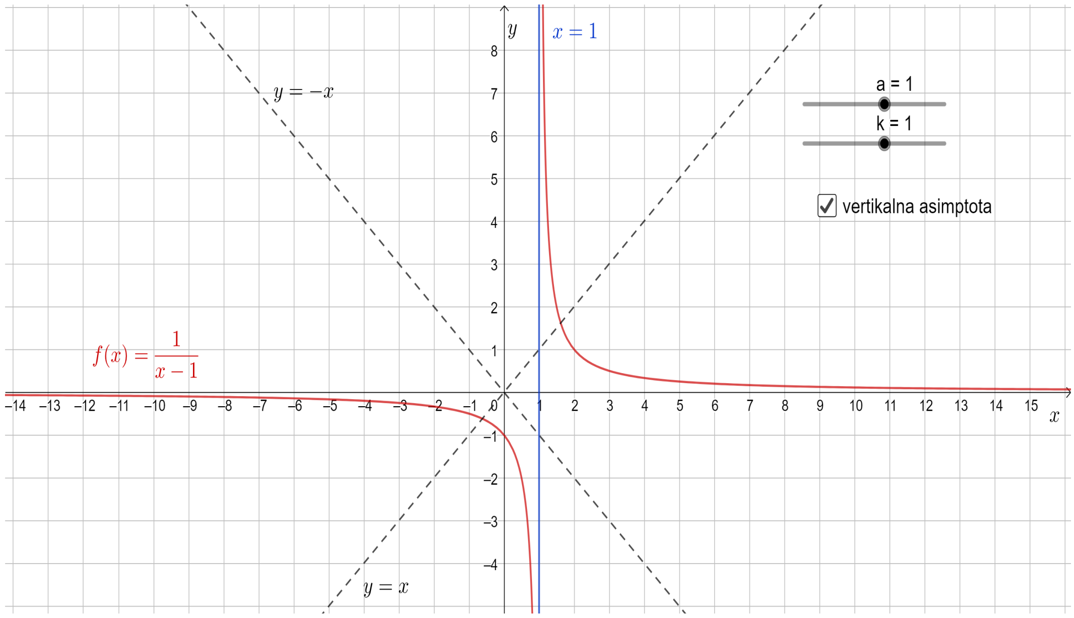
- **prema oblicima zaključivanja:** metoda rada na pripremljenom materijalu
- **prema izvorima znanja:** heuristička metoda.

Potreban materijal: program dinamične geometrije

Detaljan tijek aktivnosti:
Učenici su već dobro upoznati s grafom temeljne racionalne funkcije. Zadaje im se da u svoje bilježnice nacrtaju graf spomenute funkcije, a potom taj graf pomaknu za 4 jedinice u desno. Pitanje je kako glasi jednadžba te hiperbole.

Hiperbola se pomiče tako da se pomiču točke hiperbole. Odabire se nekoliko proizvoljnih točaka, pomiče ih se u desno te se skicira nova hiperbola kroz dobivene točke. Zajedno s učenicima se raspravlja kako glasi jednadžba pomaknute hiperbole. Učenici će se prisjetiti nastavnih sadržaja iz nastavne cjeline Kvadratna funkcija: graf funkcije $f(x) = a(x - x_0)^2$ je parabola koja se dobije pomakom grafa funkcije $f(x) = ax^2$ u smjeru osi x za x_0. Dakle, učenicima je poznato da se oduzimanjem određene vrijednosti od argumenta funkcije x, graf funkcije pomiče duž osi x. Zaključak je da jednadžba grafa nove funkcije jednaka $g(x) = \frac{1}{x-4}$.
Učenici to provjeravaju računski, uvrštavanjem koordinata povoljnih točaka.

Preostaje donijeti sveopći zaključak. Učenicima se podijeli unaprijed pripremljeni predložak u programu dinamične geometrije.
Poveznica: https://www.geogebra.org/m/cpcacpbd.



Slika 2.7: Graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x-a}$

Sada će učenici moći samostalno zaključiti o ponašanju grafa funkcije s obzirom na promjenu koeficijenta a. Pomicanjem klizača u desno, za $a > 0$, funkcija će se translatirati u desno, a za $a < 0$ funkcija će se translatirati u lijevo. Dakle, graf funkcije $g(x) = f(x+a)$ dobiva se translacijom ili pomakom grafa funkcije $f(x)$ u smjeru osi x za $|a|$. Ako je $a > 0$, tada se graf translatira duž osi x u lijevo, a ako je $a < 0$ graf se translatira u desno.

No, ovdje je važno komentirati i vertikalnu asimptotu funkcije. Klikom na potvrdni okvir „vertikalna asimptota" u danom predlošku, pojavit će se vertikalna asimptota dane funkcije. Sada se opet ostavlja učenicima da samostalno istraže pomicanje asimptote u odnosu na mijenjanje koeficijenta a. Može ih se pitati i za koliko se pomaknula asimptota funkcije koju su crtali u svoje bilježnice. Odgovorit će da je vertikalna asimptota translatirana za 4 jedinice u desno. Također, učenici znaju da racionalna funkcija ima vertikalnu asimptotu u nultočki nazivnika. Bez većih poteškoća će zamijetiti kako se pomicanjem grafa temeljne racionalne funkcije za $|a|$ u smjeru osi x, pomiče vertikalna asimptota funkcije. Dakle, kod transformacije grafa funkcije ne transformira se samo graf već i asimptote tog grafa.

2.4 Utjecaj koeficijenta b na graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x-a} + b$

AKTIVNOST: Utjecaj koeficijenta b na graf funkcije $f(x) = \frac{k}{x-a} + b$

Cilj aktivnosti: učenici će pomoću programa dinamične geometrije otkriti utjecaj koeficijenta b na crtanje grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x-a} + b$.

Nastavni oblik: diferencirana nastava u obliku individualnog rada.

Nastavna metoda:

- **prema oblicima zaključivanja:** metoda rada na pripremljenom materijalu
- **prema izvorima znanja:** heuristička metoda.

Potreban materijal: program dinamične geometrije

Detaljan tijek aktivnosti: I ova aktivnost započinje kao i prethodna. Učenicima je zadano da u svoje bilježnice nacrtaju graf temeljne racionalne funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, a potom graf te iste funkcije pomaknu za 5 jedinica prema dolje. Postupak crtanja isti je kao i u prethodnom: odaberu se povoljne točke na grafu funkcije $f(x)$, iste se „pomaknu“ za 5 jedinica prema dolje te se skicira hiperbola kroz translatirane točke. Sada se učenicima ostavlja na razmišljanje kako glasi jednadžba novodobivene funkcije. Prisjećajući se nastavnih sadržaja iz nekih prethodnih nastavnih cjelina, u kojima su također vršili transformacije grafa zaključit će kako jednadžba nove funkcije glasi $g(x) = \frac{1}{x-5}$.

Preostaje donijeti sveopći zaključak. S učenicima se podijeli unaprijed pripremljeni predložak u programu dinamične geometrije.

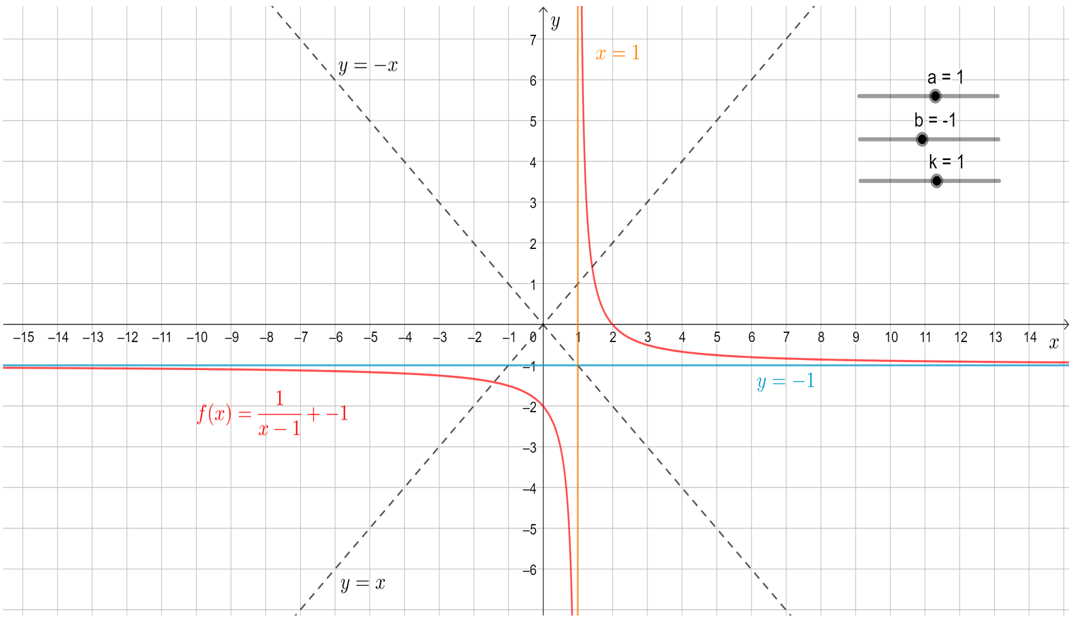
Poveznica: https://www.geogebra.org/m/zckthtkc .

U programu dinamične geometrije zadan je klizač s koeficijentom b. Pomicanjem klizača učenici će uočiti kako se funkcija translatira prema gore ili dolje, odnosno translatira se duž osi y. Zornijim proučavanjem zaključuje se kako se graf temeljne racionalne funkcije za $b > 0$ pomiče u pozitivnom smjeru osi y, a za $b < 0$ u negativnom smjeru osi y. Dakle, za bilo koju funkciju, pa tako i racionalnu, vrijedi da ako se ordinati svake točke funkcije $f(x)$ pribroji konstanta b, dobivaju se točke grafa nove funkcije $g(x)$. Graf funkcije $g(x) = f(x) + b$ dobiva se translacijom ili pomakom grafa funkcije $f(x)$ duž osi y za $|b|$. Ukoliko je $b < 0$, tada se graf translatira prema dolje (u smjeru negativnog dijela y

osi), a ako je $b > 0$, onda se graf translatira prema gore (u smjeru pozitivnog dijela y osi).

Analogno prethodnom, može se proučavati pomicanje horizontalne asimptote u odnosu na pomicanje grafa racionalne funkcije. Kako se translatira graf funkcije, tako se translatira i horizontalna asimptota funkcije.

U zadanom predlošku zadan je klizač s koeficijentom k te klizač sa koeficijentom a. Učenici mogu pomicanjem klizača s koeficijentima a, k i b proučavati ponašanja grafa funkcije obzirom na različite vrijednosti spomenutih koeficijenata.



Slika 2.8: Graf temeljne racionalne funckije

Sve spomenuto do sada se može učiniti vrlo jednostavnim, što ono, u biti, i jest. No važan je dio obrazovanja svakog učenika. Korištenjem ovakvih primjera te poticanjem učenika na samostalno razmišljanje stvara se šira slika o pojmu te se učenike potiče na analogno razmišljanje.

Poglavlje 3

Projektni zadatak: Youngovo pravilo

Potreba za istraživanjem prirođena je svakom djetetu, a jednom kada se dijete potakne u tom procesu, obrazovanje i škola će postati ugodnije i opuštenije mjesto za rad. U obrazovanju se u posljednjih nekoliko godina veliki naglasak stavlja na važnost uvođenja istraživačkog elementa u nastavu na svim razinama obrazovanja. Jedan od rezultata takvog nastojanja je i projektna nastava. Prakticiranje projektne nastave pozitivno utječe na razvoj istraživačke, komunikacijske, organizacijske i kritičke sposobnosti. Iako svjetski trendovi daju prednost ovakvom tipu nastave, u našem obrazovnom sustavu on se teško implementira. Projektna nastava je zahtjevniji oblik rada, dijelom zbog vremena koje iziskuje dobra priprema iste, a dijelom zbog dobre organizacije i kvalitetnog uklapanja svih aktivnosti u predmetno-satni sustav. Stoga se vrlo često u našem, tradicionalnom obrazovnom sustavu, pribjegava „zadaćama projektnog tipa“. Takve zadaće mogu se lako pripremiti i uklopiti u nastavne teme.

U ovom poglavlju pripremljena je projektna zadaća koja povezuje dosadašnje učeničke spoznaje o crtanju grafa racionalne funkcije, ali je i ostavljen prostor za samostalno istraživanje i razmišljanje.

Primjena racionalne funkcije je široka, no ipak najčešći primjeri koji se pojavljuju su vezani za doziranje lijekova u medicini. Tako je u medicini poznato Youngovo pravilo koje govori o primjeni lijekova u dječjoj dobi. Naime, zbog osobitosti dječjeg organizma i razlike u funkcionalnoj zrelosti organskih sustava djeteta u odnosu na odrasle osobe, lijekove treba dozirati na poseban način. Jedno od pravila doziranja lijekova koristi dob odrasle osobe i dob djeteta kod izračuna. Dakle, ukoliko nam je poznato koju količinu lijeka odrasla osoba koristi te dob djeteta kojem je taj lijek potreban, koristeći Youngovo pravilo lako možemo izračunati količinu lijeka koju dijete smije primiti.

Projektni zadatak: Youngovo pravilo

Zadatak: Youngovo pravilo je pravilo po kojem se lijek namijenjen za odrasle osobe može primijeniti kod djece, a specifično je po tome što u svom izračunu koristi dob odrasle osobe i dob djece. Količina lijeka koju dijete smije primiti je umnožak količine lijeka koju odrasla osoba smije koristiti i starosti djeteta (u godinama) podijeljen sa zbrojem broja 12 i starosti djeteta (u godinama). Prikazano formulom:

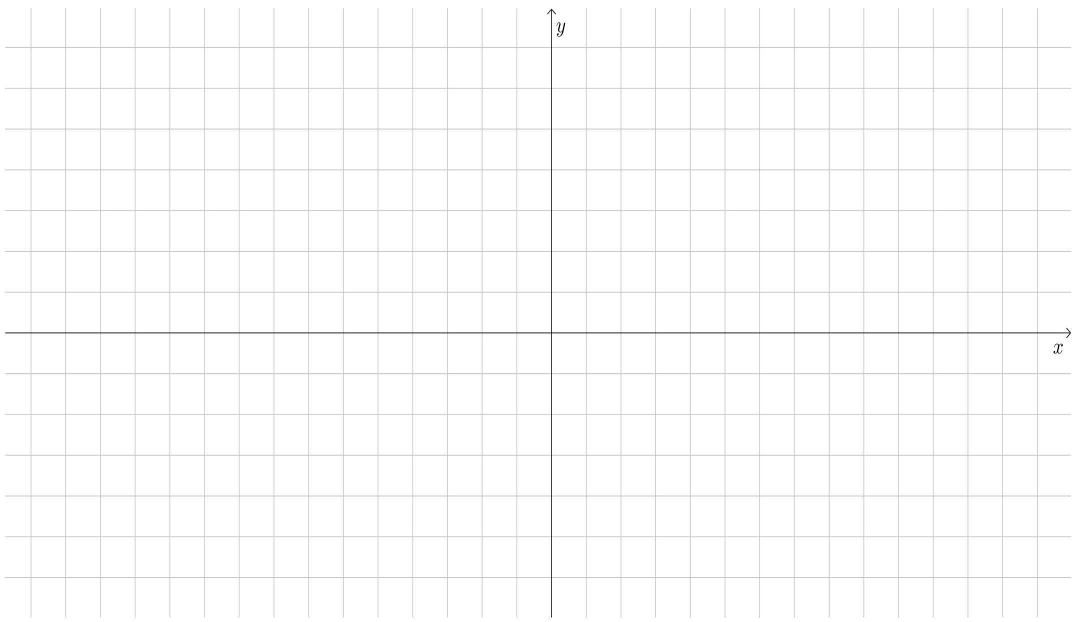
$$y(x) = \frac{ax}{x + 12}$$

gdje je $y(x)$ količina lijeka koju dijete smije primiti, a količina lijeka koju odrasla osoba smije primiti, a x starost djeteta izražena u godinama.

Proučavajući ovaj primjer primjene racionalne funkcije u medicini, proučavaju se i određena svojstva racionalne funkcije.

a) Za početak, neka količina lijeka za odrasle osobe bude 325 mg. Zapišite kako sada glasi Youngovo pravilo za ovaj lijek.

b) Nacrtajte graf ove racionalne funkcije. Razmislite, koje jedinične dužine ćete koristiti na koordinatnim osima?



Domena

c) Ponekad je teško odabrati jedinične dužine na koordinatnim osima tako da na skici bude nacrtan čitav graf tražene funkcije. U tome pomaže domena funkcije. Što je domena funkcije? Raspravite o domeni funkcije izvan danog konteksta i u danom kontekstu.

d) Na grafu funkcije uočite što se događa s grafom funkcije kada je $x = -12$? U programu dinamične geometrije pomoću alata možete nacrtati graf dane funkcije te prilagodite prozor kako biste uočili što se događa.

e) Možda ćete primijetiti kako graf funkcije čini „skok“ u toj točki. Istražite što „skok“ označava. Što uzrokuje taj „skok“? Objasnite.

Asimptote

Asimptota funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost između točke na grafu i točke tog pravca teži k nuli kada točka na grafu odmiče u beskonačnost. Taj pravac se približava krivulji kako točka na grafu odmiče u beskonačnost, ali je nikada neće dotaknuti ili presjeći. Asimptote mogu biti vertikalne, horizontalne i kose. U ovom slučaju, pravac $x = -12$ asimptota je dane funkcije. Dakle, jedna asimptota je pronađena.

Vertikalne asimptote

f) Asimptota pronađena u prethodnom koraku je vertikalna asimptota. Što mislite, kako se mogu naći vertikalne asimptote racionalne funkcije? Zašto je to vertikalna asimptota? Komentirajte to u danom kontekstu.

Horizontalne/kose asimptote

Racionalna funkcija ima kosu ili horizontalnu asimptotu.

g) Promotrite graf dane funkcije. Ima li dana racionalna funkcija horizontalnu asimptotu? Ako da, kako se to može provjeriti računski?

h) Skicirajte asimptotu funkcije. Razmislite što ova asimptota predstavlja u kontekstu danog problema.

i) Koju količinu lijeka može primiti dijete od 6 godina starosti? Kako ste to zaključili?

j) Koju količinu lijeka može primiti osoba od 18 godina starosti? Kako ste to zaključili?

k) Koju količinu lijeka će primiti dijete starosti 6 mjeseci?

l) Kada će dijete moći primiti istu količinu lijeka kao i odrasla osoba? Objasnite.

Sada u programu dinamične geometrije u istom predlošku nacrtajte funkciju $g(x) = \frac{225x}{x+12}$.

m) Gdje se nalaze asimptote? Što one označuju?

n) Koja je količina lijeka predviđena za odrasle osobe u ovom slučaju?

o) Možete li bez crtanja grafa funkcije $g(x)$ odrediti horizontalnu asimptotu? Kako? Što asimptota označava u kontekstu ovog problema?

Kodomena

p) Promotrite graf funkcije $y(x) = \frac{325x}{x+12}$. Što je kodomena ove funkcije?

r) Protumačite što kodomena označava u kontekstu danog problema.

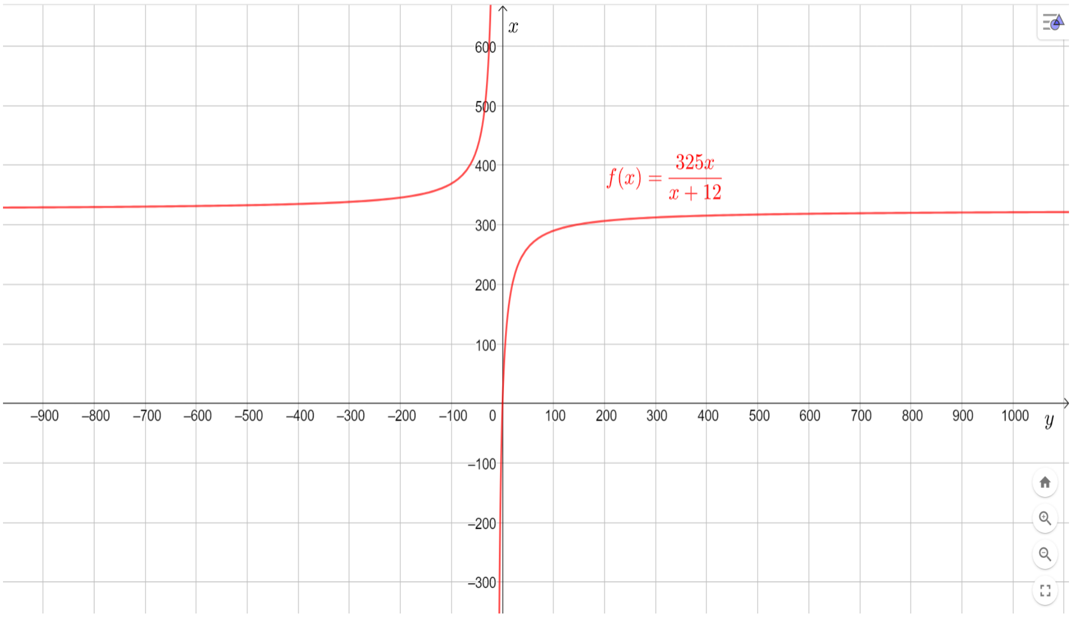
s) Što kodomena racionalnih funkcija označava općenito?

Rješenje:

a) Za početak, neka količina lijeka za odrasle osobe bude 325 mg. Zapišite kako sada glasi Youngovo pravilo za ovaj lijek.

$y(x) = \frac{325x}{x+12}$

b) Nacrtajte graf ove racionalne funkcije. Razmislite, koje jedinične dužine ćete koristiti na koordinatnim osima?



Domena

c) Ponekad je teško odabrati jedinične dužine na koordinatnim osima tako da na skici bude nacrtan čitav graf tražene funkcije. U tome pomaže domena funkcije. Što je domena funkcije? Raspravite o domeni funkcije izvan danog konteksta i u danom kontekstu.

Domena funkcije je skup brojeva na kojem je funkcija zadana, odnosno domenu čini skup brojeva za koje je funkcija definirana. U danom kontekstu, domenu funkcije čini skup pozitivnih realnih brojeva jer x označava dob djeteta, a zna se kako je to uvijek pozitivna vrijednost. Dakle, domena ove funkcije je $D_f = \langle 0, +\infty\rangle$. Promatrajući domenu izvan konteksta, poznato je kako u nazivniku racionalne funkcije ne može biti nula, odnosno kako se u domeni ne nalaze nultočke polinoma u nazivniku racionalne funkcije pa je tada domena jednaka $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-12\}$.

d) Na grafu funkcije uočite što se događa s grafom funkcije kada je $x = -12$? U programu dinamične geometrije pomoću alata možete nacrtati graf dane funkcije te prilagoditi prozor kako biste uočili što se događa.

U točci $x = -12$ se ne može očitati vrijednost funkcije. Graf funkcije se neprekidno približava pravcu $x = -12$.

e) Možda ćete primijetiti kako graf funkcije čini „skok“ u toj točki. Istražite što „skok“ označava. Što uzrokuje taj „skok“? Objasnite.

U točci $x = -12$ graf funkcije se neprekidno približava pravcu $x = -12$. Zaključuje se kako funkcija nije neprekidna. Proučavajući domenu funkcije izvan danog konteksta zaključuje se kako funkcija nije definirana u toj točci pa će u točkama u kojima nije definirana imati asimptote.

Asimptote

Asimptota funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost između točke na grafu i točke tog pravca teži k nuli kada točka na grafu odmiče u beskonačnost. Taj pravac se približava krivulji kako točka na grafu odmiče u beskonačnost, ali je nikada neće dotaknuti ili presjeći. Asimptote mogu biti vertikalne, horizontalne i kose. U ovom slučaju, pravac $x = -12$ asimptota je dane funkcije. Dakle, jedna asimptota već je pronađena.

Vertikalne asimptote

f) Asimptota pronađena u prethodnom koraku je vertikalna asimptota. Što mislite, kako se mogu naći vertikalne asimptote racionalne funkcije? Zašto je to vertikalna asimptota? Komentirajte to u danom kontekstu.

Vertikalne asimptote je moguće pronaći promatrajući domenu funkcije. U slučaju racionalne funkcije u domeni se neće nalaziti nultočke polinoma u nazivniku pa će se u tim točkama nalaziti vertikalne asimptote funkcije. Promatrajući vrijednosti funkcije u blizini točke prekida, može se zaključiti kako će pravac $x = a$ biti vertikalna asimptota funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ s lijeva ukoliko vrijedi $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ili $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, odnosno vertikalna asimptota s desna ako vrijedi $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ili $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$. Ukoliko je pravac $x = a$ vertikalna asimptota i s lijeva i s desna, tada se govori o obostranoj asimptoti.

Horizontalne/kose asimptote

Racionalna funkcija ima kosu ili horizontalnu asimptotu.

g) Promotrite graf dane funkcije. Ima li dana racionalna funkcija horizontalnu asimptotu? Ako da, kako se to može provjeriti računski?

Da, promatrajući graf funkcije $f(x)$ zaključuje se kako dana funkcija ima horizontalnu asimptotu. Pravac $y = b$ je horizontalna asimptota grafa funkcije $f(x)$ s lijeva ako je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, a desna ukoliko je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$. Ukoliko je taj pravac horizontalna asimptota i s lijeva i s desna, onda se govori o horizontalnoj asimptoti.

h) Skicirajte asimptotu funkcije. Razmislite što ova asimptota predstavlja u kontekstu danog problema.

Horizontalna asimptota ove funkcije je $y = 325$. *Količina lijeka koju dijete smije primiti nikada neće biti jednaka količini lijeka koju odrasla osoba može primiti.*

i) Koju količinu lijeka može primiti dijete od 6 godina starosti? Kako ste to zaključili?

Računa se: $f(x) = \frac{325x}{x+12}$ *za* $x = 6$*:* $f(6) = \frac{325 \cdot 6}{6+12} = \frac{1950}{18} = \frac{325}{3}$.
Dakle, dijete od 6 godina starosti može primiti količinu lijeka od $\frac{325}{3}$ *mg. To je izračunato uvrštavanjem vrijednosti* $x = 6$ *u formulu racionalne funkcije, no moglo se i očitati na grafu.*

j) Koju količinu lijeka može primiti osoba od 18 godina starosti? Kako ste to zaključili?

Računa se: $f(x) = \frac{325x}{x+12}$ *za* $x = 18$*:* $f(18) = \frac{325 \cdot 18}{18+12} = \frac{5850}{30} = 195$. *Dakle, osoba od 18 godina starosti može primiti* 195 *mg danog lijeka. To je izračunato uvrštavanjem vrijednosti* $x = 18$ *u formulu racionalne funkcije, no moglo se i očitati na grafu.*

k) Koju količinu lijeka će primiti dijete starosti 6 mjeseci?

Računa se: $f(x) = \frac{325x}{x+12}$ *za* $x = 0.5$*:* $f(0.5) = \frac{325 \cdot 0.5}{0.5+12} = \frac{162.5}{12.5} = 13$. *Dakle, dijete od 6 mjeseci starosti može primiti* 13 *mg danog lijeka. To je izračunato uvrštavanjem vrijednosti* $x = 0.5$ *u formulu racionalne funkcije, no moglo se i očitati na grafu.*

l) Kada će dijete moći primiti istu količinu lijeka kao i odrasla osoba? Objasnite.

Postoji zanimanje za koji x će vrijediti $\frac{325x}{x+12} = 325$. *No, uočava se da ne postoji x za koji će vrijediti dana jednadžba. Promatrajući graf funkcije, primjećuje se da vrijednosti funkcije neprekidno približavaju pravcu* $y = 325$ *te ga nikada neće dotaknuti i presjeći. Dakle, prema grafu ove funkcije dijete nikada neće moći koristiti istu količinu lijeka kao i odrasla osoba. Napomena: Youngovo pravilo primjenjuje se do određene starosti djeteta, no to nije relevantno za ovaj zadatak.*

Sada u programu dinamične geometrije u istom predlošku nacrtajte funkciju $g(x) = \frac{225x}{x+12}$.

m) Gdje se nalaze asimptote? Što one označuju?

Vertikalna asimptota nalazi se u točci $x = -12$. U toj točci funkcija $g(x)$ nije definirana.

n) Koja je količina lijeka predviđena za odrasle osobe u ovom slučaju?

Količina lijeka predviđena za odrasle osobe u ovom slučaju je 225 mg.

o) Možete li bez crtanja grafa funkcije $g(x)$ odrediti horizontalnu asimptotu? Kako? Što asimptota označava u kontekstu ovog problema?

Da, horizontalna asimptota je pravac $y = 225$. Funkcijske vrijednosti će se približavati tom pravcu, ali ga neće dotaknuti ili presjeći. U kontekstu ovog zadatka to znači kako dijete nikada neće moći koristiti istu količinu lijeka kao i odrasla osoba. Napomena: Youngovo pravilo primjenjuje se do određene starosti djeteta.

Kodomena

p) Promotrite graf funkcije $y(x) = \frac{325x}{x+12}$. Što je kodomena ove funkcije?

Kodomenu ove funkcije čini skup $K_f = \mathbb{R} \setminus \{325\}$.

r) Protumačite što kodomena označava u kontekstu danog problema.

Kodomena u kontekstu ovog problema razlikuje se od kodomene funkcije određene u dijelu p). Uzimajući u obzir kontekst kodomena funkcije f je $K_f = \langle -\infty, 325\rangle$.

s) Što kodomena racionalnih funkcija označava općenito?

Kodomena je područje vrijednosti funkcije, odnosno skup u kojem funkcija poprima vrijednosti.

Bibliografija

[1] S. Antoliš, A. Copić, *Matematika 4, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije, II. polugodište*, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[2] F. M. Brueckler, *Povijest matematike I. i II.*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2007.

[3] B. Čulina, S. Vitaljić, *Pojam funkcije u nastavi matematike*, Poučak, 59 (2014.), 22-30.

[4] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, dodatak za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element d.o.o., Zagreb, 2006.

[5] M. Kabić, *O problemu obrade grafova funkcija i krivulja u nastavi četverogodišnjih srednjih škola*, MiŠ, 50 (2009.), 224-230.

[6] Ministarstvo znanosti i obrazovanja RH, *Kurikulum za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*, Zagreb, 2019.

[7] B. Pavković, B. Dakić, *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[8] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[9] P. Urban, D. Martin, *Mathematics for the International Student: IB Diploma HL Core*, Haese and Harris Publications, 2008.

Sažetak

U ovom diplomskom radu obrađena je racionalna funkcija u nastavi matematike. To je elementarna funkcija koja je dio kurikula za nastavni predmet matematika u srednjoj školi, ali pomalo zapostavljena u nastavi. Obrađen je pojam racionalne funkcije te njena svojstva počevši od obrnute proporcionalnosti do funkcije s kvadratnim izrazom u brojniku i nazivniku. Posebno je istražen utjecaj koeficijenata na graf pripadne funkcije te su izrađeni metodički materijali pomoću kojih učenici mogu samostalno, ali i uz pomoć programa dinamične geometrije, istraživati svojstva racionalnih funkcija. Na kraju, dan je projektni zadatak koji objedinjuje sve spoznaje o svojstvima racionalne funkcije, ali i prikazuje primjenu iste u medicini.

Summary

In this master's thesis, the rational function in the teaching of mathematics is treated. It is the elementary function that is part of the curriculum for the subject of mathematics in high school, however it is somewhat neglectedin teaching. The notion of a rational function and its properties are processed, starting from inverse proportionality to a function with a square expression in a denominator. The influence of coefficients on the graph of the corresponding function was especially investigated, and methodological materials were developed with which students can independently, but also with the help of dynamic geometry programs, investigate the properties of a rational function. Finally, a project task is given that brings together all the knowledge about the properties of a rational function, but also shows the application of the same in medicine.

Životopis

Rođena sam 7. studenog 1996. godine u Zagrebu. Svoje obrazovanje započela sam 2003. godine u Osnovnoj školi Ivana Granđe u Soblincu. Srednjoškolsko obrazovanje započela sam 2011. godine u Gimnaziji Sesvete, pohađajući smjer opće gimnazije. U razdoblju srednjoškolskog obrazovanja, sudjelovala sam na državnom natjecanju iz povijesti u kategoriji samostalnih istraživačkih radova. Svoje visokoškolsko obrazovanje započela sam 2015. godine upisujući preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu te sam 2019. godine stekla akademski naziv sveučilišne prvostupnice edukacije matematike (univ. bacc. educ. math.). Potom sam iste godine upisala diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Tijekom mog visoko školskog obrazovanja, objavljen je članak "Matematička indukcija" u časopisu za metodiku i nastavu matematike "Poučak" koji sam pisala zajedno sa kolegicama. Svoju strast prema radu s djecom i poučavanju otkila sam u trogodišnjem volontiranju kao župni animator u svojoj župi. Također, tijekom studija, redovito sam davala instrukcije učenicima osnovnih i srednjih škola te sam volontirala na Danu karijera na PMF-u "WISe".