Cox-Ingersoll-Rossov model kamatnih stopa

Oguić, Matej

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Matej Oguić

COX-INGERSOLL-ROSSOV MODEL KAMATNIH STOPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
dr.sc. Vanja Wagner

Zagreb, 2021

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu je opisan Cox-Ingersoll-Rossov model kamatnih stopa. Teorija vjerojatnosti se dosta dugo koristi u financijskom modeliranju, a stohastičkim modelima se modeliraju mnogi bitni pojmovi iz svijeta financija kao što je i kamatna stopa. Kretanje kamatne stope direktno utječe na cijenu i prinos raznih financijskih instrumenata (obveznica, opcija, itd...), a kako investitori isključivo donose odluke o investiranju na temelju očekivanog prinosa financijskih instrumenata, procjena kamatne stope je od iznimne važnosti. CIR model opisuje kretanje kamatne stope na financijskom tržištu i on spada u jednofaktorske stohastičke modele što znači da na kamatnu stopu utječe samo jedan izvor rizika. CIR model je poopćenje Vasičekovog modela i smatra se jednim od najboljih jednofaktorskih vjerojatnosnih modela za modeliranje kamatne stope. U svijetu bankarstva se obično koriste višefaktorski modeli za procjenu kamatne stope. Ideja ovog rada je uvesti CIR model, opisati sva svojstva modela, usporediti ga s ostalim sličnim jednofaktorskim modelima poput Vasičekovog modela i na kraju izvesti cijenu diskontirane obveznice s obzirom na kamatnu stopu dobivenu CIR modelom. U prvom poglavlju su uvedeni osnovni pojmovi tržišta kapitala koje koristimo u ovom radu. Detaljnije je opisana obveznica kao financijski instrument i njena podjela te se uvodi pojam krivulje prinosa koji daje vezu između prinosa i vremena do dospijeća. U drugom poglavlju uvodi se stohastička diferencijalna jednadžba i Itôv integral te se definiraju svi pojmovi koji se kasnije koriste u objašnjavanju CIR modela. U trećem poglavlju uvode se difuzijski modeli i kao podvrsta njih i CIR model te se prezentiraju osnovna svojstva koje kamatna stopa ima u CIR modelu. Četvrto poglavlje sadrži izvod uvjetnog matematičkog očekivanja i varijance za kamatnu stopu u CIR modelu. U petom poglavlju se proučava diskontirana obveznica s obzirom na kamatnu stopu dobivenu CIR modelom i izvodi se jednadžba cijene te obveznice i prinos do dospijeća na diskontiranu obveznicu.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi tržišta kapitala

U ovom poglavlju cilj je definirati osnovne ekonomske pojmove koje ćemo susresti u ovom radu i obrazložiti čemu nam točno Cox-Ingersoll-Rossov (kraće CIR) model zapravo služi. Glavni instrumenti na financijskom tržištu su vrijednosni papiri kao što su obveznice ili dionice. Investitori žele uložiti novčana sredstva u sadašnjosti kako bi uz ta uložena sredstva dobili i premiju odnosno kamatu u budućnosti. Kamata je cijena držanja novca i glavni razlog zašto ljudi investiraju, naime ljudima je bitniji novac sada nego za dva, tri ili pet mjeseci, pa da bi ulaganje uopće imalo smisla uloženi se novac mora oplemeniti s nekom premijom. Stopa po kojoj se obračunava premija zove se kamatna stopa i ona je najbitnija varijabla koju modeliramo u ovom radu.
Kamatna stopa se sastoji od vrijednosti novca uvećane za inflaciju i kompenzaciju za rizik (vjerojatnost da druga strana neće biti u mogućnosti izvršiti svoju obvezu plaćanja). Jedan od osnovnih ciljeva na financijskom tržištu je modelirati kamatnu stopu, a preko kamatne stope kasnije modelirati i cijene raznih financijskih instrumenata kojima se trguje na financijskom tržištu (obveznica, dionica, opcija). U ovom radu mi ćemo samo promatrati obveznice kao instrument financijskog investiranja. Kako je modeliranje kamatne stope na financijskom tržištu od iznimne važnosti, a kamatna stopa uvelike ovisi o slučajnoj komponenti, sve se više proučava teorija vjerojatnosti i u sklopu nje stohastički modeli u financijama. Jedan od takvih modela je i CIR model kojeg ćemo detaljno analizirati u ovom radu.
Kamatnu stopu modeliramo dinamički kroz vrijeme i pomoću tog modela pokušavamo objasniti ponašanje financijskog tržišta i donijeti predikcije za financijske pojmove koje proučavamo.

1.1 Obveznice

Obveznica je dužnički vrijednosni papir u kojem se izdavatelj obveznice sa stalnim prihodom obavezuje na povrat posuđenih sredstava (glavnica obveznice) i plaćanje kamate (premija na posuđeni novac). Obveznice spadaju u instrumente stalnog plaćanja i njima se aktivno trguje na burzi. Izdavatelja vrijednosnog papira nazivamo dužnikom dok kupca vrijednosnog papira nazivamo vjerovnikom. Ovisno o tome isplaćuje li se kamata u vidu kupona ili ga ne isplaćuje nego se trguje s diskontom razlikujemo kuponske obveznice (koje još zovemo i normalnim obveznicama) i diskontne obveznice (eng. *zero-coupon bond*). Obveznice bez kupona se dijele i ovisno o tome izdaje li ih država (tzv. *T-bills*) ili tvrtka (tzv. komercijalni zapisi). Jedna od osnovnih karakteristika obveznice je prinos do dospijeća. Prinos do dospijeća varira ovisno o makroekonomskim uvjetima na financijskom tržištu - tako osamdesetih godina prošlog stoljeća prinos do dospijeća bio je iznimno visok, dok je on danas relativno malen. Prinos do dospijeća izjednačavamo s kamatnom stopom tako da vrijedi sljedeća jednadžba za cijenu obveznice:

$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C+G}{(1+r)^n}, \tag{1.1}$$

ili općenitije

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^i}, \tag{1.2}$$

gdje su:
C - vrijednost kupona
G - vrijednost glavnice
n - broj godina do dospijeća
C_i - iznos koji kupac obveznice dobiva u trenutnu i.
Za beskuponske obveznice je vrijednost kupona jednaka 0, ali se zato one trguju po nižim cijenama (odnosno uz diskont).

Obveznice se dijele prema:

- vremenu do dospijeća
  - kratkoročne (dospijeće do godine dana)
  - dugoročne (dospijeće više od godine dana)
- Instituciji koja izdaje vrijednosne papire
  - Državne

  - Korporativne
  - Municipalne

- prema stupnju rizika u rejting kategorije

Rejting agencije na financijskom tržištu kategoriziraju obveznice u rizične razrede, a najpoznatije među njima su S*tandard and Poor's*, *Moody* i *Flinch*.

1.2 Krivulja prinosa

Krivulja prinosa kamatne stope prikazuje vezu između prinosa i vremena do dospijeća. Nagib krivulje prinosa nam opisuje kakvo ponašanje kamatnih stopa možemo očekivati u budućnosti.
Krivulja prinosa može biti:

- Normalna
- Padajuća
- Neutralna
- Grbava

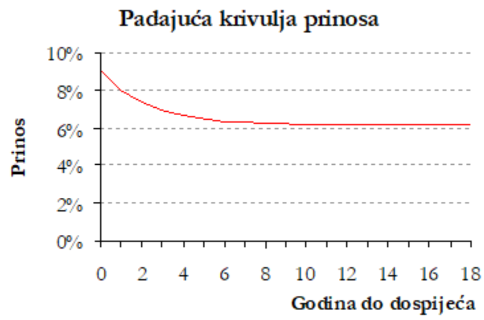
Normalna krivulja prinosa

Normalna krivulja prinosa je najčešći oblik krivulje prinosa na financijskom tržištu. Iz nagiba je očito da kratkoročne obveznice imaju manje prinose od dugoročnih obveznica, ova situacija opisuje razdoblje prosperiteta u ekonomiji, a razlog tome je što se dugoročne obveznice smatraju više rizičnima zbog veće ročnosti pa imaju i veći prinos.

Slika 1.1: Normalna krivulja prinosa

Padajuća krivulja prinosa

Kada je nagib krivulje prinosa padajući to sugerira da kratkoročne obveznice imaju veće prinose od dugoročnih. To je situacija kada su financijska tržišta u recesiji i investitori očekuju kako će u duljem vremenskom razdoblju doći do oporavka gospodarstva i sukladno tome su korigirani prinosi na obveznice.



Slika 1.2: Padajuća krivulja prinosa

Ravna krivulja prinosa

Ravna krivulja prinosa nastaje kada su prinosi na kratkoročne i dugoročne obveznice jednaki. Ova situacija u ekonomiji nije stabilna i ocrtava prijelazno razdoblje iz normalne krivulje u padajuću ili obratno.

Slika 1.3: Ravna krivulja prinosa

Grbava krivulja prinosa

Grbava krivulja prinosa je dosta rijedak scenarij u ekonomiji. Događa se kada financijski investitori očekuju da će u kratkom vremenu izrazito visoke kratkoročne kamatne stope naglo pasti.

Slika 1.4: Grbava krivulja prinosa

Poglavlje 2

Stohastičke diferencijalne jednadžbe

CIR model kamatnih stopa je model u kojem proces kamatnih stopa zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu. Stoga je cilj ovog poglavlja definirati sve elemente pomoću kojih možemo opisati stohastičke diferencijalne jednadžbe.

2.1 Brownovo gibanje

Brownovo gibanje je slučajni proces koji nam daje slučajnu komponentu u našem modelu.

Definicija 2.1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajan proces $B = (B_t, t \geq 0)$ je Brownovo gibanje ili Wienerov proces ako vrijedi:*

1. *putevi odnosno trajektorije $t \to B_t(\omega)$ su neprekidne funkcije sa $\mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}$.*
2. *$B_0 = 0$.*
3. *za sve $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m$ su prirasti*

$$B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0},\ B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

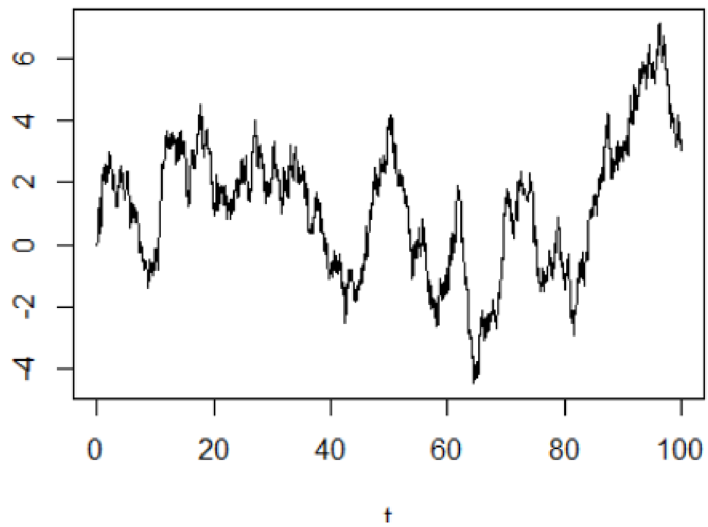
   su nezavisni.

4. *za sve $0 \leq s \leq t$ prirasti $B_t - B_s$ su normalno distribuirani sa očekivanjem 0 i varijancom $t - s$.*

Definicija 2.1.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $B = (B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje na tom vjerojatnosnom prostoru. Filtracija za Brownovo gibanje je familija $F = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ σ-algebri t.d.*

- *za sve $0 \leq s \leq t$ $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

- *za svaki* $t \geq 0$ B_t *je* $\mathcal{F}_t$*-izmjeriva.*
- *za sve* $0 \leq s \leq t$ *prirasti* $B_t - B_s$ *su nezavisni od* $\mathcal{F}_s$*.*



Slika 2.1: Trajektorija Brownovog gibanja

Definicija 2.1.3 (Martingal s neprekidnim vremenom)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor te neka je* $\mathrm{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *filtracija. Slučajni proces* $M = (M_t, t \geq 0)$ *je martingal s neprekidnim vremenom ako je:*

- M *je* F*-adaptiran.* [1].
- $\forall t \geq 0$ $\mathbb{E}[M_t] < \infty$.
- $\forall 0 \leq s \leq t$ $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ *g.s.*

Teorem 2.1.4. *Brownovo gibanje je martingal (s obzirom na filtraciju za Brownovo gibanje).*

[1]Proces $M = (M_t : t \geq 0)$ je adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathrm{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ ako je slučajna varijabla M_t $\mathcal{F}_t$-izmjeriva.

2.2 Itôv integral

Neka je $T \geq 0$, $H = (H_t : t \in [0,T])$ odgovarajući adaptiran slučajan proces te $B = (B_t : t \in [0,T])$ Brownovo gibanje. Želimo definirati Itôv integral $\int_0^T H_t dB_t$ i analizirati neka njegova svojstva. Itôv integral ne možemo definirati po trajektorijama kao što smo definirali Brownovo gibanje zbog toga jer je Brownovo gibanje slučajan proces neomeđene varijacije[2]. Stoga Itôv integral definiramo induktivno.

Itov integral za jednostavne integrande

Fiksirajmo pozitivno vrijeme $T > 0$. Neka je $B = (B_t : t \in [0,T])$ Brownovo gibanje, $\mathrm{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0,T])$ Brownovska filtracija i $H = (H_t : t \in [0,T])$ je slučajan proces adaptiran s obzirom na filtraciju F.

Definicija 2.2.1. *Adaptiran slučajan proces $H = (H_t : t \in [0,T])$ nazivamo jednostavnim procesom ako je on oblika*

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j 1_{[t_j, t_{j+1}]}(t)$$

za neku particiju $\pi = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = T\}$ i omeđene slučajne varijable ϕ_j koje su $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjerive.

Definicija 2.2.2 (Itôv integral za jednostavne procese)**.** *Za jednostavan slučajni proces H definiramo Itôv integral kao slučajni proces $I = (I_t : t \in [0,T])$ s*

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t})$$

.

Teorem 2.2.3 (Itôva izometrija)**.** *Itôv integral definiran s $I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t})$ zadovoljava*

$$E[I_t^2] = E \int_0^t H_u^2 du. \tag{2.1}$$

Dokaz ovog teorema se može pronaći u [8].

[2]Neka je $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ funkcija, varijacija od f se definira $[f,f][T] = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |(f(t_{j+1}) - f(t_j))|$

Itôv integral za opće integrande

Ideja je proširiti definiciju Itôvog integrala za jednostavne integrande tako da definicija bude konzistentna i da se sva svojstva koja vrijede za Itôv integral jednostavnog procesa prenesu i na opći slučaj. Za prostor općih integranada uzimamo familiju F-adaptiranih slučajnih procesa $H = (H_t : t \in [0, T])$ koji zadovoljavaju uvjet da je $E \int_0^T H_t^2 dt < \infty$. Familiju svih takvih procesa označimo sa $\mathbb{L}^2_{ad}$. Iz definicije jednostavnih procesa jasno je da su svi jednostavni procesi u prostoru $\mathbb{L}^2_{ad}$. Sada želimo definirati Itôv integral za proces $H \in \mathbb{L}^2_{ad}$. Ideja je aproksimirati H s nizom jednostavnih procesa $H^{(n)}$. Pretpostavimo da $H = (H_t : 0 < t \leq T)$ ima neprekidne puteve. Odaberimo particiju $\Pi^{(n)} = \{0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \ldots \leq t_n^{(n)} = t\}$ intervala $[0, t]$ i definirajmo $H^{(n)}$ kao $H_u^{(n)} = H_{t_j}^{(n)}$ za $u \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$ odnosno za takav jednostavan integrand znamo izračunati Itôv integral po Definiciji 2.2.2. Sada Itôv integral za opće integrande možemo definirati kao limes Itôvih integrala za jednostavne integrande kada uzimamo sve više i više točaka u particiji.

Lema 2.2.4. *Neka je $H \in \mathbb{L}^2_{ad}$, tada postoji niz jednostavnih integranada $(H^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ td. vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} ||H^{(n)} - H||^2_{\mathbb{L}^2_{ad}} = \lim_{n\to\infty} E \int_0^T |H_t^{(n)} - H_t|^2 dt = 0. \tag{2.2}$$

Ostaje argumentirati zašto limes u Lemi 2.2.4 postoji. Neka je $(H^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ niz jednostavnih integranada iz Leme 2.2.4 i $I_t^{(n)} = \int_0^t H_u{}^{(n)} dB_u$. Iz izraza (2.2) slijedi da je niz $(H^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjev[3] u $\mathbb{L}^2_{ad}$.
Stoga korištenjem nejednakosti $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ dobivamo da je:

$$\lim_{m,n\to\infty} E \int_0^T |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2 dt \leq 2\left(\lim_{n\to\infty} E \int_0^T |H_t^{(n)} - H_t|^2 dt + \lim_{m\to\infty} E \int_0^T |H_t^{(m)} - H_t|^2 dt\right).$$

Uočimo da je $H^{(n)} - H^{(m)}$ jednostavan proces jer su $H^{(n)}$ i $H^{(m)}$ jednostavni procesi. Sada primjenjujući Itôvu izometriju (2.1)

$$E \int_0^t |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2 dt = E[(I_t^n - I_t^m)^2].$$

Stoga je,

$$\lim_{m,n\to\infty} E[(I_t^n - I_t^m)^2] = 0 \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Za fiksni t niz Itôvih integrala je Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru[4] $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kako je $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ potpun tada svaki Cauchyjev niz konvergira u tom prostoru, odnosno taj limes je dobro definiran.

[3] Niz a_n je Cauchyjev niz ako $(\forall \epsilon \geq 0)$ $(\exists n_\epsilon \in \mathbb{N})$ takav da $(\forall n \geq n_\epsilon, \forall k \in \mathbb{N})$ vrijedi $|a_{n+k} - a_n| \leq \epsilon$.
[4] Hilbertov prostor je potpuni normiran prostor.

Napomena 2.2.5. *Oznaku* $(H \circ B)_t$ *označavamo za izraz* $\int_0^t H_s dB_s$.

Teorem 2.2.6 (Svojstva Itôvog integrala)**.** *Neka je* $T \geq 0$ *i* $H = (H_t : t \in [0,T]) \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Tada slučajni proces* $I = (I_t : t \in [0,T])$ *definiran na gore navedeni način ima sljedeća svojstva:*

(i) $t \rightarrow I_t$ *je neprekidno preslikavanje na* $[0,T]$. *g.s.*

(ii) za $H, K \in \mathbb{L}^2_{ad}$ *i* $a, b \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$((aH + bK) \circ B)_t = a(H \circ B)_t + b(K \circ B)_t.$$

(iii) Vrijedi Itôva izometrija,

$$E[I_t^2] = E \int_0^t H_u^2 du.$$

(iv) Proces I je martingal s obzirom na filtraciju F.

Korištenjem definicije želimo izračunati izraze oblika $\int_0^T H_t dB_t$. Neka je $B = (B_t : t \in [0,T])$ Brownovo gibanje i $H \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ Promotrimo funkciju ξ i pretpostavimo da je $\mathcal{F}_a$-izmjeriva i omeđena slučajna varijabla, i neke a i b takve da je $0 \leq a \leq b \leq T$. Očito je tada slučajni proces $(\xi 1_{[a,b]}(t) : t \in [0,T])$ u klasi jednostavnih procesa pa po definiciji slijedi:

$$\int_0^T \xi 1_{[a,b]}(t) dB_t = \xi(B_b - B_a).$$

Izračun poopćimo sa sljedeće dvije propozicije.

Propozicija 2.2.7. *Neka je* $0 \leq a \leq b \leq T$ *i* ξ *je* $\mathcal{F}_a$*-izmjeriva slučajna varijabla td.* $E[\xi^2] < \infty$ *tada je* $\xi 1_{[a,b]} \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *i vrijedi:*

$$\int_0^T \xi 1_{[a,b]}(t) dB_t = \xi(B_b - B_a).$$

Propozicija 2.2.8. *Neka je* $H \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *slučajan proces koji je neprekidan u srednjem reda 2, odn.* $\lim_{s \to t} E[(H_s - H_t)^2] = 0$*, za sve* $t \in [0,T]$.
Tada je:

$$\int_0^T H_s dB_s = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} H_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$$

gdje je $\pi = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq, \ldots, \leq t_n = T\}$ *subdivizija intervala* $[0,T]$.

Itôva formula

Definicija 2.2.9. *Neka je $B = (B_t : t \in [0, T])$ Brownovo gibanje i $F = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija. Itôv proces je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ oblika*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds. \tag{2.3}$$

gdje je $X_0 \in \mathbb{R}$, $H = (H_t : t \geq 0)$ i $V = (V_t : t \geq 0)$ su adaptirani slučajni procesi za koje vrijedi da je $H \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, a $\int_0^t |V_s| ds < \infty \quad g.s.\ , \quad \forall t \geq 0$.

Definicija 2.2.10. *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom (2.3) te neka je $K = (K_t : t \geq 0)$ adaptiran proces i vrijede sljedeći uvjeti:*

$$E \int_0^t K_s^2 H_s^2 ds < \infty,$$

$$\int_0^t |K_s V_s| ds < \infty.$$

Tada se stohastički integral od K s obzirom na Itôv proces X definira na sljedeći način:

$$\int_0^t K_s dX_s = \int_0^t K_s H_s dB_s + \int_0^t K_s V_s ds. \tag{2.4}$$

Teorem 2.2.11. *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces i neka je $f(t, x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ i $f_{xx}(t, x)$, tada za svaki $T \geq 0$ vrijedi*

$$f(T, X_T) = f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) d\langle X \rangle_t$$

$$= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) dB_t + \int_0^T f_x(t, X_t) dV_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) H_t^2 dt. \tag{2.5}$$

Napomena 2.2.12.

- *Itôva formula u diferencijalnom obliku*

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) dX_t dX_t. \tag{2.6}$$

- *Itôva formula gdje je Itôv proces Brownovo gibanje*

$$f(T, B_T) = f(0, 0) + \int_0^T f_t(t, B_t) dt + \int_0^T f_x(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, B_t) dt. \tag{2.7}$$

2.3 Stohastičke diferencijalne jednadžbe

Definicija 2.3.1. *Obična diferencijalna jednadžba je jednadžba oblika*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

U ovom radu promatramo stohastičke diferencijale jednadžbe koje su proširenje običnih diferencijalnih jednadžbi. Razlika u odnosu na obične diferencijalne jednadžbe je ta što se u stohastičkima još javlja i slučajna komponenta. Slučajna komponenta se modelira bijelim šumom koji se može dobiti kao derivacija Brownovog gibanja. Opći oblik stohastičke diferencijalne jednadžbe za slučajni proces $X = (X_t : t \in [0, T])$ dan je s:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t, \qquad t \in [0, T], \tag{2.8}$$

ili u integralnom obliku:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dB_s, \qquad t \in [0, T]. \tag{2.9}$$

Definicija 2.3.2 (Jako rješenje SDJ). *Jako rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe je stohastički proces $X = (X_t, t \in [0, T])$ koji zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *X je adaptiran u odnosu na Brownovo gibanje odnosno u fiksnom vremenu t rješenje je funkcija Brownovog gibanja do trenutka t.*
2. *Pripadni integrali u jednadžbi* (2.9) *su dobro definirani*
3. *X je funkcija trajektorije Brownovog gibanja i koeficijenata $f(t, x)$ i $g(t, x)$.*

Jako riješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe je rješenje po svakoj trajektoriji Brownovog gibanja međutim postoji i slabo riješenje u kojem ponašanje trajektorija nije bitno nego je bitna samo distribucija slučajnog procesa X. Za određivanje očekivanja i varijance riješenja dovoljno je poznavati slabo riješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe.

Definicija 2.3.3. *Riješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe* (2.8) *(bilo slaba ili jaka) zovemo difuzijama.*

Teorem 2.3.4 (egzistencija i jedinstvenost rješenja SDJ). *Neka za sve $t \in [0, T]$ i $x, y \in \mathbb{R}$ te funkcije $f(t, x), g(t, x)$ zadovoljavaju sljedeće uvjete:*

1. *$f(t, x)$ i $g(t, x)$ su neprekidne funkcije*
2. *Zadovoljavaju kriterij Lipschitzovosti s obzirom na prostornu varijablu odnosno*

   $$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|$$

   gdje je $K > 0$.

Tada stohastička diferencijalna jednadžba ima jedinstveno jako rješenje.

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [5] str. 119-121.

Vasičekov model kamatnih stopa

Primjer 2.3.5. *Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Vasičekov model kamatnih stopa $R = (R_t : t \geq 0)$ dan je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom*

$$dR_t = (\alpha - \beta R_t)dt + \sigma dB_t \qquad t \geq 0, \tag{2.10}$$

gdje su parametri modela $\alpha, \beta, \sigma > 0$. Rješenje je sljedeći proces:

$$R_t = e^{-\beta t}R_0 + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta s}dB_s. \tag{2.11}$$

Pokažimo zaista da stohastički proces R_t zadovoljava jednadžbu (2.10)*. Definirajmo proces $X_t = \int_0^t e^{\beta s}dB_s$ i funkciju $f(t,x) = e^{-\beta t}R_0 + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t}x$. Primijenimo Itôvu formulu.*

$$f_t(t,x) = -\beta e^{-\beta t}R_0 + \alpha e^{-\beta t} - \sigma\beta e^{-\beta t}x.$$

$$f_x(t,x) = \sigma e^{-\beta t}.$$

$$f_{xx}(t,x) = 0.$$

Također diferencijalni oblik od X je:

$$dX_t = e^{\beta t}dB_t.$$

Itôva formula:

$$f(t,X_t) - f(0,0) = \int_0^t (-\beta e^{-\beta t}R_0 + \alpha e^{-\beta t} - \sigma\beta e^{-\beta t}X_t)dt + \int_0^t \sigma dB_s$$

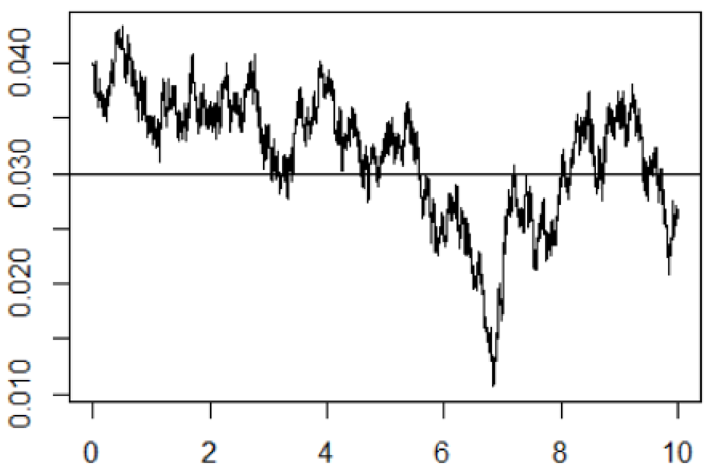
Zapisivanjem Itôve formule u diferencijalnom obliku i sređivanjem izraza dobivamo

$$df(t,X_t) = (-\beta e^{-\beta t}R_0 + \alpha e^{-\beta t} - \sigma\beta e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta s}dB_s)dt + \sigma dB_t$$

$$df(t,X_t) = \left(\alpha - \beta\left(e^{-\beta t}R_0 + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta s}dB_s\right)\right)dt + \sigma dB_t$$

$$df(t,X_t) = (\alpha - \beta f(t,X_t))dt + \sigma dB_t.$$

Odnosno izraz (2.11) *zadovoljava jednadžbu* (2.10)*.*



Slika 2.2: Trajektorija Vasičekovog modela s parametrima $\alpha = 0.06$, $\beta = 2$, $\sigma = 0.01$

Poglavlje 3

CIR model kamatnih stopa

3.1 Difuzijski modeli kamatnih stopa

CIR model kamatnih stopa spada u difuzijske modele kamatnih stopa pa je cilj ovog poglavlja objasniti općenito koja svojstva zadovoljavaju difuzijski modeli. Osnovni difuzijski model zadovoljava sljedeću Itôvu stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

$$dr_t = f(r_t, t)dt + g(r_t, t)dB_t. \tag{3.1}$$

Proces $f(r_t, t)$ zovemo koeficijentom drifta dok proces $g(r_t, t)$ zovemo difuzijskim koeficijentom. Mjenjanjem ova dva procesa dobivamo različite modele kamatnih stopa.

Naziv modela	Proces drifta	Difuzijski proces
Vasičekov model	$\alpha(\beta - r_t)$	σ
CIR model	$\alpha(\beta - r_t)$	$\sigma\sqrt{r_t}$
Exponencijalni Vasičekov model	$r_t(\beta - \alpha \ln(r_t))$	σr_t

Tablica 3.1: Prikaz procesa drifta i difuzijskog procesa po modelima

Većina difuzijskih modela ima slične pretpostavke:

- Modeli su jednofaktorski odnosno postoji jedinstvena ekonomska varijabla koju promatramo, a to je kratkoročna kamatna stopa i nju možemo interpretirati kao prinos koji ostvaruje investitor investirajući u kratkom periodu.
- Kratkoročna kamatna stopa ima svojstva difuzijskog procesa pa stoga i zadovoljava neku SDJ.
- Tržište koje promatramo je efikasno odnosno svakom investitoru u svakom trenu su dostupne pravovremene, točne, detaljne informacije o svim segmentima tržišta, ne

nameće se porez ni ostali troškovi, investitor se ponaša racionalno (odnosno donosi odluke s ciljem maksimiziranja profita). Također ove pretpostavke impliciraju da na tržištu ne postoji arbitraža.

Nepostojanje arbitraže na financijskom tržištu znači da ne postoji mogućnost da se preprodajom financijskih instrumenata ostvari bezrizičan profit. Odnosno cijene na financijskom tržištu su već korigirane na način da se postiže stanje ravnoteže te takvo stanje i mi podrazumijevamo u ovom radu.

3.2 CIR model kamatnih stopa

CIR model kamatnih stopa je jednofaktorski model, a varijabla koju promatramo je kratkoročna kamatna stopa. Proces kamatne stope u CIR modelu zadovoljava sljedeću Itôvu stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t. \tag{3.2}$$

Pretpostavljamo da su koeficijenti $\alpha, \beta, \sigma > 0$, tada je rješenje jednadžbe (3.2) nenegativno i jedinstveno. Intuitivno promotrimo da vrijednost r_t postaje sve manja i konvergira prema 0, tada zbog $\sqrt{r_t}$ uz dB_t cijeli član brzo konvergira u 0, međutim s druge strane drift $(\alpha(\beta - r_t))$ zbog svojstva vraćanja prema srednjem pomiče proces kamatne stope prema srednjoj vrijednosti $\beta > 0$. Upravo zbog ovoga kamatna stopa u CIR modelu ne može biti manja od 0, što je prednost u odnosu na Vasičekov model koji smo promatrali u prethodnom poglavlju u kojem kamatna stopa može biti negativna (međutim vjerojatnost tog događaja je proizvoljno mala). Parametar α u CIR modelu određuje brzinu prilagodbe. Proces kamatne stope ima svojstvo vraćanja prema srednjem, odnosno r_t ne odstupa značajno od svoje središnje vrijednosti (parametra β). Uistinu, kada je $r_t = \beta$ koeficijent drifta je 0 te proces kamatnih stopa može varirati samo u ovisnosti o slučajnoj komponenti, u slučaju kada je $r_t > \beta$ tada je koeficijent drifta manji od 0 pa proces kamatnih stopa pada i približava se srednjoj vrijednosti β i obratno ako je $r_t < \beta$ tada je koeficijent drifta veći od nula što uzrokuje pomicanje procesa kamatnih stopa ponovno prema srednjoj vrijednosti. Proces kamatne stope ima sljedeća empirijski relevantna svojstva:

1. Kamatna stopa ne može bit negativna.
2. Ako kamatna stopa dosegne 0 ona kasnije može postati pozitivna.
3. Varijanca kamatne stope raste s povećanjem vrijednosti kamatne stope.
4. Za kamatnu stopu postoji stacionarna distribucija.

Navedimo još neka svojstva modela koja će nam koristiti kasnije u izračunu. Pretpostavljamo da je tržišna cijena rizika za CIR model dana sljedećom formulom:

$$\lambda(r_t, t) = \frac{\lambda\sqrt{r_t}}{\sigma}, \qquad \lambda = const, \tag{3.3}$$

odnosno, premija za rizik:

$$\Phi(r_t, t) = \lambda r_t. \tag{3.4}$$

Cox, Ingersoll i Ross navode još par vjerojatnosnih retultata u svome radu [3]. Funkcija gustoće kamatne stope u vremenu s, uvjetno na vrijednost u sadašnjosti t:

$$f(r_s, s; r_t, t) = ce^{-u-v}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{Q}{2}} I_Q\left(2(uv)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{3.5}$$

gdje su:

$$c = \frac{2\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha(s-t)})},$$
$$u = cr_t e^{-\alpha(s-t)},$$
$$v = cr_s,$$
$$Q = \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2} - 1,$$

i $I_Q(\cdot)$ je modificirana Besselova funkcija prve vrste reda Q. Njena distribucija prati necentriranu $\chi^2[2cr_s; 2q + 2, 2u]$ gdje su $2q + 2$ stupnjevi slobode, a parametar necentriranosti $2u$ je proporcionalan trenutnoj spot kamantoj stopi. Rješenje CIR stohastičke diferencijalne jednadžbe nije u zatvorenoj formi međutim uvjetno očekivanje i varijanca se mogu exsplicitno izraziti što ćemo pokazati u sljedećem poglavlju.

Poglavlje 4

Uvjetno matematičko očekivanje i varijanca CIR modela

Prije nego li iskažemo formulu uvjetnog matematičkog očekivanja i varijance uvedimo dvije napomene.

Napomena 4.0.1 (linearna diferencijalna jednadžba)**.** *Linearna diferencijalna jednadžba izražena je formulom:*

$$y^{'} + p(x)y = q(x), \tag{4.1}$$

a rješenje jednadžbe dano je s:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)dx + C,\right) \tag{4.2}$$

gdje je

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Napomena 4.0.2 (Fubini-Tonelli)**.** *Neka su* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *i* $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ*-konačni prostori mjere.*

1. *Neka je* $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$*-izmjeriva. Tada je:*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu)(x,y) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

2. *Neka je* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mu \times \nu$*-integrabilna. Tada je za* μ*-gotovo svaki* x *funkcija* $y \to f(x,y)$ ν*-integrabilna, dok je funkcija* $x \to \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ μ*-integrabilna. Analogno za* ν*-gotovo svaki* y *funkcija* $x \to f(x,y)$ μ*-integrabilna, dok je funkcija* $y \to \int_X f(x,y)d\mu(x)$ ν*-integrabilna. Također vrijedi:*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu)(x,y) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

Propozicija 4.0.3.

$$E[r_t|r_s] = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \beta(1 - e^{-\alpha(t-s)}) \tag{4.3}$$

$$Var[r_t|r_s] = r_s\left(\frac{\sigma^2}{\alpha}\right)(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-2\alpha(t-s)}) + \beta\left(\frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha(t-s)})^2 \tag{4.4}$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti samo u slučaju kada je $s = 0$. Označimo sa $m(t) = Er_t$ i $\gamma(t) = Er_t^2$ te pretpostavimo da je $\int_0^t m(s)ds < \infty$. Sada primjenom Teorema 4.0.2 iz integrabilnog oblika jednadžbe (3.2) sljedi:

$$m(t) = \int_0^t E[\alpha(\beta - r_s)]ds + E\left[\int_0^t \sigma\sqrt{r_t}dB_t\right]$$

Uočimo da je član $E\left[\int_0^t \sigma\sqrt{r_t}dB_t\right]$ jednak 0 jer se radi o Itôvom procesu, a kako je Itôv proces martingal, zbog martingalnog svojstva vrijedi da je $E[I_t] = E[I_0] = 0$. Stoga je

$$m(t) = \alpha\beta t - \alpha\int_0^t E[r_s]ds.$$

Uvrstimo definiciju od $m(t)$ u gornju formulu i dobivamo:

$$m(t) = \alpha\beta t - \alpha\int_0^t m(s)ds,$$

pa deriviranjem gornjeg izraza dobivamo:

$$m^{'}(t) = \alpha\beta - \alpha m(t).$$

Nadalje, cijeli izraz pomnožimo sa $e^{\alpha t}$ i svedimo na derivaciju umnoška

$$m^{'}(t)e^{\alpha t} + \alpha m(t)e^{\alpha t} = \alpha\beta e^{\alpha t}$$

$$[e^{\alpha t}m(t)]^{'} = \alpha\beta e^{\alpha t}$$

$$e^{\alpha t}m(t) - m(0) = \int_0^t \alpha\beta e^{\alpha s}ds.$$

Kako je $m(0) = Er_0 = r_0$ iz gornje jednakosti slijedi

$$Er_t = r_0 e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}).$$

Sada izračunajmo varijancu. Iskoristimo Itôvu formulu gdje za f promatramo funkciju $f(x) = x^2$, tada su njene parcijalne derivacije

$$f_x(x) = 2x$$

$$f_t(x) = 0$$
$$f_{xx}(x) = 2.$$

Koristeći Itôvu formulu dobivamo:

$$df(t, r_t) = dr_t^2 = 2r_t\sigma\sqrt{r_t}dB_t + 2\alpha r_t(\beta - r_t)dt + \sigma^2 r_t dt.$$

Pretpostavimo li da je $\int_0^t \gamma(s)ds < \infty$ primjenom Teorema 4.0.2 i martingalnog svojstva [1] slijedi:

$$\gamma(t) = \gamma(0) + 2\int_0^t (\alpha\beta m(s) - 2\alpha\gamma(s))ds + \sigma^2\int_0^t m(s)ds,$$

deriviranjem gornjeg izraza dobivamo:

$$\gamma(t)' + 2\alpha\gamma(t) = (2\alpha\beta + \sigma^2)m(t).$$

Gornja jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda i na nju ćemo primjeniti formulu (4.2)

$$\gamma(t) = \gamma(0) + e^{-2\alpha t}\left[\int_0^s (2\alpha\beta + \sigma^2)[r_0e^{-\alpha s} + \beta(1 - e^{-\alpha s})]e^{2\alpha s}\right]ds$$

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \frac{(2\alpha\beta + \sigma^2)}{e^{2\alpha t}}\left[\frac{r_0}{\alpha}[e^{\alpha t} - 1] + \frac{\beta}{2\alpha}[e^{2\alpha t} - 1] - \frac{\beta}{\alpha}[e^{\alpha t} - 1]\right]$$

$$\gamma(t) = \gamma(0) + (2\alpha\beta + \sigma^2)\left[\frac{r_0}{\alpha}[e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}] + \frac{\beta}{2\alpha}[1 - e^{-2\alpha t}] - \frac{\beta}{\alpha}[e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}]\right]$$

Sada iz izraza $Var(r_t) = \gamma(t) - m^2(t)$ sljedi:

$$Var(r_t) = e^{-2\alpha t}r_0^2 + (2\alpha\beta+\sigma^2)\left[\frac{r_0}{\alpha}[e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}] + \frac{\beta}{2\alpha}[1 - e^{-2\alpha t}] - \frac{\beta}{\alpha}[e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}]\right] - [r_0e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t})].$$

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$Var(r_t) = r_s\left(\frac{\sigma^2}{\alpha}\right)(e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) + \beta\left(\frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha t})^2.$$

□

Napomena 4.0.4. *Iz jednadžbi* (5.4) *i* (5.5) *promotrimo sljedeće limese.*

$$\lim_{\alpha\to\infty} E(r_s|r_t) = \beta$$
$$\lim_{\alpha\to\infty} Var(r_s|r_t) = 0$$
$$\lim_{\alpha\to 0} E(r_s|r_t) = r_t$$
$$\lim_{\alpha\to 0} Var(r_s|r_t) = \sigma^2 r_t(s - t)$$

[1] $E(2r_t\sigma\sqrt{r_t}dB_t) = 0$

Primjenom odgovarajućeg limesa na jednadžbe (5.4) i (5.5) očite su prve tri jednakosti. Pokažimo zadnju:

$$\lim_{\alpha\to 0} Var(r_s|r_t) = \lim_{\alpha\to 0} r_s \left(\frac{\sigma^2}{\alpha}\right)(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-2\alpha(t-s)}) + \beta\left(\frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha(t-s)})^2$$

$$= r_s\sigma^2 \lim_{\alpha\to 0} \frac{e^{-\alpha(t-s)} - e^{-2\alpha(t-s)}}{\alpha} + \frac{\beta\sigma^2}{2} \lim_{\alpha\to 0} \frac{(1 - e^{-\alpha(t-s)})^2}{\alpha}.$$

Primjenom *L'Hôpitalovog* pravila sljedi da je gornji izraz jednak:

$$r_s\sigma^2 \lim_{\alpha\to 0} -(t-s)e^{-\alpha(t-s)} + 2(t-s)e^{-2\alpha(t-s)} + \frac{\beta\sigma^2}{2} \lim_{\alpha\to 0} 2(t-s)(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-2\alpha(t-s)})$$

$$= r_s\sigma^2(t-s).$$

Napomena 4.0.5. *Cox, Ingersoll i Ross u svome radu [3] navode da ako kamatna stopa ima svojstvo vraćanja prema srednjem ($\alpha, \beta > 0$), tada kada t teži u $+\infty$, distribucija kamatne stope se približava Gamma distribuciji.*
Stacionarna funkcija gustoće je jednaka:

$$f(r_\infty, \infty, r_s; s) = \frac{\omega^h}{\Gamma(h)} r^{h-1} e^{-\omega r},$$

gdje je $\omega = \frac{2\alpha}{\sigma^2}$ i $h = \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}$, očekivanje iznosi β a varijanca $\frac{\sigma^2\beta}{2\alpha}$.

Poglavlje 5

Cijena diskontne obveznice i prinos do dospijeća u CIR modelu

U ovom poglavlju izvest ćemo cijenu diskontne obveznice i prinosa do dospijeća općenito u difuzijskom modelu, a onda uvrštavanjem pripadnih parametara ćemo pokazati kako ona glasi i u CIR modelu. Pretpostavimo da proces kamatnih stopa zadovoljava svojstva (3.1). Tada cijena obveznice u trenutku t s vremenom dospijeća T ovisi isključivo o kamatnoj stopi u vremenu do dospijeća. Oznaka je $P(t, T, r_t)$. Primjenimo li Itôvu formulu na cijenu obveznica (2.5),

$$dP_t = P_t dt + P_r dt f(r_t, t)dt + P_r g(r_t, t)dB_t + \frac{1}{2}P_{rr}g^2(r_t, t)dt. \tag{5.1}$$

Definirajmo sljedeće funkcije:

$$m(t, T, r_t) = \frac{P_t + P_r f(r_t, t) + \frac{1}{2}P_{rr}g^2(r_t, t)}{P(t, T, r_t)}, \tag{5.2}$$

$$\sigma(t, T, r_t) = \frac{P_r g(r_t, t)}{P(t, T, r_t)}. \tag{5.3}$$

Sada gornju jednadžbu možemo zapisati pomoću funkcija $m(t, T, r_t)$ i $\sigma(t, T, r_t)$:

$$dP(t, T, r_t) = Pm(t, T, r_t)dt + P\sigma(t, T, r_t)dB_t$$

Funkcije $m(t, T, r_t)$ i $\sigma(t, T, r_t)$ su očekivanje odnosno standardna devijacija izraza $\frac{dP}{P}$. Promotrimo investicijski portfelj koji se sastoji od dvije obveznice različitog vremena dospijeća T_1 i T_2. Investitor istovremeno izdaje prvu obveznicu s ponderom ω_1, a investira u drugu s ponderom ω_2. Ukupna vrijednost portfelja je $\omega = \omega_2 - \omega_1$. Vrijednost portfelja se mijenja prema jednadžbi:

$$d\omega = (\omega_2 m(t, T_2) - \omega_1 m(t, T_1))dt - (\omega_2\sigma(t, T_2) - \omega_1\sigma(t, T_1))dB_t. \tag{5.4}$$

Odaberimo količine ω_1 i ω_2 tako da budu proporcionalne:

$$\omega_1 = \frac{\omega\sigma(t, T_2)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)},$$

$$\omega_2 = \frac{\omega\sigma(t, T_1)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)}.$$

Tada u jednadžbi (5.4) nestaje slučajna komponenta i dobivamo sljedeći izraz:

$$d\omega = \frac{\omega(m(t, T_2)\sigma(t, T_2) - m(t, T_1)\sigma(t, T_2))}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)}dt. \tag{5.5}$$

Kako nema slučajne komponente postoji r_t takav da vrijedi:

$$d\omega = \omega r_t dt. \tag{5.6}$$

Izjednačavajući jednadžbe (5.6) i (5.5) dobivamo:

$$r_t = \frac{m(t, T_2)\sigma(t, T_2) - m(t, T_1)\sigma(t, T_2)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)},$$

odnosno množenjem sa nazivnikom:

$$r_t\sigma(t, T_1) - r_t\sigma(t, T_2) = m(t, T_2,)\sigma(t, T_2) - m(t, T_1)\sigma(t, T_2)$$

$$m(t, T_2)\sigma(t, T_2) - r_t\sigma(t, T_1) = m(t, T_1)\sigma(t, T_2) - r_t\sigma(t, T_2).$$

Podjelimo li sa izrazom $\sigma(t, T_1)\sigma(t, T_2)$ dobivamo:

$$\frac{m(t, T_1) - r_t}{\sigma(t, T_1)} = \frac{m(t, T_2) - r_t}{\sigma(t, T_2)}$$

Uočimo da zadnja jednakost vrijedi za proizvoljne T_1 i T_2, odnosno omjer $\frac{m(t,T)-r_t}{\sigma(t,T)}$ je neovisan o T. Označimo taj omjer sa $q(t, r_t) = \frac{m(t,T_1)-r_t}{\sigma(t,T_1)}$ i on predstavlja tržišnu mjeru rizika ili Sharpeov omjer. Označava povrat na investiciju kroz jedinicu rizika. Iz relacije Sharpeovog omjera dobivamo:

$$m(t, T) - r_t = q(r_t, t)\sigma(t, T, r_t)$$

supstitucijom parametara $m(t, T, r_t)$ i $\sigma(t, T, r_t)$ dobivamo diferencijalnu jednadžbu za određivanje cijene financijskog instrumenta

$$P_t + (f(r_t, t) + g(r_t, t)q(r_t, t))P_r + \frac{1}{2}g(r_t, t)^2 P_{rr} - r_t P = 0 \quad t \leq T. \tag{5.7}$$

Gornja jednadžba opisuje cijenu bilo kojeg vrijednosnog papira koji ne isplaćuje kamatu prije vremena dospijeća, a cijena nul-kuponske obveznice se dobiva uz početni uvjet $P(T, T, r_t) = 1$. Uočimao da cijena obveznice ovisi o jednoj varijabli a to je kamatna stopa r. Izvod za različite difuzijske modele se razlikuje po definiciji funkcija f i g.

5.1 Cijena diskontne obveznice u CIR modelu

CIR model je definiram difuzijskom jednadžbom:

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t. \tag{5.8}$$

Usporedimo li gornju jednadžbu sa izrazom (3.1), i izjednačavanjem možemo zaključiti:

$$f(r_t, t) = \alpha(\beta - r_t)$$

$$g(r_t, t) = \sigma\sqrt{r_t}.$$

Pretpostavimo da je Sharpeov omjer $q(t, r_t) = \lambda\frac{\sqrt{r_t}}{\sigma}, \quad \lambda = const.$
Diferencijalnu jednadžbu koja opisuje cijenu diskontne obveznice u CIR modelu možemo direktno dobiti uvrštavanjem funkcija $f(r_t, t)$, $g(r_t, t)$ i $q(r_t, t)$ u (5.7):

$$P_t + (\alpha(\beta - r_t) + \sigma\sqrt{r_t}\lambda\frac{\sqrt{r_t}}{\sigma})P_r + \frac{1}{2}P_{rr} - r_tP = 0,$$

odnosno sređivanjem izraza:

$$r_tP + \lambda r_tP_r = \alpha(\beta - r_t)P_r + P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 r_tP_{rr}.$$

Gornju jednadžbu možemo dobiti i na drugi način: u jednadžbu (5.1) uvrstimo odgovarajuće koeficijente vezane za CIR model i dobivamo:

$$\frac{dP}{P} = \left[\alpha(\beta - r_t)P_r + P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 r_tP_{rr}\right]\frac{1}{P}dt + \frac{\sigma\sqrt{r_t}P_r}{P}dB_t.$$

Također $\frac{dP}{P}$ možemo zapisati i kao:

$$\frac{dP}{P} = m(t, T, r_t)dt + \sigma(t, T, r_t)dB_t.$$

Uvrštavanjem koeficijenata CIR modela u jednadžbe (5.2) i (5.3) za izraze $m(t, T, r_t)$ i $\sigma(t, T, r_t)$ dobivamo:

$$m(t, T, R_t) = r_t + \frac{\lambda\sqrt{r_t}}{\sigma}\sigma(t, T, r_t),$$

$$\sigma(t, T, r_t) = \frac{P_r\sigma\sqrt{r_t}}{P}.$$

Usporedimo li gornje jednadžbe dobivamo:

$$r_tP + \frac{\lambda\sqrt{r_t}}{\sigma}P_r\sigma\sqrt{r_t} = \left[\alpha(\beta - r_t)P_r + P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 r_tP_{rr}\right]$$

odnosno:

$$r_t P + \lambda r_t P_r = \alpha(\beta - r_t)P_r + P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t P_{rr}.$$

Cox, Ingersoll i Ross su izveli rješenje gornje diferencijalne jednadžbe uz početni uvjet $P(t,T,r) = 1$

$$P(t,T,r_t) = A(t,T)e^{-B(t,T)r_t} \tag{5.9}$$

gdje je:

$$A(t,T) = \left[\frac{2ye^{\frac{[(\alpha+\lambda+y)(T-t)]}{2}}}{(y+\alpha+\lambda)(e^{y(T-t)}-1)+2y}\right]^{\frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}}, \tag{5.10}$$

$$B(t,T) = \frac{2(e^{y(T-t)}-1)}{(y+\alpha+\lambda)(e^{y(T-t)}-1)+2y}, \tag{5.11}$$

$$y = ((\alpha+\lambda)^2 + 2\sigma^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.12}$$

Također su pokazali sljedeće rezultate:

1. Cijena obveznice je padajuća konveksna funkcija srednje vrijednosti kamatne stope β i padajuća konkavna funkcija po α ako je kamatna stopa veća od β i obrnuto rastuća konveksna funkcija po α ako je kamatna stopa manja od β.

2. Cijena obveznice je padajuća konveksna funkcija po varijanci σ^2.

3. Cijena obveznice je rastuća konkavna funkcija po λ.

5.2 Prinos do dospijeća diskontne obveznice u CIR modelu

Za diskontnu obveznicu kakvu mi promatramo prinos do dospijeća $R(r,t,T)$ je definiran preko sljedeće relacije

$$e^{-(T-t)R(r,t,T)} = P(r,t,T), \tag{5.13}$$

odnosno uvrštavanjem (5.9) dobivamo:

$$R(r,t,T) = \frac{rB(t,T) - \ln(A(t,T))}{(T-t)}. \tag{5.14}$$

Prinos do dospijeća označava stopu povrata koju investitor ostvaruje ulagajući u malom vremenskom periodu. Što je vremenski interval manji to je stopa prihoda bliža tekućoj kamatnoj stopi odnosno vrijedi sljedeća jednakost:

$$r_t = \lim_{T\to t} R(r_t,t,T). \tag{5.15}$$

Pokažimo gornju jednadžbu

$$\lim_{T\to t} R(r_t,t,T) = \lim_{T\to t} \frac{rB(t,T) - \ln(A(t,T))}{T-t} = \lim_{T\to t} \frac{rB(t,T)}{T-t} - \lim_{T\to t} \frac{\ln(A(t,T))}{T-t}$$

Promotrimo svaki limes zasebno.
Uvrštavanjem (5.11) dobivamo:

$$r\lim_{T\to t} \frac{\frac{2(e^{y(T-t)}-1)}{(y+\alpha+\lambda)(e^{y(T-t)}-1)+2y}}{T-t} = r\lim_{T\to t} \frac{2(e^{y(T-t)}-1)}{(T-t)(y+\alpha+\lambda)(e^{y(T-t)}-1)+2y}.$$

Na gornji limes primjenimo *L'Hôpitalovo* pravilo i dobijemo:

$$r\lim_{T\to t} \frac{2ye^{y(T-t)}}{(y+\alpha+\lambda)[e^{y(T-t)}-1]+2y+(T-t)(y+\alpha+\lambda)ye^{y(T-t)}}$$

$$= r\frac{2y}{2y} = r.$$

Analogno uvrštavanjem (5.10) u drugi limes dobivamo:

$$\lim_{T\to t} \frac{\ln\left[\frac{2ye^{\frac{[(\alpha+\lambda+y)(T-t)]}{2}}}{(y+\alpha+\lambda)(e^{y(T-t)}-1)+2y}\right]^{\frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}}}{T-t} = \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}\lim_{T\to t} \frac{\ln\left[2ye^{\frac{[(\alpha+\lambda+y)(T-t)]}{2}}\right] - \ln\left[(y+\alpha+\lambda)(e^{y(T-t)}-1)+2y\right]}{T-t}.$$

Primjenom *L'Hôpitalovog* pravila gornji limes je jednak:

$$\frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}\frac{y+\alpha+\lambda}{2} - \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}\lim_{T\to t} \frac{(y+\alpha+\lambda)ye^{y(T-t)}}{(y+\alpha+\lambda)[e^{y(T-t)}-1]+2y}$$

$$= \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}\frac{y+\alpha+\lambda}{2} - \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}\frac{(y+\alpha+\lambda)y}{2y} = 0.$$

Time smo pokazali da jednadžba (5.15) zaista vrijedi.
$R(r,t,T)$ dostiže graničnu vrijednost i ona je neovisna o kamatnoj stopi.

$$\lim_{T\to\infty} R(r_t,t,T) = R_\infty = \frac{2\alpha\beta}{y+\alpha+\lambda} \tag{5.16}$$

Pokažimo gornju jednadžbu:

$$\lim_{T\to\infty} R(r_t,t,T) = \lim_{T\to\infty} \frac{rB(t,T) - \ln(A(t,T))}{T-t} = \lim_{T\to\infty} \frac{rB(t,T)}{T-t} - \lim_{T\to\infty} \frac{\ln(A(t,T))}{T-t}$$

Promotrimo svaki limes zasebno. Uvrštavanjem (5.11) dobivamo:

$$r \lim_{T\to\infty} \frac{\frac{2(e^{y(T-t)}-1)}{(y+\alpha+\lambda)(e^{y(T-t)}-1)+2y}}{T-t} = r \lim_{T\to\infty} \frac{2(e^{y(T-t)}-1)}{(T-t)(y+\alpha+\lambda)(e^{y(T-t)}-1)+2y}.$$

Primjenom *L'Hôpitalovog* pravila slijedi da je gornji limes jednak:

$$r \lim_{T\to t} \frac{2ye^{y(T-t)}}{(y+\alpha+\lambda)[e^{y(T-t)}-1]+2y+(T-t)(y+\alpha+\lambda)ye^{y(T-t)}},$$

odnosno, jednak izrazu

$$r \lim_{T\to t} \frac{2ye^{y(T-t)}}{(y+\alpha+\lambda)[e^{y(T-t)}-1+(T-t)ye^{y(T-t)}]+2y},$$

pa ponovnom primjenom *L'Hôitalovog* pravila dobivamo:

$$\begin{aligned} & r \lim_{T\to t} \frac{2y^2e^{y(T-t)}}{(y+\alpha+\lambda)[2ye^{y(T-t)}+(T-t)y^2e^{y(T-t)}]} \\ &= r \lim_{T\to t} \frac{2y^2e^{y(T-t)}}{(y+\alpha+\lambda)ye^{y(T-t)}[2+(T-t)y]} \\ &= r \lim_{T\to t} \frac{2y}{(y+\alpha+\lambda)[2+(T-t)y]} = 0. \end{aligned}$$

Analogno uvrštavanjem (5.10) u drugi limes dobivamo:

$$\lim_{T\to t} \frac{\ln\left[\frac{2ye^{\frac{[(\alpha+\lambda+y)(T-t)]}{2}}}{(y+\alpha+\lambda)(e^{y(T-t)}-1)+2y}\right]^{\frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}}}{T-t} = \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2} \lim_{T\to t} \frac{\ln\left[2ye^{\frac{[(\alpha+\lambda+y)(T-t)]}{2}}\right]-\ln\left[(y+\alpha+\lambda)(e^{y(T-t)}-1)+2y\right]}{T-t}.$$

Primjenom *L'Hôpitalovog* pravila slijedi da je gornji limes jednak:

$$\frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}\frac{y+\alpha+\lambda}{2} - \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2} \lim_{T\to t} \frac{(y+\alpha+\lambda)ye^{y(T-t)}}{(y+\alpha+\lambda)[e^{y(T-t)}-1]+2y},$$

pa ponovnom primjenom *L'Hôpitalovog* pravila dobivamo:

$$\begin{aligned} & \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}\frac{y+\alpha+\lambda}{2} - \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2} \lim_{T\to t} \frac{(y+\alpha+\lambda)y^2e^{y(T-t)}}{(y+\alpha+\lambda)ye^{y(T-t)}}, \\ &= \frac{\alpha\beta(y+\alpha+\lambda)}{\sigma^2} - \frac{2\alpha\beta y}{\sigma^2}, \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha\beta(\alpha + \lambda - y)}{\sigma^2}.$$

Iz jednadžbe (5.12) sljedi:

$$\sigma^2 = \frac{y^2 - (\alpha + \lambda)^2}{2} \tag{5.17}$$

i uvrštavanjem u gornji izraz dobivamo:

$$R_\infty = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha + \lambda + y)}.$$

Kada je r ispod granične vrijednosti $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\lambda+y}$ tada jednoliko raste, a kada je r iznad $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\lambda}$ tada kamatna stopa pada. Ukoliko je $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\lambda+y} < r < \frac{\alpha\beta}{\alpha+\lambda}$ tada krivulja prinosa poprima grbavi oblik odnosno očekuje se ekonomski rast praćen rastom inflacije.

Poglavlje 6

R-kodovi

Za dobivanje slika koji su korišteni u ovom radu koristio sam sljedeće R programe.

```
t=seq(0,100, by= 0.05)
n=length(t)
z=rnorm(n-1, 0,sqrt(0.05))
z=c(0,z)
B=cumsum(z)
plot(t,B, type="l")
points(t, rep(0,n), type="l", col = "red")
```

Slika 6.1: Konstrukcija Brownovog gibanja

Brownovo gibanje je simulirano na intervalu od 0 do 100. Korišten je jednostavan algoritam za aproksimaciju Brownovog gibanja:

(i) postavimo početno stanje Brownovog gibanja na 0 ($B_0 := 0$),

(ii) u i-tom koraku ($i = 1, \dots, n$) simuliramo $y \sim N(0, t_i - t_{i-1})$ prirast Brownovog gibanja i stavimo
$B_{t_i} := B_{t_{i-1}} + y$

Vasičekov model je simuliran na intervalu od 0 do 10.
Stohastičke diferencijalne jednadžbe simuliramo pomoću numeričkog riješenja.
Numeričko rješenje SDJ je slučajni proces $(X_t^n : t \in [0, T])$ koji aproksimira pravo rješenje SDJ na intervalu $[0, T]$, a pri tome se koristi particija $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ u kojoj računamo vrijednost procesa X_t^n. za particiju smo uzeli uniformnu mrežu sa pomakom $\delta = 0.001$. Označimo sa $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ i $\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ za sve $i = 1, \dots, n$. Tada je $\Delta_i B \sim N(0, \Delta_i)$. Stavimo $X_0^n = x_0$ i za sve $i = 1, \dots, n$ definiramo:

$$X_{t_i}^n = X_{t_{i-1}}^n + f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^n)\Delta_i + g(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^n)\Delta_i B.$$

```r
rm(list=ls())
set.seed(1199)
#vasicekov model
delta=0.001
t=seq(0,10,by=delta)
n=length(t)
c=2
mi=0.03
sigma=0.01
deltaB=rnorm(n-1,0,sqrt(delta))
x_E=numeric(n)
x_E[1]=0.04
for(i in 1:(n-1)) {
  x1=x_E[i]
  x_E[i+1]=x1+c*(mi-x1)*delta+sigma*deltaB[i]
}
plot(t,x_E,type="l",xlab=paste("c=",c))
abline(h=mi)
```

Slika 6.2: Konstrukcija Vasičekovog modela

Između točaka particije $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ proces X_t^n interpoliramo linearno. Proces X_t^n se naziva Eulerova aproksimacija rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe a možemo je simulirati preko Eulerove sheme.

- $x_0^n = x_0$ za $i = 1, \ldots, n$

  (i) generiraj $\Delta_i B \sim N(0, \Delta_i)$

  (ii) $x_{t_i}^n = x_{t_{i-1}}^n + f(t_{i-1}, x_{t_{i-1}}^n)\Delta_i + g(t_{i-1}, x_{t_{i-1}}^n)\Delta_i B.$

Popis tablica

Popis slika

Bibliografija

[1] Aljinović Z., Pivac S., Šego B., *CIR model i njegova primjena na državne vrijednosnice Republike Hrvatske*, Ekonomski pregled : mjesečnik Hrvatskog društva ekonomista Zagreb, (54), 2003, 249-287.

[2] Brown S.J., Dybvig P.H., *The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates*, The Yournal of Finance, Vol. 41, No. 3, New York 1986, 617-630.

[3] Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A., *A Theory of the Term Structure of Interest Rates, Econometrica*, Vol. 53, No. 2, 1985, 385-407.

[4] Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A., *An Intertemporal General Equili- brium Model of Asset Prices, Econometrica*, Vol. 53, No. 2, 1985, 363- 384.

[5] R. van Handel: Stochastic Calculus, Filtering, and Stochastic Control, Lecture Notes, 2007.

[6] Shiu E.S.W., Yao Y., *Closed-Form Formulas for Generalized Cox, Ingersoll and Ross Models, Proceedings of the 9th International AFIR Colloquium,* 1999., 407-418.

[7] Shreve S.E., *Stochastic calculus for finance II Continuous time models-Springer* (2004).

[8] Wagner, V. *Financijsko modeliranje 2*, web-skripta, PMF-MO, Zagreb
URL https://web.math.pmf.unizg.hr/ wagner/ [1. prosinca 2021.]

Sažetak

U svome radu iz 1985. J.C.Cox, J.E.Ingersoll i S.A.Ross predlažu generalizaciju Vasičekovog modela, koji opisuje kretanje kamatnih stopa na financijskom tržištu sa samo jednim izvorom rizika. Cox-Ingersoll-Rossov (CIR) model kamatnih stopa tako postaje jedan od najpoznatijih jednofaktorskih vjerojatnosnih modela za modeliranje kamatne stope na financijskom tržištu. U ovom radu je analiziran proces kamatne stope iz CIR modela preko pripadne stohastičke diferencijalne jednadžbe i prikazana su neka svojstva tog procesa, kao što je svojstvo vraćanja prema očekivanju, izvedena je zatvorena forma za uvjetno očekivanje i varijancu te konačno se prezentira izvod cijene i prinosa do dospijeća diskontirane obveznice na financijskom tržištu.

Summary

J.C.Cox, J.E.Ingersoll, and S.A.Ross, in their work from 1985. propose a generalization of Vasiček's model, which describes the movement of interest rates in the financial market by only one source of risk. The Cox-Ingersoll-Ross (CIR) interest rate model thus becomes one of the best-known one-factor probability models for modeling interest rates in the financial market. In this thesis, the interest rate process from the CIR model is analyzed through the corresponding stochastic differential equation and some properties of this process are presented, such as the mean reverting property, a closed form for conditional expectation and variance is derived, and finally we obtain the price and yield of discounted bonds in the financial market.

Životopis

Rođen sam 17.11.1997. u gradu Zadru. Završio sam osnovnu školu ”Jurja Dalmatinca” u gradu Pagu 2012. godine, a potom upisujem opću gimnaziju ”Bartola Kašića” u istom gradu. Tijekom osnovnoškolskog i srednješkolskog obrazovanja razvio se moj interes za matematikom stoga se nakon mature odlučujem za studij matematike. 2016. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematike u Rijeci na odjelu za matematiku, a nakon završene tri godine upisujem Diplomski studij Financijska i poslovna matematika na PMF-u u Zagrebu. U slobodno vrijeme igram nogomet i šah.