Numerička metoda za problem elastičnog štapa uz prepreku

Sočo, Petra

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Sočo

NUMERIČKA METODA ZA PROBLEM ELASTIČNOG ŠTAPA UZ PREPREKU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Josip Tambača

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji, prijateljima i profesorima

Sadržaj

Uvod

Problemi prepreke povijesno su prvi puta opisani u kontekstu teorije elastičnosti za problem ravnoteže membrane koja prelazi krutu prepreku i česti su motivirajući primjer u teoriji varijacijskih nejednakosti i optimizaciji uz uvjete. Općenito je znatno teže doći do rješenja takvih problema ako problem promatramo u diferencijalnoj formulaciji pa je teorija varijacijskih nejednakosti i slabih rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi posebno korisna. Takav pristup vodi i na numeričku implementaciju primjenom metode konačnih elemenata. Kao primjer problema prepreke često se navodi problem žice ili membrane koja prelazi prepreku, međutim, teorija se naravno može formulirati i za druge elastične strukture, a jedna od njih je i štap opisan Euler-Bernoullijevom jednadžbom.

Ovaj je rad organiziran na sljedeći način. U prvom poglavlju uvodimo pojmove varijacijskih nejednakosti na Hilbertovim prostorima V, tj. na njihovim zatvorenim, konveksnim podskupovima. Zatim dokazujemo teoreme postojanja jedinstvenog rješenja i to na dva načina. Prvi se standardno temelji na Banachovom teoremu fiksne točke, a alternativno, probleme možemo promatrati i u okviru minimizacije funkcionala energije za što koristimo poopćenje pojma derivacije. Poglavlje završavamo s teorijom o aproksimaciji rješenja varijacijske nejednakosti prve vrste.

U drugom poglavlju se upoznajemo s metodom penalizacije koju najprije motiviramo primjerom minimizacije realne funkcije na nekom podskupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$, a zatim slično primijenjujemo i na varijacijske nejednakosti. Ideja je da umjesto rješavanja varijacijske nejednakosti na podskupu, problem zamijenimo s nizom nejednakosti na cijelom prostoru V i dokažemo konvergenciju ka traženom rješenju.

Trećim poglavljem prelazimo na problem ravnoteže Euler-Bernoullijevog štapa uz prepreku. Zadaću modeliramo kao minimizaciju funkcionala energije na nekom nepraznom, zatvorenom, konveksnom podskupu K koji je određen funkcijom prepreke, a takva je formulacija onda ekvivalentna varijacijskoj nejednakosti. Zatim uvodimo prostor konačnih elemenata pomoću kojeg problem možemo promatrati u konačnodimenzionalnom prostoru (*diskretni problem prepreke*) što onda vodi na numeričke metode kojima se bavimo u zadnjem dijelu poglavlja.

Numeričke simulacije i primjeri su dani u četvrtom poglavlju, a većina teorije koja će se koristiti u dokazima je dana u Dodatku A.1, A.2 i A.3.

Poglavlje 1

Varijacijske nejednakosti

1.1 Teoremi postojanja jedinstvenog rješenja

Postojanje jedinstvenog rješenja varijacijskih jednakosti slijedi pomoću Lax-Milgramove leme. Međutim, probleme koji vode na varijacijske nejednakosti često promatramo na nekom zatvorenom, konveksnom podskupu K pa ista teorija nije primjenjiva i treba je zasebno opisati. Najprije je potrebno uvesti neke pretpostavke na prostore i podskup K na kojem tražimo rješenje. U slučaju da nećemo uzimati neku od pretpostavki, to će biti posebno naznačeno.

Pretpostavke 1.1.1.

- *V Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$,*
- *V^* dual od V,*
- *$a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ koercitivna, neprekidna bilinearna forma,*
- *$L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidan, linearan funkcional,*
- *K konveksan, zatvoren, neprazan, $K \subseteq V$,*
- *$j : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konveksan, odozdo poluneprekidan funkcional takav da $j(v) > -\infty, \forall v \in V$ i $j \not\equiv +\infty$.*

Poluneprekidnost funkcionala j odozdo znači da za svaki niz $(u_n)_n \subseteq V$ takav da $u_n \to u$ vrijedi

$$j(u) \leq \liminf_n j(u_n).$$

Za svojstva i precizne definicije pogledati Dodatak A.3.

Problemi koje ćemo razmatrati mogu se formulirati u obliku dvije vrste varijacijskih nejednakosti:

- Prve vrste:
$$\textit{Naći } u \in K \textit{ t.d. } a(u, v-u) \geq L(v-u), \ \forall v \in K \tag{P_1}$$
- Druge vrste:
$$\textit{Naći } u \in V \textit{ t.d. } a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u), \ \forall v \in V \tag{P_2}$$

Napomena 1.1.2. Za $K = V, \ j \equiv 0$, (P_1) i (P_2) je ekvivalentno varijacijskoj jednakosti $a(u, v) = L(v)$, $v \in V$.

Napomena 1.1.3. (P_1) se može zapisati kao poseban slučaj (P_2) uz $j \equiv I_K$ gdje je

$$I_K(v) = \begin{cases} 0 & v \in K, \\ +\infty & v \notin K. \end{cases}$$

Teorem 1.1.4. *Problem (P_1) ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz. Prvo dokazujemo jedinstvenost rješenja, a zatim postojanje.

Jedinstvenost. Pretpostavimo da su u_1, u_2 dva različita rješenja. Tada vrijedi

$$a(u_1, v - u_1) \geq L(v - u_1) \quad \text{i} \quad a(u_2, v - u_2) \geq L(v - u_2), \ \forall v \in K.$$

Uzimajući $v = u_2$ u prvoj i $v = u_1$ u drugoj nejednakosti te zbrajanjem i korištenjem koercitivnosti bilinearne forme a, dobivamo

$$\alpha \|u_2 - u_1\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0,$$

iz čega slijedi $u_1 = u_2$ jer je $\alpha > 0$.

Postojanje. Dokaz se sastoji u tome da problem (P_1) svedemo na problem fiksne točke. Prema Rieszovom teoremu reprezentacije za Hilbertove prostore, postoji $A \in \mathcal{L}(V, V)$ i $l \in V$ takvi da

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v), \ \ \forall u, v \in V \quad i \quad L(v) = \langle l, v \rangle, \ \ \forall v \in V.$$

Tada je problem (P_1) ekvivaletan problemu nalaženja $u \in K$ takvog da

$$\langle Au - l, v - u \rangle \leq 0, \ \ \forall v \in K.$$

Množenjem ove nejednakosti s $-\rho$ za $\rho > 0$ i dodavanjem i oduzimanjem u dobivamo da je (P_1) ekvivalentan nalaženju $u \in K$ takvog da je

$$\langle u - \rho(Au - l) - u, v - u \rangle \leq 0, \ \ \forall v \in K, \ \rho > 0.$$

Sada je, prema Teoremu A.1.2, $u \in K$ rješenje prethodnog problema ako i samo ako

$$u = P_K(u - \rho(Au - l)), \text{ za neki } \rho > 0,$$

gdje je P_K operator projekcije na $K \subseteq V$ u normi prostora V. Promotrimo operator $W_\rho : V \longrightarrow V$ definiran sa

$$W_\rho(v) = P_K(v - \rho(Av - l)).$$

Budući da je P_K kontrakcija, za $v_1, v_2 \in V$ imamo

$$\left\| W_\rho(v_1) - W_\rho(v_2) \right\|^2 \leq \|v_1 - v_2\|^2 + \rho^2 \|A(v_2 - v_1)\|^2 - 2\rho a(v_2 - v_1, v_2 - v_1).$$

Ako još iskoristimo koercitivnost bilinearne forme a i neprekidnost operatora A imamo

$$\left\| W_\rho(v_1) - W_\rho(v_2) \right\|^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|^2) \|v_1 - v_2\|^2 .$$

Dakle, odabirom ρ takvog da $0 < \rho < 2\alpha/\|A\|^2$, W_ρ je stroga kontrakcija pa iz teorema fiksne točke sada slijedi da (P_1) ima rješenje. □

Sljedeća propozicija daje karakterizaciju rješenja pomoću minimizacije funkcionala J, ali i alternativni dokaz postojanja i jedinstvenosti.

Propozicija 1.1.5. *U slučaju da je bilinearna forma a dodatno simetrična i funkcional $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definiran s $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$, problem minimizacije*

$$\textit{Naći } u \in K \textit{ t.d. } J(u) \leq J(v), \ \forall v \in K, \tag{1.1}$$

ima jedinstveno rješenje. Dodatno, $u \in K$ je jedinstveno rješenje (P_1) ako i samo ako u rješava (1.1).

Dokaz. Za egzistenciju rješenja koristimo tvrdnju o dovoljnim uvjetima za postojanje jedinstvenog rješenja problema (1.1), a zatim karakterizaciju minimizacije pomoću Gateauxove derivacije.

- J je koercitivan funkcional.

  a je koercitivna s konstantom koercitivnosti $\alpha > 0$, a L je neprekidan pa imamo ocjenu

  $$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \geq \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 - \|L\| \|v\| .$$

  Stoga, zbog pozitivnosti koeficijenta uz $\|v\|^2$, sljedi

  $$\lim_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty.$$

- J je strogo konveksan.

  L je linearan pa je dovoljno pokazati da je preslikavanje $v \mapsto a(v, v)$ strogo konveksno. Neka je $t \in (0, 1)$ i $u, v \in V$ proizvoljni takvi da $u \neq v$. Iz simetričnosti bilinearne forme slijedi

  $$a(u - v, u - v) = a(u, u) + a(v, v) - 2a(u, v),$$

  a zbog $u \neq v$ je $a(u-v, u-v) > 0$ pa je $2a(u, v) < a(u, u) + a(v, v)$. Sada za konveksnu kombinaciju vrijedi

  $$\begin{aligned} a(tu + (1 - t)v, tu + (1 - t)v) &= t^2 a(u, u) + 2t(1 - t)a(u, v) + (1 - t)^2 a(v, v) \\ &< t^2 a(u, u) + t(1 - t)\left(a(u, u) + a(v, v)\right) + (1 - t)^2 a(v, v) \\ &= ta(u, u) + (1 - t)a(v, v). \end{aligned}$$

- J je neprekidan što slijedi direktno iz neprekidnosti L i a.

Iz prehodnih svojstava imamo da problem (1.1) ima jedinstveno rješenje (v. Teorem A.3.5 i Napomenu A.3.6). Treba još pokazati ekvivalenciju (1.1) i (P_1), a to vrijedi budući da je (1.1) ekvivalentno s

$$\textit{Naći } u \in K \textit{ t.d. } J'(u)(v - u) \geq 0, \ \forall v \in K, \tag{1.2}$$

gdje je $J'(u)(v - u)$ Gateauxova derivacija funkcionala J u u u smjeru $v - u$ (v. Propozicija 1.1.6). Zapravo je $J'(u)(v - u) = \langle J'(u), v - u\rangle_V$ jer je V Hilbertov prostor. Izračunajmo sada Gateauxovu derivaciju za naš J.

$$\begin{aligned} J'(u)v &= \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} \right) = \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} a(u + \lambda v, u + \lambda v) - L(u + \lambda v) - \frac{1}{2} a(u, u) + L(u) \right) = \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \lambda^2 a(v, v) + \frac{1}{2} \lambda a(u, v) - \lambda L(v) \right) = a(u, v) - L(v). \end{aligned}$$

Dakle, J ima Gateauxovu derivaciju i ona je dana prethodnim raspisom. Stoga je (1.2) ekvivalentno (P_1). $\square$

U dokazu smo koristili jednu korisnu karakterizaciju minimizatora funkcionala na Hilbertovom prostoru. Primijetimo da nužnost sljedeće tvrdnje vrijedi i bez pretpostavke o konveksnosti funkcionala F.

Propozicija 1.1.6. *Neka je V Hilbertov prostor, $K \subseteq V$ neprazan, konveksan i zatvoren skup. Neka je funkcional $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ konveksan i Gateaux diferencijabilan na K. Pretpostavimo dodatno $F \not\equiv +\infty$ i $F(v) > -\infty$, za svaki $v \in K$. Tada za $u \in K$ vrijedi*

$$F(u) \leq F(v), \ \forall v \in K$$

ako i samo ako

$$\langle F'(u), v - u\rangle \geq 0, \ \forall v \in K,$$

gdje je $F'(v)w$ Gateauxova derivacija funkcionala F u v u smjeru w.

Dokaz. Neka $u \in K$ minimizira F. Za svaki $v \in K$ i $\lambda \in (0, 1)$ je $\lambda u + (1 - \lambda)v \in K$ pa vrijedi

$$F(u) \leq F(\lambda u + (1 - \lambda)v).$$

Dijeljenjem s $\lambda \in (0, 1)$ dobivamo

$$\frac{1}{\lambda}\left(F(u - \lambda(v - u)) - F(u)\right) \geq 0.$$

Uzimanjem limesa kad $\lambda \to 0$ u prethodnom izrazu slijedi

$$\langle F'(u), v - u\rangle \geq 0, \ \forall v \in K.$$

Obratno, za svaki $v \in K$ i $\lambda \in (0, 1)$ je

$$\frac{1}{\lambda}(F((1 - \lambda)u + \lambda v) - F(u)) \leq F(v) - F(u),$$

gdje smo iskoristili konveksnost funkcionala F. Sada uzimanjem limesa $\lambda \to 0$ dobivamo

$$0 \leq \langle F'(u), v - u\rangle \leq F(v) - F(u), \ \forall v \in K.$$

□

Napomena 1.1.7. Dokaz Teorema 1.1.4 daje i algoritam za rješavanje (P_1) budući da je $v \mapsto P_K(v - \rho(Av - l))$ kontrakcija za $0 < \rho < 2\alpha/||A||^2$ što slijedi iz Banachovog teorema fiksne točke. Dakle, imamo iteracije:

$$\begin{cases} u^0 \in V \ proizvoljno \ odabran \\ u^{n+1} = P_K(u^n - \rho(Au^n - l)), \ za \ n \geq 0 \end{cases}$$

za koje vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, gdje je u rješenje (P_1).

Sada dokazujemo postojanje jedinstvenog rješenja problema (P_2) za što će nam trebati pomoćna lema čiji dokaz slijedi nakon dokaza teorema.

Lema 1.1.8. *Neka je $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ simetrična, neprekidna i koercitivna bilinearna forma s konstantnom koercitivnosti $\beta > 0$. Neka je $L \in V^*$ i $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksan, odozdo poluneprekidan funkcional i $J(v) = \frac{1}{2}b(v,v) + j(v) - L(v)$. Tada problem minimizacije $(\star)$*

$$\text{Naći } u \in V \text{ t.d. } J(u) \leq J(v),\ \forall v \in V. \tag{$\star$}$$

ima jedinstveno rješenje. Dodatno, $u \in V$ je rješenje od $(\star)$ ako i samo ako $u \in V$ rješava

$$b(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u),\ \forall v \in V. \tag{$\triangle$}$$

Teorem 1.1.9. *Problem (P_2) ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz. Jedinstvenost. Pretpostavimo da su $u_1, u_2 \in V$ dva različita rješenja. Tada $\forall v \in V$ imamo

$$a(u_1, v-u_1) + j(v) - j(u_1) \geq L(v-u_1) \quad \text{i} \quad a(u_2, v-u_2) + j(v) - j(u_2) \geq L(v-u_2).$$

Iz Pretpostavki 1.1.1 slijedi da postoji $v_0 \in V$ takav da $-\infty < j(v_0) < \infty$. Dakle, za $i = 1, 2$ imamo

$$-\infty < j(u_i) \leq j(v_0) - L(v_0 - u_i) + a(u_i, v_0 - u_i),$$

što pokazuje da je $j(u_i)$ konačan. Uzimanjem $v = u_2$ u prvoj i $v = u_1$ u drugoj nejednakosti te zbrajanjem vrijedi ocjena

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0,$$

gdje smo iskoristili korecitivnost bilinearne forme a. Iz prethodne ocjene sada slijedi $u_1 = u_2$ jer je $\alpha > 0$.

Postojanje. Ideja je opet iskoristiti teorem fiksne točke. Za svaki $u \in V$ i $\rho > 0$ promatramo zadaću:

Naći $w \in V$ t.d.

$$\langle w, v-w \rangle + \rho j(v) - \rho j(w) \geq \langle u, v-w \rangle + \rho L(v-w) - \rho a(u, v-w),\quad \forall v \in V. \tag{π_ρ^u}$$

Prednost ove zadaće je što ulogu bilinearne forme ima skalarni produkt na V, a on je simetričan. Iz leme prije iskaza teorema slijedi da za svaki $u \in V$, $\rho > 0$ postoji jedinstveno rješenje zadaće (π_ρ^u). Dakle, možemo definirati preslikavanje $f_\rho : V \longrightarrow V$ sa $f_\rho(u) = w$, gdje je w jedinstveno rješenje od (π_ρ^u). Cilj je sada dokazati da je takvo preslikavanje stroga kontrakcija uz dobro odabrani ρ.

Neka su $u_i \in V$ i $w_i = f_\rho(u_i)$ za $i = 1, 2$. Kao i u dokazu jedinstvenosti, može se pokazati da je $j(u_i)$ konačan pa slijedi

$$\langle w_1, w_2 - w_1 \rangle + \rho j(w_2) - \rho j(w_1) \geq \langle u_1, w_2 - w_1 \rangle + \rho L(w_2 - w_1) - \rho a(u_1, w_2 - w_1),$$

$$\langle w_2, w_1 - w_2 \rangle + \rho j(w_1) - \rho j(w_2) \geq \langle u_2, w_1 - w_2 \rangle + \rho L(w_1 - w_2) - \rho a(u_2, w_1 - w_2).$$

Zbrajanjem prethodnih nejednakosti, imamo

$$\begin{aligned} \left\| f_\rho(u_1) - f_\rho(u_2) \right\|^2 = \|w_2 - w_1\|^2 &\leq \langle (I - \rho A)(u_2 - u_1), w_2 - w_1 \rangle \\ &\leq \|I - \rho A\| \, \|u_2 - u_1\| \, \|w_2 - w_1\| \,. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\left\| f_\rho(u_1) - f_\rho(u_2) \right\| \leq \|I - \rho A\| \, \|u_2 - u_1\| \,. \tag{1.3}$$

Pokažimo da za $0 < \rho < 2\alpha / \|A\|^2$ vrijedi $\|I - \rho A\| < 1$. Za $v \in V$ imamo

$$\begin{aligned} \|(I - \rho A)v\|^2 = \langle (I - \rho A)v, (I - \rho A)v \rangle &= \langle v, v \rangle - 2\rho a(v, v) + \rho^2 \|Av\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha \|v\|^2 + \rho^2 \|A\|^2 \|v\|^2 \\ &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|^2) \|v\|^2 \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili koercitivnost bilinearne forme a. Sada iz (1.3) slijedi da je f_ρ stroga kontrakcija za $0 < \rho < 2\alpha / \|A\|^2$ pa iz Banachovog teorema fiksne točke zaključujemo da f_ρ ima jedinstvenu fiksnu točku u. Iz $f_\rho(u) = u$ slijedi

$$\langle u, v - u \rangle + \rho j(v) - \rho j(u) \geq \langle u, v - u \rangle + \rho L(v - u) - \rho a(u, v - u), \ \forall v \in V,$$

a nakon dijeljenja s $\rho > 0$, imamo

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u), \ \forall v \in V,$$

odnosno, u rješava (P_2). □

Dokaz Leme 1.1.8: Dokaz provodimo u dva koraka. Prvo dokazujemo postojanje jedinstvenog rješenja ($\star$), a zatim karakterizaciju rješenja ($\triangle$).

Postojanje jedinstvenog rješenja ($\star$).

Najprije primijetimo da je J strogo konveksan što slijedi iz stroge konveksnosti preslikavanja $v \mapsto b(v, v)$, konveksnosti funkcionala j i linearnosti od L. J je i odozdo poluneprekidan jer su $v \mapsto b(v, v)$ i L neprekidni, a j je odozdo poluneprekidan po pretpostavci. Nadalje, za j (konveksan, odozdo poluneprekidan i $j(v) > -\infty$) postoje[1] $\lambda \in V^*$ i $\mu \in \mathbb{R}$ takvi da

$$j(v) \geq \lambda(v) + \mu.$$

[1]Konveksna, odozdo poluneprekidna funkcija može se odozdo ograničiti afinom funkcijom. (v. [2], Propozicija 1.10)

Stoga, vrijedi ocjena

$$J(v) \geq \frac{\beta}{2}\|v\|^2 - \|\lambda\|\,\|v\| - \|L\|\,\|v\| + \mu = \left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}\|v\| - \frac{\|\lambda\| + \|L\|}{2}\sqrt{\frac{2}{\beta}}\right)^2 + \mu - \frac{(\|\lambda\| + \|L\|)^2}{2\beta}$$

iz čega slijedi

$$\lim_{\|v\|\to\infty} J(v) = +\infty$$

Dakle, postoji jedinstveno rješenje problema ($\star$) (v. Teorem A.3.5 i Napomenu A.3.6).

($\star$) $\implies$ ($\triangle$) Neka je $0 < t \leq 1$ i u rješenje od ($\star$). Tada za sve $v \in V$ imamo

$$J(u) \leq J(u + t(v - u)).$$

Ako stavimo $J_0(v) = \frac{1}{2}b(v, v) - L(v)$ i iskoristimo konveksnost od j, prethodna nejednakost postaje

$$\begin{aligned} 0 &\leq J_0(u + t(v - u)) - J_0(u) + j(u + t(v - u)) - j(u) \\ &\leq J_0(u + t(v - u)) - J_0(u) + t(j(v) - j(u)). \end{aligned}$$

Dijeljenjem s t i puštanjem limesa $t \to 0$ dobivamo

$$0 \leq \langle J_0'(u), v - u\rangle + j(v) - j(u), \ \forall v \in V.$$

Kao i u dokazu Propozicije 1.1.5, budući da je $b(\cdot,\cdot)$ simetrična bilinearna forma, imamo

$$\langle J_0'(v), w\rangle = b(v, w) - L(w), \ \forall v, w \in V.$$

Sada iz prethodna dva izraza slijedi ($\triangle$) jer

$$b(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u), \ \forall v \in V.$$

($\triangle$) $\implies$ ($\star$) Neka je u rješenje od ($\triangle$) i $v \in V$ proizvoljan. Tada vrijedi

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2}(b(v, v) - b(u, u)) + j(v) - j(u) - L(v - u).$$

Međutim, iz simetričnosti od b imamo

$$b(v, v) = b(u + v - u, u + v - u) = b(u, u) + 2b(u, v - u) + b(u - v, u - v),$$

iz čega slijedi

$$J(v) - J(u) = b(u, v - u) + j(v) - j(u) - L(v - u) + \frac{1}{2}b(v - u, v - u).$$

Budući da u rješava ($\triangle$) i $b(v - u, v - u) \geq 0$, iz prethodne jednakosti dobivamo

$$J(v) - J(u) \geq 0,$$

odnosno ($\star$).

$\square$

1.2 Aproksimacija varijacijskih nejednakosti prve vrste

Glavni rezultat ovog dijela je dokaz konvergencije niza aproksimacija problema (P_1) ka rješenju (P_1), ali u apstraktnom smislu. Odnosno, nećemo uzimati u obzir konkretan izbor prostora u kojem ćemo tražiti aproksimaciju kao ni izbor numeričke metode integracije za aproksimaciju bilinearne forme a i linearnog funkcionala L.

Uvodimo parametar h (promatrat ćemo aproksimacije kako $h \to 0$) i neka je definiran niz zatvorenih potprostora $(V_h)_h \leq V$. Pretpostavimo i da imamo familiju nepraznih, zatvorenih, konveksnih skupova $(K_h)_h$ takvu da za svaki h vrijedi $K_h \subseteq V_h$ i koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) Ako je $(v_h)_h$ niz takav da $v_h \in K_h, \forall h$ i $(v_h)_h$ je ograničen u V, tada vrijedi

$$\lim_{h\to 0} v_h \overset{w}{=} v \implies v \in K.$$

(ii) Postoje $\chi \subset V, \overline{\chi} = K$ i $r_h : \chi \longrightarrow K_h$ takvi da za svaki $v \in \chi$ vrijedi $\lim_{h\to 0} r_h v = v$.

Uz prethodno uvedene pretpostavke, problem (P_1) aproksimiramo zadaćom:

$$\textit{Naći } u_h \in K_h \textit{ t.d. } a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h),\ \forall v_h \in K_h. \tag{P_{1h}}$$

Postoji jedinstveno rješenje (P_{1h}) ako Teorem 1.1.4 iskoristimo za $V = V_h$, $K = K_h$.

Teorem 1.2.1. *Neka K_h i V_h zadovoljavaju (i) i (ii) i neka je u rješenje zadaće (P_1), a u_h rješenje (P_{1h}). Tada vrijedi*

$$\mathit{lim}_{h\to 0} \|u_h - u\| = 0.$$

Dokaz. Dokaz provodimo u tri dijela. Najprije izvodimo ocjene za niz $(u_h)_h$, a zatim pokazujemo slabu i jaku konvergenciju.

Ograničenost niza $(u_h)_h$.

u_h rješava (P_{1h}) pa vrijedi

$$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, v_h) - L(v_h - u_h),\ \forall v_h \in K_h.$$

Iz korecitivnosti i neprekidnosti bilinearne forme a i funkcionala L sada slijedi

$$\alpha \|u_h\|^2 \leq a(u_h, u_h) \leq \|A\| \|u_h\| \|v_h\| + \|L\| (\|u_h\| + \|v_h\|), \quad \forall v_h \in K_h.$$

Neka je $v_0 \in \chi$ i $v_h := r_h v_0 \in K_h$. Iz uvjeta (ii) za familiju $(K_h)_h$ imamo jaku konvergenciju $v_h \overset{h}{\longrightarrow} v_0$ iz čega slijedi da je niz $(v_h)_h$ ograničen, tj. postoji $m > 0$ takav da je $\|v_h\| \leq m$, za svaki h. Sada prethodna ocjena za u_h glasi

$$\|u_h\|^2 \leq \frac{1}{\alpha}\{(m \|A\| + \|L\|) \|u_h\| + \|L\| m\} = C_1 \|u_h\| + C_2, \quad \forall v_h \in K_h,$$

gdje je $C_1 = \frac{1}{\alpha}(m\,\|A\| + \|L\|)$, $C_2 = \frac{m}{\alpha}\,\|L\|$ iz čega za svaki h slijedi $\|u_h\| \leq C$.

Slaba konvergencija niza $(u_h)_h$.

Iz pokazane ograničenosti niza $(u_h)_h$, upotrebom Banach-Alaoglu-Bourbakijevog teorema (v. Teorem A.3.2) slijedi postojanje podniza takvog da $u_{h_i} \rightharpoonup u^* \in V$, a iz svojstva (i) familije $(K_h)_h$ imamo $u^* \in K$. Dalje dokazujemo da je u^* rješenje problema (P_1). Za podniz $(u_{h_i})_{h_i}$ vrijedi

$$a(u_{h_i}, u_{h_i}) \leq a(u_{h_i}, v_{h_i}) - L(v_{h_i} - u_{h_i}),\ \forall v_{h_i} \in K_{h_i},$$

pa za $v \in \chi$ i $v_{h_i} = r_{h_i} v$ imamo

$$a(u_{h_i}, u_{h_i}) \leq a(u_{h_i}, r_{h_i} v) - L(r_{h_i} v - u_{h_i}).$$

Budući da je $u_{h_i} \rightharpoonup u^*$, a iz (ii) imamo i $\lim\limits_{h_i \to 0} r_{h_i} v = v$, prethodna nejednakost na limesu glasi:

$$\liminf_{h_i \to 0} a(u_{h_i}, u_{h_i}) \leq a(u^*, v) - L(v - u^*), \quad \forall v \in \chi. \tag{1.4}$$

Nadalje, vrijedi

$$0 \leq a(u_{h_i} - u^*, u_{h_i} - u^*) = a(u_{h_i}, u_{h_i}) - a(u_{h_i}, u^*) - a(u^*, u_{h_i}) + a(u^*, u^*)$$

odnosno

$$a(u_{h_i}, u^*) + a(u^*, u_{h_i}) - a(u^*, u^*) \leq a(u_{h_i}, u_{h_i}).$$

Uzimanjem limesa u prethodnoj nejednakosti i korištenjem (1.4) dobivamo

$$a(u^*, u^*) \leq \liminf_{h_i \to 0} a(u_{h_i}, u_{h_i}) \leq a(u^*, v) - L(v - u^*), \quad \forall v \in \chi. \tag{1.5}$$

(1.5) sada daje (P_1) za $v \in \chi$, odnosno

$$a(u^*, v - u^*) \geq L(v - u^*), \quad \forall v \in \chi,\ u^* \in K.$$

Budući da je χ gust u K i a, L su neprekidni, slijedi

$$a(u^*, v - u^*) \geq L(v - u^*), \quad \forall v \in K,\ u^* \in K,$$

odnosno, u^* je rješenje od (P_1). Prema Teoremu 1.1.4 rješenje zadaće (P_1) je jedinstveno, pa je $u = u^*$ jedinstveno gomilište niza $(u_h)_h$ u slaboj topologiji prostora V. Dakle, cijeli niz $(u_h)_h$ konvergira slabo ka u.

Jaka konvergencija niza $(u_h)_h$.

Ponovnim korištenjem koercitivnosti bilinearne forme imamo

$$0 \leq \alpha\,\|u_h - u\|^2 \leq a(u_h - u, u_h - u) = a(u_h, u_h) - a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u), \tag{1.6}$$

gdje je u rješenje (P_1), a u_h rješenje (P_{1h}), a budući da je $r_h v \in K_h, \forall v \in \chi$, iz (P_{1h}) dobivamo

$$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, r_h v) - L(r_h v - u_h), \quad \forall v \in \chi.$$

Uvrštavanjem prethodne ocjene u (1.6) i puštanjem limesa $h \to 0$, za svaki $v \in \chi$ vrijedi

$$0 \leq \liminf_{h\to 0} \alpha \, \|u_h - u\|^2 \leq \limsup_{h\to 0} \alpha \, \|u_h - u\|^2 \leq a(u, v - u) - L(v - u),$$

gdje smo iskoristili konvergencije $r_h v \to v$ i $u_h \rightharpoonup v$. Zbog gustoće χ u K prethodno vrijedi i za svaki $v \in K$ pa uzimanjem $v = u$ konačno dobivamo

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - u\|^2 = 0.$$

□

Poglavlje 2

Metoda penalizacije

2.1 Motivacija

Neka je $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $S \subset \mathbb{R}^n,\ S \neq \emptyset$. Pretpostavimo da rješavamo problem

$$\min_{x \in S} f(x).$$

Ideja pronalaska rješenja penalizacijom je da se ono pokuša naći na cijelom prostoru $\mathbb{R}^n$, a funkciji cilja prethodno dodajemo penalizacijski član. Odnosno, imamo sljedeću relaksaciju minimizacijskog problema

$$\min_{x \in S} f(x) \quad \longleftrightarrow \quad \min_{x \in R^n} f_c(x)$$

gdje je $f_c(x) = f(x) + cP(x)$ uz $c > 0$. Funkciju $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo penalizacijskom funkcijom i odabiremo je tako da vrijede sljedeća svojstva

- $P(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$,
- $P(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x \in S$,

koja će biti presudna za opravdanje metode. Naime, za dovoljno veliki c i za x takav da $x \notin S$, penalizacijski član $cP(x) \geq 0$ će biti velik u odnosu na vrijednost $f(x)$. Stoga, povećavanjem koeficijenta c, minimizacija funkcije f_c nas "tjera" da izaberemo $x \in S$, a u tom slučaju takav x minimizira i funkciju f na S jer je tada $P(x) = 0$. Promotrimo sljedeći jednostavni primjer koji ilustrira predloženu ideju.

Primjer 2.1.1. Za skupove oblika

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$$

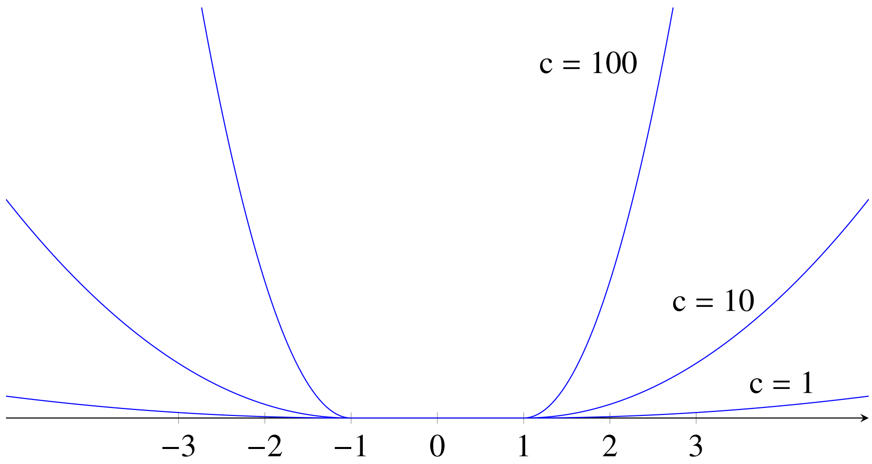
često se uzima penalizacijska funkcija

$$P(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} (g_i(x)_+)^2 ,$$

gdje je $g_+ = max\{0, g\}$. Ako želimo minimizirati neku funkciju na intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, stavimo

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b,\ x \geq a\},$$

odnosno $g_1(x) = x - b,\ g_2(x) = a - x$. Penalizacijska funkcija je po dijelovima polinom, a iz njenog grafa (za $a = -1, b = 1$) je možda jasnije zašto povećanjem koeficijenta c možemo doći do traženog rješenja.



2.2 Penalizacija varijacijskih nejednakosti

Želimo prethodno opisanu ideju primijeniti i na varijacijske nejednakosti tipa (P_1). Rezultat će biti niz ekvivalentnih problema za čija ćemo rješenja dokazati konvergenciju prema rješenju početnog problema. Najprije treba uvesti funkcional koji će imati ulogu penalizacijske funkcije.

Uz već uvedene Pretpostavke 1.1.1 na Hilbertov prostor V, bilinearnu formu a, linearan funkcional L, neka je dodatno $j : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ slabo nizovno poluneprekidan odozdo. Budući da će j imati ulogu penalizacijske funkcije P, uvodimo i dodatne pretpostavke.

Pretpostavke 2.2.1.

- $j(v) = 0 \ \Leftrightarrow\ v \in K,$
- $j(v) \geq 0, \quad \forall v \in V.$

Za $\epsilon > 0$ definiramo $j_\epsilon := \dfrac{1}{\epsilon} j$ pa penalizacija problema (P_1) glasi:

$$\textit{Naći } u_\epsilon \in V \textit{ t.d. } a(u_\epsilon, v - u_\epsilon) + j_\epsilon(v) - j_\epsilon(u_\epsilon) \geq L(v - u_\epsilon), \ \forall v \in V. \tag{2.1}$$

Prethodna nejednakost je oblika (P_2) pa iz Teorema 1.1.9 slijedi da za svaki $\epsilon > 0$ postoji jedinstveno rješenje u_ϵ.

Napomena 2.2.2. Uz simetričnu $a(\cdot,\cdot)$, prema Lemi 1.1.8, penalizirani problem (2.1) ekvivalentan je minimizaciji funkcionala $J_\epsilon(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) + j_\epsilon(v)$ na V, a za rješenje (P_1) treba promatrati konvergenciju $\lim\limits_{\epsilon \to 0} u_\epsilon$. Sada je jasna veza s prethodnom motivacijom o minimizaciji funkcije na $\mathbb{R}^n$.

Za provjeravanje uvjeta slabe nizovne poluneprekidnosti odozdo funkcionala j korisno je navesti jedan dovoljan uvjet koji slijedi iz sljedeće propozicije.

Propozicija 2.2.3. *Neka je V Hilbertov prostor i $K \subseteq V$ konveksan skup. Za Gateaux diferencijabilnu funkciju $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ sljedeće je ekvivalentno:*

(i) *F je konveksna na K*

(ii) $F(v) \geq F(u) + \langle F'(u), v - u \rangle, \quad \forall u, v \in K$

Dokaz. Neka je F konveksna i $u, v \in K$ proizvoljni. Tada za $\lambda \in (0,1)$ vrijedi

$$F(u + \lambda(v - u)) = F(\lambda v + (1-\lambda)u) \leq \lambda F(v) + (1-\lambda)F(u).$$

Dijeljenjem prethodnog izraza sa λ dobivamo

$$\frac{F(u + \lambda(v-u)) - F(u)}{\lambda} \leq F(v) - F(u),$$

pa puštanjem limesa $\lambda \to 0+$ prethodni izraz je upravo (ii).

Obratno, neka vrijedi nejednakost iz (ii) i neka je $\lambda \in (0,1)$. Tada za proizvoljne $u, v \in V$ vrijedi

$$F(v) \geq F(\lambda v + (1-\lambda)u) + \langle F'(\lambda v + (1-\lambda)u), (1-\lambda)(v-u) \rangle,$$

$$F(u) \geq F(\lambda v + (1-\lambda)u) + \langle F'(\lambda v + (1-\lambda)u), -\lambda(v-u) \rangle,$$

gdje smo iskoristili $\lambda v + (1-\lambda)u \in K$ jer je K konveksan. Prethodne izraze dobijemo ako u (ii) uvrstimo prvo $v = v$, $u = \lambda v + (1-\lambda)u$ pa $v = u$, $u = \lambda v + (1-\lambda)u$. Množenjem prve nejednakosti s λ, a druge s $(1-\lambda)$ i zbrajanjem dobivamo

$$\lambda F(v) + (1-\lambda)F(u) \geq F(\lambda v + (1-\lambda)u).$$

Dakle, F je konveksna. $\square$

Primijetimo da nužnost prethodne tvrdnje vrijedi i za F koja je samo usmjereno diferencijabilna. Naime, u dokazu nužnosti smo uzimali $\lambda \in (0,1)$ i promatrali limes kad $\lambda \to 0+$. Za obratan smjer smo ipak koristili linearnost Gateauxove derivacije. Za dodatna svojstva i precizne definicije svakako upućujemo na Dodatak A.2 jer ćemo ih koristiti i u tekstu koji slijedi.

Korolar 2.2.4. *Neka je V Hilbertov prostor, $K \subseteq V$ konveksan, zatvoren skup i $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$. Ako je F Gateaux diferencijabilna i konveksna funkcija, tada je F slabo nizovno poluneprekidna odozdo.*

Dokaz. Treba dokazati da za proizvoljan slabo konvergentan niz $(u_m)_m \subseteq K$, $u_m \rightharpoonup u \in K$, vrijedi $\liminf_m F(u_m) \geq F(u)$. Ovdje je $u \in K$ jer je K konveksan i zatvoren pa je i slabo zatvoren.[1]. Korištenjem prethodne propozicije imamo

$$\liminf_m (F(u_m) - F(u)) \geq \liminf_m \langle F'(u), u_m - u\rangle = 0,$$

gdje smo za zadnju jednakost iskoristili slabu konvergenciju niza $(u_m)_m$ i činjenicu da je Gateauxova derivacija neprekidan linearan operator pa je $\liminf_m F(u_m) \geq F(u)$. □

Alternativno, Propozicija A.3.7 također daje dovoljne uvjete za F koja je neprekidna i konveksna.

Napomena 2.2.5. Ako pretpostavimo da je j_ϵ Gateaux diferencijabilan funkcional, tada je u_ϵ rješenje problema (2.1) ako i samo ako

$$a(u_\epsilon, v) + \langle j'_\epsilon(u_\epsilon), v\rangle = L(v), \ \forall v \in V. \tag{2.2}$$

$j'_\epsilon(v)$ je element duala od V (Gateauxova derivacija od j_ϵ u v), a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni produkt na Hilbertovom prostoru V. Ekvivalenciju možemo pokazati korištenjem definicije Gateauxove derivacije i derivacije u smjeru. Neka u_ϵ rješava (2.1) i uzmimo $v = u_\epsilon + \lambda w$ gdje je $w \in V$ proizvoljan. Tada je

$$a(u_\epsilon, \lambda w) + j_\epsilon(u_\epsilon + \lambda w) - j_\epsilon(u_\epsilon) \geq \lambda L(w), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dijeljenjem s $\lambda > 0$ i puštanjem limesa $\lambda \to 0+$ prethodno je ekvivalentno s

$$a(u_\epsilon, w) + \langle j'_\epsilon(u_\epsilon), w\rangle \geq L(w), \quad \forall w \in V,$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je j_ϵ Gateaux diferencijabilan. Budući da je V vektorski prostor, zadnja nejednakost vrijedi i za $-w \in V$ iz čega slijedi (2.2).

[1](v. [2], Poglavlje 3.)

Treba još dokazati konvergenciju niza penaliziranih problema prema rješenju (P_1).

Teorem 2.2.6. *Ako vrijede Pretpostavke 1.1.1, tada je*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|u_\epsilon - u\| = 0,$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} j_\epsilon(u_\epsilon) = 0,$$

gdje je u_ϵ rješenje (2.1)*, a u rješenje* (P_1).

Dokaz. Prvi korak u dokazu teorema je izvesti ocjene koje ćemo koristiti u dokazima slabe i jake konvergencije.

Apriorne ocjene. Iz (2.1) imamo

$$a(u_\epsilon, u_\epsilon) + j_\epsilon(u_\epsilon) \leq a(u_\epsilon, v) - L(v - u_\epsilon) + j_\epsilon(v), \ \forall v \in V.$$

Budući da je $j_\epsilon(v) = 0$, za svaki $v \in K$, iz prethodne nejednakosti slijedi

$$a(u_\epsilon, u_\epsilon) + j_\epsilon(u_\epsilon) \leq a(u_\epsilon, v) - L(v - u_\epsilon), \ \forall v \in K. \tag{2.3}$$

Neka je $v_0 \in K$ proizvoljan i fiksan. Takav v_0 postoji jer je $K \neq \emptyset$. Korištenjem prvo koercitivnosti forme a i nenegativnosti funkcionala j na V, a zatim nenegativnosti forme a na V, iz (2.3) imamo da vrijede nejednakosti

$$\alpha \|u_\epsilon\|^2 \leq \|A\| \|u_\epsilon\| \|v_0\| + \|L\| (\|u_\epsilon\| + \|v_0\|)$$

$$0 \leq j(u_\epsilon) \leq \epsilon(\|A\| \|u_\epsilon\| \|v_0\| + \|L\| (\|u_\epsilon\| + \|v_0\|)).$$

Sada iz prve nejednakosti slijedi

$$\|u_\epsilon\|^2 \leq \frac{1}{\alpha}\{ (\|A\| \|v_0\| + \|L\|) \|u_\epsilon\| + \|L\| \|v_0\| \} = C_1 \|u_\epsilon\| + C_2,$$

gdje su $C_1 = \frac{1}{\alpha}(\|A\| \|v_0\| + \|L\|)$, $C_2 = \frac{1}{\alpha} \|L\| \|v_0\|$ pa vrijedi

$$\|u_\epsilon\| \leq C, \ \forall \epsilon > 0, \tag{2.4}$$

a onda iz druge nejednakosti dobivamo

$$0 \leq j(u_\epsilon) \leq D\epsilon, \tag{2.5}$$

za neki $C > 0$ neovisan o ϵ i $D = C \|A\| \|v_0\| + \|L\| (C + \|v_0\|)$.

Slaba konvergencija. Iz (2.4) imamo ograničenost niza $(u_\epsilon)_\epsilon$ pa možemo uzeti njegov podniz (koji također označavamo sa $(u_\epsilon)_\epsilon$) za koji vrijedi slaba konvergencija u V:

$$\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon \overset{w}{=} u^*,$$

gdje je $u^* \in V$. Iz (2.5) i slabe nizovne poluneprekidnosti odozdo funkcionala j slijedi

$$j(u^*) = 0 \implies u^* \in K. \tag{2.6}$$

Treba pokazati $u^* = u$. Iz (2.1) imamo

$$a(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq a(u_\epsilon, v) - L(v - u_\epsilon) - j_\epsilon(u_\epsilon), \ \forall v \in K,$$

a jer je $j(v) \geq 0$ slijedi

$$a(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq a(u_\epsilon, v) - L(v - u_\epsilon), \ \forall v \in K,$$

što uzimanjem limesa kad $\epsilon \to 0$ daje

$$a(u^*, u^*) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \ a(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq a(u^*, v) - L(v - u^*) - j_\epsilon(u^*), \ \forall v \in K.$$

Uz (2.6) sada slijedi $u^* \in K$ i nejednakost:

$$a(u^*, v - u^*) \geq L(v - u^*), \ \forall v \in K,$$

čime smo dokazali $u^* = u$, a zbog jedinstvenosti rješenja u, i da cijeli niz $(u_\epsilon)_\epsilon$ slabo konvergira ka u.

Jaka konvergencija. Iz formulacije (2.1) imamo da za svaki $v \in K$ vrijedi

$$\begin{aligned}
0 &\leq \alpha \|u_\epsilon - u\|^2 + j_\epsilon(u_\epsilon) \leq a(u_\epsilon - u, u_\epsilon - u) + j_\epsilon(u_\epsilon) \\
&\leq a(u_\epsilon, u_\epsilon) + j_\epsilon(u_\epsilon) - a(u, u_\epsilon) - a(u_\epsilon, u) + a(u, u) \\
&\leq a(u_\epsilon, v) - L(v - u_\epsilon) - a(u, u_\epsilon) - a(u_\epsilon, u) + a(u, u),
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili $j(v) = 0 \Leftrightarrow v \in K$ i $j(v) \geq 0$. Sada iz slabe konvergencije niza $(u_\epsilon)_\epsilon$ prethodni izraz na limesu glasi

$$\begin{aligned}
0 &\leq \liminf_{\epsilon \to 0} \ \left(\alpha \|u_\epsilon - u\|^2 + j_\epsilon(u_\epsilon)\right) \leq \limsup_{\epsilon \to 0} \ \left(\alpha \|u_\epsilon - u\|^2 + j_\epsilon(u_\epsilon)\right) \\
&\leq a(u, v - u) - L(v - u), \ \forall v \in K.
\end{aligned}$$

Ako stavimo $v = u$, imamo

$$\lim_{\epsilon \to 0} \ \left(\alpha \|u_\epsilon - u\|^2 + j_\epsilon(u_\epsilon)\right) = 0.$$

□

Poglavlje 3

Problem prepreke za elastični štap

U ovom poglavlju promatramo deformaciju štapa opisanu Euler - Bernoullijevom jednadžbom, koji prelazi prepreku reprezentiranu nekom funkcijom P. Ponovimo najprije osnovne jednadžbe i formulaciju slabog rješenja za slučaj bez prepreke.

Ravnoteža štapa duljine l pri djelovanju sile f, uz Dirichletove rubne uvjete, opisana je sljedećom rubnom zadaćom:

$$\begin{cases} -(EIu'')'' = f \\ u(0) \ = u(l) \ = 0 \\ u'(0) = u'(l) = 0. \end{cases}$$

Neka je

$$V := H_0^2(0,l) = \{v \in H^2(0,l) : v(0) = v'(0) = 0, v(l) = v'(l) = 0\}.$$

Množenjem jednadžbe štapa s $v \in H$, integriranjem na $(0,l)$ i parcijalnom integracijom dolazimo do slabe formulacije, tj. tražimo $u \in V$ takav da vrijedi

$$a(u,v) = L(v), \ \forall v \in V,$$

gdje je

$$a(u,v) = \int_0^l EIu''v'', \qquad L(v) = \int_0^l fv.$$

Postojanje jedinstvenog rješenja prethodne varijacijske jednakosti slijedi provjeravanjem pretpostavki Teorema 1.1.4 za $K = V$, gdje ćemo uzimati $EI > 0$, a $f \in L^2(0,l)$.

- V je zatvoreni potprostor od $H^2(0,l)$ pa je i sam Hilbertov.

  Neka je $(v_n)_n \subseteq V$ niz takav da $v_n \xrightarrow{H^2} v$, $v \in H^2(0,l)$, a treba pokazati $v \in V$. Iz definicije norme na H^2 slijedi $v_n \xrightarrow{H^1} v$ i $v_n' \xrightarrow{H^1} v'$. Iz ulaganja $H^1(0,l) \hookrightarrow C([0,l])$

imamo
$$0 \le |v_n(0) - v(0)| \le \|v_n - v\|_\infty \le C \|v_n - v\|_{H^1},$$

$$0 \le |v_n'(0) - v'(0)| \le \left\|v_n' - v'\right\|_\infty \le C \left\|v_n' - v'\right\|_{H^1}.$$
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $v_n \in V$ pa uzimanjem limesa u prethodnim izrazima slijedi $v(0) = v'(0) = 0$. Analogno provedemo i za desni rub intervala $x = l$.

- *a neprekidna, koercitivna, bilinearna forma.*

  a je očito bilinearna i simetrična. Norma na $H^2(0, l)$ dana je sa
  $$\|v\|_{H^2} = \sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2}$$
  pa, pomoću Hölderove nejednakosti, vrijedi
  $$|a(u, v)| \le C \|u''\|_{L^2} \|v''\|_{L^2} \le C \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2},$$
  čime imamo neprekidnost bilinearne forme. Korištenjem Poincaréove nejednakosti za u' i u dobivamo
  $$\begin{aligned} a(u, u) = \int_0^l EIu''u'' = EI \|u''\|_{L^2}^2 &\ge \frac{1}{3} EI \|u''\|_{L^2}^2 + \frac{2}{3} EIc_p^2 \|u'\|_{L^2}^2 \\ &\ge \frac{1}{3} EI \|u''\|_{L^2}^2 + \frac{1}{3} EIc_p^2 \|u'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{3} EIc_p^4 \|u\|_{L^2}^2 \ge C \|u\|_{H^2}^2, \end{aligned}$$
  gdje je $C := EI \cdot \min\{1, c_p^2, c_p^4\}$. Ovdje je c_p konstanta iz Poincaréove nejednakosti. Dakle, a je koercitivna.

- *L neprekidan, linearan funkcional.*

  $f \in L^2(0, l)$ pa tvrdnja slijedi direktnim korištenjem Hölderove nejednakosti:
  $$|f(v)| = \left| \int_0^l f v \right| \le \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^2}.$$

Neka je sada prepreka dana funkcijom $P \in H^2(0, l)$ za koju dodatno vrijedi $P(0), P(l) \le 0$. Problem prepreke za Euler-Bernoullijev štap definiramo kao

$$\textit{Naći } u \in K \textit{ t.d. } a(u, v - u) \ge L(v - u),\ \forall v \in K \tag{P}$$

gdje je
$$K := \{v \in V : v \ge P \textit{ na } [0, l]\} \subseteq V.$$
(P) ima oblik varijacijske nejednakosti (P_1) pa za postojanje jedinstvenog rješenja treba provjeriti pretpostavke Teorema 1.1.4 koje se odnose na skup K budući da je ostalo već pokazano.

- K neprazan i konveksan.

  K je očito konveksan. Za dokazati da je K neprazan, konstruirajmo prvo afinu funkciju kroz točke $(0, P(0))$ i $(l, P(l))$. Za takvu funkciju vrijedi $g(x) \leq 0,\ x \in [0, l]$ jer je $P(0), P(l) \leq 0$ pa ako definiramo $v := P - g$, imamo da je $P = v + g \leq v$ na $[0, l]$. Svakako još vrijedi i $v \in H^2(0, l)$ jer su $v, P \in H^2(0, l)$.

- *K zatvoren.*

  Uzmimo niz $(v_n)_n \subseteq K$ t.d. $v_n \xrightarrow{H^2} v$. Tada vrijedi i konvergencija $v_n \xrightarrow{H^1} v$. Kao i u dokazu zatvorenosti prostora V, korištenjem ulaganja $H^1([0, l]) \hookrightarrow C([0, l])$ imamo

  $$v_n(x) \longrightarrow v(x),\ \forall x \in (0, l).$$

  Jer je $v_n(x) \geq P(x)$, za svaki $x \in (0, l)$ i uzimajući u obzir točkovnu konvergenciju, slijedi $v(x) \geq P(x),\ \forall x \in (0, l)$, tj. $v \in K$.

Sljedeća napomena ukratko objašnjava zašto je (P) dobra definicija problem prepreke.

Napomena 3.0.1. Ako rješavamo problem bez prepreke, tada imamo varijacijsku jednakost na V, a zbog simetričnosti bilinearne forme a, to je ekvivalentno minimizaciji funkcionala $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ na V. Uvođenjem ograničenja $v \geq P$, J treba minimizirati na $K \subseteq V$ što je, opet zbog simetričnosti bilinearne forme, ekvivalentno problemu (P).

3.1 Aproksimacija metodom konačnih elemenata

Jedan način kako doći do aproksimacije rješenja problema (P) je najprije promotriti (P) na nekom konačnodimenzionalnom potprostoru od V. Zatim, budući da je čak i na takvom prostoru formulacija dana s nejednakosti, treba iskoristiti neku od ekvivalentnih formulacija.

Do konačnodimenzionalnog prostora dolazimo metodom konačnih elemenata. Fiksiramo $n \in \mathbb{N}$ i podijelimo interval $(0, l)$ na ekvidistantnu mrežu gdje je $h = l/n$ udaljenost dva susjedna čvora mreže $M_h := \{x_i : i = 0, \ldots, n\}$. Budući da se u slaboj formulaciji javljaju derivacije drugog reda, za elemente baze uzimamo kubične polinome φ_i. Takvi polinomi daju konačne i netrivijalne druge derivacije, a njihove koeficijente određujemo iz vrijednosti polinoma i njihovih derivacija u rubovima podnitervala. Dakle, imamo $2n + 2$ stupnjeva slobode. Konačno, definiramo prostor

$$V_h := span\{\varphi_i : i = 0, \ldots, 2n + 1\}$$

i zatvoren, konveksan podskup na kojem tražimo rješenje

$$K_h := \{v_h \in V_h : v_n(x_i) \geq P(x_i), \forall x_i \in M_h\}. \tag{3.1}$$

Aproksimacija za (P) sada glasi:

$$\textit{Naći } u_h \in K_h \textit{ t.d. } a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h), \ \forall v_h \in K_h, \tag{P_h}$$

a z Teorema 1.1.4 slijedi da (P_h) ima jedinstveno rješenje. (P_h) još zovemo *diskretni problem prepreke*.

Ostaje još pojasniti kako konkretno odrediti polinome φ_i. U svakom čvoru mreže ćemo kontrolirati vrijednost aproksimacije rješenja i njegove derivacije. Točnije, za neki $u_h \in V_h$ imamo zapis

$$u_h = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{2i}\varphi_{2i} + \alpha_{2i+1}\varphi_{2i+1}$$

i želimo da vrijedi $u_h(x_j) = \alpha_{2j}$, $u_h'(x_j) = \alpha_{2j+1}$ za $x_j \in M_h$. Dakle, trebaju nam polinomi takvi da za $i, j = 0, \ldots, n$ vrijedi

$$\begin{cases} \varphi_{2i}(x_j) = \delta_{ij}, & \varphi_{2i}'(x_j) = 0, \\ \varphi_{2i+1}(x_j) = 0, & \varphi_{2i+1}'(x_j) = \delta_{ij}. \end{cases}$$

Prethodna svojstva možemo dobiti ako definiramo

$$\varphi_{2i} := \psi_0\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad \varphi_{2i+1} := h\psi_1\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad i = 0, \ldots, n, \tag{3.2}$$

gdje su

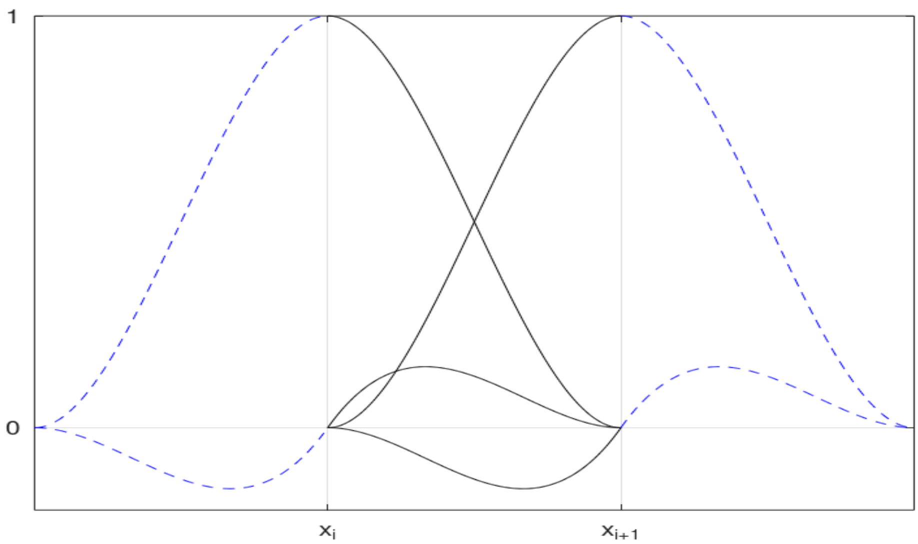
$$\psi_0(x) = \begin{cases} (|x|-1)^2(2|x|+1) & x \in [-1, 1], \\ 0 & \textit{inače}, \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} x(|x|-1)^2 & x \in [-1, 1], \\ 0 & \textit{inače}. \end{cases}$$

Za bazne funkcije iz (3.2) imamo

$$supp\varphi_{2i}, supp\varphi_{2i+1} \subseteq [x_{i-1}, x_{i+1}],$$

što će olakšati računanje elemenata matrice krutosti jer će ona biti sedam-dijagonalna. Uvođenjem prostora konačnih elemenata, u sljedećem teoremu provjeravamo hoće li, profinjavanjem mreže M_h ($h \to 0$), niz rješenja $(u_h)_h$ sve bolje aproksimirati rješenje u.



Slika 3.1: Bazne funkcije u čvorovima x_i, x_{i+1} i njihovi doprinosi na element $[x_i, x_{i+1}]$.

Teorem 3.1.1. *Neka je u_h rješenje problema (P_h), a u rješenje (P). Tada za $h \to 0$ vrijedi*

$$\|u - u_h\|_{H^2} \to 0.$$

Dokaz. Treba provjeriti svojstva prije iskaza Teorema 1.2.1 za familiju skupova $(K_h)_h$ definiranu u (3.1).

(i). Za h zadan i ekvidistantnu mrežu M_h ($h = l/n$, za neki $n \in \mathbb{N}$), neka je $(v_h)_h$ niz takav da $v_h \in K_h$, $\forall h$. Nadalje, pretpostavimo $v_h \rightharpoonup v$ u $H^2(0, l)$. Treba dokazati $v \in K$, odnosno, $v(x) \geq P(x), \forall x \in [0, l]$.

Uzmimo podniz niza $(v_h)_h$ takav da je $h_i = l/2^i$, $i \in \mathbb{N}$ i označimo ga sa $(v_{h_i})_i$. Iz kompaktnosti ulaganja $H^2(0, l) \overset{c}{\hookrightarrow} H^1(0, l)$ slijedi $\left\|v_{h_i} - v\right\|_{H^1} \to 0$, a iz neprekidnosti ulaganja $H^1(0, l) \hookrightarrow C([0, l])$ imamo i uniformnu konvergenciju podniza, odnosno, $\left\|v_{h_i} - v\right\|_{L^\infty} \to 0$. Sada za proizvoljan $y \in M := \bigcup_{i=1}^{\infty} M_{h_i}$ vrijedi

$$0 \leq |v_{h_i}(y) - v(y)| \leq \left\|v_{h_i} - v\right\|_{L^\infty},$$

iz čega slijedi $v_{h_i}(y) \to v(y)$. Budući da je $(M_{h_i})_i$ rastući niz subdivizija intervala, za odabrani y postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $i \geq j$, $y \in M_{h_i}$ (odn. $v_{h_i}(y) \geq P(y)$). Iz točkovne konvergencije sada slijedi $v(y) \geq P(y)$. Takav j možemo naći za svaki y, a jer je y bio odabran proizvoljno, imamo

$$v(y) \geq P(y), \;\; \forall y \in M.$$

Sada iskoristimo gustoću skupa $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_{h_i}$ u $[0,l]$ i neprekidnost funkcija v i P pa prethodna nejednakost vrijedi za svaki $y \in [0,l]$. Dakle, $v \in K$.

(ii). Neka je $\chi = \mathcal{D}([0,l]) \cap K$, a M_h ekvidistantna mreža na $[0,l]$. Definiramo operator $r_h : H^2(0,l) \longrightarrow V_h$ kao kubičnu Hermiteovu interpolaciju za koju vrijedi:

$$(r_h v)(x_i) = v(x_i) \quad \text{i} \quad (r_h v)'(x_i) = v'(x_i), \quad \forall x_i \in M_h.$$

Iz prethodnih svojstava direktno slijedi da je za $v \in K$, $r_h v \in K_h$ pa imamo:

$$r_h v \in K_h, \quad \forall v \in \chi.$$

Za dokazati konvergenciju $r_h v \to v$ u H^2 iskoristimo ocjenu

$$\|r_h v - v\|_{H^2} \leq h^2 \left\| v^{(4)} \right\|_{L^2}, \quad \forall v \in \mathcal{D}([0,l]).$$

Sada za $v \in \chi$ vrijedi $\lim\limits_{h\to 0} r_h v = v$. Gustoća skupa χ u K slijedi iz sljedeće leme. □

Lema 3.1.2. *Skup $\mathcal{D}([0,l]) \cap K$, gdje je $K = \{v \in H^2(0,l) : v \geq P \text{ na } [0,l]\}$, je gust u K u normi prostora $H^2(0,l)$.*

Dokaz. Neka su $v \in K$, $\epsilon > 0$ proizvoljni i definiramo $v_\epsilon := \rho_\epsilon * (\tilde{v} + \epsilon)$, gdje je $\tilde{v}$ proširenje nulom funkcije v izvan skupa $[0,l]$, a ρ_ϵ je standardni izglađivač na $[0,l]$. Sada iz svojstava konvolucije slijedi: $v_\epsilon \in \mathcal{D}([0,l])$, za dovoljno mali $\epsilon > 0$ vrijedi $v_\epsilon \in K$ i $v_\epsilon \longrightarrow v$ u H^2. Time je gustoća pokazana. □

Prije prelaska na konkretni algoritam, treba iskoristiti neku od ekvivalentnih formulacija problema (P_h). Pomoću Propozicije 1.1.5 možemo prijeći na minimizaciju funkcionala J (problem kvadratnog programiranja), a iz prethodnog poglavlja slijedi da se može iskoristiti i penalizacijska metoda koju dalje opisujemo.

3.2 Penalizacija diskretnog problema prepreke

Budući da metodu provodimo na $\mathbb{R}^{2n+2}$, prvo treba dohvatiti kako su zadani bilinearna forma i linearan funkcional na tom prostoru s obzirom na skalarni produkt na $\mathbb{R}^{2n+2}$. Za proizvoljne $u_h, v_h \in V_h$ vrijede zapisi u bazi

$$u_h = \sum_{j=0}^{2n+1} \alpha_j \varphi_j, \quad v_h = \sum_{j=0}^{2n+1} \beta_j \varphi_j$$

i neka je $x = (\alpha_j)_{j=0}^{2n+1}$ i $y = (\beta_j)_{j=0}^{2n+1}$. Za bilinearnu formu a tada vrijedi

$$a(u_h, v_h) = a\left(\sum_{i=0}^{2n+1} \alpha_i\varphi_i\ ,\ \sum_{j=0}^{2n+1} \beta_j\varphi_j\right) = \sum_{j=0}^{2n+1} \beta_j \sum_{i=0}^{2n+1} \alpha_i\ a(\varphi_i, \varphi_j) =$$
$$= \sum_{j=0}^{2n+1} \beta_j \sum_{i=0}^{2n+1} \alpha_i C_{j,i} = \langle Cx, y\rangle,$$

gdje je matrica krutosti definirana s $C_{i,j} := a(\varphi_j, \varphi_i)$. Slično, za funkcional L imamo

$$L(v_h) = \sum_{j=0}^{2n+1} \beta_j L(\varphi_j) = \langle F, y\rangle,$$

gdje je $F_i := L(\varphi_i)$. Neprazan, zatvoren, konveksan podskup definiramo iz K_h:

$$\tilde{K} := \{y \in \mathbb{R}^{2n+2} : y_{2i} \geq P_i, i = 0, \ldots, n\},$$

gdje je $P_i = P(x_i)$.

Napomena 3.2.1.

(i) U slučajevima varijacijskih jednakosti, naizmjenično uvrštavanje elemenata baze V_h je rezultiralo sustavom linearnih jednadžbi.

(ii) Budući da bazne funkcije mogu biti i kompliciranije, a i koeficijent EI općenito može biti i funkcija koja nije konstantna, za računanje elemenata matrice krutosti C i vektora F moramo koristiti neku aproksimaciju integrala (npr. mogu se koristiti Gaussove kvadraturne formule). Zapravo, s obzirom da je u našem slučaju $EI \in \mathbb{R}$, a bazne funkcije su polinomi stupnja 3 na $\mathbb{R}$, kvadraturne formule moramo koristiti samo za vektor F.

(P_h) se sada može zapisati kao

$$\textit{Naći } x \in \tilde{K} \textit{ t.d. } \langle Cx, y - x\rangle \geq \langle F, y - x\rangle,\ \forall y \in \tilde{K}. \tag{3.3}$$

Definiramo još i funkcional[1] [2] $j : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$j(y) := \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(P_i - y_{2i})_+^2.$$

[1] U j najprije uzimamo operaciju $max\{0, \cdot\}$. U protivnom je ona suvišna jer je $x^2 \geq 0$ za svaki x.

[2] Modeliranjem problema prepreke presudni su elementi vektora y koji "nose" informaciju o vrijednostima aproksimacije u čvorovima mreže M_h pa smo ovdje elemente vektora $y \in \mathbb{R}^{2n+2}$ indeksirali sa $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{2n}, y_{2n+1})$ zbog lakšeg praćenja računa koji dolazi kasnije.

j je očito konveksan i zadovoljava Pretpostavke 2.2.1. j je i neprekidan kao kompozicija neprekidnih funkcija pa, zbog konveksnosti, prema Propoziciji A.3.7 imamo da je j slabo nizovno poluneprekidan odozdo. Stoga, penalizacija od (3.3) glasi

$$\textit{Naći } x_\epsilon \in \mathbb{R}^{2n+2} \textit{ t.d. } \langle Cx_\epsilon, y - x_\epsilon\rangle + j_\epsilon(y) - j_\epsilon(x_\epsilon) \geq \langle F, y - x_\epsilon\rangle,\ \forall y \in \mathbb{R}^{2n+2}. \tag{3.4}$$

Nejednakost je nepovoljna pri implementaciji algoritma jer je ne možemo direktno prevesti u sustav linearnih jednadžbi (v. Napomena 3.2.1), a budući da je j i Gateaux diferencijabilan (dokazujemo kasnije), korisno je uzeti u obzir Napomenu 2.2.5 iz koje imamo da je x_ϵ rješenje (3.4) ako i samo ako zadovoljava

$$\langle Cx_\epsilon, y\rangle + \langle j'_\epsilon(x_\epsilon), y\rangle = \langle F, y\rangle,\ \forall y \in \mathbb{R}^{2n+2}.$$

Odnosno, x_ϵ je jedinstveno rješenje nelinearnog sustava

$$Cx_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} j'(x_\epsilon) = F. \tag{3.5}$$

$j'(y)h$ je općenito Gateauxova derivacija funkcionala j u y u smjeru h, a za njezino računanje korisno je promotriti sljedeće elementarne primjere.

Primjer 3.2.2. Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = x_+$ očito nije derivabilna u $x = 0$ u klasičnom smislu. Pokažimo da u 0 ona nema ni Gateauxovu derivaciju, ali ima usmjerenu derivaciju.

Dokaz. Za pojam derivacije, f je problematična funkcija u $x = 0$. Na poddomeni $\{x < 0\}$ je $f(x) = 0$, a na $\{x > 0\}$ vrijedi $f(x) = x$ pa je f derivabilna za $x \neq 0$, što onda odgovara i Gateauxovoj derivaciji. Dalje računamo usmjerenu derivaciju funkcije f u $x = 0$ i promatramo je li prva varijacija neprekidan linearan operator na $\mathbb{R}$. Ako postoji prva varijacija funkcije f u x, onda je ona pozitivno homogena pa je dovoljno računati za smjerove $h = 1$ i $h = -1$. Računamo po definiciji usmjerene derivacije (v. Dodatak A.2):

$$f'(0; 1) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{f(0+\lambda) - f(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{\lambda_+}{\lambda} = 1,$$

$$f'(0; -1) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{f(0-\lambda) - f(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{(-\lambda)_+}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{0}{\lambda} = 0.$$

Sada za proizvoljan smjer $h > 0$ vrijedi

$$f'(0; h) = hf'(0; 1) = h,$$

a za $h < 0$ imamo

$$f'(0; h) = f'(0; -(-h)) = -hf'(0; -1) = 0.$$

Dakle, prva varijacija u 0, $f'(0;\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, postoji pa je f usmjereno diferencijabilna na cijeloj domeni i vrijedi:

$$f'(x;h) = \begin{cases} h & x > 0 \\ 0 & x < 0 \\ h_+ & x = 0 \end{cases}$$

Međutim, $f'(0;\cdot)$ nije linearna pa f nema Gateauxovu derivaciju u $x = 0$. □

Primjer 3.2.3. Neka su $N, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ i $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s $F(x) = (x_i)_+^m$ za neki $1 \leq i \leq N$. F je diferencijabilna u klasičnom smislu i vrijedi $\nabla F(x) = m\,(x_i)_+^{m-1} e_i$.

Dokaz. Računamo parcijalne derivacije.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_i + h)_+^m - (x_i)_+^m}{h}.$$

Prethodni izraz promatramo u ovisnosti o vrijednosti x_i. Za $x_i = 0$ imamo

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(h_+)^m}{h} = 0$$

što slijedi iz

$$\lim_{h\to 0+} \frac{(h_+)^m}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^m}{h} = 0 = \lim_{h\to 0-} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(h_+)^m}{h}.$$

Slično dobivamo i za $x_i < 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

dok za $x_i > 0$ vrijedi

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_i + h)^m - x_i^m}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m x_i^{m-1} h}{h} = m\,(x_i)^{m-1}.$$

Trivijalno vrijedi i $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = 0$ za $i \neq j$ pa sve skupa imamo

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = m\,(x_i)_+^{m-1} \delta_{ij},$$

iz čega slijedi da postoje sve parcijalne derivacije, koje su dodatno i neprekidne, pa je funkcija F diferencijabilna i $\nabla F(x) = m\,(x_i)_+^{m-1} e_i$. □

Vratimo se sada na problem (3.5) u kojem treba izračunati Gateauxovu derivaciju funkcionala $j(y) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} (P_i - y_{2i})_+^2$ koji je zapravo konačna suma funkcionala kao u prethodnom primjeru, ali u kompoziciji s afinim funkcijama. Iz lančanog pravila slijedi da je i j diferencijabilan pa je Gateauxova derivacija jednaka klasičnoj. Preciznije, za $i = 0, \dots, n$ i konstantni vektor $P = (P_i)_{i=0}^n = (P(x_i))_{i=0}^n$, gdje su $x_i \in M_h$, definiramo pomoćne funkcije:

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(z) := (z_+)^2 \quad \text{i} \quad g_i : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_i(y) = P_i - y_{2i}$$

pomoću kojih j ima alternativni zapis

$$j(y) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} h(g_i(y)).$$

Konačno, za Gateauxovu derivaciju funkcionala j imamo

$$j'(y) = \nabla j(y) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} h'(g_i(y)) \nabla g_i(y) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} -2(P_i - y_{2i})_+ e_{2i} = - \begin{bmatrix} (P_0 - y_0)_+ \\ 0 \\ (P_1 - y_2)_+ \\ 0 \\ \vdots \\ (P_n - y_{2n})_+ \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(3.5) sada ima oblik:

$$Cx_\epsilon - \frac{1}{\epsilon}(P - x_\epsilon)_+ = F \tag{3.6}$$

gdje su

$$x_\epsilon = \begin{bmatrix} x_0^\epsilon & x_1^\epsilon & x_2^\epsilon & x_3^\epsilon & \dots & x_{2n}^\epsilon & x_{2n+1}^\epsilon \end{bmatrix}^T,$$

$$(P - x_\epsilon)_+ = \begin{bmatrix} (P_0 - x_0^\epsilon)_+ & 0 & (P_1 - x_2^\epsilon)_+ & 0 & \dots & (P_n - x_{2n}^\epsilon)_+ & 0 \end{bmatrix}^T.$$

U prethodnom izrazu, elementi s neparnim indeksom su jednaki nuli, što proizlazi iz činjenice da u početnom problemu nemamo uvjeta na derivaciju rješenja u čvorovima. Za rješenje problema (P_h) treba promatrati niz rješenja (3.6) kako $\epsilon \to 0$, što je opravdano konvergencijom iz Teorema 2.2.6, a budući da je dobivena jednadžba nelinearna, trebamo iskoristiti neku numeričku metodu koja aproksimira rješenje u_ϵ.

3.3 Numeričke metode za sustave nelinearnih jednadžbi

3.3.1 Gradijentna metoda

Ideja gradijentnih metoda za minimizaciju funkcije $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ je generirati niz točaka $x^{(k)}$ takvih da $g(x^{(k+1)}) < g(x^{(k)})$ počevši od neke zadane aproksimacije $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$. Kako bismo definirali iteracije koje će smanjivati vrijednost funkcije g, trebamo prvo promotriti ponašanje funkcije i njene derivacije u okolini neke točke x.

Neka je s smjer u kojem funkcija g lokalno pada u okolini točke x, tj. neka za dovoljno mali $\lambda > 0$ vrijedi $g(x + \lambda s) < g(x)$. Dakle, možemo promatrati funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiranu s

$$f(\lambda) := g(x + \lambda s).$$

Primijetimo da vrijedi $f(0) = g(x)$. Ako je $g \in C^1$, tada je i $f \in C^1$ i vrijedi

$$f'(\lambda) = \langle \nabla g(x + \lambda s), s \rangle.$$

Sada iz pretpostavke da g u smjeru s pada na okolini točke x slijedi da f pada u 0, odnosno imamo

$$\langle \nabla g(x), s \rangle = f'(0) < 0.$$

Na temelju prethodno opisanog definiramo $D(x) := \{s \mid \langle \nabla g(x), s \rangle < 0\}$ koji nazivamo *skup smjerova silaska*. Dakle, ako u iteracijama uzimamo $s^{(k)} \in D(x^{(k)})$, tada niz generiran pravilom

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} s^{(k)},$$

zadovoljava $g(x^{(k+1)}) < g(x^{(k)})$. Jedan od mogućih odabira smjera silaska je $s^{(k)} = -\nabla g(x^{(k)})$ i tada metodu zovemo *gradijentna metoda* ili *metoda najbržeg spusta*, a ako u svakoj iteraciji $\lambda^{(k)}$ postavimo tako da minimizira funkciju $f(\lambda) = g(x^{(k)} + \lambda s^{(k)})$, tada odabir veličine koraka nazivamo *maksimalno spuštanje po pravcu u smjeru* $s^{(k)}$. Sada iteracije gradijentne metode glase:

$$\begin{cases} s^{(k)} = -\nabla g(x^{(k)}) \\ \lambda^{(k)} = \operatorname{argmin}_{\lambda>0} g(x^{(k)} + \lambda s^{(k)}) \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} s^{(k)} \\ k = k + 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

Do odgovarajućeg $\lambda^{(k)}$ možemo doći egzaktno (analitičkim metodama) ili primjenom neke minimizacijske metode u jednodimenzonalnom slučaju. Međutim, često nam je dovoljno izračunati korak $\lambda^{(k)}$ koji ne minimizira funkciju f s prevelikom točnošću, ali da ukupni algoritam minimizacije funkcije g ipak konvergira i takav odabir koraka nazivamo *neegzaktno pretraživanje po pravcu*. Veličina koraka mogla bi biti i konstantna, ali ovakvim biranjem osiguravamo bržu konvergenciju.

Vratimo se sada na problem rješavanja nelinearne jednadžbe (3.6), u kojem prepoznajemo gradijent funkcionala $J_\epsilon : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiranog s

$$J_\epsilon(x) = \frac{1}{2}\langle Cx, x \rangle + j_\epsilon(x) - \langle F, x \rangle.$$

Uzimajući u obzir ekvivalenciju iz Leme 1.1.8 za penalizaciju problema prepreke (3.4), rješenje (3.6) možemo tražiti i minimizacijom funkcionala J_ϵ na $\mathbb{R}^{2n+2}$. Za razliku od gore navedenih iteracija, smjer $s^{(k)}$ ćemo birati kao $s^{(k)} = -C^{-1}\nabla J_\epsilon(x^k)$, gdje je C matrica krutosti. Ovakvo biranje također osigurava bržu konvergenciju gradijentne metode budući da je C dobivena iz bilinearne forme $a(\cdot,\cdot)$ koja je koercitivna i neprekidna. Više o ovakvom odabiru smjera može se naći u ([4], Poglavlje 3).

Prisjetimo se da je $j_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon}\sum_{i=0}^{n}(P_i - x_{2i})_+^2$. Budući da je član j_ϵ funkcije koju minimiziramo "samo" klase C^1, za problem pretraživanja po pravcu treba pažljivo odabrati metodu kako bi konvergencija bila osigurana.

Jedan od načina kako odabrati veličinu koraka $\lambda^{(k)}$ su *jednostavne iteracije* (v. Algoritam 1). Odabirom početne vrijednosti λ, radimo korak gradijentne metode samo ako je zadovoljeno $J(x^{(k)}+\lambda s^{(k)}) < J(x^k)$ i pritom stavljamo $\lambda = 2\lambda$ za sljedeću iteraciju. U slučaju da naiđemo na λ takav da $J(x^{(k)} + \lambda s^{(k)}) \geq J(x^k)$, ne radimo korak gradijentne metode, nego prilagođavamo veličinu koraka tako da stavimo $\lambda = \lambda/2$.

Algoritam 1 Gradijentna metoda za (3.6) uz jednostavne iteracije

Ulaz: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $\epsilon > 0$, $\eta > 0$
Izlaz: $x^{(k)} \approx x_\epsilon$

- Sve dok $\left\|\nabla J_\epsilon(x^{(k)})\right\| \geq \eta$:
  1. $s^{(k)} = -C^{-1}\nabla J_\epsilon(x^{(k)})$
  2. $y = x^{(k)} + \lambda^{(k-1)}s^{(k)}$
  3. Ako $J_\epsilon(y) < J_\epsilon(x^{(k)})$:
     i. $x^{(k+1)} = y$
     ii. $\lambda^{(k)} = 2\lambda^{(k-1)}$
     iii. $k = k + 1$
  4. Inače: $\lambda^{(k-1)} = \lambda^{(k-1)}/2$

Alternativni pristup je *backtracking* algoritam koji se temelji na uvjetima iz [1], a detaljan opis možemo naći i u ([13], Poglavlje 2). Ideja je da krenemo od relativno velikog koraka $\lambda^{(0)}$ koji iterativno smanjujemo sve dok Armijo-Goldstein uvjeti ne budu ispunjeni. Takvo ograničenje osigurava pad funkcije cilja u iteracijama, ali i da odabrani korak ne bude prevelik što bi rezultiralo divergencijom. Preciznije, za odabrani parametar $\alpha \in (0, 1)$, u svakoj iteraciji provjeravamo Armijo-Goldstein uvjet koji je dan s

$$J_\epsilon(x^{(k)}) - J_\epsilon(x^{(k+1)} + \lambda s^{(k)}) \geq \lambda\alpha\langle\nabla J_\epsilon(x^{(k)}), s^{(k)}\rangle.$$

Ako uvjet nije zadovoljen, stavljamo $\lambda = \beta\lambda$, tj. smanjujemo λ za neki faktor $\beta \in (0,1)$ (v. Algoritam 2). Odabir veličine parametara ρ, α, β ovisi o problemu koji rješavamo, a mi ćemo uzimati $\rho = 1, \beta \in (0.5, 0.8)$ i $\alpha = 0.5$.

Algoritam 2 Gradijentna metoda za (3.6) uz Armijo-Goldsteinov uvjet

Ulaz: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $\epsilon, \eta > 0, \rho = 1$, $\alpha = 0.5, \beta \in (0.5, 0.8)$
Izlaz: $x^{(k)} \approx x_\epsilon$

- Sve dok $\left\|\nabla J_\epsilon(x^{(k)})\right\| \geq \eta$:
  1. $s^{(k)} = -C^{-1}\nabla J_\epsilon(x^{(k)})$
  2. Definiramo $f(\lambda) = J_\epsilon(x^{(k)} + \lambda s^{(k)}) - J_\epsilon(x^{(k)}) - \lambda\alpha\langle\nabla J_\epsilon(x^{(k)}), s^{(k)}\rangle$
  3. $\lambda^{(k)} = \rho$
  4. Sve dok $f(\lambda^{(k)}) > 0$: $\quad \lambda^{(k)} = \beta\lambda^{(k)}$
  5. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} s^{(k)}$
  6. $k = k + 1$

3.3.2 Generalizirana Newtonova metoda

Newtonov algoritam u $\mathbb{R}^N$ rješava jednadžbu $G(x) = 0$ za neku $G : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Uz odabranu početnu točku $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$, algoritam glasi:

$$\begin{cases} \textit{riješiti sustav} \;\; \nabla G(x^{(k)})z = -G(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + z, \\ k = k + 1. \end{cases}$$

Uvjet zaustavljanja definiramo tako da fiksiramo neku početnu točnost $\eta > 0$, a Newtonov algoritam se zaustavlja kada za dvije uzastopne iteracije vrijedi

$$\frac{\left\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\right\|_2}{\left\|x^{(k)}\right\|_2} < \eta.$$

Jedna od privlačnosti Newtonove metode je brzina konvergencije koja je, za $G \in C^2$, kvadratična uz dobro odabranu početnu aproksimaciju $x^{(0)}$. Unatoč brzini, u implementaciji se može pojaviti par problema. Prvi je evaluacija gradijenta sustava u svakoj iteraciji, a zatim i rješavanje sustava. Naime, gradijent $\nabla G(x)$ može bit dan funkcijom koja je komplicirana za evaluaciju u računalu pa ga radije aproksimiramo nekom drugom matricom, označimo je sa $S^{(k)}$, koja se ažurira kroz iteracije (v. Broydenov algoritam u [3]). Pretpostavimo da na raspolaganju imamo matricu $S^{(k)}$ i da smo već izračunali $x^{(k+1)}$. Tada matricu $S^{(k+1)}$ možemo dobiti ako primijetimo da za iteracije Newtonove metode vrijedi

$$\nabla G(x^{(k+1)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \approx G(x^{(k+1)}) - G(x^{(k)})$$

pa želimo da slično vrijedi i za matricu $S^{(k+1)}$, odnosno, postavljamo uvjet

$$S^{(k+1)}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = G(x^{(k+1)}) - G(x^{(k)}). \tag{3.8}$$

Prethodni sustav zadaje N uvjeta na N^2 stupnjeva slobode. Dodatne uvjete dobivamo iz zahtjeva da za svaki $v \in \mathbb{R}^N$ koji je okomit na $y = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ vrijedi

$$S^{(k+1)}v = S^{(k)}v. \tag{3.9}$$

Matrica $S^{(k+1)}$ koja zadovoljava (3.8) i (3.9) je dana formulom

$$S^{(k+1)} = S^{(k)} + \frac{(z - S^{(k)}y)y^T}{||y||^2},$$

gdje je $z = G(x^{(k+1)}) - G(x^{(k)})$. Osim početne aproksimacije $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$, treba odabrati i početnu matricu $S^{(0)}$, a obično se uzima $S^{(0)} = \nabla G(x^0)$ pa iteracije Newton-Broydenovog algoritma glase:

$$\begin{cases} \textit{riješiti sustav} \;\; S^{(k)}y = -G(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + y, \\ z = G(x^{(k+1)}) - G(x^{(k)}), \\ S^{(k+1)} = S^{(k)} + \dfrac{(z - S^{(k)}y)y^T}{||y||^2}, \\ k = k + 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

Može se postići i više ako u svakoj iteraciji aproksimiramo $\nabla G(x)^{-1}$ pa time zaobilazimo i rješavanje sustava. Gore definirane iteracije evaluiraju gradijent funkcije G samo za $k = 0$.

Za riješiti (3.6) trebalo bi uzeti $G(x) = Cx + j'_\epsilon(x) - F$ i $N = 2n + 2$. Međutim, sada se postavlja pitanje računanja Jacobijeve matrice funkcije j'_ϵ. Naime, funkcija iz Primjera 3.2.2 nema Fréchetovu derivaciju u $x = 0 \in \mathbb{R}$ pa možemo naslutiti da će j'_ϵ imati problem u točkama oblika

$$x = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_{2n+1} \end{bmatrix}^T, \quad x_{2i} = P_i \text{ za barem jedan indeks } i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

gdje su $x_1, x_3, \dots, x_{2n+1} \in \mathbb{R}$. Dakle, klasični gradijent nema smisla.

Metode za jednadžbe koje uopće nemaju definiran gradijent se češće nalaze pod imenom *smoothing* ili *semismooth Newton method*. Sada koristimo primarno rezultate iz ([14], Poglavlje 2), a i [10], [5]. Definiramo funkciju zadanu matricom $M : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{(2n+2)^2}$ koja će imati ulogu gradijenta funkcionala j'_ϵ

$$M(y) := diag\Big(m_0(y_0) \quad 0 \quad m_2(y_2) \quad 0 \quad \dots \quad m_{2n}(y_{2n}) \quad 0\Big),$$

gdje su funkcije $m_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, zadane sa

$$m_{2i}(y_{2i}) = \begin{cases} 1 & P_i > y_{2i}, \\ 0 & P_i \leq y_{2i}. \end{cases}$$

Newtonove iteracije sada imaju oblik

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (C + \frac{1}{\epsilon} M(x^{(k)}))^{-1} G(x^{(k)}),$$

gdje je $G(x) = Cx + j'_\epsilon(x) - F$. Bez ulaženja u definicije diferencijabilnosti iz [14], Newtonova metoda koja koristi matricu M za iteracije konvergira jer je j'_ϵ Lipschitzova, a C pozitivno definitna.

Algoritam 3 Newtonov algoritam za (3.6)

Ulaz: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $\epsilon > 0$, $\eta > 0$
Izlaz: $x^{(k)} \approx x_\epsilon$

- Sve dok $\left\| x^{(k-1)} - x^{(k)} \right\| / \left\| x^{(k)} \right\| \geq \eta$:
  1. *riješiti sustav* $(C + \frac{1}{\epsilon} M(x^{(k)}))z = Cx^{(k)} + j'_\epsilon(x^{(k)}) - F$
  2. $x^{(k+1)} = x^{(k)} - z$
  3. $k = k + 1$

Napomena 3.3.1.

(i) Prethodni problemi vezani za stupanj diferencijabilnosti funkcionala mogli su se izbjeći da smo definirali primjerice $j_\epsilon(x) = \frac{1}{m\epsilon} \sum_{i=0}^{n} (P_i - x_{2i})_+^m$, gdje je $m \geq 3$. Tada je j_ϵ sigurno klase barem C^2 na cijeloj domeni što slijedi iz Primjera 3.2.3. Međutim, takvo biranje funkcionala rezultira lošom uvjetovanosti matrice u iteracijama klasične Newtonove metode pa sustav ili ne uspijevamo riješiti ili je potreban znatno veći broj iteracija ukupnog algoritma penalizacije u usporedbi sa početnim odabirom j_ϵ.

(ii) Primijetimo da ovako definirane Newtonove iteracije možemo iskoristiti i za pretraživanje po pravcu u algoritmu gradijentne metode. Naime, u općenitom zapisu iteracija (3.7) gradijentne metode treba minimizirati funkciju $f(\lambda) = J_\epsilon(x^{(k)} + \lambda s^{(k)})$.

Iz nužnog uvjeta za minimizaciju, možemo tražiti $\lambda > 0$ takav da $f'(\lambda) = 0$, odnosno, treba riješiti jednu nelinearnu jednakost. Za Algoritam 3 nam trebaju još

$$f'(\lambda) = \langle \nabla J(x^{(k)} + \lambda s^{(k)}), s^{(k)} \rangle, \quad f''(\lambda) = \langle s^{(k)}, \nabla^2 J_\epsilon(x^{(k)} + \lambda s^{(k)}) s^{(k)} \rangle.$$

Budući da, kao i gore, $\nabla^2 J_\epsilon(x)$ nije dobro definirano, koristimo

$$C + \frac{1}{\epsilon} M(x^{(k)})$$

pa iteracije, za aproksimaciju $\lambda^{(k)}$ u algoritmu gradijentne metode, glase

$$\lambda^{(j+1)} = \lambda^{(j)} - \frac{f'(\lambda^{(j)})}{f''(\lambda^{(j)})}.$$

(iii) Za Newton-Broydenove iteracije (3.10) sada možemo uzimati

$$S^{(0)} = C + \frac{1}{\epsilon} M(x^{(0)}).$$

Poglavlje 4

Numeričke simulacije

4.1 Implementacija

Prisjetimo se da za aproksimaciju rješenja (P_h) treba promatrati niz rješenja (3.6) kada $\epsilon \to 0$. Zapravo ćemo u računalu program implementirati tako da $\frac{1}{\epsilon} \to \infty$, pa radimo zamjenu $\frac{1}{\epsilon} \leftrightarrow \tilde{\epsilon}$ počevši primjerice od $\tilde{\epsilon} = 10$. U svakoj iteraciji provjeravamo vrijednost funkcionala penalizacije j_ϵ i normu razlike dvaju uzastopnih rješenja, a algoritam staje kada obje vrijednosti padnu ispod neke unaprijed zadane točnosti η. Ako u nekoj iteraciji nije zadovoljen uvjet zaustavljanja, povećavamo $\tilde{\epsilon}$ za faktor τ. Preciznije, algoritam glasi:

Algoritam 4 Algoritam penalizacije za (P_h)

Ulaz: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $\tilde{\epsilon} > 0$, $\eta > 0$, $\tau = 10$
Izlaz: $x^{(IT)} \approx x$

- Sve dok $\left\| x^{(IT-1)} - x^{(IT)} \right\| \geq \eta \quad \vee \quad j_\epsilon(x^{(IT)}) \geq \eta$:
  1. Riješiti (3.6) pomoću Algoritma 1,2 ili 3
  2. $IT = IT + 1$
  3. $\tilde{\epsilon} = \tau\tilde{\epsilon}$

Za početnu aproksimaciju $x^{(0)}$ ćemo uzimati rješenje problema bez prepreke. U svim primjerima dobiveni niz aprosimacija x_ϵ uspoređujemo s rješenjem Octave funkcije 'qp' koja rješava problem kvadratnog programiranja uz uvjete. U našem slučaju ona rješava:

$$\begin{cases} J(x) = \frac{1}{2}\langle Cx, x\rangle - \langle F, x\rangle \longrightarrow \min \\ x_{2i} \geq P_i, \quad \forall i = 0, \ldots, n \end{cases}$$

gdje je $J : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$, a rješenje ove zadaće označavamo sa $\overline{x}$. Odmah možemo spomenuti da je izvršavanje algoritma 'qp' sporo, tj. za sve sljedeće primjere otprilike 6 sekunda. Stoga je svakako od interesa promotriti algoritme koji su brži, a da pritom razlika u rješenjima nije prevelika.

Koeficijenti iz jednadžbe štapa ovise o materijalu (E-Youngov modul elastičnosti) i geometriji poprečnog presjeka (I-modul smicanja). Ako u svim primjerima uzimamo da je poprečni presjek pravokutnik P visine h i širine w, dobivamo sljedeće:

$$I(x) = \iint_P y^2 dydz = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dydz = \frac{1}{3}\frac{h^3}{4}d.$$

Napomena 4.1.1.

(i) U svim simulacijama koje koriste neku verziju gradijentne metode treba kontrolirati broj iteracija. Točnije, nije poželjno da, za neki $\overline{\epsilon}$, algoritam penalizacije previše vremena provede u gradijentnoj metodi.

(ii) Sve primjere smo testirali i Newton-Broydenovim algoritmom (v. Napomena), a budući da su rezultati jako slični rezultatima Newtonovog algoritma, nećemo ih koristiti u analizi simulacija.

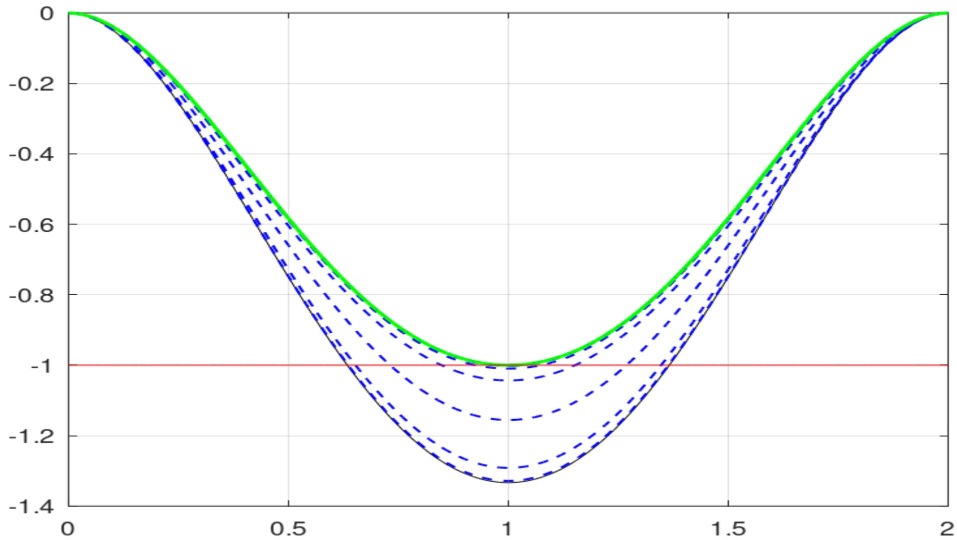
4.2 Primjer: Uvodni primjer

Za prvi primjer uzimamo da je elastični štap duljine $l = 2m$ izrađen od čelika ($E = 2 \times 10^{11} Pa$) na koji djeluje konstantna sila $f = -2000N$. Poprečni presjek štapa je pravokutnik visine $h = 0.5cm = 0.005m$ i širine $w = 3cm = 0.03m$. Za prepreku uzimamo konstantnu funkciju $P = -1$. Točnost koju tražimo u Algoritmu 4 postavljamo na $\eta = 10^{-4}$.

Na Slici 4.1 je prikazana konvergencija Algoritma 4 uz korištenje Newtonovog algoritma 3, a budući da takvi prikazi uglavnom izgledaju isto, za uspoređivanje različitih metoda ćemo promatrati pad norme $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$.

Slika 4.2 uspoređuje 2 varijante gradijentne metode (algoritme jednostavne iteracije i iteracije dane Armijo-Goldstein pravilom) i gradijentnu metodu u kojoj pretraživanje po pravcu radimo jednodimenzionalnom Newtonovom metodom (v. Napomenu 3.3.1). Unatoč tome što povećavanjem $\tilde{\epsilon}$ imamo pad vrijednosti $j_\epsilon(x_\epsilon)$ u svim metodama (što je i očekivano jer je tako postavljen uvjet zaustavljanja u algoritmu penalizacije), gradijentna metoda s Newtonovim pretraživanjem po pravcu ima bolje rezultate u odnosu na ostale varijante.

S obzirom na Napomenu 4.1.1, gradijentne metode smo implementirali s gornjom ogradom na broj iteracija, tj. Algoritmi 1 i 2 su se ponavljali najviše 50 puta za svaki $\overline{\epsilon}$. Gradi-



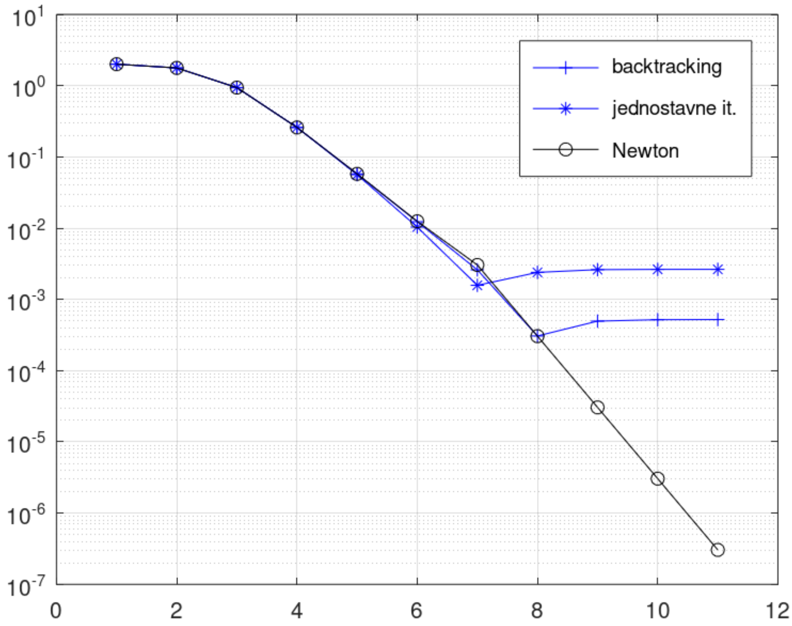
Slika 4.1: Niz aproksimacija x_ϵ Algoritma 4 dobivenih Newtonovom metodom (Alg. 3)

jentna metoda s Newtonowim pretraživanjem po pravcu opet pokazuje bolje karakteristike jer smo za nju stavili ograničenje 10 iteracija kako bismo postigli istu zadanu točnost η.

Uzmimo sad u obzir samo gradijentnu metodu s Newtonovim pretraživanjem po pravcu i usporedimo je s Newtonovim algoritmom 3. Uz već uvedenu točnost $\eta = 10^{-4}$, nećemo naići na razliku u brzini pada norme $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$, ali povećanjem točnosti na $\eta = 10^{-8}$ u uvjetu zaustavljanja Algoritma 4, gradijentna metoda neće konvergirati. Možemo je poboljšati ako, uz već uvedeno ograničenje na 10 iteracija, uvedemo i ograničenje na broj iteracija u dijelu koji pretražuje po pravcu (v. Napomena 4.1.1). Međutim, čak uz tako uvedenu optimizaciju, za svaki $\overline{\epsilon}$ Algoritam 4 više vremena provede u gradijentnoj metodi nego u Newtonovoj. U Tablici 4.1 čitamo da gradijentna metoda za svaki $\overline{\epsilon}$ iskoristi maksimalni broj iteracija.

$\overline{\epsilon}$	1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{10}	10^{11}	10^{12}
G.M.	6	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
N.M.	2	3	3	4	4	4	3	2	1	1	1	1	1

Tablica 4.1: Broj iteracija gradijentne (G.M) i Newtonove metode (N.M.) za svaki $\overline{\epsilon}$ u Algoritmu 4, $\eta = 10^{-8}$



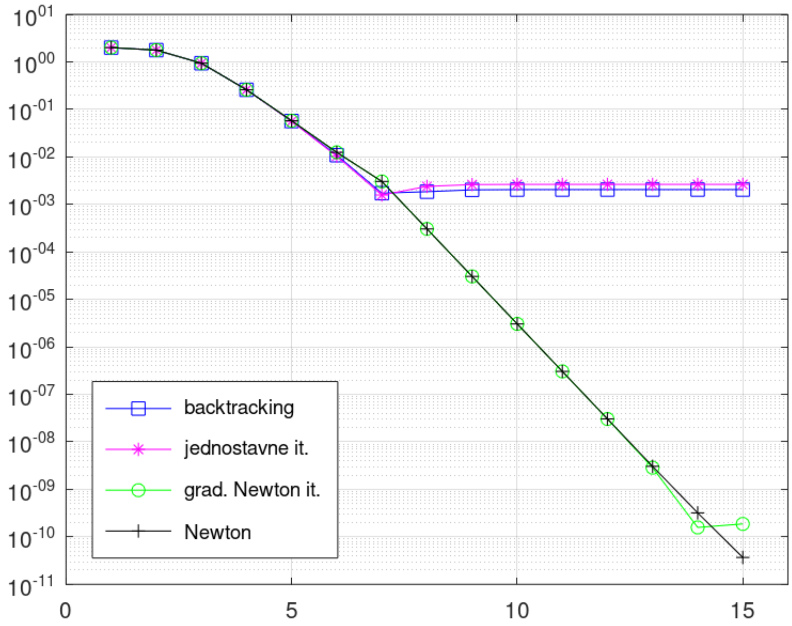
Slika 4.2: Za svaku iteraciju algoritma penalizacije računamo $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$, gdje je $\overline{x}$ aproksimacija dobivena Octave funkcijom 'qp', a x_ϵ su dobiveni različitim varijantama gradijentne metode, $\eta = 10^{-4}$

Za kraj, uz uvedene preinake u gradijentnoj metodi i povećanu točnost ($\eta = 10^{-8}$) na Slici 4.3 su dane vrijednosti $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$ za sve 4 metode.

4.3 Primjer: Ovisnost o obliku prepreke

Sada promatramo štap duljine $l = 4m$, istog poprečnog presjeka kao u prošlom primjeru, izrađen od aluminija ($E = 6.9 \times 1010 Pa$). Uz dvije prepreke $P_1(x) = sin(\frac{\pi}{4}x) - 0.4$ i $P_2(x) = (1 - 4(x-1)^2)((x-1)^2 - 0.5) + 1$, postavljamo točnost algoritma penalizacije na $\eta = 10^{-8}$ i silu $f = 0$.

Ako usporedimo rezultate na Slikama 4.4 i 4.5, primjećujemo poboljšanje u 4.5 u odnosu na 4.4 u svim metodama, a poboljšanje je značajno u slučaju gradijentne metode s Newtonovim pretraživanjem po pravcu. Možemo zaključiti da rezultati algoritma penalizacije ovise i o obliku prepreke, što je najbolje vidljivo na slikama 4.6 i 4.7. Naime, povećanjem parametra ϵ u svakoj iteraciji algoritma penalizacije, za isti faktor povećavamo i elemente na dijagonali matrice sustava s kojom rješavamo pretraživanje po pravcu u gra-



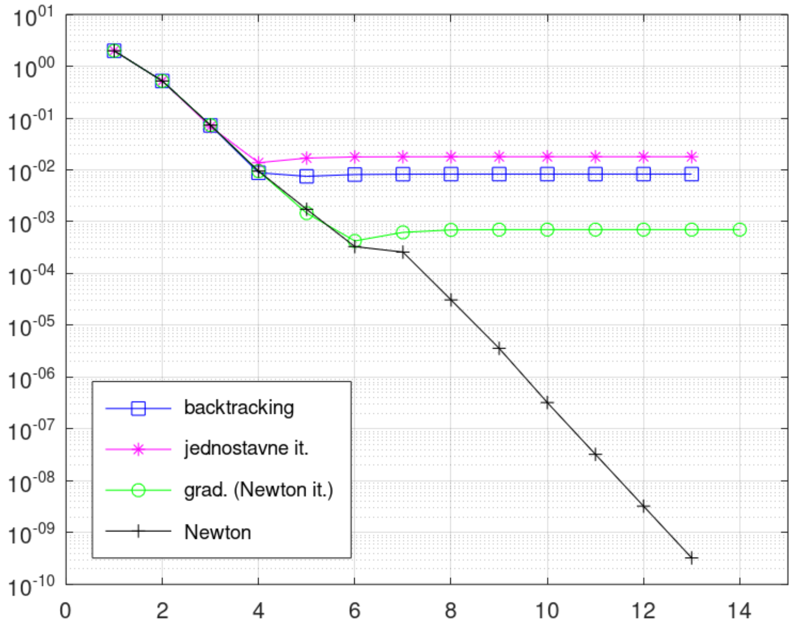
Slika 4.3: Usporedba vrijednosti $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$ sve 4 metode, $\eta = 10^{-8}$

dijetnoj metodi (v. Napomena 3.3.1 (ii)). Iz oblika prepreke je jasno da će takvih elemenata na dijagonali biti znatno manje u slučaju prepreke P_2, jer je tada i skup dodira manji.

Dodatno, za sve metode možemo usporediti i vrijeme izvršavanja ukupnog algoritma penalizacije koje se znatno razlikuje među algoritmima (Tablica 4.2).

$[s]$	G.M. (Alg. 1)	G.M. (Alg. 2)	G.M. (Nap. 3.3.1)	Newton (Alg. 3)
P_1	4.75	34.824	6.693	1.253
P_2	4.758	37.645	2.183	1.12179

Tablica 4.2: Vremena izvršavanja algoritma penalizacije uz sve oblike gradijentne metode (G.M.) i Newtonovu metodu.



Slika 4.4: Vrijednosti $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$ za P_1, $\eta = 10^{-8}$

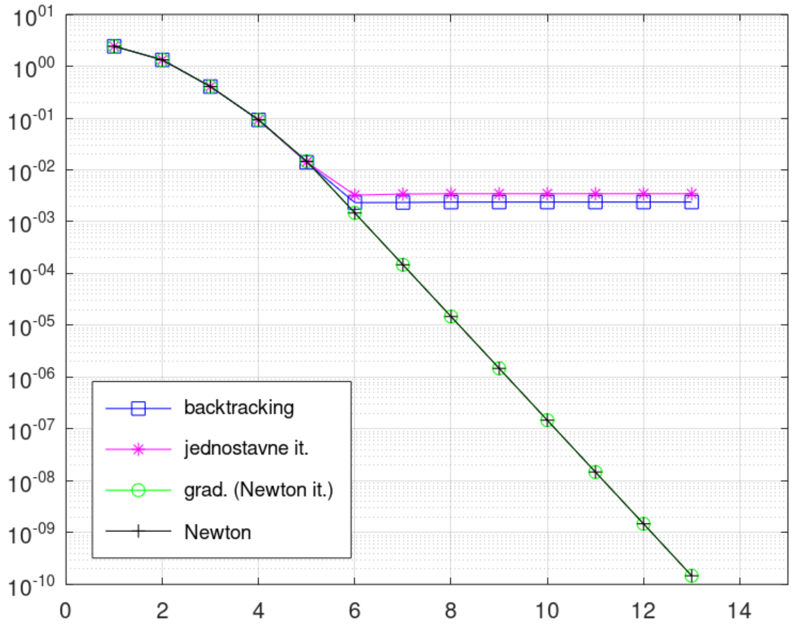
4.4 Primjer: Izbor penalizacijskog funkcionala

Za kraj ćemo se osvrnuti na razmatranja iz Napomene 3.3.1 i primjerom opravdati izbor funkcionala j. Pretpostavimo da smo, za neki $m \geq 3$, definirali

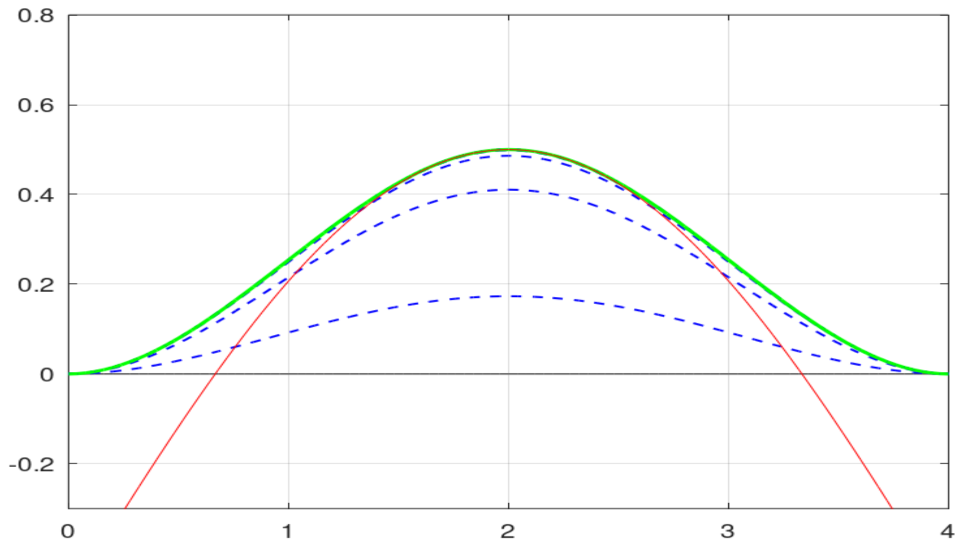
$$j_\epsilon^m(x) := \frac{1}{m\epsilon} \sum_{i=0}^{n} (P_i - x_{2i})_+^m.$$

Za svaki $m \geq 3$ vrijedi $j_\epsilon^m \in C^{m-1}$, odnosno, svi su barem klase C^2 (v. Primjer 3.2.3). Dakle, ne postoji problem s korištenjem klasične generalizirane Newtonove metode.

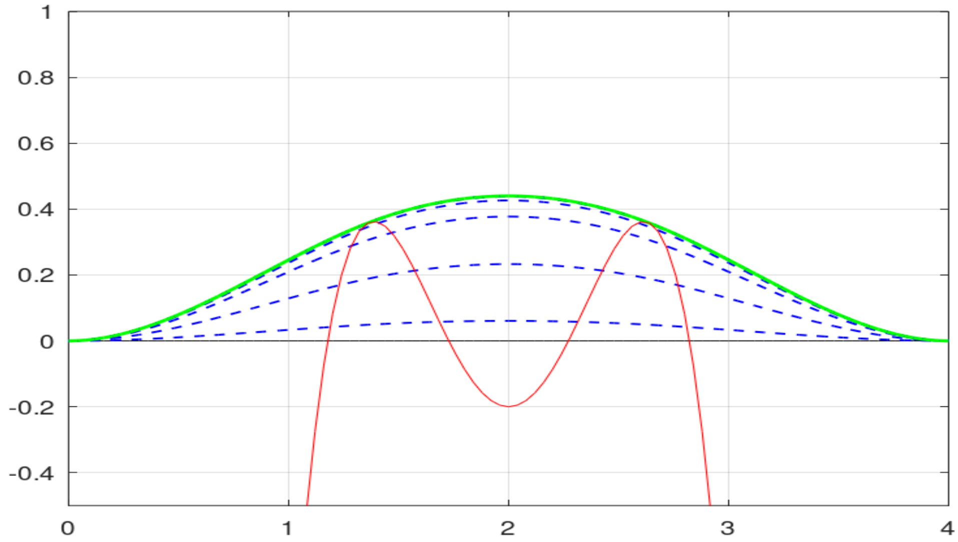
Utjecaj povećanja potencije m testiramo na elastičnom štapu duljine $l = 4m$, istog poprečnog presjeka i materijala (aluminij) kao i u prethodnom primjeru. Za prepreku definiramo opet konstantnu funkciju $P(x) = -0.1$, a sila je $f = -10N$. Točnost u algoritmu penalizacije postavimo na $\eta = 10^{-6}$. Ponovo promatramo normu razlike rezultata 'qp' funkcije, $\overline{x}$ i niza aproksimacija x_ϵ. Kao rezultat imamo da je za $m > 2$ potreban veći broj iteracija čime se i povećava vrijeme izvršavanja algoritma, a i postižemo manji pad norme razlike (Slika 4.8). Slika 4.9 prikazuje algoritam penalizacije za $m = 4$.



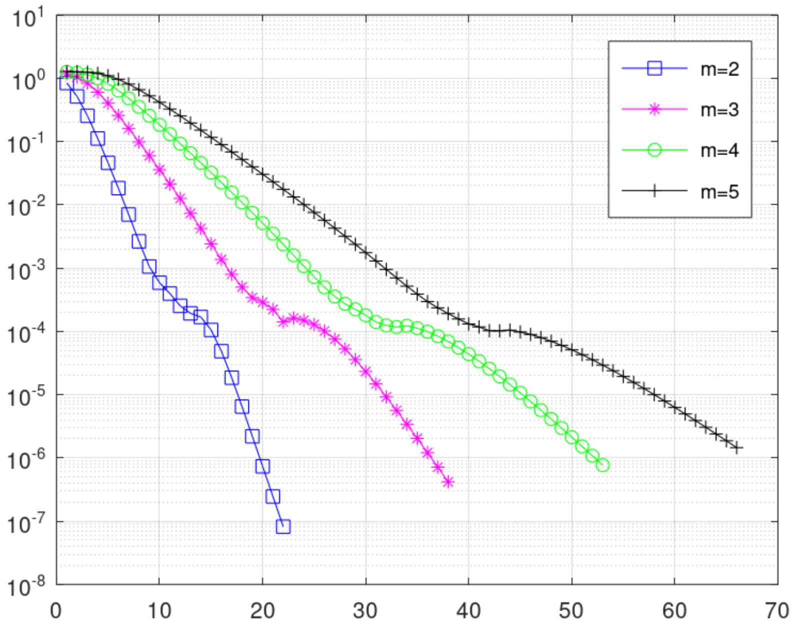
Slika 4.5: Vrijednosti $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$ za P_2, $\eta = 10^{-8}$



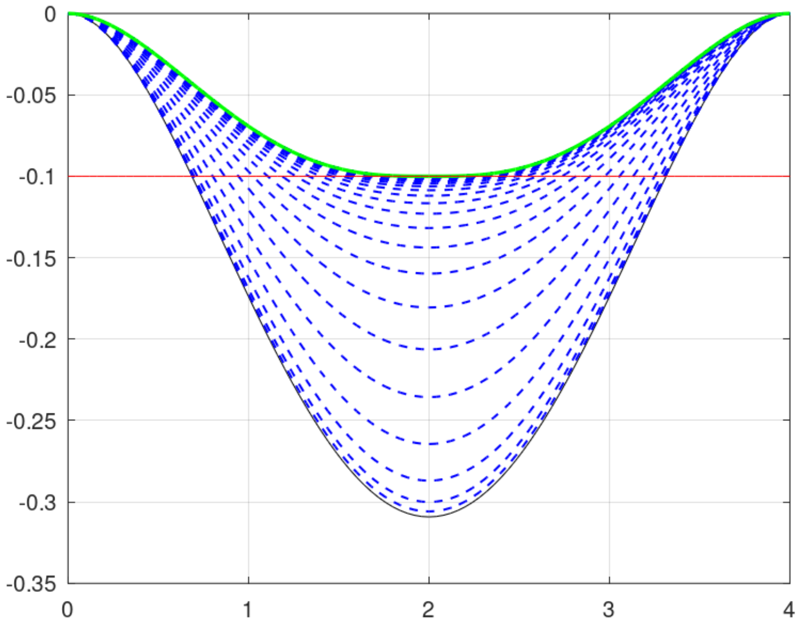
Slika 4.6: Algoritam penalizacije za P_1. $\eta = 10^{-8}$



Slika 4.7: Algoritam penalizacije za P_2. $\eta = 10^{-8}$



Slika 4.8: Vrijednosti $\|x_\epsilon - \overline{x}\|_2$ dobivenih Newtonovom metodom, $\eta = 10^{-6}$



Slika 4.9: Algoritam penalizacije za $m = 4$ i $\eta = 10^{-6}$

Dodatak A

Dodatak

A.1 Teoremi projekcije

Teorem A.1.1. *Neka je H Hilbertov prostor, $K \subset V$ neprazan, zatvoren i konveksan skup. Tada za svaki $u \in V$ postoji jedinstveni $u_K \in K$ takav da je*

$$\|u - u_K\| = \underset{v \in K}{inf} \|u - v\| .$$

Dokaz. Za $u \in K$ tvrdnja trivijalno vrijedi. Neka je sada $u \notin K$. K je zatvoren pa je $m := \inf_{v \in K} \|u - v\| > 0$. Uzmimo sada minimizirajući niz $(v_n)_n \subset K$, odnosno niz takav da vrijedi

$$\|u - v_n\| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} m$$

i pokažimo da je Cauchyjev. Koristeći relaciju paralelograma dobivamo

$$\|v_m - v_n\|^2 = 2\|u - v_m\|^2 + 2\|u - v_n\|^2 - 4\left\|u - \frac{v_m + v_n}{2}\right\|^2 .$$

Nadalje, K je konveksan pa vrijedi $(v_m + v_n)/2 \in K$, iz čega slijedi

$$\left\|u - \frac{v_m + v_n}{2}\right\|^2 \geq m^2.$$

Sada dobivamo

$$0 \leq \|v_m - v_n\|^2 \leq 2\|u - v_m\|^2 + 2\|u - v_n\|^2 - 4m^2,$$

odnosno, niz $(v_n)_n$ je Cauchyjev niz. Dakle, niz je i konvergentan (jer je H potpun) s limesom $u_K \in K$ jer je K zatvoren. Iz neprekidnosti norme dobivamo

$$\|u - u_K\| = \lim_{n \to 0} \|u - v_n\| = m,$$

tj. postojanje rješenja minimizacije. Za jedinstvenost pretpostavimo da postoje dva različita rješenja $u_1, u_2 \in K$. Tada je

$$m^2 = \left\| u - \frac{u_1 + u_2}{2} \right\|^2 < \frac{\|u - u_1\|^2}{2} + \frac{\|u - u_2\|^2}{2} = m^2,$$

a jer je $\|u_1 + u_2\|/2 \in K$ i $x \mapsto \|x\|^2$ je strogo konveksna funkcija, dolazimo do kontradikcije. Dakle, $u_1 = u_2$. □

Prethodni teorem daje postojanje jedinstvene projekcije na zatvoren, konveksan podskup $K \subset H$ pa možemo definirati

$$P_K : H \longrightarrow K, \quad P_K(u) = u_K, \ u \in H.$$

Pokažimo jednu korisnu karakterizaciju operatora projekcije.

Teorem A.1.2. *Neka je H Hilbertov prostor, $K \subset H$ neprazan, zatvoren i konveksan skup. Označimo s P_K operator projekcije na K i neka je $u \in H$ proizvoljan. Tada vrijedi*

$$\langle P_K(u) - u, v - P_K(u) \rangle \geq 0, \ \forall v \in K.$$

Obratno, ako neki $w \in K$ zadovoljava

$$\langle w - u, v - w \rangle \geq 0 \ \forall v \in K,$$

onda je $w = P_K(u)$.

Dokaz. Ako je $u \in K$, onda je $u = P_K(u)$ pa umjesto nejednakosti vrijedi jednakost. Neka su $u \notin K$ i $v \in K$. K je konveksan pa vrijedi

$$P_K(u) + \lambda (v - P_K(u)) \in K, \ \forall v \in K, \lambda \in [0, 1].$$

Stavimo $u_K = P_K(u)$ koji je, po prethodnom teoremu, jedinstvena, najbolja aproksimacija od u na K. Dakle, za svaki $v \in K$ i $\lambda \in (0, 1)$ vrijedi

$$\|u - u_K\|^2 < \|u - (u_K + \lambda(v - u_K))\|^2 = \|u - u_K\|^2 - 2\lambda\langle u - u_K, v - u_K \rangle + \lambda^2 \|v - u_K\|^2 .$$

Dijeljenjem prethodnog izraza s λ dobivamo

$$0 < 2\langle u_K - u, v - u_K \rangle + \lambda \|v - u_K\|^2 , \ \lambda \in (0, 1),$$

iz čega slijedi prva tvrdnja.

Obratno, neka neki $w \in K$ zadovoljava

$$\langle w - u, v - w \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K.$$

Jednostavnim računom se pokaže da za sve $v \in K$ vrijedi

$$\|u - v\|^2 = \|u - w + w - v\|^2 = \|u - w\|^2 + \|w - v\|^2 + 2\langle w - u, v - w \rangle \geq \|u - w\|^2 .$$

Dakle, $w = P_K(u)$. □

Za kraj navodimo bez dokaza tvrdnju Banachovog teorema fiksne točke. Ponovimo prvo definiciju stroge kontrakcije za preslikavanje na metričkom prostoru.

Definicija A.1.3. *Kažemo da je preslikavanje $F : X \longrightarrow X$ na metričkom prostoru (X, d) stroga kontrakcija ako postoji $\kappa \in [0, 1)$ takav da za sve $x, y \in X$ vrijedi*

$$d(F(x), F(y)) \leq \kappa d(x, y).$$

Teorem A.1.4. *Neka je (X, d) potpun, metrički prostor i preslikavanje $F : X \longrightarrow X$ stroga kontrakcija. Tada postoji jedinstveni $x_F \in X$ takav da $F(x_F) = x_F$.*

A.2 Diferencijalni račun

Definicija A.2.1. *Neka je X realan vektorski prostor, $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$, Y realan normiran prostor i $f : S \longrightarrow Y$ zadana funkcija. Ako za $x \in S$ i $h \in X$ postoji limes*

$$f'(x; h) := \mathop{lim}_{\lambda \to 0+} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda},$$

tada $f'(x; h)$ zovemo derivacijom funkcije f u točki x u smjeru h.

Ako limes postoji za svaki $h \in X$, kažemo da je f usmjereno diferencijabilna u x, a preslikavanje $f'(x; \cdot) : X \longrightarrow Y$, nazivamo prvom varijacijom funkcije f u x.

Napomena A.2.2. Lako se vidi da je prva varijacija (ako postoji) pozitivno homogena. Naime, za $a > 0$ proizvoljan vrijedi

$$f'(x; ah) = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{a(f(x + \lambda ah) - f(x))}{a\lambda} = a \lim_{(a\lambda) \to 0+} \frac{(f(x + (a\lambda)h) - f(x))}{a\lambda} = af'(x; h).$$

Definicija A.2.3. *Neka su $(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, \|\cdot\|)$ normirani prostori, $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$ otvoren te $f : S \longrightarrow Y$ funkcija. Ako za neki $x \in S$ postoji prva varijacija funkcije f u x, $f'(x; \cdot) : X \longrightarrow Y$, te je ona neprekidna i linearna, kažemo da je f Gateaux diferencijabilna u x, a Gateauxova derivacija je dana s*

$$f'(x)h = \mathop{lim}_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}.$$

Definicija A.2.4. *Neka su $(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, \|\cdot\|)$ normirani prostori, $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$ otvoren te $f : S \longrightarrow Y$ funkcija. Ako za dani $x \in X$ postoji neprekidni linearni operator $Df(x) : X \longrightarrow Y$ sa svojstvom*

$$\mathop{lim}_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(x + h) - f(x) - Df(x)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0,$$

tada kažemo da je f Fréchet diferencijabilna u x, a $Df(x)$ zovemo Fréchetova derivacija funkcije f u x.

Lako se pokaže da Fréchet diferencijabilnost povlači Gateaux diferencijabilnost. Naime, za f Fréchet diferencijabilnu i $h \in X, h \neq 0$ fiksan vrijedi

$$\begin{aligned} 0 =& \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|f(x+\lambda h) - f(x) - Df(x)(\lambda h)\|_Y}{\|\lambda h\|_X} = \\ =& \frac{1}{\|h\|_X} \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{|\lambda|} \left\| \lambda \left(\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} - Df(x)h \right) \right\|_Y , \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili da je f Fréchet diferencijabilna. Prethodni izraz je sada ekvivalentan s

$$\frac{1}{\|h\|_X} \lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} - Df(x)h \right\|_Y = 0,$$

odnosno, dobivamo sljedeću jednakost

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} = Df(x)h.$$

S lijeve strane imamo upravo definiciju Gateauxove derivacije funkcije f u x u smjeru h, a budući da je f Fréchet diferencijabilna, slijedi i Gateaux diferencijabilnost. Štoviše, one se i podudaraju.

A.3 Postojanje minimalne točke

Promatramo problem postojanja (jedinstvene) minimalne točke $\overline{x} \in S$ takve da

$$F(\overline{x}) \leq F(x), \quad \forall x \in S,$$

gdje je $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$, a funkcija $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ takva da vrijedi $F(x) > -\infty$, $\forall x \in S$ i $F \not\equiv +\infty$. Glavni rezultat poglavlja su dovoljni uvjeti za postojanje minimizatora, a s obzirom na svojstva funkcionala koje smo koristili u Poglavlju 1, X će biti refleksivan, Banachov prostor. Naime, mogu se izvesti i uvjeti na realnom, normiranom prostoru, ali na ovaj način imamo provjerljive uvjete. Prvo navodimo, bez dokaza, rezultate iz teorije normiranih prostora koje ćemo koristiti.

Definicija A.3.1. *Neka je X normiran prostor. Kažemo da je $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$ slabo nizovno kompaktan ako svaki niz u S sadrži slabo konvergentan podniz čiji je limes sadržan u S.*

Teorem A.3.2. ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** *Zatvorena, jedinična kugla refleksivnog, Banachovog prostora je slabo nizovno kompaktna.*

Korolar A.3.3. *Svaki neprazan, zatvoren, omeđen i konveksan podskup refleksivnog, Banachovog prostora je slabo nizovno kompaktan.*

Prije iskaza glavnog teorema uvodimo pojam slabe nizovne poluneprekidnosti funkcije $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$, gdje je $S \subseteq X$ neprazan, zatvoren, konveksan skup.

Definicija A.3.4. *Kažemo da je funkcija $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ slabo nizovno poluneprekidna odozdo ako za svaki niz $(u_n)_n \subseteq S$ takav da $u_n \rightharpoonup u \in S$ vrijedi*

$$F(u) \leq lim\, inf_{n}\ F(u_n).$$

Ako za svaki jako konvergentan niz, $u_n \rightarrow u \in K$ vrijedi prethodna nejednakost, tada kažemo da je F nizovno poluneprekidna odozdo.

Poluneprekidnost i slabu nizovnu poluneprekidnost funkcije F *odozgo* definiramo tako da prethodnu definiciju primijenimo na $-F$.

Teorem A.3.5. *Neka je X refleksivan Banachov prostor. $S \subseteq X$ neprazan, konveksan, zatvoren i omeđen skup, a F slabo nizovno poluneprekidna funkcija. Tada F na S ima barem jednu minimalnu točku.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_n \subseteq S$ infimizirajući niz, tj. $F(x_n) \stackrel{n}{\longrightarrow} m := \inf_{x \in S} F(x)$. Primijetimo da je trenutno moguće i $m = -\infty$. Iz prethodnog korolara slijedi da je S slabo nizovno kompaktan pa postoji podniz niza $(x_n)_n$ takav da $x_k \rightharpoonup \overline{x} \in S$. Iz slabe nizovne poluneprekidnosti odozdo funkcije F sada imamo

$$F(\overline{x}) \leq \liminf_k F(x_k) = \lim_k F(x_k) = m.$$

Jer je $\overline{x} \in S$, slijedi $F(\overline{x}) > -\infty$ pa je $m \geq F(\overline{x}) > -\infty$. S druge strane, iz definicije infimuma imamo $m \leq F(\overline{x})$. Dakle, vrijedi $F(\overline{x}) = m = \inf_{x \in S} F(x)$, tj. infimum se postiže. $\square$

Za funkcije i skupove koje smo koristili u Poglavlju 1 korisna je sljedeća napomena.

Napomena A.3.6.

(i) Pretpostavku o omeđenosti skupa S u prethodnom teoremu možemo ispustiti ako dodatno pretpostavimo da je funkcija F koercitivna, odnosno, $F(x) \rightarrow +\infty$ za $\|x\| \rightarrow +\infty$. Za proizvoljan $x_0 \in S$ $(F(x_0) < +\infty)$ tada postoji $R > 0$ takav da

$$F(x) > F(x_0), \quad x \in S, \|x\| > R,$$

iz čega slijedi $\underset{x \in S}{inf} F(x) = \underset{x \in S_R}{inf} F(x)$ za $S_R := S \cap K[0, R]$. Sada dokaz prethodnog teorema provodimo za S_R koji je neprazan, zatvoren, konveksan i omeđen.

(ii) Slaba nizovna poluneprekidnost povlači poluneprekidnost jer je svaki jako konvergentan niz i slabo konvergentan s istim limesom.

(iii) Za pretpostavku slabe nizovne poluneprekidnosti odozdo konveksne funkcije F već imamo jedan dovoljan uvjet dan u Korolaru 2.2.4, a slična tvrdnja vrijedi ako pretpostavku o Gateaux diferencijabilnosti zamijenimo s neprekidnosti funkcije F što je dano sljedećom propozicijom.

(iv) Treba još napomenuti da se pojam poluneprekidnosti može promatrati i u odnosu na slabu topologiju na X (v. [2], Poglavlje 3) i tada vrijedi da slaba poluneprekidnost odozdo povlači poluneprekidnost odozdo. Ako je F dodatno konveksna, vrijedi i obrat.

Propozicija A.3.7. *Neka je X normiran prostor, $S \subseteq X$ konveksan, zatvoren skup i funkcija $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i konveksna. Tada je F slabo nizovno poluneprekidna odozdo.*

Dokaz. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $S_\alpha \neq \emptyset$, gdje je $S_\alpha := F^{-1}(\langle -\infty, \alpha])$. Prvo dokazujemo da je S_α slabo nizovno zatvoren skup. Iz neprekidnosti funkcije F slijedi da je S_α zatvoren u S pa postoji zatvoreni skup F takav da $S_\alpha = F \cap S$. Sada je S_α zatvoren u X kao presjek zatvorenih skupova. Konveksnost skupa S_α slijedi iz činjenice da je epigraf konveksne funkcije konveksan skup. Za (x, α), $(y, \alpha) \in E(F)$ i $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$\lambda(x, \alpha) + (1 - \lambda)(y, \alpha) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \alpha) \in E(F)$$

pa je $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_\alpha$. Sada je S_α slabo nizovno zatvoren što slijedi iz konveksnosti i zatvorenosti.[1]

Pretpostavimo da F nije slabo nizovno poluneprekidna odozdo. Neka je $(x_n)_n \subseteq S$ niz takav da $x_n \rightharpoonup x \in S$ i $\liminf_n F(x_n) < F(x)$. Slijedi da postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da

$$\liminf_n F(x_n) < \alpha < F(x).$$

Iz desne nejednakosti imamo $x \notin S_\alpha$, a iz lijeve slijedi da postoji podniz niza $(x_n)_n$ takav da $F(x_k) < \alpha$. Međutim, vrijedi $x_k \rightharpoonup x \notin S_\alpha$ čime smo došli do kontradikcije jer je $(x_k)_k \subseteq S_\alpha$. □

[1] Ako je konveksan skup zatvoren, tada je on i slabo zatvoren, a slaba zatvorenost tada povlači slabu nizovnu zatvorenost (v. [2], Poglavlje 3)

Bibliografija

[1] L. Armijo, *Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives*, Pacific Journal of Mathematics **16** (1966), br. 1, 1–3.

[2] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, Dordrecht, Hiedelberg, London, 2010.

[3] C.G. Broyden, *A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations*, Mathematics of Computation **19** (1965), br. 92, 577–593.

[4] J. Céa, *Lectures on optimization: theory and algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[5] X. Chen i L. Qi, *Smoothing methods and semismooths sethods for nondifferentiable operator equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis **38** (2001), br. 4, 1200–1216.

[6] P. Drabek i J. Milota, *Methods of nonlinear analysis: applications to differential equations*, Birkhäuser Verlag AG, Basel, Boston, New York, 2007.

[7] Z. Drmač, M. Marušić, S. Singer, V. Hari, S. Rogina i Saša Singer, *Numerička analiza*, Matematički odsjek, PMF Zagreb, 2003.

[8] I. Eckeland i R. Témam, *Convex analysis and variational problems*, SIAM, Philadelphia, 1987.

[9] R. Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.

[10] M. Hintermüller, K. Ito i K. Kunisch, *The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method*, SIAM Journal on Optimization **13** (2017), br. 3, 865–888.

[11] N. Kikuchi i J.T. Oden, *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.

[12] D. Kinderlehrer i Stampacchia G., *An introduction to variational inequalities and their application*, SIAM, Philadelphia, 2000.

[13] E. Polak, *Computational methods in optimization*, Academic Press, New York, London, 1971.

[14] M. Ulbrich, *Semismooth Newton methods for variational inequalities and constrained optimization problems in function spaces*, SIAM and Mathematical Optimization Society, Philadelphia, 2011.

Sažetak

U ovom radu se upoznajemo s teorijom varijacijskih nejednakosti koje dovodimo u vezu sa problemom minimizacije funkcije na zatvorenom, konveksnom podskupu Hilbertovog prostora. Također, izvodimo dovoljne uvjete za postojanje jedinstvenog rješenja takvih problema i prezentiramo rezultate iz teorije aproksimacije rješenja. Upoznajemo se i s metodom penalizacije pomoću koje rješenje varijacijske nejednakosti dobijemo kao limes niza rješenja penaliziranih nejednakosti koje su definirane na cijelom prostoru V. U okviru uvedene teorije analiziramo problem prepreke za elastični štap opisan Euler-Bernoullijevom jednadžbom s Dirichletovim rubnim uvjetima koji rješavamo penalizacijom na konačnodimenzionalnom prostoru do kojeg dolazimo metodom konačnih elemenata. Tako definirana aproksimacija će se svesti na rješavanje niza nelinearnih jednadžbi ili, ekvivalentno, na niz problema minimizacije. Stoga prezentiratiramo i numeričke metode kojima možemo doći do danog rješenja: Newtonova i gradijentna metoda.

Summary

In this thesis, we present the fundamentals of the theory of variational inequalities that we associate with problems of minimization of functions on closed, convex subsets of a Hilbert space. Furthermore, we obtain sufficient conditions for a variational inequality to have a unique solution. We'll employ penalty method that enables us to obtain a solution of variational inequality as a limit of solutions to penalized inequalities defined on the whole space. Within such a theoretical framework, we analyze the obstacle problem for an elastic beam determined by the Euler-Bernoulli equation subject to Dirichlet boundary conditions. The finite element method is used to derive a formulation of discrete obstacle problem, which we then solve by penalization in the finite-dimensional space. Approximation involves solving a series of nonlinear equations or, equivalently, minimization problems. Therefore, we also present numerical methods that yield a solution, namely gradient and Newton's method.

Životopis

Rođena sam 16.2.1995. godine u Splitu gdje sam završila Osnovnu školu Bol i V. gimnaziju "Vladimir Nazor". 2013. godine upisujem Ekonomski fakultet u Splitu, a 2015. započinjem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon toga, nastavljam i diplomski studij na smjeru primijenjena matematika. Tijekom studiranja bila sam aktivni član studentske udruge PRIMUS, unutar koje sam obnašala dužnost tajnice udruge. Sudjelovala sam i u organizaciji dana karijera na Fakultetu, *"WorkIn Science"* i *"Meet the mathmaticians"*, za što sam 2019. godine i primila Rektorovu nagradu i Nagradu matematičkog vijeća za izvannastavne aktivnosti.