SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Luka Tišlar

POSTOJANJE RJEŠENJA ZADAĆE OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, travanj, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Marku Vrdoljaku na iskazanoj podršci i pomoći pri izradi ovog diplomskog rada.
Posebno hvala mojoj obitelji na podršci koju su mi pružili tijekom cijelog studiranja.

Sadržaj

Uvod

Teorija upravljanja bavi se pitanjem kako utjecati na ponašanje dinamičkog sustava da bi se postigao željeni cilj. U optimalnom upravljanju, cilj je maksimizirati ili minimizirati zadani funkcional. Teorija optimalnog upravljanja razvila se u drugoj polovici 20. stoljeća kao odgovor na probleme iz primjena. U ovom poglavlju predstavljamo primjere problema optimalnog upravljanja kako bismo ilustrirali raznolikost primjena, pokrenuli neka od uključenih matematičkih pitanja i motivirali matematičku formulaciju u narednim poglavljima. Odabrali smo prilično jednostavne probleme u nastojanju da ih ilustriramo bez pretjeranih komplikacija.

Matematički problemi optimalnog upravljanja predstavljaju svojevrsnu nadogradnju problema varijacijskog računa, koji ima preko 300 godina povijesti. Iako se teorija optimalnog upravljanja razvila bez eksplicitnog pozivanja na varijacijski račun, svaka je utjecala na drugu na različite načine. Rezultati, pojmovi i primjeri preuzeti su iz [1].

Poglavlje 1

Primjeri problema optimalnog upravljanja

1.1 Problem planiranja proizvodnje

Prvi problem, preuzet iz ekonomije, je problem raspodjele resursa: Ramseyjev model ekonomskog rasta. Neka $Q(t)$ označava stopu proizvodnje neke robe, recimo čelika, u trenutku t. Neka $I(t)$ označava stopu ulaganja robe u trenutku t za povećanje proizvodnog kapaciteta. U slučaju čelika, ulaganje se može smatrati korištenjem čelika za izgradnju novih čeličana, transportne opreme, infrastrukture itd. Neka $C(t)$ označava stopu potrošnje robe u trenutku t. U slučaju čelika, potrošnja se može smatrati proizvodnjom potrošačkih dobara kao što su automobili. Pretpostavljamo da sva roba proizvedena u trenutku t mora biti alocirana bilo na ulaganje ili na potrošnju. Onda

$$Q(t) = I(t) + C(t) \qquad I(t) \geq 0 \quad C(t) \geq 0.$$

Pretpostavljamo da je stopa proizvodnje poznata funkcija F kapitala u trenutku t. Dakle, ako $K(t)$ označava glavni kapital u trenutku t, onda

$$Q(t) = F(K(t)),$$

gdje je F dana funkcija. Stopa promjene kapitala dana je jednadžbom akumulacije kapitala.

$$\frac{dK}{dt} = \alpha I(t) - \delta K(t) \quad K(0) = K_0, \; K(t) \geq 0,$$

gdje je pozitivna konstanta α stopa rasta kapitala, a pozitivna konstanta δ stopa amortizacije kapitala. Neka $0 \leq u(t) \leq 1$ označava dio proizvodnje dodjeljen ulaganju u trenutku t. Broj

$u(t)$ naziva se stopa štednje u trenutku t. Stoga možemo pisati

$$\begin{aligned} I(t) &= u(t)Q(t) = u(t)F(K(t)) \\ C(t) &= (1 - u(t))Q(t) = (1 - u(t))F(K(t)), \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \alpha u(t)F(K(t)) - \delta K(t) \\ K(t) &\geq 0 \; K(0) = K_0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Neka je zadano $T > 0$ i neka je dana *funkcija društvene korisnosti* U koja ovisi o C. U svakom trenutku t, $U(C(t))$ je mjera zadovoljstva koje društvo dobiva od potrošnje dane robe. Neka

$$J = \int_0^T U(C(t))e^{-\gamma t} \, \mathrm{dt}$$

gdje je γ pozitivna konstanta. Naš cilj je maksimizirati J, što je mjera ukupnog društvenog zadovoljstva tijekom vremena. Diskontni faktor $e^{-\gamma t}$ je odraz fenomena da je obećanje buduće nagrade obično manje zadovoljavajuće od trenutne nagrade. Posljednji integral možemo zapisati kao

$$J = \int_0^T U((1 - u(t)))F(K(t))e^{-\gamma t} \, \mathrm{dt}.$$

Na temelju (1.1) izbor funkcije $u : [0, T] \to u(t)$, gdje je u podložna ograničenju $0 \leq u(t) \leq 1$, određuje vrijednost J. Ovdje imamo primjer *funkcionala*; odnosno funkcije koja svakoj funkciji promatrane klase pridružuje realan broj. Ako K ponovno označimo kao x, tada se problem maksimiziranja J može izraziti na sljedeći način: Odaberite program štednje u u vremenskom razdoblju $[0, T]$, odnosno funkciju u definiranu na $[0, T]$, takvu da je $0 \leq u(t) \leq 1$ i da

$$J = -\int_0^T U(1 - u(t))F(x(t))e^{-\gamma t} \, \mathrm{dt}$$

je minimiziran, gdje je φ rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\frac{dx}{dt} = \alpha u(t)F(x) - \delta x, \;\; x(0) = x_0,$$

1.2 Kemijsko inženjerstvo

Neka $x(t)$ označava koncentracije n tvari u trenutku t u reaktoru u kojem se odvija n istodobnih kemijskih reakcija. Neka se brzinama reakcija upravlja sustavom diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx^i}{dt} = G^i(x^1, \ldots, x^n, \theta(t), p(t)) \quad x^i(0) = x^i_0 \; i = 1, \ldots, n.$$

gdje je $\theta(t)$ temperatura u reaktoru u u trenutku t, a $p(t)$ je tlak u reaktoru u trenutku t. Funkcijama temperature i tlaka upravljamo ovim sustavom, uz prirodna ograničenja

$$\begin{aligned} \theta_b &\leq \theta(t) \leq \theta_a \\ p_b &\leq p(t) \leq p_a \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdje su θ_a, θ_b, p_a i p_b konstante. One predstavljaju minimalnu i najveću moguću temperaturu i tlak.

Pustimo da se reakcija odvija unaprijed određeno vrijeme T. Koncentracije u ovom trenutku su $x^1(T), \ldots, x^n(T)$. Uz svaki proizvod je pridružena ekonomska vrijednost ili cijena $c^i, i = 1, \ldots, n$. Cijena može biti negativna, kao u slučaju opasnog otpada koji se mora zbrinuti uz određeni trošak. Vrijednost krajnjeg proizvoda je

$$V(p, \theta) = \sum_{i=0}^{n} c^i x^i(T).$$

Za skup početnih koncentracija x_0^i vrijednost krajnjeg proizvoda u potpunosti je određena izborom funkcija p i θ ako funkcije G^i imaju određena lijepa svojstva. Odatle oznaka $V(p, \theta)$. Ovo je još jedan primjer funkcionala; u ovom slučaju imamo dodjelu realnog broja svakom paru funkcija u određenoj kolekciji.

Ovdje je problem odabrati djelomično neprekidne funkcije p i θ na intervalu $[0, T]$ tako da 1.2 bude zadovoljena i da $V(p, \theta)$ bude maksimiziran.

Varijanta prethodnog problema je sljedeća. Umjesto da dopustimo reakciji da teče određeno vrijeme T, zaustavljamo reakciju kada jedan od reaktanata, recimo x^1 , dosegne unaprijed zadanu koncentraciju x_f^1 . Sada konačno vrijeme t_f nije unaprijed fiksirano, već je najmanji pozitivni korijen jednadžbe $x^1(t) = x_f^1$. Sada je problem maksimizirati

$$V(p, \theta) = \sum_{i=2}^{n} c^i x^i(t_f) - k^2 t_f.$$

Pojam $k^2 t_f$ predstavlja trošak rada reaktora. Još jedna varijanta problema je zaustaviti reakciju kada nekoliko reaktanata dosegne unaprijed određene koncentracije, recimo $x^1 = x_f^1, x^2 = x_f^2, \ldots, x^j = x_f^j$. Vrijednost krajnjeg proizvoda je sada

$$\sum_{i=j+1}^{n} c^i x^i(t_f) - k^2 t_f.$$

Napominjemo da u posljednje dvije varijante problema postoji još jedno pitanje koje se mora razmotriti prije nego se pristupi problemu maksimizacije. Naime, može li se postići željena konačna koncentracija pomoću funkcija tlaka p i temperature θ u klasi relaksiranih funkcija?

Poglavlje 2

Formulacija zadaće optimalnog upravljanja

2.1 Uvod

Uvedimo sada opći oblik zadaće optimalnog upravljanja dinamičkih sustava opisanih običnim diferencijalnim jednadžbama. Stanje sustava u trenutku t opisuje se vektorom

$$x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$$

u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru, $n \geq 1$. U početku, u trenutku t_0 stanje sustava je

$$x(t_0) = x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n).$$

Općenitije, možemo zahtijevati da u početnom trenutku t_0 početno stanje x_0 bude takvo da točka (t_0, x_0) pripada nekom unaprijed zadanom skupu $\mathcal{T}_0$ u (t, x)-prostoru. Stanje sustava mijenja se s vremenom prema sustavu diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x, z) \quad x^i(t_0) = x_0^i \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

gdje je $z = (z^1, \ldots, z^m)$ vektor u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^m$, a funkcije f^i su neprekidne funkcije varijabli (t, x, z).

Funkcija u s vrijednostima u m-dimenzionalnom euklidskom prostoru bira se iz neke propisane klase funkcija. U ovom ćemo odjeljku ovu klasu uzeti kao podskup C skupa po dijelovima neprekidnih funkcija. Kada se izvrši zamjena $z = u(t)$ u desnoj strani 2.1, dobivamo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x, u(t)) = F_u^i(t, x) \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Indeks u na F_u^i naglašava da desna strana 2.2 ovisi o izboru funkcije u. Za svako $u \in \mathcal{C}$ pretpostavlja se da postoji točka (t_0, x_0) u $\mathcal{T}$, i funkcija $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ definirana na intervalu $[t_0, t_2]$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^n$ takvim da je 2.2 zadovoljena. Odnosno, zahtijevamo da za svaki $t \in [t_0, t_2]$

$$\phi^i(t) = \frac{d\phi^i}{dt} = f^i(t, \phi(t), u(t)), \quad \phi^i(t_0) = x_0^i, \ i = 1, \ldots, n.$$

U točkama prekida funkcije u ova se jednadžba tumači kao da vrijedi za jednostrane derivacije (slijeva i zdesna) naravno, uz pretpostavku neprekidnosti funkcije ϕ. Funkcija ϕ opisuje evoluciju sustava s vremenom i ponekad će se nazivati *putanjom*. Nadalje se zahtijeva da funkcija u bude takva da u nekom trenutku t_1 , gdje je $t_0 < t_1$, točka $(t_1, \phi(t_1))$ pripada unaprijed zadanom skupu $\mathcal{T}_1$ za $t_0 \leq t < t_1$ točke $(t, \phi(t))$ ne pripadaju $\mathcal{T}_1$. Skup $\mathcal{T}_1$ naziva se *terminalni skup*. U problemu planiranja proizvodnje, $\mathcal{T}_1$ je pravac $t = T$ u ravnini (t, x). U prvoj verziji problema kemijskog inženjerstva, skup $\mathcal{T}_1$ je hiperravnina $t = T$; to jest, one točke u (t, x)-prostoru s $x = (x^1, \ldots, x^n)$ slobodnim i t fiksiranim na T dok se u daljnjoj razradi neki x^i smatraju zadanima. Rasprava u prethodnim odlomcima ponekad je sažeta manje preciznim, ali nešto više grafičkim jezikom pomoću tvrdnje da su funkcije u potrebne za prijenos sustava iz početnog stanja x_0 u trenutku t_0 u terminalno stanje x_1 u trenutku t_1 , gdje je $(t_0, x_0) \in \mathcal{T}_0$ i $(t_1, x_1) \in \mathcal{T}_1$. Imajte na umu da će danoj funkciji u u $\mathcal{C}$ općenito odgovarati više od jedne putanje ϕ. To je rezultat različitih izbora početnih točaka $(t_0, x_0) \in \mathcal{T}_0$ ili nejedinstvenosti rješenja 2.2 ako se ne daju pretpostavke koje jamče jedinstvenost rješenja 2.2 s danim početnim podacima (t_0, x_0).

Često se nadalje zahtijeva da funkcija u u $\mathcal{C}$ i odgovarajuće rješenje ϕ zadovoljava uvjete tipa nejednakosti

$$R^i(t, \phi(t), u(t)) \geq 0 \ i = 1, 2, \ldots, r, \tag{2.3}$$

za sve $t_0 \leq t \leq t_1$, gdje su funkcije $R_1, \ldots, R_r$ zadane funkcije.

U primjerima iz Poglavlja 1, upravljanje u treba odabrati tako da se ovi funkcionali minimiziraju ili maksimiziraju. Općenito, funkcionali imaju sljedeći oblik. Neka je f^0 realna neprekidna funkcija argumenta (t, x, z), a g_0 realna funkcija definirana na $\mathcal{T}_0$ te g_1 realna funkcija definirana na $\mathcal{T}_1$. Za svaki $u \in \mathcal{C}$ i svako odgovarajuće rješenje ϕ od 2.2, definiramo trošak ili ispatu ili indeks učinka kako slijedi:

$$J(\phi, u) = g_0(t_0, \phi(t_0)) + g_1(t_1, \phi(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(s, \phi(s), u(s)) \mathrm{d}s.$$

Ovaj dio zaključujemo raspravom o dvjema generalizacijama koje će se pojaviti u matematičkoj formulaciji u sljedećem odjeljku. Prvi se bavi početnim i terminalnim podacima. Početni skup $\mathcal{T}_0$ i terminalni skup $\mathcal{T}_1$ određuju skup $\mathcal{B}$ točaka (t_0, x_0, t_1, x_1) u $\mathbb{R}^{2n+2}$ kako slijedi:

$$\mathcal{B} = \{(t_0, x_0, t_1, x_1) : (t_0, x_0) \in \mathcal{T}_0, \ (t_1, x_1) \in \mathcal{T}_1\}$$

Od putanje ϕ se zahtjeva da $(t_0, \phi(t_0), t_1, \phi(t_1))$ pripada $\mathcal{B}$. Drugim riječima, sada dopuštamo odnose između početnih i terminalnih podataka. Druga generalizacija bavi se opisom ograničenja na u. Za svaki (t, x), sustav nejednakosti $R^i(t, x, z) \geq 0, i = 1, \ldots, r$ određuje skup $U(t, x)$ u m-dimenzionalnom z-prostoru; naime

$$U(t, x) = \{z : R^i(t, x, z) \geq 0, i = 1, \ldots, r\}.$$

Zahtjev da funkcija u i odgovarajuća putanja zadovoljavaju ograničenja oblika 2.3 može se zapisati kao:

$$u(t) \in U(t, \phi(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Dakle, ograničenje 2.3 je poseban slučaj sljedećeg općenitijeg uvjeta ograničenja. Neka je Ω funkcija koja u svakoj točki (t, x) nekog prikladnog skupa od $\mathbb{R}^{n+1}$ dodjeljuje podskup prostora $\mathbb{R}^m$. Ograničenje 2.3 zamjenjuje se općenitijim ograničenjem

$$u(t) \in \Omega(t, \phi(t)).$$

2.2 Precizna matematička formulacija

Precizna formulacija zadaće zasnovana je na pojmu Lebesgueove mjere i integrala. To je bitno u proučavanju rješenja problema. Uspostavimo osnovne oznake i terminologiju. Neka t označava realni broj, koji će se ponekad zvati vrijeme. Neka x označava vektor u realnom euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n, n \geq 1$; dakle, $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Vektor x će se zvati *varijabla stanja*. Koristit ćemo superskripte za označavanje komponenti vektora i koristit ćemo indekse za razlikovanje vektora. Neka z označava vektor u euklidskom m-prostoru $\mathbb{R}^m, m \geq 1$; dakle, $z = (z^1, \ldots, z^m)$. Vektor z zvat će se *varijabla upravljanja*. Neka je $\mathcal{R}$ područje (t, x)-prostora i neka je $\mathcal{U}$ područje z-prostora, pri čemu pod područjem podrazumijevamo otvoreni povezani skup. Neka je $\mathcal{G} = \mathcal{R} \times \mathcal{U}$, Kartezijev produkt $\mathcal{R}$ i $\mathcal{U}$. Neka su $f^0, f^1, \ldots, f^n$ realne funkcije definirane na $\mathcal{G}$. Pišemo

$$f = (f^1, \ldots, f^n) \quad \hat{f} = (f^0, f^1, \ldots, f^n).$$

Neka je $\mathcal{B}$ skup točaka

$$(t_0, x_0, t_1, x_1) = (t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n, t_1, x_1^1, \ldots, x_1^n)$$

u $\mathbb{R}^{2n+2}$ tako da se $(t_i, x_i), i = 0, 1$ nalaze u $\mathcal{R}$ i $t_1 \geq t_0 + \delta$, za neki fiksan $\delta > 0$. Reći ćemo da skup $\mathcal{B}$ definira rubne uvjete za problem. Neka je Ω preslikavanje koje svakoj točki (t, x) u $\mathcal{R}$ dodjeljuje podskup $\Omega(t, x)$ područja $\mathcal{U}$ u z-prostoru. Reći ćemo da preslikavanje

Ω definira uvjete na upravljanje. Ako je $\Omega(t,x) = \mathcal{U}$ za svaki $(t,x) \in \mathcal{R}$, onda kažemo da nema uvjeta na upravljanje. Sustav diferencijalnih jednadžbi 2.2 zapisuje se kao

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u(t)).$$

Skalarni produkt dvaju vektora u i v u $\mathbb{R}^n$ zapisujemo kao $\langle u, v \rangle$. Koristit ćemo i simbol $|x|$ za označavanje euklidske norme vektora.

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i|^2 \right)^{1/2} = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

Definicija 2.2.1. *Upravljanje je izmjeriva funkcija* u *definirana na intervalu* $[t_0, t_1]$ *s kodomenom* $\mathcal{U}$.

Definicija 2.2.2. *Putanja koja odgovara upravljanju* u *je apsolutno neprekidna funkcija* ϕ *definirana na* $[t_0, t_1]$ *s kodomenom u* $\mathbb{R}^n$ *tako da:*

(i) $(t, \phi(t)) \in \mathcal{R}$ *za svaki* $t \in [t_0, t_1]$

(ii) ϕ *je rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u(t)); \tag{2.4}$$

ili preciznije,

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t), u(t)) \text{ g.s.na } [t_0, t_1].$$

Točku $(t_0, \phi(t_0))$ *nazivamo* početna točka putanje*, a točka* $(t_1, \phi(t_1))$ *zove se* terminalna točka putanje.

Definicija 2.2.3. *Za upravljanje* u *se kaže da je dopustivo upravljanje ako postoji putanja* ϕ *koja odgovara* u *takva da*

(i) $t \to f^0(t, \phi(t), u(t))$ *pripada* $L^1[t_0, t_1]$

(ii) $u(t) \in \Omega(t, \phi(t))$ *g.s. na* $[t_0, t_1]$

(iii) $(t_0, \phi(t_0), t_1, \phi(t_1)) \in \mathcal{B}$

Putanja koja odgovara dopustivom upravljanju kao u Definiciji 2.2.3 nazvat će se *dopustivom putanjom*.

Definicija 2.2.4. *Par funkcija* (ϕ, u) *takav da je* u *dopustivo upravljanje, a* ϕ *dopustiva putanja koja odgovara* u*, nazivamo* dopustivi par.

Problem 2.2.5. *Neka $\mathcal{A}$ označava neprazan skup svih dopustivih parova (ϕ, u). Neka*

$$J(\phi, u) = g(t_0, \phi(t_0), t_1, \phi(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, \phi(t), u(t))dt, \tag{2.5}$$

gdje je (ϕ, u) dopustivi par i g *je zadana realna funkcija definirana na $\mathcal{B}$. Neka je $\mathcal{A}_1$ neprazan podskup od $\mathcal{A}$. Cilj je pronaći (ϕ^*, u^*) u $\mathcal{A}_1$ koji minimizira funkcional J iz 2.5 u klasi $\mathcal{A}_!$. Odnosno, pronaći element (ϕ^*, u^*) u $\mathcal{A}_1$ takav da*

$$J(\phi^*, u^*) \leq J(\phi, u), \text{ za svaki } (\phi, u) \text{ u } \mathcal{A}_1.$$

Definicija 2.2.6. *Par (ϕ^*, u^*) koji rješava problem 2.4 naziva se* optimalnim parom. *Putanja ϕ^* naziva se* optimalna putanja*, a upravljanje u^* se naziva* optimalno upravljanje.

Prvi član s desne strane u 2.5 je funkcija g evaluirana u krajnjim točkama dopustive putanje. Dakle, svakoj dopustivoj putanji dodjeljuje realan broj, pa možemo definirati funkcional G_1 formulom

$$G_1(\phi) = g(t_0, \phi(t_0), t_1, \phi(t_1)).$$

Drugi primjeri funkcionala definiranih na dopustivim putanjama su

$$G_2(\phi) = \max\{|\phi(t)| : t_0 \leq t \leq t_1\}$$

i

$$G_3(\phi) = \max\{|\phi(t) - h(t)| : t_0 \leq t \leq t_1\},$$

gdje je h zadana kontinuirana funkcija definirana na intervalu I koji sadrži sve intervale $[t_0, t_1]$ definicije relaksiranih putanja. Funkcionali G_2 i G_3 nastaju u problemima u kojima se želi zadržati stanje sustava blizu nekog unaprijed zadanog stanja.

Problem 2.2.7. *Neka je sve isto kao i u Problemu 2.2.5, osim funkcionala cilja:*

$$\widehat{J}(\phi, u) = G(\phi) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, \phi(t), u(t))dt, \tag{2.6}$$

gdje je G funkcional definiran na dopustivim putanjama. Cilj je pronaći par (ϕ^*, u^*) u $\mathcal{A}_1$ koji minimizira $\widehat{J}$ u klasi $\mathcal{A}_1$.

Poglavlje 3

Relaksirano upravljanje

Definicija 3.0.1. Relaksirano upravljanje *na $\mathcal{I}$ je funkcija koja gotovo svakom $t \in \mathcal{U}$ pridružuje vjerojatnosnu mjeru na $\Omega(t)$ takvu da za svaku funkciju $g : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$ koja je neprekidna na $\mathcal{U}$ za g.s. $t \in \mathcal{I}$ i izmjeriva na $\mathcal{I}$ za svaki $z \in \mathcal{U}$, funkcija h definirana s*

$$h(t) = \int_{\Omega(t)} g(t, z) d\mu_t$$

Lebesgue izmjeriva.

Definicija 3.0.2.

$$\psi'(t) = \int_{\Omega(t)} f(t, \psi(t), z) d\mu_t$$

za g.s. t. Tada (ψ, μ) nazivamo relaksiranim parom upravljanja i putanje.

Definicija 3.0.3. *Za relaksiranu putanju kaže se da je* dopustiva *ako*

(i) $(t_0, \psi(t_0), t_1, \psi(t_1)) \in \mathcal{B}$

(ii) funkcija

$$t \to \int_{\Omega(t)} f^0(t, \psi(t), z) d\mu_t$$

je integrabilna.

Za par (ψ, μ) se kaže da je relaksirani dopustivi par.

Problem 3.0.4. *Cilj je naći relaksirani dopustivi par (ψ^*, μ^*) koji minimizira*

$$J(\psi, \mu) = g(t_0, \psi(t_0), t_1, \psi(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega(t)} f^0(t, \psi(t), z) d\mu_t dt,$$

na nekom podskupu $\mathcal{A}_1$ skupa $\mathcal{A}$ relaksiranih dopustivih parova. Odnosno, naći relaksirani dopustivi par (ψ^*, μ^*) u $\mathcal{A}_1$ takav da je $J(\psi^*, \mu^*) \leq J(\psi, \mu)$ za sve dopustive parove (ψ, μ) u $\mathcal{A}_1$.

Definicija 3.0.5. *Par (ψ^*, μ^*) naziva se* relaksirani optimalni par. *Funkcija ψ^* je* relaksirana optimalna putanja, *a upravljanje μ^* je* relaksirano optimalno upravljanje.

Teorem 3.0.6. *(Teorem Carathéodory). Neka ja A skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je x točka u $conv(A)$ gdje conv označava konveksnu ljusku. Tada postoji $(n+1)$ točaka $x_1, \ldots, x_{n+1}$ u A i $(n+1)$ nenegativnih realnih brojeva $p^1, \ldots, p^{n+1}$ takvi da je $\sum p^i = 1$ i*

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} p^i x_i$$

Lema 3.0.7. *Za svaki $(t, x) \in \mathcal{R}$ neka su*

$$V(t, x) = \{f(t, x, z) : \ z \in \Omega(t)\}$$
$$V_r(t, x) = \left\{ \int_{\Omega(t)} f(t, x, z) d\mu_t : \ \mu \ \text{je relaksirano upravljanje} \right\}$$

Tada $V_r(t, x) = conv(t, x)$.

Dokaz. Kako je konveksna kombinacija vjerojatnosnih mjera opet vjerojatnosna mjera, skup $V_r(t, x)$ je konveksan. Skup $V_r(t, x)$ sadrži skup $V(t, x)$ zato jer je *Diracova mjera δ_x* koncentrirana na z vjerojatnosna mjera. Dakle

$$conv(t, x) \subseteq V_r(t, x). \tag{3.1}$$

□

Lema 3.0.8. *Neka je I segment, te U paralelepiped u $\mathbb{R}^k$ i neka je $h : I \times U \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje koje je neprekidno na U za g.s. $t \in I$ i izmjerivo je na I za svaki $z \in U$. Neka je $W : I \to \mathbb{R}^n$ i neka je $\tilde{V} : I \to U$ tako da*

$$W(t) = h(t, \tilde{V}(t)) \quad g.s.$$

Tada postoji izmjeriva funkcija $V : I \to U$ tako da

$$W(t) = h(t, V(t)) \quad g.s. \ na \ I.$$

Štoviše, vrijednosti $V(t)$ zadovoljavaju ista ograničenja kao i vrijednosti $\tilde{V}(t)$.

Neka je $Z = (\pi, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1})$, gdje je $\pi \in \mathbb{R}^{n+1}$ i svaki $\zeta_i \in \mathbb{R}^m$, neka je $W(t) = \psi'(t)$, i neka

$$h(t, Z) = \sum_{i=1}^{n+1} \pi^i f(t, \psi(t), \zeta_i).$$

Teorem 3.0.9. *Svaka relaksirana putanja ψ je rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$x' = \sum_{i=1}^{n+1} p^i(t) f(t, c, u_i(t)), \tag{3.2}$$

gdje su realne vrijednosti izmjerivih funkcija $p^1, \ldots, p^{n+1}$ nenegativne i imaju zbroj jednak jedan g.s. i gdje su funkcije $u_1, \ldots, u_{n+1}$ izmjerive i zadovoljavaju $u_i(t) \in \Omega(t)$ g.s., $i = 1, \ldots, n+1$.

Napomena 3.0.10. *Za svaki t neka je μ_t mjera na $\Omega(t)$ definirana s*

$$\mu_t(E) = \sum_{i=1}^{k} p^i(t) \delta_{\mu_t(t)}(E).$$

Tada možemo zapisati 3.2 kao

$$x' = \int_{\Omega(t)} f(t, x, z) d\mu_t$$

3.1 Slaba kompaktnost relaksiranih upravljanja

Neka I segment u $\mathbb{R}$ i neka Z označava kompaktni skup u $\mathbb{R}^k$. Neka $C(I \times Z; \mathbb{R}^n)$ označava prostor neprekidnih funkcija u $\mathbb{R}^n$ sa $I \times Z$ sa sup normom, neka $C^*(I \times Z; \mathbb{R}^n)$ označava prostor neprekidnih linearnih operatora $L : C(I \times Z; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$. Prostor $C^*(I \times Z; \mathbb{R}^n)$ je *Banachov* prostor, s normom zadanom s

$$||L|| = \sup\{|L(g)| : ||g|| \leq 1\},$$

gdje $|\cdot|$ označava euklidsku normu u $\mathbb{R}^n$ i $||g|| = \max\{|g(t, z)| : (t, z) \in I \times Z\}$. Primjetimo da je $L = (L^1, \ldots, L^n)$, gdje je svaki L^i funkcional na $I \times Z$. Kažemo da niz (L_n) neprekidnih linearnih operatora u $C^*(I \times Z; \mathbb{R}^n)$ *kovergira* slabo-$*$ k elementu L u $C^*(I \times Z)$ ako za svaki $g \in C(I \times Z)$

$$\lim_{n \to \infty} L_n(g) = L(g).$$

Za skup Λ u $C^*(I \times Z)$ kaže se da je *slabo* $-*$ *nizovno kompaktan* ako za svaki niz (L_n) elemenata u Λ postoji element L u Λ i podniz (L_{n_k}) takav da L_{n_k} *konvergira* slaba-$*$ prema

L. Važan rezultat funkcionalne analize tvrdi da je zatvorena kugla u $C^*(I \times Z; \mathbb{R}^n)$ slabo-$*$ *nizovno kompaktna*.
Prema Rieszovom teoremu reprezentacije (v. Teorem 4.3.8. u [Conway]):
svaki neprekidni linearni funkcional L u $C^*(I \times Z)$ jedinstveno je predstavljen regularnom Borelovom mjerom ν na $I \times Z$ u smislu da

$$L(g) = \int_{I \times Z} g(t, z) d\nu$$

i

$$\|L\| = |\nu|(I \times Z), \tag{3.3}$$

gdje $|\nu|$ označava totalnu varijaciju mjere ν. Štoviše ako je L pozitivanm onda je i ν, i $\|L\| = \nu(I \times Z)$. Sada se vraćamo na relaksirana upravljanja. Neka je $\Omega(t) = Z$ za svaki $t \in I$ i neka je μ relaksirano upravljanje na I. Iz definicije relaksiranog upravljanja imamo da je za $g \in C(I \times Z)$, funkcija h definirana sa

$$h(t) = \int_Z g(t, z) d\mu_t$$

izmjeriva. Isto tako,

$$|h(t)| = \left| \int_Z g(t, z) d\mu_t \right| \leq \|g\|, \quad g.s.$$

Stoga, formula

$$L_\mu(g) = \int_I \int_Z g(t, z) d\mu_t dt$$

definira neprekidni linearni operator, uz

$$|L_\mu(g)| \leq \|g\| \, |I|,$$

gdje $|I|$ označava duljinu od segmenta I. Ako uzmemo da je funkcija g identički jednaka jedinici na $I \times Z$ dobivamo

$$\left\| L_\mu \right\| = |I|.$$

Od sada, da bismo pojednostavili zapis, za I uzimamo segment s početkom u 0.

Lema 3.1.1. *(Urysohnova Lema). Neka je K kompaktan skup u $\mathbb{R}^k$, neka je V otvoren skup u $\mathbb{R}^k$, i neka je $K \subset V$. Tada postoji neprekidna nenegativna funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f(x) = 0$ za svaki $x \notin V$, $0 \leq f(x) \leq 1$ za svaki x i $f(x) = 1$ za svaki $x \in K$.*

Definicija 3.1.2. *Kažemo da niz $\{\mu_n\}$ relaksiranih upravljanja na I* konvergira slabo *k relaksiranom upravljanju μ ako za svaki $\tau \in I$ i svaki $g \in C(I \times Z)$*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\tau \int_Z g(t, z) d\mu_{nt} dt = \int_0^\tau \int_Z g(t, z) d\mu_t dt. \tag{3.4}$$

Napomena 3.1.3. *Neka je τ točka u I, neka je $I_\tau = [0, \tau]$, i neka je I u 3.1 I_τ. Tada svaki μ_n definira neprekidnu linearnu transformaciju L_n^τ u $C^*(I_\tau \times Z)$, kao i μ. Dakle, definicija 3.1.2 kaže da za svaki $\tau \in I$ niz L_n^τ konvergira slabo-$*$ u L_μ^τ, neprekidnu linearnu transformaciju iz Definicije 3.1.2. Dakle, slaba konvergencija μ_n prema μ je zapravo slaba-$*$ konvergencija za svaku točku $\tau \in I$. Ova slaba konvergencija razlikuje se od slabe konvergencije u Banachovom prostoru.*

Definicija 3.1.4. *Niz $\{\mu_n\}$ relaksiranih upravljanja na I je slabo kompaktan ako postoji podniz $\{\mu_{n_k}\}$ i relaksirano upravljanje μ na I tako da μ_{n_k} slabo konvergira ka μ.*

Teorem 3.1.5. *Niz $\{\mu_n\}$ relaksiranih upravljanja na segmentu I je slabo kompaktan.*

Neka je $X \subset \mathbb{R}^p$ i neka $|\xi - \eta|$ označava euklidsku udaljenost između točaka ξ i η u $\mathbb{R}^p$. Neka je Λ preslikavanje iz X u podskupove euklidskog prostora u $\mathbb{R}^p$. Za $\xi_0 \in X$ neka $N_\delta(\xi_0)$ označava delta okolinu oko ξ_0 obzirom na X;

$$N_\delta(\xi_0) = \{x : x \in X, \ |x - \xi_0| < \delta\}.$$

Ako je U skup u $\mathbb{R}^q$, neka $d(y, U)$ označava euklidsku udaljenost između točke $y \in \mathbb{R}^q$ i U. Dakle,

$$d(y, U) = \inf\{|y - z| : \ z \in U\}.$$

Neka je

$$[U]_\varepsilon = \{y : \ d(y, U) \leq \varepsilon\}.$$

Skup $[U]_\varepsilon$ nazivat ćemo *zatvorenom ε-okolinom* skupa U.

Definicija 3.1.6. *Za preslikavanje Λ se kaže da je odozgo poluneprekidna s obzirom na inkluziju, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in N_\delta(x_0)$ i vrijedi $\Lambda(x) \subseteq [\Lambda(x_0)]_\epsilon$. Preslikavanje Λ je odozgo poluneprekidno na X ako je odozgo poluneprekidno u svakoj točki od X.*

Lema 3.1.7. *Neka je $\Lambda : X \to \mathbb{R}^q$, pri čemu je $X \subseteq \mathbb{R}^p$ kompaktan, preslikavanje sa kompaktnog skupa X u $\mathbb{R}^p$ u podskupove od $\mathbb{R}^q$ tako da za svaki $\xi \in X$ je skup $\Lambda(\xi)$ kompaktan. Nužan i dovoljan uvjet da Λ bude odozgo poluneprekidna na X je da skup*

$$G_\Lambda = \{(\xi, \lambda) : \xi \in X, \lambda \in \Lambda(\xi)\}$$

bude kompaktan.

Dokaz. Pretpostavimo da je Λ odozgo poluneprekidna na X. Neka je (ξ_n, λ_n) niz točaka u G_Λ. Budući da je X kompaktan, postoji podniz (ξ_n, λ_n) i točka $\xi_0 \in X$ takva da je $\lim \xi_n = \xi_0$. Neka je zadano $\varepsilon > 0$. Budući da je $\lambda_n \in \Lambda(\xi_n)$ i Λ odozgo poluneprekidna u ξ_0, postoji pozitivan cijeli broj N takav da za $n > N$, $\lambda_n \in [\Lambda(\xi_0)]_\varepsilon$. Dakle, $\{\lambda_n\}$ je ograničen i $d(\lambda_n, \Lambda(\xi_0)) \to 0$. Stoga postoji podniz koji ponovno označavamo s (ξ_n, λ_n) i točka λ_0 takva da je $\lim \xi_n = \xi_0$ i $\lim \lambda_n = \lambda_0$. Puštajući $n \to \infty$, u relaciji

$$d(\lambda_0, \Lambda(\xi_0)) \leq |\lambda_n - \lambda_0| + d(\lambda_n, \Lambda(\xi_0))$$

zbog zatvorenosti skupa $\Lambda(\xi_0)$ slijedi $\lambda_0 \in \Lambda(\xi_0)$. Stoga $(\xi_0, \lambda_0) \in G_\Lambda$, pa je G_Λ kompaktan. Pretpostavimo sada da je G_Λ kompaktan i da Λ nije odozgo poluneprekidna u nekoj točki $\xi_0 \in X$. Tada postoji $\varepsilon_0 > 0$ i niz (ξ_n, λ_n) u G_Λ takav da $\lim \xi_n = \xi_0$ i $\mathrm{d}(\lambda_n, \Lambda(\xi_0)) > \varepsilon_0$. Budući da je G_Λ kompaktan, postoji podniz koji ponovno označavamo kao (ξ_n, λ_n) i točka $(\xi_0', \lambda_0) \in G_\Lambda$ takva da je $\lim(\xi_n, \lambda_n) = (\xi_0', \lambda_0)$. Stoga je $\xi_0' = \xi_0$, pa je $\lambda_0 \in \Lambda(\xi_0)$. To je u kontradikciji s $\mathrm{d}(\lambda_n, \Lambda(\xi_0)) > \varepsilon_0$, pa je Λ odozgo poluneprekidna u ξ_0. □

Teorem 3.1.8. *Neka je I kompaktni interval u $\mathbb{R}^1$. Neka je $\Omega : t \to \Omega(t)$ preslikavanje sa I u podskupove od $\mathbb{R}^k$ koje je odozgo poluneprekidno s obzirom na inkluziju na I tako da za svaki t u I skup $\Omega(t)$ je kompaktan. Neka je $\{\mu_n\}$ niz relaksiranih upravljanja takav da za svaki n mjera μ_n je za gotovo svaki t koncentrirana na $\Omega(t)$. Tada postoji podniz niza $\{\mu_n\}$ koji konvergira slabo k relaksiranom upravljanju μ tako da za gotovo svaki t je mjera μ_t koncentrirana na $\Omega(t)$.*

Dokaz. Iz gornje poluneprekidnosti s obzirom na inkluziju Ω i Leme 3.1.7 slijedi da postoji komapktni skup Z takav da su svi skupovi $\Omega(t)$ sadržani u Z. Tada slijedi iz Teorema 3.1.5 da postoji podniz $\{\mu_n\}$ koji konvergira slabo prema relaksiranom upravljanju $\mu : t \to \mu_t$, gdje za svaki t u skupu potpune mjere T u I mjera μ_t je koncentrirana na $\{t\} \times Z$. □

3.2 Filippovljeva lema

Teorem 3.2.1. *Neka je T prostor mjere, te Z Hausdorffov prostor, a D topološki prostor koji je prebrojiva unija kompaktnih metričkih prostora. Neka je $\Gamma : T \to Z$ izmjerivo preslikavanje i neka je $\varphi : D \to Z$ neprekidno preslikavanje, takvo da $\Gamma(T) \subseteq \varphi(D)$. Tada postoji izmjerivo preslikavanje $m : T \to D$ takvo da je kompozicija $\varphi \circ m$ sa T u Z jednako Γ.*

Lema 3.2.2. *Neka je T segment u $\mathbb{R}$ i neka je U paralelepiped u $\mathbb{R}^n$. Neka je funkcija h sa $T \times U$ u $\mathbb{R}^n$ takva da za gotovo svaki $t \in T$, $h(t, \cdot)$ je neprekidna na U i za svaki $z \in U$, $h(t, \cdot)$ je izmjeriva na T. Tada za svaki $\rho > 0$ postoji zatvoreni skup F takav da je mjera skupa $T \setminus F$ manja od ρ te h neprekidna na $F \times U$. Ako je U zatvoren, tada postoji neprekidna funkcija H sa $T \times U$ u $\mathbb{R}^n$ tako da $H = h$ na $F \times U$.*

Lema 3.2.3. *Neka je Ω preslikavanje sa I na kompaktne skupove $\Omega(t)$ u $\mathbb{R}^m$ koje je odozgo poluneprekidno. Tada postoji izmjeriva funkcija u takva da $u(t) \in \Omega(t)$ za svaki $t \in I$.*

3.3 Lema o aproksimaciji relaksiranih upravljanja

U ovom poglavlju pokazujemo da pod razumnim hipotezama, obične putanje upravljivog sustava su guste u skupu relaksiranih putanja.

Teorem 3.3.1. *Neka je $\mathcal{I}$ kompaktan realan interval i neka je $\mathcal{X}$ kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$. Neka su funkcije $f_1, \dots, f_q$ definirane na $\mathcal{I} \times \mathcal{X}$ sa kodomenom u $\mathbb{R}^n$ i posjeduju sljedeća svojstva:*

(i) Svaka f_i je izmjeriva funkcija na $\mathcal{I}$ za svaki $x \in \mathcal{X}$

(ii) Svaka f_i je neprekidna na $\mathcal{X}$ za svaki $t \in \mathcal{I}$.

(iii) Postoji integrabilna funkcija μ definirana na $\mathcal{I}$ takva da za svaki (t, x) i (t, x') u $\mathcal{I} \times \mathcal{X}$, $i = 1, \dots, q$:

$$|f_i(t, x)| \leq \mu(t)$$
$$|f_i(t, x) - f_i(t, x')| \leq \mu(t)|x - x'|.$$

Neka su p^i, $i = 1, \dots, q$, realne nenegativne izmjerive funkcije definirane na $\mathcal{I}$ i zadovoljavaju

$$\sum_{i=0}^{q} p^i(t) = 1 \quad g.s.$$

Tada za svaki $\bar{\varepsilon} > 0$ postoji subdivizija od $\mathcal{I}$ unutar konačne kolekcije disjunktnih intervala E_j, $j = 1, \dots, k$ i dodjela jedne od funkcija $f_1, \dots, f_1$ svakom E_j tako da vrijedi sljedeće. Ako f_{E_j} označava funkciju dodjeljenu E_j i ako je f funkcija koja se slaže sa f_{E_j} na interioru E_j^0 od E_j, tako da,

$$f(t, x) = f_{E_j}(t, x) \quad ako\ t \in E_j^0,\ j = 1, \dots, k,$$

tada za svaki $t', t'' \in \mathcal{I}$ i svaki $x \in \mathcal{X}$

$$\left| \int_{t'}^{t''} \left(\sum_{i=1}^{q} p^i(t) f_i(t, x) - f(t, x) \right) dt \right| < \bar{\varepsilon}.$$

Teorem 3.3.2. *Neka su $f_1, \dots, f_q$ i $p^1, \dots, p^q$ kao i u Teoremu 3.3.1. Neka je $\Psi : \mathcal{I} \to \mathcal{X}$ familija ekvineprekidnih funkcija. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija od $\mathcal{I}$ na konačno mnogo disjunktnih intervala E_j i dodjela jedne od funkcija $f_1, \dots, f_q$ svakom od intervala E_j tako da slijedi. Ako f_{E_j} označava funkciju dodjeljenu E_j i ako je f funkcija koja se podudara sa f_{E_j} na E_j^0, interioru od E_j, za koju vrijedi*

$$f(t, x) = f_{E_j}(t, x) \quad t \in E_j^0,$$

tada za svaki t' i t'' u $\mathcal{I}$ i svaku funkciju $\psi \in \Psi$ vrijedi

$$\left| \int_{t'}^{t''} \left(\sum_{i=1}^{q} p^i(t) f_i(t, \psi(t)) - f(t, \psi(t)) \right) dt \right| < \varepsilon.$$

Dokaz. Neka je ε zadan. Kako su funkcije u Ψ ekvineprekidne na $\mathcal{I}$, koji je kompaktan, postoji konačna particija od $\mathcal{I}$ nepreklapajučih podintervala $\{I_j\} = \{[t_j, t_{j+1}]\}$, $j = 1, \ldots, k$ tako da $\cdots < t_{j-1} < t_j < t_{j+1} < \cdots$, za sve $\psi \in \Psi$ i svaki $t \in I_j$, $j = 1, \ldots, k$ za koju vrijedi

$$|\psi(t) - \psi(t_j)| < \varepsilon \left(4 \int_{\mathcal{I}} \mu dt \right)^{-1} \equiv \varepsilon'.$$

□

Lema 3.3.3. *Neka su ρ i μ nenegativne realne funkcije neprekidne na* $[0, \infty)$ *tako da vrijedi*

$$\rho(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} \mu(s)\rho(s) ds \quad \alpha \geq 0 \tag{3.5}$$

za svaki $t_0, t \in [0, \infty)$. *Tada*

$$\rho(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu(s) ds \right). \tag{3.6}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\alpha > 0$. Tada desna strana od (3.5)vje strogo pozitivna i dobivamo

$$\rho(\tau)\mu(\tau) \left[\alpha + \int_{t_0}^{\tau} \mu(s)\rho(s) ds \right]^{-1} \leq \mu(\tau).$$

Integriranjem obje strane nejednakosti od t_0 do t i sa (3.5) dobivamo

$$\log \rho(t) \leq \log \left[\alpha + \int_{t_0}^{t} \mu\rho ds \right] \leq \log \alpha + \int_{t_0}^{t} \mu ds.$$

Iz toga slijedi (3.6). □

Teorem 3.3.4. *Neka je $\mathcal{I}$ segment u $\mathbb{R}$, neka je $\mathcal{X}$ segment u $\mathbb{R}^n$ i neka je $\mathcal{R} = \mathcal{I} \times \mathcal{X}$. Neka je $\mathcal{G} = \mathcal{R} \times \mathcal{U}$, gdje je $\mathcal{U}$ okolina u $\mathbb{R}^m$, te neka je $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$. Neka je presliakvanje $\Omega : \mathcal{R} \to \mathcal{U}$ nezavisno od x; tada je, $\Omega(t, x') = \Omega(t, x) \equiv \Omega(t)$ za svaki x i x' u $\mathcal{X}$. Neka postoji integrabilna funkcija μ definirana na $\mathcal{I}$ takva da za sve $(t, x, z) \in \mathcal{G}$ vrijedi*

$$|f(t, x, z)| \leq \mu(t)$$

i za sve (t, x, z) i $(t, x', z) \in \mathcal{G}$

$$|f(t, x, z) - f(t, x', z)| \leq \mu(t)|x - x'|. \tag{3.7}$$

Neka je $\mathcal{I}_1 = [t_0, t_1]$ segment sadržan u interioru od $\mathcal{I}$ i $\mathcal{X}_1$ segment u interioru od $\mathcal{X}$. Neka je $\mathcal{R}_1 = \mathcal{I}_1 \times \mathcal{X}_1$. Neka je $v = (u_!, \ldots, u_{n+2}, p^1, \ldots, p^{n+2})$ relaksirano upravljanje na $\mathcal{I}_1$ za relaksirani sustav

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n+2} p^i(t) f(t, x, u_i(t))$$

koji odgovara upravljivom sustavu

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t)).$$

Neka oba sustava imaju inicijalnu točku $(t_0, x_0) \in \mathcal{I}_1 \times \mathcal{X}_1$. Neka je ψ relaksirana putanja koja odgovara v na $\mathcal{I}_1$ i neka je $\psi(t) \in \mathcal{X}_1$ za svaki $t \in [t_0, t_1]$. Tada postoji $\varepsilon_0 > 0$ takav da za svaki ε za koji vrijedi $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ postoji upravljanje u_ε definirano na $\mathcal{I}_1$ sa sljedećim svojstvima.

(i) Upravljanje $u_\varepsilon(t) \in \Omega(t)$ za g.s. $t \in \mathcal{I}_1$,

(ii) putanja ϕ_ε koja odgovara u_ε leži u $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{X}$, i

(iii) $|\phi_\varepsilon(t) - \psi(t)| < \varepsilon$ za svaki $t \in \mathcal{I}_1$.

Dokaz. Neka ε_0 označava udaljenost između $\partial\mathcal{X}$ i $\partial\mathcal{X}_1$, gdje za svaki skup A simbol ∂A označava rub skupa A. Za $\varepsilon_0 > 0$, neka je

$$K = \int_{t_0}^{t_1} \mu dt \tag{3.8}$$

i neka je ε broj koji zadovoljava $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Za $(t, x) \in \mathcal{I}_1 \times \mathcal{X}$, $i = 1, \ldots, n+2$ neka je

$$f_i(t, x) = f(t, x, u_i(t)). \tag{3.9}$$

Hipoteze iz teorema impliciraju da funkcije f_i zadovoljavaju hipoteze Teorema 3.3.1 i 3.3.2.Budući da je f neprekidna na $\mathcal{R}$ i svaka u_i izmjeriva, funkcije f_i su izmjerive na $\mathcal{I}_\infty$ za svaki fiksirani $x \in \mathcal{X}$.

Neka je $\varepsilon' = \varepsilon e^{-K}$. Primjenjujemo Teorem 3.3.2 na upravo definirane funkcije $f_1, \ldots, f_{n+2}$, funkcije $p^1, \ldots, p^{n+2}$ na relaksirano upravljanje, familiju Ψ koja se sastoji od jednog elementa - relaksirane putanje ψ i na vrijednost $\varepsilon = \varepsilon'$. Dobivamo postojanje funkcije $\hat{f}$ takve da za $x \in \mathcal{X}_1$ i $t \in \mathcal{I}_1$ vrijedi

$$\hat{f}(t, x) = f_{E_j}(t, x) \quad t \in E_j^0 \tag{3.10}$$

i

$$\left| \int_{t'}^{t''} \left(\sum_{i=1}^{n+2} p^i(t) f_i(t, \psi(t)) - \hat{f}(t, \psi(t)) \right) dt \right| < \varepsilon' \tag{3.11}$$

za proizvoljne $t', t'' \in \mathcal{I}_1$.

Iz definicije od f_i i iz (3.10) slijedi

$$\hat{f}(t,x) = f_{E_j}(t,x) = f(t,x,u_{E_j}(t)) \quad t \in E_j^0. \tag{3.12}$$

Definiramo

$$u_\varepsilon(t) = u_{E_j}(t) \quad \text{ ako } t \in E_j^0.$$

Kako je u_{E_j} jedna od $u_1,\ldots,u_{n+2}$ i svaka u_i zadovoljava $u_i(t) \in \Omega(t)$ g.s. na $\mathcal{I}_1$ slijedi da $u_\varepsilon(t) \in \Omega(t)$ na $\mathcal{I}_1$ g.s. Iz definicije od u_ε i (3.12) slijedi

$$\hat{f}(t,x) = f(t,x,u_\varepsilon(t)).$$

Razmotrimo sustav

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u_\varepsilon(t)) = \hat{f}(t,x) \tag{3.13}$$

s inicijalnom točkom (t_0, x_0). Kako f zadovoljava (3.7) slijedi da kroz svaku točku (t_2, x_2) u interiroru od $\mathcal{I} \times \mathcal{X}$, prolazi jedinstveno rješenje od (3.13) pod uvjetom da proširimo u_ε da bude definirana i izmjeriva na $\mathcal{I}$. Konkretno, postoji jedinstveno rješenje ϕ_ε od (3.13) s inicijalnom točkom (t_0, x_0). Ovo rješenje definiramo na otvorenom intervalu koji sadrži t_0 u svome interioru. Neka $\mathcal{I}_{\max} = (a,b)$ označava maksimalni interval na kojem je ϕ_ε definirano. Ako je $[a,b] \subseteq \mathcal{I}_1$, tada $\limsup_{t\to b} \phi_\varepsilon(t)$ mora biti rubna točka od $\mathcal{X}$; inače bismo mogli proširiti rješenje ϕ_ε na interval koji sadrži $\mathcal{I}_{\max}$ u svome interioru. To bi bilo kontradiktorno sa maksimalnošću od $\mathcal{I}_{\max}$. Pokazujemo da za svaki $t \in \mathcal{I}_{\max}$, vrijedi nejednakost $|\phi_\varepsilon(t) - \psi(t)| < \varepsilon$. Kako je $\psi(t) \in \mathcal{X}_1$ za svaki $t \in [t_0, t_1]$ i kako je $\varepsilon < \varepsilon_0 = (\partial\mathcal{X}_1, \partial\mathcal{X})$ slijedi da je $[a,b] \supset \mathcal{I}_1$ i ϕ_ε definirano na cijelom $\mathcal{I}_1$. Štoviše, ψ je definirano na cijelom $\mathcal{I}_1$ i $\psi(t_0) = \phi_\varepsilon(t_0) = x_0$, tada za svaki $t \in [t_0, b]$

$$\begin{aligned}
|\psi(t) - \phi_\varepsilon(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} (\psi'(s) - \phi_\varepsilon'(s)) ds \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n+2} p^i(s) f_i(s,\psi(s)) - \hat{f}(s,\phi_\varepsilon(s)) \right) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n+2} p^i(s) f_i(s,\psi(s)) - \hat{f}(s,\psi(s)) \right) ds \right| + \left| \int_{t_0}^{t} (\hat{f}(s,\psi_(s)) - \hat{f}(s,\phi_\varepsilon(s))) ds \right| \\
&< \varepsilon' + \int_{t_0}^{t} |\hat{f}(s,\psi_(s)) - \hat{f}(s,\phi_\varepsilon(s))| ds,
\end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz (3.11). Sada iz (3.12) i (3.7) slijedi

$$\int_{t_0}^{t} |\hat{f}(s,\psi(s)) - \hat{f}(s,\phi_\varepsilon(s))| ds \leq \int_{t_0}^{t} \mu(s) |\psi(s) - \phi_\varepsilon(s)| ds.$$

Kombiniranjem ovoga s prethodnom nejednakošču dobiva se

$$|\psi(t) - \phi_\varepsilon(t)| < \varepsilon' + \int_{t_0}^{t} \mu(s)|\psi(s) - \phi_\varepsilon(s)|ds.$$

Iz Leme 3.3.3, (3.8), i iz definicije ε' zaključujemo da

$$|\psi(t) - \phi_\varepsilon(t)| < \varepsilon' \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu ds\right) \leq \varepsilon' e^K = \varepsilon,$$

čime je teorem dokazan. $\square$

Poglavlje 4

Rezultati o postojanju rješenja

4.1 Primjeri zadaća optimalnog upravljanja bez rješenja

Primjer 4.1.1. *Neka je x jednodimenzionalan. Neka je jednadžba stanja*

$$\frac{dx}{dt} = u(t).$$

Neka se $\mathcal{B}$ *sastoji od jedne točke* $(t_0, x_0, t_1, x_1) = (0, 0, 1, 2)$ *i neka je*

$$\Omega(t, x) = \{z : |z| \leq 1\}.$$

Dakle, dopustivo uoravljanje zadovoljava nejednakost $|u(t)| \leq 1$ *za gotovo svaki* $t \in [0, 1]$ *i prenosi sustav iz* $x_0 = 0$ *i vremena* $t_0 = 0$ *u stanje* $x_1 = 2$ *i vrijeme* $t_1 = 1$*. Jasno je da* $|\phi(1)| \leq 1$*. Dakle, skup dopustivih parova je prazan.*

Primjer 4.1.2. *Neka je x jednodimenzionalan. Neka je jednadžba stanja* $dx/dt = u(t)$*. Neka se* $\mathcal{B}$ *sastoji od jedne točke* $(t_0, x_0, t_1, x_1) = (0, 1, 1, 0)$ *i neka je* $\Omega(t, x) = \mathbb{R}$*. Neka je*

$$J(\phi, u) = \int_0^1 t^2 u^2(t) dt. \tag{4.1}$$

Skup dopustivih upravljanja je skup funkcija u $L_1([0, 1])$*. Svakom upravljanju u odgovara jedinstvena putanja* ϕ *za koju vrijedi* $\phi(0) = 1$*, naime putanja je dana*

$$\phi(t) = 1 + \int_0^t u(s) ds.$$

Za svaki $0 < \varepsilon < 1$ *definiramo upravljanje* u_ε *na način*

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \varepsilon \leq t \leq 1 \\ -\varepsilon^{-1}, & 0 \leq t < \varepsilon. \end{cases}$$

Neka ϕ_ε označuje jedinstvenu putanju koja odgovara u_ε i zadovoljava $\phi_\varepsilon(0) = 1$. Očito, $(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$ je dopustivi par. Klasa $\mathcal{A}$ dopustivih parova nije prazna. Štoviše,

$$J(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon) = \int_0^\varepsilon t^2\varepsilon^{-2}dt = \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Kako je $J(\phi, u) \geq 0$ za svaki dopustivi par (ϕ, u), slijedi $0 = \inf\{J(\phi, u)|(\phi, u) \in \mathcal{A}\}$. Iz 4.1 jasno je da $J(\phi, u) = 0$ samo ako $u(t) = 0$ g.s. na $[0, 1]$. Međutim, $u^* = 0$ nije dopustiva jer odgovarajuća putanja ϕ^* je identična jedinici i stoga ne zadovoljava krajnje ograničenje. U ovom primjeru, skup dopustivih smjerova je konveksan, ali skup ograničenja, iako je konstantan, nije kompaktan.

Primjer 4.1.3. *Neka je sve kao u Primjeru 4.1.2 osim skupa dopustivih upravljanja koji je zadan:*

$$\Omega(t, x) = \{z : |z| \leq 1/t\}$$
$$\Omega(0, x) = \mathbb{R}.$$

Argumenti iz Primjera 4.1.2 su još uvijek valjani i optimalno upravljanje ne postoji. Skup dopustivih smjerova je konveksan. Skupovi ograničenja ovise samo o t i kompaktni su, osim za $t = 0$.

4.2 Postojanje relaksiranih optimalnih upravljanja

Pretpostavka 4.2.1. *(i) Svaka f^i je izmjeriva na $\mathcal{I}$ za svaki fiksirani (x, z) u $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ i neprekidna na $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ za svaki fiksirani t u $\mathcal{I}$.*

(ii) Za svaki kompaktni skup K u $\mathcal{I} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ postoji funkcija M_K u $L_2[\mathcal{I}]$ takva da

$$|f(t, x, z)| \leq M_K(t)$$
$$|f(t, x, z) - f(t, x', z)| \leq M_K(t)|x - x'|$$

za svaki (t, x, z) i (t, x', z) u $\mathcal{I} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$.

Lema 4.2.2. *Neka je f jedno od (i) neprekidna na $\mathcal{I} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ ili (ii) funkcija za koju vrijedi Pretpostavka 4.2.1. Neka je $\{\varphi_n\}$ niz neprekidnih funkcija definiranih na $\mathcal{I}$ koje konvergiraju uniformno ka neprekidnoj funkciji φ na $\mathcal{I}$. Neka je $\{\mu_n\}$ niz relaksiranih upravljanje sa mjerama μ_{nt} koje su koncentrirane na fiksnom kompaktnom skupu Z i konvergiraju slabo ka relaksiranom upravljanju μ na I. Tada za bilo koju funkciju g u $L_2[\mathcal{I}]$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{I}} g(t)f(t, \varphi_n(t), \mu_{nt})dt = \int_{\mathcal{I}} g(t)f(t, \varphi(t), \mu_t)dt.$$

Štoviše, za svaki izmjerivi skup $\Delta \subseteq \mathcal{I}$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Delta g(t)f(t,\varphi_n(t),\mu_{nt})dt = \int_\Delta g(t)f(t,\varphi(t),\mu_t)dt.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna na $\mathcal{I}\times\mathcal{X}\times\mathcal{U}$. Kako niz $\{\varphi_n\}$ konvergira uniformno k φ, sve točke $(t,\varphi_n(t),z)$ i $(t,\varphi(t),z)$, gdje je $t\in\mathcal{I}$ i $z\in\mathcal{Z}$, se nalaze u kompaktnom skupu $K\subseteq\mathcal{I}\times\mathcal{X}\times\mathcal{U}$. Budući da je f uniformno neprekidna na K, kako φ_n konvergira uniformno k φ i kako su svaka μ_{nt} i μ_t vjerojatnosne mjere, postoji konstanta A_K tako da vrijedi

$$|f(t,\varphi_n(t),\mu_{nt})| \le A_K \text{ i } |f(t,\varphi(t),\mu_t| \le A_K \tag{4.2}$$

za svaki n i svaki $t\in I$. Neka je

$$\delta_n = \int_\mathcal{I} g(t)[f(t,\varphi_n(t),\mu_{nt}) - f(t,\varphi(t),\mu_{nt})]dt.$$

Tada

$$\int_\mathcal{I} g(t)f(t,\varphi_n(t),\mu_{nt})dt - \int_\mathcal{I} f(t,\varphi(t),\mu_t)dt = \delta_n + \int_\mathcal{I} g(t)[f(t,\varphi(t),\mu_{nt}) - f(t,\varphi(t),\mu_t)]dt \tag{4.3}$$

Kako je f uniformno neprekidna na K i svaka μ_{nt} je vjerojatnosna mjera na Z, slijedi da za svaki $\varepsilon>0$ postoji pozitivan cijeli broj $n(\varepsilon)$ takav da za $n>n(\varepsilon)$

$$|\delta_n| \le \varepsilon\,\|g\|,$$

gdje je $\|\ \|$ $L-$norma. Dakle, $\delta_n\to 0$ kada $n\to\infty$. Također za svaki $\varepsilon>0$ postoji neprekidna funkcija h_ε na $\mathcal{I}$ tako da vrijedi $\|h_\varepsilon - g\|\le\varepsilon$. Desni integral u 4.3 jednak je

$$\int_\mathcal{I}[g(t)-h_\varepsilon(t)][f(t,\varphi(t),\mu_{nt}) - f(t,\varphi(t),\mu_t)]dt + \int_\mathcal{I} h_\varepsilon(t)[f(t,\varphi(t),\mu_{nt}) - f(t,\varphi(t),\mu_t)]dt \tag{4.4}$$

Drugi integral u 4.4 teži u nulu kako $n\to\infty$ jer μ_{nt} slabo konvergira u μ_t. Iz 4.2 slijedi da apsolutna vrijednost integrala u 4.4 ne prelazi

$$2A_K\int_\mathcal{I}|g(t)-h_\varepsilon(t)|dt \le 2A_K\,\|g-h_\varepsilon\| < \varepsilon 2A_K.$$

Sada slijedi prvi zaključak ako vrijedi (i). Drugi zaključak dobivamo zamjenom g sa $g\chi_\Delta$, gdje je χ_Δ karakteristična funkcija od Δ. □

Teorem 4.2.3. *Neka je* $\widehat{f} = (f^0, f^1,\ldots,f^n)$ *definirana na* $\mathcal{I}\times\mathcal{X}\times\mathcal{U}$, *gdje je* $\mathcal{I}$ *kompaktni interval u* $\mathbb{R}^1$, $\mathcal{X}$ *otvoren interval u* $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathcal{U}$ *otvoren interval u* $\mathbb{R}^m$. *Neka* $\widehat{f}$ *zadovoljava*

Pretpostavku 4.2.1 ili bude neprekidna na $\mathcal{I} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$. Neka je $\mathcal{B}$ zatvoren skup točaka (t_0, x_0, t_1, x_1) u $\mathbb{R}^{n+2}$ gdje je $t_0 < t_1$ i (t_0, x_0), (t_1, x_1) u $\mathcal{R} = \mathcal{I} \times \mathcal{X}$. Neka je g realna odozdo poluneprekidna funkcija definirana na $\mathcal{B}$. Neka je $\Omega : \mathcal{I} \to \mathcal{U}$ odozgo poluneprekidno na $\mathcal{I}$. Neka je skup relaksiranih dopustivih parova neprazan i za kojeg vrijedi da su sve dopustive putanje definirane na $\mathcal{I}$, čiji su grafovi sadržani u kompaktnom podskupu $\mathcal{R}_0$ od $\mathcal{R} = \mathcal{I} \times \mathcal{X}$. Tada postoji dopustiv relaksirani par (ψ^*, μ^*) koji minimizira

$$J(\psi, \mu) = g(t_0, \psi(t_0), t_1, \psi(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, \psi(t), \mu_t) dt \tag{4.5}$$

na skupu svih relaksiranih dopustivih parova.

Napomena 4.2.4. *Nadalje, zbog pojednostavnjenja notacije definiramo*

$$e(\psi) \equiv (t_0, \psi(t_0), t_1, \psi(t_1))$$

i $e(\psi)$ nazivamo rubna točka *od ψ.*

Napomena 4.2.5. *Pretpostavka da grafovi dopustivih putanja leže u kompaktnom skupu i da je $\mathcal{B}$ zatvoren implicira da krajnje točke $e(\psi)$ od dopustivih putanja leže u kompaktnom podskupu od $\mathcal{B}$. Dakle, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{B}$ kompaktan.*

Dokaz teorema . Na temelju Napomene 4.2.5 uzimamo da je $\mathcal{B}$ kompaktan. Kako je $\mathcal{B}$ kompaktan i g je odozdo poluneprekidna na $\mathcal{B}$, tada postoji konstanta B takva da

$$g(r(\psi)) \geq B \tag{4.6}$$

za sve dopustive ψ. Kako je Ω odozgo poluneprekidno preslikavanje, slijedi iz Leme 3.1.7 da svi skupovi $\Omega(t)$, gdje je $t \in \mathcal{I}$, su sadržani u kompaktnom skupu. Prema hipotezi sve točke $(t, \psi(t))$ gdje je $t \in I$ i ψ koja je dopustiva relaksirana putanja leže u kopaktnom skupu $\mathcal{R}_0$ u $\mathcal{I} \times \mathcal{X}$. Tada slijedi da postoji nenegativna funkcija M u $L_2[\mathcal{I}]$ takva da

$$|\widehat{f}(t, \psi(t), z)| \leq M(t) \tag{4.7}$$

za svaki $t \in \mathcal{I}$, ψ je dopustiva i $z \in \Omega(t)$. Ako je f neprekidna, onda je M konstanta. Neka je

$$m = \inf\{J(\psi, \mu) : (\psi, \mu) \text{ je dopustivi relaksirani par}\}, \tag{4.8}$$

gdje je $J(\psi, \mu)$ definirana u (4.5). Iz (4.6) i (4.7) dobivamo da je m konačan. Neka je $\{(\psi_n, \mu_n)\}$ niz dopustivih parova takvih da vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} J(\psi_n, \mu_n) = m. \tag{4.9}$$

Svaki dopustivi par (ψ_n, μ_n) je definiran na $\mathcal{I}$ i ima restrikciju $I_N = [t_{0n}, t_{1n}]$ tako da $e(\psi_n) = (t_{0n}, \psi_n(t_{0n}), t_{1n}, \psi_n(t_{1n}))$ je u $\mathcal{B}$. Kako sve točke $e(\psi_n)$ leže u kompaktnom skupu $\mathcal{B}$, tada postoji podniz od $\{\psi_n\}$, kojega ozničimo kao $\{\psi_n\}$, i točka (t_0, x_0, t_1, x_1) u $\mathcal{B}$ takva da $e(\psi_n) \to (t_0, x_0, t_1, x_1)$. Posebno, $t_{0n} \to t_0$ i $t_{1n} \to t_1$. Iz

$$\psi'_n(t) = f(t, \psi_n(t), \mu_{nt}) \text{ g.s. u } \mathcal{I},$$

(4.7) i činjenice da je μ_{nt} vjerojatnosna mjera na $\Omega(t)$ imamo da za svaki $n \in \mathcal{I}$ i $g.s.\ t \in \mathcal{I}$,

$$|\psi'_n(t)| = f(t, \psi_n(t), \mu_{nt})| \leq M(t) \tag{4.10}$$

gdje je M kao u (4.7). Odavde i iz relacije

$$\psi_n(t) - \psi_n(t') = \int_{t'}^{t} \psi'_n(s) ds$$

slijedi da su funkcije $\{\psi_n\}$ ekvineprekidne na kompaktnom intervalu I. Kako sve putanje leže u kompaktnom skupu $\mathcal{R}$, funkcije $\{\psi_n\}$ su uniformno ograničene. Dakle, postoji podniz od $\{\psi_n\}$, kojeg označavamo $\{\psi_n\}$ i neprekidna funkcija ψ^* na $\mathcal{I}$ takva da

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(t) = \psi^*(t)$$

uniformno na $\mathcal{I}$. Po Teoremu 3.1.8 postoji podniz relaksiranih upravljanja koji odgovaraju $\{\psi_n\}$ i konvergiraju slabo prema relaksiranom upravljanju μ^* na $\mathcal{I}$ tako da je μ_t koncentrirana na $\Omega(t)$. Neka $\{\mu_n\}$ označava podniz. Postoji podniz relaksiranih putanja koje odgovaraju $\{\mu_n\}$ i koje ponovo označavamo $\{\psi_n\}$. Ukratko, imamo podniz dopustivih parova $\{(\psi_n, \mu_n)\}$ takvih da ψ_n konvergira uniformno na $\mathcal{I}$ k neprekidnoj funkciji ψ^* i μ_n konvergira slabo k relaksiranom upravljanju μ^* tako da je μ^*_t koncentrirana na $\Omega(t)$. Iz

$$|\psi_n(t_{in} - \psi^*(t_i)| \leq |\psi_n(t_{in}) - \psi^*(t_{in})| + |\psi^*(t_{in}) - \psi^*(t_i)| \quad i = 0, 1,$$

iz $t_{in} \to t_i$, $i = 0, 1$, iz uniformne konvergencije od ψ_n k ψ^* i iz neprekidnosti ψ^* dobivamo

$$x_i = \lim_{n \to \infty} \psi(t_{in}) = \psi^*(t_i) \quad i = 0, 1. \tag{4.11}$$

Za svaki n, dopustivi par (ψ_n, μ_n) u podnizu zadovoljava

$$\psi_n(t) = \psi_(t_{0n}) + \int_{t_{0n}}^{t} f(s, \psi_n(s), \mu_{ns}) ds.$$

Ako pustimo $n \to \infty$ i iskoristimo (4.10) i (4.11) i Leme 4.2.2, dobivamo

$$\psi^*(t) = \psi^*(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(s, \psi^*(s), \mu^*_s) ds \tag{4.12}$$

za $t \in \mathcal{I}$. Sličan argument daje

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_{0n}}^{t_{1n}} f^0(s, \psi_n(s), \mu_{n,s}) ds = \int_{t_0}^{t_1} f^0(s, \psi^*(s), \mu_s^*) ds. \tag{4.13}$$

Iz $(t_0, x_0, t_1, x_1) \in \mathcal{B}$,(4.11), (4.12) i činjenice da je μ_t^* koncentrirana na $\Omega(t)$ dobivamo da je (ψ^*, μ^*) dopustivi par. Kako je g odozdo poluneprekidna

$$\liminf_{n\to\infty} g(e(\psi_n)) \geq g(e(\psi^*)).$$

Iz ovoga i (4.9) i (4.13) dobivamo

$$m = \lim_{n\to\infty} J(\psi_n, \mu_n) \geq J(\psi^*, \mu^*) \geq m.$$

Dakle $J(\psi^*, \mu^*) = m$, i teorem je dokazan. □

Napomena 4.2.6. *Niz $\{(\psi_n, \mu_n)\}$ kao u 4.9 nazivamo minimizirajući niz. Iz dokaza je očito da jedino trebamo pretpostaviti da postoji minimizirajući niz koji se nalazi u kompaktnom skupu $\mathcal{R}_0$.*

Korolar 4.2.7. *Neka vrijede hipoteze Teorema 4.2.3 sa pretpostavkom da sve putanje leže u kompaktnom skupu $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$ koju zamjenjujemo pretpostavkom da postoji minimizirajući niz čije sve putanje leže u kompaktnom skupu $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$. Tada postoji relaksirani optimalni par (ψ^*, μ^*).*

Lema 4.2.8. *Neka je $\mathcal{R} = \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$. Neka je $\Delta = \{(t, x, z) : (t, x) \in \mathcal{R}, z \in \Omega(t, x)\}$. Neka funkcija $f = (f^1, \ldots, f^n)$ zadovoljava*

$$|\langle x, f(t, x, z)\rangle| \leq \Lambda(t)(|x|^2 + 1), \tag{4.14}$$

za sve $(t, x, z) \in \Lambda$, gdje je $\Lambda \in L_1(\mathcal{I})$. Neka svaka dopustiva putanja ϕ sadrži najmanje jednu točku $(\hat{t}, \phi(\hat{t}))$ koja pripada danom kompaktnom skupu $C \in \mathcal{R}$. Tada postoji kompaktni skup $\mathcal{R}_0$ sadržan u $\mathcal{R}$ takav da svaka dopustiva putanja leži u $\mathcal{R}_0$. Ako zahtjevamo da sve inicijalne točke dopustive putanje leže u C, onda možemo izostaviti apsolutnu vrijednost na lijevoj strani u (4.14).

Dokaz. Za svaku putanju ϕ, neka $\phi(t) = |\phi(t)|^2 + 1$. Tada, $\phi'(t) = 2\langle\phi(t), f(t, \phi(t), u(t))\rangle$, na temelju (4.14)

$$|\phi'(t)| \leq 2\Lambda(t)(|\phi(t)|^2 + 1) = 2\Lambda(t)\phi(t).$$

Dakle

$$-2\Lambda(T)\phi(t) \leq \phi'(t) \leq 2\Lambda(t)\phi(t). \tag{4.15}$$

Ako je $(\hat{t}, \phi(\hat{t}))$ točka putanje koja pripada C, tada integrirajući (4.15) dobivamo

$$\phi(t) \leq \phi(\hat{t}) \exp\left(2\left|\int_{\hat{t}}^{t} \Lambda(s)ds\right|\right) \leq \phi(\hat{t}) \exp\left(2\int_{\mathcal{I}} \Lambda(s)ds\right)$$

za sve točke putanje. Kako je C kompaktan, postoji konstanta D takva da ako $(t, x) \in C$ onda $|x| \leq D$. Dakle

$$\phi(t) \leq (D^2 + 1) \exp\left(2\int_{\mathcal{I}} \Lambda(s)ds\right).$$

Kako je desna strane ove nejednakosti konstantna nezavisno o putanji ϕ, slijedi da sve putanje leže u istom kompaktnom skupu $\mathcal{R}_0$. Ako inicijalne točke (t_0, x_0) sve leže u kompaktnom skupu, trebamo samo iskoristiti krajnju desnu nejednakost (4.14) da dobijemo granicu na $\phi(t)$ koja je nezavisna sa ϕ. □

Korolar 4.2.9. *Uz pretpostavke Leme 4.2.8 sve dopustive relaksirane putanje leže u kompaktnom skupu.*

Korolar 4.2.10. *Neka vrijedi Pretpostavka 4.2.1 ili neka je f neprekidna na $\mathcal{I} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ i neka vrijede pretpostavke Leme 4.2.8. Neka postoji upravljanje $\bar{u}$ definirano na intervalu $I \subset \mathcal{I}$. Tada odgovarajuća obična ili relaksirana dopustiva putanja definirana na I može proširiti do putanje definirane na cijelom $\mathcal{I}$.*

Dokaz. Neka je $I = [0, a]$ i neka je (ϕ, u) dopustivi putanja-upravljanje par definiran na maksimalnom otvorenom intervalu $I_{max} = (\alpha, \beta)$. Ako stavimo da je $\hat{u}(t) = u(t)$ za $t \in I_{max}$ i $\hat{u}(t) = \bar{u}(t)$ za sve ostale $t \in I$, tada možemo smatrati da je $(\phi, \hat{u})$ dopustivi par. Pretpostavimo da je $\alpha > 0$ i neka je $\{t_n\}$ niz točaka u I_{max} takvih da $t_n \to \alpha$. Kako graf od ϕ leži u kompaktnom skupu, postoje niz $\{t_n\}$ i točka x_0 takvi da $\phi(t_n) \to x_0$. Iz standardnih teorema za postojanje i jedinstvenost za diferencijalne jednadžbe slijedi da ako f zadovoljava Pretpostavku 4.2.1, tada

$$x' = f(t, x, \hat{u}(t)) \quad x(t_0) = x_0$$

ima jedinstveno rješenje na otvorenom intervalu koji sadrži t_0. Ako pretpostavimo da je f neprekidna, tada postoji rješenje ali ne jedinstveno. To je u kontradikciji sa maksimalnošču od (α, β), dakle mora biti $\alpha = 0$. Slično imamo da $\beta = a$ i željeno proširenje (ϕ, u). □

4.3 Postojanje običnih optimalnih upravljanja

Lema 4.3.1. *Ako je (ϕ^*, u^*) običan dopustivi par koji je rješenje relaksiranog problema, tada je (ϕ^*, u^*) rješenje običnog problema. Štoviše, minimum relaksiranog problema i običnog problema su jednaki.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} J(\varphi^*, u^*) &= \inf\{J(\psi, \mu) : (\psi, \mu) \text{ relaksirane dopustive}\} \\ &\leq \inf\{J(\phi, \mu) : (\phi, \mu) \text{ obične dopustive}\} \\ &\leq J(\phi^*, u^*). \end{aligned}$$

Uvodimo uvjet konveksnosti koji jamči postojanje optimalnog relaksiranog upravljanja koje je i optimalno obično upravljanje. Neka je $\hat{f} = (f^0, f^1, \ldots, f^n)$ i

$$\begin{aligned} Q(t, x) &= \{\hat{y} = (y_0, y) : \hat{y} = \hat{f}(t, x, z), z \in \Omega(t)\} \\ Q^+(t, x) &= \{\hat{y} = (y_0, y) : y^0 \geq f^0(t, x, z), y = f(t, x, z), z \in \Omega(t)\} \end{aligned}$$

□

Teorem 4.3.2. *Neka vrijede hipoteze Teorema 4.2.3 i neka su skupovi $Q^+(t, x)$ konveksni. Tada postoji običan dopustivi par koji je optimalan i za običan i za optimalan problem.*

Dokaz. Prvo dokazujemo teorem pod pretpostavkom da je $\hat{f}$ neprekidna. Po Teoremu 4.2.3 postoji relaksirani dopustivi par (ψ, μ) u intervalu $[t_0, t_1]$. Definiramo

$$\psi^0(t) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(s, \psi(s), \mu_s) ds \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

i skup $\hat{\psi} = (\psi^0, \psi)$. Tada

$$\hat{\psi}' = \hat{f}(t, \psi(t), \mu_t) \quad g.s.$$

Stoga prema Teoremu 3.0.9 postoje izmjerive funkcije $u_1, \ldots, u_{n+2}$ definirane na $[t_0, t_1]$ tako da

$$p^i(t) \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{n+2} p^i(t) = 1$$

sa svojstvom

$$\hat{\psi}'(t) = \sum_{i=1}^{n+2} p^i(t) \hat{f}(t, \psi(t), u_i(t)) \text{ g.s. na } [t_0, t_1].$$

Dakle, $\hat{\psi}'(t) \in conv(Q(t, \psi(t)))$. Kako je $Q(t, \psi(t)) \subseteq Q^+(t, \psi(t))$ i $Q^+(t, \psi(t))$ je konveksan, imamo

$$\hat{\psi}'(t) \in conv(Q(t, \psi(t))) \subseteq conv(Q^+(t, \psi(t))) = Q^+(t, \psi(t)).$$

Stoga, za g.s. $t \in [t_0, t_1]$ postoji $z(t) \in \Omega(t)$ tako da

$$\begin{aligned} \psi^{0'}(t) &\geq f^0(t, \psi(t), z(t)) \\ \psi'(t) &= f(t, \psi(t), z(t)). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Pokazat ćemo, koristeći Filippovljevu lemu, da (4.16) vrijedi ako z zamijenimo s izmjerivom funkcijom v. Pretpostavimo da (4.16) vrijedi tako da smo zamijenili $z(t)$ s $v(t)$, gdje je v izmjeriva i $v(t) \in \Omega(t)$. Druga jednadžba u (4.16) pokazuje da je ψ putanja koja odgovara upravljanju v. Prva jednadžba pokazuje da je funkcija $t \to f^0(t, \psi(t), v(t))$ integrabilna. Kako je $v(t) \in \Omega(t)$ i $e(\psi) \in \mathcal{B}$, slijedi da je (ψ, v) običan dopustivi par za relaksirani problem i optimalan za relaksirani problem. Da bi dovršili dokaz moramo ispostaviti postojanje izmjerive funkcije v. Sa referencom na Filippovljevu lemu, neka je $T = \{t : \hat{\psi}'(t) \in Q^+(t, \psi(t))\}$. Neka je $Z = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Neka $\mathcal{R}_0$ označava kompaktni skup koji sadrži grafove relaksiranih putanja. Neka je $\Delta = \{(t, x, z) : (t, x) \in \mathcal{R}_0, z \in \Omega(t)\}$ i neka je

$$D = \{(t, x, z, \eta) : (t, x, z) \in \Delta, \eta \geq f^0(t, x, z)\}$$

Skup T je Lebesgue izmjeriv i on je izmjeriv prostor. Skup Z je očito Hausdorffov prostor. Kako je Ω odozgo poluneprekidna, iz Leme 3.1.7 slijedi da je Δ kompaktan. Iz ovoga i neprekidnosti od f^0 dobivamo da je D zatvoren. Ako je D ograničen, tada je D kompaktan. Inače D je prebrojiva unija kompaktnih skupova D_i, gdje je svaki D_i presjek od D sa zatvorenom kuglom oko ishodišta radijusa i. Neka je preslikavanje $\Gamma : T \to Z$ definirano $\Gamma(t) = (t, \psi(t), \psi'(t), \psi^{0'}(t))$. Kako su obje funkcije ψ' i $\psi^{0'}$ izmjerive, tada je i Γ. Neka $\varphi : D \to Z$ označava preslikavanje definirano kao

$$\varphi(t, x, z, \eta) = (t, x, f(t, x, z), \eta).$$

Kako je f neprekidna tako je i φ. Iz (4.16) dobivamo $\Gamma([t_0, t_1]) \subseteq \varphi(D)$. Kako su sve hipoteze Filippovljeve Leme zadovoljene, postoji izmjerivo preslikavanje $m : T \to D$

$$m : t \to (\tau(t), x(t), v(t), \eta(t))$$

tako da

$$\begin{aligned} \varphi(m(t)) &= (\tau(t), x(t), f(\tau(t), x(t), v(t), \eta(t))) \\ &= \Gamma(t) = (t, \psi(t), \psi'(t), \psi^{0'}(t)). \end{aligned}$$

Dakle

$$\psi'(t) = f(t, \psi(t), v(t)), \quad \psi^{0'}(t) \geq f^0(t, \psi(t), v(t)),$$

gdje je v izmjeriva. □

Korolar 4.3.3. *Neka je $\hat{f}$ neprekidna i neka je preslikavanje Ω odozgo poluneprekidno. Neka relaksirani problem ima rješenje (ψ, μ). Ako su skupovi $Q^+(t, x)$ konveksni, tada postoji obično upravljanje koje je optimalno i za obični i za relaksirani problem.*

Primjer 4.3.4. *Neka su jednadžbe stanja*

$$\begin{aligned} dx^1/dt &= (x^2)^2 - (u(t))^2 \\ dx^2/dt &= u(t) \\ dx^3/dt &= (x^2)^2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Neka su ograničenja dana sa $\Omega(t) = \{z : |z| \leq 1\}$*, i neka je*

$$\mathcal{B} = \left\{(t_0, x_0, t_1, x_1) : t_0 = 0,\ x_0 = 0,\ t_1 = 1,\ x_1^3 = 0\right\}. \tag{4.18}$$

Neka je $f^0 = 0$ *i neka je* $g(t_0, x_0, t_1, x_1) = x_1^1$*. Dakle, problem je minimizirati* $\phi^1(1)$ *na skupu svih dopustivih parova* (ψ, u)*. Iz treće jednadžbe u* (4.17) *vidimo da bi zadovoljili uvjete* $\phi^3(0) = 0$ *i* $\phi^3(1) = 0$ *moramo imati* $\phi^2(t) \equiv 0$*. Iz druge jednadžbe u* (4.17) *dobivamo da je* $u(t) \equiv 0$*. Stoga, iz prve jednadžbe i inicijalnog uvjeta* $x_0 = 0$ *dobivamo da je* $\phi^1(t) \equiv 0$*. Dakle,* $\phi \equiv 0$ *i* $u \equiv 0$ *je jedini dopustivi par, također je i optimalan. Štoviše,* $J(\phi, u) = 0$*. Običan problem ima rješenje iako skup* $Q^+(t, x) = (\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$*, gdje*

$$\eta^0 \geq 0,\ \eta^1 = (x^2)^2 - z^2,\ \eta^2 = z,\ \eta^3 = (x^2)^2, \quad |z| \leq 1$$

nisu konveksne. To slijedi iz činjenice da skupovi

$$P(t, x) \equiv \left\{(\eta^1, \eta^2) : \eta^1 = (x^2)^2 - z^2,\ \eta^2 = z, \quad |z| \leq 1\right\}$$

one točke na paraboli $\eta^1 = (x^2)^2 - (\eta^2)^2$ *u* (η^1, η^2) *ravnini sa* $|\eta^2| \leq 1$*. Relaksirani problem koji odgovara* (4.17) *ima jednadžbe stanja*

$$\begin{aligned} dx^1/dt &= (x^2)^2 - \sum_{i=1}^{4} p^i(t)(u_i(t))^2 \\ dx^2/dt &= \sum_{i=1}^{4} p^i(t)u_i(t)^2 \\ dx^3/dt &= (x^2)^2 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Iz prve jednadžbe iz (4.19) *vidimo da je* $\inf J(\psi, u) = \inf \psi^1(1) \geq -1$*. Ako uzmemo*

$$\begin{array}{llll} u_1(t) = 1 & u_2(t) = -1 & u_4(t) = 0 & u_4(t) = 0 \\ p^1(t) = 1/2 & p^2(t) = 1/2 & p^3(t) = 0 & p^4(t) = 0 \end{array}$$

tada (4.19) *postaje*

$$dx^1/dt = (x^2)^2 - 1 \quad dx^2/dt = 0 \quad dx^3/dt = (x^2)^2. \tag{4.20}$$

Rješenje sustava (4.20) *koji zadovoljava krajnje uvjete od* (4.18) *je*

$$\psi^1(t) = -t \quad \psi^2(t) = 0 \quad \psi^3(t) = 0. \tag{4.21}$$

Kako je $\psi^1(1) = -1$*, imamo rješenje relaksiranog problema. Primjetimo da rješenje relaksiranog problema nije rješenje običnog problema i primjetimo da minimum relaksiranog problema je strogo manji od minimuma običnog problema.*

Definicija 4.3.5. *Sustav je lokalno upravljiv u* $\mathcal{T}_1$ *ako za svaki* $(t_1, x_1) \in \mathcal{T}_1$ *postoji okolina* N *od* (t_1, x_1) *takva da vrijede sljedeća svojstva. Ako* $(\tau, \xi) \in N$ *tako da* $\tau < t_1$, *onda postoji upravljanje* $\tilde{u}(t)$ *na* $[\tau, t_1]$ *i odgovarajuće rješenje* $\tilde{\phi}(t)$ *od (2.4) sa* $\tilde{u}(t) \in \Omega(t)$ *i* $\tilde{\phi}(\tau) = \xi$, $\tilde{\phi}(t_1) = x_1$.

Teorem 4.3.6. *Ako je sustav lokalno upravljiv u* $\mathcal{T}_1$, *tada je infimum od* $J(\phi, u)$ *među dopustivim upravljanjima jednak minimumu od* $J(\psi, \mu)$ *među dopuštenim relaksiranim upravljanjima.*

Dokaz. Promotrimo ekvivalentni oblik problema upravljanja sa proširenim stanjem $\hat{\phi}(t) = (\phi^0(t), \phi(t))$ gdje je

$$\phi^0(t) = \int t_0{}^t f^0(s, u(s), \phi(s))ds.$$

Slično, u relaksiranom problemu upravljanja prošireno stanje je $\hat{\psi}(t) = ((\psi^0(t), \psi(t))$ gdje je

$$\psi^0(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{\Omega(t)} f^0(s, \psi(s))d\mu_s ds.$$

Kriterij kojeg treba minimizirati je

$$J(\hat{\psi}, u) = g(t_1, \psi(t_1)) + \psi^0(t_1).$$

Neka je $(\hat{\psi}^*, \mu^*)$ dopušteni relaksirani par, koji minimizira $J(\hat{\psi}, \mu)$ kao u Teoremu 4.2.3. Neka je $x_1 = \psi^*(t_1)$ i $(t_1, x_1) \in \mathcal{T}_1$. Kako $(\hat{\psi}^*, \mu^*)$ minimizira

$$J(\hat{\psi}^*, \mu^*) \leq J(\hat{\psi}, \mu)$$

za sve dopustive parove $(\hat{\psi}, \mu)$, a posebno za sve obične parove (ϕ, u). Da bi dokazali teorem, trebamo pokazati da, za svaki $a > 0$ postoji dopušteni par (ψ, u) takav da

$$J(\hat{\phi}, u) < J(\hat{\psi}^*, \mu^*) + a.$$

Primjenjujemo Teorem 3.3.4 na proširenu formulaciju problema. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji obični par upravljanja $(\hat{\phi}_\varepsilon, u_\varepsilon)$ takav da $\phi_\varepsilon(t_0) = x_0$, $\phi^0_\varepsilon(t_0) = 0$, i

$$|\hat{\phi}_\varepsilon(t) - (\hat{\psi}^*(t)| < \varepsilon \text{ za } t_0 \leq t \leq t_1.$$

Neka je $\tau = t_1 - \delta$ takav da je $\delta > 0$, $\xi = \phi_\varepsilon(t_! - \delta)$, i $x_1 = \psi^*(t_1)$ kao u Definiciji 4.3.5. Neka vrijedi

$$\begin{aligned} u(t) &= u_\varepsilon(t), \quad \phi(t) = \phi_\varepsilon(t), \quad \text{ako } t_0 \leq t \leq t_1 - \delta, \text{ i} \\ u(t) &= \tilde{u}_\varepsilon(t), \quad \phi(t) = \tilde{\phi}_\varepsilon(t), \quad \text{ako } t_1 - \delta < t \leq t_1. \end{aligned}$$

Tada $\hat{\phi}_\varepsilon(t) = \hat{\phi}(t)$ ako $t_0 \leq t \leq t_1 - \delta$. Također

$$\begin{aligned}
J(\hat{\phi}, u) - J(\hat{\psi}^*, \mu^*) &= \phi^0(t_1) - \psi^{*0}(t_1) \\
&\leq |\phi^0(t_1) - \phi^0_\varepsilon(t - \delta)| + |\phi^0_\varepsilon(t_1 - \delta) - \psi^{*0}(t_1 - \delta)| + |\psi^{*0}(t_1 - \delta) - \psi^{*0}(t_1)|.
\end{aligned}$$

Kako je $\Omega(t)$ podskup fiksiranog kompaktnog skupa Z, desna strana je manja od a ako su ε i δ dovoljno mali. □

Bibliografija

[1] Negash G. Medhin Leonard D. Berkovitz, *Non Linear Control Theory*, CRC Press, 2013.

Sažetak

U radu se proučavaju zadaće optimalnog upravljanja opisane sustavima običnih diferencijalnih jednadžbi. Funkcija cilja koju želimo optimizirati može ovisiti o rubnim vrijednostima funkcije upravljanja i stanja i/ili, u vidu integrala, o njihovim vrijednostima duž promatranog integrala. Na funkcije upravljanja i stanja se dodatno postavljaju ograničenja. Proučava se pitanje egzistencije rješenja te se u tu svrhu uvode relaksirana upravljanja koja poprimaju vrijednosti u Radonovim vjerojatnosnim mjerama (poput Youngovih mjera u varijacijskom računu). Dokazuje se egzistencija optimalnog relaksiranog upravljanja te, uz dodatne pretpostavke konveksnosti, da je dobiveno relaksirano optimalno upravljanje zapravo klasično.

Summary

The thesis studies the optimal control problems described by systems of ordinary differential equations. The goal function we want to optimize may depend on the boundary values of the control and state function and/or, in the form of an integral, on their values along the observed integral. Restrictions are additionally placed on control and state functions. The question of the existence of a solution is studied, and for this purpose relaxed controls are introduced that take on values in Radon's probability measures (such as Young's measures in the calculus of variations). The existence of optimal relaxed control is proved and, with additional assumptions of convexity, that the obtained relaxed optimal control is in fact classical.

Životopis

Rođen sam u Zagrebu, 11. ožujka 1996. godine. U Zagrebu sam završio smjer računalni tehničar u Elektrotehinčkoj školi Zagreb. 2014. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-Matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Zatim na istom fakultetu 2019. godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika.