Jedinstvenost struktura izračunljivosti

Validžić, Lucija

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Validžić

Jedinstvenost struktura izračunljivosti

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2022.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Validžić

Jedinstvenost struktura izračunljivosti

DOKTORSKI RAD

Mentor:

izv.prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2022.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Lucija Validžić

Uniqueness of computability structures

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:

izv.prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2022.

ZAHVALA

Hvala mami, baki i stricu za bezuvjetnu podršku kroz čitavo školovanje. Hvala Kikiju što je uvijek spreman poslušati moje matematičke dileme. Hvala dvjema macama koje su mi neumorno pravile društvo dok sam pisala ovu disertaciju.
Najviše hvala mentoru Zvonku što me vrlo rano uveo u znanstveni rad i što me konstantno motivira da s njime i nastavim.

SAŽETAK

Struktura izračunljivosti na metričkom prostoru je skup nizova s određenim svojstvima koji nam omogućava da klasične koncepte teorije izračunljivosti prenesemo u proizvoljan metrički prostor. U disertaciji će poseban naglasak biti na strukturama izračunljivosti koje su maksimalne s obzirom na inkluziju te strukturama izračunljivosti koje sadrže gust niz, to jest separabilnim strukturama izračunljivosti. Svaka separabilna struktura izračunljivosti je maksimalna, no obrat općenito ne vrijedi. U radu će se precizno opisati maksimalne strukture na euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ te će biti dokazano da je svaka maksimalna struktura izračunljivosti na nekom podskupu od $\mathbb{R}^n$ zapravo izometrična slika strukture izračunljivosti koja se sastoji od izračunljivih nizova u $\mathbb{R}^n$, to jest kanonske strukture izračunljivosti. Iz te veze maksimalnih i kanonskih struktura slijedit će da je svaka maksimalna struktura izračunljivosti na $\mathbb{R}^n$ separabilna.

Nadalje, u disertaciji ćemo se fokusirati i na pronalaženje uvjeta pod kojima je separabilna struktura izračunljivosti na metričkom prostoru jedinstvena ili jedinstvena do na izometriju. Pri tome ćemo se ograničiti na efektivno kompaktne metričke prostore. Općenito pitanje je povlači li efektivna kompaktnost metričkog prostora njegovu izračunljivu kategoričnost. Poznato je da je odgovor potvrdan u slučaju kada postoji samo konačno mnogo izometrija tog prostora. U disertaciji ćemo taj rezultat proširiti dokazom da ako dva efektivna separirajuća niza dijele izračunljiv skup za koji postoji samo konačno mnogo izometrija prostora koje ga fiksiraju, tada ta dva niza moraju biti ekvivalentna. Osim toga, dokazat ćemo da je orbita izračunljive točke pri djelovanju grupe izometrija koizračunljivo prebrojiv skup te ćemo to iskoristiti kako bismo dokazali da su određeni efektivno kompaktni podskupovi euklidskog prostora izračunljivo kategorični. Iz tih rezultata slijedit će da na podskupovima od $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ efektivna kompaktnost zaista povlači izračunljivu kategoričnost.

Na kraju ćemo se baviti prostorima koji su efektivno kompaktni čim na njima postoji efektivan separirajući niz, to jest kategorički efektivno kompaktnim prostorima. Pokazat ćemo kako je pitanje kategoričke efektivne kompaktnosti povezano s pitanjem povlači li izračunljiva pre-

brojivost skupa njegovu izračunljivost te ćemo dokazati kategoričku efektivnu kompaktnost rubova otvorenih omeđenih konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$.

Ključne riječi: izračunljiv metrički prostor, efektivan separirajući niz, struktura izračunljivosti, separabilna struktura izračunljivosti, maksimalna struktura izračunljivosti, izračunljivo kategoričan metrički prostor, kategorički efektivno kompaktan metrički prostor

SUMMARY

A computability structure on a metric space is a set of sequences with certain properties that enables us to introduce classical concepts of computability theory into an arbitrary metric space. In the dissertation, special emphasis will be on computability structures that are maximal with respect to inclusion and computability structures that contain a dense sequence, i.e. separable computability structures. Any separable computability structure is maximal, but the converse is in general not true. In the dissertation, maximal computability structures on Euclidean space $\mathbb{R}^n$ will be described precisely and it will be proved that any maximal computability structure on a subset of $\mathbb{R}^n$ is actually an isometric image of the computability structure which consists of computable sequences in $\mathbb{R}^n$, i.e. canonical computability structure. From that bond between maximal and canonical computability structures, it will follow that any maximal computability structure on $\mathbb{R}^n$ is separable.

We will also focus on finding the conditions under which a separable computability structure on a metric space is unique or unique up to an isometry. In doing so, we will limit ourselves to effectively compact metric spaces. A general question is whether effective compactness of a metric space implies its computable categoricity. It is known that this implication is true for metric spaces which have only finitely many isometries. In the dissertation we will expand that result with the fact that if two effective separating sequences share a computable set which has the property that there are only finitely many isometries of the underlying space which fix that set, then the sequences have to be equivalent. Moreover, we will prove that the orbit of a computable point under the isometry group is a co-computably enumerable set and we will use this to prove that certain effectively compact subsets of Euclidean space are computably categorical. From these results, it will follow that in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ effective compactness implies computable categoricity.

Lastly, we will examine spaces which are effectively compact if they contain at least one effective separating sequence, i.e. categorically effectively compact spaces. We will show how the question of categorical effective compactness is connected to the question whether computable enumarability of a set implies its computability and we will show categorical effective compactness for boundaries of open bounded convex subsets of $\mathbb{R}^n$.

Keywords: computable metric space, effective separating sequence, computability structure, separable computability structure, maximal computability structure, computably categorical metric space, categorically effectively compact metric space

Sadržaj

Uvod

Ova disertacija spada u područje *izračunljive analize* u kojem je glavni cilj povezivanje klasičnih koncepata matematičke analize s klasičnim konceptima teorije izračunljivosti. Fundamentalan pojam klasične teorije izračunljivosti je pojam *izračunljive funkcije* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Intuitivno govoreći, takva funkcija je izračunljiva ako postoji *algoritam*, to jest konačan niz vrlo jednostavnih operacija, koji za dani prirodan broj n računa $f(n)$. Koristeći izračunljive funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mogu se definirati razni izračunljivi objekti u skupu $\mathbb{N}^k$. Navedene definicije jednostavno je proširiti i na skup racionalnih brojeva, a onda i na skup realnih brojeva. Tako primjerice realan broj x smatramo izračunljivim ako postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je za svaki prirodan broj n, $f(n)$ upravo n-ta decimala broja x. U izračunljivoj analizi te izračunljive objekte, koji su klasično definirani na skupovima brojeva, prenosimo u metričke prostore. Pri tome je prirodno težiti da se ta veza ostvari na jedinstven način, stoga će u disertaciji veliki naglasak biti na svojevrsnoj jedinstvenosti raznih definiranih koncepata.

Jedan način za uvesti izračunljivost u metrički prostor (X,d) je pomoću *efektivnog separirajućeg niza* α, to jest gustog niza α sa svojstvom da je funkcija $(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ izračunljiva. Za trojku (X,d,α) tada kažemo da je *izračunljiv metrički prostor*. Pomoću niza α u izračunljivom metričkom prostoru (X,d,α) možemo definirati izračunljive točke, izračunljive nizove, izračunljive skupove i slično. Pritom je prirodno pitati se jesu li ti izračunljivi objekti nekako određeni samim metričkim prostorom (X,d), to jest ako je β neki drugi efektivan separirajući niz, podudaraju li se izračunljivi objekti u (X,d,β) s onima u (X,d,α)? Odnosno, jesu li izračunljivi objekti jedinstveno određeni samim metričkim prostorom (X,d)? Kako bismo preformulirali prethodno pitanje u pitanje čiji odgovor je lakše provjeriti, definiramo relaciju ekvivalencije na skupu svih efektivnih separirajućih nizova. Kažemo da su nizovi α i β *ekvivalentni* ako je α izračunljiv u odnosu na β i obrnuto. Budući da se izračunljivi nizovi u odnosu na α podudaraju s izračunljivim nizovima u odnosu na β ako i samo ako su α i β ekvivalentni, zapravo tražimo odgovor na pitanje pod kojim su uvjetima proizvoljna dva efektivna separirajuća niza na metričkom prostoru ekvivalentna. Primjerice ako proizvoljan efektivan separirajući niz u euklidskom prostoru translatiramo za vektor koji nije izračunljiv, dobivamo novi efektivan separirajući niz koji nije ekvivalentan početnom. S druge strane, Iljazović je u [9] dokazao da su na segmentu $[0,1]$ svaka dva efektivna separirajuća niza ekvivalentna, no na segmentu $[0,x]$, gdje je x lijevo izračunljiv, a nije izračunljiv, postoje neekvivalentni efektivni separirajući nizovi (vidi [14]). Zbog jednostavnog primjera euklidskog prostora i segmenta koji nemaju željeno svojstvo, ograničavamo se na takozvane *efektivno kompaktne* izračunljive metričke prostore, to jest prostore koji su potpuni i efektivno totalno omeđeni. Za takve prostore je Iljazović u [9] dokazao da ako postoji samo konačno mnogo izometrija pozadinskog metričkog prostora, tada su svaka dva efektivna separirajuća niza ekvivalentna. Navedeni rezultat nažalost nije moguće poopćiti na metričke prostore s beskonačno izometrija jer već na primjeru jedinične kružnice jednostavno generiramo neekvivalentne efektivne separirajuće nizove. Primjerice, za proizvoljan efektivan separirajući niz α na jediničnoj kružnici te izračunljivu točku x i neizračunljivu točku y (s obzirom na α) možemo pronaći rotaciju f koja preslikava x u y. Na ovaj način dobivamo efektivan separirajući niz $f \circ \alpha$ koji ima y kao izračunljivu točku, stoga on ne može biti ekvivalentan nizu α. Općenito, za efektivan separirajući niz α u (X,d) i izometriju f od (X,d) vrijedi da je $f \circ \alpha$ efektivan separirajući niz i kao što smo vidjeli na primjeru jedinične kružnice, α i $f \circ \alpha$ ne moraju biti ekvivalentni. Stoga definiramo novu relaciju ekvivalencije na skupu efektivnih separirajućih nizova u (X,d). Kažemo da su α i β *ekvivalentni do na izometriju* ako postoji izometrija f od (X,d) takva da je β ekvivalentan nizu $f \circ \alpha$. Ako su u (X,d) svaka dva efektivna separirajuća niza ekvivalentna do na izometriju, kažemo da je (X,d) *izračunljivo kategoričan*. Primjetimo da iako u izračunljivo kategoričnim prostorima izračunljivi objekti nisu jedinstveno određeni samim prostorom, za razne efektivne separirajuće nizove odgovarajući izračunljivi objekti su povezani izometrijom. Stoga, možemo razmišljati da ti objekti izgledaju jednako, neovisno o promatranom efektivnom separirajućem nizu. Sada je novo, općenitije pitanje: Koja svojstva metričkog prostora impliciraju njegovu izračunljivu kategoričnost? Melnikov je u [14] dokazao da su Cantorov prostor, Urysohnov prostor te svaki separabilan Hilbertov prostor izračunljivo kategorični, no primjerice prostor neprekidnih realnih funkcija na segmentu $[0,1]$ nije. Također, spomenuti segment $[0,x]$ (gdje je x lijevo izračunljiv, a nije izračunljiv) nije izračunljivo kategoričan. Osim toga, McNicholl je u [13] dokazao da je prostor nizova l^p izračunljivo kategoričan ako i samo ako je $p = 2$. No pitanje vrijedi li implikacija:

$$(X,d) \text{ efektivno kompaktan} \implies (X,d) \text{ izračunljivo kategoričan}$$

je dosad neodgovoreno, čak i za neke vrlo jednostavne prostore. U disertaciji će biti poseban fokus na traženje odgovora na to pitanje za potprostore euklidskog prostora.

Jedan problem s uvođenjem izračunljivosti u metrički prostor pomoću efektivnog separirajućeg niza je što postoje vrlo jednostavni primjeri metričkih prostora u kojima uopće ne postoje takvi nizovi, primjerice $\{0,x\}$ s euklidskom metrikom, za neizračunljiv realan broj x. Također, očito se proučavanjem izračunljivih metričkih prostora ograničavamo na separabilne prostore. Kako bismo na proizvoljnom metričkom prostoru imali neki koncept izračunljivosti, možemo promatrati takozvane *strukture izračunljivosti* koje su zapravo poopćenja skupova izračunljivih nizova u izračunljivim metričkim prostorima. Preciznije, *struktura izračunljivosti* $\mathscr{S}$ na metričkom prostoru (X,d) je skup nizova u X koji za svaki niz α u $\mathscr{S}$ sadrži i sve nizove koji su izračunljivi u odnosu na α te je za svaka dva niza α i β iz $\mathscr{S}$ funkcija $(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \beta_j)$ izračunljiva. Za točku $x \in X$ kažemo da je *izračunljiva u strukturi izračunljivosti* $\mathscr{S}$ ako je x član nekog niza iz $\mathscr{S}$. Primjerice, ako je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i $\mathscr{S}_\alpha$ skup svih izračunljivih nizova u tom prostoru, tada je $\mathscr{S}_\alpha$ struktura izračunljivosti. Za strukture tog oblika kažemo da su *separabilne*. Stoga prije spomenuto pitanje ekvivalentnosti svaka dva efektivna separirajuća niza je zapravo pitanje jedinstvenosti separabilne strukture izračunljivosti na promatranom metričkom prostoru. Nije teško vidjeti da je svaka separabilna struktura izračunljivosti maksimalna s obzirom na inkluziju. Obratno, maksimalne strukture izračunljivosti postoje na svakom metričkom prostoru, stoga maksimalne strukture nisu nužno separabilne. Na primjer, na $\{0,x\}$, za x neizračunljiv, jednočlana struktura $\{(0,0,0,...)\}$ je maksimalna, no očito nije separabilna. Štoviše, pomoću Zornove leme lako se dobije da je svaka struktura izračunljivosti sadržana u nekoj maksimalnoj, stoga kako bismo klasificirali strukture izračunljivosti na zadanom metričkom prostoru, ima smisla pokušati opisati sve maksimalne strukture izračunljivosti. Također, nameće se pitanje pod kojim uvjetom je maksimalna struktura izračunljivosti separabilna. Primjerice, Burnik i Iljazović su u [6] dokazali su da su sve maksimalne strukture sfere, konika i rubova simpleksa koje imaju gust skup izračunljivih točaka nužno separabilne. U disertaciji će i u ovom pitanju poseban naglasak biti na potprostorima euklidskog prostora. Kako u euklidskom prostoru imamo pojam dimenzije, možemo se pitati je li svaka maksimalna struktura određena s dovoljno (no konačno mnogo) izračunljivih točaka. Odnosno, pod kojim uvjetom za točke $a_0, \dots, a_k$ postoji jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti u kojoj su te točke izračunljive. S tim pitanjem kao glavnom motivacijom, za neke fiksne točke $a_0,\dots,a_k$ promatramo skupove nizova (x_i) sa svojstvom da su funkcije $i \mapsto d(x_i,a_j)$ izračunljive, za $j = 0,\dots,k$. Kako bi takav skup nizova, označimo ga $\mathscr{R}_{a_0,\dots,a_k}$, bio struktura izračunljivosti, nužno je da je udaljenost između svake dvije od točaka $a_0,\dots,a_k$ izračunljiv broj, odnosno da te točke čine takozvani *efektivan niz*. No čak i u slučaju efektivnog niza, $\mathscr{R}_{a_0,\dots,a_k}$ ne mora biti struktura izračunljivosti, ali u slučaju kada je, $\mathscr{R}_{a_0,\dots,a_k}$ je nužno maksimalna struktura izračunljivosti. Stoga je glavni cilj dobiti svojevrstan obrat te činjenice, odnosno svaku maksimalnu strukturu izračunljivosti na euklidskom prostoru prikazati kao $\mathscr{R}_{a_0,\dots,a_k}$ i to za što manji prirodan broj k.

Disertacija je podijeljena u četiri poglavlja. U prvom poglavlju navodimo neke dobro poznate definicije i teoreme iz izračunljive analize koji će nam biti najpotrebniji te uvodimo terminologiju i oznake koje će se pojavljivati kroz čitavu disertaciju. U drugom poglavlju su maksimalne strukture izračunljivosti u središtu razmatranja. Glavni cilj tog poglavlja je dati konkretan opis maksimalnih struktura izračunljivosti na euklidskom prostoru te dokazati da se takve strukture mogu u potpunosti odrediti s konačno točaka. Sadržaj ovog poglavlja objavljen je u članku [12]. U trećem poglavlju preusmjeravamo pažnju na separabilne strukture izračunljivosti i bavimo se pitanjem povlači li efektivna kompaktnost izračunljivu kategoričnost. Iako je opet naglasak na potprostorima euklidskog prostora, dokazujemo i neke općenite rezultate koji imaju veliki potencijal za daljnju upotrebu. Sadržaj ovog poglavlja je također u članku koji je trenutačno u postupku recenzije. U četvrtom poglavlju uvodimo pojam kategoričke efektivne kompaktnosti i dokazujemo da kvazisfere imaju to svojstvo. Ovo poglavlje predstavlja tematiku i rezultate mojih posljednjih istraživanja.

1. OSNOVNI POJMOVI I REZULTATI

Za početak, navedimo neke osnovne definicije i rezultate koji će biti ključni za razumijevanje rezultata i tehnika korištenih u dokazima kroz čitavu disertaciju. Za potpuno razumijevanje navedenog, važno je da je čitatelj upoznat s fundamentalnim konceptima klasične teorije izračunljivosti kao što su: pojam *izračunljive (rekurzivne) funkcije* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$, gdje je skup

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

skup prirodnih brojeva, pojam *izračunljivog (rekurzivnog) skupa* u $\mathbb{N}^k$ te pojam *izračunljivo (rekurzivno) prebrojivog skupa* u $\mathbb{N}^k$. Definicije i najvažnija svojstva spomenutih koncepata mogu se pronaći u [22]. Od klasičnih teorema, ovdje ćemo istaknuti dva koja ćemo vrlo često koristiti. Prvi je takozvani **teorem o projekciji**:

Teorem 1.0.1. Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv i

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid (\exists y \in \mathbb{N}^n)\ (x, y) \in T \right\}.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv.

Drugi teorem je takozvani **teorem o selektoru**:

Teorem 1.0.2. Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in T$. Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ takva da je $(x, \varphi(x)) \in T$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Radi lakšeg snalaženja, pojmove i oznake koji su usko vezani za pojedino poglavlje nećemo navesti ovdje, već unutar poglavlja u kojem se koriste.

1.1. IZRAČUNLJIVOST U $\mathbb{R}^n$

U ovoj točki navodimo neke fundamentalne pojmove i dobro poznate rezultate iz izračunljive analize - opširnije o navedenom može se pronaći u literaturi [10, 18, 21, 24].

Budući da je svaki racionalan broj jedinstveno određen s tri prirodna broja, pojam izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ jednostavno je poopćiti na funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Tako za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ kažemo da je **izračunljiva** ako postoje izračunljive funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)+1},$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$.

Nadalje, funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ je **izračunljiva** ako postoji izračunljiva funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i},$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Za funkciju F kažemo da je **izračunljiva aproksimacija** za funkciju f.

Neka važna svojstva izračunljivih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ su sljedeća:

Propozicija 1.1.1.

(i) Ako su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljive, tada su i $f+g, f-g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljive.

(ii) Ako su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ i $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je F izračunljiva i

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i},$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$, tada je f izračunljiva.

(iii) Ako su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljive funkcije, tada je skup

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\}$$

izračunljivo prebrojiv.

(iv) Ako je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija i $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, tada je i funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ izračunljiva.

(v) Ako je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija i $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, tada je i funkcija $\frac{1}{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljiva.

(vi) Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $F_1, \dots, F_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljive funkcije. Neka su $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ izračunljivi skupovi takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji točno jedan $i \in \{1, \dots, n\}$ takav da je

$x \in S_i$. Tada je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} F_1(x), & \text{ako je } x \in S_1 \\ \vdots \\ F_n(x), & \text{ako je } x \in S_n \end{cases}$$

također izračunljiva.

Funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, je **izračunljiva** ako su joj komponentne funkcije $f_1, \dots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljive.

Realan broj r je **izračunljiv broj** ako postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|r - f(k)| < 2^{-k},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Točka $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, je **izračunljiva točka** ako su brojevi $x_1, \dots, x_n$ izračunljivi.

1.2. R.R.O. FUNKCIJE

Sada bismo htjeli definirati pojam izračunljive (rekurzivne) funkcije na $\mathbb{N}^k$ koja vrijednosti poprima u partitivnom skupu od $\mathbb{N}^n$. Ovakve funkcije će nam biti jedan od najvažnijih alata u dokazivanju izračunljive prebrojivosti raznih skupova. Opširnije o tim funkcijama, kao i dokazi ispod navedenih svojstava mogu se pronaći u poglavlju 2.5 u [10].

Ako je X skup, s $\mathscr{P}(X)$ ćemo označavati partitivni skup od X. Za $m \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\mathbb{N}_m = \{0, \dots, m\}.$$

Za $n \geq 1$ neka je

$$\mathbb{N}_m^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}_m\}.$$

Kažemo da je funkcija $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ **rekurzivna i rekurzivno omeđena** ili **r.r.o.** ako je skup

$$\{(x, y) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^n \mid y \in \Phi(x)\}$$

izračunljiv podskup od $\mathbb{N}^{k+n}$ i postoji izračunljiva funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Ovdje treba naglasiti da se u znanstvenim radovima na engleskom jeziku ovakve funkcije najčešće zovu **c.f.v.** (**computable finitely valued**). Iako pojam r.r.o. funkcije nije direktan prijevod odgovarajućeg engleskog pojma, u literaturi na hrvatskom je uobičajen, stoga ćemo ga i u ovom radu zadržati.

Sljedeća svojstva r.r.o. funkcija će nam biti od velike koristi.

Propozicija 1.2.1.

(a) Ako su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije, tada su skupovi

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \Psi(x)\}, \quad \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\}$$

izračunljivi.

(b) Neka su $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Tada je funkcija $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ definirana s

$$\Lambda(x) = \bigcup_{z \in \Phi(x)} \Psi(z), \; x \in \mathbb{N}^k.$$

također r.r.o. funkcija.

(c) Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija i $T \subseteq \mathbb{N}^n$ izračunljivo prebrojiv. Tada je i skup

$$S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq T\}$$

izračunljivo prebrojiv.

Neka su $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neke fiksirane izračunljive funkcije takve da je

$$\{(\sigma(i,0),\dots,\sigma(i,\eta(i))) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

skup svih nepraznih konačnih nizova u $\mathbb{N}$. Pisat ćemo $(i)_j$ umjesto $\sigma(i,j)$ i $\bar{i}$ umjesto $\eta(i)$.

Sljedeća lema će također biti korisna.

Lema 1.2.2. Postoji izračunljiva funkcija $\zeta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $m, p \in \mathbb{N}$, svaki konačan niz $(x_0,\dots,x_p)$ u $\{0,\dots,m\}$ je jednak nizu $((i)_0,\dots,(i)_{\bar{i}})$ za neki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i \leq \zeta(m,p)$.

1.3. STRUKTURE IZRAČUNLJIVOSTI

Strukture izračunljivosti predstavljaju vrlo općenit način uvođenja izračunljivosti u metrički prostor jer u svojoj definiciji ne pretpostavljaju nikakva dodatna svojstva promatranog metričkog prostora. Strukturama izračunljivosti su se dosada bavili primjerice Pour-El i Richards u [18], Yasugi, Mori i Tsujji u [15, 26] kao i Melnikov u [14]. Još neki rezultati i istraživanja vezana za strukture izračunljivosti mogu se naći i u literaturi [7, 9, 23].

Navedimo sada osnovne pojmove, rezultate i oznake vezane za strukture izračunljivosti koji će nam biti potrebni u ostatku disertacije.

Neka je (X,d) metrički prostor i (x_i) niz u X.

Kažemo da je (x_i) **efektivan niz** u (X,d) ako je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(i,j) \mapsto d(x_i,x_j)$$

izračunljiva. Ako su (x_i) i (y_j) nizovi u X, kažemo da je $((x_i),(y_j))$ **efektivan par** u (X,d) i pišemo $(x_i) \diamond (y_j)$ ako je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(i,j) \mapsto d(x_i,y_j)$$

izračunljiva. Uočimo da je (x_i) efektivan niz u (X,d) ako i samo ako je $(x_i) \diamond (x_i)$. Također, $(x_i) \diamond (y_j)$ povlači $(y_j) \diamond (x_i)$.

Kažemo da je niz (y_i) u X **izračunljiv s obzirom na** (x_i) u (X,d) i pišemo $(y_i) \preceq (x_i)$ ako postoji izračunljiva funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(y_i,x_{F(i,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i,k \in \mathbb{N}$. Točka $a \in X$ je **izračunljiva s obzirom na** (x_i) u (X,d) ako postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(a,x_{f(k)}) < 2^{-k},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Dokažimo sada tranzitivnost relacije $\preceq$.

Propozicija 1.3.1. Neka je (X,d) metrički prostor i (x_i), (y_i), (z_i) nizovi u X takvi da je $(z_i) \preceq (y_i)$ i $(y_i) \preceq (x_i)$. Tada $(z_i) \preceq (x_i)$.

Dokaz. Neka su $F,G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije takve da

$$d(z_i,y_{F(i,k)}) < 2^{-k} \text{ i } d(y_i,x_{G(i,k)}) < 2^{-k} \tag{1.1}$$

za sve $i,k \in \mathbb{N}$. Tada za sve $i,k \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$d(z_i, y_{F(i,k+1)}) < 2^{-(k+1)} \quad \text{i} \quad d(y_{F(i,k+1)}, x_{G(F(i,k+1),k+1)}) < 2^{-(k+1)},$$

pa po nejednakosti trokuta

$$d(z_i, x_{G(F(i,k+1),k+1)}) < 2^{-k}.$$

Stoga $(z_i) \preceq (x_i)$. ■

Propozicija 1.3.2. Neka je (X,d) metrički prostor i (x_i), (y_i), (α_i), (β_i) nizovi u X takvi da $(x_i) \preceq (\alpha_i)$ i $(y_i) \preceq (\beta_i)$. Ako $(\alpha_i) \diamond (\beta_i)$, tada $(x_i) \diamond (y_i)$.

Dokaz. Neka su $F,G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije takve da

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k} \text{ i } d(y_j, \beta_{G(j,k)}) < 2^{-k}$$

za sve $i,j,k \in \mathbb{N}$. Općenito, za proizvoljne $a,a',b,b' \in X$ vrijedi

$$|d(a,b) - d(a',b')| \leq d(a,a') + d(b,b'),$$

što se jednostavno dobije iz nejednakosti trokuta. Stoga za sve $i,j,k \in \mathbb{N}$, imamo

$$\begin{aligned} |d(x_i,y_j) - d(\alpha_{F(i,k+1)}, \beta_{G(j,k+1)})| &\leq d(x_i, \alpha_{F(i,k+1)}) + d(y_j, \beta_{G(j,k+1)}) \\ &< 2 \cdot 2^{-(k+1)} = 2^{-k}. \end{aligned}$$

Iz propozicije 1.1.1(ii) slijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto d(x_i,y_j)$ izračunljiva. ■

Korolar 1.3.3. Neka je (X,d) metrički prostor i (y_i), (x_i) nizovi u X takvi da je $(y_i) \preceq (x_i)$. Ako je (x_i) efektivan, tada je i (y_i) efektivan.

Neka je (X,d) metrički prostor i $\mathscr{S}$ skup čiji elementi su neki nizovi u X, to jest $\mathscr{S} \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Kažemo da je $\mathscr{S}$ **struktura izračunljivosti** na (X,d) (vidi [26]) ako vrijedi:

(i) ako su $(x_i), (y_j) \in \mathscr{S}$, tada $(x_i) \diamond (y_j)$;

(ii) ako je $(x_i) \in \mathscr{S}$ i $(y_i) \preceq (x_i)$, tada $(y_i) \in \mathscr{S}$.

Uočimo: ako je (X,d) metrički prostor i $\mathscr{S} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ takav da vrijedi (ii), tada vrijedi i:

(iii) ako je $(x_i) \in \mathscr{S}$ i $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija, tada je $(x_{f(i)})_{i \in \mathbb{N}} \in \mathscr{S}$.

Stoga, ako je $\mathscr{S}$ struktura izračunljivosti na (X,d), tada vrijedi (iii).

Također, ako je $\mathscr{S}$ struktura izračunljivosti na (X,d), iz (i) slijedi da je svaki $(x_i) \in \mathscr{S}$ efektivan niz u (X,d).

Primjer 1.3.4.

(a) Neka je (X,d) metrički prostor i $a \in X$. Neka je (x_i) niz u X definiran s $x_i = a$, $i \in \mathbb{N}$ i $\mathscr{S} = \{(x_i)\}$. Tada je $\mathscr{S}$ struktura izračunljivosti na (X,d).

(b) Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka su (x_i) i (y_j) nizovi u $\mathbb{R}^n$ i (x_i^1), $\dots$, (x_i^n) te (y_j^1), $\dots$, (y_j^n) koordinatni nizovi od (x_i) i (y_j).

(i) Ako su (x_i) i (y_j) izračunljivi (kao funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$), tada $(x_i) \diamond (y_j)$ (u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$). Naime, za sve $i, j \in \mathbb{N}$ imamo

$$d(x_i, y_j) = \sqrt{(x_i^1 - y_j^1)^2 + \cdots + (x_i^n - y_j^n)^2},$$

pa tvrdnja slijedi iz (i) i (iv) propozicije 1.1.1. Posebno, svaki izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$ je efektivan u $(\mathbb{R}^n, d)$.

(ii) Neka je (x_i) izračunljiv i $(y_j) \preceq (x_i)$. Tada je i (y_j) također izračunljiv. Naime, ako je $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija takva da je $d(y_j, x_{F(j,k)}) < 2^{-k}$ za sve $j, k \in \mathbb{N}$, tada za svaki $l \in \{1, .., n\}$ i sve $j, k \in \mathbb{N}$ imamo

$$|y_j^l - x_{F(j,k)}^l| \leq d(y_j, x_{F(j,k)}) < 2^{-k},$$

pa propozicija 1.1.1 (ii) povlači da su (y_j^1), $\dots$, (y_j^n) izračunljivi nizovi.

Dakle vidimo da je skup svih izračunljivih nizova u $\mathbb{R}^n$ struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d)$.

Ako je (X,d) metrički prostor i α niz u (X,d), sa $\mathscr{S}_\alpha$ označimo skup svih nizova (x_i) u X takvih da je $(x_i) \preceq \alpha$. Uočimo da je $\alpha \in \mathscr{S}_\alpha$.

Propozicija 1.3.5. Neka je (X,d) metrički prostor i α niz u X. Tada je α efektivan niz u (X,d) ako i samo ako je $\mathscr{S}_\alpha$ struktura izračunljivosti na (X,d).

Dokaz. Ako je $\mathscr{S}_\alpha$ struktura izračunljivosti na (X,d), tada je α efektivan u (X,d) zbog $\alpha \in \mathscr{S}_\alpha$.

S druge strane, ako je α efektivan u (X,d), tada je $\mathscr{S}_\alpha$ struktura izračunljivosti na (X,d) jer svojstvo (i) slijedi iz propozicije 1.3.2, a svojstvo (ii) iz propozicije 1.3.1. ■

Neka su α i β efektivni nizovi u metričkom prostoru (X,d). Kažemo da su α i β **ekvivalentni** i pišemo $\alpha \sim \beta$, ako je α izračunljiv s obzirom na β i β je izračunljiv s obzirom na α. Po propoziciji 1.3.1, za proizvoljne nizove α i β u X imamo

$$\alpha \preceq \beta \Longleftrightarrow \mathscr{S}_\alpha \subseteq \mathscr{S}_\beta,$$

stoga za proizvoljne nizove α i β u (X,d) imamo

$$\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \mathscr{S}_\alpha = \mathscr{S}_\beta.$$

Iz ovoga je očito da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu svih efektivnih nizova u (X,d).

Ako su (X,d) i (Y,d') metrički prostori, za $f : X \to Y$ kažemo da je **izometrija** između (X,d) i (Y,d') ako je f surjekcija i vrijedi

$$d'(f(x), f(y)) = d(x,y), \text{ za sve } x,y \in X.$$

S $\mathrm{Iso}(X,d)$ označavat ćemo skup svih izometrija $f : X \to X$.

Kažemo da su dva efektivna niza α i β u (X,d) **ekvivalentna do na izometriju** ako postoji izometrija $f : X \to X$ takva da je $\beta \sim f \circ \alpha$. Nije teško pokazati da je ovo također relacija ekvivalencije na skupu svih efektivnih nizova u (X,d).

Efektivan niz (x_i) u metričkom prostoru (X,d) je **efektivan separirajući niz** ako je (x_i) gust u (X,d), to jest ako je skup $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust u (X,d). Relacije ekvivalencije i ekvivalencije do na izometriju će nas posebno zanimati na skupu efektivnih separirajućih nizova.

Lema 1.3.6. Neka je (X,d) metrički prostor i $\alpha = (\alpha_i)$ niz u X.

(i) Niz α je efektivan ako i samo ako za svaki niz (x_i) u X vrijedi

$$(x_i) \preceq \alpha \implies (x_i) \diamond \alpha. \tag{1.2}$$

(ii) Ako je α efektivan separirajući niz, tada za svaki niz (x_i) u X imamo

$$(x_i) \preceq \alpha \Longleftrightarrow (x_i) \diamond \alpha.$$

Dokaz.

(i) Ako vrijedi (1.2), tada je α efektivan zbog $\alpha \preceq \alpha$.

Obrnuto, pretpostavimo da je α efektivan i $(x_i) \preceq \alpha$. Tada $(x_i) \in \mathscr{S}_\alpha$, što skupa s $\alpha \in \mathscr{S}_\alpha$ i propozicijom 1.3.5 povlači $(x_i) \diamond \alpha$.

(ii) Pretpostavimo da je α efektivan separirajući niz i $(x_i) \diamond \alpha$.

Neka su $i,k \in \mathbb{N}$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da $d(x_i, \alpha_j) < 2^{-k}$. Budući da je skup Ω svih $(i,k,j) \in \mathbb{N}^3$ takvih da je $d(x_i, \alpha_j) < 2^{-k}$ izračunljivo prebrojiv (po propoziciji 1.1.1 (iii)) i za sve $i,k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i,k,j) \in \Omega$, prema teoremu 1.0.2 postoji izračunljiva funkcja $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(i,k,F(i,k)) \in \Omega$ za sve $i,k \in \mathbb{N}$. Stoga

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i,k \in \mathbb{N}$ i zato $(x_i) \preceq \alpha$.

■

Propozicija 1.3.7. Neka je (X,d) metrički prostor, $\mathscr{S}$ struktura izračunljivosti na (X,d) i α gust niz u (X,d) takav da je $\alpha \in \mathscr{S}$. Tada je α efektivan separirajući niz u (X,d) i $\mathscr{S} = \mathscr{S}_\alpha$.

Dokaz. Očito je α efektivan separirajući niz u (X,d).

Ako je $(x_i) \in \mathscr{S}_\alpha$, tada $(x_i) \preceq \alpha$ i $\alpha \in \mathscr{S}$ povlači $(x_i) \in \mathscr{S}$.

Obrnuto, neka je $(x_i) \in \mathscr{S}$. Tada $(x_i) \diamond \alpha$ i po lemi 1.3.6 $(x_i) \preceq \alpha$, to jest $(x_i) \in \mathscr{S}_\alpha$. Stoga $\mathscr{S} = \mathscr{S}_\alpha$. ■

Neka je (X,d) metrički prostor. Kažemo da je $\mathscr{S}$ **separabilna struktura izračunljivosti** na (X,d) ako je $\mathscr{S}$ struktura izračunljivosti na (X,d) i postoji $\alpha \in \mathscr{S}$ takav da je α gust niz u (X,d). Uočimo da je po propoziciji 1.3.7, $\mathscr{S}$ separabilna struktura izračunljivosti na (X,d) ako i samo ako $\mathscr{S} = \mathscr{S}_\alpha$ za neki efektivan separirajući niz α u (X,d).

Primjer 1.3.8. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ i neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n$ izračunljiva surjekcija. Tada je $\mathscr{S}_\alpha$ skup svih izračunljivih nizova u $\mathbb{R}^n$.

Naime, ako je $(x_i) \in \mathscr{S}_\alpha$, tada je (x_i) izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$ po tvrdnji (ii) iz primjera 1.3.4. S druge strane, ako je (x_i) izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$, tada po tvrdnji (i) istog primjera, imamo $(x_i) \diamond \alpha$ i lema 1.3.6 povlači $(x_i) \preceq \alpha$, to jest $(x_i) \in \mathscr{S}_\alpha$.

Dakle, skup svih izračunljivih nizova u $\mathbb{R}^n$ je separabilna struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d)$.

Pretpostavimo da je (X,d) metrički prostor i α efektivan niz u (X,d). Tada

$$\alpha \text{ je gust niz} \iff \mathscr{S}_\alpha \text{ je separabilna struktura izračunljivosti.} \tag{1.3}$$

Naime, ako je (x_i) gust niz koji je izračunljiv u odnosu na α, tada je i α također gust.

Neka je (X,d) metrički prostor i $\mathscr{S}$ strukutra izračunljvosti na (X,d). Neka je $a \in X$. Kažemo da je a **izračunljiva točka u strukturi izračunljivosti** $\mathscr{S}$ ako postoje $(x_i) \in \mathscr{S}$ i $i \in \mathbb{N}$ takvi da je $a = x_i$. Lako je vidjeti da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) a je izračunljiva točka u $\mathscr{S}$;

(ii) $(a,a,a,\dots) \in \mathscr{S}$;

(iii) postoji $(x_i) \in \mathscr{S}$ i izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $d(a, x_{f(k)}) < 2^{-k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Ako je $\mathscr{S}$ struktura izračunljivosti na (X,d), sa $\mathscr{S}^0$ ćemo označavati skup svih izračunljivih točaka u $\mathscr{S}$.

1.4. IZRAČUNLJIVI METRIČKI PROSTORI

Sada ćemo navesti neke osnovne činjenice o izračunljivim metričkim prostorima. Opširnije o njima može se pronaći u literaturi [3, 4, 8, 18, 21, 24].

Za uređenu trojku (X,d,α) kažemo da je **izračunljiv metrički prostor** ako je (X,d) metrički prostor i $\alpha = (\alpha_i)$ efektivan separirajući niz u (X,d). Ako je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor, $x \in X$ je **izračunljiva točka u** (X,d,α) ako je x izračunljiva s obzirom na α. Niz (x_i) u X je **izračunljiv niz u** (X,d,α) ako je (x_i) izračunljiv s obzirom na α.

Uočimo da su izračunljivi metrički prostori usko vezani uz separabilne strukture izračunljivosti. Naime, ako je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor, tada je prema propoziciji 1.3.5, skup izračunljivih nizova u (X,d,α) upravo separabilna struktura izračunljivosti $\mathscr{S}_\alpha$. S druge strane, za svaku separabilnu strukturu $\mathscr{S}_\alpha$ na (X,d), (X,d,α) je izračunljiv metrički prostor.

Primjer 1.4.1. Euklidski prostor $(\mathbb{R}^n,d)$ obično promatramo kao izračunljiv metrički prostor na sljedeći način. Fiksiramo proizvoljan izračunljiv niz q u $\mathbb{R}^n$ čija slika je $\mathbb{Q}^n$. Tada je $(\mathbb{R}^n,d,q)$, gdje je d euklidska metrika, izračunljiv metrički prostor. Iz primjera 1.3.8 vidimo da se pojmovi izračunljivih točaka i izračunljivih nizova u $(\mathbb{R}^n,d,q)$ podudaraju s pojmovima izračunljivih točaka u $\mathbb{R}^n$ i izračunljivih funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ koje smo definirali u 1.1.

Osim izračunljivih točaka i izračunljivih nizova, u izračunljivom metričkom prostoru ćemo promatrati i neke druge izračunljive objekte.

Prvo definirajmo neke oznake koje ćemo koristiti. Neka je (X,d) metrički prostor i $A,B \subseteq X$. Za $\varepsilon > 0$ pisat ćemo $A \prec_\varepsilon B$ ako za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je $d(a,b) < \varepsilon$. Ako je $A \prec_\varepsilon B$ i $B \prec_\varepsilon A$, pišemo

$$A \approx_\varepsilon B.$$

Pretpostavimo da je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor. Od sada nadalje, neka je $\mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $j \mapsto [j]$ neka fiksirana r.r.o. funkcija čija slika je skup svih nepraznih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$. Također, neka su $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fiksirane izračunljive funkcije takve da je

$$\{(\tau_1(i), \tau_2(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

i $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ fiksirana izračunljiva funkcija čija slika je skup svih pozitivnih racionalnih brojeva.

Ako je K kompaktan skup u (X,d) takav da postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa svojstvom da za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i \in [f(k)]\},$$

kažemo da je K **izračunljiv skup u** (X,d,α).

Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo $\lambda_i = \alpha_{\tau_1(i)}$, $\rho_i = q_{\tau_2(i)}$ i $I_i = B(\lambda_i, \rho_i)$. Tada je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih **racionalnih otvorenih kugli**, to jest kugli koje imaju središte u nekom članu niza α i racionalan radijus.

Neka je S zatvoren skup u (X,d). Ako je skup

$$\{i \in \mathbb{N} \mid S \cap I_i \neq \emptyset\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$, kažemo da je S **izračunljivo prebrojiv u** (X,d,α). Ako postoji izračunljivo prebrojiv skup Ω u $\mathbb{N}$ takav da

$$X \setminus S = \bigcup_{i \in \Omega} I_i,$$

kažemo da je S **koizračunljivo prebrojiv u** (X,d,α).

Može se pokazati (korolar 3.14 u [3]) da vrijedi:

$$S \text{ izračunljiv} \implies S \text{ izračunljivo prebrojiv i koizračunljivo prebrojiv}$$

S druge strane, kompaktan skup koji je izračunljiv i koizračunljivo prebrojiv općenito ne mora biti izračunljiv, no u nekim slučajevima mora - primjerice u $\mathbb{R}^n$ (korolar 4.14 u [3]).

Nadalje, uočimo da iz činjenice da je unija dva izračunljivo prebrojiva skupa u $\mathbb{N}^k$ također izračunljivo prebrojiv skup slijedi:

Propozicija 1.4.2. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i A,B zatvoreni skupovi u (X,d). Ako su A i B izračunljivo prebrojivi u (X,d,α), tada je i $A \cup B$ izračunljivo prebrojiv skup u (X,d,α). Ako su A i B koizračunljivo prebrojivi u (X,d,α), tada je i $A \cap B$ koizračunljivo prebrojiv skup u (X,d,α).

Za potpune skupove izračunljivu prebrojivost možemo okarakterizirati na sljedeći način:

Propozicija 1.4.3. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ potpun skup u (X,d). Tada je S izračunljivo prebrojiv ako i samo ako postoji izračunljiv niz (x_i) u (X,d,α) takav da je

$$S = \overline{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}}.$$

Dokaz navedenog rezultata može se naći u [3] (korolar 3.14). Uočimo da iz navedene propozicije slijedi da su izračunljive točke guste u potpunom izračunljivo prebrojivom skupu.

Iako to iz definicija nije očito, može se pokazati da pojmovi izračunljivog, izračunljivo prebrojivog i koizračunljivo prebrojivog skupa u (X,d,α) ne ovise o odabiru r.r.o. funkcije $j \mapsto [j]$, kao ni o funkcijama τ_1, τ_2, q. Odnosno, ako su $j \mapsto [j]'$ i τ_1', τ_2', q' neke druge funkcije koje imaju analogna svojstva, izračunljivi, izračunljivo prebrojivi i koizračunljivo prebrojivi skupovi s obzirom na njih bit će isti kao i oni s obzirom na $j \mapsto [j]$ i τ_1, τ_2, q. Dakle, pojmovi izračunljivog, izračunljivo prebrojivog i koizračunljivo prebrojivog skupa definirani su isključivo preko niza α. Stoga, umjesto izračunljivosti i (ko)izračunljive prebrojivosti *u izračunljivom metričkom prostoru* (X,d,α), mogli smo govoriti i o izračunljivosti i (ko)izračunljivoj prebrojivosti *s obzirom na* α.

Izračunljiv metrički prostor (X,d,α) je **efektivno** (ili **izračunljivo**) **kompaktan** [26] ako je (X,d) potpun i **efektivno totalno omeđen**, to jest, postoji izračunljiva funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$X = \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B(\alpha_i, 2^{-k}).$$

Važno je naglasiti da efektivna totalna omeđenost ovisi samo o pozadinskom metričkom prostoru (X,d). To jest, imamo sljedeći rezultat (korolar 21 u [9]):

Teorem 1.4.4. Ako su α i β efektivni separirajući nizovi u (X,d), tada je (X,d,α) efektivno totalno omeđen ako i samo ako je (X,d,β) efektivno totalno omeđen.

Iz ovoga odmah slijedi i analogna ekvivalencija za efektivnu kompaktnost. Kažemo da je metrički prostor (X,d) **efektivno kompaktan** ako postoji niz α takav da je (X,d,α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor. Uočimo da iz teorema 1.4.4 slijedi da je u tom slučaju i (X,d,β) efektivno kompaktan za svaki efektivan separirajući niz β u (X,d).

Sljedeća propozicija povezuje pojmove izračunljivog skupa i efektivno kompaktnog metričkog prostora:

Propozicija 1.4.5. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i K kompaktan skup u (X,d). K je izračunljiv u (X,d,α) ako i samo ako postoji izračunljiv niz (x_i) u (X,d,α) čija slika je sadržana u K i izračunljiva funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$K \subseteq \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B(x_i, 2^{-k}).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je K izračunljiv u (X,d,α). Tada je K i izračunljivo prebrojiv i potpun, pa prema propoziciji 1.4.3, postoji izračunljiv niz (x_i) u (X,d,α) takav da je

$$K = \overline{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}}.$$

Nadalje, budući da je K izračunljiv u (X,d,α), postoji izračunljiva funkcija $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sa svojstvom da za svaki $k\in\mathbb{N}$

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i\in[f(k)]\}.$$

Sada zbog prethodne relacije i gustoće niza (x_i) u K, lako dobivamo da za sve $k\in\mathbb{N}$, $i\in[f(k)]$ postoji $j\in\mathbb{N}$ takav da je

$$d(\alpha_i,x_j) < 2\cdot 2^{-k}.$$

Kako je skup

$$\Omega = \{(i,k,j)\in\mathbb{N}^3 \mid d(\alpha_i,x_j) < 2\cdot 2^{-k}, i\in[f(k)]\}\cup\{(i,k,j)\in\mathbb{N}^3 \mid i\notin[f(k)]\}$$

izračunljivo prebrojiv prema propozicijama 1.1.1 i 1.2.1, iz teorema 1.0.2 slijedi da postoji izračunljiva funkcija $g:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ takva da je $(i,k,g(i,k))\in\Omega$, za sve $i,k\in\mathbb{N}$. Sada definiramo funkciju $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$,

$$\varphi(k) = \max\{g(i,k+2) \mid i\in[f(k+2)]\},\ k\in\mathbb{N}.$$

Lako se vidi da je φ izračunljiva i tvrdimo da je

$$K\subseteq \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B(x_i,2^{-k}),$$

za svaki $k\in\mathbb{N}$. Neka je $x\in K$. Tada postoji $i\in[f(k+2)]$ takav da je

$$d(x,\alpha_i) < 2^{-(k+2)},$$

a za taj i također vrijedi

$$d(\alpha_i,x_{g(i,k+2)}) < 2\cdot 2^{-(k+2)}.$$

Sada imamo da je

$$g(i,k+2)\in\{0,\dots,\varphi(k)\}$$

i po nejednakosti trokuta dobivamo

$$d(x,x_{g(i,k+2)}) < 2^{-(k+2)} + 2\cdot 2^{-(k+2)} < 2^{-k}.$$

Dakle, $x\in B(x_{g(i,k+2)},2^{-k})$.

Obratno, pretpostavimo da postoji izračunljiv niz (x_i) u (X,d,α) čija slika je sadržana u K i izračunljiva funkcija $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ takva da za svaki $k\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$K\subseteq \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B(x_i,2^{-k}).$$

Zbog gustoće niza α, imamo da za sve $i,k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_i, \alpha_j) < 2^{-k}.$$

Analogno kao prije zaključujemo da možemo pronaći izračunljivu funkciju $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takvu da je

$$d(x_i, \alpha_{h(i,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i,k \in \mathbb{N}$. Sada budući da zapravo za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$K \approx_{2^{-k}} \{x_0, \ldots, x_{\varphi(k)}\},$$

kao i

$$\{x_0, \ldots, x_{\varphi(k)}\} \approx_{2^{-k}} \{\alpha_{g(0,k)}, \ldots, \alpha_{g(\varphi(k),k)}\},$$

direktno iz nejednakosti trokuta dobivamo

$$K \approx_{2 \cdot 2^{-k}} \{\alpha_{g(0,k)}, \ldots, \alpha_{g(\varphi(k),k)}\}.$$

Funkcija $\Psi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$,

$$\Psi(k) = \{g(0,k+1), g(1,k+1), \ldots, g(\varphi(k+1),k+1)\},\ k \in \mathbb{N}$$

je r.r.o. Pogledajmo skup

$$\Delta = \{(k,i) \in \mathbb{N}^2 \mid [i] = \Psi(k)\}.$$

Taj skup je prema propoziciji 1.2.1 (a) izračunljiv, te za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(k,i) \in \Delta$. Slijedi da postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, f(k)) \in \Delta$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Nije teško provjeriti da za tu funkciju vrijedi upravo

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i \in [f(k)]\},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa je K izračunljiv u (X,d,α). ■

Iz dokazane propozicije jednostavno slijedi da za kompaktan metrički prostor (X,d) vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$(X,d,\alpha) \text{ je efektivno kompaktan } \iff X \text{ je izračunljiv skup u } (X,d,\alpha)$$

Ako su α i β ekvivalentni efektivni separirajući nizovi, htjeli bismo da su tada izračunljivi metrički prostori (X,d,α) i (X,d,β) na neki način „jednaki”. O tome govori sljedeća propozicija.

Propozicija 1.4.6. Neka su α i β efektivni separirajući nizovi u (X,d) i $\alpha \sim \beta$. Tada su izračunljivi nizovi i izračunljive točke te izračunljivi, izračunljivo prebrojivi i koizračunljivo prebrojivi skupovi u (X,d,α) jednaki kao u (X,d,β).

Dokaz. Činjenica da se izračunljivi nizovi u navedenim prostorima podudaraju slijedi iz propozicije 1.3.1. Budući da su izračunljive točke upravo članovi izračunljivih nizova, odmah slijedi da se i izračunljive točke podudaraju. Nadalje, iz propozicije 1.4.5, možemo zaključiti da se i izračunljivi skupovi podudaraju.

Neka su

$$I_i^\alpha = B(\alpha_{\tau_1(i)}, \rho_i), \quad I_i^\beta = B(\beta_{\tau_1(i)}, \rho_i),\ i \in \mathbb{N}$$

racionalne otvorene kugle u promatranim prostorima. Tvrdimo da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće

$$I_i^\alpha = \bigcup_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ (i,j)\in\Omega}} I_j^\beta, \tag{1.4}$$

gdje je

$$\Omega = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid d(\alpha_{\tau_1(i)}, \beta_{\tau_1(j)}) + \rho_j < \rho_i\}.$$

Uočimo da je Ω izračunljivo prebrojiv prema propoziciji 1.1.1 (iii). Neka je $x \in I_i^\alpha$. Tada je

$$d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) < \rho_i,$$

pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) + 2 \cdot 2^{-k} < \rho_i.$$

Zbog gustoće niza β, postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x, \beta_l) < 2^{-k}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} d(\alpha_{\tau_1(i)}, \beta_l) + 2^{-k} &\le d(\alpha_{\tau_1(i)}, x) + d(x, \beta_l) + 2^{-k} \\ &< \rho_i - 2 \cdot 2^{-k} + 2^{-k} + 2^{-k} = \rho_i, \end{aligned}$$

pa vidimo da za $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\tau_1(j) = l$, $\rho_j = 2^{-k}$ vrijedi $(i,j) \in \Omega$ i $x \in I_j^\beta$.

Obrnuto, ako je $x \in I_j^\beta$, za neki $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i,j) \in \Omega$, onda vrijedi

$$\begin{aligned} d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) &\le d(x, \beta_{\tau_1(j)}) + d(\beta_{\tau_1(j)}, \alpha_{\tau_1(i)}) \\ &< \rho_j + \rho_i - \rho_j = \rho_i, \end{aligned}$$

pa je $x \in I_i^\alpha$.

Pretpostavimo sada da je S izračunljivo prebrojiv skup u (X,d,β). Iz (1.4) slijedi da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća ekvivalencija

$$I_i^\alpha \cap S \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists j \in \mathbb{N})((i,j) \in \Omega \text{ i } I_j^\beta \cap S \neq \emptyset).$$

Kako je $\{j \in \mathbb{N} \mid I_j^\beta \cap S \neq \emptyset\}$ izračunljivo prebrojiv, prema teoremu 1.0.1 slijedi da je i skup

$$\{i \in \mathbb{N} \mid I_i^\alpha \cap S \neq \emptyset\}$$

izračunljivo prebrojiv, odnosno da je S izračunljivo prebrojiv u (X,d,α).

Pretpostavimo da je S koizračunljivo prebrojiv u (X,d,α). Tada postoji izračunljivo prebrojiv skup $A \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $X \setminus S = \bigcup_{i \in A} I_i^\alpha$. Sada imamo

$$X \setminus S = \bigcup_{i \in A} I_i^\alpha = \bigcup_{i \in A} \bigcup_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ (i,j) \in \Omega}} I_j^\beta = \bigcup_{j \in B} I_j^\beta,$$

pri čemu je

$$B = \{j \in \mathbb{N} \mid (\exists i \in A)(i,j) \in \Omega\} = \{j \in \mathbb{N} \mid (\exists i \in \mathbb{N})(i \in A \text{ i } (i,j) \in \Omega)\}.$$

B je izračunljivo prebrojiv prema teoremu 1.0.1, pa je S koizračunljivo prebrojiv u (X,d,β).

Dokazali smo sljedeće implikacije:

$$\begin{aligned} S \text{ izračunljivo prebrojiv u } (X,d,\beta) \quad &\Longrightarrow \quad S \text{ izračunljivo prebrojiv u } (X,d,\alpha); \\ S \text{ koizračunljivo prebrojiv u } (X,d,\alpha) \quad &\Longrightarrow \quad S \text{ koizračunljivo prebrojiv u } (X,d,\beta). \end{aligned}$$

Za obrnute smjerove samo zamijenimo uloge α i β u (1.4). ■

Nadalje, ako su α i β ekvivalentni do na izometriju, sada je lako pokazati da su izračunljivi, izračunljivo prebrojivi i koizračunljivo prebrojivi objekti u (X,d,β) izometrične slike istih objekata iz (X,d,α).

Kažemo da je metrički prostor (X,d) **izračunljivo kategoričan** [14] ako su svaka dva efektivna separirajuća niza u (X,d) ekvivalentna do na izometriju.

2. Maksimalne strukture izračunljivosti

2.1. Općenito o maksimalnim strukturama

Neka je (X,d) metrički prostor i $\mathscr{S}$ struktura izračunljivosti na (X,d). Kažemo da je $\mathscr{S}$ **maksimalna struktura izračunljivosti** na (X,d) ako ne postoji struktura izračunljivosti $\mathscr{T}$ na (X,d) takva da je $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$ i $\mathscr{S} \neq \mathscr{T}$.

Svaka separabilna struktura izračunljivosti je maksimalna. Naime, ako je α efektivan separirajući niz na (X,d) i $\mathscr{T}$ struktura izračunljivosti na (X,d) takva da je $\mathscr{S}_\alpha \subseteq \mathscr{T}$, tada $\alpha \in \mathscr{T}$, pa po propoziciji 1.3.7 imamo $\mathscr{T} = \mathscr{S}_\alpha$.

Separabilne strukture izračunljivosti na metričkom prostoru (X,d) općenito ne moraju postojati. Očito takve strukture ne postoje ako (X,d) nije separabilan metrički prostor, no i kada je (X,d) separabilan, separabilna struktura izračunljivosti na (X,d) ne mora postojati. Primjerice, ako je $X = \{0,a\}$, gdje je a neizračunljiv broj i d euklidska metrika na X, tada na (X,d) ne postoji separabilna struktura izračunljivosti.

S druge strane, maksimalne strukture izračunljivosti uvijek postoje. Štoviše, imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 2.1.1. Neka je $\mathscr{S}$ struktura izračunljivosti na metričkom prostoru (X,d). Tada postoji maksimalna struktura izračunljivosti $\mathscr{M}$ na (X,d) takva da je $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{M}$.

Dokaz. Neka je Λ skup svih struktura izračunljivosti $\mathscr{T}$ na (X,d) sa svojstvom $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$. Λ je parcijalno uređen s inkluzijom i lako je provjeriti da svaki lanac u Λ ima gornju među. Prema Zornovoj lemi, postoji maksimalni element $\mathscr{M}$ od Λ. Dakle, $\mathscr{M}$ je maksimalna struktura izračunljivosti na (X,d) koja sadrži $\mathscr{S}$. ■

Čak i kada postoje separabilne strukture na metričkom prostoru, maksimalne strukture ne moraju biti separabilne. Štoviše, ni maksimalne strukture koje su *guste* ne moraju biti separabilne (vidjeti primjer 2.1.2).

Struktura izračunljivosti $\mathscr{S}$ na metričkom prostoru (X,d) je **gusta** ako je $\mathscr{S}^0$ gust skup u (X,d). Očito je svaka separabilna struktura izračunljivosti gusta. No obrat ne vrijedi - postoje guste strukture izračunljivosti koje nisu separabilne. Primjerice, ako je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ i $\mathscr{S}$ skup svih konstantnih nizova $(q,q,q,\dots)$, gdje je $q \in \mathbb{Q}$, tada je $\mathscr{S}$ gusta struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R},d)$ koja nije separabilna. Ovdje je bitno uočiti da $\mathscr{S}$ nije maksimalna struktura.

Primjer 2.1.2. Neka je d euklidska metrika na $[0,1]$. Tada postoji jedinstvena separabilna struktura izračunljivosti na $([0,1],d)$ (vidi [9], primjer 10 ili teorem 31).

Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija čija je slika $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ (takva funkcija svakako postoji). Tada je α efektivan separirajući niz u $([0,1],d)$. Ako je $x \in [0,1]$ točka izračunljiva s obzirom na α, tada je x izračunljiv broj. Stoga je $\mathscr{S}_\alpha$ jedina separabilna struktura izračunljivosti na $([0,1],d)$ i svaki element od $\mathscr{S}_\alpha^0$ je izračunljiv broj.

Neka je $c \in [0,1]$ neizračunljiv broj. Tada je $\{(c,c,c,\dots)\}$ struktura izračunljivosti na $([0,1],d)$ i po propoziciji 2.1.1 postoji maksimalna struktura izračunljivosti $\mathscr{M}$ na $([0,1],d)$ takva da je $\{(c,c,c,\dots)\} \subseteq \mathscr{M}$. Slijedi da je $c \in \mathscr{M}^0$. Kako $c \notin \mathscr{S}_\alpha^0$, mora biti $\mathscr{M} \neq \mathscr{S}_\alpha$, stoga $\mathscr{M}$ nije separabilna struktura izračunljivosti na $([0,1],d)$.

Nadalje, neka je $\mathscr{T}$ skup svih konstantnih nizova $(x,x,x,\dots)$, gdje je $x \in [0,1]$ takav da je $x - c \in \mathbb{Q}$. Tada je $\mathscr{T}$ struktura izračunljivosti na $([0,1],d)$ i $c \in \mathscr{T}^0$. Neka je $\mathscr{M}_1$ maksimalna struktura izračunljivosti na $([0,1],d)$ koja sadrži $\mathscr{T}$. Imamo da je $c \in \mathscr{M}_1^0$, pa možemo zaključiti da $\mathscr{M}_1$ nije separabilna. Ako je $x \in [0,1]$ takav da je $x - c \in \mathbb{Q}$, tada je x izračunljiva točka u $\mathscr{M}_1$ i stoga je $\mathscr{M}_1$ gusta struktura izračunljivosti na $([0,1],d)$ (koja je maksimalna i nije separabilna).

Uskoro ćemo vidjeti da je $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1$ i da su obje strukture zapravo skup nizova (x_i) u $[0,1]$ takvih da je $(x_i - c)$ izračunljiv niz.

Neka je α efektivan niz u metričkom prostoru (X,d). Za razliku od ekvivalencije (1.3), ekvivalencija

$$\alpha \text{ je gust niz} \iff \mathscr{S}_\alpha \text{ je maksimalna struktura izračunljivosti}$$

ne vrijedi općenito (iako implikacija $\Longrightarrow$ vrijedi). Primjerice, ako je c neizračunljiv broj, $X = \{0,c\}$, d euklidska metrika na X i $\alpha = (0,0,0,\dots)$, tada $\mathscr{S}_\alpha = \{\alpha\}$ i $\{\alpha\}$ je maksimalna struktura izračunljivosti. Stoga je $\mathscr{S}_\alpha$ maksimalna struktura, no α nije gust u (X,d).

Primjer 2.1.3. Neka je X neprazan skup i d diskretna metrika na X. Pretpostavimo da je $\mathscr{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na (X,d). Tada je $\mathscr{M}^0 = X$. Naime, kada bi postojao $x \in X$ takav da $x \notin \mathscr{M}^0$, tada je $\{(x,x,x,\dots)\} \cup \mathscr{M}$ struktura izračunljivosti na (X,d) koja je različita od $\mathscr{M}$ i sadrži $\mathscr{M}$. Ovo je kontradikcija s maksimalnošću od $\mathscr{M}$, pa $\mathscr{M}^0 = X$.

Pretpostavimo dodatno da je X neprebrojiv. Imamo sljedeći zaključak: $\mathscr{M}^0$ je neprebrojiv, pa je i $\mathscr{M}$ neprebrojiv. Nadalje, $\mathscr{M}$ je gusta struktura izračunljivosti na (X,d) i (X,d) nije separabilan. S druge strane, ako je $\mathscr{S}$ separabilna struktura izračunljivosti na nekom metričkom prostoru, tada je taj metrički prostor separabilan i $\mathscr{S}$ je prebrojiv. Naime, postoji samo prebrojivo mnogo izračunljivih funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, pa onda postoji i prebrojivo mnogo nizova koji su izračunljivi s obzirom na neki gust niz α.

Neka je (X,d) metrički prostor i $\mathscr{S}$ skup čiji elementi su nizovi u X. Kažemo da je $\mathscr{S}$ **efektivna struktura** na (X,d) ako za sve $(x_i),(y_j) \in \mathscr{S}$ vrijedi $(x_i) \diamond (y_i)$.

Svaka struktura izračunljivosti na (X,d) je očito efektivna struktura na (X,d). Obrnuto, efektivne strukture ne moraju biti strukture izračunljivosti. Na primjer, ako je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ izračunljiva surjekcija i d euklidska metrika na $\mathbb{R}$, tada je $\{\alpha\}$ efektivna struktura na $(\mathbb{R},d)$, no nije struktura izračunljivosti jer je $(0,0,0,\dots) \preceq \alpha$, a $(0,0,0,\dots) \notin \{\alpha\}$.

Neka je (X,d) metrički prostor. Kažemo da je $\mathscr{S}$ **maksimalna efektivna struktura** na (X,d) ako je $\mathscr{S}$ efektivna struktura na (X,d) i ne postoji efektivna struktura $\mathscr{T}$ na (X,d) takva da je $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$ i $\mathscr{S} \neq \mathscr{T}$.

Ako je $\mathscr{S}$ struktura izračunljivosti, tada je svaki podskup od $\mathscr{S}$ efektivna struktura. Vrijedi i obrat, to jest svaka efektivna struktura je sadržana u nekoj strukturi izračunljivosti.

Propozicija 2.1.4. Neka je (X,d) metrički prostor i $\mathscr{S} \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Tada

(i) $\mathscr{S}$ je efektivna struktura na (X,d) ako i samo ako postoji struktura izračunljivosti $\mathscr{T}$ na (X,d) takva da je $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$;

(ii) $\mathscr{S}$ je maksimalna efektivna struktura na (X,d) ako i samo ako je $\mathscr{S}$ maksimalna struktura izračunljivosti na (X,d).

Dokaz. Ako je $\mathscr{S}$ efektivna struktura na (X,d), tada je $\bigcup_{\alpha \in \mathscr{S}} \mathscr{S}_\alpha$ struktura izračunljivosti na (X,d) (prema propoziciji 1.3.2). Očito je $\mathscr{S} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathscr{S}} \mathscr{S}_\alpha$, pa smo dokazali (i).

Sada imamo da ako je $\mathscr{S}$ maksimalna efektivna struktura na (X,d), tada mora biti $\mathscr{S} = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{S}} \mathscr{S}_\alpha$. Iz ovoga slijedi da je $\mathscr{S}$ struktura izračunljivosti. Dakle, $\mathscr{S}$ je maksimalna struktura izračunljivosti na (X,d).

Za obrat, pretpostavimo da je $\mathscr{S}$ maksimalna struktura izračunljivosti i da je $\mathscr{T}$ efektivna struktura sa svojstvom $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$. Imamo

$$\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathscr{T}} \mathscr{S}_\alpha,$$

pa slijedi $\mathscr{S} = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{T}} \mathscr{S}_\alpha$. Dakle, $\mathscr{S} = \mathscr{T}$, pa je $\mathscr{S}$ maksimalna efektivna struktura. ■

Sljedeća propozicija slijedi iz propozicija 2.1.1 i 2.1.4 (ii) (ili se može pokazati direktno Zornovom lemom kao propozicija 2.1.1).

Propozicija 2.1.5. Neka je $\mathscr{S}$ efektivna struktura na metričkom prostoru (X,d). Tada postoji maksimalna efektivna struktura $\mathscr{M}$ na (X,d) takva da je $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{M}$.

Ako je $f : X \to Y$ i $\mathscr{S} \subseteq X^{\mathbb{N}}$, neka je $f(\mathscr{S}) = \{(f(x_i)) \mid (x_i) \in \mathscr{S}\}$. Sljedeća tvrdnja se dokazuje direktno koristeći definicije, stoga dokaz preskačemo.

Propozicija 2.1.6. Neka su (X,d) i (Y,d') metrički prostori, neka je $f : X \to Y$ izometrija i $\mathscr{S} \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Tada je $\mathscr{S}$ (maksimalna) struktura izračunljivosti na (X,d) ako i samo ako je $f(\mathscr{S})$ (maksimalna) struktura izračunljivosti na (Y,d'). Štoviše, $\mathscr{S}$ je separabilna ako i samo ako je $f(\mathscr{S})$ separabilna.

2.2. Maksimalne strukture na euklidskom prostoru

Sada nam je cilj opisati maksimalne strukture na podskupovima euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$. Budući da u $\mathbb{R}^n$ imamo pojam baze koja se sastoji od konačno mnogo vektora, ima smisla pitati se možemo li svaku maksimalnu strukturu na podskupu od $\mathbb{R}^n$ opisati s konačno mnogo pomno odabranih točaka. Pokazat će se da je odgovor potvrdan.

Ako je (X,d) metrički prostor, $n \in \mathbb{N}$ i $a_0,\dots,a_n \in X$, kažemo da je $a_0,\dots,a_n$ **efektivan konačan niz** u (X,d) ako je $d(a_i,a_j)$ izračunljiv broj za sve $i,j \in \{0,\dots,n\}$.

Pretpostavimo da je $a_0,\dots,a_n$ efektivan konačan niz u metričkom prostoru (X,d). Tada je $\{(a_0,a_0,\dots),\dots,(a_n,a_n,\dots)\}$ struktura izračunljivosti na (X,d) i po propoziciji 2.1.1, sadržana je u nekoj maksimalnoj strukturi izračunljivosti $\mathscr{M}$ na (X,d). Dakle, postoji maksimalna struktura izračunljivosti $\mathscr{M}$ na (X,d) takva da $a_0,\dots,a_n \in \mathscr{M}^0$. No takva struktura $\mathscr{M}$ ne mora biti jedinstvena. U ovom poglavlju bavit ćemo se slučajem kada je (X,d) potprostor euklidskog prostora i tražit ćemo uvjete pod kojima je takva struktura jedinstvena.

Ako je (X,d) metrički prostor i $a \in X$, neka je $\mathscr{R}_a^{(X,d)}$ skup svih nizova (x_i) u X takvih da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto d(x_i,a)$ izračunljiva. Radi jednostavnijeg zapisa, za $a_0,\dots,a_n \in X$ pisat ćemo $\mathscr{R}_{a_0,\dots,a_n}^{(X,d)}$ umjesto $\mathscr{R}_{a_0}^{(X,d)} \cap \dots \cap \mathscr{R}_{a_n}^{(X,d)}$.

Uočimo da vrijedi

$$(x_i) \in \mathscr{R}_a^{(X,d)} \iff (x_i) \diamond (a,a,a,\dots).$$

Iz navedene ekvivalencije i propozicije 1.3.2 možemo zaključiti: ako je $(x_i) \in \mathscr{R}_a^{(X,d)}$ i $(y_i) \preceq (x_i)$, tada $(y_i) \in \mathscr{R}_a^{(X,d)}$. Dakle, imamo ekvivalenciju:

$$\mathscr{R}_{a_0,\dots,a_n}^{(X,d)} \text{ je efektivna struktura} \iff \mathscr{R}_{a_0,\dots,a_n}^{(X,d)} \text{ je struktura izračunljivosti.}$$

Pretpostavimo da je $a_0,\dots,a_n$ efektivan konačan niz u metričkom prostoru (X,d). Tada je svaki od konačnih nizova $(a_0,a_0,\dots)$, $\dots$, $(a_n,a_n,\dots)$ sadržan u $\mathscr{R}_{a_0,\dots,a_n}^{(X,d)}$. Štoviše, ako je $\mathscr{S}$ efektivna struktura na (X,d), tada

$$a_0,\dots,a_n \in \mathscr{S}^0 \implies \mathscr{S} \subseteq \mathscr{R}_{a_0,\dots,a_n}^{(X,d)}. \tag{2.1}$$

Dakle, ako je $\mathscr{R}_{a_0,\dots,a_n}^{(X,d)}$ efektivna struktura, tada je $\mathscr{R}_{a_0,\dots,a_n}^{(X,d)}$ maksimalna efektivna struktura. Prema propoziciji 2.1.4, imamo implikaciju

$$\mathscr{R}_{a_0,\dots,a_n}^{(X,d)} \text{ je efektivna struktura} \implies \mathscr{R}_{a_0,\dots,a_n}^{(X,d)} \text{ je maksimalna struktura izračunljivosti}$$

Iz ovoga i (2.1), slijedi:

Propozicija 2.2.1. Neka je $a_0, \ldots, a_n$ efektivan konačan niz u metričkom prostoru (X,d). Pretpostavimo da je $\mathscr{R}^{(X,d)}_{a_0,\ldots,a_n}$ efektivna struktura. Tada je $\mathscr{R}^{(X,d)}_{a_0,\ldots,a_n}$ jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti $\mathscr{M}$ na (X,d) sa svojstvom $a_0, \ldots, a_n \in \mathscr{M}^0$.

Obrat prethodne tvrdnje općenito ne vrijedi, to jest, maksimalna struktura izračunljivosti na (X,d) u kojoj su $a_0, \ldots, a_n$ izračunljive točke može biti jedinstvena, čak i kada $\mathscr{R}^{(X,d)}_{a_0,\ldots,a_n}$ nije efektivna struktura. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 2.2.2. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ i $a_0 = 0$. Tada je proizvoljan niz u $\{-1,1\}$ element skupa $\mathscr{R}^{(\mathbb{R},d)}_{a_0}$, no nisu svi nizovi u $\{-1,1\}$ efektivni.

Naime, ako je (x_i) niz u $\{-1,1\}$ koji je efektivan u $(\mathbb{R},d)$ i $A = \{i \in \mathbb{N} \mid x_i = 1\}$, tada je A izračunljivo prebrojiv. Zaista, ako je $i_0 \in A$, tada

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid d(x_i, x_{i_0}) < 1\},$$

pa je A izračunljivo prebrojiv prema propoziciji 1.1.1 (iv) (zapravo, A je rekurzivan jer je $\mathbb{N} \setminus A$ također izračunljivo prebrojiv). Stoga, ako uzmemo podskup A od $\mathbb{N}$ koji nije izračunljivo prebrojiv i definiramo (x_i) sa $x_i = 1$ za $i \in A$ i $x_i = -1$ za $i \in \mathbb{N} \setminus A$, tada (x_i) nije efektivan u $(\mathbb{R},d)$, a sadržan je u $\mathscr{R}^{(\mathbb{R},d)}_{a_0}$.

Dakle, $\mathscr{R}^{(\mathbb{R},d)}_{a_0}$ nije efektivna struktura. No kasnije ćemo vidjeti (teorem 2.2.20) da ipak postoji jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R},d)$ u kojoj je a_0 izračunljiva točka.

Do kraja poglavlja se fokusiramo na potprostore $(\mathbb{R}^n,d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Od sada ćemo za $X \subseteq \mathbb{R}^n$ pisati kratko *metrički prostor* X umjesto *metrički prostor* $(X, d|_{X\times X})$.

2.2.1. Karakterizacija maksimalnih struktura izračunljivosti

Kako bismo pomnije proučili vezu između skupova oblika $\mathscr{R}^X_{a_0,\ldots,a_n}$ i maksimalnih struktura izračunljivosti na X, trebat će nam još neki pojmovi i osnovni rezultati iz linearne algebre. Za $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$, neka je

$$\mathscr{P} = \{a_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(a_i - a_0) \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}.$$

Kažemo da je $\mathscr{P}$ **ravnina** u $\mathbb{R}^n$ **razapeta točkama** $a_0, \ldots, a_k$ (za $k = 0$ stavimo $\mathscr{P} = \{a_0\}$). Za niz $a_0, \ldots, a_k$, gdje je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, kažemo da je **geometrijski nezavisan** ako su vektori

$a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ linearno nezavisni. Budući da je u tom slučaju skup $\mathscr{P} - a_0$ k-dimenzionalni vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$, ravnina $\mathscr{P}$ je izometrična prostoru $\mathbb{R}^k$.

Neka su V i W vektorski prostori. **Afino preslikavanje** između V i W je funkcija $f : V \to W$ sa svojstvom da postoje linearni operator $A : V \to W$ i vektor $b \in W$ takvi da je $f(x) = A(x) + b$, za svaki $x \in V$. Sljedeći rezultat će nam biti od velike koristi (to je takozvani Mazur-Ulamov teorem):

Teorem 2.2.3. Ako su V i W normirani prostori nad $\mathbb{R}$ i $f : V \to W$ izometrija, tada je f afino preslikavanje.

Osim toga, trebat će nam i sljedeća svojstva afinih preslikavanja:

Lema 2.2.4.

(i) Neka je V vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$ i $f : V \to \mathbb{R}^m$ afino preslikavanje. Ako je $\mathscr{P}$ ravnina u V razapeta točkama $a_0, \dots, a_k$, tada je $f(\mathscr{P})$ ravnina u $\mathbb{R}^m$ razapeta točkama $f(a_0), \dots, f(a_k)$.

(ii) Neka je V vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$, W vektorski potprostor od $\mathbb{R}^m$ te $f : V \to W$ injektivno afino preslikavanje. Ako je $a_0, \dots, a_k$ geometrijski nezavisan niz u V, tada je $f(a_0), \dots, f(a_k)$ također geometrijski nezavisan niz.

(iii) Neka je $\mathscr{P}$ ravnina u $\mathbb{R}^n$ i $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}^m$ izometrija. Ako je $\mathscr{P}'$ ravnina razapeta točkama $a_0, \dots, a_k \in \mathscr{P}$, tada je $f(\mathscr{P}')$ ravnina razapeta točkama $f(a_0), \dots, f(a_k)$.

(iv) Neka je $\mathscr{P}$ ravnina u $\mathbb{R}^n$ i $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}^m$ izometrija. Ako je $a_0, \dots, a_k$ geometrijski nezavisan niz u $\mathscr{P}$, tada je $f(a_0), \dots, f(a_k)$ također geometrijski nezavisan niz.

Dokaz.

(i) Neka su A i b linearni operator i vektor pridruženi preslikavanju f. Tada vidimo da je za proizvoljne $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$,

$$f\left(a_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(a_i - a_0)\right) = A(a_0) + b + \sum_{i=1}^{k} t_i(A(a_i) - A(a_0)) = f(a_0) + \sum_{i=1}^{k} t_i(f(a_i) - f(a_0)),$$

pa slijedi tvrdnja.

(ii) Neka su A i b linearni operator i vektor pridruženi preslikavanju f. Vrijedi

$$f(a_i) - f(a_0) = A(a_i) - A(a_0) = A(a_i - a_0),\ i = 1, \dots, k.$$

Kako je f injektivno preslikavanje, očito A mora biti injektivan linearni operator, pa A čuva linearnu nezavisnost vektora.

(iii) Neka je $g : \mathscr{P} - a_0 \to \mathscr{P}$ translacija $g(x) = x + a_0$. Tada je $f \circ g : \mathscr{P} - a_0 \to \mathbb{R}^m$ izometrija između dvaju vektorskih prostora, pa je prema teoremu 2.2.3, $f \circ g$ afino preslikavanje. Očito je $\mathscr{P}' - a_0$ ravnina razapeta točkama $0, a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$, a onda je prema (i), $f \circ g(\mathscr{P}' - a_0)$ ravnina razapeta točkama $f \circ g(0), f \circ g(a_1 - a_0), \dots, f \circ g(a_k - a_0)$. Kako je

$$f \circ g(\mathscr{P}' - a_0) = f(\mathscr{P}'), \quad f \circ g(a_i - a_0) = f(a_i),\ i = 0, \dots, k,$$

slijedi tvrdnja.

(iv) Kao u (iii), uzmimo translaciju g koja je izometrija između nekog vektorskog potprostora V od $\mathbb{R}^n$ i $\mathscr{P}$. Neka je $g(x) = x + b$, za svaki $x \in V$. Sada kao u (iii) zaključimo da je $f \circ g : V \to \mathbb{R}^m$ afino preslikavanje, a mora biti i injektivno jer čuva udaljenosti. Stoga je prema (ii), niz $f \circ g(a_0 - b), \dots, f \circ g(a_k - b)$ geometrijski nezavisan, a to je upravo niz $f(a_0), \dots, f(a_k)$.

■

Dokaz sljedeće leme potpuno je analogan dokazu leme 10 iz [9], stoga ga preskačemo.

Lema 2.2.5. Neka je $a_0, \dots, a_k$ geometrijski nezavisan efektivan niz u $\mathbb{R}^n$. Tada postoji izometrija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sa svojstvom da su $f(a_0), \dots, f(a_k)$ izračunljive točke u $\mathbb{R}^n$ takve da je $f(a_0) = (0, \dots, 0)$ i

$$f(a_i) \in \{(t_1, \dots, t_i, 0, \dots, 0) \mid t_1, \dots, t_i \in \mathbb{R},\ t_i \neq 0\},\ i = 1, \dots, k.$$

Osim navedene leme, od velike koristi će nam biti i propozicija 8 iz [9]:

Propozicija 2.2.6. Ako je $a_0, \dots, a_n$ geometrijski nezavisan niz izračunljivih točaka u $\mathbb{R}^n$, tada su svi nizovi iz $\mathscr{R}^{\mathbb{R}^n}_{a_0, \dots, a_n}$ izračunljivi u $\mathbb{R}^n$.

Poopćimo sada lemu 2.2.5 sljedećim rezultatom:

Propozicija 2.2.7. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ takav da je $d(x, y)$ izračunljiv broj za sve $x, y \in X$. Tada postoji izometrija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da je svaki element $f(X)$ izračunljiva točka.

Dokaz. Pretpostavimo da X ima barem dvije točke (inače je tvrdnja očita).

Odaberimo $a_0 \in X$ i neka je V vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$ generiran vektorima $\{x - a_0 \mid x \in X\}$. Tada postoji $k \geq 1$ i $a_1, \dots, a_k \in X$ takvi da je $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ baza za V. Vektori $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ su tada linearno nezavisni, pa su točke $a_0, \dots, a_k$ geometrijski nezavisne.

Neka je $\mathscr{P}$ ravnina u $\mathbb{R}^n$ razapeta s $a_0, \dots, a_k$. Tada je $X \subseteq \mathscr{P}$.

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrija iz leme 2.2.5. Prema lemi 2.2.4 (iii) i (iv), $f(a_0), \dots, f(a_k)$ su geometrijski nezavisne izračunljive točke u $\mathbb{R}^n$ i vrijedi $f(\mathscr{P}) \subseteq T$, gdje je

$$T = \{(t_1, \dots, t_k, 0, .., 0) \in \mathbb{R}^n \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}.$$

Neka je $x \in X$. Konačan niz $a_0, \dots, a_k, x$ je efektivan i stoga je $f(a_0), \dots, f(a_k), f(x)$ također efektivan niz u T. Neka je $g : T \to \mathbb{R}^k$ izometrija definirana s

$$g(t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0) = (t_1, \dots, t_k).$$

Prema lemi 2.2.4 (iv), imamo da su $g(f(a_0)), \dots, g(f(a_k))$ geometrijski nezavisne točke u $\mathbb{R}^k$. Budući da su $f(a_0), \dots, f(a_k)$ izračunljive, lako se vidi da su i $g(f(a_0)), \dots, g(f(a_k))$ izračunljive. Nadalje, kako je g izometrija, $g(f(a_0)), \dots, g(f(a_k)), g(f(x))$ je efektivan niz u $\mathbb{R}^k$. Prema propoziciji 2.2.6 konstantan niz $(g(f(x)), g(f(x)), \dots)$ je izračunljiv u $\mathbb{R}^k$, pa je i točka $g(f(x))$ izračunljiva u $\mathbb{R}^k$. Sada iz definicije funkcije g odmah slijedi da je točka $f(x)$ izračunljiva u $\mathbb{R}^n$. ■

Korolar 2.2.8. Neka je $a_0, \dots, a_k$ efektivan niz u $\mathbb{R}^n$. Tada postoji izometrija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da su $f(a_0), \dots, f(a_k)$ izračunljive točke.

Lema 2.2.9. Neka je (x_i) izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$.

(i) Neka je $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearni operator i $a_1, \dots, a_n$ linearno nezavisni izračunljivi vektori u $\mathbb{R}^n$ takvi da su $L(a_1), \dots, L(a_n)$ izračunljivi u $\mathbb{R}^m$. Tada je $(L(x_i))$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}^m$.

(ii) Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afino preslikavanje i $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ geometrijski nezavisne izračunljive točke takve da su $f(a_0), \dots, f(a_n)$ izračunljive u $\mathbb{R}^m$. Tada je $(f(x_i))$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}^m$.

Dokaz.

(i) Neka je $e_1, \dots, e_n$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka su $\beta_1^i, \dots, \beta_n^i \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$e_i = \beta_1^i a_1 + \dots + \beta_n^i a_n.$$

Tada je n-torka $(\beta_1^i, \dots, \beta_n^i)$ jedinstveno rješenje $n \times n$ sustava s izračunljivim koeficijentima (jer su $e_i, a_1, \dots, a_n$ izračunljivi). Iz Cramerovog pravila, sada je lako vidjeti da su $\beta_1^i, \dots, \beta_n^i$ izračunljivi. Imamo

$$L(e_i) = \beta_1^i L(a_1) + \cdots + \beta_n^i L(a_n),$$

pa je $L(e_i)$ izračunljiv. Dakle, $L(e_1), \dots, L(e_n)$ su izračunljivi vektori u $\mathbb{R}^m$.

Neka je (x_i) izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$. Neka su $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ koordinatni nizovi od (x_i). Za svaki $i \in \mathbb{N}$ imamo

$$x_i = x_i^1 e_1 + \cdots + x_i^n e_n,$$

pa je

$$L(x_i) = x_i^1 L(e_1) + \cdots + x_i^n L(e_n).$$

Iz ovoga slijedi da je $(L(x_i))$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}^m$.

(ii) Kako je f afino preslikavanje, postoji linearni operator $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i vektor $c \in \mathbb{R}^m$ takav da je $f(x) = L(x) + c$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Tada je $c = f(a_0) - L(a_0)$, pa je

$$f(x) = f(a_0) + L(x - a_0)$$

za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Vektori $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ su linearno nezavisni i izračunljivi te za $i \in \{1, \dots, n\}$ imamo

$$L(a_i - a_0) = f(a_i) - f(a_0),$$

pa su $L(a_1 - a_0), \dots, L(a_n - a_0)$ izračunljivi u $\mathbb{R}^m$. Neka je (x_i) izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$. Očito je tada i $(x_i - a_0)$ također izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$. Po tvrdnji (i), $(L(x_i - a_0))$ je izračunljiv niz u $\mathbb{R}^m$, a kako je $f(x_i) = f(a_0) + L(x_i - a_0)$, za sve $i \in \mathbb{N}$, $(f(x_i))$ je također izračunljiv niz.

■

Sada vidimo da možemo smanjiti broj izračunljivih točaka u propoziciji 2.2.6, no pritom se moramo ograničiti na nizove koji leže u ravnini razapetoj tim točkama.

Lema 2.2.10. Neka su $a_0, \dots, a_k$ izračunljive točke u $\mathbb{R}^n$ i neka je $\mathscr{P}$ ravnina razapeta s $a_0, \dots, a_k$. Ako je (x_i) niz u $\mathscr{P}$ takav da je $(x_i) \in \mathscr{R}^{\mathbb{R}^n}_{a_0,\dots,a_k}$, tada je (x_i) izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da su $a_0, \dots, a_k$ geometrijski nezavisne (u suprotnom uzmemo $i_0, \dots, i_l \in \{0, \dots, k\}$ takve da su $a_{i_0}, \dots, a_{i_l}$ geometrijski nezavisne i razapinju $\mathscr{P}$).

Kako je $\mathscr{P}$ k-ravnina, izometrična je s $\mathbb{R}^k$. Neka je $g : \mathscr{P} \to \mathbb{R}^k$ izometrija. Prema lemi 2.2.4 (iv), $g(a_0), \dots, g(a_k)$ je geometrijski nezavisan efektivan niz u $\mathbb{R}^k$, pa po korolaru 2.2.8, postoji izometrija $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ takva da su $h(g(a_0)), \dots, h(g(a_k))$ izračunljive točke. Definiramo $f = h \circ g$. Očito je f izometrija $\mathscr{P} \to \mathbb{R}^k$ takva da su $f(a_0), \dots, f(a_k)$ izračunljive točke.

Imamo $(f(x_i)) \in \mathscr{R}^{\mathbb{R}^k}_{f(a_0),\dots,f(a_k)}$, pa po propoziciji 2.2.6, $(f(x_i))$ je izračunljiv niz u $\mathbb{R}^k$. Funkcija $f^{-1} : \mathbb{R}^k \to \mathscr{P}$ je također izometrija. Uočimo da je $\mathscr{P} - a_0$ vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$. Ako komponiramo f^{-1} s translacijom $g : \mathscr{P} \to \mathscr{P} - a_0$, $g(x) = x - a_0$, dobivamo izometriju $g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^k \to \mathscr{P} - a_0$ koja mora biti afino preslikavanje prema teoremu 2.2.3. Kako je $f^{-1}(x) = g \circ f^{-1}(x) + a_0$, za sve $x \in \mathbb{R}^k$, zaključujemo da je i f^{-1}, kao funkcija $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, afina. Jasno je da su $f^{-1}(f(a_0)), \dots, f^{-1}(f(a_k))$ izračunljive točke u $\mathbb{R}^n$, pa je po lemi 2.2.9 (ii), $(x_i) = (f^{-1}(f(x_i)))$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$. ■

Lema 2.2.11. Neka je $a_0, \dots, a_{k+1}$ efektivan niz u $\mathbb{R}^n$ i neka je $\mathscr{P}$ ravnina razapeta točkama $a_0, \dots, a_k$. Ako je (x_i) niz u $\mathscr{P}$ takav da je $(x_i) \in \mathscr{R}^{\mathbb{R}^n}_{a_0,\dots,a_k}$, tada je $(x_i) \in \mathscr{R}^{\mathbb{R}^n}_{a_{k+1}}$.

Dokaz. Prema propoziciji 2.2.7, postoji izometrija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da su $f(a_0), \dots, f(a_{k+1})$ izračunljive točke u $\mathbb{R}^n$. Prema lemi 2.2.4 (iii), $f(\mathscr{P})$ je ravnina razapeta točkama $f(a_0), \dots, f(a_k)$. Nadalje, $(f(x_i))$ je niz u $f(\mathscr{P})$ takav da je $(f(x_i)) \in \mathscr{R}^{\mathbb{R}^n}_{f(a_0),\dots,f(a_k)}$. Sada lema 2.2.10 povlači da je $(f(x_i))$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$. Stoga je $(f(x_i)) \in \mathscr{R}^{\mathbb{R}^n}_{f(a_{k+1})}$ (po tvrdnji (i) primjera 1.3.4), pa mora biti $(x_i) \in \mathscr{R}^{\mathbb{R}^n}_{a_{k+1}}$. ■

Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $a_0, \dots, a_k$ geometrijski nezavisan efektivan niz u X. Kažemo da je $a_0, \dots, a_k$ **maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz** u X ako ne postoji $a_{k+1} \in X$ takav da je $a_0, \dots, a_k, a_{k+1}$ geometrijski nezavisan efektivan niz.

Teorem 2.2.12. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je $a_0, \dots, a_k$ maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz u X. Tada je $\mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$ maksimalna struktura izračunljivosti. Štoviše, to je jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti na X u kojoj su $a_0, \dots, a_k$ izračunljive točke.

Dokaz. Neka je $\mathscr{P}$ ravnina razapeta točkama $a_0, \dots, a_k$ i $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}^k$ izometrija takva da su $f(a_0), \dots, f(a_k)$ izračunljive točke u $\mathbb{R}^k$ (postojanje takve izometrije može se dokazati kao u dokazu leme 2.2.10).

Uočimo da zbog maksimalnosti $a_0, \dots, a_k$,

$$(x_i) \in \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k} \;\Rightarrow\; x_i \in \mathscr{P}, \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}$$

Stoga za $(x_i), (y_i) \in \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$ nizovi $(f(x_i)), (f(y_i))$ su dobro definirani i jasno je da mora biti $(f(x_i)), (f(y_i)) \in \mathscr{R}^{\mathbb{R}^k}_{f(a_0),\dots,f(a_k)}$. Iz leme 2.2.10 slijedi da su $(f(x_i)), (f(y_i))$ izračunljivi nizovi u $\mathbb{R}^k$. Dakle, mora biti $(f(x_i)) \diamond (f(y_i))$ (prema primjeru 1.3.4), što za posljedicu ima da je $(x_i) \diamond (y_j)$. Sada imamo da je $\mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$ efektivna struktura, pa tvrdnja slijedi iz propozicije 2.2.1.

■

Korolar 2.2.13. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Ako je $a_0, \dots, a_n \in X$ geometrijski nezavisan efektivan niz, onda je $\mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_n}$ jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti na X u kojoj su $a_0, \dots, a_n$ izračunljive točke.

Sljedeći teorem precizno opisuje maksimalne struktura izračunljivosi na potprostorima euklidskog prostora.

Teorem 2.2.14. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da je $\mathscr{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na X i $k \in \mathbb{N}$ najveći prirodan broj za koji postoji $k+1$ geometrijski nezavisnih točaka u $\mathscr{M}^0$. Ako su $a_0, \dots, a_k \in \mathscr{M}^0$ geometrijski nezavisne, tada je $a_0, \dots, a_k$ maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz u X i vrijedi $\mathscr{M} = \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$.

Dokaz. Očito vrijedi

$$\mathscr{M} \subseteq \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}. \tag{2.2}$$

Tvrdimo da ne postoji $a_{k+1} \in X$ takav da je $a_0, \dots, a_{k+1}$ geometrijski nezavisan efektivan niz. Pretpostavimo da takav $a_{k+1} \in X$ postoji. Ako je $\mathscr{P}$ ravnina razapeta točkama $a_0, \dots, a_k$, tada po pretpostavci vrijedi $\mathscr{M}^0 \subseteq \mathscr{P}$, pa $a_{k+1} \notin \mathscr{M}^0$. Također, ako je $(x_i) \in \mathscr{M}$, tada je (x_i) niz u ravnini $\mathscr{P}$, pa iz (2.2) slijedi da je $(x_i) \in \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$. Prema lemi 2.2.11, imamo $(x_i) \in \mathscr{R}^X_{a_{k+1}}$, pa je $\mathscr{M} \cup \{(a_{k+1}, a_{k+1}, \dots)\}$ struktura izračunljivosti. Ovo je u kontradikciji s maksimalnošću od $\mathscr{M}$ i činjenicom da $a_{k+1} \notin \mathscr{M}^0$. Dakle, takav a_{k+1} ne postoji.

Sada je prema teoremu 2.2.12, $\mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$ struktura izračunljivosti, stoga željena tvrdnja slijedi iz (2.2). ■

2.2.2. Veza s kanonskim strukturama izračunljivosti

Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\mathscr{S}$ skup svih nizova (x_i) u X koji su izračunljivi u $\mathbb{R}^n$. Kako je skup svih izračunljivih nizova u $\mathbb{R}^n$ struktura izračunljivosti na $\mathbb{R}^n$ (i separabilna je, prema primjeru 1.3.8), imamo da je $\mathscr{S}$ struktura izračunljivosti na X. Kažemo da je $\mathscr{S}$ **kanonska struktura izračunljivosti** na X.

Kanonska struktura izračunljivosti ne mora biti maksimalna. Primjerice, ako X ne sadrži izračunljive točke, tada je $\mathscr{S} = \emptyset$, pa očito $\mathscr{S}$ nije maksimalna za $X \neq \emptyset$. Drugi primjer je segment X u $\mathbb{R}^2$ s krajnjim točkama $(0,0)$ i $(1,\gamma)$, gdje je γ broj koji nije izračunljiv. Jedina izračunljiva točka u X je $(0,0)$, pa $\mathscr{S}$ sadrži samo konstantan niz $((0,0),(0,0),\dots)$. S druge strane, jasno je da u $X \setminus \{(0,0)\}$ postoje točke čije udaljenosti od $(0,0)$ su izračunljivi brojevi. Iz ovoga slijedi da $\mathscr{S}$ nije maksimalna struktura izračunljivosti na X.

Iako kanonske strukture ne moraju biti maksimalne, svaka maksimalna struktura izračunljivosti je kanonska „do na izometriju". O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 2.2.15. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\mathscr{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na X. Tada postoji izometrija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da je $\{(f(x_i)) \mid (x_i) \in \mathscr{M}\}$ kanonska struktura izračunljivosti na $f(X)$.

Dokaz. Prema teoremu 2.2.14 imamo da je $\mathscr{M} = \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$, za neki maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz $a_0,\dots,a_k$ u X. Prema korolaru 2.2.8, postoji izometrija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da su $f(a_0),\dots,f(a_k)$ izračunljive točke. Slijedi da je

$$\{(f(x_i)) \mid (x_i) \in \mathscr{M}\} = \mathscr{R}^{f(X)}_{f(a_0),\dots,f(a_k)}. \tag{2.3}$$

Neka je $\mathscr{S}$ kanonska struktura izračunljivosti na $f(X)$. Jasno je da je $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{R}^{f(X)}_{f(a_0),\dots,f(a_k)}$. S druge strane, svaki element od $\mathscr{R}^{f(X)}_{f(a_0),\dots,f(a_k)}$ je prema (2.3) jednak $(f(x_i))$ za neki $(x_i) \in \mathscr{M}$, to jest $(x_i) \in \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$. Iz maksimalnosti niza $a_0,\dots,a_k$ slijedi da je (x_i) niz u ravnini razapetoj s $a_0,\dots,a_k$, pa je $(f(x_i))$ niz u ravnini razapetoj s $f(a_0),\dots,f(a_k)$. Ovo zajedno s $(f(x_i)) \in \mathscr{R}^{f(X)}_{f(a_0),\dots,f(a_k)}$ i lemom 2.2.10 povlači da je $(f(x_i))$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$. Stoga, $(f(x_i)) \in \mathscr{S}$, pa smo dokazali $\mathscr{S} = \mathscr{R}^{f(X)}_{f(a_0),\dots,f(a_k)}$. Iz navedene jednakosti i (2.3) slijedi tražena tvrdnja. ■

Vidjeli smo da maksimalna struktura izračunljivosti na metričkom prostoru (X,d) ne mora biti separabilna, čak i ako je (X,d) potprostor euklidskog prostora (primjer 2.1.2). No situacija je drugačija ako je (X,d) čitav euklidski prostor.

Teorem 2.2.16. Svaka maksimalna struktura izračunljivosti na $\mathbb{R}^n$ je separabilna.

Dokaz. Neka je $\mathscr{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na $\mathbb{R}^n$. Prema teoremu 2.2.15, postoji izometrija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da je $f(\mathscr{M})$ kanonska struktura izračunljivosti na $f(\mathbb{R}^n)$. Stoga je $f(\mathscr{M})$ kanonska struktura izračunljivosti na $\mathbb{R}^n$, a ta struktura je separabilna prema primjeru 1.3.8. Dakle, $f(\mathscr{M})$ je separabilna, pa je i $\mathscr{M}$ separabilna (propozicija 2.1.6). ■

2.2.3. Jedinstvenost

Lema 2.2.17. Neka su $a_0, \dots, a_{n-1}$ geometrijski nezavisne izračunljive točke u $\mathbb{R}^n$ i neka je $x \in \mathbb{R}^n$ takav da su udaljenosti $d(a_0,x), \dots, d(a_{n-1},x)$ izračunljivi brojevi. Tada je x izračunljiva točka u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Neka je $\mathscr{P}$ ravnina razapeta točkama $a_0, \dots, a_{n-1}$. Ako je $x \in \mathscr{P}$, tvrdnja slijedi iz leme 2.2.10 i činjenice da je x izračunljiva točka ako i samo ako je niz $(x,x,x,\dots)$ izračunljiv.

Ako $x \notin \mathscr{P}$, imamo

$$\begin{aligned} d(x,a_k)^2 &= \langle x-a_k, x-a_k \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x,a_k \rangle + \|a_k\|^2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

za svaki $k \in \{0,\dots,n-1\}$, gdje $\langle \cdot,\cdot \rangle$ označava euklidski skalarni produkt, a $\|\cdot\|$ euklidsku normu. Ako oduzmemo prvu jednadžbu u (2.4) od ostalih $n-1$ jednadžbi, dobivamo

$$\langle x, -2a_k + 2a_0 \rangle = d(x,a_k)^2 - d(x,a_0)^2 - \|a_k\|^2 + \|a_0\|^2, \tag{2.5}$$

za svaki $k \in \{1,\dots,n-1\}$. Broj na desnoj strani u (2.5) je izračunljiv, pa nakon dijeljenja jednadžbe (2.5) s -2, dobivamo da je

$$s_k = \langle x, a_k - a_0 \rangle \tag{2.6}$$

izračunljiv broj, za svaki $k \in \{1,\dots,n-1\}$. Neka je A $(n-1) \times n$ matrica čiji je k-ti red n-torka $a_k - a_0$, to jest

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} - a_0 \end{pmatrix}$$

Ako je $x = (x_1, \dots, x_n)$, iz (2.6) dobivamo

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{pmatrix}$$

Budući da su $a_1 - a_0, \dots, a_{n-1} - a_0$ linearno nezavisni, rang matrice A je $n-1$. Stoga postoji stupac u A koji je linearna kombinacija drugih stupaca. Označimo s p redni broj tog stupca.

Neka je B matrica koju dobijemo iz A brisanjem p-tog stupca. Imamo

$$B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + t_1 x_p \\ \vdots \\ s_{n-1} + t_{n-1} x_p \end{pmatrix},$$

za neke izračunljive brojeve $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Kako je B invertibilna, imamo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} s_1 + t_1 x_p \\ \vdots \\ s_{n-1} + t_{n-1} x_p \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Koeficijenti od B su izračunljivi, pa i inverzna matrica B^{-1} također ima izračunljive koeficijente. Iz (2.7) slijedi da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq p$ postoje izračunljivi brojevi α_i, β_i takvi da je

$$x_i = \alpha_i + \beta_i x_p. \tag{2.8}$$

Vrijedi

$$\|x\|^2 - 2\langle x, a_0 \rangle + \|a_0\|^2 = d(x, a_0)^2,$$

to jest

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n + \delta = 0, \tag{2.9}$$

za neke izračunljive brojeve $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \delta$. Iz ovoga i (2.8) dobivamo

$$\alpha x_p^2 + \beta x_p + \gamma = 0,$$

gdje su α, β, γ izračunljivi i $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$. Naime, kada bi $(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$, tada bi za proizvoljan $x_p \in \mathbb{R}$ imali da n-torka $(x_1, \ldots, x_n)$ sa svojstvom (2.8) zadovoljava jednadžbu (2.9). Ovo je nemoguće jer jednadžba (2.9) predstavlja sferu u $\mathbb{R}^n$ (a (2.8), za $x_p \in \mathbb{R}$, je jednadžba pravca u $\mathbb{R}^n$). Dakle, x_p je rješenje kvadratne (ili linearne) jednadžbe s izračunljivim koeficijentima, pa je x_p izračunljiv. Sada iz (2.8) slijedi da su $x_1, \ldots, x_n$ izračunljivi brojevi, pa je x izračunljiva točka u $\mathbb{R}^n$. ■

Prethodna lema ne vrijedi za nizove, to jest, ako je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$ takav da su $(d(a_0,x_i))_{i\in\mathbb{N}}$, $\dots$, $(d(a_{n-1},x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljivi nizovi, tada (x_i) ne mora nužno biti izračunljiv. Naime, s oznakama kao u primjeru 2.2.2, imamo da je $(d(a_0,x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz, no (x_i) nije izračunljiv u $\mathbb{R}$ (jer nije efektivan). Ovo isto dokazuje da lema 2.2.10 ne vrijedi ako maknemo pretpostavku da je (x_i) niz u $\mathscr{P}$ (imamo da je $(x_i) \in \mathscr{R}^{\mathbb{R}}_{a_0}$, no (x_i) nije izračunljiv).

Prema teoremu 2.2.12 i teoremu 2.2.14, $\mathscr{M}$ je maksimalna struktura izračunljivosti na potprostoru X od $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $\mathscr{M} = \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$, gdje je $a_0,\dots,a_k$ maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz u X. Sada se nameće pitanje, možemo li strukturu $\mathscr{M}$ opisati s manje točaka? Preciznije, ako je $a_0,\dots,a_k$ maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz u X i $k \geq 1$, vrijedi li $\mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k} = \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_{k-1}}$? Odgovor je općenito negativan, što možemo vidjeti u sljedećem primjeru.

Primjer 2.2.18. Neka je $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ i $X = \mathbb{R}$. Tada je a_0,a_1 maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz u X, no $\mathscr{R}^X_{a_0,a_1} \neq \mathscr{R}^X_{a_0}$. Da to dokažemo, uzmimo niz (x_i) u $\{-1,1\}$ koji nije izračunljiv kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (ima neprebrojivo mnogo nizova u $\{-1,1\}$, no samo prebrojivo mnogo izračunljivih funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Tada je $(x_i) \in \mathscr{R}^X_{a_0}$, no $(x_i) \notin \mathscr{R}^X_{a_0,a_1}$ (u suprotnom bi zbog $x_i = 1 - d(x_i,a_1)$ imali da je (x_i) izračunljiv).

S druge strane, o smanjenju broja točaka potrebnih za opis maksimalnih struktura možemo razmišljati i na sljedeći način. Ako je $a_0,\dots,a_k$ maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz u X, tada postoji jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti $\mathscr{M}$ na X u kojoj su $a_0,\dots,a_k$ izračunljive točke (teorem 2.2.12). Stoga možemo zaključiti da maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz u X određuje *jedinstvenu* maksimalnu strukturu izračunljivosti na X. Pitanje je može li neki geometrijski nezavisan efektivan niz u X koji nije maksimalan također definirati *jedinstvenu* maksimalnu strukturu izračunljivosti na X. Konkretno, je li moguće da je $\mathscr{M}$ također *jedinstvena* maksimalna struktura izračunljivosti u kojoj su $a_0,\dots,a_{k-1}$ izračunljive točke?

Primjer 2.2.19. Neka je $a_0 = (0,0)$ i $a_1 = (1,0)$. Neka je b točka na jediničnoj kružnici $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ takva da $d(b,a_1)$ nije izračunljiv broj. Neka je $X = \{a_0,a_1,b\}$. Tada je a_0,a_1 maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz u X, pa je $\mathscr{R}^X_{a_0,a_1}$ maksimalna struktura izračunljivosti na X, no to nije jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti na X u kojoj je a_0 izračunljiva točka. Naime, a_0,b je također maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz u X, pa je i $\mathscr{R}^X_{a_0,b}$ maksimalna struktura izračunljivosti na X koja je očito različita od $\mathscr{R}^X_{a_0,a_1}$.

S druge strane, geometrijski nezavisan efektivan niz $a_0, \dots, a_{k-1}$ doista određuje jedinstvenu maksimalnu strukturu izračunjivosti na X u slučaju kada je svaki geometrijski nezavisan niz oblika $a_0, \dots, a_{k-1}, a_k$ maksimalan. To ćemo dokazati u sljedećem teoremu, no prije toga trebamo jednu definiciju.

Za $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$, neka je $\dim X$ (**dimenzija** od X) najveći $k \in \mathbb{N}$ takav da postoji geometrijski nezavisan niz $a_0, \dots, a_k$ u X. Dakle, ako je $k = \dim X$, tada je X sadržan u nekoj k-ravnini u $\mathbb{R}^n$, no nije sadržan u niti jednoj $(k-1)$-ravnini.

Teorem 2.2.20. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $k = \dim X$ i pretpostavimo $k \geq 1$. Neka je $a_0, \dots, a_{k-1}$ geometrijski nezavisan efektivan niz u X. Tada postoji jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti na X u kojoj su $a_0, \dots, a_{k-1}$ izračunljive točke.

Dokaz. Ako je $a_0, \dots, a_{k-1}$ maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz u X, tada željena tvrdnja slijedi iz teorema 2.2.12.

U suprotnom, postoji $a_k \in X$ takav da je $a_0, \dots, a_k$ geometrijski nezavisan efektivan niz u X i zbog $k = \dim X$, prema teoremu 2.2.12, $\mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$ je maksimalna struktura izračunljivosti na X. Želimo dokazati da je to jedina maksimalna struktura izračunljivosti na X u kojoj su $a_0, \dots, a_{k-1}$ izračunljive točke.

Pretpostavimo da je $\mathscr{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na X takva da $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathscr{M}^0$. Tada očito vrijedi

$$\mathscr{M} \subseteq \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_{k-1}}. \tag{2.10}$$

Neka je $\mathscr{Q}$ ravnina razapeta točkama $a_0, \dots, a_{k-1}$. Tvrdimo da tada postoji $b \in \mathscr{M}^0$ takav da $b \notin \mathscr{Q}$. Pretpostavimo suprotno, to jest $\mathscr{M}^0 \subseteq \mathscr{Q}$ i neka je $(x_i) \in \mathscr{M}$. Tada je (x_i) niz u $\mathscr{Q}$ i prema (2.10) imamo da je $(x_i) \in \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_{k-1}}$. Sada lema 2.2.11 povlači da $(x_i) \in \mathscr{R}^X_{a_k}$. Stoga, $(x_i) \in \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$, pa možemo zaključiti da je $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$. Budući da je $\mathscr{M}$ maksimalna, mora biti $\mathscr{M} = \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$. Dakle, $a_k \in \mathscr{M}^0$, što je nemoguće zbog $a_k \notin \mathscr{Q}$.

Stoga, postoji $b \in \mathscr{M}^0$ takav da $b \notin \mathscr{Q}$. Neka je $\mathscr{P}$ ravnina razapeta točkama $a_0, \dots, a_k$. Kako je $k = \dim X$, mora biti $X \subseteq \mathscr{P}$.

Neka je $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}^k$ izometrija takva da su $f(a_0), \dots, f(a_k)$ izračunljive točke u $\mathbb{R}^k$. Kako $b \in \mathscr{M}^0$, iz (2.10) vidimo da je $a_0, \dots, a_{k-1}, b$ efektivan niz u X. Štoviše, taj niz je geometrijski nezavisan jer $b \notin \mathscr{Q}$.

Slijedi da je $f(a_0), \dots, f(a_{k-1}), f(b)$ geometrijski nezavisan efektivan niz u $\mathbb{R}^k$ (geometrijska nezavisnost slijedi iz činjenice da je $f^{-1} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ afino preslikavanje). Prema lemi 2.2.17, $f(b)$ je izračunljiva točka u $\mathbb{R}^k$.

Neka je $(x_i) \in \mathscr{M}$. Iz (2.10) i $b \in \mathscr{M}^0$ slijedi da je $(x_i) \in \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_{k-1},b}$. Sada imamo da je $(f(x_i)) \in \mathscr{R}^{\mathbb{R}^k}_{f(a_0),\dots,f(a_{k-1}),f(b)}$, pa lema 2.2.10 povlači da je $(f(x_i))$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}^k$. Kako je $f(a_k)$ izračunljiva točka, možemo zaključiti da je $(f(x_i)) \diamond (f(a_k), f(a_k), f(a_k), \dots)$. Sada imamo da je i $(x_i) \diamond (a_k, a_k, a_k, \dots)$, to jest $(x_i) \in \mathscr{R}^X_{a_k}$, što zajedno s (2.10) povlači $(x_i) \in \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$.

Stoga, $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$. Maksimalnost od $\mathscr{M}$ povlači da je $\mathscr{M} = \mathscr{R}^X_{a_0,\dots,a_k}$, pa smo time dokazali željenu jedinstvenost maksimalne strukture. ∎

2.3. Separabilnost maksimalnih struktura na segmentu

Ako je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ takav da je $\dim X \geq 1$ i $k = \dim X$, prema teoremu 2.2.20, za svaki geometrijski nezavisan efektivan niz $a_1, \dots, a_k$ u X postoji jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti $\mathscr{M}_{a_1,\dots,a_k}$ na X u kojoj su te točke izračunljive.

Separabilne strukture izračunljivosti su nam od posebnog interesa jer smo vidjeli da svaka takva struktura određuje jedan izračunljiv metrički prostor, stoga je općenito pitanje: uz koje uvjete na X i točke $a_1, \dots, a_k$ je struktura izračunljivosti $\mathscr{M}_{a_1,\dots,a_k}$ separabilna?

Posebno, ako je $X \subseteq \mathbb{R}$ i $a \in X$, tada postoji jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti $\mathscr{M}_a$ na X u kojoj je a izračunljiva. U slučaju kada je X segment, dat ćemo nužne i dovoljne uvjete da $\mathscr{M}_a$ bude separabilna. Za to nam trebaju pojmovi lijevo i desno izračunljivog realnog broja.

Realan broj x je **lijevo izračunljiv** ako postoji izračunljiv niz racionalnih brojeva (q_i) takav da $\sup \operatorname{Im} q = x$.

Nije teško vidjeti da ako je $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija i $x = \sup \operatorname{Im} F$, tada je x lijevo izračunljiv broj.

Propozicija 2.3.1. Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija i $a = \sup \operatorname{Im} f$, tada je a lijevo izračunljiv.

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija takva da je

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \tag{2.11}$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$ i neka je $G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s

$$G(x,i) = F(x,i) - 2^{-i},$$

$x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Nejednakost (2.11) povlači

$$G(x,i) < f(x),$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$, pa je $\sup \operatorname{Im} G \leq \sup \operatorname{Im} f$. S druge strane, iz (2.11) dobivamo i

$$f(x) < F(x,i) + 2^{-i} = G(x,i) + 2 \cdot 2^{-i},$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Stoga, $\sup \operatorname{Im} f \leq \sup \operatorname{Im} G$, pa je $\sup \operatorname{Im} f = \sup \operatorname{Im} G$. Kako je G izračunljiva $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $a = \sup \operatorname{Im} G$ je lijevo izračunljiv. ■

Analogno, kažemo da je realan broj x **desno izračunljiv** ako postoji izračunljiv niz racionalnih brojeva (r_i) takav da je $\inf \operatorname{Im} r = x$. Može se dokazati slična propozicija:

Propozicija 2.3.2. Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija i $a = \inf \operatorname{Im} f$, tada je a desno izračunljiv.

Propozicija 2.3.3. Ako je $x \geq 0$ lijevo izračunljiv, tada postoji izračunljiv niz racionalnih brojeva (r_i) takav da je $\overline{\operatorname{Im} r} = [0, x]$ i $0 \in \operatorname{Im} r$.

Dokaz. Po definiciji, postoji izračunljiv niz racionalnih brojeva (q_i) takav da je $\sup \operatorname{Im} q = x$. Skup

$$S = \{i \in \mathbb{N} \mid q_i \geq 0\}$$

je izračunljiv, pa je niz (s_i) definiran sa

$$s_i = q_i \cdot \chi_S(i), \ \ i \in \mathbb{N}$$

izračunljiv niz racionalnih brojeva takav da je $s_i \geq 0$, za sve $i \in \mathbb{N}$ i $\sup \operatorname{Im} s = x$. Neka je (t_i) izračunljiv niz racionalnih brojeva takav da je $\operatorname{Im} t = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ i neka su $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije takve da je $\mathbb{N}^2 = \{(\sigma_1(x), \sigma_2(x)) \mid x \in \mathbb{N}\}$. Definiramo

$$r_i = s_{\sigma_1(i)} \cdot t_{\sigma_2(i)},$$

$i \in \mathbb{N}$. Lako je provjeriti da je (r_i) traženi niz. ■

Prije karakterizacije separabilnih struktura izračunljivosti na segmentu, fokusiramo se na karakterizaciju maksimalnih struktura na $X \subseteq \mathbb{R}$.

Propozicija 2.3.4. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ i $a \in X$. Označimo sa $\mathscr{S}$ skup svih nizova (x_i) u X takvih da je $(x_i - a)$ izračunljiv niz. Tada je $\mathscr{S}$ maksimalna struktura izračunljivosti na X (i očito $a \in \mathscr{S}^0$).

Dokaz. Neka je $Y = \{x - a \mid x \in X\}$. Funkcija $f : X \to Y$, $f(x) = x - a$, je izometrija. Stoga je dovoljno dokazati da je $f(\mathscr{S})$ maksimalna struktura izračunljivosti na Y.

Po definiciji skupa $\mathscr{S}$, $f(\mathscr{S})$ je skup svih izračunljivih nizova u Y. Ako je 0 jedina izračunljiva točka u Y, tada je $f(\mathscr{S}) = \{(0, 0, 0, \dots)\}$ i $f(\mathscr{S})$ je maksimalna struktura izračunljivosti na Y. U suprotnom, postoji $b \in Y \setminus \{0\}$ koji je izračunljiv broj. Svaki izračunljiv niz u Y tada je sadržan u $\mathscr{R}^Y_{0,b}$. Obrnuto, svaki element $\mathscr{R}^Y_{0,b}$ je izračunljiv niz u $\mathbb{R}$ po lemi 2.2.10. Stoga je $f(\mathscr{S}) = \mathscr{R}^Y_{0,b}$, pa je $f(\mathscr{S})$ maksimalna struktura izračunljivosti na Y (prema teoremu 2.2.12). ■

Teorem 2.3.5. Neka je $\gamma > 0$. Za $a \in [0,\gamma]$ neka je $\mathscr{M}_a$ jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti na $[0,\gamma]$ takva da je $a \in \mathscr{M}_a^0$. Tada je $\mathscr{M}_a$ separabilna struktura izračunljivosti ako i samo ako su a i $\gamma - a$ lijevo izračunljivi brojevi.

Dokaz. Ako je $\mathscr{M}_a$ separabilna struktura izračunljivosti, postoji efektivan separirajući niz α u $[0,\gamma]$ takav da je $\mathscr{M}_a = \mathscr{S}_\alpha$. Neka je α' niz u $[-a,\gamma-a]$ definiran s $\alpha_i' = \alpha_i - a$, $i \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 2.3.4, α' je izračunljiv niz. Iz

$$\gamma - a = \sup \operatorname{Im} \alpha',$$

$$a = \sup \operatorname{Im}(-\alpha')$$

i propozicije 2.3.1, slijedi da su $\gamma - a$ i a lijevo izračunljivi brojevi.

Pretpostavimo sada da su a i $\gamma - a$ lijevo izračunljivi. Prema propoziciji 2.3.3, postoje izračunljivi nizovi racionalnih brojeva (r_i) i (q_i) takvi da

$$\overline{\operatorname{Im} q} = [0,a],\ 0 \in \operatorname{Im} q,$$

$$\overline{\operatorname{Im} r} = [0,\gamma - a].$$

Neka je α' niz racionalnih brojeva definiran s

$$\alpha'(2i) = r_i,$$

$$\alpha'(2i+1) = -q_i,$$

$i \in \mathbb{N}$. Tada je α' izračunljiv niz racionalnih brojeva i očito vrijedi $\overline{\operatorname{Im} \alpha'} = [-a,\gamma-a]$, $0 \in \operatorname{Im} \alpha'$. Neka je α niz definiran s

$$\alpha_i = \alpha_i' + a,$$

$i \in \mathbb{N}$. Tada je α efektivan niz i $\overline{\operatorname{Im} \alpha} = [0,\gamma]$, pa je α efektivan separirajući niz u $[0,\gamma]$ i $a \in \operatorname{Im} \alpha$, pa $a \in \mathscr{S}_\alpha^0$. Kako je $\mathscr{S}_\alpha$ maksimalna struktura izračunljivosti i $a \in \mathscr{S}_\alpha^0$, mora biti $\mathscr{S}_\alpha = \mathscr{M}_a$, pa je $\mathscr{M}_a$ separabilna. ■

Za $c,d \in \mathbb{R}$, $c < d$, funkcija $[c,d] \to [0,d-c]$, $x \mapsto x - c$ je izometrija, pa iz teorema 2.3.5, dobivamo sljedeći rezultat.

Korolar 2.3.6. Neka su $c,d \in \mathbb{R}$, $c < d$. Za $a \in [c,d]$ neka je $\mathscr{M}_a$ jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti na $[c,d]$ takva da je $a \in \mathscr{M}_a^0$. Tada je $\mathscr{M}_a$ separabilna ako i samo ako su $a - c$ i $d - a$ lijevo izračunljivi brojevi.

Neka je $a \in \mathbb{R}$ i neka su (x_i), (y_i) izračunljivi nizovi racionalnih brojeva takvi da je $a = \sup \operatorname{Im} x = \inf \operatorname{Im} y$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $|x_i - y_j| < 2^{-k}$. Kako je navedeni uvjet izračunljiv, postoje rekurzivne funkcije $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo $|x_{\varphi_1(k)} - y_{\varphi_2(k)}| < 2^{-k}$, što povlači $|a - x_{\varphi_1(k)}| < 2^{-k}$. Dakle, ako je realan broj lijevo i desno izračunljiv, tada je on izračunljiv. S druge strane, nije teško vidjeti da je svaki izračunljiv broj nužno lijevo i desno izračunljiv. Nadalje, očito je suma dvaju lijevo (desno) izračunljivih brojeva također lijevo (desno) izračunljiv. Također, uočimo da vrijedi sljedeće: ako je a lijevo (desno) izračunljiv i r nenegativan racionalan broj, tada je $-a$ desno (lijevo) izračunljiv i $r \cdot a$ je lijevo (desno) izračunljiv.

Neka je (X, d) metrički prostor. Neka općenita pitanja su:

(1) Koliko ima separabilnih struktura izračunljivosti na (X, d)?

(2) Koliko ima neizometričnih separabilnih struktura izračunljivosti na (X, d)?

Dvije strukture izračunljivosti $\mathscr{S}$ i $\mathscr{T}$ na (X, d) su **izometrične** ako postoji izometrija $f : X \to X$ takva da je $\mathscr{T} = f(\mathscr{S})$. Uočimo da su dvije separabilne strukture izometrične ako i samo ako su određene dvama efektivnim separirajućim nizovima koji su ekvivalentni do na izometriju.

Neka je γ pozitivan realan broj. U [14], Melnikov postavlja pitanje (2) u slučaju metričkog prostora $[0, \gamma]$ te daje odgovor u teoremu 8.12: ako je γ izračunljiv, tada su svake dvije separabilne strukture izračunljivosti na $[0, \gamma]$ izometrične, a ako je γ lijevo izračunljiv no nije izračunljiv, tada postoji beskonačno mnogo međusobno neizometričnih separabilnih struktura na $[0, \gamma]$ (vidjeti činjenicu 8.8. u [14]).

Sada ćemo navedene rezultate u malo općenitijem obliku dobiti korištenjem teorema 2.3.5. Prvo uočimo da postoje samo dvije izometrije $[0, \gamma] \to [0, \gamma]$. Stoga, postoji beskonačno mnogo separabilnih struktura izračunljivosti na $[0, \gamma]$ ako i samo ako postoji beskonačno mnogo međusobno neizometričnih separabilnih struktura na $[0, \gamma]$. Analogna tvrdnja vrijedi ako zamijenimo riječ „beskonačno” s „prebrojivo”.

Korolar 2.3.7. Neka je γ pozitivan realan broj.

(i) Ako je γ izračunljiv, postoji jedinstvena separabilna struktura izračunljivosti na $[0, \gamma]$.

(ii) Ako je γ lijevo izračunljiv, no nije izračunljiv, postoji beskonačno mnogo, ali prebrojivo, separabilnih struktura izračunljivosti na $[0, \gamma]$.

(iii) Ako γ nije lijevo izračunljiv, tada ne postoji separabilna struktura izračunljivosti na $[0, \gamma]$.

Dokaz. Za $a \in [0,\gamma]$ neka je $\mathscr{M}_a$ jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti na $[0,\gamma]$ u kojoj je a izračunljiva točka. Ako su $a,b \in [0,\gamma]$, tada je $\mathscr{M}_a = \mathscr{M}_b$ ako i samo ako je $b-a$ izračunljiv broj. Naime, ako je $\mathscr{M}_a = \mathscr{M}_b$, tada su a i b izračunljive točke u istoj strukturi izračunljivosti, pa je njihova euklidska udaljenost izračunljiv broj. Obrnuto, ako je $b-a$ izračunljiv broj, tada je b izračunljiva točka u $\mathscr{M}_a$ (prema propoziciji 2.3.4), pa imamo $\mathscr{M}_a = \mathscr{M}_b$.

(i) Pretpostavimo da je γ izračunljiv. Po teoremu 2.3.5 $\mathscr{M}_0$ je separabilna struktura izračunljivosti na $[0,\gamma]$. Pretpostavimo da je $\mathscr{S}$ neka druga separabilna struktura izračunljivosti na $[0,\gamma]$. Tada je $\mathscr{S}$ i maksimalna struktura izračunljivosti na $[0,\gamma]$, pa imamo $\mathscr{S} = \mathscr{M}_a$ za neki $a \in [0,\gamma]$. Po teoremu 2.3.5 brojevi a i $\gamma - a$ su lijevo izračunljivi. Budući da je $-\gamma$ izračunljiv i $-a = (\gamma - a) + (-\gamma)$, imamo da je i $-a$ lijevo izračunljiv. Iz ovoga i činjenice da je a lijevo izračunljiv, zaključujemo da je a izračunljiv. Slijedi da je $\mathscr{M}_a = \mathscr{M}_0$, to jest $\mathscr{S} = \mathscr{M}_0$. Stoga je $\mathscr{M}_0$ jedinstvena separabilna struktura izračunljivosti na $[0,\gamma]$.

(ii) Pretpostavimo da je γ lijevo izračunljiv i da nije izračunljiv. Svaka separabilna struktura izračunljivosti na $[0,\gamma]$ je oblika $\mathscr{M}_a$, za neki $a \in [0,\gamma]$ koji je lijevo izračunljiv (teorem 2.3.5). Kako postoji samo prebrojivo mnogo lijevo izračunljivih brojeva, imamo da postoji prebrojivo mnogo separabilnih struktura izračunljivosti na $[0,\gamma]$. No postoji beskonačno mnogo takvih struktura. Naime, za svaki racionalni broj $r \in [0,1]$, imamo da su $r\gamma$ i $\gamma - r\gamma = (1-r)\gamma$ lijevo izračunljivi, pa po teoremu 2.3.5 $\mathscr{M}_{r\gamma}$ je separabilna struktura izračunljivosti na $[0,\gamma]$. Preslikavanje $r \mapsto \mathscr{M}_{r\gamma}$ je injektivno: ako su $r,s \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ takvi da je $\mathscr{M}_{r\gamma} = \mathscr{M}_{s\gamma}$, tada je broj $s\gamma - r\gamma$ izračunljiv, a to je moguće ako i samo ako je $r = s$ (za $r \neq s$ imamo $\gamma = \frac{1}{s-r}(s\gamma - r\gamma)$, pa izračunljivost od $s\gamma - r\gamma$ povlači izračunljivost od γ).

(iii) Pretpostavimo da postoji separabilna struktura izračunljivosti na $[0,\gamma]$. Ta struktura mora biti oblika $\mathscr{M}_a$, gdje je $a \in [0,\gamma]$ takav da su a i $\gamma - a$ lijevo izračunljivi brojevi. No γ je zbroj tih brojeva, pa je i γ lijevo izračunljiv. Dakle, ako γ nije lijevo izračunljiv, ne postoji separabilna struktura na $[0,\gamma]$.

■

Vezano za (ii) iz korolara 2.3.7, napomenimo da postoje metrički prostori na kojima ima neprebrojivo mnogo separabilnih struktura izračunljivosti. Primjerice, euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ (za proizvoljan $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) ima to svojstvo. Uočimo da je skup izračunljivih točaka u separabilnoj strukturi izračunljivosti $\mathscr{S}$ uvijek prebrojiv (jer je i $\mathscr{S}$ prebrojiv). Kako je svaka točka iz $\mathbb{R}^n$ izračunljiva u nekoj maksimalnoj (a onda i separabilnoj) strukturi izračunljivosti na $\mathbb{R}^n$, skup svih separabilnih struktura izračunljivosti na $\mathbb{R}^n$ ne može biti prebrojiv.

3. SEPARABILNE STRUKTURE IZRAČUNLJIVOSTI

U ovom poglavlju ćemo se usredotočiti na pitanje jedinstvenosti, odnosno jedinstvenosti do na izometriju separabilnih struktura izračunljivosti. Kao što smo vidjeli u poglavlju 1.3, to pitanje možemo pojednostaviti na način da promatramo dvije relacije ekvivalencije na skupu efektivnih separirajućih nizova. Nadalje, budući da je govoriti o separabilnim strukturama praktički jednako kao govoriti o izračunljivim metričkim prostorima, u ovom poglavlju ćemo se ipak služiti terminologijom iz poglavlja 1.4. Glavni cilj nam je dokazati da vrijedi implikacija

$$(X,d) \text{ efektivno kompaktan} \implies (X,d) \text{ izračunljivo kategoričan},$$

za neke konkretne potprostore euklidskog prostora.

3.1. IZRAČUNLJIVI PODSKUPOVI I IZOMETRIJE

Neka je (X,d) metrički prostor. Podsjetimo se da s $\mathrm{Iso}(X,d)$ označavamo skup svih izometrija od (X,d). Nadalje, za $K \subseteq X$ definiramo skupove

$$\mathrm{Fix}(K,X,d) = \{f \in \mathrm{Iso}(X,d) \mid (\forall x \in K)\ f(x) = x\},$$
$$\mathrm{Sym}(K,X,d) = \{f \in \mathrm{Iso}(X,d) \mid f(K) \subseteq K\}.$$

Ako je jasno o kojem metričkom prostoru se radi, pisat ćemo samo $\mathrm{Fix}(K)$ i $\mathrm{Sym}(K)$.

Sljedeći rezultat je dokazan u [9] (teorem 31).

Teorem 3.1.1. Neka je (X,d,α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor takav da postoji samo konačno mnogo izometrija metričkog prostora (X,d). Neka je β efektivan separirajući niz u (X,d). Tada $\beta \sim \alpha$.

Za teorem koji slijedi treba nam sljedeća činjenica (vidi [20]):

Propozicija 3.1.2. Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor i $f : X \to X$ funkcija takva da $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$, za sve $x,y \in X$. Tada je f surjektivna, to jest f je izometrija prostora (X,d).

Sada ćemo proširiti teorem 3.1.1 sa sljedećim rezultatom:

Teorem 3.1.3. Neka je (X,d,α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor i K izračunljiv skup u (X,d,α) takav da je skup $\mathrm{Sym}(K)$ konačan. Ako je β efektivan separirajući niz u (X,d) takav da je K izračunljiv u (X,d,β), tada $\alpha \sim \beta$.

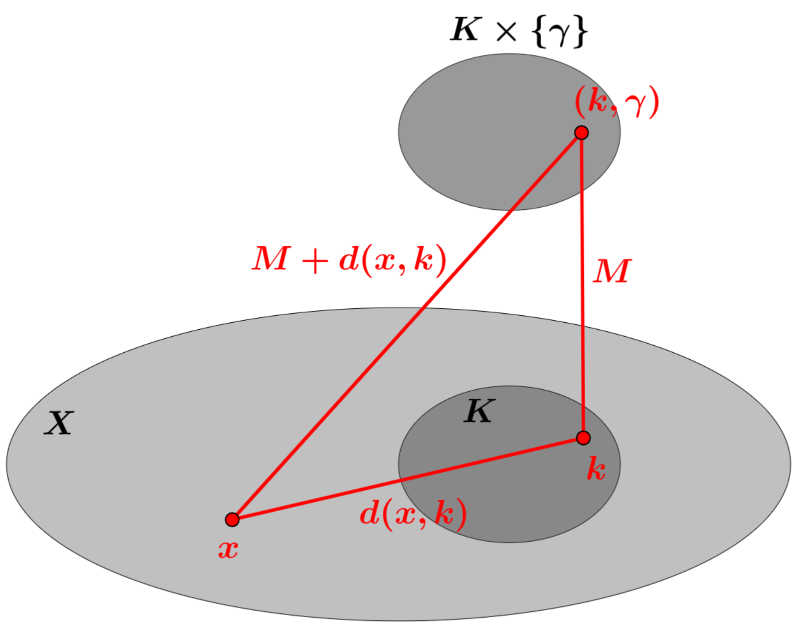
Dokaz. Ako je $K = X$, tada je $\mathrm{Iso}(X,d) = \mathrm{Sym}(X)$ konačan skup, pa da je $\alpha \sim \beta$ slijedi iz teorema 3.1.1.

Pretpostavimo sada $K \neq X$. Uzmimo $M \in \mathbb{N}$ takav da je $M > \mathrm{diam}(X)$ i γ takav da je $X \cap (K \times \{\gamma\}) = \emptyset$.

Neka je $Y = X \cup (K \times \{\gamma\})$ i $D : Y \times Y \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$D(x,y) = d(x,y), \; x,y \in X$$
$$D((k,\gamma),x) = D(x,(k,\gamma)) = M + d(k,x), \; k \in K, x \in X$$
$$D((k_1,\gamma),(k_2,\gamma)) = d(k_1,k_2), \; k_1,k_2 \in K.$$

Na slici 3.1 je vizualni opis skupa Y i funkcije D.



Slika 3.1

Tvrdimo da je D metrika na Y. Od svojstava metrike, jedino je nejednakost trokuta za D netrivijalna za provjeriti.

Neka su $x,y,z \in Y$. Kako bismo dokazali

$$D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y), \tag{3.1}$$

razlikujemo tri slučaja:

- $x,y \in X$

  Ako je $z \in X$, tada nejednakost (3.1) slijedi iz nejednakosti trokuta za metriku d. Ako je $z = (k,\gamma)$ za neki $k \in K$, tada imamo

  $$D(x,z) + D(z,y) = 2M + d(x,k) + d(k,y).$$

  Kako je $D(x,y) = d(x,y) \leq d(x,k) + d(k,y)$ i $M > 0$, zaključujemo da mora vrijediti nejednakost (3.1).

- $x = (k,\gamma)$ za neki $k \in K$, $y \in X$

  Ako je $z \in X$, tada

  $$D(x,y) = M + d(k,y) \leq M + d(k,z) + d(z,y) = D(x,z) + D(z,y).$$

  Ako je $z = (l,\gamma)$ za neki $l \in K$, tada

  $$D(x,y) = M + d(k,y) \leq M + d(k,l) + d(l,y) = M + D(x,z) + d(l,y) = D(x,z) + D(z,y).$$

  Stoga u oba slučaja vrijedi nejednakost (3.1).

- $x = (k,\gamma)$, $y = (l,\gamma)$ za neke $k,l \in K$

  Ako je $z \in X$, tada

  $$D(x,y) = d(k,l) \leq d(k,z) + d(z,l) < D(x,z) + D(z,y).$$

  Ako $z = (m,\gamma)$ za neki $m \in K$, tada

  $$D(x,y) = d(k,l) \leq d(k,m) + d(m,l) = D(x,z) + D(z,y).$$

  Stoga nejednakost (3.1) vrijedi u svakom slučaju.

Pretpostavimo da je $f : Y \to Y$ izometrija metričkog prostora (Y,D). Tvrdimo da

$$f(X) \subseteq X,\ f(K) \subseteq K,\ f(K \times \{\gamma\}) \subseteq K \times \{\gamma\}.$$

Pretpostavimo da $f(K \times \{\gamma\}) \not\subseteq K \times \{\gamma\}$. Tada postoji $k \in K$ takav da $f(k,\gamma) \in X$. Neka je $l \in K$ proizvoljan. Ako je $f(l,\gamma) \in K \times \{\gamma\}$, tada

$$d(k,l) = D((k,\gamma),(l,\gamma)) = D(f(k,\gamma), f(l,\gamma)) \geq M > \operatorname{diam}(X),$$

što je kontradikcija. Stoga, ako $f(K \times \{\gamma\}) \not\subseteq K \times \{\gamma\}$, tada je $f(K \times \{\gamma\}) \subseteq X$. Neka je $k \in K$. Kako

$$M = d(k,(k,\gamma)) = D(f(k), f(k,\gamma))$$

i $f(k,\gamma) \in X$, zaključujemo da je $f(k) \in K \times \{\gamma\}$. Stoga je $f(k) = (l,\gamma)$ za neki $l \in K$ i

$$M = D((l,\gamma), f(k,\gamma)) = M + d(l, f(k,\gamma)).$$

Dakle vrijedi $f(k,\gamma) = l \in K$, pa je u ovom slučaju $f(K \times \{\gamma\}) \subseteq K$ i $f(K) \subseteq K \times \{\gamma\}$. Štoviše, tvrdimo da je $f(X) \subseteq K \times \{\gamma\}$. Naime, ako je $f(x) \in X$, za neki $x \in X$, tada za proizvoljan $k \in K$, zbog $f(k) \in K \times \{\gamma\}$, imamo

$$d(x,k) = D(x,k) = D(f(x), f(k)) > M,$$

što je kontradikcija.

Neka je $p : K \times \{\gamma\} \to K$ projekcija. Uočimo da za $x, y \in X$,

$$d(x,y) = D(x,y) = D(f(x), f(y)) = d(p(f(x)), p(f(y))).$$

Stoga je $p \circ f : X \to X$ funkcija koja čuva udaljenosti i vrijedi $p \circ f(X) \subseteq K$. Kako je X kompaktan, iz propozicije 3.1.2 slijedi da je $p \circ f$ surjekcija. Dakle mora biti $K = X$, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Zaključujemo da je $f(K \times \{\gamma\}) \subseteq K \times \{\gamma\}$. Neka je $k \in K$ proizvoljan. Tada je $f(k,\gamma) = (l,\gamma)$ za neki $l \in K$. Zbog

$$M = D(k,(k,\gamma)) = D(f(k),(l,\gamma)),$$

nužno je $f(k) = l$. Stoga, $f(K) \subseteq K$ i $f(k,\gamma) = (f(k),\gamma)$, za svaki $k \in K$. Analogno kao prije dobivamo $f(X) \subseteq X$. Vidimo da za svaku izometriju f prostora (Y,D), funkcija $g : X \to X$, $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in X$, je dobro definirana izometrija prostora (X,d). Štoviše, $g(K) =$

$f(K) \subseteq K$, pa $g \in \mathrm{Sym}(K)$. Kako je $f(k,\gamma) = (f(k),\gamma)$ za svaki $k \in K$, proizvoljna izometrija f od (Y,D) je određena svojom restrikcijom $f\big|_X$, a postoji samo konačno mnogo mogućnosti za $f\big|_X$. Prema tome, postoji samo konačno mnogo izometrija prostora (Y,D).

Kako bismo sada iskoristili teorem 3.1.1, prvo moramo proširiti niz α do efektivnog separirajućeg niza α' u (Y,D) takvog da je (Y,D,α') efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor. Neka su φ i (x_i) kao u propoziciji 1.4.5 i neka je α' niz u Y definiran s

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, \ i \in 2\mathbb{N} \\ (x_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, \gamma), \ i \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

Kako je α gust u X, a (x_i) gust u K, lako je zaključiti da je α' gust u Y. Štoviše, uočimo da vrijedi

$$D(\alpha'_i, \alpha'_j) = \begin{cases} d(\alpha_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, \alpha_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}), \ i,j \in 2\mathbb{N} \\ M + d(\alpha_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, x_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}), \ i \in 2\mathbb{N}, j \in 2\mathbb{N}+1 \\ M + d(x_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, \alpha_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}), \ i \in 2\mathbb{N}+1, j \in 2\mathbb{N} \\ d(x_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, x_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}), \ i,j \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

Kako je (x_i) izračunljiv niz u (X,d,α), svaka od funkcija u gornjim slučajevima je izračunljiva, pa je prema propoziciji 1.1.1 (vi) α' efektivan niz u (Y,D). Zaključujemo da je (Y,D,α') izračunljiv metrički prostor.

Tvrdimo da je (Y,D,α') efektivno kompaktan. Kako je (X,d,α) efektivno kompaktan, postoji izračunljiva funkcija $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$X = \bigcup_{i=0}^{\psi(k)} B_d(\alpha_i, 2^{-k}),$$

gdje je $B_d(x,r)$ otvorena kugla u (X,d). Također imamo da je za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$K \subseteq \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B_d(x_i, 2^{-k}).$$

Neka je $\vartheta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana s $\vartheta = 2(\varphi + \psi)$. Uočimo da

$$\{\alpha_i \mid 0 \leq i \leq \psi(k)\} \cup \{(x_i,\gamma) \mid 0 \leq i \leq \varphi(k)\} \subseteq \{\alpha'_i \mid 0 \leq i \leq \vartheta(k)\},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema tome,

$$Y = \bigcup_{i=0}^{\vartheta(k)} B(\alpha'_i, 2^{-k}),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Budući da je ϑ izračunljiva funkcija, (Y, D, α') je efektivno kompaktan. Također, postoji samo konačno mnogo izometrija prostora (Y, D), pa prema teoremu 3.1.1, proizvoljan efektivan separairajući niz u (Y, D) je ekvivalentan nizu α'. Definiramo niz β' s

$$\beta'_i = \begin{cases} \beta_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, \ i \in 2\mathbb{N} \\ (y_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, \gamma), \ i \in 2\mathbb{N}+1, \end{cases}$$

gdje je (y_i) izračunljiv niz u (X, d, β) koji je gust u K. Analogno kao za α', može se dokazati da je β' efektivan separirajući niz u (Y, D), pa vrijedi $\alpha' \sim \beta'$. Neka je $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija takva da

$$D(\beta'_i, \alpha'_{F(i,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Kako je $\beta_i = \beta'_{2i}$, β'_{2i} pripada X, pa i $\alpha'_{F(2i,k)}$ mora biti u X (u suprotnom bi njihova udaljenost bila barem M, što je veće od 2^{-k}). Uočimo da iz ovoga slijedi da je $F(2i, k)$ paran broj, za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Sada iz $\alpha_i = \alpha'_{2i}$, $\beta_i = \beta'_{2i}$, slijedi da

$$d(\beta_i, \alpha_{\lfloor \frac{F(2i,k)}{2} \rfloor}) = D(\beta'_{2i}, \alpha'_{2\lfloor \frac{F(2i,k)}{2} \rfloor}) = D(\beta'_{2i}, \alpha'_{F(2i,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Funkcija $(i, k) \mapsto \left\lfloor \frac{F(2i,k)}{2} \right\rfloor$ je izračunljiva, pa vrijedi $\alpha \sim \beta$. ■

Korolar 3.1.4. Pretpostavimo da je (X, d, α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor i $x_0, \ldots, x_n$ izračunljive točke u (X, d, α) takve da je $\mathrm{Sym}(\{x_0, \ldots, x_n\})$ konačan skup. Ako je β efektivan separirajući niz takav da su $x_0, \ldots, x_n$ izračunljive točke u (X, d, β), tada $\alpha \sim \beta$.

Dokaz. Budući da su $x_0, \ldots, x_n$ izračunljive, skup $\{x_0, \ldots, x_n\}$ je izračunljiv u oba spomenuta izračunljiva metrička prostora. Sada tvrdnja slijedi iz teorema 3.1.3. ■

Lema 3.1.5. Neka je (X, d) metrički prostor i K konačan podskup od X. Skup $\mathrm{Sym}(K)$ je konačan ako i samo ako je skup $\mathrm{Fix}(K)$ konačan.

Dokaz. Zbog $\mathrm{Fix}(K) \subseteq \mathrm{Sym}(K)$, jedna implikacija je trivijalna. Pretpostavimo da je $\mathrm{Fix}(K)$ konačan skup i da je kardinalnost skupa K jednaka n. Za svaku permutaciju $\sigma : K \to K$, definiramo skup

$$F_\sigma = \{f \in \mathrm{Sym}(K) \mid f\big|_K = \sigma\}.$$

Očito za identitetu $\mathrm{id} : K \to K$ vrijedi $F_{\mathrm{id}} = \mathrm{Fix}(K)$. Neka je sada $\sigma : K \to K$ proizvoljna permutacija i $f \in F_\sigma$. Budući da je grupa S_K permutacija skupa K konačna grupa reda $n!$, postoji $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da je $\sigma^m = \mathrm{id}$. Za taj m, imamo $f^m\big|_K = \sigma^m = \mathrm{id}$, pa je $f^m \in \mathrm{Fix}(K)$. Nadalje, za proizvoljan $g \in F_\sigma$, vrijedi

$$(f^{m-1} \circ g)\big|_K = (f^{m-1} \circ f)\big|_K = \mathrm{id},$$

pa je $f^{m-1} \circ g \in \mathrm{Fix}(K)$. Preslikavanje $g \mapsto f^{m-1} \circ g$ je injekcija iz F_σ u $\mathrm{Fix}(K)$. Kako je $\mathrm{Fix}(K)$ konačan skup, F_σ je također konačan. Vrijedi

$$\mathrm{Sym}(K) = \bigcup_{\sigma \in S_K} F_\sigma,$$

a unija na desnoj strani je konačna unija konačnih skupova, pa $\mathrm{Sym}(K)$ mora biti konačan. ■

Koristeći upravo dokazanu lemu i prethodni korolar, lako je zaključiti sljedeće:

Korolar 3.1.6. Pretpostavimo da je (X,d,α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor i $x_0,\dots,x_n$ izračunljive točke u (X,d,α) sa svojstvom da postoji samo konačno mnogo izometrija $f : X \to X$ takvih da je $f(x_i) = x_i$, $i = 0,\dots,n$ (to jest $\mathrm{Fix}(\{x_0,\dots,x_n\})$ je konačan skup). Ako je β efektivan separirajući niz takav da su $x_0,\dots,x_n$ izračunljive točke u (X,d,β), tada $\alpha \sim \beta$.

Koristeći prethodni korolar, možemo jednostavno dokazati da je jedinična kružnica izračunljivo kategorična.

Primjer 3.1.7. Neka je S jedinična kružnica u $\mathbb{R}^2$, d euklidska metrika na S i α izračunljiv niz u $\mathbb{R}^2$ koji je gust u S. Budući da je S izračunljiv skup u $\mathbb{R}^2$, iz propozicije 1.4.5 slijedi da je (S,d,α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor. Pretpostavimo da je β efektivan separirajući niz u S i b izračunljiva točka u (S,d,β). Tada postoji rotacija f oko ishodišta takva da je $f(0,1) = b$. Stoga je b izračunljiv s obzirom na β i s obzirom na $f \circ \alpha$, pa kako postoje samo dvije izometrije koje fiksiraju b, prema korolaru 3.1.6, zaključujemo da $\beta \sim f \circ \alpha$.

Prema tome, jedinična kružnica je izračunljivo kategorična.

3.2. ORBITE IZRAČUNLJIVIH TOČAKA

U ovoj točki nam je glavni cilj dokazati da je orbita izračunljive točke pri djelovanju grupom izometrija u efektivno kompaktnom izračunljivom metričkom prostoru nužno koizračunljivo prebrojiv skup. Taj rezultat nije direktno povezan s pitanjem izračunljive kategoričnosti efektivno kompaktnih metričkih prostora, no bit će nam od velike koristi u daljnjim istraživanjima nekih potprostora euklidskog prostora.

3.2.1. Relacije na skupu konačnih nizova

Neka je X skup i neka je $p \in \mathbb{N}$. S $\mathscr{F}^p(X)$ ćemo označavati skup svih funkcija sa $\{0,\dots,p\}$ u X, to jest, skup svih konačnih nizova u X oblika $x_0,\dots,x_p$. Za $x \in \mathscr{F}^p(X)$ definiramo $\text{length}(x) = p$. Nadalje, s $\mathscr{G}(X)$ ćemo označavati skup svih nizova $(v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ u $\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathscr{F}^p(X)$ sa svojstvom da je $\text{length}(v^k) < \text{length}(v^{k+1})$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Ako su $a,b \in \mathscr{F}^p(X)$, pisat ćemo $a \sim_{\text{iso}} b$ ako je

$$d(a_i,a_j) = d(b_i,b_j),$$

za sve $i,j \in \{0,\dots,p\}$. Za $\varepsilon > 0$, pisat ćemo $a \sim_{\text{iso}}^{\leq\varepsilon} b$ ako je

$$|d(a_i,a_j) - d(b_i,b_j)| \leq \varepsilon,$$

za sve $i,j \in \{0,\dots,p\}$. Relacije $\sim_{\text{iso}}$ i $\sim_{\text{iso}}^{\leq\varepsilon}$ na $X^{\mathbb{N}}$ definiramo potpuno analogno. Ako je α niz u X, s $\alpha_{\leq p}$ ćemo označavati konačan niz $\alpha_0,\dots,\alpha_p$.

3.2.2. Koizračunljivo prebrojive orbite

Neka je (X,d) metrički prostor i $x_0 \in X$. **Orbita točke** x_0 u (X,d) je skup

$$\text{Orb}(x_0,X,d) = \{f(x_0) \mid f \in \text{Iso}(X,d)\}.$$

Ako je iz konteksta jasno u kojem metričkom prostoru se nalazimo, pisat ćemo kratko $\text{Orb}(x_0)$.

Sljedeće propozicije i leme će nam pomoći da za izračunljivu točku x_0 izrazimo skup $X \setminus \text{Orb}(x_0)$ u obliku koji je pogodan za rezultate iz propozicije 1.2.1.

Dokaz sljedeće leme se može pronaći u [9] (lema 24).

Lema 3.2.1. Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor i neka je $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gust niz u tom prostoru. Pretpostavimo da je $v = (v^k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{G}(X)$ takav da je

$$v^k \sim_{\text{iso}} \alpha_{\leq \text{length}(v^k)},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tada postoji niz (γ_i) u X sa sljedećim svojstvima:

(i) $(\gamma_i) \sim_{\text{iso}} (\alpha_i)$;

(ii) za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $q \in \mathbb{N}$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da length$(v^l) \geq q$ i

$$d(\gamma_i, v_i^l) < \varepsilon, \forall i \in \{0,\dots,q\}.$$

Propozicija 3.2.2. Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor, α niz gust u (X,d) i $y_0 \in X$. Postoji izometrija $f : X \to X$ takva da je $f(\alpha_0) = y_0$ ako i samo ako za svaki $p \in \mathbb{N}$ postoji $b \in \mathscr{F}^p(X)$ takav da $b \sim_{\text{iso}} \alpha_{\leq p}$ i $b_0 = y_0$.

Dokaz. Ako postoji izometrija $f : X \to X$ takva da je $f(\alpha_0) = y_0$, tada za svaki $p \in \mathbb{N}$, $f \circ \alpha_{\leq p} \in \mathscr{F}^p(X)$, $f \circ \alpha_{\leq p} \sim_{\text{iso}} \alpha_{\leq p}$ i $(f \circ \alpha_{\leq p})_0 = y_0$.

Pretpostavimo da za svaki $p \in \mathbb{N}$ postoji $b^p \in \mathscr{F}^p(X)$ takav da $b^p \sim_{\text{iso}} \alpha_{\leq p}$ i $b_0^p = y_0$. Tada prema lemi 3.2.1, postoji niz γ u X sa svojstvom da je $\gamma \sim_{\text{iso}} \alpha$ i za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $q \in \mathbb{N}$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $l \geq q$ i $d(\gamma_i, b_i^l) < \varepsilon$, za svaki $i \in \{0,\dots,q\}$.

Uočimo da je $b_0^l = y_0$, za svaki $l \in \mathbb{N}$, pa je $d(\gamma_0, y_0) < \varepsilon$, za svaki $\varepsilon > 0$, što povlači da je $\gamma_0 = y_0$. Štoviše, kako je $\gamma \sim_{\text{iso}} \alpha$, možemo definirati izometriju $f : X \to X$ takvu da je $f \circ \alpha = \gamma$. Naime, za $x \in X$, postoji funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $x = \lim_{n\to\infty} \alpha_{\varphi(n)}$. Stoga je niz $(\alpha_{\varphi(n)})$ Cauchyjev, pa iz $\gamma \sim_{\text{iso}} \alpha$ slijedi da je i $(\gamma_{\varphi(n)})$ Cauchyjev. Kako je (X,d) potpun, možemo definirati $f(x) = \lim_{n\to\infty} \gamma_{\varphi(n)}$. Funkcija f je dobro definirana jer za proizvoljnu drugu funkciju $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da je $x = \lim_{n\to\infty} \alpha_{\psi(n)}$ imamo $\lim_{n\to\infty} d(\alpha_{\varphi(n)}, \alpha_{\psi(n)}) = 0$ i stoga $\lim_{n\to\infty} d(\gamma_{\varphi(n)}, \gamma_{\psi(n)}) = 0$, pa je $\lim_{n\to\infty} \gamma_{\psi(n)} = \lim_{n\to\infty} \gamma_{\varphi(n)}$. Nije teško vidjeti da f čuva udaljenosti, pa mora biti izometrija (surjektivnost slijedi iz propozicije 3.1.2), a zbog $f \circ \alpha = \gamma$ vrijedi $f(\alpha_0) = y_0$. ∎

Propozicija 3.2.3. Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor, α niz gust u (X,d) i $y_0 \in X$. Postoji izometrija $f : X \to X$ takva da je $f(\alpha_0) = y_0$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $p \in \mathbb{N}$ postoji $b \in \mathscr{F}^p(X)$ takav da $b \sim_{\text{iso}}^{\leq \varepsilon} \alpha_{\leq p}$ i $d(b_0, y_0) \leq \varepsilon$.

Dokaz. Ako postoji izometrija $f : X \to X$ takva da je $f(\alpha_0) = y_0$, tada prema propoziciji 3.2.2, za svaki $p \in \mathbb{N}$ postoji $b \in \mathscr{F}^p(X)$ takav da $b \sim_{\text{iso}} \alpha_{\leq p}$ i $b_0 = y_0$. Kako $b \sim_{\text{iso}} \alpha_{\leq p}$ povlači $b \sim_{\text{iso}}^{\leq \varepsilon} \alpha_{\leq p}$, za svaki $\varepsilon > 0$, dokazali smo jedan smjer željene ekvivalencije.

Pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $p \in \mathbb{N}$ postoji $b \in \mathscr{F}^p(X)$ takav da $b \sim_{\text{iso}}^{\leq \varepsilon} \alpha_{\leq p}$ i $d(b_0, y_0) \leq \varepsilon$. Prema tome, za fiksan $p \in \mathbb{N}$ postoji niz $(b^k)_{k \in \mathbb{N}}$ u $\mathscr{F}^p(X)$ takav da $b^k \sim_{\text{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p}$ i $d(b_0^k, y_0) \leq 2^{-k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Kako je (X,d) kompaktan, lako je zaključiti da postoji podniz $(b^{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ niza $(b^k)_{k \in \mathbb{N}}$ takav da je svaki od nizova $(b_i^{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentan niz u (X,d), za $i \in \{0, \dots, p\}$. Neka je $w \in \mathscr{F}^p(X)$ takav da

$$w_i = \lim_{n \to \infty} b_i^{k_n}, \ i = 0, \dots, p.$$

Budući da za sve $i, j \in \{0, \dots, p\}$

$$|d(\alpha_i, \alpha_j) - d(b_i^{k_n}, b_j^{k_n})| < 2^{-k_n}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

slijedi da je $d(\alpha_i, \alpha_j) = d(w_i, w_j)$, pa je $w \sim_{\text{iso}} \alpha_{\leq p}$. Osim toga, kako za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(b_0^k, y_0) \leq 2^{-k}$, mora biti $w_0 = y_0$. Niz w možemo pronaći za svaki $p \in \mathbb{N}$, pa prema propoziciji 3.2.2, postoji izometrija $f : X \to X$ takva da je $f(\alpha_0) = y_0$. ■

Ako je A podskup metričkog prostora (X,d) i $\varepsilon > 0$, kažemo da je A **ε-gust** u (X,d) ako $X \prec_\varepsilon A$.

Lema 3.2.4. Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor, α niz gust u (X,d) i $y_0 \in X$. Ne postoji izometrija $f : X \to X$ takva da je $f(\alpha_0) = y_0$ ako i samo ako postoje $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{N}$ i $\frac{\varepsilon}{4}$-gust skup A takav da za svaki $b \in \mathscr{F}^p(A)$ vrijedi $b \not\sim_{\text{iso}}^{\leq \varepsilon} \alpha_{\leq p}$ ili $d(b_0, y_0) > \varepsilon$.

Dokaz. Ako ne postoji izometrija $f : X \to X$ takva da je $f(\alpha_0) = y_0$, prema propoziciji 3.2.3, postoje $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{N}$ s navedenim svojstvima za $A = X$.

Pretpostavimo sada da postoje $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{N}$ i $\frac{\varepsilon}{4}$-gust skup A takav da za svaki $b \in \mathscr{F}^p(A)$ vrijedi $b \not\sim_{\text{iso}}^{\leq \varepsilon} \alpha_{\leq p}$ ili $d(b_0, y_0) > \varepsilon$. Neka je $b \in \mathscr{F}^p(X)$ proizvoljan. Kako je A $\frac{\varepsilon}{4}$-gust, postoji $b' \in \mathscr{F}^p(A)$ takav da je $d(b, b') < \frac{\varepsilon}{4}$.

Ako $b' \not\sim_{\text{iso}}^{\leq \varepsilon} \alpha_{\leq p}$, tada postoje $i, j \in \{0, \dots, p\}$ takvi da

$$|d(b_i', b_j') - d(\alpha_i, \alpha_j)| > \varepsilon.$$

Iz nejednakosti trokuta i $d(b, b') < \frac{\varepsilon}{4}$, slijedi

$$|d(b_i, b_j) - d(b_i', b_j')| \leq d(b_i, b_i') + d(b_j, b_j') < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sada imamo

$$|d(b_i,b_j)-d(\alpha_i,\alpha_j)| \geq |d(b'_i,b'_j)-d(\alpha_i,\alpha_j)| - |d(b_i,b_j)-d(b'_i,b'_j)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

pa zaključujemo $b \not\sim_{\text{iso}}^{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \alpha_{\leq p}$.

S druge strane, ako je $d(b'_0,y_0) > \varepsilon$, tada

$$d(b_0,y_0) \geq d(b'_0,y_0) - d(b_0,b'_0) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stoga smo dokazali da postoji $\varepsilon' > 0$ ($\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$) i $p \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $b \in \mathscr{F}^p(X)$ vrijedi $b \not\sim_{\text{iso}}^{\leq \varepsilon'} \alpha_{\leq p}$ ili $d(b_0,y_0) > \varepsilon'$. Prema propoziciji 3.2.3, ne postoji izometrija $f : X \to X$ sa svojstvom $f(\alpha_0) = y_0$. ■

Lema 3.2.5. Neka je (X,d,α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor, $y_0 \in X$ i $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija takva da je $X = \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B(\alpha_i, 2^{-k})$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Označimo $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{\varphi(k)}\}$ s A_k. Ne postoji izometrija $f : X \to X$ takva da je $f(\alpha_0) = y_0$ ako i samo ako postoje $k, p \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $b \in \mathscr{F}^p(A_{k+2})$ vrijedi $b \not\sim_{\text{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p}$ ili $d(b_0,y_0) > 2^{-k}$.

Dokaz. Kako je A_k 2^{-k}-gust, za svaki $k \in \mathbb{N}$, ako postoje $k, p \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $b \in \mathscr{F}^p(A_{k+2})$ vrijedi $b \not\sim_{\text{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p}$ ili $d(b_0,y_0) > 2^{-k}$, možemo primijeniti lemu 3.2.4 kako bismo zaključili da ne postoji izometrija $f : X \to X$ takva da je $f(\alpha_0) = y_0$.

Ako ne postoji izometrija $f : X \to X$ sa svojstvom $f(\alpha_0) = y_0$, prema propoziciji 3.2.3, postoje $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $b \in \mathscr{F}^p(X)$ vrijedi $b \not\sim_{\text{iso}}^{\leq \varepsilon} \alpha_{\leq p}$ ili $d(b_0,y_0) > \varepsilon$. Ako uzmemo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-k} < \varepsilon$, imamo da za svaki $b \in \mathscr{F}^p(X)$ vrijedi $b \not\sim_{\text{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p}$ ili $d(b_0,y_0) > 2^{-k}$. Budući da je $\mathscr{F}^p(A_{k+2}) \subseteq \mathscr{F}^p(X)$, vidimo da to vrijedi i za svaki $b \in \mathscr{F}^p(A_{k+2})$. ■

Sada imamo sve spremno za dokaz glavnog rezultata:

Teorem 3.2.6. Ako je (X,d,α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor i x_0 izračunljiva točka u tom prostoru, tada je $\text{Orb}(x_0)$ koizračunljivo prebrojiv skup u (X,d,α).

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_0 = \alpha_0$. Naime, ako to ne vrijedi, možemo definirati niz α',

$$\alpha'_i = \begin{cases} x_0, \ i = 0 \\ \alpha_{i-1}, \ i \neq 0. \end{cases}$$

Lako se vidi da je (X,d,α') efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor i da je $\alpha' \sim \alpha$, pa možemo nastaviti s dokazom tvrdnje za taj prostor. Neka je $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija takva da je

$$X = \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B(\alpha_i, 2^{-k}),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Za $k \in \mathbb{N}$, definiramo skup

$$A_k = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{\varphi(k)}\}.$$

Pretpostavimo da je $y_0 \in X \setminus \mathrm{Orb}(x_0)$. Prema lemi 3.2.5, postoje $k, p \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $b \in \mathscr{F}^p(A_{k+2})$ vrijedi $b \not\sim_{\mathrm{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p}$ ili $d(b_0, y_0) > 2^{-k}$. Neka je

$$B = \{b \in \mathscr{F}^p(A_{k+2}) \mid d(b_0, y_0) > 2^{-k}\}.$$

Kako je $\min\{d(b_0, y_0) \mid b \in B\} > 2^{-k}$, postoji $\varepsilon > 0$ takav da

$$\min\{d(b_0, y_0) \mid b \in B\} > 2^{-k} + \varepsilon,$$

što znači da je

$$B(y_0, \varepsilon) \cap \overline{B}(b_0, 2^{-k}) = \emptyset,$$

za svaki $b \in B$ (s $\overline{B}(x, r)$ označavamo zatvorenu kuglu sa središtem x i radijusom r). Uočimo da je $B(y_0, \varepsilon) \subseteq X \setminus \mathrm{Orb}(x_0)$. Naime, za $y \in B(y_0, \varepsilon)$ imamo da za svaki $b \in \mathscr{F}^p(A_{k+2})$ vrijedi $b \not\sim_{\mathrm{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p}$ ili $b \in B$. Budući da je $d(y, b_0) > 2^{-k}$, za svaki $b \in B$, prema lemi 3.2.5, ne postoji izometrija koja preslikava x_0 u y.

Uzmimo $i \in \mathbb{N}$ takav da je $d(y_0, \lambda_i) < \rho_i < \frac{\varepsilon}{2}$ i neka je $b \in B$. Tvrdimo da je $d(b_0, \lambda_i) > 2^{-k} + \rho_i$. Naime, ako je $d(b_0, \lambda_i) \leq 2^{-k} + \rho_i$, dobivamo

$$d(b_0, y_0) \leq d(b_0, \lambda_i) + d(\lambda_i, y_0) < 2^{-k} + \rho_i + \rho_i = 2^{-k} + 2\rho_i < 2^{-k} + \varepsilon,$$

što je u kontradikciji s odabirom broja ε. Sada smo dokazali da ako je $y_0 \in X \setminus \mathrm{Orb}(x_0)$, onda postoje $k, p, i \in \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvima:

(a) za svaki $b \in \mathscr{F}^p(A_{k+2})$ vrijedi $b \not\sim_{\mathrm{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p}$ ili $d(b_0, \lambda_i) > 2^{-k} + \rho_i$;

(b) $y_0 \in I_i$.

Obrnuta implikacija također vrijedi. Naime ako su $k, p, i \in \mathbb{N}$ takvi da vrijede (a) i (b), tada kao prije možemo zaključiti da je

$$I_i \cap \overline{B}(b_0, 2^{-k}) = \emptyset,$$

za svaki $b \in \mathscr{F}^p(A_{k+2})$ takav da je $d(b_0, \lambda_i) > 2^{-k} + \rho_i$. Budući da je $y_0 \in I_i$, za svaki $b \in \mathscr{F}^p(A_{k+2})$ vrijedi $b \not\sim_{\text{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p}$ ili $d(b_0, y_0) > 2^{-k}$, pa $y_0 \in X \setminus \mathrm{Orb}(x_0)$, prema lemi 3.2.5.

Za skup Ω definiran s

$$\Omega = \{i \in \mathbb{N} \mid (\exists p, k \in \mathbb{N})(\forall b \in \mathscr{F}^p(A_{k+2}))(b \not\sim_{\text{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p} \text{ ili } d(b_0, \lambda_i) > 2^{-k} + \rho_i)\},$$

sada možemo zaključiti

$$X \setminus \mathrm{Orb}(x_0) = \bigcup_{i \in \Omega} I_i. \tag{3.2}$$

Neka je

$$\Delta = \{(p,k,i) \in \mathbb{N}^3 \mid (\forall b \in \mathscr{F}^p(A_{k+2}))(b \not\sim_{\text{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p} \text{ ili } d(b_0, \lambda_i) > 2^{-k} + \rho_i)\}.$$

Uočimo da svaki konačan niz $b \in \mathscr{F}^p(A_k)$ možemo napisati u obliku $\alpha[j]$, gdje je

$$\alpha[j] = (\alpha_{(j)_0}, \dots, \alpha_{(j)_{\overline{j}}}),$$

za neki $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\overline{j} = p$ i $(j)_l \leq \varphi(k)$, za svaki $l \in \{0, \dots, \overline{j}\}$. (No uočimo da $\alpha[j]$ nije slika skupa $[j]$ po α.) Lema 1.2.2 osigurava da takav j postoji u $\{0, \dots, \zeta(\varphi(k), p)\}$. Dakle imamo da je

$$\mathscr{F}^p(A_k) = \{\alpha[j] \mid j \in \Psi(p,k)\},$$

gdje je

$$\Psi(p,k) = \{j \in \{0, \dots, \zeta(\varphi(k), p)\} \mid \overline{j} = p,\ (j)_l \leq \varphi(k), \forall l \in \{0, \dots, \overline{j}\}\}.$$

Sada možemo izraziti skup Δ u sljedećem obliku

$$\begin{aligned}
\Delta &= \{(p,k,i) \in \mathbb{N}^3 \mid (\forall j \in \Psi(p,k+2))(\alpha[j] \not\sim_{\text{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p} \text{ ili } d(\alpha_{(j)_0}, \lambda_i) > 2^{-k} + \rho_i)\} \\
&= \{(p,k,i) \in \mathbb{N}^3 \mid (\forall j \in \Psi(p,k+2))((j,p,k) \in \Delta_1 \text{ ili } (j,i,k) \in \Delta_2)\},
\end{aligned}$$

gdje su skupovi Δ_1 i Δ_2 definirani s

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \{(j,p,k) \in \mathbb{N}^3 \mid \alpha[j] \not\sim_{\text{iso}}^{\leq 2^{-k}} \alpha_{\leq p}\}, \\
\Delta_2 &= \{(j,i,k) \in \mathbb{N}^3 \mid d(\alpha_{(j)_0}, \lambda_i) > 2^{-k} + \rho_i\}.
\end{aligned}$$

Da bismo dokazali da je Δ_1 izračunljivo prebrojiv, definiramo skup

$$A = \{(j,p,k,s,r) \in \mathbb{N}^4 \mid |d(\alpha_{(j)_s}, \alpha_{(j)_r}) - d(\alpha_s, \alpha_r)| > 2^{-k},\ s,r \in \{0, \dots, p\}\}.$$

Prema propoziciji 1.1.1 (iii), A je izračunljivo prebrojiv i vrijedi

$$\Delta_1 = \{(j,p,k) \in \mathbb{N}^3 \mid (\exists s,r \in \mathbb{N})(j,p,k,s,r) \in A\} \cup \{(j,p,k) \in \mathbb{N}^3 \mid \overline{j} \neq p\}.$$

Prema teoremu 1.0.1, slijedi da je prvi skup u uniji izračunljivo prebrojiv, a kako je drugi skup izračunljiv, Δ_1 je izračunljivo prebrojiv.

Δ_2 je izračunljivo prebrojiv prema propoziciji 1.1.1 (iii). Sada iz propozicije 1.2.1 slijedi da je Δ izračunljivo prebrojiv. Dakle, prema propoziciji 1.1.1, Ω je izračunljivo prebrojiv, pa iz (3.2), slijedi da je $\mathrm{Orb}(x_0)$ koizračunljivo prebrojiv skup. ■

3.3. Izračunljiva kategoričnost u euklidskom prostoru

U ovoj točki ćemo dokazati izračunljivu kategoričnost nekih efektivno kompaktnih potprostora euklidskog prostora. Uočimo da se, zbog teorema 3.1.1, pri tome možemo ograničiti na prostore s beskonačno izometrija. Također, motivirani primjerom jedinične kružnice 3.1.7 i teoremom 3.2.6, posebno se fokusiramo na prostore sa svojstvom da su orbite njihovih točaka kružnice ili sfere ili njima nešto vrlo slično.

Prvo navedimo neke činjenice o izometrijama euklidskog prostora koje će nam biti korisne u dokazima koji slijede. Podsjetimo se da je dimenzija od $X \subseteq \mathbb{R}^n$, to jest $\dim(X)$, maksimalan broj geometrijski nezavisnih točaka u X.

Propozicija 3.3.1. Neka je X podskup od $\mathbb{R}^n$ i $\dim(X) = n$. Ako je f izometrija od X, tada postoji jedinstvena izometrija F od $\mathbb{R}^n$ koja je proširenje od f.

Dokaz. Postojanje proširenja slijedi iz teorema 11.4 u [25] koji kaže da se proizvoljna izometrija $T : S \to H$ na podskupu S konačnodimenzionalnog Hilbertovog prostora H može proširiti do izometrije na zatvaraču linearne ljuske od S. Jedinstvenost slijedi iz činjenice da je svaka izometrija od $\mathbb{R}^n$ jedinstveno određena svojim vrijednostima na $n+1$ geometrijski nezavisnih točaka (teorem 2 u [19]). ■

Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ promatrat ćemo kao izračunljiv metrički prostor na način opisan u primjeru 1.4.1.

Kažemo da je podskup X od $\mathbb{R}^n$ efektivno kompaktan ako je metrički prostor (X,d) efektivno kompaktan, gdje je d euklidska metrika na X.

Iz teorema 2.2.15 lako dobivamo sljedeći rezultat.

Propozicija 3.3.2. Pretpostavimo da je X podskup od $\mathbb{R}^n$, d euklidska metrika na X i α efektivan separirajući niz u (X,d) takav da je izračunljiv metrički prostor (X,d,α) efektivno kompaktan. Tada postoji izometrija f od $\mathbb{R}^n$ takva da je $f \circ \alpha$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$. Za tu izometriju f, skup $f(X)$ je izračunljiv u $\mathbb{R}^n$.

Iz propozicije 1.3.7 lako dobivamo:

Propozicija 3.3.3. Pretpostavimo da su α i β izračunljivi nizovi u $\mathbb{R}^n$ i $X \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren skup u kojem su i α i β gusti, to jest

$$X = \overline{\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}} = \overline{\{\beta_i \mid i \in \mathbb{N}\}}.$$

Tada $\alpha \sim \beta$.

Od sada nadalje, d će biti euklidska metrika na promatranom podskupu euklidskog prostora.

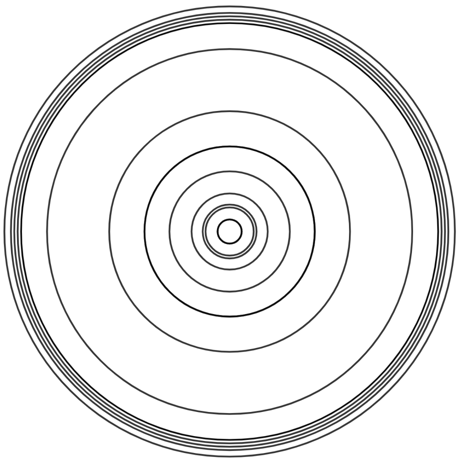
3.3.1. Izračunljiva kategoričnost unija koncentričnih sfera

Za $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$, neka je

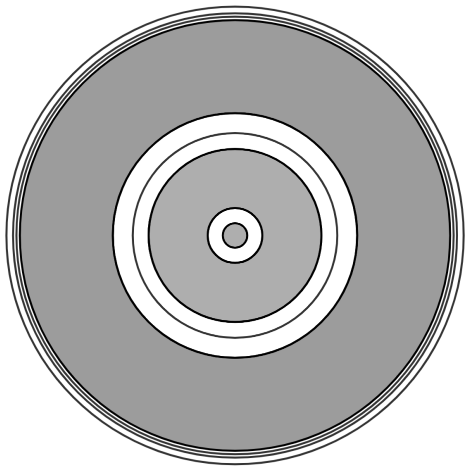
$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) = r\}.$$

Kažemo da je $S(x_0, r)$ **sfera radijusa** r **sa središtem** x_0.

Na slikama 3.2 i 3.3 su neki primjeri koncentričnih sfera u $\mathbb{R}^2$.



Slika 3.2



Slika 3.3

Osim teorema 3.2.6, za dokaz izračunljive kategoričnosti unije koncentričnih sfera će nam biti ključna sljedeća činjenica (posljedica propozicije 3.2 i teorema 6.3 iz [11]):

Teorem 3.3.4. Neka je (X, d, α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor i S koizračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α) koji je, kao potprostor od (X, d), mnogostrukost. Tada je S izračunljiv u (X, d, α).

Teorem 3.3.5. Pretpostavimo da je X efektivno kompaktan podskup od $\mathbb{R}^n$ koji je unija koncentričnih sfera, to jest postoji točka $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $R \subseteq [0, +\infty\rangle$ sa svojstvom

$$X = \bigcup_{r \in R} S(x_0, r).$$

Tada je X izračunljivo kategoričan.

Dokaz. Prvo uočimo da vrijedi

$$\mathrm{Iso}(X) = \{F\big|_X \mid F \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n),\ F(x_0) = x_0\}. \tag{3.3}$$

Naime, za svaku izometriju F od $\mathbb{R}^n$ koja fiksira x_0 očito vrijedi $F(S(x_0, r)) = S(x_0, r)$, za svaki $r \geq 0$, a onda i $F(X) = X$.

S druge strane, prema propoziciji 3.3.1, proizvoljna izometrija f od X se može proširiti do izometrije F od $\mathbb{R}^n$. Kako bismo dokazali da je $F(x_0) = x_0$, prvo dokažimo da F preslikava najveću sferu $S(x_0, r)$ u samu sebe. Neka je M maksimum skupa

$$R = \{d(x_0, x) \mid x \in X\}.$$

M postoji jer je $x \mapsto d(x_0, x)$ neprekidna funkcija s kompaktnom domenom. Tvrdimo da je $2M = \mathrm{diam}(X)$. Kako je $S(x_0, M) \subseteq X$, imamo

$$2M = \mathrm{diam}(S(x_0, M)) \leq \mathrm{diam}(X).$$

Za drugu nejednakost, uočimo da za proizvoljne $x, y \in X$ prema nejednakosti trokuta imamo

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq 2M,$$

pa je $\mathrm{diam}(X) \leq 2M$. Sada dokažimo

$$f(S(x_0, M)) \subseteq S(x_0, M).$$

Za $x \in S(x_0, M)$ i $y = 2x_0 - x \in S(x_0, M)$ imamo $d(x, y) = 2M = \mathrm{diam}(X)$, pa $d(f(x), f(y)) = \mathrm{diam}(X)$. Ako $f(x) \notin S(x_0, M)$, tada $d(f(x), x_0) < M$, pa po nejednakosti trokuta, imamo

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), x_0) + d(x_0, f(y)) < 2M,$$

što je kontradikcija. Sada uočimo da je središte x_0 sfere $S(x_0, M)$ polovište segmenta $\overline{xy}$, gdje su $x, y \in S(x_0, M)$ proizvoljna antipodalne točke (to jest, točke za koje vrijedi $y = 2x_0 - x$). Kako izometrije čuvaju polovišta segmenata, $F(x_0)$ je polovište segmenta

$$\overline{F(x)F(y)} = \overline{f(x)f(y)}.$$

Dakle, $f(x)$ i $f(y)$ leže na sferi $S(x_0,M)$ i $d(f(x),f(y))$ je promjer te sfere. Lako se vidi da je to moguće samo u slučaju kada su $f(x)$ i $f(y)$ antipodalne, pa je polovište segmenta $\overline{f(x)f(y)}$ upravo središte sfere, to jest x_0. Zaključujemo da je $F(x_0) = x_0$.

Uočimo da ako $R = \{0\}$, tada $X = \{x_0\}$. U tom slučaju X je očito izračunljivo kategoričan. Pretpostavimo sada da $R \neq \{0\}$ i da su α i β dva efektivna separirajuća niza u X. Budući da su oba niza α i β gusti u skupu koji sadrži barem jednu sferu $S(x_0,r)$ za $r > 0$, slike oba niza moraju sadržavati po $n+1$ geometrijski nezavisnu točku. Iz propozicije 3.3.2 slijedi da postoje izometrije $f,g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takve da su $f \circ \alpha$ i $g \circ \beta$ izračunljivi nizovi u $\mathbb{R}^n$.

Pretpostavimo da je $x \in X$ izračunljiva točka s obzirom na α. Prema teoremu 3.2.6, orbita od x je koizračunljivo prebrojiv skup. Tvrdimo da je

$$\mathrm{Orb}(x) = S(x_0,r),$$

gdje je $r = d(x,x_0)$. Zbog (3.3), inkluzija $\mathrm{Orb}(x) \subseteq S(x_0,r)$ je očita. S druge strane, za proizvoljan $y \in S(x_0,r)$ postoji rotacija F oko x_0 takva da je $F(x) = y$. Budući da je F izometrija od $\mathbb{R}^n$ koja fiksira x_0, slijedi da je $F\big|_X$ izometrija od X, pa je $y \in \mathrm{Orb}(x)$.

Dakle možemo zaključiti da je $\mathrm{Orb}(x)$ sfera koja je koizračunljivo prebrojiva u (X,d,α). Zbog toga je sfera $f(\mathrm{Orb}(x)) = S(f(x_0),r)$ koizračunljivo prebrojiva u $(f(X),d,f\circ\alpha)$. Kako je $(f(X),d,f\circ\alpha)$ efektivno kompaktan, prema teoremu 3.3.4, $S(f(x_0),r)$ je izračunljiva u $(f(X),d,f\circ\alpha)$. Stoga su prema propoziciji 1.4.5, izračunljive točke iz $(f(X),d,f\circ\alpha)$ guste u $S(f(x_0),r)$, a kako je niz $f\circ\alpha$ izračunljiv u $\mathbb{R}^n$, te točke su izračunljive i u $\mathbb{R}^n$.

Sada imamo da su izračunljive točke iz $\mathbb{R}^n$ guste u $S(f(x_0),r)$, pa ta sfera mora sadržavati $n+1$ geometrijski nezavisnih izračunljivih točaka $a_0,\dots,a_n$. Središte $f(x_0)$ je jedinstvena točka x takva da je $d(x,a_i) = d(x,a_j)$, za $i,j \in \{0,\dots,n\}$, $i \neq j$. Naime, za $i \neq j$, skup

$$\Pi_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a_i) = d(x,a_j)\}$$

je hiperravnina okomita na vektor $a_i - a_j$. Kako su a_i i a_j izračunljive, jednadžba Π_{ij} može se zapisati u obliku $\langle x, a_i - a_j\rangle = b_{ij}$, gdje je $b_{ij} \in \mathbb{R}$ izračunljiv. Budući da je skup $\{a_1 - a_0,\dots,a_n - a_0\}$ linearno nezavisan, presjek ravnina $\Pi_{10},\dots,\Pi_{n0}$ je jedinstvena točka koja je rješenje sustava

$$\begin{aligned}
\langle x, a_1 - a_0 \rangle &= b_{10} \\
\langle x, a_2 - a_0 \rangle &= b_{20} \\
&\vdots \\
\langle x, a_n - a_0 \rangle &= b_{n0}.
\end{aligned}$$

Ta točka je izračunljiva jer su svi koeficijenti gornjeg sustava izračunljivi. Kako $a_0, \dots, a_n$ leže na sferi $S(f(x_0), r)$, očito je je ta točka upravo središte $f(x_0)$, pa vidimo da je središte izračunljiva točka. Analogno dobivamo da je i $g(x_0)$ izračunljiva u $\mathbb{R}^n$. Budući da je

$$f(X) = \bigcup_{r \in R} S(f(x_0), r), \quad g(X) = \bigcup_{r \in R} S(g(x_0), r),$$

očito translacija $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

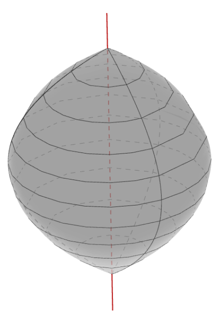
$$t(x) = x + g(x_0) - f(x_0)$$

preslikava $f(X)$ u $g(X)$. Štoviše, $t \circ f \circ \alpha$ je izračunljiv niz jer je $g(x_0) - f(x_0)$ izračunljiv vektor. Sada imamo da su $t \circ f \circ \alpha$ i $g \circ \beta$ dva izračunljiva niza koja su gusta u izračunljivom skupu $g(X)$. Prema propoziciji 3.3.3, zaključujemo da je $t \circ f \circ \alpha \sim g \circ \beta$, što povlači

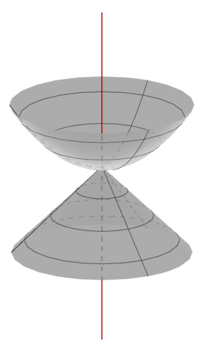
$$\alpha \sim \left((t \circ f)^{-1} \circ g \right) \circ \beta.$$

Lako se vidi da je $(t \circ f)^{-1} \circ g$ izometrija od X, pa smo dokazali da su α i β ekvivalentni do na izometriju. ■

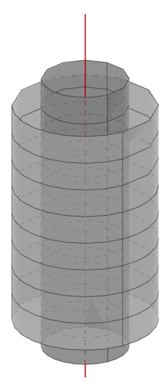
3.3.2. Izračunljiva kategoričnost skupova s pravcem simetrije



Slika 3.4



Slika 3.5



Slika 3.6

Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^3$. Kažemo da je pravac p **pravac simetrije** od X ako je p jedinstveni pravac takav da je $X = \bigcup_{i \in I} S_i$, gdje je $\{S_i \mid i \in I\}$ familija kružnica sa središtima na p koje leže u paralelnim ravninama koje su okomite na p.

Neki primjeri skupova s pravcem simetrije su na slikama 3.4, 3.5 i 3.6.

Nije teško pokazati da je skup s pravcem simetrije zapravo dobiven rotacijom nekog ravninskog lika oko tog pravca. No, nama će od velike koristi biti sljedeća karakterizacija (iako na prvu nije toliko vizualno intuitivna):

Propozicija 3.3.6. Pretpostavimo da je X kompaktan podskup od $\mathbb{R}^3$ i $\dim(X) = 3$. Pravac p je pravac simetrije od X ako i samo ako je p pravac za koji vrijedi jedno od sljedećeg:

$$\operatorname{Iso}(X) = \{F\big|_X \mid F \in \operatorname{Fix}(p, \mathbb{R}^3)\} \tag{3.4}$$

ili postoji jedinstveno zrcaljenje G s obzirom na ravninu okomitu na p takvo da je

$$\operatorname{Iso}(X) = \{F\big|_X \mid F \in \operatorname{Fix}(p, \mathbb{R}^3)\} \cup \{G \circ F\big|_X \mid F \in \operatorname{Fix}(p, \mathbb{R}^3)\}. \tag{3.5}$$

Dokaz. Za ravninu Π, $x_0 \in \Pi$ i $r > 0$ označimo sa $S(x_0, r, \Pi)$ kružnicu sa središtem x_0 i radijusom r koja leži u ravnini Π.

Neka je p pravac sa svojstvom (3.4) ili (3.5). Kako je

$$X = \bigcup_{a \in X} \operatorname{Orb}(a, X),$$

dovoljno je dokazati da je orbita svake točke $a \in X$ kružnica ili unija dviju kružnica koje leže u ravninama okomitim na p sa središtima na p.

Pretpostavimo da je

$$\operatorname{Iso}(X) = \{F\big|_X \mid F \in \operatorname{Fix}(p, \mathbb{R}^3)\}.$$

Neka je $r = d(a, p)$ i neka je $x_0 \in p$ točka takva da je $d(a, x_0) = r$. Uočimo da a leži u ravnini Π koja je okomita na p i siječe p u x_0. Za proizvoljnu izometriju F od $\mathbb{R}^3$, $F(\Pi)$ je ravnina koja prolazi kroz $F(x_0)$ i okomita je na $F(p)$. Stoga za $F \in \operatorname{Fix}(p, \mathbb{R}^3)$ vidimo da je $F(\Pi) = \Pi$, a onda je $\operatorname{Orb}(a, X) \subseteq \Pi$. Nadalje, iz

$$d(F(a), x_0) = d(a, x_0) = r,$$

slijedi da $F(a)$ leži na kružnici sa središtem x_0 i radijusom r. Dakle, dokazali smo

$$\operatorname{Orb}(a, X) \subseteq S(x_0, r, \Pi).$$

S druge strane, za svaku točku $b \in S(x_0, r, \Pi)$, postoji rotacija F oko p takva da je $F(a) = b$. Kako je $F \in \mathrm{Fix}(p, \mathbb{R}^3)$, mora biti $b \in \mathrm{Orb}(a, X)$.

U slučaju

$$\mathrm{Iso}(X) = \{F\big|_X \mid F \in \mathrm{Fix}(p, \mathbb{R}^3)\} \cup \{G \circ F\big|_X \mid F \in \mathrm{Fix}(p, \mathbb{R}^3)\},$$

za neko zrcaljenje G s obzirom na ravninu okomitu na p, $G(\Pi)$ je ravnina koja prolazi kroz $G(x_0)$, okomita je na $G(p) = p$ i za svaku $F \in \mathrm{Fix}(p, \mathbb{R}^3)$, točka $G(F(a))$ leži na kružnici sa središtem $G(x_0)$ i radijusom r u ravnini $G(\Pi)$. Označimo spomenutu kružnicu sa $S(G(x_0), r, G(\Pi))$. Stoga, u ovom slučaju imamo

$$\mathrm{Orb}(a, X) \subseteq S(x_0, r, \Pi) \cup S(G(x_0), r, G(\Pi)).$$

Kako bismo dokazali $S(G(x_0), r, G(\Pi)) \subseteq \mathrm{Orb}(a, X)$, uočimo da iz $G^2 = id$, slijedi da je

$$G(S(G(x_0), r, G(\Pi))) = S(x_0, r, \Pi).$$

Stoga za $b \in S(G(x_0), r, G(\Pi))$, postoji rotacija F oko p takva da je $F(a) = G(b)$, što znači da je $G(F(a)) = G^2(b) = b$, pa $b \in \mathrm{Orb}(a, X)$.

Sada tvrdimo da je p jedinstven pravac takav da X možemo zapisati kao uniju kružnica sa središtima na p koje leže u ravninama okomitim na p. Pretpostavimo da je q neki drugi pravac koji ima spomenuto svojstvo. Lako je provjeriti da je tada

$$\{F\big|_X \mid F \in \mathrm{Fix}(q, \mathbb{R}^3)\} \subseteq \mathrm{Iso}(X).$$

Uzmimo rotaciju F oko q za π. Tada je $F \in \mathrm{Fix}(q, \mathbb{R}^3)$, pa je $F\big|_X \in \mathrm{Iso}(X)$. Kako p ima svojstvo (3.4) ili (3.5), imamo dva slučaja. Prvi je da postoji izometrija $G \in \mathrm{Fix}(p, \mathbb{R}^3)$ takva da je $F\big|_X = G\big|_X$. Budući da postoje četiri geometrijski nezavisne točke u X, imamo $F = G$. Budući da je skup fiksnih točaka od F upravo pravac q i G fiksira točke od p, vidimo da je $p \subseteq q$, a onda $p = q$. Drugi slučaj je da postoji izometrija $G \in \mathrm{Fix}(p, \mathbb{R}^3)$ takva da je $F\big|_X = H \circ G\big|_X$, za neko zrcaljenje H s obzirom na ravninu okomitu na p. Ponovno zaključujemo da je $F = H \circ G$, no ovo je nemoguće budući da skup fiksnih točaka od $H \circ G$ ne može biti pravac.

Pretpostavimo sada da je p pravac simetrije od X. Očito je

$$\{F\big|_X \mid F \in \mathrm{Fix}(p, \mathbb{R}^3)\} \subseteq \mathrm{Iso}(X). \tag{3.6}$$

Neka je f izometrija od X i F izometrija od $\mathbb{R}^3$ koja proširuje f. Budući da izometrije od $\mathbb{R}^3$ čuvaju kuteve, kružnice i pravce, vidimo da je $F(X) = X$ unija kružnica $\{F(S_i) \mid i \in I\}$ sa središtima na pravcu $F(p)$ koje leže u paralelnim ravninama okomitim na $F(p)$. Kako je p jedinstven, mora biti $F(p) = p$.

Sada vidimo da F možemo dobiti komponiranjem nekih od sljedećih izometrija: translacija u smjeru paralelnom s p, rotacija oko p, zrcaljenja s obzirom na ravnine koje sadrže p ili koje su okomite na p. Kako je X kompaktan, omeđen je, pa izometrija F koja preslikava X u samog sebe ne može uključivati translaciju u smjeru paralelnom s p. Naime, ako je $F\big|_p$ translacija, onda za proizvoljan $M > 0$, možemo uzeti kružnicu S_i i preslikati ju s F^n u kružnicu $F^n(S_i)$ koja leži u X, paralelna je sa S_i i udaljenost do S_i (to jest udaljenost središta S_i i $F^n(S_i)$) je veća od M. Stoga, F je kompozicija nekih od izometrija: rotacija oko p, zrcaljenja s obzirom na ravnine koje sadrže p i zrcaljenja s obzirom na ravnine koje su okomite na p.

Uočimo da je $\mathrm{Fix}(p,\mathbb{R}^3)$ zapravo skup svih rotacija oko p i zrcaljenja s obzirom na ravnine koje sadrže p. Također, elementi $\mathrm{Fix}(p,\mathbb{R}^3)$ komutiraju sa zrcaljenjima s obzirom na ravnine okomite na p. Sve navedene tvrdnje lako je provjeriti u slučaju

$$p = \{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Budući da između proizvoljna dva pravca u $\mathbb{R}^3$ postoji izometrija, onda možemo zaključiti da i svaki drugi pravac ima dokazana svojstva.

Dakle vidimo da F ili pripada $\mathrm{Fix}(p,\mathbb{R}^3)$ ili je kompozicija $G \circ H$, za neko zrcaljenje G s obzirom na ravninu okomitu na p i $H \in \mathrm{Fix}(p,\mathbb{R}^3)$. Nadalje, uočimo da u ovom drugom slučaju svaka kompozicija oblika $G \circ H'\big|_X$, za $H' \in \mathrm{Fix}(p,\mathbb{R}^3)$, mora biti u $\mathrm{Iso}(X)$ jer je

$$G\big|_X = (G \circ H)\big|_X \circ H^{-1}\big|_X \in \mathrm{Iso}(X).$$

Jedino preostalo za provjeriti je da ne postoje dva zrcaljenja s obzirom na ravnine okomite na p koje generiraju $\mathrm{Iso}(X)$. Pretpostavimo da postoje dva zrcaljenja G_1, G_2 s obzirom na ravnine okomite na p takve da je $G_1(H_1(X)) = X$ i $G_2(H_2(X)) = X$, za neke $H_1, H_2 \in \mathrm{Fix}(p,\mathbb{R}^3)$. Iz (3.6), slijedi da je $G_1(X) = X$, $G_2(X) = X$. No onda $G_1 \circ G_2(X) = X$ i $G_1 \circ G_2$ je restringirana na p translacija, što je nemoguće. Dakle, postoji najviše jedno zrcaljenje G s obzirom na ravninu okomitu na p takvo da svako proširenje izometrije od X možemo napisati u obliku $G \circ H$, za neku $H \in \mathrm{Fix}(p,\mathbb{R}^3)$. ■

Za sljedeću propoziciju, trebat će nam sljedeći rezultat (korolar 7.6 iz [5]):

Teorem 3.3.7. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja i kompaktne zatvorene kugle te neka je M 1-mnogostrukost u (X,d) koja ima konačno mnogo komponenti povezanosti. Ako je M koizračunljivo prebrojiva u (X,d,α), tada je M izračunljivo prebrojiva u (X,d,α).

Ovdje *svojstvo efektivnog pokrivanja* znači da je skup

$$\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid \widehat{I_i}\subseteq J_j\}$$

izračunljivo prebrojiv (ovdje $\widehat{I_i}$ označava zatvorenu kuglu s radijusom i središtem kao kugla I_i). Može se pokazati da $\mathbb{R}^n$ ima svojstvo efektivnog pokrivanja (dokazano u [8]).

Propozicija 3.3.8. Ako je X izračunljiv skup u $\mathbb{R}^3$ koji sadrži barem dvije točke i p je pravac simetrije od X, tada je p izračunljivo prebrojiv.

Dokaz. Kako je X izračunljiv, izračunljive točke su guste u X (propozicija 1.4.5), pa u svakom slučaju postoje dvije izračunljive točke $a,b\in X$. Ako $a,b\in p$, tada je

$$p=\{a+t(b-a)\mid t\in\mathbb{R}\}.$$

Ako je q izračunljiv niz racionalnih brojeva čija slika je $\mathbb{Q}$, imamo da je niz

$$x_i=a+q_i(b-a),\ i\in\mathbb{N}$$

izračunljiv i gust u p, pa je p izračunljivo prebrojiv prema propoziciji 1.4.3.

Pretpostavimo da barem jedna od točaka nije na pravcu p, neka je to točka a. U dokazu propozicije 3.3.6 vidjeli smo da je $\mathrm{Orb}(a,X)$ ili kružnica ili unija dviju disjunktnih kružnica. Kako je X izračunljiv u $\mathbb{R}^3$, prema propoziciji 1.4.5, postoji izračunljiv niz α u $\mathbb{R}^3$ koji je gust u X sa svojstvom da je (X,d,α) efektivno kompaktan. Prema teoremu 3.2.6, $\mathrm{Orb}(a,X)$ je koizračunljivo prebrojiv skup u (X,d,α). U svakom slučaju, $\mathrm{Orb}(a,X)$ je mnogostrukost, pa je prema teoremu 3.3.4, izračunljiv skup u (X,d,α). Zbog toga su izračunljive točke svakako guste u $\mathrm{Orb}(a,X)$ (prema propoziciji 1.4.5). Dakle, ako je kružnica radijusa r sa središtem $x_0\in p$ koja leži u ravnini Π okomitoj na p, $S(x_0,r,\Pi)$, jedna od kružnica u orbiti, moraju postojati tri izračunljive točke $a_1,a_2,a_3\in S(x_0,r,\Pi)$.

Tvrdimo da je

$$p=\{x\in\mathbb{R}^3\mid d(x,a_1)=d(x,a_2)=d(x,a_3)\}.$$

Budući da je p okomit na Π i prolazi kroz središte x_0 od $S(x_0,r,\Pi)$, za svaki $x\in p$ trokuti xx_0a_1, xx_0a_2, xx_0a_3 su pravokutni te imaju katete jednake duljine, pa moraju biti sukladni. Stoga $d(x,a_1)=d(x,a_2)=d(x,a_3)$.

Pretpostavimo sada da je $x \in \mathbb{R}^3$ takav da je $d(x,a_1) = d(x,a_2) = d(x,a_3)$. Skupovi

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x,a_1) = d(x,a_2)\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x,a_2) = d(x,a_3)\}$$

su ravnine koje raspolavljaju segmente $\overline{a_1a_2}$ i $\overline{a_2a_3}$. Te ravnine nisu paralelne jer a_1,a_2,a_3 leže na kružnici, pa spomenuti segmenti nisu paralelni. Dakle presjek tih ravnina je pravac q. Taj pravac je okomit na $\overline{a_1a_2}$ i $\overline{a_2a_3}$, pa je okomit i na ravninu Π i siječe je u x_0. Stoga $q = p$.

Stoga imamo da je

$$p = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x,a_1) - d(x,a_2) = 0)\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x,a_2) - d(x,a_3) = 0\}.$$

Budući da su $x \mapsto d(x,a_1) - d(x,a_2)$ i $x \mapsto d(x,a_2) - d(x,a_3)$ izračunljive funkcije iz $\mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}$, skupovi njihovih nultočaka su koizračunljivo prebrojivi (vidi [24]), pa je p koizračunljivo prebrojiv. Kako je p 1-mnogostrukost, prema teoremu 3.3.7, p je izračunljivo prebrojiv. ■

Neka je (X,d,α) metrički prostor i $f : X \to X$. Kažemo da je f **izračunljiva izometrija** od (X,d,α) ako je f izometrija prostora (X,d) sa svojstvom da je za svaki izračunljiv niz β u (X,d,α) niz $f \circ \beta$ također izračunljiv u (X,d,α).

Teorem 3.3.9. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^3$ efektivno kompaktan metrički prostor s pravcem simetrije p. Tada je X izračunljivo kategoričan.

Dokaz. Neka su α i β dva efektivna separirajuća niza u X. Prema propoziciji 3.3.2, postoje izometrije $f,g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takve da su $f \circ \alpha$ i $g \circ \beta$ izračunljivi nizovi u $\mathbb{R}^3$ te $f(X)$ i $g(X)$ izračunljivi skupovi u $\mathbb{R}^3$. Tada su pravci $f(p)$ i $g(p)$ pravci simetrije tih skupova, a prema propoziciji 3.3.8, dobivamo da su $f(p)$ i $g(p)$ izračunljivo prebrojivi.

Sada uočimo da postoje izračunljive izometrije od $\mathbb{R}^3$ koje preslikavaju pravce $f(p)$ i $g(p)$ u z-os, to jest u pravac $\{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Navedene izometrije možemo dobiti na sljedeći način. Kako je $f(p)$ izračunljivo prebrojiv, postoje dvije izračunljive točke $a,b \in f(p)$. Vektor $v = \frac{b-a}{\|b-a\|}$ je vektor smjera od $f(p)$, izračunljiv je i koristeći Gram-Schmidtov postupak možemo dobiti izračunljive vektore $u_1,u_2 \in \mathbb{R}^3$ takve da je $\{v,u_1,u_2\}$ ortonormirana baza za $\mathbb{R}^3$. Linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takav da je

$$A(v) = (0,0,1),\ A(u_1) = (1,0,0),\ A(u_2) = (0,1,0)$$

je ortogonalan i po njegovom matričnom prikazu jednostavno je zaključiti da je izračunljiv. A preslikava pravac kroz $(0,0,0)$ koji je paralelan pravcu $f(p)$ u z-os. Budući da za translaciju $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$t(x) = x - a,$$

imamo da $t(f(p))$ prolazi kroz $(0,0,0)$ i paralelan je $f(p)$, slijedi da je $h = A \circ t$ izračunljiva izometrija koja preslikava $f(p)$ u z-os. Analogno zaključujemo da postoji izračunljiva izometrija $h' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ koja preslikava $g(p)$ u z-os.

Neka je $F_1 = h \circ f$, $F_2 = h' \circ g$ i $X_1 = F_1(X)$, $X_2 = F_2(X)$. X_1 i X_2 su izračunljivi skupovi u $\mathbb{R}^3$ kojima je z-os pravac simetrije.

Neka je $P : \mathbb{R}^3 \to p$ ortogonalna projekcija na pravac p. Tada je $P(X)$ kompaktan, pa postoje točke $s,t \in p$ takve da je

$$d(s,t) = \operatorname{diam}(P(X)).$$

S druge strane, definirajmo brojeve

$$m_i = \min Q(X_i),\ M_i = \max Q(X_i),\ i = 1,2,$$

gdje je $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ projekcija $Q(x,y,z) = z$. Uočimo da je za $i = 1,2$, dijametar ortogonalne projekcije skupa X_i na njegov pravac simetrije upravo $M_i - m_i$. Kako izometrije čuvaju ortogonalne projekcije i dijametre, vidimo da je

$$d(s,t) = M_i - m_i,\ i = 1,2.$$

Štoviše, F_i preslikava skup $\{s,t\}$ u $\{(0,0,m_i),(0,0,M_i)\}$. Budući da je

$$d(F_1(s),F_1(t)) = d(s,t) = d(F_2(s),F_2(t)),$$

lako je vidjeti da postoji izometrija $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takva da je

$$G(F_1(s)) = F_2(s),\ G(F_1(t)) = F_2(t). \tag{3.7}$$

Nadalje, kako su m_1, m_2, M_1, M_2 minimumi i maksimumi izračunljivih skupova, izračunljivi su, pa postoji i izračunljiva izometrija G s tim svojstvom.

Sada imamo da je $F_2^{-1} \circ G \circ F_1$ izometrija od $\mathbb{R}^3$ koja prema (3.7) fiksira točke s i t pravca p. Slijedi da $F_2^{-1} \circ G \circ F_1$ mora biti u skupu $\operatorname{Fix}(p)$, pa po propoziciji 3.3.6, $F_2^{-1} \circ G \circ F_1(X) = X$. Vrijedi $G(F_1(X)) = F_2(X)$, pa su $G \circ F_1 \circ \alpha$ i $F_2 \circ \beta$ efektivni separirajući nizovi u izračunljivom skupu $F_2(X)$. Stoga prema propoziciji 3.3.3, ti nizovi su ekvivalentni, a onda su α i β ekvivalentni do na izometriju. ∎

3.3.3. Izračunljiva kategoričnost u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Sada ćemo vidjeti da teoremi 3.3.5 i 3.3.9 zapravo povlače izračunljivu kategoričnost efektivno kompaktnih podskupova od $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. Kako bismo to zaključili, moramo prvo opisati podskupove od $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ koji imaju beskonačno mnogo izometrija. Iako se to možda na prvu čini kao već dobro istražena tematika, koliko je nama poznato, u literaturi dosad nije dana karakterizacija takvih skupova.

U ovoj točki, za $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pisat ćemo $\mathrm{Sym}(X)$ za $\mathrm{Sym}(X, \mathbb{R}^n, d)$, gdje je d euklidska metrika.

Propozicija 3.3.10. Ako je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktan skup takav da je $\dim(X) = n$, grupe $\mathrm{Sym}(X)$ i $\mathrm{Iso}(X)$ su izomorfne.

Dokaz. Tvrdimo da je $F \mapsto F\big|_X$ izomorfizam $\mathrm{Sym}(X) \to \mathrm{Iso}(X)$. Naime, za proizvoljnu $F \in \mathrm{Sym}(X)$ imamo $F(X) \subseteq X$ i X je kompaktan, pa iz propozicije 3.1.2, možemo zaključiti da je $F(X) = X$. Dakle, navedeno preslikavanje zaista ima sliku u $\mathrm{Iso}(X)$. Nadalje, očito je homomorfizam, a da je izomorfizam slijedi iz propozicije 3.3.1. ∎

Prethodna propozicija će nam biti od velike pomoći u analiziranju izometrija od X jer vidimo da svaku izometriju od X možemo identificirati s nekom izometrijom od $\mathbb{R}^n$.

Sada ćemo navesti neke činjenice o izometrijama od $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, njihovi dokazi se mogu pronaći u [19].

Svaka izometrija od $\mathbb{R}^2$ je nešto od sljedećeg: identiteta, translacija, zrcaljenje s obzirom na pravac (ili osna simetrija), rotacija oko točke ili klizna simetrija. Klizna simetrija u $\mathbb{R}^2$ je kompozicija osne simetrije i translacije u smjeru njene osi. Kažemo da je trivijalna ako je vektor translacije jednak $(0,0)$, to jest ako je osna simetrija.

U tablici ispod su opisani skupovi fiksnih točaka svih navedenih vrsta izometrija u $\mathbb{R}^2$, pritom za sve vrste mislimo na njihovu netrivijalnu varijantu.

izometrija	**skup fiksnih točaka**
identiteta	$\mathbb{R}^2$
translacija	$\emptyset$
osna simetrija s obzirom na p	p
rotacija oko T	$\{T\}$
klizna simetrija	$\emptyset$

Svaka izometrija od $\mathbb{R}^3$ je nešto od sljedećeg: identiteta, translacija, zrcaljenje s obzirom na ravninu, rotacija oko pravca, klizna simetrija, rotirana translacija ili rotirana simetrija. Klizna simetrija u $\mathbb{R}^3$ je kompozicija zrcaljenja s obzirom na ravninu i translacije u smjeru paralelnom s tom ravninom. Rotirana translacija je kompozicija rotacije oko pravca i translacije u smjeru tog pravca. Za kliznu simetriju i rotiranu translaciju kažemo da su trivijalne ako im je vektor za koji translatiramo jednak $(0,0,0)$. Rotirana simetrija je kompozicija zrcaljenja s obzirom na ravninu i rotacije oko pravca okomitog na tu ravninu.

Kao i za $\mathbb{R}^2$, u tablici ispod opisujemo skupove fiksnih točaka svih navedenih vrsta izometrija u $\mathbb{R}^3$, pritom ponovno za sve vrste mislimo na njihovu netrivijalnu varijantu.

izometrija	**skup fiksnih točaka**
identiteta	$\mathbb{R}^3$
translacija	$\emptyset$
zrcaljenje s obzirom na Π	Π
rotacija oko p	p
klizna simetrija	$\emptyset$
rotirana translacija	$\emptyset$
rotirana simetrija s obzirom na Π i p	$p \cap \Pi$

Lema 3.3.11. Pretpostavimo da je $X \neq \emptyset$ omeđen podskup od $\mathbb{R}^n$.

(i) Ako je $n = 2$, $\mathrm{Sym}(X)$ ne sadrži netrivijalne translacije ni netrivijalne klizne simetrije.

(i) Ako je $n = 3$, $\mathrm{Sym}(X)$ ne sadrži netrivijalne translacije ni netrivijalne klizne simetrije ni netrivijalne rotirane translacije.

Dokaz.

(i) Fiksirajmo $x_0 \in X$ i neka je $M > 0$ takav da $X \subseteq B(x_0, M)$. Pretpostavimo da postoji translacija $t \in \mathrm{Sym}(X)$ takva da je $t(x) = x + a$ za neki $a \neq (0,0)$. Sada imamo da je $t^n(x_0) = x_0 + na \in X$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa mora biti

$$M > d(x_0, t^n(x_0)) = n\|a\|,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, što je očito kontradikcija. Dakle takva translacija u $\mathrm{Sym}(X)$ ne može postojati.

Lako je provjeriti da je za netrivijalnu kliznu simetriju f, kompozicija $f^2 = f \circ f$ netrivijalna translacija, pa možemo zaključiti i da $\mathrm{Sym}(X)$ ne sadrži netrivijalnu kliznu simetriju.

(ii) Analogno kao za $n = 2$ zaključujemo da $\mathrm{Sym}(X)$ ne sadrži netrivijalne translacije ni netrivijalne klizne simetrije. Za netrivijalnu rotiranu translaciju f koja uključuje translaciju za vektor $a \neq (0,0,0)$, jednostavno je provjeriti da je za sve $x \in \mathbb{R}^3$, $d(f(x),x) \geq \|a\|$. Kako je f^n također rotirana translacija s translacijom za na, vrijedi

$$d(f^n(x),x) \geq n\|a\|,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada analogno kao u (i) dobivamo kontradikciju s omeđenosti skupa, pa vidimo $f \notin \text{Sym}(X)$.

■

Propozicija 3.3.12. Ako je $n \in \{2,3\}$ i $X \neq \emptyset$ omeđen podskup od $\mathbb{R}^n$, postoji $x_0 \in \mathbb{R}^n$ takav da je $f(x_0) = x_0$, za sve $f \in \text{Sym}(X)$.

Dokaz. Po teoremu 5.1 u [1], grupa $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ je fiksirajuća za $n \in \{2,3\}$. To znači da ako svi elementi u podgrupi H od $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ imaju fiksnu točku, onda postoji zajednička fiksna točka svih elemenata od H. $\text{Sym}(X)$ je očito podgrupa od $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$, a prema lemi 3.3.11, $\text{Sym}(X)$ sadrži samo izometrije koje imaju fiksnu točku. Stoga postoji zajednička fiksna točka, to jest $x_0 \in \mathbb{R}^n$ takva da je $f(x_0) = x_0$, za sve $f \in \text{Sym}(X)$. ■

Za omeđen neprazan $X \subseteq \mathbb{R}^n$, točku x_0 takvu da je $f(x_0) = x_0$, za sve $f \in \text{Sym}(X)$ zvat ćemo **središte od** X. Uočimo da točka x_0 ne mora biti jedinstvena.

Tvrdnja sljedeće propozicije slijedi iz Arzelá-Ascoli teorema (vidi [17]).

Propozicija 3.3.13. U kompaktnom metričkom prostoru (X,d), funkcija

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x),g(x))$$

je metrika na $\text{Iso}(X,d)$. Metrički prostor $(\text{Iso}(X,d), d_\infty)$ je kompaktan.

Za $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f,g \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ neka je

$$d_A(f,g) = \sup_{x \in A} d(f(x),g(x)),$$
$$d_\infty(f,g) = d_{\mathbb{R}^3}(f,g).$$

Navedeni supremumi općenito ne moraju biti konačni. Također, lako je vidjeti da za proizvoljan $h \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$,

$$d_A(h \circ f, h \circ g) = d_A(f,g). \tag{3.8}$$

Do kraja ove točke pretpostavljamo da je $n \in \{2,3\}$, X kompaktan podskup od $\mathbb{R}^n$ i x_0 središte od X. Također fiksiramo neki $R > 1$ takav da je $X \subseteq \overline{B}(x_0,R)$ i definiramo $B = \overline{B}(x_0,R)$.

Pretpostavimo da je $\dim X = n$. Prema propoziciji 3.3.10, svaka izometrija $f \in \mathrm{Iso}(X)$ može se na jedinstven način proširiti do izometrije F od $\mathbb{R}^n$. Budući da F fiksira x_0, vrijedi $F(B) \subseteq B$. Kako je B kompaktan, prema propoziciji 3.1.2, mora biti $F(B) = B$, pa je $F \in \mathrm{Sym}(B)$. Sada imamo da je $F\big|_B \in \mathrm{Iso}(B)$. Stoga se svaka izometrija f od X može proširiti do izometrije $\overline{f}$ od B. Navedeno proširenje mora biti jedinstveno zbog jedinstvenosti proširenja f na izometriju od $\mathbb{R}^n$.

Sljedeća lema govori o svojstvima funkcije $\mathrm{Iso}(X) \to \mathrm{Iso}(B)$, $f \mapsto \overline{f}$, koja jednostavno slijede iz jedinstvenosti proširenja $\overline{f}$.

Lema 3.3.14. Ako su $f, g \in \mathrm{Iso}(X)$ i $\dim(X) = n$, tada

(i) $\overline{f \circ g} = \overline{f} \circ \overline{g}$;

(ii) $\overline{\mathrm{id}_X} = \mathrm{id}_B$;

(iii) $\overline{f^{-1}} = \overline{f}^{-1}$.

Lema 3.3.15. Neka je $\dim(X) = n$, (g_n) niz u $\mathrm{Iso}(X)$ te $h \in \mathrm{Iso}(X)$. Tada $g_n \to h$ u $\mathrm{Iso}(X)$ ako i samo ako $\overline{g_n} \to \overline{h}$ u $\mathrm{Iso}(B)$.

Dokaz. $\overline{g_n} \to \overline{h}$ povlači $g_n \to h$ zbog činjenice da je

$$d_X(f_1, f_2) \leq d_B(\overline{f_1}, \overline{f_2}),$$

za sve $f_1, f_2 \in \mathrm{Iso}(X)$.

Za drugi smjer, uočimo da je zbog (3.8) i leme 3.3.14 dovoljno dokazati da $f_n \to \mathrm{id}_X$ povlači $\overline{f_n} \to \mathrm{id}_B$. Pretpostavimo da postoji niz (f_n) u $\mathrm{Iso}(X)$ takav da $f_n \to \mathrm{id}_X$ i $\overline{f_n} \not\to \mathrm{id}_B$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ i podniz $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ takav da $d_B(\overline{f_{n_i}}, \mathrm{id}_B) \geq \varepsilon$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Kako je $(\mathrm{Iso}(B), d_B)$ kompaktan prema propoziciji 3.3.13, slijedi da postoji podniz (l_k) niza (f_{n_i}) takav da je niz $(\overline{l_k})$ konvergentan. Pretpostavimo da $\overline{l_k} \to h$. Budući da je $d_B(\overline{l_k}, \mathrm{id}_B) \geq \varepsilon$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, očito mora biti $h \neq \mathrm{id}_B$. S druge strane, iz $l_k \to \mathrm{id}_X$, slijedi da $l_k(x) \to x$, za svaki $x \in X$. Stoga je $h\big|_X = \mathrm{id}_X$ i $h \neq \mathrm{id}_B$ što je u kontradikciji s (ii) iz leme 3.3.14 i jedinstvenosti proširenja od id_X. ∎

Lema 3.3.16. Ako je $\dim(X) = n$ i $\mathrm{Iso}(X)$ je beskonačna, tada za svaki $\varepsilon > 0$

(i) postoje $f, g \in \mathrm{Iso}(X)$, $f \neq g$ takve da je $d_X(f, g) < \varepsilon$;

(ii) postoji $f \in \mathrm{Iso}(X)$, $f \neq \mathrm{id}_X$ takva da je $d_X(f, \mathrm{id}_X) < \varepsilon$;

(iii) postoji $f \in \mathrm{Iso}(X)$, $f \neq \mathrm{id}_X$ takva da je $d_B(\overline{f}, \mathrm{id}_B) < \varepsilon$.

Dokaz.

(i) Pretpostavimo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za sve $f, g \in \mathrm{Iso}(X)$, $f \neq g$, $d_X(f, g) \geq \varepsilon$. Ovo povlači da je $\{f\} = B(f, \varepsilon)$, za svaku $f \in \mathrm{Iso}(X)$, to jest $\{f\}$ je otvoren skup u $\mathrm{Iso}(X)$. Dakle
$$\mathscr{F} = \{\{f\} \mid f \in \mathrm{Iso}(X)\}$$
je otvoren pokrivač od $\mathrm{Iso}(X)$, koji je prema propoziciji 3.3.13 kompaktan, pa postoji konačan podskup od $\mathscr{F}$ koji je također otvoren pokrivač od $\mathrm{Iso}(X)$. No iz ovoga očito dobivamo da je $\mathrm{Iso}(X)$ konačna, što je kontradikcija s pretpostavkom.

(ii) Slijedi iz (i) jer je $d_X(f, g) = d_X(g^{-1} \circ f, \mathrm{id}_X)$.

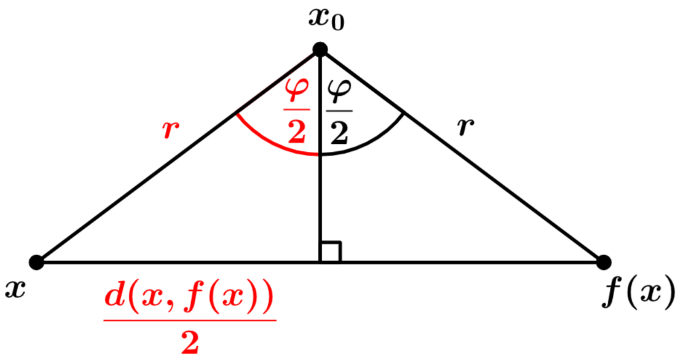
(iii) Pretpostavimo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaku $f \in \mathrm{Iso}(X)$, $f \neq \mathrm{id}_X$, $d_B(\overline{f}, \mathrm{id}_B) \geq \varepsilon$. S druge strane, prema (ii), postoji niz (f_n) u $\mathrm{Iso}(X)$, $f_n \neq \mathrm{id}_X$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, takav da $f_n \to \mathrm{id}_X$. Iz leme 3.3.15, slijedi $\overline{f_n} \to \mathrm{id}_B$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $d_B(\overline{f_n}, \mathrm{id}_B) \geq \varepsilon$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

■

Ako je dimenzija n promatranog prostora $\mathbb{R}^n$ jednaka 2, tada za $\varphi \in \mathbb{R}$, skup svih rotacija oko središta x_0 od X za kut φ ćemo označavati s R_φ. Ako je $n = 3$ i p je proizvoljan pravac, tada će $R_{p,\varphi}$ biti skup svih rotacija oko p za kut φ. U svakom slučaju, ako je $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, postoje dvije takve rotacije - „u smjeru kazaljke na satu" i „obrnuto od smjera kazaljke na satu". Također, uočimo da će svaka rotacija biti u sadržana u R_φ, odnosno $R_{p,\varphi}$, za neki kut $\varphi \in [0, \pi]$.

Lema 3.3.17. Ako je $f \in \mathrm{Iso}(B)$ rotacija za kut $\varphi \in [0, \pi]$, tada je
$$d_B(f, \mathrm{id}_B) = 2R \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Dokaz. Za proizvoljan $x \in S(x_0, r)$, $r \leq R$, promatrajući jednakokračni trokut s vrhovima x i $f(x)$ koji ima kut između krakova jednak φ (slika 3.7), lako dobivamo duljinu treće stranice, to jest da je
$$d(x, f(x)) = 2r \sin \frac{\varphi}{2}.$$



Slika 3.7

Ova udaljenost je najveća za $r = R$. ■

Lema 3.3.18. Neka je $f \in \mathrm{Iso}(B)$ takva da je $d_B(f, \mathrm{id}_B) < R$.

(i) Ako je $n = 2$, tada je $f \in R_\varphi$, za neki $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

(ii) Ako je $n = 3$, tada je $f \in R_{p,\varphi}$, za neki pravac p kroz x_0 i $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Dokaz.

(i) U ovom slučaju, $\mathrm{Iso}(B)$ se sastoji od svih rotacija oko x_0 i zrcaljenja s obzirom na pravce koji prolaze kroz x_0. Za proizvoljno zrcaljenje $g \in \mathrm{Iso}(B)$ lako se vidi da je $d_B(g, \mathrm{id}_B) = 2R$, pa f mora biti rotacija. Prema lemi 3.3.17 kut rotacije f mora biti u intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

(ii) U tri dimenzije, izometrije od $\mathrm{Iso}(B)$ su: rotacije oko pravaca kroz x_0, zrcaljenja s obzirom na ravnine kroz x_0 ili kompozicije rotacije oko pravca p kroz x_0 i zrcaljenja s obzirom na ravninu kroz x_0 koja je okomita p. Nije teško vidjeti da ako $g \in \mathrm{Iso}(B)$ uključuje neko zrcaljenje, tada mora biti $d_B(g, \mathrm{id}_B) \geq 2R$. Stoga f može biti jedino rotacija i prema lemi 3.3.17, kut mora biti u intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

■

Propozicija 3.3.19. Pretpostavimo da je $\dim(X) = n$ i da je $\mathrm{Iso}(X)$ beskonačna.

(i) Ako je $n = 2$, tada za svaki $\varphi \in \langle 0, \pi]$ postoje $\psi \in \langle 0, \varphi \rangle$ i $F \in R_\psi \cap \mathrm{Sym}(X)$.

(ii) Ako je $n = 3$, tada postoji $z \in S(x_0, R)$ takav da za svaki $\varphi \in \langle 0, \pi]$ postoje $\psi \in \langle 0, \varphi \rangle$ i $F \in R_{x_0 z, \psi} \cap \mathrm{Sym}(X)$.

Dokaz.

(i) Neka je $0 < \varepsilon < \min\{R, 2R\sin\frac{\varphi}{2}\}$. Prema lemi 3.3.16 (iii), postoji $f \in \mathrm{Iso}(X)$, $f \neq \mathrm{id}_X$ takva da je $d_B(\overline{f}, \mathrm{id}_B) < \varepsilon$. Prema lemi 3.3.18 (i), $\overline{f} \in R_\psi$, za neki $\psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Kako je $f \neq \mathrm{id}_X$, mora biti $\psi \neq 0$. Također,

$$2R\sin\frac{\psi}{2} = d_B(\overline{f}, \mathrm{id}_B) < 2R\sin\frac{\varphi}{2},$$

i $\frac{\varphi}{2}, \frac{\psi}{2} \in \langle 0, \frac{\pi}{2}]$, pa je $\psi < \varphi$. Sada je proširenje F od f na $\mathbb{R}^2$ svakako u $R_\psi \cap \mathrm{Sym}(X)$.

(ii) Prema lemi 3.3.16 (iii), za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji $f_n \in \mathrm{Iso}(X)$ takva da je $f_n \neq \mathrm{id}_X$ i

$$d_B(\overline{f_n}, \mathrm{id}_B) < 2^{-n}.$$

Kako je $R > 1$, imamo da je $d_B(\overline{f_n}, \mathrm{id}_B) < R$, pa prema lemi 3.3.18 (ii), $\overline{f_n}$ je rotacija oko nekog pravca p_n kroz x_0 za kut $\varphi_n \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $x_n \in p_n \cap S(x_0, R)$. Uočimo da je

$$\overline{f_n}(x_n) = x_n,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $S(x_0, R)$ kompaktan, postoji $z \in S(x_0, R)$ i podniz (x_{n_i}) niza (x_n) takav da $x_{n_i} \to z$. Tvrdimo da taj z ima željeno svojstvo.

Kako bismo pojednostavnili oznake, pretpostavit ćemo da $x_n \to z$. Imamo

$$2R\sin\frac{\varphi_n}{2} = d_B(\overline{f_n}, \mathrm{id}_B) < 2^{-n},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kada primijenimo arcsin na obje strane, dobivamo $\varphi_n \to 0$. Neka je $\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $\frac{3\varepsilon}{8R} < \frac{1}{2}$. Tada postoji $\psi_0 \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ takav da je

$$2R\sin\frac{\psi_0}{2} = \frac{3\varepsilon}{4},$$

i $\delta > 0$ takav da za svaki $\psi \in \langle \psi_0 - \delta, \psi_0 + \delta\rangle$,

$$2R\sin\frac{\psi}{2} \in \left\langle \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4}, \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \right\rangle = \left\langle \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon \right\rangle.$$

Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_n < \delta$, za svaki $n \geq n_0$. Uočimo da za svaki $n \geq n_0$, postoji $m_n \in \mathbb{N}$ takav da

$$m_n\varphi_n \in \langle \psi_0 - \delta, \psi_0 + \delta\rangle.$$

Za taj m_n, imamo

$$2R\sin\frac{m_n\varphi_n}{2} \in \left\langle \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon \right\rangle.$$

Kako je $\overline{f_n}^{m_n}$ rotacija za kut $m_n\varphi_n$, slijedi da je

$$\frac{\varepsilon}{2} < d_B(\overline{f_n}^{m_n}, \mathrm{id}_B) < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Neka je $g_n = f_n^{m_n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema lemi 3.3.14 (i), slijedi da je $\overline{g_n} = \overline{f_n}^{m_n}$ i lako se provjeri da je $\overline{g_n}(x_n) = x_n$. Zbog kompaktnosti od $\mathrm{Iso}(X)$ (propozicija 3.3.13), slijedi da postoji $h \in \mathrm{Iso}(X)$ i podniz (g_{n_i}) niza (g_n) takav da $g_{n_i} \to h$. Prema lemi 3.3.15, slijedi $\overline{g_{n_i}} \to \overline{h}$. Sada imamo da

$$d(\overline{g_{n_i}}(x_{n_i}), \overline{h}(x_{n_i})) \to 0 \quad \text{i} \quad \overline{h}(x_{n_i}) \to \overline{h}(z),$$

pa

$$x_{n_i} = \overline{g_{n_i}}(x_{n_i}) \to \overline{h}(z).$$

S druge strane, $x_{n_i} \to z$, pa mora biti $\overline{h}(z) = z$. Nadalje, iz (3.9), slijedi da je

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq d_B(\overline{h}, \mathrm{id}_B) \leq \varepsilon.$$

Stoga, $\overline{h} \neq \mathrm{id}_B$ i iz leme 3.3.18 (ii), zaključujemo da je $\overline{h}$ rotacija za kut $\psi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ oko nekog pravca p kroz x_0. Zbog $\overline{h}(z) = z$, imamo da je $p = x_0 z$. Za zadani $\varphi \in \langle 0, \pi]$, imat ćemo da je $\psi \in \langle 0, \varphi\rangle$ ako odaberemo $\varepsilon < 2R\sin\frac{\varphi}{2}$. U tom slučaju, proširenje F od h na $\mathbb{R}^3$ će imati traženo svojstvo.

■

Teorem 3.3.20. Ako je X neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{R}^2$ takav da je $\mathrm{Iso}(X)$ beskonačna, tada je X unija koncentričnih kružnica.

Dokaz. Ako je $\dim(X) < 2$, X je podskup nekog pravca, no ne postoji kompaktan podskup pravca koji ima beskonačno izometrija. Dakle mora biti $\dim(X) = 2$. Kako je X kompaktan, mora biti omeđen, pa prema propoziciji 3.3.12, postoji točka x_0 koju fiksiraju sve izometrije iz $\mathrm{Sym}(X)$. Tvrdimo da je X unija kružnica koje imaju središte x_0. Za $x \in X$, neka je $r_x = d(x, x_0)$. Kako sve izometrije iz $\mathrm{Sym}(X)$ fiksiraju x_0, očito orbita $\mathrm{Orb}(x)$ od x pri djelovanju grupe $\mathrm{Sym}(X)$ mora biti sadržana u $S(x_0, r_x)$. Tvrdimo da vrijedi jednakost $\mathrm{Orb}(x) = S(x_0, r_x)$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Prema propoziciji 3.3.19 (i), postoji $F \in R_\varphi \cap \mathrm{Sym}(X)$ takva da je

$$2r_x \sin\frac{\varphi}{2} < \varepsilon.$$

Prema lemi 3.3.17, za tu rotaciju F, točke

$$\{F^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{Orb}(x)$$

dijele kružnicu $S(x_0, r_x)$ na lukove čije krajnje točke su udaljene za $< \varepsilon$. Stoga je $\mathrm{Orb}(x)$ ε-gusta u $S(x_0, r_x)$, za svaki $\varepsilon > 0$. Budući da je $\mathrm{Orb}(x) \subseteq X$ i X je zatvoren, X sadrži zatvarač $\overline{\mathrm{Orb}(x)} = S(x_0, r_x)$.

Kako je $x \in S(x_0, r_x) \subseteq X$, za svaki $x \in X$, zaključujemo da je

$$X = \bigcup_{x \in X} S(x_0, r_x).$$

■

Sada možemo zaključiti da efektivna kompaktnost u $\mathbb{R}^2$ povlači izračunljivu kategoričnost.

Teorem 3.3.21. Ako je X efektivno kompaktan podskup od $\mathbb{R}^2$, tada je X izračunljivo kategoričan.

Dokaz. Ako je $\mathrm{Iso}(X)$ konačna, tvrdnja slijedi iz teorema 3.1.1. Ako je $\mathrm{Iso}(X)$ beskonačna, iz teorema 3.3.20, slijedi da je X unija koncentričnih kružnica. Sada je prema teoremu 3.3.5, X izračunljivo kategoričan. ■

Propozicija 3.3.22. Pretpostavimo da je $X \subseteq \mathbb{R}^3$, $\dim(X) = 3$, $\mathrm{Iso}(X)$ beskonačna i da $z \in S(x_0, R)$ ima svojstvo da za svaki $\varphi > 0$ postoji $\psi \in \langle 0, \varphi \rangle$ takav da je $R_{x_0 z, \psi} \cap \mathrm{Sym}(X) \neq \emptyset$. Tada $\mathrm{Sym}(X)$ sadrži sve rotacije oko pravca $x_0 z$.

Dokaz. Neka je $f \in R_{x_0 z, \varphi}$, za neki $\varphi > 0$ i $\varepsilon > 0$. Prema propoziciji 3.3.19 (ii), postoji $\psi > 0$ takav da

$$2R \sin \frac{\psi}{2} < \varepsilon, \quad R_{x_0 z, \psi} \cap \mathrm{Sym}(X) \neq \emptyset.$$

Odaberimo $h \in R_{x_0 z, \psi} \cap \mathrm{Sym}(X)$ koja ima isti smjer kao f. To možemo jer $R_{x_0 z, \psi}$ sadrži najviše dvije rotacije, pri čemu je jedna inverz druge, pa ako $\mathrm{Sym}(X)$ sadrži jednu od njih, mora sadržavati i drugu. Za $n = \lfloor \frac{\varphi}{\psi} \rfloor$, imamo

$$n\psi \leq \varphi < (n+1)\psi.$$

Sada je $h^n \in \mathrm{Sym}(X)$ i

$$d_B(f, h^n) = d_B(h^{-n} \circ f, \mathrm{id}_B).$$

Kako f i h imaju isti smjer, $h^{-n} \circ f$ je rotacija za kut $\varphi - n\psi \in \langle 0, \psi \rangle$, pa zaključujemo da je

$$d_B(h^{-n} \circ f, \mathrm{id}_B) = 2R \sin \frac{\varphi - n\psi}{2} < 2R \sin \frac{\psi}{2} < \varepsilon.$$

Dakle, za svaku rotaciju f oko x_0z i svaki $\varepsilon > 0$, postoji $H \in \mathrm{Sym}(X)$ takva da je $d_B(f,H) < \varepsilon$. Ovo povlači i da postoji $g \in \mathrm{Iso}(X)$ takva da je

$$d_B(f\big|_B, \overline{g}) < \varepsilon.$$

Stoga, $f\big|_B$ pripada zatvaraču slike funkcije $\mathrm{Iso}(X) \to \mathrm{Iso}(B)$, $g \mapsto \overline{g}$. Prema lemi 3.3.15, ta funkcija je neprekidna, pa joj je slika zatvorena (čak je i kompaktna). Zbog toga je $f\big|_B = \overline{l}$, za neku $l \in \mathrm{Iso}(X)$ što povlači da je $f \in \mathrm{Sym}(X)$. ■

Teorem 3.3.23. Ako je X kompaktan podskup od $\mathbb{R}^3$, $\dim(X) = 3$ i $\mathrm{Iso}(X)$ je beskonačna, tada postoji pravac p takav da je $X = \bigcup_{i \in I} S_i$, gdje je $\{S_i \mid i \in I\}$ familija kružnica sa središtima na pravcu p koje leže u paralelnim ravninama okomitima na p. Ako pravac p s tim svojstvom nije jedinstven, tada je X unija koncentričnih sfera.

Dokaz. Iz propozicija 3.3.19 (ii) i 3.3.22, dobivamo da postoji pravac p kroz središte x_0 od X takav da $\mathrm{Sym}(X)$ sadrži sve rotacije oko tog pravca. Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\{f(x) \mid f \in R_{p,\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R}\}$$

je zapravo kružnica u ravnini okomitoj na p sa središtem na p i radijusom $d(x,p)$. Za svaki $x \in X$, imamo

$$x \in \{f(x) \mid f \in R_{p,\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R}\} \subseteq X$$

što za posljedicu ima

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} \{f(x) \mid f \in R_{p,\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R}\} \subseteq X,$$

pa $X = \bigcup_{x \in X} \{f(x) \mid f \in R_{p,\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R}\}$.

Pretpostavimo da postoje dva pravca p i q koja imaju navedeno svojstvo. Neka je $x \in p \cap S(x_0,R)$ i neka je f izometrija od $\mathbb{R}^3$ takva da

$$f(x_0) = (0,0,0), \quad f(x) = (0,0,R).$$

Za tu f, $f(p)$ je z-os i $f(q)$ je pravac kroz $0 = (0,0,0)$. Neka je

$$y \in f(q) \cap S(0,R)$$

i odaberimo rotaciju h oko z-osi takvu da je $h(y)$ u xz-ravnini, to jest

$$h(y) \in \{(t,0,s) \mid t^2 + s^2 = R^2\}.$$

Definiramo $g = h \circ f$. Imamo da je g također izometrija od $\mathbb{R}^3$ takva da je $g(x_0) = 0$, $g(p)$ je z-os i $g(q)$ je pravac kroz 0 koji prolazi kroz kružnicu $\{(t,0,s) \mid t^2 + s^2 = R^2\}$. Sada nam je glavni cilj dokazati da je $g(X)$ unija koncentričnih sfera. Neka je $x \in g(X)$ proizvoljan i označimo $r = d(0,x)$. Dokazat ćemo da je

$$S(0,r) \subseteq g(X).$$

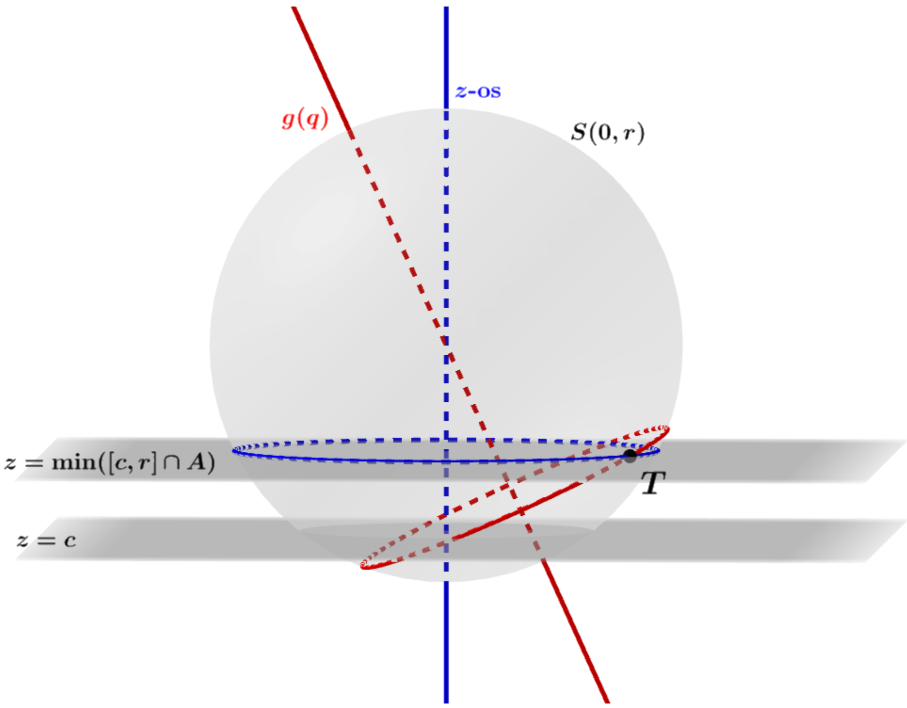
Budući da je $g(X)$ unija kružnica sa središtima na z-osi koje leže u ravninama okomitima na z-os, presjek $S(0,r) \cap g(X)$ je također unija kružnica s istim svojstvima. Neka je $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ projekcija na z-os. Imamo da je skup

$$A = \pi(S(0,r) \cap g(X))$$

skup svih z-koordinata središta kružnica u $S(0,r) \cap g(X)$. Vrijedi $A \subseteq [-r,r]$. Uočimo da ako dokažemo $A = [-r,r]$, zapravo smo dokazali željeni rezultat $S(0,r) \subseteq g(X)$. Pretpostavimo da postoji $c \in [-r,r] \setminus A$ i da je $[c,r] \cap A \neq \emptyset$. Budući da je $[c,r] \cap A$ neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{R}$, postoji

$$z = \min([c,r] \cap A).$$

Kako postoji točka u $S(0,r) \cap g(X)$ sa z kao zadnjom koordinatom, sve točke u $S(0,r)$ sa z kao zadnjom koordinatom će biti sadržane u $g(X)$. Stoga točka $T = (0, \sqrt{r^2 - z^2}, z)$ leži u $g(X)$.



Slika 3.8

Sada želimo pronaći kružnicu $\mathscr{C} \subseteq g(X)$ sa središtem na $g(q)$ koja leži u ravnini okomitoj na $g(q)$ i sadrži T. Budući da $g(q)$ prolazi kroz 0 te $\mathscr{C}$ i $S(0,r)$ dijele točku T, možemo zaključiti da je $\mathscr{C} \subseteq S(0,r)$.

Naime, na slici 3.8 su prikazane kružnice sa središtima na z-osi i na $g(q)$ na kojima leži točka T. Vidimo da neovisno o položaju pravca $g(q)$, kružnica sa središtem na $g(q)$ svakako sadrži neku točku sa trećom koordinatom između c i $\min([c,r] \cap A)$. Sada samo to moramo računski dokazati.

Pravac $g(q)$ prolazi kroz 0 i neku točku oblika $(t,0,s)$, gdje je $t^2+s^2=R^2$, a kako je $g(q) \neq g(p)$, mora biti $t \neq 0$. Stoga je vektor smjera od $g(q)$ jednak $(1,0,u)$, za neki $u \in \mathbb{R}$. Jednostavno je izračunati da je ortogonalna projekcija točke T na $g(q)$ točka

$$T_0 = \left(\frac{zu}{1+u^2}, 0, \frac{zu^2}{1+u^2} \right).$$

Za $u \neq 0$, ravnina kroz T koja je okomita na $g(q)$ je skup

$$\Pi = \{T + t(0,1,0) + s\left(1,0,-\frac{1}{u}\right) \mid s,t \in \mathbb{R}\}.$$

Sada je kružnica $\mathscr{C}$ skup svih točaka oblika

$$T_{t,s} = T + t(0,1,0) + s\left(1,0,-\frac{1}{u}\right) = \left(s, \sqrt{r^2-z^2}+t, z-\frac{s}{u}\right)$$

takvih da vrijedi

$$\|T_{t,s} - T_0\| = \|T - T_0\|.$$

Nakon raspisivanja obiju strana jednakosti, dobivamo da

$$\left(\frac{zu}{1+u^2} - s\right)^2 + (\sqrt{r^2-z^2}+t)^2 + \left(z - \frac{zu^2}{1+u^2} - \frac{s}{u}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{zu}{1+u^2}\right)^2 + (\sqrt{r^2-z^2})^2 + \left(z - \frac{zu^2}{1+u^2}\right)^2,$$

to jest da je

$$(\sqrt{r^2-z^2}+t)^2 - (\sqrt{r^2-z^2})^2$$

jednako

$$\left(\frac{zu}{1+u^2}\right)^2 - \left(\frac{zu}{1+u^2} - s\right)^2 + \left(z - \frac{zu^2}{1+u^2}\right)^2 - \left(z - \frac{zu^2}{1+u^2} - \frac{s}{u}\right)^2.$$

Nakon faktoriziranja razlike kvadrata u oba izraza, dobivamo

$$\begin{aligned} t(t+2\sqrt{r^2-z^2}) &= s\left(\frac{2zu}{1+u^2}-s\right)+\frac{s}{u}\left(\frac{2z}{1+u^2}-\frac{s}{u}\right) \\ &= su\left(\frac{2z}{1+u^2}-\frac{s}{u}\right)+\frac{s}{u}\left(\frac{2z}{1+u^2}-\frac{s}{u}\right) \\ &= \frac{s}{u}(u^2+1)\left(\frac{2z}{1+u^2}-\frac{s}{u}\right). \end{aligned}$$

Uočimo da je slika funkcije $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$F(t)=t(t+2\sqrt{r^2-z^2}),$$

interval $[-(r^2-z^2),+\infty\rangle$ i da funkcija $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$G(s)=\frac{s}{u}(u^2+1)\left(\frac{2z}{1+u^2}-\frac{s}{u}\right),$$

teži u 0 kada $s\to 0$. Stoga, za $z\neq r$, postoji $\varepsilon>0$ takav da za svaki $s\in\langle-\varepsilon,\varepsilon\rangle$, postoji $t\in\mathbb{R}$ sa svojstvom $F(t)=G(s)$. Ako odaberemo $s\in\langle-\varepsilon,\varepsilon\rangle$ sa svojstvom

$$c<z-\frac{s}{u}<z$$

i nađemo $t\in\mathbb{R}$ takav da je $F(t)=G(s)$, imamo da je $T_{t,s}\in g(X)\cap S(0,r)$ i ta točka ima zadnju koordinatu

$$z-\frac{s}{u}\in\langle c,z\rangle\cap A.$$

Ovo je kontradikcija s minimalnošću od z.

U slučaju kada je $z=r$, slika od F je $[0,+\infty\rangle$. No u tom slučaju je $z>0$, pa je $G(s)$ nenegativan broj za s takav da je $\frac{s}{u}$ pozitivan i dovoljno malen. Stoga, kao u prošlom slučaju, dobivamo kontradikciju s minimalnošću od z.

Pretpostavimo sada da je $u=0$. Tada je $T_0=(0,0,0)$,

$$\Pi=\{T+t(0,1,0)+s(0,0,1)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$$

i kružnica $\mathscr{C}$ je skup svih točaka oblika

$$T_{t,s}=T+t(0,1,0)+s(0,0,1)=\left(0,\sqrt{r^2-z^2}+t,z+s\right),$$

gdje je

$$(\sqrt{r^2-z^2}+t)^2+(z+s)^2=(\sqrt{r^2-z^2})^2+z^2,$$

to jest

$$(\sqrt{r^2-z^2}+t)^2-(\sqrt{r^2-z^2})^2=z^2-(z+s)^2.$$

Očito možemo naći $s < 0$ takav da je

$$c < z + s < z$$

i takav da postoji $t \in \mathbb{R}$ za koji vrijedi prethodna jednakost. Stoga opet dobivamo istu kontradikciju kao u prošlim slučajevima.

U slučaju kada je $[c,r] \cap A = \emptyset$ i $[-r,c] \cap A \neq \emptyset$, promatramo

$$z = \max([-r,c] \cap A)$$

i na sličan način kao u slučaju $[c,r] \cap A \neq \emptyset$ dobivamo kontradikciju s maksimalnošću od z.

Zaključujemo da je

$$x \in S(0,r_x) \subseteq g(X),$$

za svaki $x \in X$ i $r_x = d(0,x)$, pa je $g(X)$ unija koncentričnih sfera sa središtem 0. Ovo povlači da je X unija koncentričnih sfera sa središtem x_0. ■

Sada možemo zaključiti da i efektivna kompaktnost u $\mathbb{R}^3$ povlači izračunljivu kategoričnost.

Teorem 3.3.24. Ako je X efektivno kompaktan podskup od $\mathbb{R}^3$, tada je X izračunljivo kategoričan.

Dokaz. Ako je $\mathrm{Iso}(X)$ konačna, tvrdnja slijedi iz teorema 3.1.1. Pretpostavimo da je $\mathrm{Iso}(X)$ beskonačna. Ako je $\dim(X) = 3$, izračunljiva kategoričnost slijedi iz teorema 3.3.23, 3.3.5 i 3.3.9.

Pretpostavimo da je $\dim(X) < 3$. Tada postoji izometrija $f : X \to Y$, za neki $Y \subseteq \mathbb{R}^2$. Lako se vidi da ako je X efektivno kompaktan s obzirom na efektivan separirajući niz α, tada je Y efektivno kompaktan s obzirom na $f \circ \alpha$. Stoga je Y efektivno kompaktan podskup od $\mathbb{R}^2$, pa je prema teoremu 3.3.21, izračunljivo kategoričan. Sada ako su α i β dva efektivna separirajuća niza u X, njihove slike $f \circ \alpha$ i $f \circ \beta$ su ekvivalentne do na izometriju u Y. Neka je g izometrija od Y takva da je $f \circ \beta \sim g \circ f \circ \alpha$. Kompozicija $f^{-1} \circ g \circ f$ je izometrija od X i vrijedi

$$\beta \sim (f^{-1} \circ g \circ f) \circ \alpha.$$

Dakle, α i β su ekvivalentni do na izometriju, pa je X izračunljivo kategoričan. ■

4. KATEGORIČKA EFEKTIVNA KOMPAKTNOST

Kao što smo dosada vidjeli, efektivna kompaktnost u mnogo slučajeva povlači izračunljivu kategoričnost. Stoga se možemo pitati za koje kompaktne metričke prostore vrijedi sljedeća implikacija:

$$\alpha \text{ efektivan separirajući niz u } (X,d) \implies (X,d,\alpha) \text{ efektivno kompaktan} \tag{4.1}$$

Ako navedena implikacija vrijedi, kažemo da je (X,d) **kategorički efektivno kompaktan**.

Uočimo da su zbog teorema 1.4.4, kategorički efektivno kompaktni prostori upravo efektivno kompaktni prostori i prostori na kojima ne postoji efektivan separirajući niz.

U $\mathbb{R}^n$ imamo sljedeću karakterizaciju kategorički efektivno kompaktnih prostora:

Propozicija 4.0.1. Kompaktan podskup K od $\mathbb{R}^n$ je kategorički efektivno kompaktan ako i samo ako za svaki njemu izometričan podskup S metričkog prostora (X,d) i svaki efektivan separirajući niz α u (X,d) vrijedi implikacija:

$$S \text{ izračunljivo prebrojiv u } (X,d,\alpha) \implies S \text{ izračunljiv u } (X,d,\alpha). \tag{4.2}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kategorički efektivno kompaktan i da je S podskup metričkog prostora (X,d) koji je izometričan skupu K. Neka je α efektivan separirajući niz u (X,d) takav da je S izračunljivo prebrojiv u (X,d,α). Prema propoziciji 1.4.3, postoji izračunljiv niz β u (X,d,α) takav da je S jednak zatvaraču slike tog niza u (X,d). Uzmimo izometriju $f : S \to K$. Tada je lako vidjeti da je niz $f \circ \beta$ efektivan separirajući niz u K. Prema (4.1), postoji izračunljiva funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$K \subseteq \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B(f(\beta_i), 2^{-k}),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$ (pri čemu s $B(x,r)$ označavamo kugle u $\mathbb{R}^n$). No onda vidimo da mora biti i

$$S \subseteq \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B_d(\beta_i, 2^{-k}),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$ (ovdje s $B_d(x,r)$ označavamo kugle u metričkom prostoru (X,d)). Sada iz propozicije 1.4.5 slijedi da je S izračunljiv u (X,d,α).

Obratno, pretpostavimo da za svaki podskup S metričkog prostora (X,d) koji je izometričan K i svaki efektivan separirajući niz α u (X,d) vrijedi (4.2). Neka je β efektivan separirajući niz u K. Prema teoremu 2.2.15, postoji izometrija f od $\mathbb{R}^n$ takva da je $f \circ \beta$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$. Kako je taj niz gust u $f(K)$, iz propozicije 1.4.3 slijedi da je $f(K)$ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{R}^n$. Sada možemo iskoristiti (4.2) i zaključiti da je $f(K)$ izračunljiv u $\mathbb{R}^n$. Kao u propoziciji 1.4.5, slijedi da postoji izračunljiva funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B(f(\beta_i), 2^{-k}),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, a onda je i

$$K \subseteq \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B(\beta_i, 2^{-k}),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dakle, K promatran kao izračunljiv metrički prostor s euklidskom metrikom i nizom β je efektivno kompaktan. ■

4.1. Kvazisfere

Za skup $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je **kvazisfera** ako postoji otvoren, omeđen, konveksan skup U takav da je $X = \partial U$.

Sada nam je glavni cilj dokazati da su kvazisfere kategorički efektivno kompaktne. Za to će nam biti ključna neprekidna bijekcija između kvazisfere i jedinične sfere S^{n-1}, odnosno njen inverz. Neka je $X = \partial U \subseteq \mathbb{R}^n$ fiksirana kvazisfera sa svojstvom da je $0 \in U$. Tada je poznato da je funkcija $f : X \to S^{n-1}$,

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|},\ x \in X \tag{4.3}$$

neprekidna bijekcija (vidjeti lemu 1.1 u [16]).

Nama treba inverz te funkcije, a da bismo ga definirali, treba nam prvo funkcija $p : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty\rangle$,

$$p(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tU\},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

pri čemu je za $t \in \mathbb{R}$,

$$tU = \{tu \mid u \in U\}.$$

Neka su $r, R > 0$ proizvoljni, ali fiksni brojevi takvi da je

$$B(0,r) \subseteq U \subseteq B(0,R). \tag{4.4}$$

Zbog otvorenosti i omeđenosti skupa U, takvi r i R sigurno postoje. Uočimo sada da za proizvoljan $x \in \mathbb{R}^n$ i $t > 0$ takav da je $x \in tU$ vrijedi $\frac{x}{t} \in U$, a onda $\|\frac{x}{t}\| < R$, što povlači $t > \frac{\|x\|}{R}$. Dakle, za proizvoljan $x \in \mathbb{R}^n$ skup

$$S_x = \{t > 0 \mid x \in tU\}$$

je odozdo omeđen, a lako se vidi i da je neprazan, pa je funkcija p dobro definirana. Sljedeća lema nam govori o nekim svojstvima funkcije p koja će nam biti od velike koristi.

Lema 4.1.1. Funkcija p ima sljedeća svojstva:

(i) $\frac{\|x\|}{R} \leq p(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$, za sve $x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, za sve $\alpha \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$;

(iv) $|p(x) - p(y)| \leq \frac{1}{r}\|x-y\|$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$;

(v) $p(x) = 1$ ako i samo ako je $x \in X$, za sve $x \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz.

(i) Neka je $x \in \mathbb{R}^n$ i $t > 0$ takav da je $x \in tU$. Vidjeli smo da je tada $t > \frac{\|x\|}{R}$. Kako je t bio proizvoljan, vidimo da je $\frac{\|x\|}{R}$ donja međa skupa čiji je $p(x)$ infimum, pa mora biti $p(x) \geq \frac{\|x\|}{R}$.

Za drugu nejednakost, neka je $s \in \langle 0, r\rangle$ i $x \neq 0$ (za $x = 0$ očito vrijede željene nejednakosti). Tada je očito

$$x \cdot \frac{s}{\|x\|} \in B(0,r) \subseteq U,$$

pa je onda i $x \in \frac{\|x\|}{s}U$. Iz ovoga slijedi da je

$$p(x) \leq \frac{\|x\|}{s}, \text{ za svaki } s \in \langle 0, r\rangle,$$

pa mora biti i $p(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$.

(ii) Očito je $p(0) = 0$, stoga tvrdnju za $\alpha = 0$ ne treba provjeravati. Neka je $\alpha > 0$. Tada za $t > 0$ imamo sljedeći niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned} t \in S_{\alpha x} &\Leftrightarrow \alpha x \in tU \\ &\Leftrightarrow x \in \frac{t}{\alpha} U \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{\alpha} \in S_x \end{aligned}$$

Dakle $S_{\alpha x} = \alpha S_x$, pa kako je $\alpha > 0$, analogna jednakost vrijedi i za infimume tih skupova.

(iii) Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$ proizvoljni. Za $\varepsilon > 0$ odaberimo $t \in S_x$, $s \in S_y$ takve da je

$$t < p(x) + \varepsilon, \quad s < p(y) + \varepsilon.$$

Sada uočimo da je

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t} \cdot \frac{x}{t} + \frac{s}{s+t} \cdot \frac{y}{s}.$$

Budući da $\frac{x}{t}, \frac{y}{s} \in U$, zbog konveksnosti od U, mora biti i $\frac{x+y}{s+t} \in U$. Stoga zaključujemo da je $p(x+y) \leq s+t$. Imamo

$$p(x+y) \leq s+t < p(x) + p(y) + 2\varepsilon,$$

pa zbog proizvoljnosti od $\varepsilon > 0$, mora biti

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

(iv) Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$. Iz (iii) slijedi

$$\begin{aligned} p(x) &\leq p(x-y) + p(y), \\ p(y) &\leq p(y-x) + p(x), \end{aligned}$$

pa onda vrijedi i

$$\begin{aligned} p(x) - p(y) \leq p(x-y) \leq \frac{\|x-y\|}{r}, \\ p(y) - p(x) \leq p(y-x) \leq \frac{\|x-y\|}{r}, \end{aligned}$$

pri čemu druga nejednakost u oba retka slijedi iz (i). Iz ovoga odmah možemo zaključiti da je

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{1}{r} \|x-y\|.$$

(v) Neka je $x \neq 0$. Tada je presjek zrake

$$z = \{sx \mid s \geq 0\}$$

i skupa U izometričan otvorenom, povezanom i omeđenom podskupu od $[0, +\infty\rangle$ koji sadrži 0. Svaki takav podskup je oblika $[0, a\rangle$, za neki $a > 0$. Dakle vidimo da je

$$z \cap U = \{sx \mid s \in [0, a\rangle\},$$

pri čemu je prema lemi 1.1 u [16], $ax \in \partial U$ i to je jedinstvena točka u kojoj z siječe ∂U. Uočimo da je

$$a = \sup\{s > 0 \mid sx \in U\} = \sup\left\{s > 0 \mid x \in \frac{1}{s}U\right\} = \frac{1}{p(x)},$$

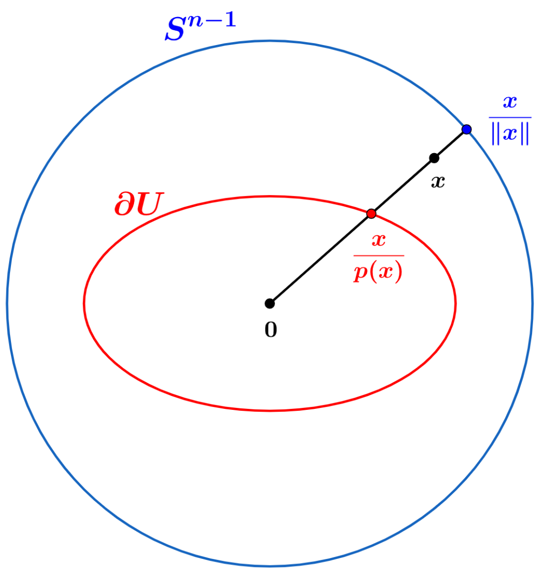
pa je

$$z \cap U = \left\{sx \mid s \in \left[0, \frac{1}{p(x)}\right\rangle\right\},$$

i vrijedi $\frac{x}{p(x)} \in \partial U$. Ako je $p(x) = 1$, tada je očito $x = \frac{x}{p(x)} \in \partial U = X$. S druge strane, za $x \in X$ mora biti $x = \frac{x}{p(x)}$ jer bi inače zraka određena s x sijekla ∂U u više od jedne točke.

■

Za $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ položaj točaka $\frac{x}{p(x)}$ i $\frac{x}{\|x\|}$ je prikazan na slici 4.1.



Slika 4.1

Sada tvrdimo da je funkcija $\pi : S^{n-1} \to X$,

$$\pi(x) = \frac{x}{p(x)}, \; x \in S^{n-1}$$

zapravo inverz funkcije f definirane s (4.3). Prvo uočimo da je za $x \in S^{n-1}$ prema (i) iz leme 4.1.1, $p(x) > 0$, a iz (ii) iz iste leme je $p\left(\frac{x}{p(x)}\right) = 1$. Sada iz (v) vidimo da je funkcija π dobro definirana.

Dokažimo sada da je $\pi = f^{-1}$. Neka je $x \in X$. Tada je $p(x) = 1$ i imamo

$$\pi(f(x)) = \pi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{\frac{x}{\|x\|}}{p\left(\frac{x}{\|x\|}\right)} = \frac{\frac{x}{\|x\|}}{\frac{p(x)}{\|x\|}} = \frac{x}{p(x)} = x.$$

Za $x \in S^{n-1}$ imamo

$$f(\pi(x)) = f\left(\frac{x}{p(x)}\right) = \frac{\frac{x}{p(x)}}{\|\frac{x}{p(x)}\|} = \frac{\frac{x}{p(x)}}{\frac{\|x\|}{p(x)}} = \frac{x}{\|x\|} = x,$$

dakle π je zaista inverz od f. Dokažimo sada da π ima još jedno važno svojstvo:

Lema 4.1.2. π je Lipschitzova funkcija.

Dokaz. Neka su $x, y \in S^{n-1}$, $x \neq y$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\|\pi(x) - \pi(y)\|}{\|x - y\|} &= \frac{\|\frac{x}{p(x)} - \frac{y}{p(y)}\|}{\|x - y\|} = \frac{\|p(y)x - p(x)y\|}{p(x)p(y)\|x - y\|} \\
&= \frac{\|p(y)x - p(x)x + p(x)x - p(x)y\|}{p(x)p(y)\|x - y\|} \\
&\leq \frac{|p(y) - p(x)|\|x\| + p(x)\|x - y\|}{p(x)p(y)\|x - y\|} \\
&= \frac{1}{p(x)p(y)} \cdot \frac{|p(y) - p(x)|}{\|x - y\|} + \frac{1}{p(y)}
\end{aligned}$$

Zbog $\|x\| = \|y\| = 1$, prema lemi 4.1.1 (i), vrijedi $p(x), p(y) \geq \frac{1}{R}$, to jest

$$\frac{1}{p(x)}, \frac{1}{p(y)} \leq R.$$

Zatim prema (iv) iz iste leme imamo

$$\frac{|p(y) - p(x)|}{\|x - y\|} \leq \frac{1}{r}.$$

Dakle, vrijedi

$$\frac{1}{p(x)p(y)} \cdot \frac{|p(y) - p(x)|}{\|x - y\|} + \frac{1}{p(y)} \leq \frac{R^2}{r} + R,$$

a onda je

$$\|\pi(x) - \pi(y)\| \leq \left(\frac{R^2}{r} + R\right) \|x - y\|,$$

pa smo našli Lipschitzovu konstantu za π. ∎

Sada imamo sve potrebno za dokaz sljedećeg teorema:

Teorem 4.1.3. Kvazisfera promatrana kao metrički prostor s euklidskom metrikom je kategorički efektivno kompaktan prostor.

Dokaz. Neka je $X = \partial U$ kvazisfera u $\mathbb{R}^n$ i neka je α efektivan separirajući niz u X. Prema teoremu 2.2.15 postoji izometrija $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da je $\beta = g \circ \alpha$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$. Za tu izometriju $Y = g(X)$ je također kvazisfera jer vrijedi $Y = \partial V$, za $V = g(U)$ koji je konveksan, otvoren i omeđen. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $0 \in V$. Naime ako nije, možemo odabrati izračunljivu točku $a \in V$ (takva postoji jer su izračunljive točke guste u $\mathbb{R}^n$) i umjesto g promatrati kompoziciju g i translacije $x \mapsto x - a$.

Sada uočimo da je za funkciju $f : Y \to S^{n-1}$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$, niz $f \circ \beta$ također izračunljiv prema propoziciji 1.1.1 (iv), (v). Taj niz je zbog neprekidnosti i bijektivnosti od f također gust u S^{n-1}. Sada zbog efektivne kompaktnosti od S^{n-1} imamo da postoji izračunljiva funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$S^{n-1} = \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B_{S^{n-1}}(f(\beta_i), 2^{-k}),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Ovdje ćemo za $A \subseteq \mathbb{R}^n$ koristiti oznaku

$$B_A(x,r) = B(x,r) \cap A,$$

gdje je $B(x,r)$ otvorena kugla u $\mathbb{R}^n$.

Neka je sada M Lipschitzova konstanta inverza $\pi : S^{n-1} \to Y$ od f iz leme 4.1.2. Tada vrijedi

$$\pi(B_{S^{n-1}}(x,r)) \subseteq B_Y(\pi(x), Mr),$$

pa kako je $\pi(f(\beta_i)) = \beta_i$, imamo

$$Y = \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B_Y(\beta_i, M \cdot 2^{-k}),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Budući da su X i Y povezani izometrijom g za koju je $g \circ \alpha = \beta$, zaključujemo da vrijedi

$$X = \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} B_X(\alpha_i, M \cdot 2^{-k}),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Sada uzmimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $M \cdot 2^{-n_0} < 1$ i definiramo funkciju $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\psi(k) = \varphi(k + n_0)$. To je izračunljiva funkcija i vrijedi

$$X = \bigcup_{i=0}^{\psi(k)} B_X(\alpha_i, 2^{-k}),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa vidimo da je (X,d,α), gdje je d euklidska metrika na X, zaista efektivno kompaktan. ■

Sada se nameće pitanje možemo li poopćiti prethodni rezultat na podskupove u $\mathbb{R}^n$ koji su (kao i kvazisfere) homeomorfni jediničnoj sferi S^{n-1}. Odgovor je nažalost negativan čak i u dvije dimenzije, što nam pokazuje sljedeći primjer.

Prije primjera, treba nam još par osnovnih pojmova iz izračunljive analize. Za funkciju $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ kažemo da je **nizovno izračunljiva** ako je za svaki izračunljiv niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u $[0,1]$, niz $(f(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv u $\mathbb{R}$. Zatim, kažemo da je f **efektivno uniformno neprekidna** ako postoji izračunljiva funkcija $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$|x-y|<2^{-\varphi(k)} \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(y)|<2^{-k},$$

za sve $x,y\in[0,1]$ i $k\in\mathbb{N}$. Funkcija $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ je **izračunljiva** ako je nizovno izračunljiva i efektivno uniformno neprekidna.

Primjer 4.1.4. Neka je $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna i nizovno izračunljiva, ali nije izračunljiva. Takva funkcija postoji prema teoremu 6 iz poglavlja 1 u [18]. Nadalje, pretpostavimo da je funkcija f strogo pozitivna (u suprotnom možemo komponirati funkciju iz navedenog teorema s translacijom za dovoljno velik prirodan broj). Graf funkcije f,

$$\Gamma_f=\{(x,f(x))\mid x\in[0,1]\},$$

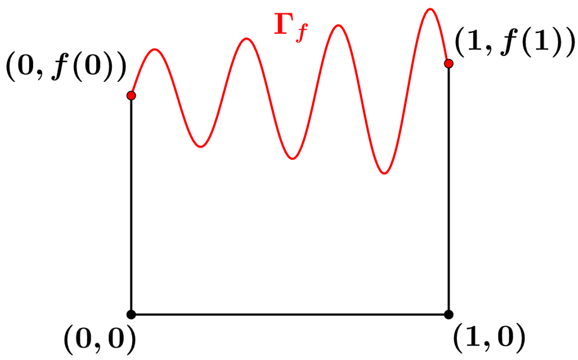
je izračunljivo prebrojiv skup u $\mathbb{R}^2$ koji nije izračunljiv. Prvo obrazložimo izračunljivu prebrojivost. Naime, za izračunljiv gust niz (x_i) u $[0,1]$ imamo da je $(f(x_i))$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}$ koji je gust u slici od f, pa je niz $(x_i,f(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv u $\mathbb{R}^2$ i gust u Γ_f. Izračunljiva prebrojivost od Γ_f sada slijedi iz propozicije 1.4.3. Da Γ_f nije izračunljiv slijedi iz činjenice da je izračunljivost funkcije $[0,1]\to\mathbb{R}$ ekvivalentna izračunljivosti njenog grafa (korolar 8.4 u [2]).

Sada definiramo skup

$$X=\Gamma_f\cup([0,1]\times\{0\})\cup(\{0\}\times[0,f(0)])\cup(\{1\}\times[0,f(1)]).$$

Skup X prikazan je na slici 4.2.

Nije teško pokazati da je navedeni skup homeomorfan kružnici. Nadalje, zbog nizovne izračunljivosti od f, brojevi $f(0)$ i $f(1)$ su izračunljivi, pa je jednostavno konstruirati izračunljive nizove u $\mathbb{R}^2$ koji su gusti u $[0,1]\times\{0\}$, $\{0\}\times[0,f(0)]$ i $\{1\}\times[0,f(1)]$. Stoga su i ti skupovi izračunljivo prebrojivi prema propoziciji 1.4.3. Sada je X unija četiri izračunljivo prebrojiva



Slika 4.2

skupa, pa je prema propoziciji 1.4.2 i sam izračunljivo prebrojiv. Pretpostavimo da je X izračunljiv. Tada je X i koizračunljivo prebrojiv prema korolaru 3.14 u [3], a vrijedi

$$\Gamma_f = X \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}.$$

Dakle Γ_f je presjek četiri koizračunljivo prebrojiva skupa, pa prema propoziciji 1.4.2 mora biti koizračunljivo prebrojiv. Kako je uz to i izračunljivo prebrojiv, Γ_f je izračunljiv prema korolaru 4.14 u [3]. Ovo je kontradikcija s činjenicom da f nije izračunljiva. Budući da je X izračunljivo prebrojiv, a nije izračunljiv, X nije kategorički efektivno kompaktan prema propoziciji 4.0.1.

ZAKLJUČAK

Navedimo sada najvažnije originalne rezultate i zaključke iz disertacije. Vezano za maksimalne strukture izračunljivosti:

- Za maksimalan geometrijski nezavisan efektivan niz $a_0, \ldots, a_k$ na podskupu X euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ postoji jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti na X u kojoj su članovi tog niza izračunljive točke. To je struktura $\mathscr{R}^X_{a_0,\ldots,a_k}$ koja se sastoji od svih nizova koji imaju svojstvo da je svaka od $k+1$ funkcija koje računaju udaljenosti članova tog niza do točaka $a_0, \ldots, a_k$ izračunljiva.

- Neka je $\mathscr{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i k dimenzija skupa izračunljivih točaka u $\mathscr{M}$. Ako su $a_0, \ldots, a_k$ geometrijski nezavisne izračunljive točke u $\mathscr{M}$, tada je $\mathscr{M} = \mathscr{R}^X_{a_0,\ldots,a_k}$.

- Ako je $\mathscr{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na $X \subseteq \mathbb{R}^n$, tada postoji izometrija f od $\mathbb{R}^n$ takva da je $f(\mathscr{M})$ kanonska struktura izračunljivosti na $f(X)$.

- Svaka maksimalna struktura izračunljivosti na $\mathbb{R}^n$ je separabilna.

- Ako je X podskup od $\mathbb{R}^n$ dimenzije k, tada za proizvoljan geometrijski nezavisan efektivan niz u X duljine k postoji jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti na X u kojoj su članovi tog niza izračunljive točke.

- Za $\gamma > 0$ i $a \in [0, \gamma]$, jedinstvena maksimalna struktura izračunljivosti na $[0, \gamma]$ u kojoj je a izračunljiva točka je separabilna ako i samo ako su a i $\gamma - a$ lijevo izračunljivi brojevi.

Nadalje, ključni rezultati vezani za separabilne strukture izračunljivosti i efektivnu kompaktnost izračunljivih metričkih prostora su:

- Neka je (X, d, α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor i K izračunljiv skup u tom prostoru koji ima svojstvo da postoji konačno mnogo izometrija f prostora (X, d) sa svojstvom da je $f(K) \subseteq K$. Ako je β efektivan separirajući niz takav da je K izračunljiv i u (X, d, β), onda su nizovi α i β ekvivalentni.

- Orbita izračunljive točke pri djelovanju grupom izometrija je koizračunljivo prebrojiv skup u efektivno kompaktnom izračunljivom metričkom prostoru.
- Efektivno kompaktna unija koncentričnih sfera u $\mathbb{R}^n$ je izračunljivo kategorična.
- Svi efektivno kompaktni podskupovi od $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ su izračunljivo kategorični.
- Skup X koji je rub otvorenog omeđenog konveksnog skupa u $\mathbb{R}^n$ ima svojstvo da ako na X postoji efektivan separirajući niz, tada je X efektivno kompaktan.

BIBLIOGRAFIJA

[1] Ahumada, G., Brighi, B., Chevallier, N. i Fruchard, A.: *Fixating Group Actions*. arXiv preprint:1901.08895, 2019. ↑ 74.

[2] Brattka, V.: *Plottable real number functions and the computable graph theorem*. SIAM J. Comput., 38(1):303–328, 2008. ↑ 93.

[3] Brattka, V. i Presser, G.: *Computability on subsets of metric spaces*. Theoretical Computer Science, (305):43–76, 2003. ↑ 16, 17, 94.

[4] Brattka, V. i Weihrauch, K.: *Computability on subsets of Euclidean space I: Closed and compact subsets*. Theoretical Computer Science, (219):65–93, 1999. ↑ 16.

[5] Burnik, K. i Iljazović, Z.: *Computability of 1-manifolds*. Logical Methods in Computer Science, 10(2:8):1–28, 2014. ↑ 68.

[6] Burnik, K. i Iljazović, Z.: *Dense computability structures*. Journal of complexity, stranica 24, 2021. ↑ 3.

[7] Hertling, P.: *Effectivity and effective continuity of functions between computable metric spaces*. U al., D.S. Bridges et (urednik): *Combinatorics, Complexity and Logic, Proc. DMTCS96*, stranice 264–275. Springer, Berlin, 1996. ↑ 10.

[8] Iljazović, Z.: *Chainable and Circularly Chainable Co-c.e. Sets in Computable Metric Spaces*. Journal of Universal Computer Science, 15(6):1206–1235, 2009. ↑ 16, 69.

[9] Iljazović, Z.: *Isometries and Computability Structures*. Journal of Universal Computer Science, 16(18):2569–2596, 2010. ↑ 2, 10, 18, 24, 30, 47, 54.

[10] Iljazović, Z.: *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih skupova*. disertacija, Sveučilište u Zagrebu, 2010. ↑ 5, 8.

[11] Iljazović, Z.: *Compact manifolds with computable boundaries*. Logical Methods in Computer Science, 9(4:19):1–22, 2013. ↑ 62.

[12] Iljazović, Z. i Validžić, L.: *Maximal computability structures*. Bulletin of Symbolic Logic, 22(4):445–468, 2016. ↑ 4.

[13] McNicholl, T.H.: *A Note on the Computable Categoricity of l^p Spaces*. U *Evolving Computability*, stranice 268–275. Springer International Publishing, 2015. ↑ 2.

[14] Melnikov, A.G.: *Computably isometric spaces*. Journal of Symbolic Logic, 78:1055–1085, 2013. ↑ 2, 10, 22, 44.

[15] Mori, T., Tsujji, Y. i Yasugi, M.: *Computability structures on metric spaces*. Combinatorics, Complexity and Logic, Proc. DMTCS96, Bridges et al. (Eds.), stranice 351–362, 1996. ↑ 10.

[16] Munkres, J.R.: *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, 1984. ↑ 87, 90.

[17] Munkres, J.R.: *Topology*. Prentice Hall, Incorporated, 2000. ↑ 74.

[18] Pour-El, M.B. i Richards, J.I.: *Computability in Analysis and Physics*. Springer, Berlin, 1989. ↑ 5, 10, 16, 93.

[19] Rees, E.G.: *Notes on Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983. ↑ 61, 72.

[20] Sutherland, W.A.: *Introduction to metric and topological spaces*. Oxford University Press, 1975. ↑ 47.

[21] Turing, A.M.: *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. Proc. London Math. Soc., 42:230–265, 1936. ↑ 5, 16.

[22] Vuković, M.: *Izračunljivost*. skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2009. ↑ 5.

[23] Weihrauch, K.: *Computability on computable metric spaces*. Theoretical Computer Science, (113):191–210, 1993. ↑ 10.

[24] Weihrauch, K.: *Computable Analysis*. Springer, Berlin, 2000. ↑ 5, 16, 70.

[25] Wells, J.H. i Williams, L.R.: *Embeddings and Extensions in Analysis*. Springer Science and Business Media, 2012. ↑ 61.

[26] Yasugi, M., Mori, T. i Tsujji, Y.: *Effective properties of sets and functions in metric spaces with computability structure*. Theoretical Computer Science, 219:467–486, 1999. ↑ 10, 11, 18.

Životopis

Lucija Validžić rođena je 9. studenog 1992. godine u Zagrebu. Po završetku obrazovanja u zagrebačkoj Klasičnoj gimnaziji, 2011. godine upisuje preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu kojeg završava 2014. godine. Iste godine upisuje diplomski studij Teorijska matematika također na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu te ga završava 2016. godine diplomskim radom naslova „Topološki aspekti izračunljivosti" pod mentorstvom izv.prof.dr.sc. Zvonka Iljazovića. Tijekom dodiplomskog studija nagrađivana je nagradama za izvrsnost Matematičkog odsjeka i Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, a 2016. godine je primila i posebno rektorovo priznanje za koautorstvo u objavljenom članku. Poslijediplomski doktorski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu Lucija upisuje 2016. godine te nastavlja sa znanstvenim radom pod vodstvom profesora Iljazovića. U siječnju 2017. godine zapošljava se kao asistentica na Zavodu za topologiju Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, gdje radi i danas. Osim toga je radila i kao honorarna asistentica na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu od listopada 2016. do rujna 2017., a od rujna 2017. do travnja 2019. godine bila je članica Državnog povjerenstva za natjecanja iz matematike. Zahvaljujući mnogim objavljenim radovima, u 2017. godini je nagrađena Državnom nagradom za znanost u kategoriji znanstvenih novaka u prirodoslovnom području.

Lucija Validžić je održala sljedeća konferencijska izlaganja:

- *Computable sequences and isometries*, Logic and Applications, Dubrovnik, rujan 2021.
- *Isometries and the equivalence of the effective separating sequences*, Seventeenth International Conference on Computability and Complexity in Analysis, online, rujan 2020.
- *Starlike neighbourhoods and computability*, Logic and Applications, Dubrovnik, rujan 2017.

- *Semicomputable 1-polyhedra*, ÖMG-DMV Congress, Salzburg, rujan 2017.

Koautorica je šest znanstvenih članaka, od kojih je objavljeno sljedećih pet:

- E. Čičković, Z. Iljazović, L. Validžić: *Chainable and circularly chainable semicomputable sets in computable topological spaces*, Archive for mathematical logic, 58, 885-897, 2019.
- Z. Iljazović, L. Validžić: *Computability of a wedge of circles*, Rad HAZU, Matematičke znanosti, 21, 9-20, 2017.
- Z. Iljazović, L. Validžić: *Computable neighbourhoods of points in semicomputable manifolds*, Annals of Pure and Applied Logic, 168(4), 840-859, 2017.
- Z. Iljazović, L. Validžić: *Maximal computability structures*, Bulletin of Symbolic Logic, 22(4), 445-468, 2016.
- Z. Iljazović, A. Kuruc, L. Validžić: *Linear metrics and effective separating sequences*, British Journal of Mathematics and Computer Science, 12(2), 1-8, 2016.