SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Bernarda Jozepović

TEHNIKE DEKOMPOZICIJE U MREŽNOJ OPTIMIZACIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, srpanj, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru izv. prof. dr. sc. Marku Vrdoljaku na pomoći oko odabira teme, savjetima i sugestijama prilikom pisanja ovog diplomskog rada.
Hvala mojim prijateljima.
Naposljetku, najveće hvala mojim roditeljima, bratu Miroslavu i sestrama Marijani, Julijani i Ani koji su vjerovali u mene i podržavali me.

Sadržaj

Uvod

Autoceste, telefonske linije, elektroenergetski sustavi, računalni čipovi, sustavi za dostavu vode, željezničke linije i mnoge druge fizičke mreže svima su nam poznate. U svakom od ovih problema često želimo poslati neku robu (vozila, poruke, struju ili vodu) s jedne točke na drugu, obično što je moguće učinkovitije - to jest najkraćim putem ili putem minimalnog uzorka toka troškova. Mrežna optimizacija oduvijek je bila ključna domena problema u operacijskim istraživanjima, kao i u računalnim znanostima, primjenjenoj matematici i mnogim područjima inženjerstva i upravljanja. Problemi mrežne optimizacije javljaju se u raznim situacijama koje naizgled nisu povezane s mrežama. Obraditi ćemo tri tehnike dekompozicije mrežne optimizacije. Obradit ćemo Lagrangeovu relaksaciju koja aproksimira težak problem uvjetne optimizacije jednostavnijim problemom. Rješenje relaksiranog problema je približno rješenje izvornog problema i pruža korisne informacije. Metoda kažnjava kršenje ograničenja nejednakosti korištenjem Lagrangeovog multiplikatora, što nameće trošak za kršenje. Ovi dodatni troškovi se koriste umjesto strogih ograničenja nejednakosti u optimizaciji. Obradit ćemo i Dantzig-Wolfeovu dekompoziciju koja daje algoritam za za rješavanje problema linearnog programiranja s posebnom strukturom. Treća tehnika koju ćemo obraditi je Bendersova dekompozicija koja omogućava rješavanje vrlo velikih problema linearnog programiranja koji imaju posebnu strukturu blokova.

Rad je podijeljen u tri poglavlja. U prvom poglavlju opisati ćemo nekoliko primjera zadaća koje su bliske klasičnim zadaćama mrežne optimizacije. Mnogi mrežni modeli nemaju mrežnu strukturu. To je zato što pojam strukture mreže ovisi o činjenici da su jedina ograničenja ograničenja očuvanja protoka napisana u terminima varijabli toka i ograde odozgo i odozdo na tok. U modeliranju stvarnih mreža, često moramo uvesti dodatna ograničenja. Obje ove generalizacije, dodatna ograničenja i korištenje varijabli protoka, mogu ugroziti klasičnu mrežnu strukturu. Mreže koje ne pokazuju mrežnu strukturu mogu imati tzv. skoro mrežnu strukturu. Problemi koje navodimo su: vremenski ograničeni najkraći putovi, tok minimalnih troškova s ograničenjima paketa, tok više roba i zagušeni ograničeni protok goriva.

U drugom poglavlju rada raspravljamo o tome kako riješiti velike zadaće u analizi mreže, koji mogu, ali i ne moraju uključivati cjelobrojne varijable, bez pretpostavke mrežne ili skoro mrežne strukture. Tehnike dekompozicije koje obrađujemo su Lagrangeova relaksacija, Dantzig-Wolfeova dekompozicija i Bendersova dekompozicija.

U posljednjem, trećem, poglavlju primjenjujemo Lagrangeovu relaksaciju na nekapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom i Bendersovu dekompoziciju na kapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom. Problem lokacije ima važno mjesto u ekonomskoj teoriji i praksi, a sastoji se od određivanja lokacije objekta prema nekom kriteriju (ili kriterijima) uz zadana ograničenja i pretpostavke. Promatrati ćemo prvo problem bez ograničenja, a zatim ograničenjima kapaciteta.

Poglavlje 1

Zadaće bliske klasičnim zadaćama mrežne optimizacije

1.1 Uvod

Promotrimo zadaću sljedećeg oblika:

$$f(x) \to \min \tag{1.1}$$

$$x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = b, L \leq x \leq U\} \tag{1.2}$$

$$\Gamma x \leq q \tag{1.3}$$

za tok grafa $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, gdje je n broj vrhova, a m broj lukova grafa. $x \in \mathcal{R}^m$ je vektor stupac, funkcija $f : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}$, A potpuno unimodularna $n \times m$ matrica, $b \in \mathcal{R}^n$ vektor neto čvornih zaliha, $U \in \mathcal{R}^m$ vektor gornjih granica na tokovima luka, $L \in \mathcal{R}^m$ vektor donjih granica na tokovima luka dok je Γ $\eta \times m$ matrica bez posebne strukture i $q \in \mathcal{R}^n$ vektor.

Definicija 1.1.1. *Cjelobrojna kvadratna matrica $B \in M_n(\mathbb{Z})$ je unimodularna ako je $det(B) = \pm 1$. Cjelobrojna matrica $A \in M_n(\mathbb{Z})$ je potpuno unimodularna ako svaka kvadratna podmatrica B od A zadovoljava $det(B) \in \{0, \pm 1\}$*

Za zadaću minimizacije nelinearne funkcije uz linearne uvjete (1.1)-(1.3) kažemo da ima skoro mrežnu strukturu kada je matrica A potpuno unimodularna, matrica Γ takva da matrica

$$\begin{bmatrix} A \\ \Gamma \end{bmatrix}$$

nije potpuno unimodularna te je broj redaka od Γ mali u odnosu na broj redaka od A. Takvi

problemi nastaju u brojnim kontekstima uključujući probleme s najkraćim putem s vremenskim okvirima i probleme protoka minimalnih troškova.
Tehnike koje ćemo proučavati dopuštaju da ograničenja koja uništavaju potpunu unimodularnost budu nelinearna.
Linearna ograničenja (1.3) mogu se zamijeniti nelinearnim ograničenjima

$$g(x) \leq 0 \tag{1.4}$$

gdje je $g \colon \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^\eta$.
Zapravo u našem apstraktnom razvoju Lagrangeove teorije dualnosti pretpostavit ćemo da su nepotpuno unimodularna ograničenja općenitijeg oblika (1.4), iako će numerički primjer mreže imati ograničenje poput (1.3).
Postoje dvije široke kategorije metoda koje se koriste za zadaće sa skoro mrežnom stukturom. To su metoda dekompozicije i metoda relaksacije. Obje kategorije nastoje rastaviti početni problem na manje podprobleme kojima je lakše upravljati i na koje se mogu primjeniti poznati i učinkoviti algoritmi. Upravo načini na koje se ti manji podproblemi stvaraju i međusobno djeluju, razlikuju metode dekompozicije i relaksacije jedne od drugih.
Sada ćemo razmotriti neke primjere problema koji nastaju kao prirodna proširenja modela i koji imaju skoro mrežnu strukturu.

1.2 Vremenski ograničeni najkraći putovi

Jedan od najčešće proučavanih problema u algoritmima grafova je problem najkraćeg puta. Prirodni dodatak je problem u kojem se želi pronaći najkraći put koji je podložan nekom ograničenju kao što je vrijeme.
Promotrimo graf $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ u kojemu za svaki luk $(i, j) \in \mathcal{A}$ poznata udaljenost c_{ij} i vrijeme putovanja τ_{ij}. Primarni kriterij za određivanje puta je minimizacija ukupne udaljenosti prijeđene od izvora do ponora. Uobičajeno su ograničenja protoka i cjelobrojnost tokova, tj. usmjeravamo jednu jedinicu toka, uvećano zahtjevom da ukupno vrijeme putovanja bude ograničeno odozgo egzogenim parametrom $\beta \in \mathcal{R}_{++}$. Sa x_{ij} označavamo tok na luku $(i, j) \in A$. Odnosno želimo riješiti

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{1.5}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = \begin{cases} +1 & i = s \\ -1 & i = t \\ 0 & i \neq s, t \end{cases} \qquad \text{za svaki} \quad i \in \mathcal{N} \tag{1.6}$$

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} \tau_{ij}x_{ij} \leq \beta \tag{1.7}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}\,,\ (i, j) \in \mathcal{A} \tag{1.8}$$

gdje je svaki jedinični trošak $c_{ij} \in \mathcal{R}_+$ luka $(i, j) \in A$ poznata konstanta, s je izvor, a t je ponor. Očito je vremensko ograničenje (1.7) ono koje uništava potpunu unimodularnost ove zadaće, pa je primjenjivo uzeti (1.5)-(1.8) kao linearnu zadaću sa skoro mrežnom strukturom.

1.3 Tok minimalnih troškova s ograničenjima paketa

Ponekad imamo lukove čiji su tokovi aktivnosti tehnološki vezani za tokove drugih lukova. Jednostavan primjer je teretni terminal s dva prometna ulaza, ali sa samo jednim viličarem za istovaranje pošiljki. Stoga su oba područja međusobno ovisna i ograničena kapacitetom terminala za obradu dolaznog prometa, što je ograničenje koje se može izraziti kao gornja granica zbroja prometa na dva luka. Za bilo koje takvo ograničenje koje zahtjeva da višestruke mrežne aktivnosti poštuju zajedničko ograničenje kapaciteta zovemo ograničenje paketa. Označimo sa q_k kapacitet k-tog paketa i B_k skup lukova koji odgovaraju k-tom paketu. Tada se linearna zadaća toka minimalnih troškova s ograničenjima paketa navodi kao

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{1.9}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = b_i\,,\ i \in \mathcal{N} \tag{1.10}$$

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{B}_k} x_{ij} \leq q_k\,,\ k \in \mathcal{K} \tag{1.11}$$

$$L_{ij} \leq x_{ij} \leq U_{ij}\,,\ (i, j) \in \mathcal{A} \tag{1.12}$$

gdje je svaki jedinični trošak $c_{ij} \in \mathcal{R}_+$ luka $(i, j) \in A$ poznata konstanta, svaki b_i neto opskrba čvora i, k je indeks koji označava k-ti paket, K je skup paketa, $L_{ij} \in \mathcal{R}_+$ i $U_{ij} \in \mathcal{R}_+$ donja, odnosno gornja granica toka luka $(i, j) \in A$. Jasno je da su ograničenja paketa (1.11) ta koja sprečavaju da ova zadaća ima mrežnu strukturu.

1.4 Tok više roba

Model koji je matematički sličan linearnom modelu toka minimalnih troškova sa skupom ograničenja je problem linearnog toka više roba. Roba je zapravo roba koja se mora transportirati od jednog ili više izvornih čvorova do jednog ili više odredišnih čvorova u mreži. U praksi te robe mogu biti telefonski pozivi u telekomunikacijskoj mreži, paketi u distribucijskoj mreži ili zrakoplovi u mreži letova zrakoplovnih kompanija. Svaka roba ima jedinstven skup karakteristika i robe nisu zamjenjive, tj. ne možemo zadovoljiti potražnju za jednom robom drugom robom. Cilj linearnog protoka više roba je protok robe kroz mrežu uz minimalne troškove bez prekoračenja kapaciteta luka. To je također problem toka minimalnih troškova, ali se razlikuje od slučaja pojedinačne robe po tome što više roba teče kroz isti fizički luk. Ova bitna značajka je modelirana pomoću varijabli protoka

$$x_{ij}^k = tok\ robe\ k\ preko\ luka\ (i, j)$$

gdje indeks $k \in \mathcal{K}$ označava interesnu robu , a $\mathcal{K}$ je skup svih roba. Pretpostavlja se da svaki fizički luk $(i, j) \in \mathcal{A}$ ima kapacitet. Ova ograničenja ukupnog kapaciteta su oblika ograničenja paketa izraženog kao

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k x_{ij}^k \leq q_{ij}\,,\ (i, j) \in \mathcal{A}$$

gdje je α_k je jedninična težina robe k, a q_{ij} je ukupni kapacitet luka (i, j). Tada se problem linearnog toka više roba navodi kao:

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \sum_{k \in \mathcal{K}} c_{ij}^k x_{ij}^k \to \min \tag{1.13}$$

$$\sum_{j:(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^k - \sum_{j:(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji}^k = b_i^k\,,\ i \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K} \tag{1.14}$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k x_{ij}^k \leq q_{ij}\,,\ (i, j) \in \mathcal{A} \tag{1.15}$$

$$L_{ij}^k \leq x_{ij}^k \leq U_{ij}^k\,,\ (i, j) \in \mathcal{A}, k \in \mathcal{K} \tag{1.16}$$

gdje je c_{ij}^k stalni jednični trošak toka robe k preko luka (i, j), b_i^k je neto ponuda robe k u čvoru i, $L_{ij}^k \in \mathcal{R}_+$ i $U_{ij}^k \in \mathcal{R}_+$ su odgovarajuće donje i gornje granice toka robe k nad lukom $(i, j) \in \mathcal{A}$. Odmah vidimo da su (1.15) ograničenja koja uništavaju mrežnu strukturu. Primjetimo još da za odgovarajuće definirane vektore c, x, b, L i U, matrice A i Γ, gore opisani linearne zadaće sa skoro mrežnom strukturom imaju oblik (1.1)-(1.3).

1.5 Zagušeni ograničeni protok goriva

U nekim vrstama fizičkih transportnih mreža potrošnja goriva može varirati s kvadratom brzine. Budući da će brzina općenito ovisiti o protoku kada je prisutno zagušenje, odmah možemo povezati sa svakim lukom $(i, j) \in A$ nelinearnu funkciju $v_{ij}(x_{ij})$ za opisivanje potrošnje goriva. Ove nelinearne funkcije potrošnje goriva zajedno s proračunom goriva F

(odnosno gornjom granicom potrošnje goriva) rezultiraju zadaćom zagušenog ograničenog protoka goriva:

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} \sum_{k\in\mathcal{K}} c_{ij}^k(x)x_{ij}^k \to \min \tag{1.17}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji}^k = b_i^k\,,\ i \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K} \tag{1.18}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \alpha_k x_{ij}^k \le q_{ij}\,,\ (i,j) \in \mathcal{A} \tag{1.19}$$

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} v_{ij}(x_{ij}) \le F \tag{1.20}$$

$$L_{ij}^k \le x_{ij}^k \le U_{ij}^k\,,\ (i,j) \in \mathcal{A}, k \in \mathcal{K} \tag{1.21}$$

gdje su c_{ij}^k stalni jedinični troškovi toka robe k preko luka $(i, j) \in A$, b_i^k je neto ponuda robe k u čvoru i, $L_{ij}^k \in \mathcal{R}_+$, $U_{ij}^k \in \mathcal{R}_+$ su odgovarajuće donje, odnosno gornje, granice toka robe k nad lukom $(i, j) \in A$. Sada imamo nelinearnosti i u funkciji cilja i u ograničenjima ovog modela. Modeli ovog tipa, jer potrošnja goriva može biti krivac za onečišćenje atmosfere, posebno su relevantni za analize utjecaja transporta na okoliš.

Poglavlje 2

Tehnike dekompozicije

2.1 Dekompozicija direktive cijena i dekompozicija direktive resursa

Klasične zadaće mrežne optimizacije često su prilično velike. Takve zadaće ponekad nemaju vidljivu mrežnu strukturu ili ta struktura nije dominantna u smislu broja ograničenja. Kada se to dogodi klasični algoritmi ili se ne mogu koristiti ili ih je potrebno modificirati. Vidjet ćemo da kada se skoro mrežna struktura pojavi povećana računska učinkovitost može se realizirati iz tehnika dekompozicije. Svaka od tehnika će se temeljiti na jednom od tri koncepta: dekompoziciji, akumulaciji ograničenja ili generiranju stupaca. Blago rečeno dekompozicija se odnosi na zavadi i vladaj strategiju za rješavanje problema pri čemu se izvorni problem rasčlanjava na manje, numerički lakše rješive probleme. To jest prvo ćemo dekomponirati problem koji treba rasčlaniti na manje podprobleme, a zatim ili generirati ograničenja ili stupce relevantne matrice samo prema potrebi. Iako to zahtjeva da riješimo puno pojednostavljenih problema, to otklanja potrebu da ikad riješimo potpuni problem sa svim ograničenjima. Ponekad će strategija dekompozicije bti dizajnirana oko kompliciranih ograničenja koji sprječavaju realizaciju čiste mrežne strukture. Lagrangeova relaksacija zadovoljava površnu definiciju dekompozicije, budući da se u toj metodi zadaće sa skoro mrežnom strukturom s kompliciranim ograničenjima rasčlanjavaju na niz zadaća s potpuno unimodularnim matricama ograničenja koje se mogu riješiti mrežnim simpleksom.

Dvije su vrste dekompozicije: dekompozicija direktive cijena i dekompozicija direktive resursa. U dekompoziciji direktive cijena centar izdaje cijene za korištenje zajedničkih resursa i podsustavi predlažu veličine svojih aktivnosti na temelju tih cijena, dok u dekompoziciji direktive resursa centar specificira raspodjelu zajedničkih proizvodnih čimbenika i ta se raspodjela utvrđuje iterativno na temelju informacija o cijenama iz podsustava. Ova dihtomija ovisi o promatranju zadaće optimizacije kao prikaza "organizacije" koja se sastoji od središnjice koja upravlja resursima koji su podijeljeni ili dodjeljeni većem broju (pod)odjela od kojih svaki ima svoja specifična ograničenja. To je u skladu sa sljedećom strukturom:

$$(c^1)^T x^1 + \cdots + (c^R)^T x^R \to \min \tag{2.1}$$

$$Q^1 x^1 + \cdots + Q^R x^R \leq q \tag{2.2}$$

$$A^1 x^1 = b^1 \tag{2.3}$$

$$A^2 x^2 = b^2 \tag{2.4}$$

$$\vdots$$

$$A^{R-1} x^{R-1} = b^{R-1} \tag{2.5}$$

$$A^R x^R = b^R \tag{2.6}$$

$$x^1 \geq 0, x^2 \geq 0, \ldots, x^{R-1} \geq 0, x^R \geq 0 \tag{2.7}$$

gdje su $r \in [1, R]$, $R \in \mathcal{R}_{++}$, $c^r \in \mathcal{R}^{n_r}$, $x^r \in \mathcal{R}^{n_r}$, $q \in \mathcal{R}^\rho$, Q^r je $\rho \times n_r$ matrica, $b^r \in \mathcal{R}^{m_r}$, A^r je $m_r \times n_r$ matrica, $\rho \in \mathcal{R}_{++}$, $m_r \in \mathcal{R}_{++}$, $n_r \in \mathcal{R}_{++}$ tako da je

$$n_r \geq m_r\,,\ r \in [1, R]. \tag{2.8}$$

Pretpostavili smo linearnost funkcije cilja i svih ograničenja, budući da se linearno ograničene nelinearne zadaće mogu riješiti kao nizovi odgovarajuće definiranih linearnih zadaća. Ograničenja (2.3)-(2.6) su opisana kao blok dijagonalne prirode. Kako nemamo pretpostavku o broju ograničenja resursa (2.2) u odnosu na broj dijagonalnih ograničenja bloka ne možemo reći da ova zadaća ima skoro mrežnu strukturu kada je svaka matrica A^r potpuno unimodularna. Lagrangeova relakacija je klasificirana kao pristup dekompozicije cjenovne direktive budući da postavlja cijene(dualne varijable) $u \geq 0$ na zajednički resurs q tako da svaka od R podjela može autonomno optimizirati vlastite operacije. Nasuprot tome, u dekompoziciji direktive o resursima, koordinator želi odabrati vektore resursa

$$q^1, q^2, \ldots, q^R \in \mathcal{R}^\rho \tag{2.9}$$

koji zadovoljavaju

$$\sum_{r=1}^{R} q^r \leq q$$

tako da je zadaća (2.1)-(2.7) riješena kada svaka podjela riješi vlastitu zadaću linearnog programiranja:

$$c^r x^r \to min \tag{2.10}$$

$$Q^r x^r \leq q^r \tag{2.11}$$

$$A^r x^r = b^r \tag{2.12}$$

$$x^r \geq 0 \tag{2.13}$$

gdje $r = 1, 2, \ldots, R$.

2.2 Lagrangeova relaksacija

Lagrangeova relaksacija jedna je od najčešće korištenih metoda za rješavanje u cijelom matematičkom programiranju. Korisnost metode ni na koji način nije ograničena sa strukturom mreže. Može biti prilično učinkovita za rješavanje matematičkih zadaća koje ne uključuju potpunu unimodularnost ni u jednom podskupu svog ograničenja.
Jedna od osnovnih tehnika kombinatorne optimizacije je ograničavanje: zadan je konačan ali "ružan" skup $S \subset \mathcal{R}^n$ i jednostavna funkcija f (recimo linearna ili kvadratna) te trebamo pronaći gornju granicu za optimalnu vrijednost zadaće

$$\max f(x)\,,\;\; x \in S$$

Lagrangeova relaksacija je univerzalna tehnika za to. Da bi bio primjenjiv, dopustiv skup S mora biti zapisan kao $S = \mathcal{X} \cap \{x : c(x) = 0\}$, gdje je $\mathcal{X}$ takav da je lako maksimizirati funkciju f nad njim, dok su ograničenja $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ "komplicirana". Tehnika proizvodi puno optimalnih rješenja za zadaću $\max_{x \in \bar{S}} f(x)$, gdje je $\bar{S}$ konveksna ljuska skupa S.
Sada ćemo uvesti tehniku Lagrangeove relaksacije kao jednostavan, ali općeniti alat. Promotrimo prvo zadaću optimizacije u apstraktnom obliku

$$\max f(x)\,,\;\; x \in \mathcal{X}\,,\;\; c_j(x) = 0\,,\;\; j = 1, \ldots, m \tag{2.14}$$

što ćemo nazvati primarnom zadaćom. Definiramo Lagrangian, funkciju primarne varijable x i dualne varijable $u \in \mathcal{R}^m$:

$$\mathcal{X} \times \mathcal{R}^m \ni (x, u) \mapsto L(x, u) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} u_j c_j(x) = f(x) - u^T c(x) \tag{2.15}$$

gdje posljednja jednakost uvodi oznaku c za m-vektora ograničenja. Jednostavnim riječima, Lagrangian zamjenjuje svako ograničenje linearnom "cijenom" koju treba platiti ili primiti prema predznaku od u_j. Maksimiziranje $L(\cdot, u)$ na cijelom $\mathcal{X}$ je stoga usko povezano s rješavanjem (2.14). U određenom smislu, $\mathcal{X}$ se može smatrati "svemirom" u kojem živi x, dok c predstavlja relaksirana ograničenja.

Definicija 2.2.1. *Dualna funkcija povezana sa* (2.14) *i* (2.15) *je funkcija definirana sa*

$$\mathcal{R}^m \ni u \mapsto \theta(u) = \max_{x \in \mathcal{X}} L(x, u) \tag{2.16}$$

Dualni problem je tada

$$\min \theta(u)\,,\ u \in \mathcal{R}^m \tag{2.17}$$

Lagrangeova relaksacija je vrlo svestrana tehnika, koja u biti prihvaća sve podatke od $\mathcal{X}$, f i c. Ključna je sljedeća napomena.

Napomena 2.2.2. *Rješavanje zadaće* (2.14) *je "teško" dok je rješavanje zadaće* (2.16) *"lako".*

Lagrangeova relaksacija ima za cilj pronaći odgovarajući u. Da bi objasnili zašto pronalaženje odgovarajućeg u znači rješavanje dualnog problema (2.17) pogledajmo sljedeći jednostavni zaključak: po definiciji od θ, za svaki u vrijedi

$$\theta(u) \geq f(x)\,,\ \text{ x dopustiv u (2.14)}\,,\ u \in \mathcal{R}^m$$

jednostavno jer je $u^T c(x) = 0$.
Ova relacija poznata je kao slaba dualnost, što daje motivaciju za dualnu zadaću:
i) Budući da svaki $\theta(u)$ odozgo ograničava optimalni trošak u (2.14), minimizirati θ svodi se na pronalaženje najbolje takve ograde.
ii) Druga motivacija je manje poznata, ali možda i važnija. Pretpostavimo da želimo riješiti (2.14) uz pomoć (2.16). Tj. pretpostavimo da želimo u takav da (2.16) proizvodi neki $\arg\max x_u$ od $L(\cdot, u)$ koji također riješava (2.14). Konkretno, ovaj x_u mora biti dopustiv u (2.14) i stoga mora zadovoljavati $\theta(u) = f(x_u)$. S obzirom na slabu dualnost, jedina šansa za naše u je da minimizira θ.

Napomena 2.2.3. *Pretpostavimo da zadaća ima uvjete tipa nejednakosti:*

$$\max f(x)\,,\ x \in \mathcal{X}\,,\ c_j(x) \leq 0\,,\ j = 1, \ldots, m$$

Da bi dobili oblik (2.14)*, uvedemo pomoćne varijable s (varijable koje se dodaju ograničenju nejednakosti kako bi se transformirale u jednakost) i upotrijebimo fleksibilost Lagrangeove relaksacije: uzmemo* $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times \mathcal{R}^m_+$*, tako da moramo dualizirati:*

$$\max f(x)\,,\ x \in \mathcal{X}\,,\ s \geq 0 \in \mathcal{R}^m\,,\ c(x) + s = 0 \in \mathcal{R}^m$$

Lagrangian je

$$L'(x, s, u) = f(x) - u^T(c(x) + s) = L(x, u) - u^T s$$

gdje je $L(x,u)$ *obični Lagrangian. Rezultirajuća dualna funkcija cilja* θ' *je*

$$\theta'(u) = \begin{cases} +\infty & u_j < 0 \\ \theta(u) & u_j \geq 0 \end{cases}$$

gdje je θ *dualna funkcija. Odnosno dualni problem postaje* $\min_{u\geq 0} \theta(u)$.

U skladu sa prethodnom napomenom, pretpostavimo da je f linearno u (2.14), formulacija u novom skupu $\mathcal{X} \times \mathcal{R}$ je

$$\max s_o\,,\ s_0 \leq f(x)\,,\ x \in \mathcal{X}\,,\ c(x) = 0 \in \mathcal{R}^m$$

Prva mogućnost je umetanje ograničenja s_0 u taj skup, formiramo Lagrangian $s_0 - u^T c(x)$, čiji je maksimum nad $x \in \mathcal{X}$ i $s_0 \leq f(x)$ je $\theta(u)$, ništa se nije promijenilo. Alternativno, možemo dualizirati to ograničenje, formirajući Lagrangian

$$\mathcal{X} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}^{m+1} \ni (x, s_0, u, u_0) \mapsto L'(x, s_0, u, u_0) = s_0 - u_0[s_0 - f(x)] - u^T c(x)$$

Maksimiziranje u odnosu na s_0(neograničeno) daje $+\infty$ ako je $u_0 \neq 1$, i za $u_0 = 1$ njegov maksimum u odnosu na $x \in \mathcal{X}$ daje $\theta(u)$, opet se ništa nije promijenilo.

Napomena 2.2.4. *Kao rezultat toga nema gubitka općenitosti u pretpostavci o linearnosti* f *u* (2.14). *U slučaju da je zadana funcija cilja nelinearna, samo koristimo formulaciju koja se smatra najprikladnijom, ionako sve daju isti dual.*

Možda je najočitija upotreba Lagrangeove relaksacije kada (2.14) ima puno varijabli, koje bi postale neovisne da ograničenja c nisu prisutna.
Za ilustraciju promotrit ćemo problem predaje jedinice u elektroenergetskom sustavu koji se sastoji od optimizacije planiranja proizvodnje skupa I elektrana tijekom nekog vremenskog perioda T. Moguća formulacija je sljedeća:
i) Kontrolne varijable x_i^t, za svaki $i \in I$ i $t = 1, \ldots, T$, označavaju razinu proizvodnje jednince i u trenutku t. x_i će predstavljati vektor $(x_i^t)_{t=1}^T$
ii) Svaka jedinica unutar određenog dopustivog skupa $\mathcal{X}_i$, koji predstavlja radna dinamička ograničenja (za nuklearno postrojenje, $\mathcal{X}_i$ je konačan skup mogućih planova: x_i^t može biti nekoliko vrijednosti, recimo $\{500, 1000, 1500, 2000\}$). Kada proizvodnja dosegne određenu razinu mora ostati tamo određeni broj vremenskih razdoblja.
iii) U svakom trenutku t, potražnja mora biti zadovoljena, to su tzv. statička ograničenja, označena sa $c^t(x^t) \leq 0$. Obično su funkcije c^t aditivne, $c^t(x^t) = \sum_{i\in\mathcal{I}} c_i^t(x_i^t)$.
iv) Trošak proizvodnje x_i po jedinici i tijekom cijelog vremena je $C_i(x_i)$.
Tada je zadaća

$$\begin{aligned} \sum_{i\in\mathcal{I}} C_i(x_i) &\to \min \\ x_i \in \mathcal{X}_i\,,\ i &\in \mathcal{I} \\ c^t(x^t) \leq 0\,,\ t &= 1, 2, \ldots, T \end{aligned} \tag{2.18}$$

Zbog pretpostavke da su statička ograničenja aditivna, uzimanje duala proizvodi aditivni Lagrangian: sa $u = (u^t)_{t=1}^T$

$$L(x,u) = \sum_{i \in I} C_i(x_i) + \sum_{t=1}^{T} u^t c^t(x^t) = \sum_{i \in I} C_i(x_i) + \sum_{t=1}^{T} u^t \sum_{i \in I} c_i^t(x_i)^t$$

Nakon preuređivanja vidimo da je L zbroj lokalnih Lagrangiana, koji ovise samo o x_i: minimiziranje $L(\cdot, u)$ preko $\mathcal{X} = \prod \mathcal{X}_i$ daje zadaću:

$$\min_{x_i \in \mathcal{X}_i} C_i(x_i) + \sum_{t=1}^{T} u^t c^t(x_i^t)$$

što je puno lakše riješiti nego (2.18).
Prethodni primjer savršeno ilustrira uobičajenu situaciju u Lagrangeovoj relaksaciji. Kao što smo vidjeli Lagrangeova relaksacija samo zamjenjuje primarnu zadaću (2.14) sa dualnom (2.15)- (2.17).
Sada ćemo dati glavna svojstva dualne zadaće. U zadaći (2.14)- (2.17) koncentrirajmo se na prostor $\mathcal{R}^m$ dualnih varijabli i zanemarimo primarni prostor $\mathcal{R}^n$.

Teorem 2.2.5. *Kakvi god podaci za $\mathcal{X}$, f i c u* (2.14) *bili, funkcija θ je uvijek konveksna i poluneprekidna. Ako je u takav da* (2.16) *ima optimalno rješenje x_u(ne nužno jedinstveno), tada je $g_u = -c(x_u)$ subgradijent od θ u u:*

$$\theta(v) \geq \theta(u) + g_u^T(v-u)\,, \ v \in \mathcal{R}^m$$

što pisemo kao $g_u \in \partial\theta(u)$.

Prethodni teorem nam govori da je dualni problem lak ako je zadaća (2.16) lako rješiva. Sada ćemo pokazati zašto je on i dobar.
Pretpostavimo da smo maksimizirali $L(\cdot, u)$ za određeni u i tako dobili optimalni x_u, zajedno sa vrijednošću ograničenja $c(x_u) \in \mathcal{R}^m$. Stavimo $g_u = -c(x_u)$ i uzmemo proizvoljan $x \in \mathcal{X}$ takav da je $c(x) = -g_u$. Po definiciji, $L(x,u) \leq L(x_u, u)$, može se napisati kao

$$f(x) \leq f(x_u) - u^T c(x_u) + u^T c(x) = f(x_u) \tag{2.19}$$

Teorem 2.2.6. *(Everett) Uz prethodnu notaciju x_u riješava sljedeću perturbaciju od* (2.14)

$$\max f(x)\,, \ x \in \mathcal{X}\,, \ c(x) = -g_u$$

Gornja perturbirana zadaća sastoji se u zamjeni desne strane ograničenja u (2.14) vektorom g_u. Ako je taj vektor mali x_u se može smatrati optimalnim, ako je $g_u = 0$ x_u je optimalan. Ako pretpostavimo da je x_u samo ε-maksimizator Lagrangiana, tj. $L(x_u, u) \geq L(x,u) - \varepsilon$

za svaki $x \in \mathcal{X}$. Tada (2.19) postaje $f(x) \leq f(x_u) + \varepsilon$ i x_u postaje ε-optimalno rješenje perturbirane zadaće. Primjetimo da za dobivanje željenog svojstva $f(x) \leq f(x_u)$ u (2.19) je dovoljno imati $u^T(c(x) - c(x_u)) \leq 0$. Kao rezultat, x_u rješava zadaću

$$\max f(x)\,,\ x \in \mathcal{X}\,,\ u^T c(x) \leq -u^T g_u$$

Tehniha Lagrangeove relaksacije zajedno sa optimizacijom subgradijenta se može primjeniti na linearnu zadaću (2.1)- (2.7) kao i na proširenje koje proizlazi iz pretvaranja funkcije cilja u nelinearnu korištenjem jediničnih troškova luka ovisnih o protoku.
Očigledna ograničenja za poskupljenje su ograničenja resursa (2.2) jer se tada relaksirani podproblemi koji se susreću u optimizaciji subgradijenta mogu staviti u oblik

$$(c^1x^1 + \cdots + c^Rx^R) + u^T(Q^1x^1 + \cdots + Q^Rx^R - q) \to \min \tag{2.20}$$

$$A^rx^r = b^r\,,\ r \in [1,R] \tag{2.21}$$

$$x^r \geq 0\,,\ r \in [1,R] \tag{2.22}$$

gdje je $u \in \mathcal{R}^\rho$, koji se dalje može razložiti na

$$c^rx^r + (u)^T[Q^rx^r - q] \to \min \tag{2.23}$$

$$A^rx^r = b^r \tag{2.24}$$

$$x^r \geq 0 \tag{2.25}$$

za svaki $r \in [1,R]$, dopuštajući korištenje bilo koje posebne strukture matrice A^r, čak i ako posebna struktura ne postoji, podproblemi su znatno manji u smislu broja ograničenja i broja varijabli koje svaka uključuje.

2.3 Dantzig-Wolfeova dekompozicija

Definicija 2.3.1. *Skup S u $\mathcal{R}^n$ je poliedarski ako je presjek konačnog broja zatvorenih poluprostora, tj.*

$$S = \{x \in \mathcal{R}^n : p_i^T x \leq \alpha_i, i = 1, \ldots, n\}$$

Definicija 2.3.2. *Točka $x \in S$ je ekstremna točka poliedarskog skupa S ako ne postoje točke x^1 i x^2 u S i skalar $0 < \lambda < 1$ takvi da je $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$.*

Definicija 2.3.3. *Točka $r \in \mathcal{R}$ je recesivni smjer poliedarskog skupa S ako za bilo koju točku $x \in S$ skup $\{y \in \mathcal{R}^n : y = x + \lambda r, \lambda \geq 0\}$ je sadržan u S. Zraka $r \in S$ je ekstremni rcesivni smjer ako ne postoje zrake $r^1, r^2 \in S^0$ i skalar μ ($r^1 \neq \lambda r^2$ za sve (λ i $0 < \mu < 1$) takve da je $r = \mu r^1 + (1 - \mu)r^2$.*

Teorem 2.3.4. *(Teorem o reprezentaciji) Neka je S neprazan poliedarski skup u R^n oblika $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$, gdje je A $m \times n$ matrica ranga m. Neka su $v^1, v^2, \ldots, v^t$ ekstremne točke od S, $d^1, d^2, \ldots, d^s$ ekstremene zrake od S. Tada je $x \in S$ ako i samo ako se x može zapisati kao*

$$x = \sum_{j=1}^{t} \theta_j v^j + \sum_{j=1}^{s} \mu_j d^j$$

$$\sum_{j=1}^{t} \theta_j = 1$$

$$\theta_j \geq 0\,,\ i = 1, \ldots, t$$

$$\mu_j \geq 0\,,\ j = 1, \ldots, s$$

Napomena 2.3.5. *Prethodni teorem temelj je za familiju metoda dekompozicije direktive cijena koje predstavljaju alternativu Lagrangeovoj relaksaciji. Teorem se koristi za postizanje aproksimacija dopustivog područja linearno ograničenih zadaća s velikim brojem varijabli u smislu podskupa punog skupa ekstremnih točaka.*

Napomena 2.3.6. *U nastavku će nam trebati:*
i) ako je skup omeđen, nema ektremnih smjerova
ii) ekstremne točke su vrhovi poliedarskog skupa koji tvore ograničenja
iii) ekstremni smjerovi generiraju sve točke u konusu
iv) teorem o reprezentaciji

Promotrimo sljedeću linearnu zadaću:

$$\begin{aligned} c^T x &\to \min \\ \Gamma x &\leq q \\ x \in S &= \{x : x \geq 0, Ax = b\} \end{aligned} \tag{2.26}$$

gdje su $x \in \mathcal{R}^n$, $c \in \mathcal{R}^n$, $q \in \mathcal{R}^\gamma$, $b \in \mathcal{R}^m$, Γ je $\gamma \times n$ matrica, A je $m \times n$ matrica. (2.26) je verzija općeg linearnog programiranja velikih zadaća (2.1)-(2.7). U ovoj notaciji S je područje definirano ograničenjima nenegativnosti uzetim zajedno sa $Ax = b$.
Pretpostavimo da je S ograničen, očito je zatvoren. Dakle, S je kompaktan. Teorem o reprezentaciji nam govori da se bilo koja točka u S može napisati kao konveksna kombinacija ekstremnih točaka u S, budući da neće biti ekstremnih zraka. Ako su $v^1, v^2, \ldots, v^t$ ekstremne točke od S, tada vrijedi

$$x \in S \implies x = \sum_{j=1}^{t} v^j \theta_j$$

gdje je

$$\sum_{j=1}^{t} \theta_j = 1 \tag{2.27}$$

$$\theta_j \geq 0\,,\ j = 1, 2, \ldots, t$$

i t označava broj ekstremnih točaka.
Zamjena za x iz (2.27) u terminima ekstremnih vektora omogućava nam da ponovno formuliramo zadaću (2.26) kao sljedeći tzv. glavni problem (oznaka MP)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{t} (c^T v^j)\theta_j &\to min \\
\sum_{j=1}^{t} (\Gamma v^j)\theta_j &\leq q \\
\sum_{j=1}^{t} \theta_j &= 1 \\
\theta_j \geq 0\,,\ j &= 1, 2, \ldots, t
\end{aligned} \tag{2.28}$$

što možemo napisati kao

$$\begin{aligned}
\min Z_{MP} &= \sum_{j=1}^{t} (c^T v^j)\theta_j \\
\sum_{j=1}^{t} (\Gamma v^j)\theta_j - q &\leq 0 \qquad (y) \\
1 - \sum_{j=1}^{t} \theta_j &= 0 \qquad (\alpha) \\
\theta_j \geq 0 \quad j &= 1, 2, \ldots, t
\end{aligned} \tag{2.29}$$

gdje je $s \in \mathcal{R}^\gamma$ vektor pomoćnih varijabli, $y \in \mathcal{R}^\gamma$ vektor dualnih varijabli za "loša" ograničenja $\sum_{j=1}^{t} (\Gamma v^j)\theta_j - q \leq 0$ i α je jedna dualna varijabla za normalizacijsko ograničenje $1 - \sum_{j=1}^{t} \theta_j = 0$. Tada je

$$u = \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}$$

potpuni vektor dualnih varijabli.
Problem (2.29) poznat je kao glavni problem(MP). Kako je t, broj ekstremnih točaka od S, obično vrlo velik, nabrajanje svih točaka $v^1, v^2, \ldots, v^t$ općenito je nepraktično, ponekad i

nemoguće. Glavni problem u Dantzig-Wolfeovoj dekompoziciji je učinkovito generiranje ekstremnih točaka. Vidjet ćemo da je moguće generirati ekstremne točke samo prema potrebi, čime se izbjegava potpuno nabrajanje. To je poznato kao generiranje stupaca jer ima učinak dodavanja dodatnih stupaca u matricu.
Ako se simpleks algoritam primjeni na (MP), nas zanima j-ta komponenta smanjenog troška koja odgovara varijabli θ_j, koja je

$$\overline{c_j} = c^T v^j - y^T(\Gamma v^j) - \alpha \tag{2.30}$$

Odaberemo, ako postoji, varijablu θ_k za unos baze koja odgovara

$$k = \arg\{\min_{1\leq j\leq t} c^T v^j - y^T(\Gamma v^j) - \alpha\} \tag{2.31}$$

Određivanje indeksa k zadovoljavajući (2.31) općenito je izvedivo s računske strane, budući da je t općenito vrlo velik i ekstremne točke v^j nisu sve poznate u bilo kojoj iteraciji. Jer je S kompaktan, minimum svake linearne funkcije cilja nad S mora se postići u jednoj od njenih ekstremnih točaka. Stoga,

$$\min_{1\leq j\leq t} c^T v^j - y^T\Gamma v^j - \alpha = \min_{x\in S}(c^T - y^T\Gamma)x - \alpha \tag{2.32}$$

Ilustrirali smo temeljnu važnost sljedećeg podproblema (SP):

$$\begin{aligned} &\min Z_{SP} = (c^T - y^T\Gamma)x - \alpha \\ &x \in S = \{x : x \geq 0, Ax = b\} \end{aligned} \tag{2.33}$$

U slučaju da je A potpuno unimodularna, podproblem (SP) je posebno zanimljiv. Čak ako A nije potpuno unimodularna, (SP) još uvijek ima značajnu privlačnost jer uključuje manja ograničenja od izvornog problema.
Sljedeći teorem ključni je rezultat koji se odnosi na (SP) te vodi završetku Dantzig-Wolfeove dekompozicije.

Teorem 2.3.7. *(Optimalnost u Dantzig-Wolfeovoj dekompoziciji) Optimalnost za izvorni problem* (2.26) *je ekvivalentan nenegativnosti funkcije cilja podproblema* (2.32).

ALGORITAM DANTZIG-WOLFEOVE DEKOMPOZICIJE

Korak 0.(Inicijalizacija) Odrediti početni skup

$$V^1 = \{x^1, x^2, \ldots, x^t\}$$

ekstremnih točaka za

$$S = \{x : x \geq 0 \quad i \quad Ax = b\}$$

gdje je $t_1 \geq 1$. Postaviti $k = 1$.

Korak 1.(Oblikovanje i rješavanje glavnog problema) Korištenjem ekstremnih točaka V^k i reprezentacije

$$x = \sum_{j=1}^{t} \theta_j v^j$$

treba formirati k-ti glavni problem (MP^k)

$$\sum_{j=1}^{t} (cv^j)\theta_j \to min$$

$$\sum_{j=1}^{t} (\Gamma v^j)\theta_j - q \leq 0 \qquad (y)$$

$$1 - \sum_{j=1}^{t} \theta_j = 0 \qquad (\alpha)$$

$$\theta_j \geq 0\,,\ j = 1, 2, \ldots, t$$

Riješiti (MP^k) da se dobiju težine i dualne varijable

$$\theta_k = (\theta_1^k, \theta_2^k, \ldots, \theta_t^k)^T$$

$$y_k = (y_1^k, y_2^k, \ldots, y_m^k)^T$$

$$\alpha_k$$

gdje je m broj redaka od A.

Korak 2.(Formiranje i rješavanje podproblema) Formirati podproblem (SP^k)

$$Z_{SP}^k = \min[c^T - (y^k)^T \Gamma]x - \alpha_k$$

$$x \in S = \{x : x \geq 0, Ax = b\}$$

Riješiti (SP^k) da bi dobili novu ekstremnu točku

$$v^{t+1}$$

Korak 3.(Ažuriranje i zaustavljanje) Ako je $Z_{SP}^k \geq 0$ STOP, trenutne težine su optimalne s pripadajućim optimalnim rješenjem

$$x^* = \sum_{j=1}^{t} \theta_j v^j$$

Inače, postaviti

$$V^{k+1} = V^k \cup v^{t+1}$$
$$k = k + 1$$
$$t_k = t_k + 1$$

i vratiti se na Korak 1.

Napomena 2.3.8. *(MP^k) ima samo $\gamma + 1$ ograničenje umjesto $m + \gamma$, gdje je γ broj redaka matrice Γ korištenih za definiranje ograničenja $\Gamma x - q \leq 0$ i m je broj redaka od matrice A. Ako je A potpuno unimodularna može se ostvariti dodatna učinkovitost.*

2.4 Bendersova dekompozicija

Proučavamo Bendersov problem (BP):

$$\begin{aligned} c^T x + f(y) &\rightarrow min \\ Ax + By &= b \\ x &\geq 0 \\ y &\in Y \end{aligned} \tag{2.34}$$

U primjenama, x je tipično vektor protoka, y vektor binarnih varijabli odlučivanja.

Napomena 2.4.1. *Možemo misliti da prethodni problem ima skoro mrežnu strukturu ako je x varijabli puno više nego varijali y i ako je A potpuno unimodularna. Međutim skoro mrežna struktura nije potrebna.*

Korolar 2.4.2. *$Z \geq f(y) + w^T(b - By)$ za svaki w tako da je $w^T A \leq c$ ako i samo ako je $Z \geq f(y) + (w^j)^T(b - By)$ i $(d^j)^T(c - By) \leq 0$ za svaku ekstremnu točku w^j i ektremni smjer d^j poliedarskog skupa $K(c) = \{w : w^T A \leq c\}$.*

Dokaz. Prisjetimo se sljedećeg oblika Farkaševe leme: postoji vektor $x \geq 0$ koji zadovoljava $Ax = b$ ako i samo ako je $w^T b \geq 0$ za svaki w takav da $w^T A \geq 0$. Naš interes za primjenom Farkaševe leme motiviran je intuitivnom strategijom rješavanja (BP) fiksiranjem y tako da se treba baviti samo zadaćom linearnog programiranja u terminima varijable x. Mogu se koristiti samo one vrijednosti y za koje postoji x koji zadovoljava ograničenja koja proizlaze iz ove perspektive. Odnosno y mora pripadati skupu

$$R(y) = \{y \in Y : Ax = b - By, \text{za neki } x \geq 0\}$$

Primjena Farkaševe leme na sljedeći linearni sustav za fiksni y:

$$Ax = b - By\,,\ x \geq 0$$

nam govori da je y izvediv ako i samo ako je

$$w^T(b - By) \leq 0$$

za sve w td. $w^T A \leq 0$. Budući da konus $K(0) = \{w : w^T A \leq 0\}$ poliedarski, ima konačan broj generatora, odnosno svaki $w \in K(0)$ se može zapisati kao

$$w = \sum_{j=1}^{s} \theta_j d^j \ , \ \theta_j \geq 0 \tag{2.35}$$

Štoviše, d^j, $j = 1, 2, \ldots, s$, generira translatirani konus $K(c) = \{w : wA \leq c\}$. Zamjena (2.35) u izraz $w(b - By) \leq 0$ daje

$$\sum_{j=1}^{s} \theta_j (d^j)^T (b - By) \leq 0$$

što vrijedi za svaki $\theta_j \geq 0$ ako i samo ako $d^j(b - By) \geq 0$ za $j = 1, \ldots, s$. Ovo, uz činjenicu da samo ekstremne točke w^j mogu biti rješenja od

$$\max[f(y) + w^T(b - By)] : w \in K(c) = \{w : w^T A \leq c\}$$

dokazuje Korolar. □

Prethodni Korolar ključan je za interpretaciju Bendersove metode.
Izvorni problem (BP) možemo pisati kao (BP)'

$$\min_{y \in Y} \{f(y) + \min[c^T x : Ax = b - By, x \geq 0]\} \tag{2.36}$$

Dual unutarnjeg problema u (2.36) je jasan

$$[w^T(b - By) : w^T A \leq c] \to max$$

Prema jakoj dualnosti znamo

$$\min[c^T x : Ax = b - By, x \geq 0] = \max[w^T(b - By) : w^T A \leq c] \tag{2.37}$$

Posljedično, došli smo do

$$\min_{y \in Y} \max_{wA \leq c} [f(y) + w^T(b - By)]$$

što se može napisati kao (BP')

$$Z \to min$$

$$Z \geq f(y) + w^T(b - By)$$
$$w^T A \leq c\,,\ k = 1, \ldots, s$$
$$y \in Y$$

Konačno, vidimo da (BP') zajedno sa Koralarom 2.3.6 vodi do Bendersovog glavnog problema (BMP)

$$\begin{aligned} Z &\to min \\ Z \geq f(y) + (w^j)^T(b - By) \quad j &= 1, \ldots, t \\ (d^j)^T(b - By) &\leq 0 \\ y &\in Y \end{aligned} \tag{2.38}$$

gdje je t broj ekstremnih točaka, s broj ekstremnih smjerova konusa $K(c) = \{w : w^T A \leq c\}$ Trebat će nam neka vrsta generiranja stupaca kako bismo izbjegli nabrajanje svih ekstremnih točaka i zraka u (2.38). U tu svrhu koristimo kao podproblem (SP) naš dual unutarnjeg problema (SP^k):

$$\begin{aligned} w^T(b - By^k) &\to max \\ w^T A &\leq 0 \end{aligned} \tag{2.39}$$

gdje je k broj iteracije.
Osnovni algoritam za implementaciju Bendersovog particioniranja uključuje "akumulaciju ograničenja" i ima sljedeću strukturu:

ALGORITAM BENDERSOVE DEKOMPOZICIJE

Korak 0.(Inicijalizacija) Pronaći početnu dopustivu točku $y^0 \in Y$. Postaviti $k = 0$.

Korak 1.(Formiranje i rješavanje podproblema) Riješiti (SP^k) (2.39) za svaki novi $y^k \in Y^k$ da bi generirali novi skup W^k aktivnih ekstremnih točaka od $\{w : wA \leq c\}$ i skup D^k pridruženih ekstremnih smjerova.

Korak 2.(Formiranje i rješavanje glavnog problema) Riješiti (MP^k)

$$Z \to min$$

$$Z \geq f(y) + (w^j)^T(b - By) \quad j = 1, \ldots, t^k$$
$$(d^j)^T(b - By) \leq 0 \quad j = 1, \ldots, s^k$$

gdje je $t^k \equiv$ trenutni broj ekstremnih točaka u W^k i $s^k \equiv$ trenutni broj ekstremnih smjerova u D^k, i pritom generirati y^{k+1}

Korak 3.(Zaustavljanje i ažuriranje) Testirati optimalnost (x^k, y^k) u (BP), gdje je (x^k, w^k) primarni dual za (2.37) kada je $y = y^k$. Ako nije optimalno, stavi se $k = k + 1$ i ide na Korak1.

Poglavlje 3

Primjene u problemima lokacije

3.1 Nekapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom

Problem lokacije ima važno mjesto u ekonomskoj teoriji i praksi, a sastoji se od određivanja mjesta (lokacije) objekta prema nekom kriteriju (ili kriterijima) uz zadana ograničenja i pretpostavke. Najprije ćemo razmotriti problem lokacije objekta bez ograničenja kojeg nazivamo nekapacitirani problem lokacije objekta sa fiksnim troškom. Pretpostavljamo da su poznate lokacije i fiksni troškovi izgradnje objekta na pojedinoj lokaciji. Minimizirati ćemo zbroj troškova lociranja objekta na pojedinoj lokaciji i troškove transporta.

Uvedimo oznake:
i - indeks čvora
j - indeks potencijalne lokacije
f_j - fiksni troškovi izgradnje objekta na lokaciji $j \in J$
h_i - potražnja u čvoru $i \in I$
d_{ij} - udaljenost od čvora $i \in I$ do lokacije $j \in J$
α - trošak transporta jedinične robe po jedninici udaljenosti
$X_j = \begin{cases} 1 \text{, ako izgradimo objekt na lokaciji } j \in J \\ 0 \text{, inače} \end{cases}$
Y_{ij}- udio potražnje iz čvora $i \in I$ koji zadovoljava objekt na lokaciji $j \in J$

Sada možemo formulirati nekapacitirani problem lokacije objekta sa fiksnim troškom.

$$\sum_{j \in J} f_j X_j + \alpha \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} Y_{ij} \rightarrow min \tag{3.1}$$

$$\sum_{j\in J} Y_{ij} = 1\,,\ i \in I \tag{3.2}$$

$$Y_{ij} \leq X_j\,,\ i \in I\,,\ j \in J \tag{3.3}$$

$$X_j \in \{0,1\}\,,\ j \in J \tag{3.4}$$

$$Y_{ij} \geq 0\,,\ i \in I\,,\ j \in J \tag{3.5}$$

Funkcija cilja (3.1) minimizira ukupni trošak koji je zbroj fiksnih troškova objekata, ukupne ponderirane potražnje i udaljenosti koja je pomnožena s cijenom po jedinici udaljenosti po jedinici potražnje. Ograničenja (3.2) nam govore da se roba može transportirati iz lokacije j u čvor i samo ako ne izgradimo objekt u čvoru $j \in J$. Ograničenja (3.4) i (3.5) su ograničenja cjelobrojnosti i nenegativnosti.

3.2 Pristup Lagrangeove relaksacije

Promotrimo relaksaciju ograničenja (3.2) kako bi dobili sljedeći problem:

$$\max_{\lambda} \min_{X,Y} \sum_{j\in J} f_j X_j + \alpha \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} h_i d_{ij} Y_{ij} + \sum_{i\in I} \lambda_i \Big[1 - \sum_{j\in J} Y_{ij}\Big]$$

$$\max_{\lambda} \min_{X,Y} \sum_{j\in J} f_j X_j + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} (\alpha h_i d_{ij} Y_{ij} - \lambda_i) Y_{ij} + \sum_{i\in I} \lambda_i \tag{3.6}$$

$$Y_{ij} \leq X_j\,,\ i \in I\,,\ j \in J \tag{3.7}$$

$$X_j \in \{0,1\}\,,\ j \in J \tag{3.8}$$

$$Y_{ij} \geq 0\,,\ i \in I\,,\ j \in J \tag{3.9}$$

Za fiksne vrijednosti Lagrangeovih množitelja želimo minimizirati (3.6). Promotrimo prvi problem koji uključuje varijable alokacije Y_{ij}. Ako je $\alpha h_i d_{ij} Y_{ij} - \lambda_i \geq 0$, možemo staviti $Y_{ij} = 0$. Ako je $\alpha h_i d_{ij} Y_{ij} - \lambda_i \leq 0$, želimo Y_{ij} postaviti na što veći pozitivan broj. Y_{ij} je ograničen da bude manji od X_j. Izračunamo $V_j = f_j + \sum_{i\in I} \min(0, \alpha h_i d_{ij} Y_{ij} - \lambda_i)$. Ako stavimo $X_j = 1$, Lagrangeova funkcija cilja će se promijeniti za taj iznos. Fiksni troškovi su općenito pozitivni, dok će zbroj uvijek biti nepozitivan. Ako je $V_j < 0$, povoljno je postaviti $X_j = 1$, u suprotnom $X_j = 0$.
Dakle, za zadane vrijednosti Lagrangeovih množitelja λ_i, možemo pronaći optimalne vrijednosti za varijable lokacije i alokacije, X_j i Y_{ij}, koristeći sljedeći postupak u dva koraka:

Korak 1: Za svaku lokaciju kandidata $j \in J$, izačuna se $V_j = f_j + \sum_{i \in I} \min(0, \alpha h_i d_{ij} Y_{ij} - \lambda_i)$.
Stavimo

$$X_j = \begin{cases} 1\,, & V_j < 0 \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases}$$

Korak 2: Stavimo

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1\,, X_j = 1 & \text{i} \quad \alpha h_i d_{ij} Y_{ij} - \lambda_i \leq 0 \\ 0\,, \text{inače} \end{cases}$$

Za bilo koje vrijednosti Lagrangeovih množitelja, λ_i, evaluacija izraza (3.6) korištenjem varijabli lokacije i alokacije određene prethodnim postupkom dat će nam donju granicu funkcije cilja nekapacitiranog problema lokacije objekta s fiksnim troškom. Subgradijentnom metodom treba pronaći vrijednost Lagrangeovih množitelja koji maksimiziraju ovu granicu.
Moguće da će dobiveno rješenje korištenjem algoritma u dva koraka narušiti neka od relaksiranih ograničenja. Konkretno, moguće da neki čvorovi potražnje neće biti dodijeljeni nijednom objektu (tj. $\sum_{j \in J} Y_{ij} = 0$), a drugi će biti dodijeljeni dvama ili više objekata (tj. $\sum_{j \in J} Y_{ij} \geq 2$). Međutim, dopustivu točku primarne zadaće možemo konstruirati pomoću izgradnje objekta u čvorovima gdje je $X_j = 1$ i dodijeljivanjem zahtjeva najbližem objektu. Primarna funkcija cilja (3.1) procijenjena ovim skupom lokacija i alokacija potražnje pružit će nam gornju granicu rješenja. Jasno je, najmanja takva vrijednost u svim Lagrangeovim iteracijama najbolje rješenje za korištenje. Jedini problem sa kojim se možemo susresti je da je moguće da neke vrijednosti Lagrangeovih množitelja imaju rješenje za lokacije na kojima nema izgradnje objekata (tj. $\sum_{j \in J} X_j = 0$). Za iteracije Lagrangeovog postupka na kojima se to događa, jednostavno ne računamo gornju granicu za primarno rješenje (ili, ekvivalentno, postavljamo granicu tih iteracija na beskonačnost). Alternativno, budući da znamo da u rješenju mora postojati barem 1 objekt, možemo staviti $X_j = 1$ za lokaciju kandidata koja ima najmanju vrijednost V_j sve dok je ta vrijednost pozitivna. To će imati dva učinka, omogućit će nam da izračunamo strožu donju granicu na dotičnoj iteraciji i izračunavanje valjane gornje granice.

3.3 Kapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom

Kapaciteti su važni u mnogim problemima s lokacijom objekta. Na primjer, tipična tvornica za sklapanje automobila može približno sastaviti 500 vozila tijekom 8 sati smjene. Kako se obično radi u dvije smjene, udvostruči se broj vozila koji se mogu proizvesti u jednom danu. Međutim, kada bi tvornica radila 24 sata na dan, mogla bi proizvesti samo oko 1500 vozila na dan. Isto tako, skladište ima samo fiksni broj četvornih metara prostora.

Uz tvornice su i škole, luke, bolnice i ostale građevine objekti koji podliježu ograničenjima kapaciteta.
Problem kojim ćemo se baviti je određivanje mjesta izgradnje objekta kako bi se minimizirao zbroj troškova lokacije objekta i putnih troškova korisnika do objekta koji su podložni ograničenjima koja propisuju da se svi zahtjevi moraju zadovoljit te kapaciteti objekata ne smiju biti prekoračeni.
Uz notaciju koju smo definirali u nekapacitiranom problemu lokacije objekta s fiksnim troškom, definirajmo još jednu varijablu:
k_j- kapacitet objekta na mjestu $j \in J$ ako ćemo tamo izgraditi objekt

Sada možemo definirati kapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom:

$$\sum_{j \in J} f_j X_j + \alpha \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} Y_{ij} \to min \tag{3.10}$$

$$\sum_{j \in J} Y_{ij} = 1\,,\ i \in I \tag{3.11}$$

$$Y_{ij} \leq X_j\,,\ i \in I\,,\ j \in J \tag{3.12}$$

$$\sum_{i \in I} h_i Y_{ij} \leq k_j X_j\,,\ j \in J \tag{3.13}$$

$$X_j \in \{0,1\}\,,\ j \in J \tag{3.14}$$

$$Y_{ij} \geq 0\,,\ i \in I\,,\ j \in J \tag{3.15}$$

Formulacija je identična nekapacitiranom problemu lokacije objekta s fiksnim troškom (3.1)-(3.5), osim što smo sada uključili ograničenje kapaciteta (3.13). Ograničenje (3.12) više nije potrebno u cjelobrojnoj formulaciji ovog problema, jer će ograničenje (3.13) osigurati da zahtjevi u čvoru $i \in I$ ne budu dodijeljeni objektu na lokaciji $j \in J$ ako nismo odabrali lokaciju $j \in J$. Međutim, uključivanje ograničenja (3.13) značajno pojačava relaksaciju problema linearnog programiranja.
Napomenimo još da ako nam je zadan skup lokacija objekata koje su izvedive u smislu da ukupni kapacitet objekata premašuje ukupnu potražnju problem postaje transportni problem sortiranja. Konkrento, ako su nam zadane vrijednosti $\hat{X}_j$ za lokacijske varijable i $\sum_{j \in J} k_j \hat{X}_j \geq \sum_{i \in I} h_i$, tada se optimalna dodjela zahtjeva čvorova može pronaći rješavanjem problema linearnog programiranja:

$$\alpha \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} Y_{ij} \to min \tag{3.16}$$

$$\sum_{j\in J} Y_{ij} = 1\,,\ i \in I \tag{3.17}$$

$$\sum_{i\in I} h_i Y_{ij} \leq k_j \hat{X}_j = \begin{cases} k_j\,,\hat{X}_j = 1 \\ 0\ \,,\hat{X}_j = 0 \end{cases} \qquad j \in J \tag{3.18}$$

$$Y_{ij} \geq 0\,,\ i \in I\,,\ j \in J \tag{3.19}$$

Funkcija cilja minimizira ukupne troškove prijevoza. Ograničenje (3.17) nam govori da sva potražnja u čvoru $i \in I$ mora biti dodijeljena objektu. (3.18) je ograničenje ponude, desna strana je konstantna jer su vrijednosti $\hat{X}_j$ zadane i iznose 0 ili 1. (3.19) je ograničenje nenegativnosti. Dakle (3.16)-(3.19) definira transportni problem.
Činjenica da kapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom svodi na transportni problem kada su varijable lokacije X_j poznate bit će važna u pristupu rješenja o kojem ćemo rapravljati u idućem odjeljku. Ako rezultirajući problem nije dopustiv jer je ukupni kapacitet odabranih objekata manji od ukupne potražnje, primarni transportni problem bit će nedopustiv. To možemo izbjeći tako da osiguramo da ukupni kapacitet odabranih objekata bude veći ili jednak ukupnoj potražnji.

3.4 Pristup Bendersove dekompozicije

Bendersova dekompozicija temelji se na dekomponiranju kapacitiranih problema lokacije s fiksnim troškovima. Prvi problem je (gotovo) problem cjelobrojnog programiranja sa samo jednom neprekidnom varijablom. Nazivat ćemo ga glavnim problemom jer će nam dati okvirna mjesta lokacije objekta. Ovaj problem uključuje eksplicitno fiksne troškove objekta i implicitno troškove prijevoza. Drugi problem je problem čistog linearnog programiranja i zovemo ga podproblem. Rješavanjem podproblema moći ćemo izračunati stvarne troškove prijevoza za skup lokacija objekata koji predlaže glavni problem.
Preformulirat ćemo kapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom u smislu varijabli protoka Z_{ij}.

Definiramo nove oznake:
$c_{ij} = \alpha d_{ij}$- jednični trošak dostave između kandidata $j \in J$ i čvora potražnje $i \in I$
Z_{ij}- količina potražnje u čvoru $i \in I$ koju zadovoljava objekt na lokaciji $j \in J$
Sada možemo preformulirati kapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom na sljedeći način:

$$\sum_{j\in J} f_j X_j + \alpha \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij} Z_{ij} \to min \tag{3.20}$$

$$\sum_{j \in J} Z_{ij} = h_i \, , \; i \in I \tag{3.21}$$

$$Z_{ij} \le k_j X_j \, , \; i \in I \, , \; j \in J \tag{3.22}$$

$$\sum_{i \in I} Z_{ij} \le k_j X_j \, , \; j \in J \tag{3.23}$$

$$X_j \in \{0, 1\} \, , \; j \in J \tag{3.24}$$

$$Z_{ij} \ge 0 \, , \; i \in I \, , \; j \in J \tag{3.25}$$

Kao i ranije, funkcija cilja (3.20) minimizira zbroj troškova lokacije objekta i troškova prijevoza. Jedina razlika između (3.10) i (3.20) je ta što smo uzeli udaljenost d_{ij} i trošak po jednici udaljenosti α u parametar troškova jedne jednice c_{ij} i naveli smo problem u terminima varijable protoka, a ne u varijabli alokacije. Ograničenje (3.22) nije potrebno i odbacit ćemo ga. Ograničenje (3.23) je ograničenje kapaciteta, te (3.24) i (3.25)su ograničenja cjelobrojnosti i nenegativnosti.
Prije nego što opišemo primjenu Bendersove dekompozicije na naš problem, napomenimo da pretvaranjem varijabli alokacije Y_{ij} u varijable protoka Z_{ij}, dobivamo jednu dodatnu prednost koja nije očita u formulaciji (3.20)-(3.25). Sada je lakše modelirati nelinearne funkcije troškova. Funkciju cilja (3.20) možemo napisati kao:

$$\sum_{j \in J} f_j X_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g_{ij}(Z_{ij})$$

gdje $g_{ij}(Z_{ij})$ može biti bilo koja nelinearna funkcija toka između čvora potražnje $i \in I$ i objekta na lokaciji $j \in J$.
Za fiksne vrijednosti varijabli lokacije X_j problem (3.20)-(3.25) se svodi na transportni problem. Ako popravimo lokacijske varijable za neke vrijednosti, $\hat{X}_j$, dobivamo sljedeći problem:

$$\min_{\mathbf{Z}} T(\mathbf{Z}|\hat{\mathbf{X}}) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} Z_{ij} \tag{3.26}$$

$$\sum_{j \in J} Z_{ij} = h_i \, , \; i \in I \tag{3.27}$$

$$\sum_{i \in I} Z_{ij} \le k_j X_j = \begin{cases} k_j \, , \hat{X}_j = 1 \\ 0 \; \, , \hat{X}_j = 0 \end{cases} \qquad j \in J \tag{3.28}$$

$$Z_{ij} \geq 0\,,\ i \in I\,,\ j \in J \tag{3.29}$$

Ova formulacija je identična formulaciji (3.16)-(3.19) osim što je navedena u terminima varijabli protoka umjesto varijabli alokacije. Identificirali smo funkciju cilja kao $T(\mathbf{Z}|\hat{\mathbf{X}})$ kako bismo naglasili da je trošak kojim se optimizira funkcija varijabli protoka Z_{ij} (koju u vektorskom obliku zapišemo kao $\mathbf{Z}$) i da je trošak uvjetovan odabirom lokacije objekta što je zadano varijablama $\hat{X}_j$ (u vektorkom obliku $\hat{\mathbf{X}}$). Mjesta objekata reprezentirana sa $\hat{\mathbf{X}}$ bit će generirana kao rješenja glavnog problema (3.26)-(3.29). Sada, uz ovu formulaciju napišimo kapacitirani problem lokacije s fiksnim troškom:

$$\min_{\mathbf{X}} \sum_{j \in J} f_j X_j + \left\{ \min_{\mathbf{Z}} [T(\mathbf{Z}|\mathbf{X}) \right\} \tag{3.30}$$

$$\sum_{j \in J} k_j X_j \geq \sum_{i \in I} h_i \tag{3.31}$$

$$X_j \in \{0, 1\}\,,\ j \in J \tag{3.32}$$

Ovo minimiziranje je eksplicitno preko varijabli lokacije X_j. Termin $(\mathbf{Z}|\mathbf{X})$ u funkciji cilja implicitno obuhvaća cijelu formulaciju problema transporta (3.26)-(3.29) uključujući varijable protoka Z_{ij}. Uključili smo ograničenje (3.31) koje osigurava da kapacitet svih odabranih objakata bude veći ili jednak ukupnoj potražnji. Ovo je nužan uvjet da bi transportni problem (3.26)-(3.29) imao neprazan dupustivi skup.

Promotrimo sada dual transportnog problema (3.26)-(3.29):
Definiramo dualne varijable:
U_i - dualna varijabla povezana s ograničenjem (3.27)
W_j - dualna varijabla povezana s ograničenjem (3.28)

Dualni problem možemo formulirati na sljedeći način:

$$\max D(\mathbf{U}, \mathbf{W}|\hat{\mathbf{X}}) = \sum_{i \in I} h_i U_i - \sum_{j \in J} k_j \hat{X}_j W_j \tag{3.33}$$

$$U_i - W_j \leq c_{ij}\,,\ i \in I\,,\ j \in J \tag{3.34}$$

Funkcija cilja je linearna u varijablama odluke, jer je $\hat{X}_j$ ulazna u ovoj formulaciji. Budući da optimalna vrijednost transportnog problema (3.26)-(3.29) mora biti jednaka optimalnoj vrijednosti dualnog transportnog problema (3.33)-(3.34), možemo napisati kapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom u terminima duala transportnog problema na način:

$$\min_{\mathbf{X}} \sum_{j\in J} f_j X_j + \left\{ \max_{\mathbf{U},\mathbf{W}} [D(\mathbf{U}, \mathbf{W}|\mathbf{X})] \right\} \tag{3.35}$$

$$\sum_{j\in J} k_j X_j \geq \sum_{i\in I} h_i \tag{3.36}$$

$$X_j \in \{0, 1\}, \ j \in J \tag{3.37}$$

Kao i prije, implicitno smo obuhvatili cijeli problem (3.33)-(3.34) uključivanjem maksimizacije $D(\mathbf{U}, \mathbf{W}|\mathbf{X})$ nad dualnim varijablama odluke U_i i W_j u funkciju cilja (3.35). Razmotrimo sada sve kombinacije $(\mathbf{U}^T, \mathbf{W}^T)$. Neka je D^T funkcija cilja dualnog problema koje odgovara t-toj ekstremnoj točki dopustivog područja dualnog problema. Tj. imamo

$$D^T = \sum_{i\in I} h_i U_i^T - \sum_{j\in J} k_j \hat{X}_j W_j^T, \quad \forall t \tag{3.38}$$

Znamo da se barem jedno optimalno rješenje za bilo koji problem linearnog programiranja javlja u ekstremnoj točki dopustivog područja. Dakle, D^* mora biti veći ili jednak D^T za sve ekstremne točke t. Stoga možemo još jednom napisati kapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom:

$$\min_{\mathbf{X}} \sum_{j\in J} f_j X_j + D \tag{3.39}$$

$$\sum_{j\in J} k_j X_j \geq \sum_{i\in I} h_i \tag{3.40}$$

$$D \geq \sum_{i\in I} h_i U_i^T - \sum_{j\in J} k_j W_j^T X_j, \quad \forall t \tag{3.41}$$

$$X_j \in \{0, 1\}, \ j \in J \tag{3.42}$$

$$D \geq 0 \tag{3.43}$$

U ovoj formulaciji zamijenili smo implicitni prikaz dualnog problema koji se nalazi u (3.35) vrijednošću dualne funkcije cilja (D). Ograničenje (3.40) identično je (3.36). Koristeći rezultat da barem jedno optimalno rješenje leži u ekstremnoj točki, u (3.41) ograničavamo da dualna vrijednost bude veća ili jednaka dualnoj funkciji cilja procijenjenoj u svakoj ekstremnoj točki dualnog dopustivog područja. Ograničenja (3.42) i (3.43) su ograničenja cjelobrojnosti i nenegativnosti.

Problemi s formulacijama (3.39)-(3.43) je taj što je broj ekstremnih točaka dualnog problema potencijalno vrlo velik. Stoga ne možemo eksplicitno nabrojati sva ograničenja u

(3.41) Ako riješimo (3.39)-(3.43) samo s podskupom ograničenja u (3.41) dobit ćemo valjanu donju granicu optimalne vrijednosti funkcije cilja za kapacitirani problem lokacije objekta fiksnog troška. Nadalje, ako se sva ograničenja koja se obvezuju u optimalnom rješenju (3.39)-(3.43) nađu u podskupu ograničenja koje uključujemo, tada će vrijednost funkcije cilja biti jednaka optimalnoj vrijednosti za kapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom.
Možemo izračunati gornju granicu problema uzimajući bilo koji skup lokacija s dovoljnim kapacitetom, procijenjujući optimalno rješenje za problem (3.26)-(3.29) zbrajanjem fiksnih troškova odabranih lokacija objekata. Ograničenje (3.40) osigurava da će svako rješenje za (3.39), (3.40), (3.42) i (3.43) imati dovoljan kapacitet. Svaki put kad riješimo (3.26)-(3.29) dobivamo novu ekstremnu točku dualnog problema. To će nam omogućiti da dodamo još jedno ograničenje (3.41), čime ćemo pooštriti donju granicu dobivenu rješenjem (3.39)-(3.43).
Započinjemo rješavanje glavnog problema (3.39)-(3.43) bez ograničenja (3.41), koji će se generirati iterativno. Funkcija cilja za ovaj problem je donja granica kapacitiranog problema lokacije objekta s fiksnim troškom. Rješenje nam daje dopustiv skup kandidata za lokacije objekta. Koristeći ove lokacije, rješavamo povezane i transportne i probleme (3.26)-(3.29) i njegov dual (3.33)-(3.34). Iz ovog dobivamo optimalne troškove transporta za mjesta koja sugerira glavni problem. Zbroj ovih troškova i fiksnih troškova lokacija identificiranih glavnim problemom predstavljaju gornju granicu problema. Ako su donja i gornja granica jednake, zaustavljamo se. Inače, koristeći optimalne dualne varijable, možemo glavnom problemu dodati još jedno ograničenje oblika (3.41). Ponovno rješavamo glavni problem dodavanjem nove donje granice. Opet, ako su donja i gornja granica jednake, zaustavljamo se. U tom slučaju rješenje koje odgovara najmanjoj gornjoj granici je optimalno rješenje. Ako granice nisu jednake, ponovno rješavamo odgovarajući transportni problem, izračunamo povezani ukupni trošak i ažuriramo gornju granicu ako je ukupni trošak rješavanja manji od trenutno najbolje gornje granice vrijednosti. Proces se nastavlja sve dok donja i gornja granica ne budu jednake.
Na kraju, napomenimo da se ograničenja (3.41) mogu jednostavno tumačiti. Ako varijable lokacije ostanu nepromijenjene, to jest, one ostanu iste kao vrijednosti koje su korištene u dobivanju dualnih varijabli za i-to rješavanje dualnog problema, ograničenje (3.41) identično je dualnoj funkciji cilja (3.33). Drugim riječima, vrijednost D mora biti veća ili jednaka vrijednosti dualne funkcije cilja koja je izračunata u iteraciji. Međutim, vrijednosti lokacijskih varijabli mogu se promijeniti u rješenju glavnog problema. Podsjetimo se da W_j^T daje iznos za koji će se promijeniti optimalna vrijednost rješenja transportnog problema za malu promjenu u j-toj desnoj strani ograničenja opskrbe (3.28) koristeći t-ti skup lokacija predloženih glavnim problemom. Dakle, $k_j W_j^T$ je procjena iznosa za koji će se promijeniti trošak prijevoza ako dodamo ili oduzmemo k_j jedninica s desne strane j-tog ograničenja kapaciteta počevši od vrijednosti koje proizlaze iz t-tog skupa lokacija koje

predlaže glavni problem. Ali k je samo kapacitet j-te kandidatske lokacije. Dakle, da je objekt odabran u t-tom skupu lokacija, $k_j W_j^T$ daje konzervativnu procjenu iznosa za koji bi se troškovi prijevoza povezani sa t-tim skupom lokacija povećali ako bismo objekt uklonili iz rješenja. Troškovi bi se povećali jer bi se X_j promijenio sa 1 na 0 i je $k_j W j^T$ ulazi u desnu stranu ograničenja (3.41) s negativnim predznakom. Budući da takva promjena predstavlja uklanjanje kapaciteta iz rješenja, za očekivati je povećanje troškova transporta. Slično, ako objekt j nije bio u t-tom skupu lokacija, $k_j W_j^T$ daje konzervativnu procjenu iznosa za koji bi se troškovi prijevoza povezani s t-tim skupom lokacija smanjili ako bismo rješenju dodali objekt j.

Bibliografija

[1] Terry L.Friesz, David Bernstein, *Foundations of Network Optimization and Games*, Springer, 2016.

[2] Mark S. Daskin, *Network and Discrete Location Models, Algorithms, and Applications*, Wiley, Singapore, 2013.

[3] Claude Lemarechal, *The ominipresence of Lagrange*, Springer, 2017.

[4] R. Ahuja, T. L. Magnanti, J. B. Orlin i M. R. Reddy, *Aplications of Network Optimization*, 1994.

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada bio je obraditi nekoliko tehnika dekompozicije u mrežnoj optimizaciji poput Lagrangeove relaksacije, Dantzig-Wolfeove dekompozicije i Bendersove dekompozicije. Te tehnike svode zadaće koje ne možemo rješavati klasičnim algoritmima na klasične zadaće. Nakon uvođenja nelinearne zadaće sa skoro mrežnom strukturom pokazali smo par primjera problema takvih zadaća koji se često koriste u praksi. Lagrangeova relaksacija jedna je od najčešće korištenih tehnika za rješavanje u cijelom matematičkom programiranju koja nam omogućava da pristupimo teškom optimizacijskom problemu pomoću niza jednostavnijih problema. Dantzig-Wolfeova dekompozicija se koristi kada problem linearnog programiranja ima posebnu strukturu za generiranje podproblema koji se mogu učinkovito rješiti. Bendersova dekompozicija je široko korištena egzaktna metoda rješenja za stohastičke programe, koja se sve više primjenjuje za rješavanje problema planiranja transporta i logistike. Na kraju smo primjenili Lagrangeovu relaksaciju na nekapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom i Bendersovu dekompoziciju na kapacitirani problem lokacije objekta s fiksnim troškom.

Summary

The aim of this master thesis has been to present several network optimization techniques with an emphasis on Lagrangean relaxation, Dantzig-Wolfe decomposition and Benders decomposition. These techniques reduce problems that we cannot solve using classical algorithms to classical problems. We have introduced a non-linear problem with an almost network structure and we have provided a few examples of such problems that are often used in practice. Lagrangean relaxation is one of the most commonly used solving techniques in mathematical programming which allows us to approach a difficult optimization problem with a simpler and more relaxed problem. Dantzig-Wolfe decomposition can be used when a linear optimization problem has special structure to generate subproblems that can be solved efficiently. Benders decomposition is a broadly used exact solution method for stochastic programs and it has been increasingly applied to transportation and logistics planning problems under uncertainty. Finally, we have applied Lagrange's relaxation to the nncapacitated fixed charge facility location problems and Benders' decomposition to the capacitated fixed charge facility location problems.

Životopis

Rođena sam 12. listopada 1997. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Žuti Brijeg. Nakon završene osnovne škole upisala sam VII. gimnaziju u Zagrebu koju sam pohađala od 2012.-2016. godine. U gimnaziji sam išla na županijska i jedno državno natjecanje iz matematike. Zatim sam 2016. godine upisala preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovnom-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2020. godine te iste godine sam upisala diplomski studij Financijske i poslovne matematike.