

# Chvatalov teorem

---

**Maloča, Glorija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:234678>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-22**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Glorija Maloča

**CHVÁTALOV TEOREM**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, srpanj 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Problem čuvara umjetničke galerije</b>	<b>3</b>
1.1 Osnovni pojmovi . . . . .	3
1.2 Motivacija . . . . .	5
<b>2 Triangulacija poligona</b>	<b>9</b>
2.1 Osnovni pojmovi i rezultati . . . . .	9
2.2 Veza s Problemom umjetničke galerije . . . . .	12
<b>3 Chvátalov teorem</b>	<b>15</b>
3.1 Chvátalov dokaz teorema umjetničke galerije . . . . .	15
3.2 Fiskov dokaz . . . . .	19
<b>4 Ortogonalne galerije</b>	<b>23</b>
4.1 Osnovni pojmovi i primjeri . . . . .	23
4.2 Podjela na konveksne četverokute . . . . .	26
<b>5 Još neke modifikacije problema</b>	<b>39</b>
5.1 Čuvanje čuvara . . . . .	39
5.2 Čuvanje čuvara u ortogonalnoj galeriji . . . . .	41
5.3 Tri dimenzije . . . . .	43
<b>Bibliografija</b>	<b>47</b>

# Uvod

1973. godine Victor Klee<sup>1</sup> predstavio je problem određivanja najmanjeg broja čuvara potrebnih za nadzor unutrašnjosti umjetničke galerije s  $n$  zidova. Ovaj problem poznat je pod nazivom *Problem čuvara umjetničke galerije*. Izvorni oblik problema sadrži pretpostavku da su čuvari stacionarni te u svakom trenutku mogu vidjeti svoju okolinu u svim smjerovima. Za potpuni nadzor galerije svaki njen dio mora biti vidljiv barem jednom čuvaru.

Nedugo nakon, 1975. godine Václav Chvátal<sup>2</sup> otkrio je nešto što je ubrzo postalo poznato kao *Chvátalov teorem umjetničke galerije* ili kraće *Chvátalov teorem*. Naime, Chvátal je dokazao da su  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvara ponekad nužna i uvijek dovoljna za nadzor galerije s  $n$  zidova.

U ovom radu najprije ćemo matematički precizno formulirati navedeni problem. Primjerice, tlocrt galerije može se predstaviti poligonom, a čuvari se mogu prikazati točkama unutar poligona, prema tome ovo je jedan geometrijski problem.

Ključan dio Chvátalovog dokaza je podjela poligona na dijelove za koje je dovoljan jedan čuvar. Budući da je za svaki trokut dovoljan samo jedan čuvar, prije samog dokaza upoznat ćemo koncept triangulacije poligona, odnosno podjelu poligona na trokute. Zatim ćemo pokazati kako grupiranjem trokuta unutar triangulacije možemo smanjiti broj potrebnih čuvara.

Václav Chvátal dokazao je da trokute unutar triangulacije poligona s  $n$  vrhova možemo grupirati u najviše  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  dijelova za koje je dovoljan po jedan čuvar te na taj način osigurati nadzor čitavog poligona. Nakon izlaganja Chvátalovog dokaza, obraditi ćemo i dokaz kojeg je 1978. godine predstavio Steve Fisk<sup>3</sup>. Njegov dokaz je nešto jednostavniji i vizualno privlačniji, a temelji se na bojanju vrhova poligona. Iako je Fiskov dokaz jednostavniji, ukoliko želimo proučavati slične probleme važno je temeljito proučiti Chvátalov dokaz jer ćemo njegov dokaz često moći modificirati tamo gdje Fiskov neće davati rezultate.

Budući da u stvarnosti zidovi većine zgrada zatvaraju prave kutove, obradit ćemo jednu posebnu vrstu poligona, ortogonalne poligone. Umjesto podjele poligona na trokute, ovdje ćemo koristiti podjelu na konveksne četverokute za koje je također dovoljan po jedan čuvar.

---

<sup>1</sup>V. Klee (1925. - 2007.), američki matematičar

<sup>2</sup>V. Chvátal (1946. -), češki matematičar

<sup>3</sup>S. Fisk (1946. - 2010.), američki matematičar

Zatim ćemo pokazati da za nadzor ortogonalnog poligona s  $n$  vrhova nikada nećemo trebati više od  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  čuvara.

Za kraj ćemo obraditi još nekoliko prirodnijih modifikacija problema čuvara umjetničke galerije, kao što je čuvanje čuvara te ćemo galerije prenijeti u tri dimenzije.

# Poglavlje 1

## Problem čuvara umjetničke galerije

Geometrijski likovi prikladni su za reprezentiranje mnogih objekata i situacija iz stvarnog života, a među njima su i poligoni. Između ostalog poligonima možemo predstaviti i tlocrte zgrada. Na samom početku navest ćemo nekoliko definicija potrebnih za razumijevanje nastavka rada.

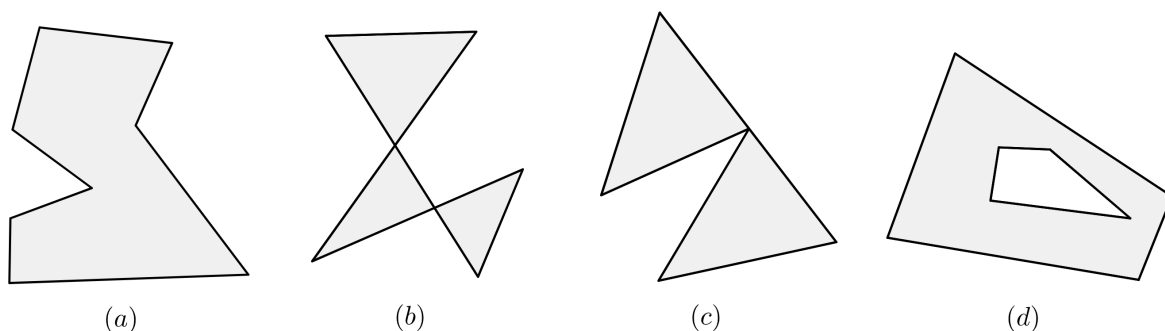
### 1.1 Osnovni pojmovi

**Definicija 1.1.1.** *Neka su  $v_1, v_2, \dots, v_n$  točke u ravnini pri čemu je  $n \geq 3$ . Područje ravnine omeđeno segmentima  $\overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \dots, \overline{v_{n-1}v_n}, \overline{v_nv_1}$  nazivamo **poligon** ako susjedni segmenti nemaju zajedničkih točaka osim one koja ih spaja i ako se nesusjedni segmenti ne sijeku. Navedene točke nazivamo **vrhovima poligona**, a segmente **stranicama**. Poligon s  $n$  vrhova ima  $n$  stranica. Skup svih stranica poligona  $P$  naziva se **rub poligona** i označava s  $\partial P$ .*

**Primjer 1.1.2.** *Slika 1.1 prikazuje četiri objekta u ravnini. Objekti (b) i (c) ne zadovoljavaju uvjete iz prethodne definicije jer se nesusjedni segmenti sijeku. Objekt (d) ima dva ruba, jedan vanjski rub i jedan unutarnji te ga nećemo smatrati poligonom jer njegovo područje ravnine nije određeno samo jednim skupom segmenata. Stoga, samo objekt (a) smatramo poligonom, a objekt (d) nazivamo poligon s rupom.*

Primijetimo da stranice poligona čine zatvorenu izlomljenu liniju bez samopresijecanja. Takva linija primjer je jednostavne Jordanove krivulje u ravnini. Slijedi važan teorem čini dokaz nećemo provoditi.

**Teorem 1.1.3** (Jordanov teorem). *Svaka jednostavna Jordanova krivulja u ravnini dijeli tu ravninu na točno dva dijela, jedan ograničen kojeg nazivamo unutrašnjost, drugi neograničen kojeg nazivamo vanjšina krivulje.*



Slika 1.1: Neki objekti u ravnini

Ovo opravdava našu definiciju poligona kao područje ravnine omeđeno konačnim skupom segmenata.

**Napomena 1.1.4.** U nekoj literaturi se pojam poligona definira samo kao određeni skup segmenata koji omeđuju dio ravnine te on ne uključuje i omeđeno područje. Tada poligon kod kojeg se segmenti, odnosno stranice ne križaju nazivamo jednostavnim. Prema tome, u ovom radu pod pojmom poligona podrazumijevamo jednostavni poligon zajedno s njegovom unutrašnjošću.

**Definicija 1.1.5.** Neka je zadan poligon s  $n$  vrhova. Unutarnji kut poligona koji se nalazi pri vrhu  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , nazivamo **konveksnim** ako je njegova mjera manja od  $180^\circ$ , inače kažemo da je kut **konkavan**. Tada i vrh  $v_i$  nazivamo konveksnim tj. konkavnim. Poligon kod kojeg su svi kutovi konveksni nazivamo **konveksnim**. Ukoliko poligon sadrži barem jedan konkavan kut, nazivamo ga **konkavnim poligonom**.

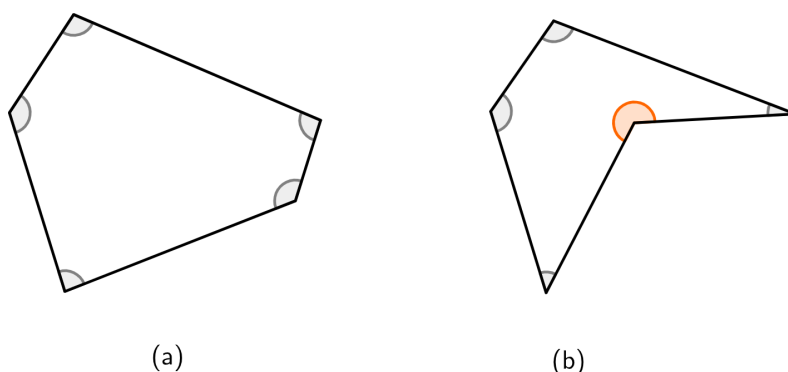
**Primjer 1.1.6.** Na slici 1.2 prikazana su dva poligona. Kod poligona (a) svi unutarnji kutovi su konveksni, prema tome poligon (a) je konveksan. Poligon (b) sadrži jedan konkavan kut (označen narančastom bojom), stoga je poligon (b) konkavan.

Prije nego što krenemo na motivaciju Chvátalovog teorema definirat ćemo pojam vidljivosti u poligonu.

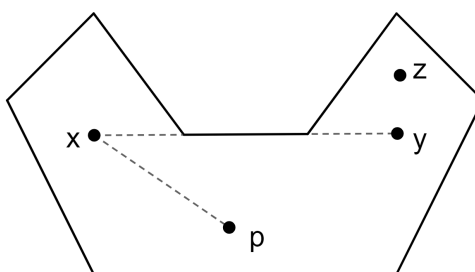
**Definicija 1.1.7.** Neka su  $x$  i  $y$  dvije proizvoljne točke poligona  $P$ . Kažemo da točka  $x$  **vidi** ili **pokriva** točku  $y$ , ako je cijeli segment  $\overline{xy}$  sadržan u  $P$ .

**Primjer 1.1.8.** Prethodna definicija dopušta liniji vidljivosti kontakt s rubom poligona, kao što je prikazano na slici 1.3. Prema tome, točka  $x$  vidi točke  $y$  i  $p$ , ali ne vidi točku  $z$ .





Slika 1.2: Vrste kutova



Slika 1.3: Vidljivost u poligonu

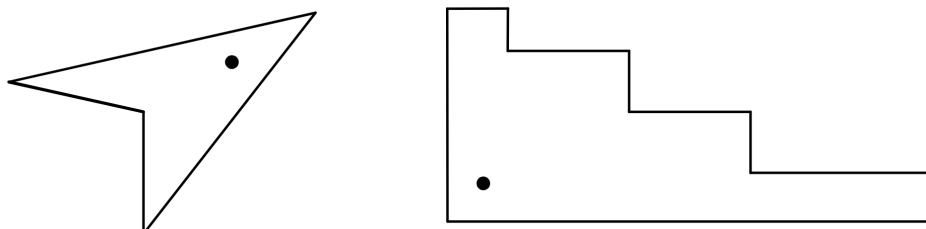
## 1.2 Motivacija

Zamislimo umjetničku galeriju čiju unutrašnjost želimo osigurati postavljanjem čuvara. Problem koji se prirodno nameće jest određivanje najmanjeg broja čuvara potrebnih za nadzor čitave galerije. Navedeni problem poznat je i kao *Problem čuvara umjetničke galerije*, a njegova složenost prvenstveno ovisi o obliku galerije i karakteristikama čuvara.

U nastavku rada bavit ćemo se izvornim oblikom ovog problema kojeg je 1973. godine predstavio Victor Klee, a glasi: Zamislimo umjetničku galeriju čiji tlocrt odgovara poligonu s  $n$  vrhova. Koliko najmanje stacionarnih čuvara je potrebno za nadzor čitave galerije uz pretpostavku da svaki čuvar može nadgledati svoju okolinu u svim smjerovima, tj.  $360^\circ$ ?

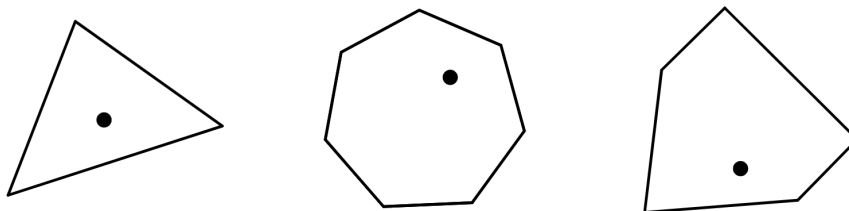
Za potpuni nadzor galerije potrebno je da svaki njen dio bude vidljiv barem jednom čuvaru. Budući da je tlocrt galerije oblika poligona, čuvare možemo prikazati točkama unutar poligona i reći ćemo da oni *čuvaju* ili *pokrivaju* poligon. Promotrimo sljedeće primjere.

**Primjer 1.2.1.** Za čuvanje svakog od poligona sa slike 1.4 "pravim" položajem jednog čuvara možemo izbjeći potrebu za dodatnim čuvarima.



Slika 1.4: Primjeri poligonalnih galerija

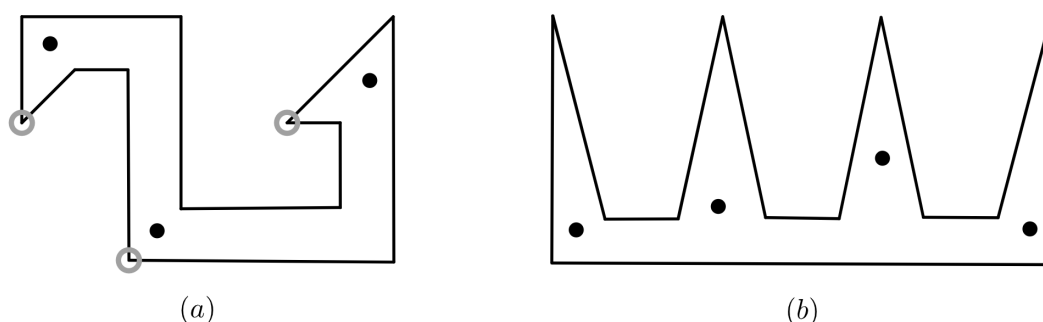
**Primjer 1.2.2.** Na slici 1.5 prikazana su tri konveksna poligona. Za čuvanje svakog od ovih poligona potreban je samo jedan čuvar kojeg možemo postaviti bilo gdje u poligonu. Prema tome možemo zaključiti da je jedan čuvar uvijek dovoljan za čuvanje konveksnog poligona. Posebno možemo zapaziti da za čuvanje trokuta nikada nećemo trebati više od jednog čuvara jer je svaki trokut konveksan poligon.



Slika 1.5: Primjeri konveksnih galerija

**Primjer 1.2.3.** Na slici 1.6 prikazana su dva poligona s dvanaest vrhova. Poligon (a) moguće je čuvati s tri čuvara (prikazanih crnim točkama) i nije ga moguće čuvati s manje od tri čuvara jer niti jedan on njih ne može istovremeno pokrivati dva od tri vrha naznačena sivom bojom. No, jesu li tri čuvara uvijek dovoljna za bilo koji poligon s dvanaest vrhova? Poligon (b) izgledom podsjeća na češalj s četiri zupca. Takva galerija zahtijeva četiri čuvara jer niti jedan čuvar ne može istovremeno čuvati dva zupca češlja.

Zanima nas postoji li opće pravilo koje nam govori koliko najviše čuvara bi nam moglo zatrebati za poligon s  $n$  vrhova. Prema tome, rješenje Kleeovog problema bilo bi odrediti najmanji broj čuvara potrebnih za čuvanje "najgoreg mogućeg" poligona s  $n$  vrhova, tj.



Slika 1.6: Primjeri poligona s dvanaest vrhova

onog za kojeg je potreban najveći broj čuvara. Kažemo da je taj broj ponekad nužan, ali uvijek dovoljan za nadzor poligona s  $n$  vrhova.

Istražujući različite oblike poligona s dvanaest vrhova lako se možemo uvjeriti da su četiri čuvara uvijek dovoljna te da češalj s četiri zupca može predstavljati "najgori" poligon s dvanaest vrhova. Svaki takav poligon u obliku češlja s  $t$  zubaca ima  $n = 3 \cdot t$  vrhova. Budući da ni jedan čuvar ne može istovremeno pokrivati više od jednog zupca, broj potrebnih čuvara je  $t$ , odnosno  $\frac{n}{3}$ . Nadalje, "rezanjem" jednog ili dva kuta češlja možemo ustanoviti da će i galerije s  $n = 3 \cdot t + 1$ , tj.  $n = 3 \cdot t + 2$  vrhova također zahtijevati najviše  $t$  čuvara.

Poprilično je jednostavno postaviti donju među koja potvrđuje nužnost, teži dio je dokazati da je taj broj čuvara i uvijek dovoljan jer nam je za to potreban argument koji vrijedi za sve poligone. Václav Chvátal prvi je dao odgovor na pitanje zašto je navedeni broj čuvara i uvijek dovoljan.



## Poglavlje 2

# Triangulacija poligona

U prethodnom poglavlju vidjeli smo kako kod nekih galerija nije bilo jednostavno postaviti najmanji čuvara tako da čitava galerija bude pokrivena. Očito je da ćemo takve galerije pokušati podijeliti na manje dijelove za koje je dovoljan po jedan čuvar. U nastavku rada upoznat ćemo koncept triangulacije poligona, odnosno podjelu poligona na trokute. Teoretski dio ovog poglavlja može se pronaći u knjigama [2] i [4].

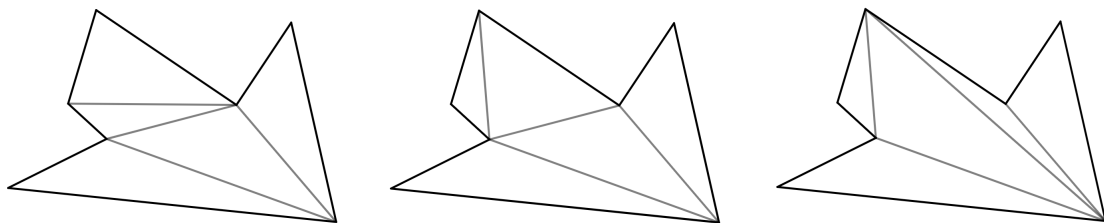
### 2.1 Osnovni pojmovi i rezultati

Dekompozicija poligona na jednostavnije dijelove postiže se crtanjem dijagonala.

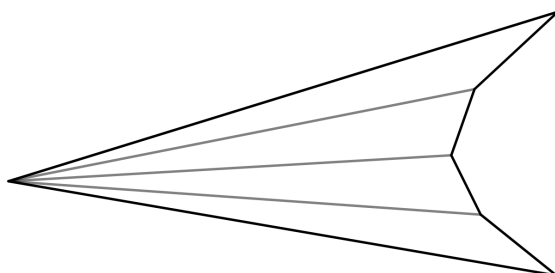
**Definicija 2.1.1.** *Dijagonala poligona je segment koji povezuje dva vrha poligona, a sve njegove točke osim krajnjih leže u unutrašnjosti poligona.*

**Definicija 2.1.2.** *Triangulacija poligona je dekompozicija poligona na trokute dodavanjem maksimalnog broja dijagonala koje se ne sijeku.*

Slika 2.1 prikazuje tri moguće triangulacije jednog poligona, a slika 2.2 prikazuje poligon koji ima jedinstvenu triangulaciju.



Slika 2.1: Tri moguće triangulacije poligona

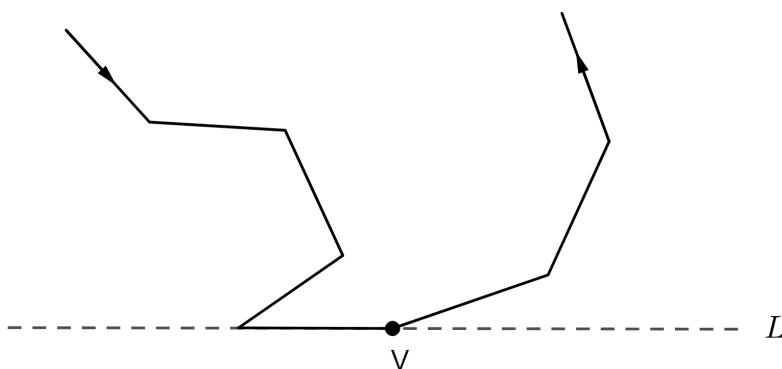


Slika 2.2: Poligon s jedinstvenom triangulacijom

U nastavku ćemo dokazati da se svaki poligon može triangulirati. Za to nam je potreban dokaz egzistencije dijagonale pa krenimo sa sljedećom lemom.

**Lema 2.1.3.** *Svaki poligon ima barem jedan strogo konveksni vrh.*

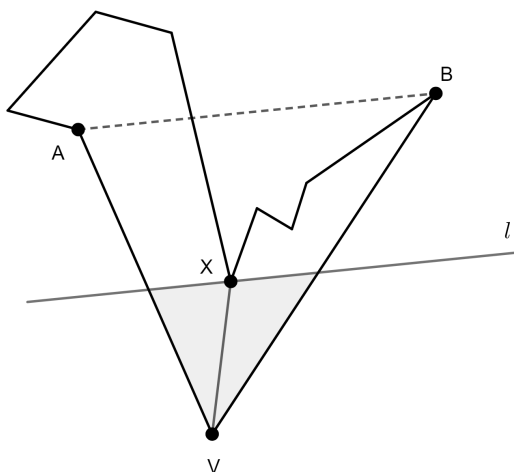
*Dokaz.* Ako su bridovi poligona orijentirani tako da je njihov smjer suprotan od smjera kazaljke na satu, tj. pozitivan, tada je strogo konveksni vrh zaokret u lijevo nekog zamišljenog šetača koji šeta po rubu poligona u pozitivnom smjeru, a konkavni vrh zaokret u desno. Unutrašnjost poligona je uvijek lijevo od šetača. Neka je  $V$  najniži vrh poligona, najniži po tome što ima minimalnu koordinatu  $y$  ukoliko poligon postavimo u koordinatni sustav. Ako postoji više najnižih vrhova neka je  $V$  krajnji desni, slika 2.3. Neka je  $L$  pravac paralelan s  $x$ -osi koji prolazi točkom  $V$ . Unutrašnjost poligona mora biti iznad  $L$  pa rub koji slijedi nakon  $V$  mora ležati iznad  $L$ . Ovi uvjeti zajedno impliciraju da šetač uvijek napravi lijevi zaokret u vrhu  $V$  pa je stoga  $V$  strogo konveksni vrh.  $\square$



Slika 2.3: Postojanje konveksnog vrha

**Lema 2.1.4.** *Svaki poligon s  $n \geq 4$  vrhova ima dijagonalu.*

*Dokaz.* Neka je  $V$  strogo konveksni vrh poligona  $P$ , čije je postojanje zajamčeno lemom 2.1.3 i neka su  $A$  i  $B$  dva susjedna vrha vrhu  $V$ . Ako je  $\overline{AB}$  dijagonala onda smo gotovi. Pretpostavimo da  $\overline{AB}$  nije dijagonala. Tada je  $\overline{AB}$  izvan poligona ili siječe njegov rub. Budući da je  $n > 3$ , u oba slučaja  $\triangle AVB$  sadrži barem jedan vrh poligona osim vrhova  $A$ ,  $V$  i  $B$ . Neka je  $Y$  skup svih vrhova poligona koji se nalaze unutar trokuta  $\triangle AVB$ . Kroz svaki od tih vrhova možemo povući pravac koji je paralelan s pravcem  $AB$ . Neka je  $L$  skup svih takvih pravaca. Dakle,  $L$  je skup svih pravaca koji su paralelni s  $AB$  i prolaze nekim vrhom iz  $Y$ . Kako je  $L$  konačan, možemo odabrati pravac  $l$  iz skupa  $L$  koji je najbliži vrhu  $V$ . Neka je  $X$  neki vrh iz  $Y$  koji se nalazi na pravcu  $l$ . Promotrimo sliku 2.4. Tvrdimo da je  $\overline{VX}$  dijagonala od  $P$ . Osjenčani dio unutrašnjosti trokuta  $\triangle AVB$  ne sadrži niti jedan vrh poligona zato što  $\overline{VX}$  ne siječe rub poligona osim u svojim krajnjim točkama. Stoga je  $\overline{VX}$  dijagonala poligona  $P$ .  $\square$



Slika 2.4: Dijagonala poligona

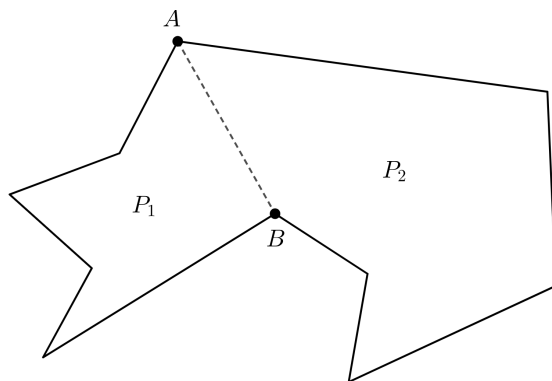
Sada kad znamo da svaki poligon s  $n \geq 4$  vrhova možemo dekompozirati u dva manja koristeći dijagonalu, uz pomoć matematičke indukcije dokazat ćemo da se svaki poligon može triangulirati.

**Teorem 2.1.5.** *Svaki poligon s  $n$  vrhova može se triangulirati.*

*Dokaz.* Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po broju vrhova poligona  $P$ , odnosno po  $n$ . Ako je  $n = 3$ , tada je  $P$  trokut i tvrdnja je trivijalno dokazana.

Neka je  $n > 3$  i pretpostavimo da je tvrdnja istinita za sve poligone s manje od  $n$  vrhova.

Prema lemi 2.1.4 postoji dijagonala koja poligon  $P$  razdvaja na dva poligona  $P_1$  i  $P_2$  (slika 2.5). Budući da oba poligona  $P_1$  i  $P_2$  imaju manje od  $n$  vrhova, po pretpostavci indukcije,  $P_1$  i  $P_2$  možemo triangulirati. Triangulacije poligona  $P_1$  i  $P_2$  u uniji daju poligon  $P$ , stoga zaključujemo da se svaki poligon s  $n$  vrhova može triangulirati.  $\square$



Slika 2.5: Dekompozicija poligona crtanjem dijagonale

Na slici 2.1 vidjeli smo tri moguće triangulacije jednog poligona sa 7 vrhova. Primijetimo da sve tri triangulacije imaju 4 dijagonale i 5 trokuta. Općenito može biti mnogo različitih triangulacija danog poligona, ali sve one imaju  $n - 3$  dijagonala i  $n - 2$  trokuta pri čemu je  $n$  broj vrhova poligona.

**Teorem 2.1.6.** *Svaka triangulacija poligona s  $n$  vrhova ima  $n - 3$  dijagonala i  $n - 2$  trokuta.*

*Dokaz.* Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom o broju vrhova  $n$  poligona  $P$ .

Tvrđnja je trivijalno istinita za  $n = 3$  te je time zadovoljena baza indukcije.

Neka je  $n > 3$  i pretpostavimo da je tvrdnja istinita za sve poligone s manje od  $n$  vrhova.

Neka je  $d$  dijagonala koja spaja neka dva vrha  $A$  i  $B$  poligona  $P$  kao na slici 2.5. Dijagonala  $d$  poligon  $P$  dijeli na dva poligona  $P_1$  i  $P_2$  s  $n_1$ , odnosno  $n_2$  vrhova. Budući da se vrhovi  $A$  i  $B$  pojavljuju u oba poligona vrijedi  $n_1 + n_2 = n + 2$ . Po pretpostavci indukcije slijedi da poligon  $P$  ima  $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = (n_1 + n_2) - 4 = n + 2 - 4 = n - 2$  trokuta i  $(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n - 3$  dijagonala, pri čemu smo dodali i dijagonalu  $d$ .  $\square$

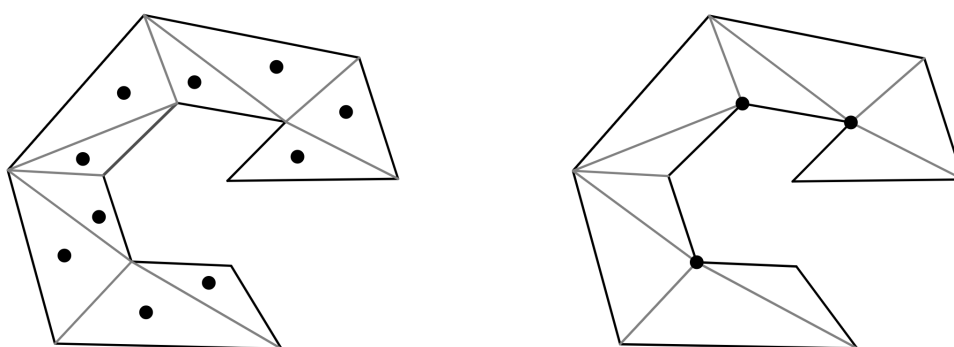
## 2.2 Veza s Problemom umjetničke galerije

Sada kad znamo da se svaki poligon može triangulirati te da je broj trokuta unutar svake triangulacije jednak, možemo se pitati zašto ne bismo postavili po jednog čuvara u svaki novonastali trokut i time riješili naš problem. U tom slučaju, prema teoremu 2.1.6, za



čuvanje poligona s  $n$  vrhova trebalo bi nam  $n - 2$  čuvara, a znamo da možemo bolje. Promotrimo sljedeći primjer.

**Primjer 2.2.1.** *Slika 2.6 prikazuje dva načina čuvanja jednog poligona s 12 vrhova. Ukoliko jednog čuvara postavimo u neki vrh trokuta dobivenog triangulacijom jasno nam je da on može čuvati sve trokute kojima je taj vrh zajednički. Navedenom idejom smanjili bismo broj čuvara s 10 na 3. Iz toga zaključujemo da bi bilo dobro pokušati poligon dekompozirati u oblike koji sadrže više trokuta dobivenih triangulacijom.*

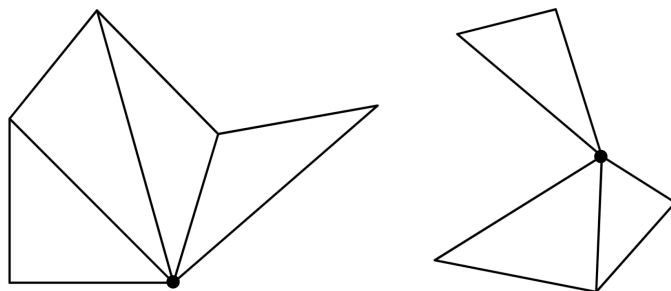


Slika 2.6: Dva načina čuvanja poligona

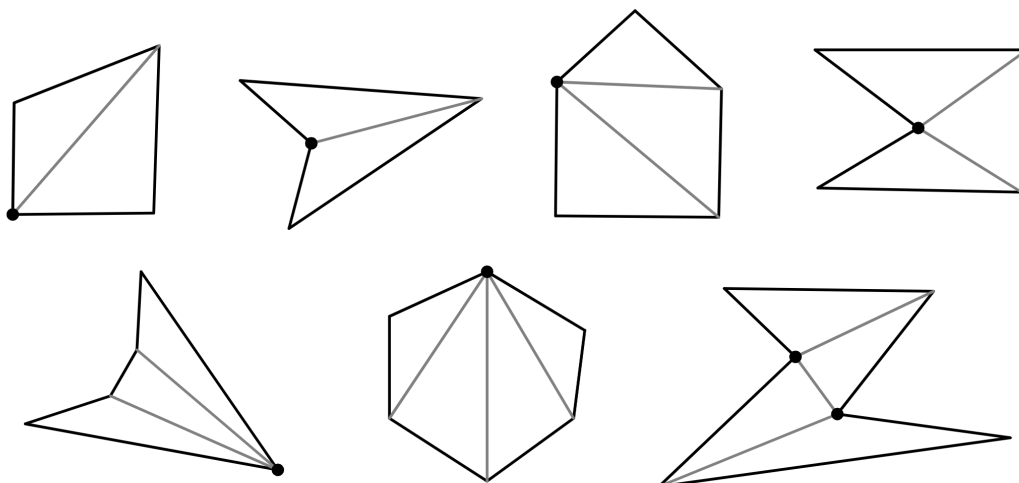
**Definicija 2.2.2.** *Lepeza je skupina trokuta odabrane triangulacije u kojoj svi pripadni trokuti imaju zajednički vrh kojeg nazivamo **središtem lepeze**.*

Slika 2.7 prikazuje dva primjera lepeza. U prethodnom poglavlju ustanovili smo da je za čuvanje konveksnog poligona uvijek dovoljan samo jedan čuvar postavljen bilo gdje u poligonu. Budući da je središte lepeze zajednički vrh svim pripadnim trokutima, postavljanjem čuvara u središte lepeze omogućujemo pokrivanje čitave lepeze. Prije nego što vidimo kako je Chvátal ovu ideju primijenio na poligone s  $n$  vrhova, pogledajmo što se događa prilikom triangulacije poligona s 4, 5 i 6 vrhova.

**Primjer 2.2.3.** *Promotrimo sliku 2.8. Za triangulaciju četverokuta potrebna nam je samo jedna dijagonala iz čega možemo zaključiti da je triangulacija svakog četverokuta nužno lepeza. Na slici su prikazane sve tri vrste peterokuta s obzirom na broj konkavnih kutova. Triangulacija svakog od njih je lepeza pa zaključujemo da je i triangulacija svakog peterokuta nužno lepeza. Nadalje, primjećujemo da prvo moguće povećanje broja lepeza dolazi tek sa šeterokutom.*



Slika 2.7: Primjeri lepeza



Slika 2.8: Neke triangulacije poligona s malim brojem vrhova

# Poglavlje 3

## Chvátalov teorem

### 3.1 Chvátalov dokaz teorema umjetničke galerije

Václav Chvátal je prvi 1975. godine dokazao da su  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvara uvijek dovoljna za nadzor poligona s  $n$  vrhova, a njegov dokaz koji slijedi možemo pronaći u knjizi [3].

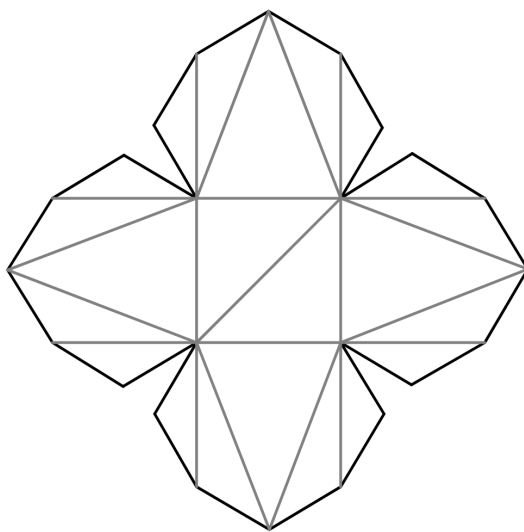
**Teorem 3.1.1** (Chvátalov teorem). *Svaka triangulacija poligona s  $n$  vrhova može se partitionirati u  $m$  lepeza tako da je  $m \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .*

*Dokaz.* Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po broju vrhova poligona, odnosno po  $n$ . Budući da je riječ o poligonu za bazu indukcije potrebno je provjeriti slučaj gdje je  $n = 3$ . Tvrdnja je tada trivijalno zadovoljena jer je svaki trokut ujedno lepeza. Slučajevi gdje je  $n$  jednak 4 ili 5 su također zadovoljeni jer je svaka triangulacija poligona s  $n < 6$  vrhova nužno lepeza, što smo vidjeli na slici 2.8.

Neka je  $n \geq 6$  i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve poligone s manje od  $n$  vrhova. Naš pristup bit će odvojiti dio triangulacije "rezanjem" duž dijagonale, zatim primijeniti pretpostavku indukcije i naposljetku vratiti odvojeni dio.

Primijetimo da neće biti dovoljno odvojiti samo jedan trokut jer će preostali dio triangulacije tada imati  $n - 1$  vrhova. To znači da ukoliko  $n$  nije djeljiv s 3 primjenom pretpostavke na preostali dio triangulacije dobivamo  $\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  lepeza pa ćemo dodavanjem odvojenog trokuta završiti s  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$  lepeza, a to je više lepeza nego što trebamo. Stoga, moramo odvojiti barem tri vrha poligona kako bi pretpostavka indukcije dala manje od  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  lepeza, dopuštajući grupiranje odvojenog dijela u lepezu. Odvajanje tri vrha, odnosno četiri stranice poligona nije uvijek moguće, što je predloženo slikom 3.1 na kojoj je prikazana jedna triangulacija poligona s 24 vrha. Stoga je ključan dio ovog dokaza bilo ustanoviti da uvijek postoji dijagonala koja odvaja 4 ili 5 ili 6 stranica poligona.

**Lema 3.1.2.** *U svakoj triangulaciji poligona s  $n \geq 6$  vrhova postoji dijagonala  $d$  takva da se rezanjem duž nje može odvojiti točno 4 ili 5 ili 6 stranica poligona.*



Slika 3.1: Ni jedna dijagonala ove triangulacije ne odvaja točno tri vrha poligona.

*Dokaz.* Odaberemo dijagonalu  $d$  koja odvaja najmanji broj stranica poligona i neka je taj broj, označimo ga s  $k$ , najmanje 4. U cikličkom poretku numeriramo vrhove poligona  $0, 1, \dots, n-1$  tako da dijagonala  $d$  spaja vrhove  $0$  i  $k$ . Neki vrh  $t$ ,  $0 < t < k-1$ , mora biti treći vrh trokuta kojemu je  $d$  jedna stranica. Budući da dijagonale  $(0, t)$  i  $(t, k)$  mogu odvajati manje od  $k$  stranica poligona, zbog minimalnosti od  $k$  imamo  $t \leq 3$  i  $k-t \leq 3$ . Zbrajanjem ove dvije nejednakosti dobivamo  $k \leq 6$ .  $\square$

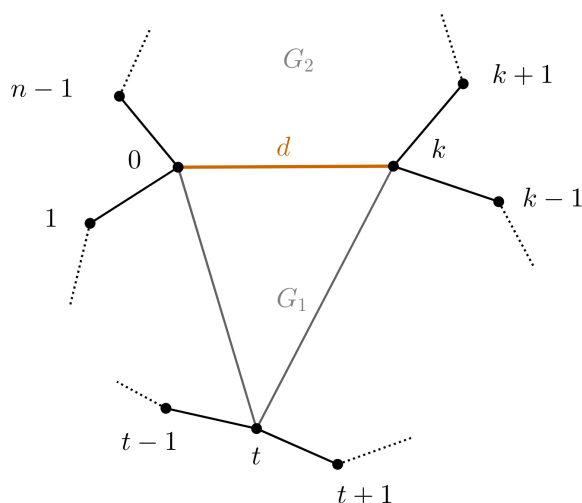
Dolazimo do koraka indukcije. Neka je  $G_1$  dio početne triangulacije  $G$  nastao odvajanjem duž dijagonale  $d$ , odabrane na način opisan u dokazu prethodne leme. Tada je  $G_1$  triangulacija poligona s  $k+1$  vrhova, što je predočeno slikom 3.2. Neka je  $G_2$  preostali dio početne triangulacije koja je stoga triangulacija poligona s  $n-k+1$  vrhova.

Pretpostavka indukcije kaže da  $G_2$  može biti particionirana u najviše  $g' = \lfloor \frac{n-k+1}{3} \rfloor$  lepeza. Budući da je  $k \geq 4$ , tada vrijedi da je  $g' \leq \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ .

Kako bismo dovršili dokaz potrebno je utvrditi da  $G_1$  ne dodaje više od jedne lepeze u ukupan broj lepeza početne triangulacije poligona. U nastavku ćemo razmotriti sve moguće vrijednosti za  $k$ .

**Slučaj 1.** ( $k = 4$ )  $G_1$  je triangulacija peterokuta. Ranije smo ustanovili da je svaka triangulacija poligona s pet vrhova nužno lepeza. Stoga je  $G$  particionirana u najviše  $g' + 1 = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 + 1 = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  lepeza.

**Slučaj 2.** ( $k = 5$ )  $G_1$  je triangulacija šesterokuta. Neka je  $T$  trokut u  $G_1$  kojemu je dijagonala  $d = (0, k)$  jedna stranica, a treći vrh je  $t$ . Ne možemo imati  $t = 1$  ili  $t = 4$  jer bi

Slika 3.2: Dijagonala  $d$  u proizvoljnom poligonu

dijagonale  $(0, 4)$  i  $(5, 1)$  tada odvojile 4 stranice poligona kršeći minimalnost  $k = 5$ . Slučajevi kada je  $t = 2$  i  $t = 3$  su očito simetrični, stoga ćemo promotriti samo jedan, npr.  $t = 2$ . Sada se četverokut  $(2, 3, 4, 5)$  može triangulirati na dva načina. Slijede svi mogući slučajevi koje prati slika 3.3.

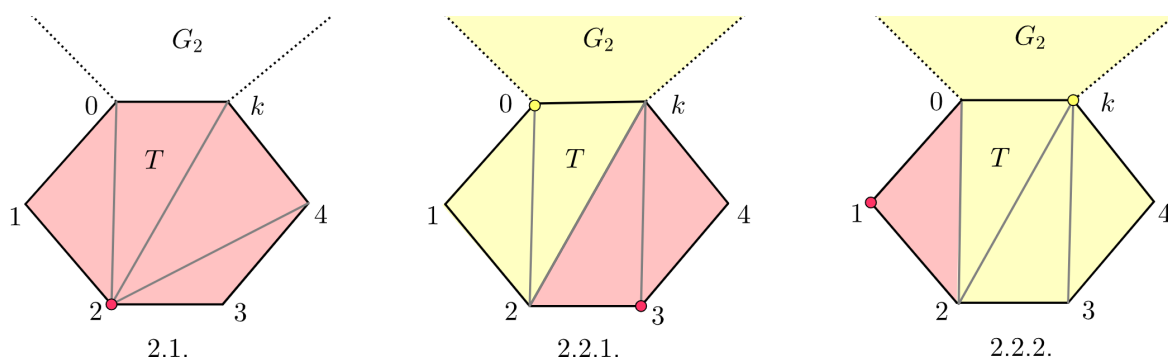
**Slučaj 2.1.** Prisutna je dijagonala  $(2, 4)$ . Tada je  $G_1$  lepeza sa središtem u vrhu 2.

**Slučaj 2.2.** Prisutna je dijagonala  $(3, 5)$ . Neka je  $G_0$  triangulacija dobivena kao unija triangulacije  $G_2$  i trokuta  $T$ . Tada je  $G_0$  triangulacija poligona s  $n - 5 + 1 + 1 = n - 3$  vrhova. Po pretpostavci indukcije imamo da se  $G_0$  može particionirati u najviše  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$  lepeza. Trokut  $T$  mora biti dio jedne od tih lepeza, označimo ju s  $F$ , a središte lepeze mora biti jedan od vrhova trokuta 0, 2 ili 5.

**Slučaj 2.2.1.** Središte lepeze  $F$  je vrh 0 ili 2. Tada trokut  $(0, 1, 2)$  pripojimo lepezi  $F$ , a četverokut  $(2, 3, 4, 5)$  čini svoju lepezu. Tada je ukupan broj lepeza opet najviše  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .

**Slučaj 2.2.2.** Središte lepeze  $F$  je vrh 5. Trokute  $(2, 3, 5)$  i  $(3, 4, 5)$  pripojimo lepezi  $F$ . Tada je preostali trokut  $(0, 1, 2)$  odvojena lepeza i rezultat je  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  lepeza.

**Slučaj 3.** ( $k = 6$ )  $G_1$  je triangulacija sedmerokuta. Vrh trokuta  $T$  kojem je dijagonala  $d = (0, k)$  jedna stranica ne može biti 1, 2, 4 ili 5 jer bi tada postojala dijagonala koja odvaja 4 ili 5 stranica, što je u suprotnosti s minimalnošću od  $k$  pa imamo da je  $t = 3$ .

Slika 3.3: Slučajevi za  $k = 5$ 

Svaki od četverokuta  $(0, 1, 2, 3)$  i  $(3, 4, 5, 6)$  ima dvije moguće triangulacije što dovodi do četiri podslučaja.

**Slučaj 3.1.** Prisutne su dijagonale  $(3, 1)$  i  $(3, 5)$ , slika 3.4 (a). Tada je  $G_1$  lepeza sa središtem u vrhu 3.

**Slučaj 3.2.** Prisutne su dijagonale  $(0, 2)$  i  $(3, 5)$ . Pripojimo četverokut  $(0, 2, 3, 6)$  triangulaciji  $G_2$  tako da oni zajedno čine triangulaciju  $G_0$  s  $n - 6 + 1 + 2 = n - 3$  vrhova. Po pretpostavci indukcije  $G_0$  se može particionirati u najviše  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$  lepeza. Neka je  $F$  jedna lepeza triangulacije  $G_0$  kojoj pripada trokut  $(0, 2, 3)$ , središte lepeze je tada jedan od tri vrha navedenog trokuta.

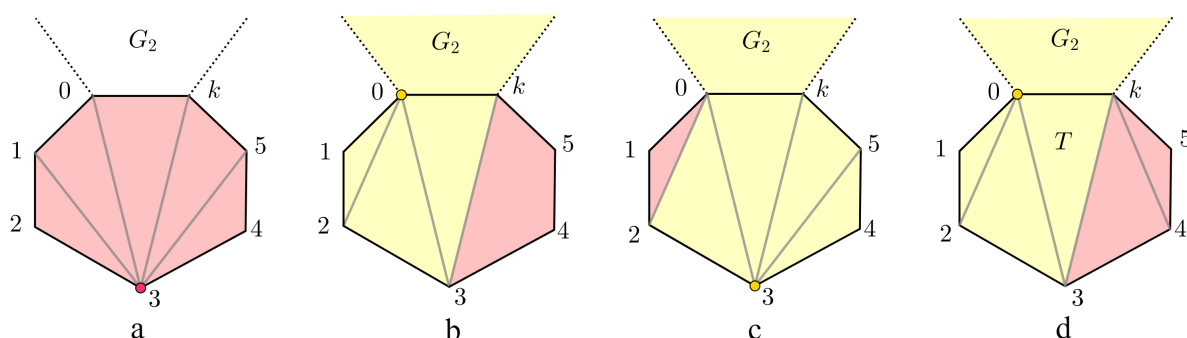
**Slučaj 3.2.1.** Središte lepeze  $F$  je vrh 0 ili vrh 2, slika 3.4 (b). Tada trokut  $(0, 1, 2)$  pripojimo lepezi  $F$  i učinimo četverokut  $(3, 4, 5, 6)$  zasebnom lepezom.

**Slučaj 3.2.2.** Središte lepeze  $F$  je vrh 3, slika 3.4 (c). Pripojimo četverokut  $(3, 4, 5, 6)$  lepezi  $F$  pa imamo da je trokut  $(0, 1, 2)$  zasebna lepeza.

U oba slučaja, početna triangulacija  $G$  je particionirana u najviše  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  lepeza.

**Slučaj 3.3.** Prisutne su dijagonale  $(1, 3)$  i  $(4, 6)$ . Primijetimo da je ovaj slučaj simetričan slučaju 3.2.

**Slučaj 3.4.** Prisutne su dijagonale  $(0, 2)$  i  $(4, 6)$ . Pripojimo trokut  $T$  triangulaciji  $G_2$  za formiranje  $G_0$  s  $n - 6 + 1 + 1 = n - 4$  vrha. Po pretpostavci indukcije  $G_0$  se može particionirati u najviše  $g' = \lfloor \frac{n-4}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ . Neka je  $F$  lepeza triangulacije  $G_2$  koja sadrži trokut  $T$ .

Slika 3.4: Slučajevi za  $k = 6$ 

**Slučaj 3.4.1.** Središte lepeze  $F$  je vrh 0, slika 3.4 (d). Tada četverokut  $(0, 1, 2, 3)$  možemo pripojiti lepezi  $F$  pa četverokut  $(3, 4, 5, 6)$  čini zasebnu lepezu.

**Slučaj 3.4.2.** Središte lepeze  $F$  je vrh 3. Budući da je  $G_2$  s jedne strane dijagonale  $d = (0, 6)$ , vrh 3 ne može biti spojen ni s jednim vrhom s druge strane dijagonale  $d$ . Tada vrh 0 možemo smatrati središtem lepeze  $F$ , a time se vraćamo na slučaj 3.4.1.

**Slučaj 3.4.3.** Središte lepeze  $F$  je vrh 6. Primijetimo da je ovaj slučaj simetričan slučaju 3.4.1.

U svim ovim slučajevima, početna triangulacija  $G$  je particionirana u najviše  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  lepeza i time smo dovršili dokaz Chvátalovog teorema. □

Preostaje nam postaviti čuvare u središte lepeza pa Chvátalov teorem u terminima galerije i njezinih čuvara ima sljedeći oblik:

**Teorem 3.1.3** (Chvátalov teorem umjetničke galerije). *Za nadzor čitavog poligona s  $n$  vrhova,  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvara su ponekad nužna i uvijek dovoljna.*

## 3.2 Fiskov dokaz

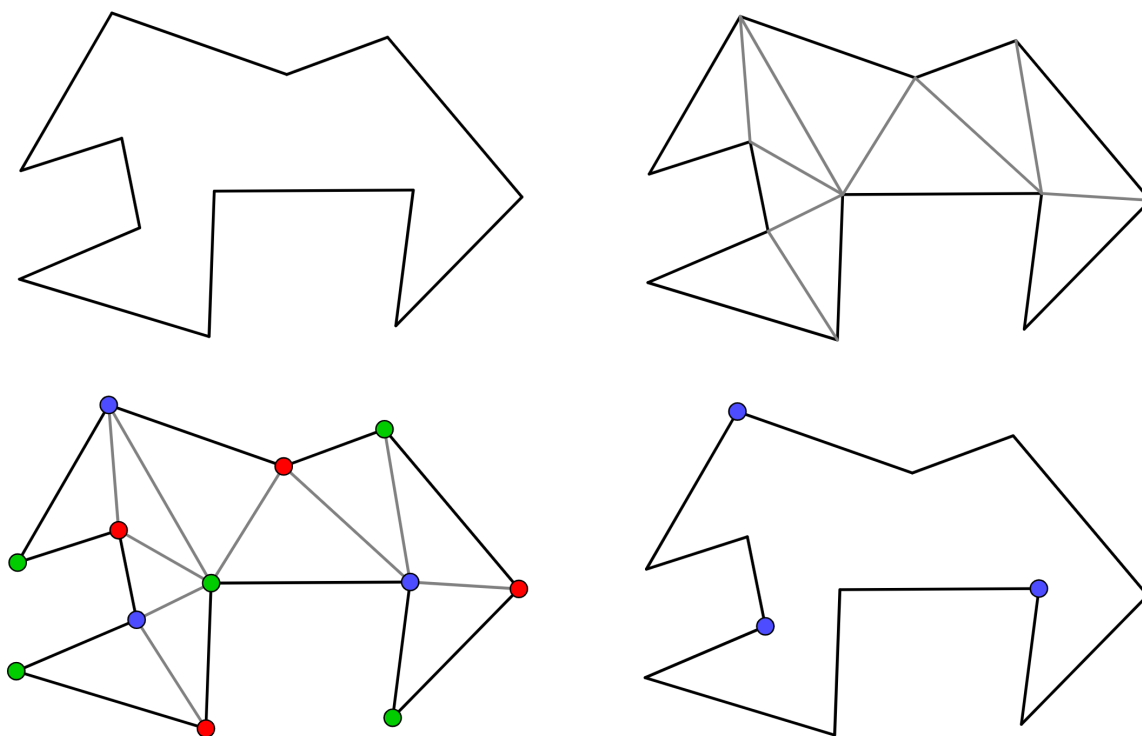
Steve Fisk je 1978. godine dokazao Chvátalov rezultat na nešto jednostavniji način. Njegov dokaz iz članka [1] predstaviti ćemo u nastavku, a temelji se na bojanju vrhova poligona.

Za početak ćemo na primjeru jednog poligona s dvanaest vrhova ilustrirati korake Fiskovog dokaza, slika 3.5.

Prvi korak dokaza je triangulacija poligona. Ranije smo ustanovili da može biti više različitih triangulacija danog poligona, no ovdje nam nije važno koju od njih ćemo odabrati.

Sljedeći korak je pridruživanje jedne od tri boje svakom od 12 vrhova poligona, u našem slučaju to su crvena, zelena i plava boja. Vrhove ćemo obojiti tako da svaki trokut triangulacije ima po jedan vrh u svakoj od tri boje, tj. nikoja dva spojena vrha, bilo dijagonalom ili stranicom poligona, ne smiju biti obojana istom bojom.

Rezultat bojanja su 3 vrha obojana plavom, 4 vrha obojena crvenom i 5 vrhova obojenih zelenom bojom. Budući da svaki trokut triangulacije ima po jedan vrh u svakoj od korištenih boja, postavljanjem čuvara u vrhove obojene jednom proizvoljnom bojom omogućili bismo pokrivanje čitavog poligona. Preostaje nam postaviti čuvere u vrhove obojene bojom koja daje najmanji broj čuvara, u našem slučaju to je plava boja i time smo pokrili čitav poligon.



Slika 3.5: Fiskov dokaz bojenjem vrhova poligona

**Napomena 3.2.1.** Navedeni način bojanja vrhova poligona nazivat ćemo *dopustivim 3-bojanjem*.



Ovim dolazimo do pitanja: Postoji li uvijek dopustivo 3-bojanje?

**Definicija 3.2.2.** *Neka su  $A, B$  i  $C$  tri uzastopna vrha poligona. Ako je  $\overline{AC}$  dijagonala poligona, tada vrhovi  $A, B$  i  $C$  čine **uho poligona**, a vrh  $B$  nazivamo **vrhom uha**. Kažemo da se dva uha ne preklapaju ako njihova dva pripadna trokuta nemaju zajedničkih unutarnjih točaka.*

**Teorem 3.2.3.** *Svaki poligon s  $n \geq 4$  vrha ima barem dva uha koja se ne preklapaju.*

*Dokaz.* Prema teoremu 2.1.6 svaka triangulacija poligona s  $n$  vrhova sadrži  $n - 2$  trokuta. Najviše dvije stranice svakog trokuta triangulacije su ujedno i stranice poligona. Budući da imamo  $n$  stranica i  $n - 2$  trokuta, najmanje dva trokuta moraju sadržavati dvije stranice poligona, a to su dva uha koja se ne preklapaju.  $\square$

Fiskov dokaz oslanja se na sljedeći rezultat.

**Teorem 3.2.4.** *Za svaku triangulaciju poligona s  $n$  vrhova postoji dopustivo 3-bojanje.*

*Dokaz.* Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po broju vrhova  $n$  poligona  $P$ . Ako je  $n = 3$  tvrdnja je trivijalno zadovoljena.

Neka je  $n > 3$  i pretpostavimo da je tvrdnja istinita za sve poligone s manje od  $n$  vrhova. Prema teoremu 3.2.3 poligon  $P$  ima uho, recimo da to uho čine vrhovi  $A, B$  i  $C$  pri čemu je  $B$  vrh uha. Otklanjanjem navedenog uha dobivamo poligon  $P'$  koji ima  $n - 1$  vrhova jer nedostaje samo vrh  $B$ . Prema pretpostavci indukcije, za poligon  $P'$  postoji dopustivo 3-bojanje. Naposljetku vratimo otklonjeni dio i obojimo vrh  $B$  u boju koja nije korištena prilikom bojanja vrhova  $A$  i  $C$ .  $\square$

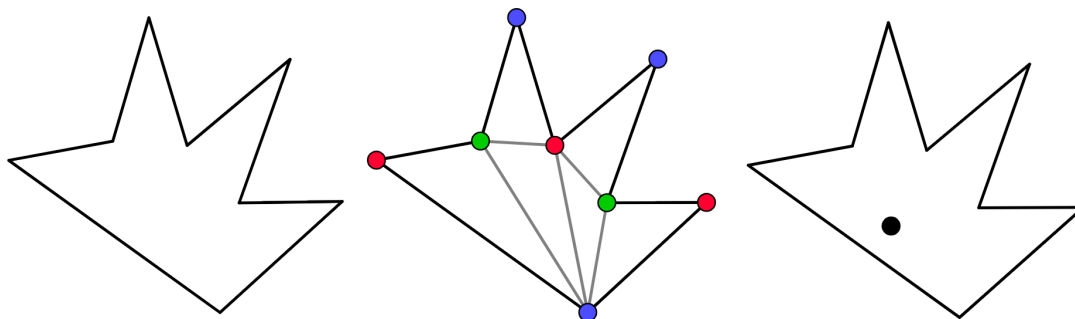
Zanima nas kako je Fisk ovaj argument primijenio na galerije s  $n$  vrhova. Stoga, promotrimo Fiskov oblik Chvátalovog teorema.

**Teorem 3.2.5.** *Ako je  $S$  poligon s  $n$  vrhova, tada postoji skup  $T$  s najviše  $\frac{n}{3}$  točaka od  $S$  takav da za bilo koju točku  $p$  iz  $S$  postoji točka  $q$  iz  $T$  takva da je cijeli segment  $\overline{pq}$  sadržan u  $S$ .*

*Dokaz.* Prema teoremu 3.2.4 postoji dopustivo 3-bojanje vrhova zadanog poligona  $S$  u neke tri boje  $a, b$  i  $c$ . Neka su  $T_a, T_b$  i  $T_c$  skupovi koji sadrže vrhove poligona obojene redom bojama  $a, b$  i  $c$  pri čemu vrijedi  $|T_a| \leq |T_b| \leq |T_c|$ . Tada broj vrhova obojenih u boju  $a$  nije veći od  $\frac{n}{3}$  jer bi u protivnom ukupan broj vrhova poligona bio veći od  $n$ . Još stavimo da je  $T = T_a$ . Svaka točka  $q$  iz  $S$  leži u nekom trokutu triangulacije i svaki trokut ima neku točku  $p$  iz  $T$ . Budući da su trokuti konveksni imamo  $\overline{pq} \subset S$ .  $\square$

Primijetimo, Fiskov pristup pokazuje nam da za čuvanje poligona s  $n$  vrhova nikada nećemo trebati više od  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvara, ali nam ne daje sa sigurnošću odgovor na pitanje koliko najmanje čuvara je potrebno za dani poligon i gdje ih možemo postaviti. Promotrimo sljedeći primjer.

**Primjer 3.2.6.** *Lako možemo uočiti da niti jedan čuvar postavljen u neki vrh poligona sa slike 3.6 ne može sam čuvati čitav poligon. Prema tome, ukoliko čuvanju tog poligona pristupimo konceptom 3-bojanja, treba nam najmanje dva čuvara koja možemo postaviti u vrhove obojene zelenom bojom, no sasvim je jasno da postoji točka unutar poligona iz koje je vidljiv čitav poligon.*



Slika 3.6: Primjeri čuvanja

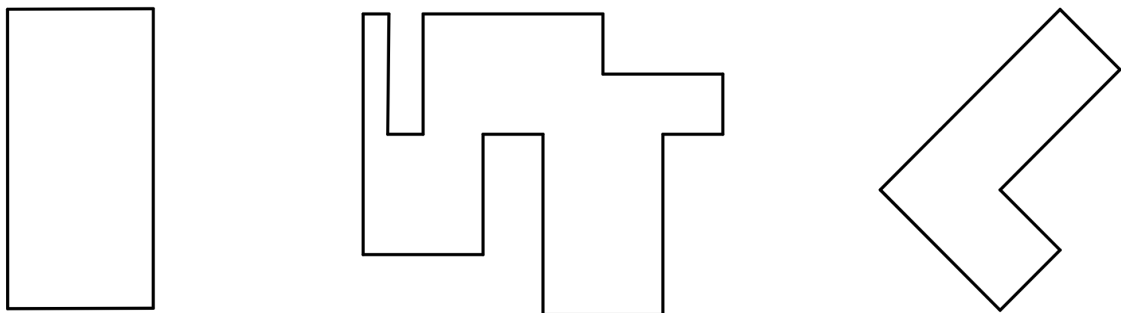
## Poglavlje 4

# Ortogonalne galerije

Primjećujemo da u stvarnost zidovi većine zgrada zatvaraju prave kutove. U nastavku rada prvo ćemo uvesti posebnu vrstu poligona kojom su predstavljeni tlocrti takvih zgrada, a zatim istražiti kako takav oblik galerija utječe na broj čuvara potrebnih za nadzor. Teoretski dio ovog poglavlja može se pronaći u knjizi [3].

### 4.1 Osnovni pojmovi i primjeri

**Definicija 4.1.1.** *Poligon kod kojeg svaki unutarnji kut ima veličinu od  $90^\circ$  ili  $270^\circ$  nazivamo ortogonalnim poligonom.*



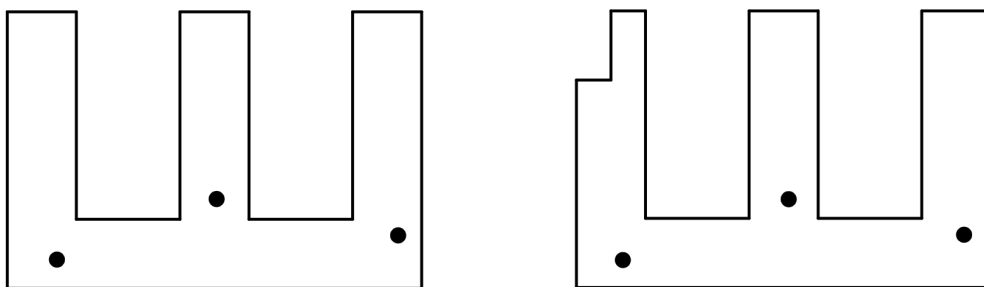
Slika 4.1: Primjeri ortogonalnih poligona

**Primjer 4.1.2.** *Slika 4.1 prikazuje nekoliko ortogonalnih poligona. Primijetimo da ortogonalni poligon možemo postaviti u koordinatni sustav tako da svaka njegova stranica bude*

paralelna s nekom od koordinatnih osi. Dodatno možemo zapaziti da je broj vrhova kod ortogonalnih poligona uvijek paran.

Budući da su ortogonalni poligoni samo vrsta poligona, njih također možemo triangulirati. Stoga, prema teoremu 3.1.3, za čuvanje ortogonalnog poligona s  $n$  vrhova nikada nećemo trebati više od  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvara. U nastavku ćemo pokazati da ovdje ipak nikada nećemo zatrebati svih  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvara.

**Primjer 4.1.3.** Na slici 4.2 prikazana je ortogonalna verzija poligona u obliku češlja iz prvog poglavlja, tj. prikazan je ortogonalni poligon s 12 vrhova kojeg je "najteže" čuvati. Svaki dodatan zubac ovog češlja zahtijeva i dodatnog čuvara te povećava ukupan broj vrhova poligona za četiri. Temeljem slike vrlo lako možemo zaključiti da za čuvanje ortogonalnog poligona s  $n$  vrhova nikada nećemo zatrebati više od  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  čuvara.



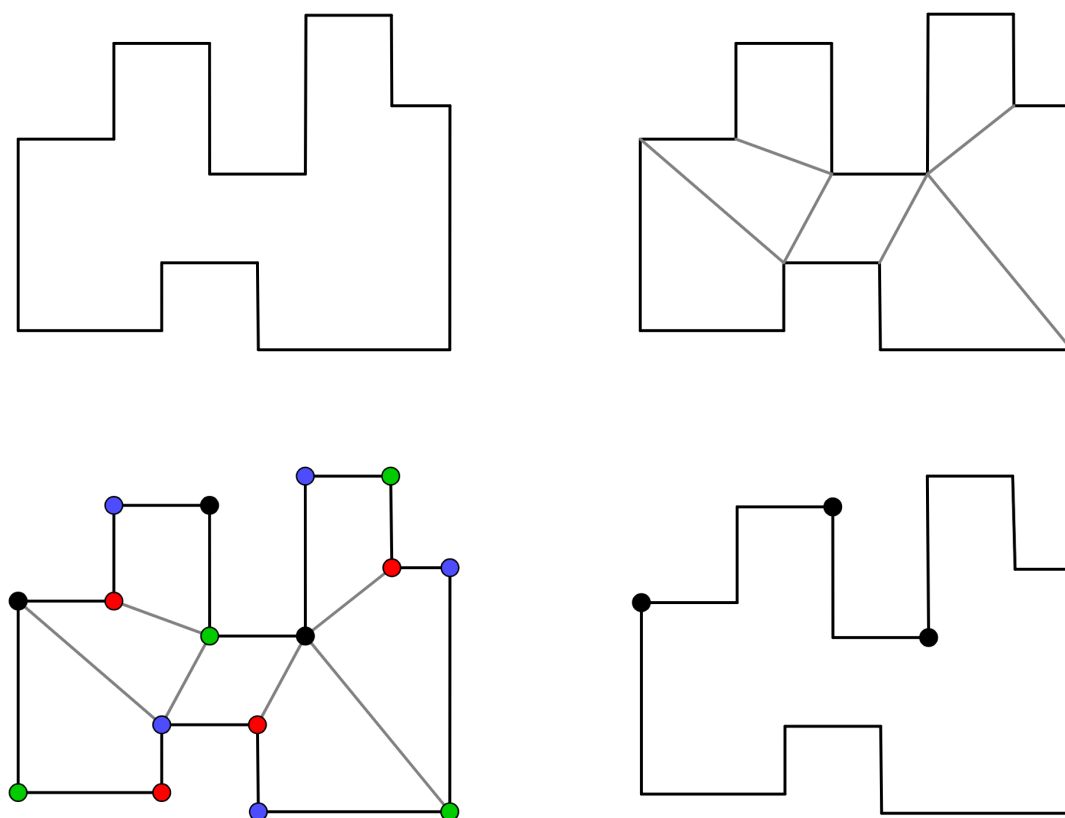
Slika 4.2: Ortogonalne galerije u obliku češlja

Prostaje nam dokazati da je navedeni broj čuvara i uvijek dovoljan. U nastavku prvo ćemo predstaviti glavnu ideju dokaza, a zatim i skicirati čitav dokaz prema knjizi [3].

Ideja za dokaz dovoljnosti vrlo je slična ideji iz prethodnog poglavlja. No, umjesto podjele poligona na trokute, poligon ćemo dijeliti na četverokute, a potom modificirati Fiskov argument. Ovu strategiju ćemo ilustrirati na primjeru jednog ortogonalnog poligona sa 16 vrhova, slika 4.3.

Za početak ćemo poligon podijeliti na četverokute, a zatim svakom vrhu poligona pridružiti jednu od četiri boje tako da svaki četverokut ima po jedan vrh obojen u svakoj od boja. Boja koja se u ovom bojanju pojavljuje najmanji broj puta ne javlja se više od  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  puta. Naposljetku postavimo čuvaru u vrhove obojene tom bojom, u našem slučaju to je crna boja i time smo pokrili čitav poligon jer svaki četverokut ima jedan vrh obojen crnom bojom.

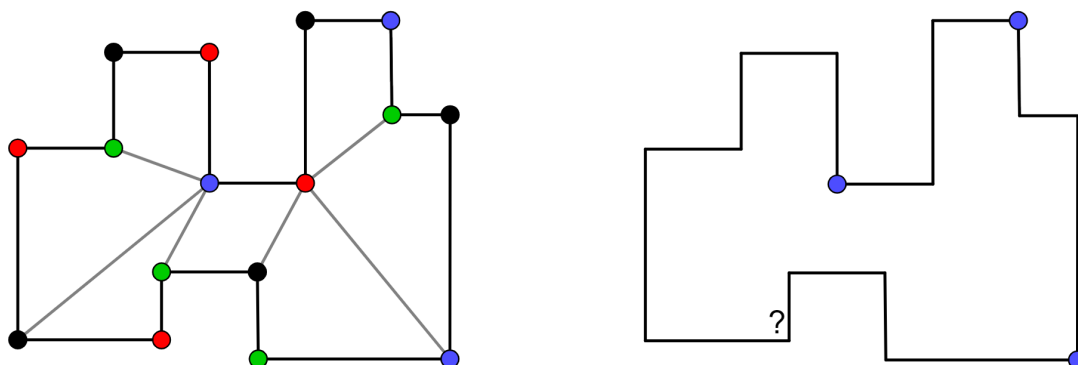
**Napomena 4.1.4.** Navedeni način bojanja vrhova ortogonalnog poligona nazivat ćemo *dopustivim 4-bojanjem*.



Slika 4.3: Bojanje ortogonalnog poligona

Nažalost, ovim argumentom nećemo uspjeti uvijek pokriti čitav poligon, što je predočeno slikom 4.4 gdje smo ponovili opisani postupak na istom poligonu s nešto drugačijom podjelom poligona na četverokute.

Primjećujemo da tri čuvara postavljena u vrhovima obojenim plavom bojom ne uspijevaju pokriti sve kutove poligona jer čuvar postavljen u nekom vrhu četverokuta koji nije konveksan možda neće uspjeti pokriti čitav četverokut. Dakle, moramo uvesti dodatni zahtjev, a to je podjela poligona na konveksne četverokute. No, može li se svaki poligon podijeliti, odnosno dekomponirati na konveksne četverokute? U nastavku rada dokazat ćemo da može.



Slika 4.4: Potreba za konveksnim četverokutima

## 4.2 Podjela na konveksne četverokute

Kako bismo dokazali da se svaki ortogonalni poligon može podijeliti na konveksne četverokute potrebno je definirati nekoliko pojmova. U nastavku pratimo drugo poglavlje knjige [3].

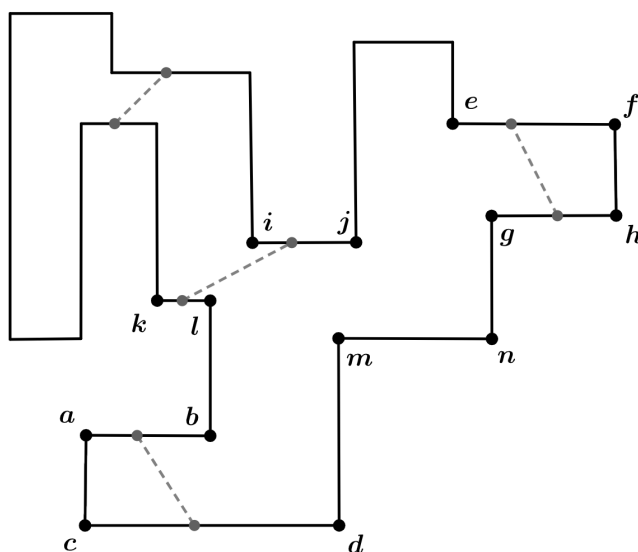
**Definicija 4.2.1.** Neka je  $P$  ortogonalni poligon. Horizontalnu stranicu poligona  $P$  nazivamo **gornjom** ako unutrašnjost poligona  $P$  leži ispod pravca koji sadrži tu stranicu, a **donjom** ako unutrašnjost poligona  $P$  leži iznad pravca koji sadrži tu stranicu. Analogno definiramo **lijevu** i **desnu stranicu** poligona  $P$ .

**Definicija 4.2.2.** Za gornju stranicu  $G$  i donju stranicu  $D$  ortogonalnog poligona  $P$  kažemo da su **susjedne** ako vrijedi sljedeće:

- (i)  $G$  i  $D$  mogu vidjeti jedna drugu, odnosno postoje točke  $g \in G$  i  $d \in D$  takve da dužina  $\overline{dg}$  čitava leži u unutrašnjosti poligona  $P$ .
- (ii) Ne postoji stranica  $D'$  iznad  $D$  takva da se  $G$  vidi iz  $D'$ .
- (iii) Ne postoji stranica  $G'$  ispod  $G$  takva da se  $D$  vidi iz  $G'$ .

**Definicija 4.2.3.** Susjedne stranice ortogonalnog poligona čine **uho** ako su povezane vertikalnom stranicom.

**Primjer 4.2.4.** Na slici 4.5 prikazan je primjer jednog ortogonalnog poligona kod kojeg su susjedne stranice povezane isprekidanom linijom. Primijetimo da stranice  $\overline{ij}$  i  $\overline{mn}$  vide jedna drugu, ali nisu susjedne. Parovi susjednih stranica  $\overline{ab}$  i  $\overline{cd}$  te  $\overline{ef}$  i  $\overline{gh}$  čine dva uha poligona jer su povezana vertikalnom stranicom, a susjedne stranice  $\overline{ij}$   $\overline{kl}$  ne čine uho. Dodatno, horizontalna stranica ne mora imati susjeda, a ako ga ima onda je on jedinstven.



Slika 4.5: Susjedne stranice

**Definicija 4.2.5.** Kažemo da je ortogonalni poligon u *općem položaju* ako svaki vertikalni ili horizontalni pravac sadrži najviše jednu stranicu poligona.

**Napomena 4.2.6.** U nastavku ćemo često umjesto izraza "ortogonalni poligon" koristiti samo "poligon".

**Lema 4.2.7.** Poligon  $P$  koji nije u općem položaju ima istu podjelu na konveksne četverokute kao i svaki poligon  $P'$  u njegovoj blizini koji jest u općem položaju.

*Dokaz.* Promotrimo niz ortogonalnih poligona  $P'$  koji su u općem položaju s jednakim brojem vrhova kao kod poligona  $P$ . Možemo pretpostaviti da ovaj niz konvergira u  $P$ . Drugim riječima, malim promjenama na poligonu  $P'$  možemo doći vrlo blizu oblika poligona  $P$ . Budući da je konačno mnogo načina na koje možemo poligon  $P'$  podijeliti na konveksne četverokute, poligon  $P'$  mora imati istu podjelu kao i poligon  $P$  s jedinom razlikom što poligon  $P$  nije u općem položaju.  $\square$

**Definicija 4.2.8.** Neka su  $P_1$  i  $P_2$  dva ortogonalna poligona (s rupama). Za poligon  $P_1$  kažemo da je *manji* od  $P_2$  ako sadrži manje rupa od  $P_2$  ili ako ima jednak broj rupa, a manje vrhova nego što to ima poligon  $P_2$ .

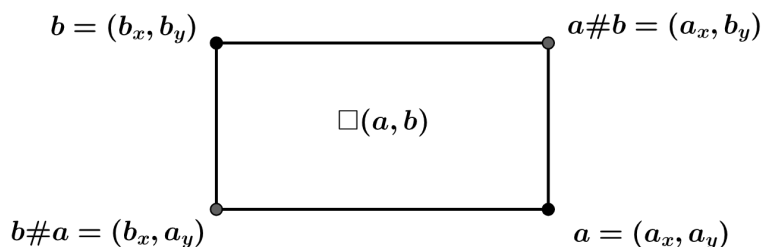
Želimo dokazati da se svaki poligon  $P$  može podijeliti na konveksne četverokute. Dokaz se provodi induktivno uz pretpostavku da se svaki ortogonalni poligon manji od  $P$  može podijeliti na konveksne četverokute. Glavna ideja dokaza je rastavljanje poligona  $P$

na manje koji se prema pretpostavci mogu podijeliti na konveksne četverokute. Potom, slijedi proširenje te podjele na čitav poligon  $P$ .

**Napomena 4.2.9.** Poligon  $P$  ćemo nazivati **reducibilnim** ako iz pretpostavke da se svaki poligon manji od  $P$  može podijeliti na konveksne četverokute slijedi da se početni poligon može podijeliti na konveksne četverokute.

**Definicija 4.2.10.** Neka su  $a = (a_x, a_y)$  i  $b = (b_x, b_y)$  dvije točke u koordinatnom sustavu. S  $a\#b$  ćemo označavati točku  $(a_x, b_y)$ , a s  $\square(a, b)$  pravokutnik kojemu su  $a$ ,  $b$ ,  $a\#b$  i  $b\#a$  vrhovi.

Slika 4.6 ilustrira prethodnu definiciju.



Slika 4.6: Definicija simbola  $\#$  i  $\square$

**Napomena 4.2.11.** Ako je  $H$  horizontalna, a  $V$  vertikalna stranica poligona, tada  $H\#V$  predstavlja točku presjeka pravaca koji sadrže stranice  $H$  i  $V$ .

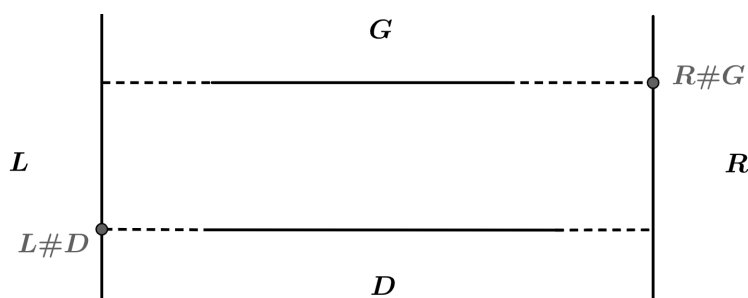
**Lema 4.2.12.** Neka su  $G$  i  $D$  susjedne stranice poligona  $P$  pri čemu je  $G$  gornja, a  $D$  donja stranica. Tada postoji stranica  $L$  lijevo od  $G$  i  $D$  čija je krajnja gornja točka visoka barem kao  $G$  i čija je krajnja donja točka niska barem kao  $D$ . Analogno, postoji i desna stranica  $R$  takva da pravokutnik  $\square(L\#D, R\#G)$  čitav leži u unutrašnjosti poligona  $P$ .

Dokaz prethodne leme može se pronaći u knjizi [3], a njezina ilustracija prikazana je na slici 4.7.

**Lema 4.2.13.** Ako su  $\overline{ab}$  i  $\overline{cd}$  horizontalne stranice uha poligona, tada bilo koja podjela poligona na konveksne četverokute uključuje i četverokut  $abcd$ .

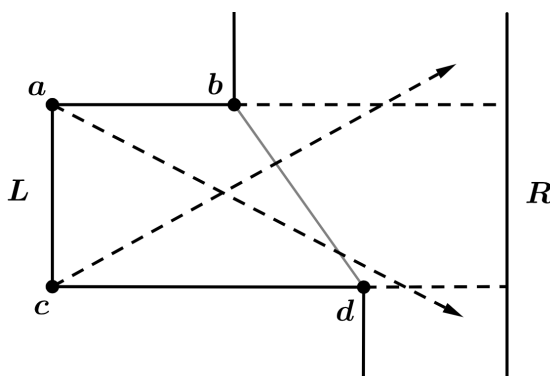
*Dokaz.* Lema 4.2.12 nam daje situaciju sa slike 4.8, gdje je  $L = \overline{ac}$ . Svaki vrh vidljiv vrhu  $a$ , osim vrhova  $b$ ,  $c$  i  $d$ , mora se nalaziti ispod vrha  $d$ . Spajanje nekog takvog vrha s vrhom  $a$  dovodi do toga da vrh  $c$  ne može biti dio ni jednog konveksnog četverokuta unutar poligona. Slično, spajanje vrha  $c$  s bilo kojim vrhom iznad  $b$ , onemogućuje vrhu



Slika 4.7: Pravokutnik  $\square(L\#D, R\#G)$ 

$a$  da bude dio nekog konveksnog četverokuta. Dakle, četverokut  $abcd$  se nužno javlja u svakoj podjeli poligona na konveksne četverokute.

□

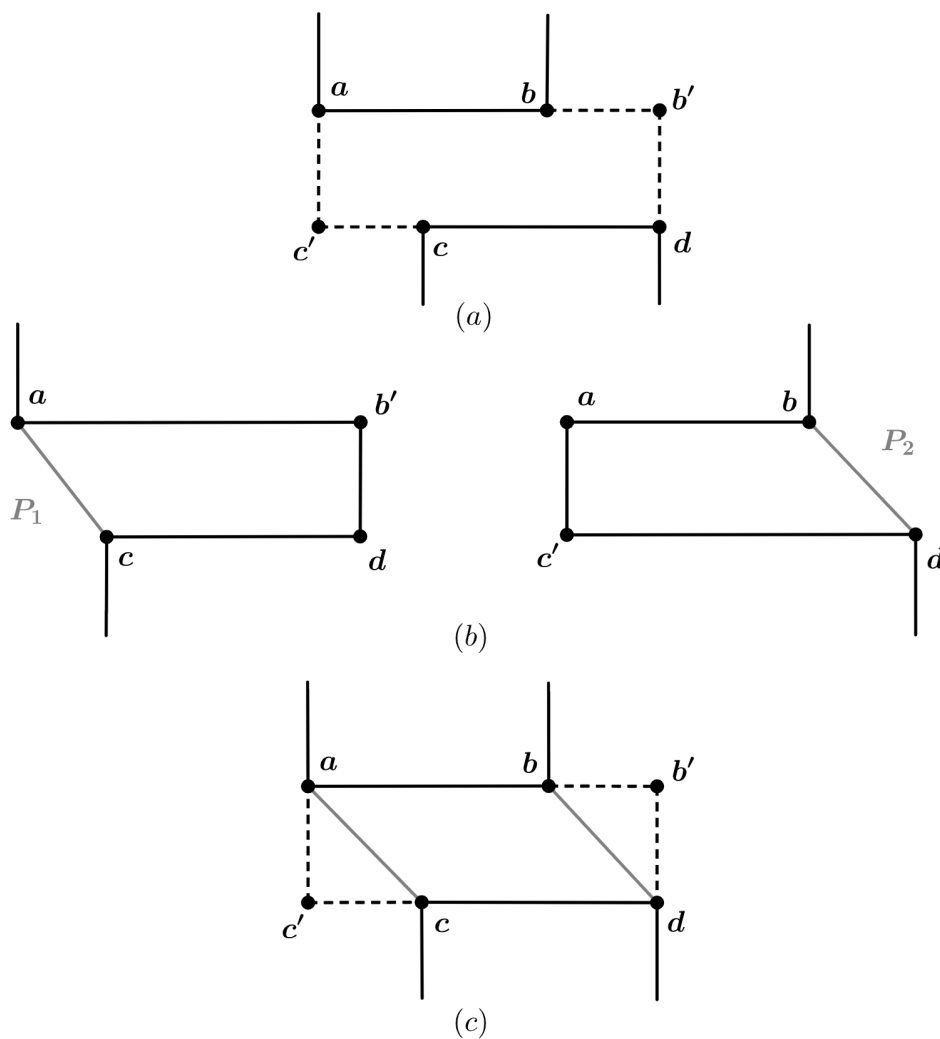
Slika 4.8: Nužnost četverokuta  $abcd$ 

Svaki ortogonalni poligon sadrži barem jednu od tri moguće strukture koje dopuštaju reduciranje tog poligona. Prva takva struktura je par susjednih stranica koje ne čine uho poligona.

**Lema 4.2.14.** *Ako poligon  $P$  sadrži jedan par susjednih stranica koje ne čine uho, tada je  $P$  reducibilan.*

*Dokaz.* Neka su  $\overline{ab}$  i  $\overline{cd}$  dvije susjedne stranice poligona  $P$  pri čemu je  $\overline{ab}$  gonja, a  $\overline{cd}$  donja stranica takve da ne formiraju uho poligona. Nadalje, definirajmo točke  $b' = d\#b$  i  $c' = a\#c$ , slika 4.9 (a). Prema lemi 4.2.12 znamo da pravokutnik  $\square(a, d)$ , tj.  $\square(b', c')$  u potpunosti leži u unutrašnjosti poligona  $P$ .

Sada ćemo poligon  $P$  rastaviti na poligone  $P_1$  i  $P_2$  koristeći pravokutnik  $\square(a, d)$  s tim da poligon  $P_1$  uključuje uho  $ab'dc$ , a poligon  $P_2$  uključuje uho  $bac'd$ , što je predočeno slikom 4.9 (b). Ovim smo od poligona  $P$  napravili "multipoligon"  $P'$  tako da smo poligonu  $P$  dodali dva uha. Moguća su dva sučaja. Ako je dobiveni poligon  $P'$  nepovezan, onda se on sastoji od dva poligona  $P_1$  i  $P_2$ . Poligoni  $P_1$  i  $P_2$  su manji od  $P$  pa možemo zaključiti da je  $P$  reducibilan. Ako je poligon  $P'$  povezan, može se dokazati da on mora biti manji od  $P$  pa i u ovom slučaju dobivamo da je  $P$  reducibilan.  $\square$



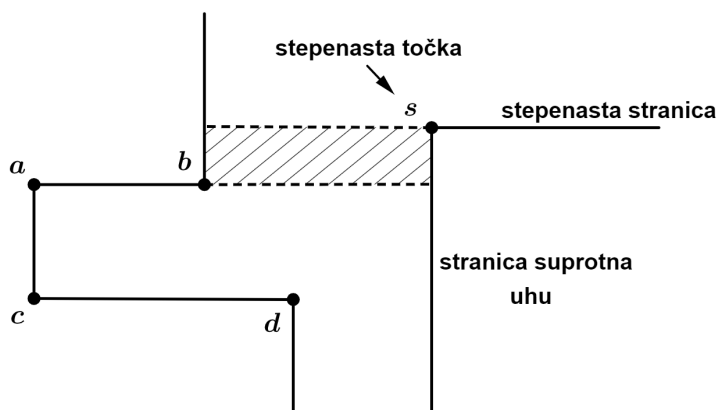
Slika 4.9: Ilustracija dokaza leme 4.2.13

Sljedeća struktura koja dopušta reduciranje poligona je opisana posebnom vrstom uha.

**Definicija 4.2.15.** Uho nazivamo **gornjim** ako je njegova donja stranica duža od gornje, a **donjim** ako je njegova gornja stranica duža od donje. Prema lemi 4.2.12 znamo da postoje dvije vertikalne stranice koje omeđuju uho, jedna koja spaja gornju i donju stranicu te druga koju ćemo nazivati **stranica suprotna uhu**. Krajnja gornja točka stranice suprotne gornjem uhu naziva se **stepenasta točka**, a horizontalna stranica kojoj je ta točka krajnja naziva se **stepenasta stranica**. Stepenasta točka donjeg uha je krajnja donja točka stranice suprotne uhu, a horizontalna stranica kojoj je ta točka krajnja je stepenasta stranica donjeg uha.

**Definicija 4.2.16.** Neka je  $\overline{ab}$  gornja stranica gornjeg uha, a  $\overline{cd}$  njegova donja stranica i neka je  $s$  stepenasta točka. Za gornje uho kažemo da je **loše**, ako je njegova stepenasta stranica donja stranica i ako je  $\square(b, s)$  prazan (ako unutrašnjost pravokutnika ne siječe druge stranice poligona). Ako uho nije loše reći ćemo da je **dobro**, u tom slučaju stepenasta stranica je gornja stranica ili  $\square(b, s)$  nije prazan.

Prethodne definicije ilustrirane su slikom 4.10. Analogno se definira dobro i loše donje uho, a redukcija poligona ovisi o tome je li uho dobro ili loše.



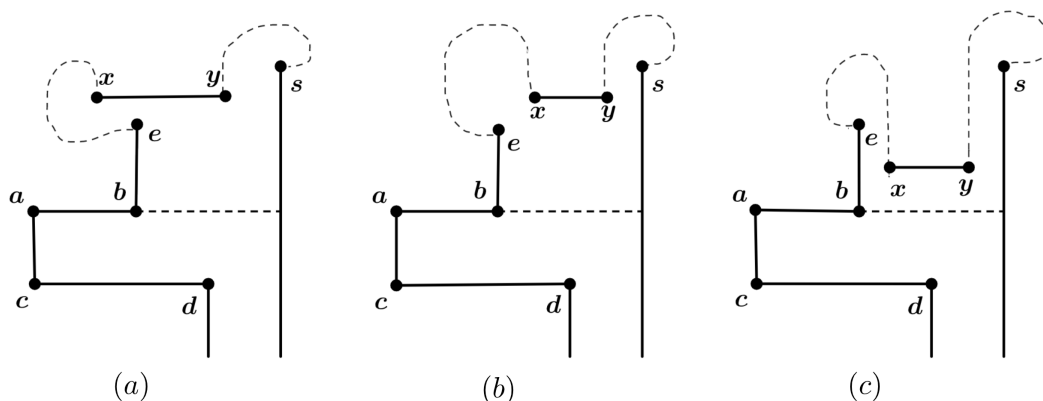
Slika 4.10: Komponente gornjeg uha  $abcd$ ; loše uho

**Lema 4.2.17.** Ako poligon  $P$  sadrži dobro uho, onda je  $P$  reducibilan.

*Dokaz.* Pretpostavimo da poligon  $P$  sadrži dobro gornje uho pri čemu je  $\overline{ab}$  gornja stranica tog uha, a  $\overline{cd}$  donja stranica. Neka je  $e$  vrh koji čini stranicu  $\overline{eb}$  i neka je  $s$  stepenasta točka.

Budući da je navedeno uho dobro, ili se neke stranice poligona sijeku u unutrašnjosti  $\square(b, s)$  ili je stepenasta stranica ujedno i gornja stranica. Ako je stepenasta stranica gornja stranica, neka je  $\overline{xy}$  ta stranica. U suprotnom, tj. ako  $\square(b, s)$  nije prazan, neka je  $\overline{xy}$  najniža

stranica koja siječe  $\square(b, s)$ . Ovim dolazimo do više različitih slučajeva. Ukoliko je vrh  $x$  lijevo od  $b$ , tada je  $x$  iznad  $e$ . No, ukoliko je  $x$  desno od  $b$ , tada  $x$  može biti iznad i ispod  $e$ . Primijetimo da u svim ovim slučajevima  $y$  može biti jednak  $s$ . Sva tri slučaja predočena su slikom 4.11.



Slika 4.11: Tri slučaja dobrog uha

**Slučaj 1.** ( $x$  je lijevo od  $b$ , slika 4.11 (a)) Zamijenit ćemo dužinu  $\overline{xy}$  i niz vrhova  $e, b, a, c, d$  s dva uha, jedno uho neka sadrži vrhove  $y, b\#y, b\#c, d$ , drugo neka sadrži vrhove  $x, y, y\#b, b, e$ , slika 4.12 (a).

Ovim smo dobili dva nova poligona,  $P_1$  i  $P_2$ . Neka poligon  $P_1$  sadrži vrhove  $x, y, y\#b, b, e$ , poligon  $P_2$  neka sadrži vrhove  $e, b, a, c, d$ , slika 4.12 (b).

Budući da navedeni poligoni imaju manje vrhova nego što to ima početni poligon  $P$ , prema pretpostavci oba poligona,  $P_1$  i  $P_2$ , mogu se podijeliti na konveksne četverokute. Prema lemi 4.2.13, podjela poligona  $P_1$  na konveksne četverokute uključuje četverokut kojemu su  $y, y\#b, b$  i  $e$  vrhovi, a podjela poligona  $P_2$  uključuje četverokut s vrhovima  $y, b\#y, b\#c$  i  $d$ . Ove podjele možemo spojiti kako bismo dobili podjelu početnog poligona  $P$  na konveksne četverokute. Uočavamo da četverokuti  $(y, b\#y, b\#c, d)$  i  $(y, y\#b, b, e)$  čine poligon  $yebacd$  koji se može podijeliti na konveksne četverokute na samo jedan način, čineći četverokute  $yebd$  i  $abcd$ , slika 4.12 (c). Rezultat je poligon  $P$  podijeljen na konveksne četverokute. Prema tome,  $P$  je reducibilan.

**Slučaj 2.** ( $x$  je desno od  $b$ , slika 4.11 (b) i (c)) Na obje ove situacije gdje je  $x$  desno od  $b$  može se primijeniti analogna redukcija, mi ćemo promatrati slučaj gdje je  $x$  iznad  $e$ , slika 4.13 (a). Započet ćemo s istim zamjenama kao kod prvog slučaja kako bismo opet dobili  $P_1$  i  $P_2$ , ali argument će biti nešto drugačiji.

Uho poligona  $P_2$  sadrži konveksni četverokut s vrhovima  $y$ ,  $b\#y$ ,  $b\#c$  i  $d$  kao i kod prvog slučaja. No, stranice  $(y, y\#b)$  i  $\overline{eb}$  u poligonu  $P_1$  nisu više susjedne, stoga ne mogu činiti uho. Međutim, tvrdimo da je dijagonala  $\overline{ey}$  ili dijagonala  $\overline{bx}$  dio svake podjele poligona  $P_1$  na konveksne četverokute, slika 4.13 (b).

Pretpostavimo da se točka  $y\#b$  nalazi na više od jednog četverokuta. Tada dijagonala iz  $y\#b$  mora ili ići lijevo od stranice  $\overline{eb}$  ne dopuštajući vrhu  $b$  da bude dio nekog konveksnog četverokuta ili ići iznad stranice  $\overline{xy}$  ne dopuštajući bilo kojem četverokutu da sadrži  $y$ . Obje mogućnosti dolaze iz činjenice da je četverokut  $\square(b, y)$  prazan jer je stranica  $\overline{xy}$  izabrana kao najniža koja sječe  $\square(b, s)$ . Sada možemo postupiti kao i u prvom slučaju. Dakle, ukoliko je četverokut  $(e, y, y\#b, b)$  dio podjele poligona  $P_1$ , tada u podjeli početnog poligona  $P$  imamo četverokut  $yebd$ , a u drugom slučaju imamo četverokut  $(b, x, y, y\#b)$  u podjeli od  $P_1$  pa u podjeli od  $P$  imamo  $ybdx$ , slika 4.13 (c).

Dakle, u oba ova slučaja poligon  $P$  se može reducirati. □

Sljedeća i posljednja redukcija ovisi o prisutnosti para ušiju.

**Definicija 4.2.18.** *Neka je  $G$  gornje, a  $D$  donje uho poligona.  $G$  i  $D$  čine par ušiju ukoliko je stepenasta stranica uha  $G$  ujedno donja stranica uha  $D$ , a stepenasta stranica uha  $D$  gornja stranica uha  $G$ .*

**Lema 4.2.19.** *Ako poligon  $P$  sadrži par ušiju, onda je  $P$  reducibilan.*

*Dokaz.* Neka su  $\overline{ab}$  i  $\overline{cd}$  stranice poligona  $P$  takve da formiraju gornje uho, a  $\overline{fg}$  i  $\overline{hi}$  stranice koje formiraju donje uho te neka navedene uši čine par ušiju, slika 4.14 (a).

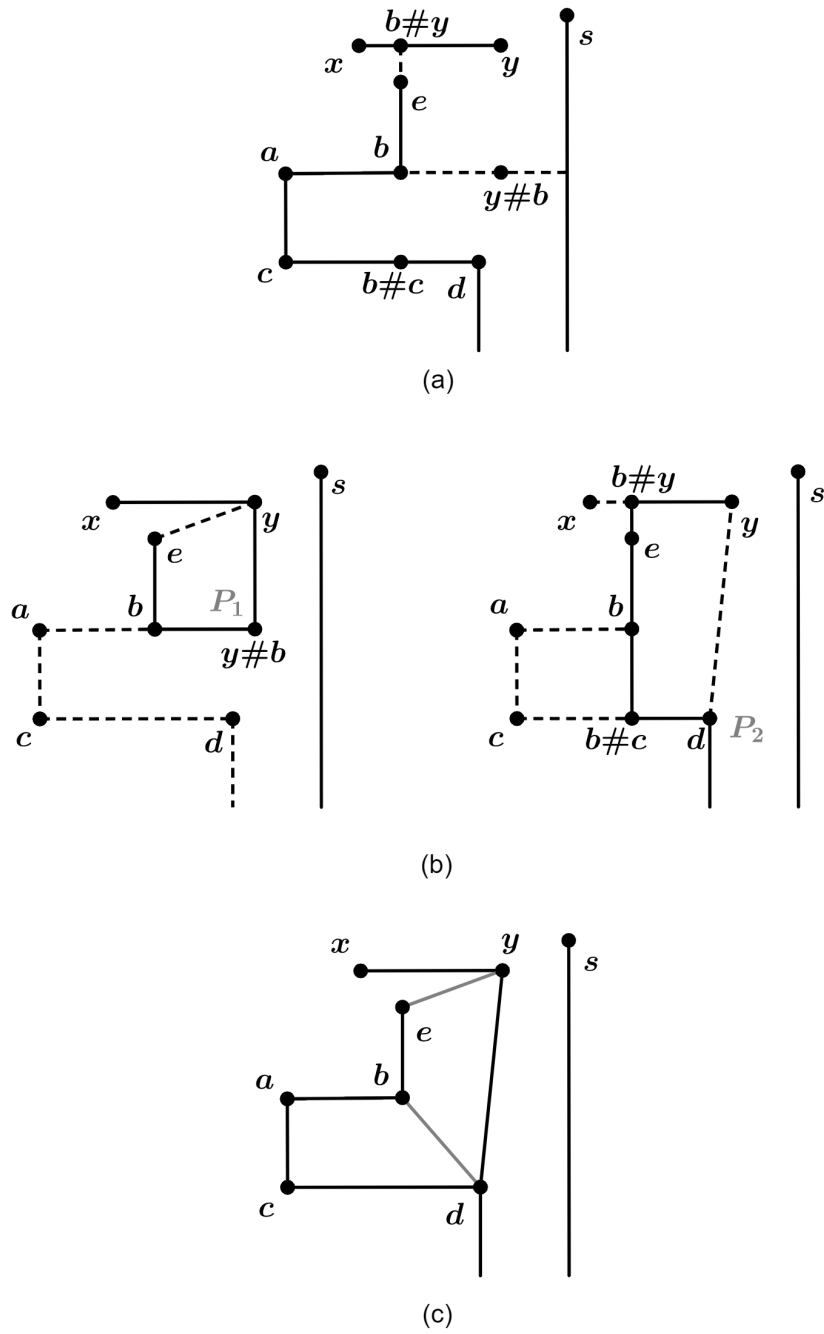
Pomaknimo stranicu  $\overline{ab}$  prema gore kako bi stranice  $(a\#f, f)$  i  $\overline{cd}$  formirale uho, a zatim pomaknimo stranicu  $\overline{fg}$  prema dolje kako bi stranice  $(b, g\#b)$  i  $\overline{hi}$  također formirale uho.

Ovim pomicanjem kreirali smo dva nova poligona  $P_1$  i  $P_2$ , slika 4.14 (b). Prema lemi 4.2.13, podjela poligona  $P_1$  uključuje četverokut s vrhovima  $f$ ,  $a\#f$ ,  $c$  i  $d$ , a podjela poligona  $P_2$  uključuje četverokut s vrhovima  $b$ ,  $g\#b$ ,  $i$  i  $h$ . Dakle, od poligona  $P$  napravili smo "multipoligon"  $P'$  tako da smo poligonu  $P$  dodali dva uha. Moguća su dva sučaja. Ako je dobiveni poligon  $P'$  nepovezan, onda se on sastoji od dva poligona  $P_1$  i  $P_2$ . Poligoni  $P_1$  i  $P_2$  su manji od  $P$  pa možemo zaključiti da je  $P$  reducibilan. Ako je poligon  $P'$  povezan, može se dokazati da on mora biti manji od  $P$  pa i u ovom slučaju dobivamo da je  $P$  reducibilan. □

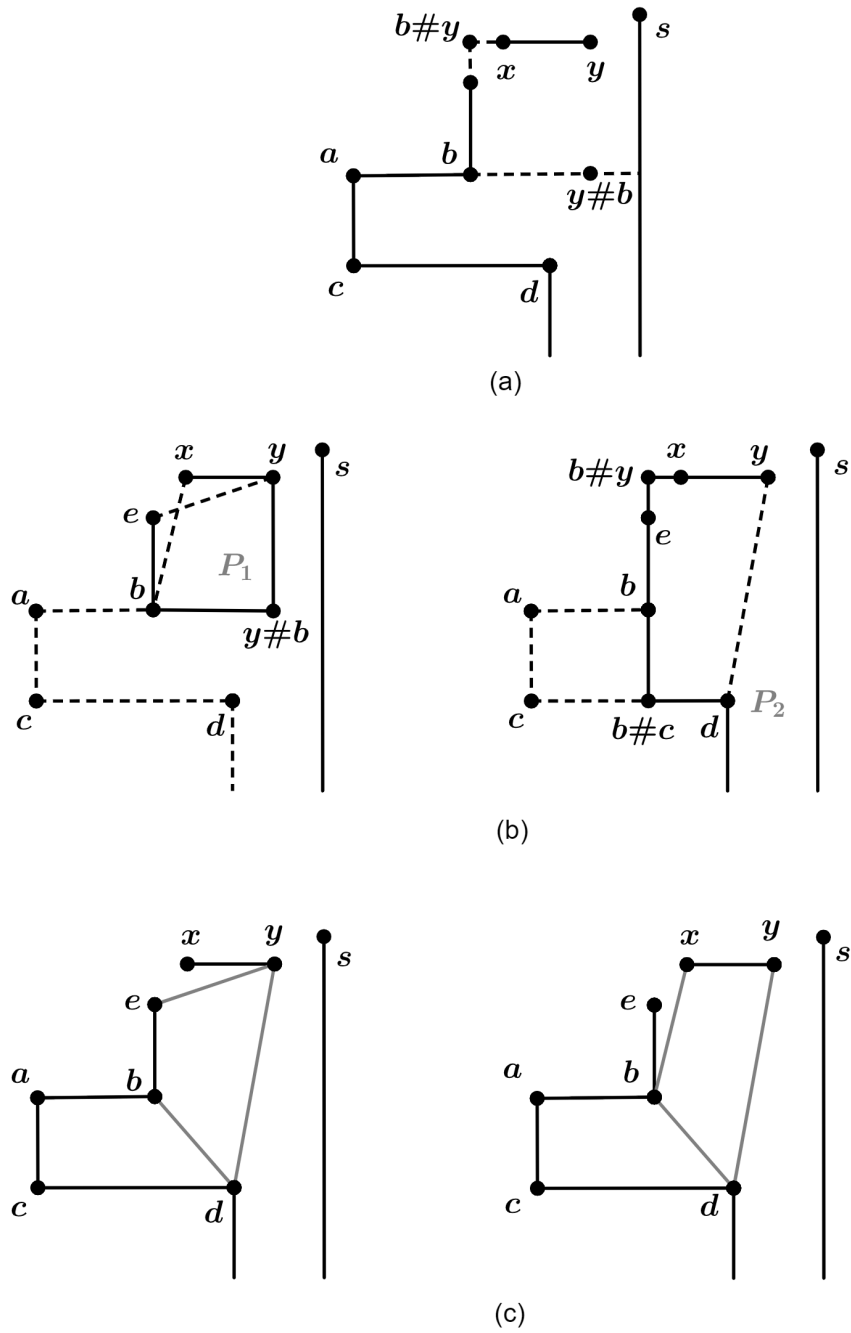
Sada možemo formulirati sljedeći teorem:

**Teorem 4.2.20.** *Svaki ortogonalni poligon  $P$  može se podijeliti na konveksne četverokute.*

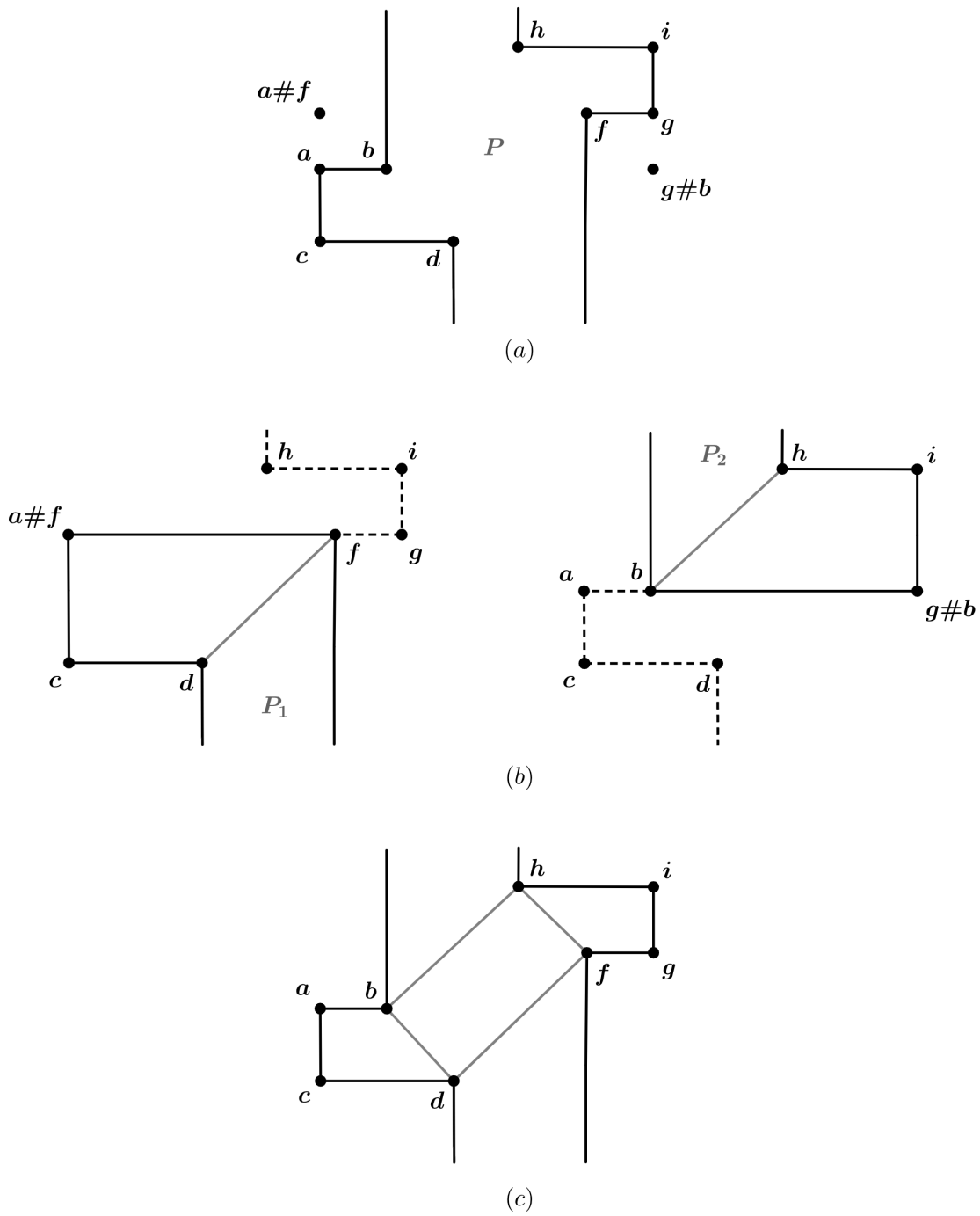
*Dokaz.* Dokaz se provodi induktivno. Lema 4.2.7 nam kaže da je dovoljno promatrati samo poligone u općem položaju. Za bazu indukcije uzet ćemo pravokutnik jer je on



Slika 4.12: Redukcija dobrog uha (1. slučaj)



Slika 4.13: Redukcija dobrog uha (2. slučaj)



Slika 4.14: Reduciranje para ušiju



sam po sebi konveksni četverokut i pretpostavimo da se svaki poligon manji od  $P$  može dekomponirati, tj. podijeliti na konveksne četverokute. Nadalje, koristimo činjenicu koja se može pronaći u knjizi [3], a kaže nam da svaki ortogonalni poligon sadrži barem jednu od sljedećih struktura:

1. par susjednih stranica koje formiraju uho
2. dobro uho
3. barem jedan par ušiju.

Stoga, prema prethodnim lemapa 4.2.14, 4.2.17 i 4.2.19, svaki poligon  $P$  može se reducirati na manji koji se prema pretpostavci može podijeliti na konveksne četverokute, a zatim se ta podjela može proširiti na čitav poligon  $P$ .  $\square$

Preostaje nam dokazati glavni rezultat.

**Teorem 4.2.21.** *Za čuvanje ortogonalnog poligona s  $n$  vrhova,  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  čuvara su ponekad nužna i uvijek dovoljna.*

*Dokaz.* Prema teoremu 4.2.20, svaki ortogonalni poligon može se dekoponirati na konveksne četverokute. Budući da su četverokuti konveksni, postavljanjem čuvara u neki vrh svakog dobivenog četverokuta mogli bismo pokriti čitav poligon. Nadalje, obojimo vrhove dopustivim 4-bojanjem. Boja koja se u ovom bojanju pojavljuje najmanji broj puta ne pojavljuje se više od  $\frac{n}{4}$  puta jer bi u suprotnom broj vrhova poligona bio veći od  $n$ . Prema tome, za nadzor ortogonalnog poligona s  $n$  vrhova,  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  čuvara su ponekad nužna i uvijek dovoljna.  $\square$

Još možemo nadodati da nam ni ovo bojanje možda neće dati najmanji broj čuvara potrebnih za nadzor nekog ortogonalnog poligona jer ukoliko bolje pogledamo poligon sa slike 4.3 vrlo lako možemo zapaziti da ga je moguće čuvati i sa samo dva čuvara postavljena u unutrašnjosti poligona.



## Poglavlje 5

# Još neke modifikacije problema

Nakon rješenja izvornog problema čuvara umjetničke galerije krenulo je istraživanje njegovih različitih varijacija. Primjerice, mijenjao se oblik galerija, čuvarima se ograničavala vidljivost, čuvari više nisu bili stacionarni itd. U prethodnom poglavlju obradili smo ortogonalne poligone, a u nastavku ćemo predstaviti još nekoliko prirodnijih modifikacija problema umjetničke galerije prema knjizi [6].

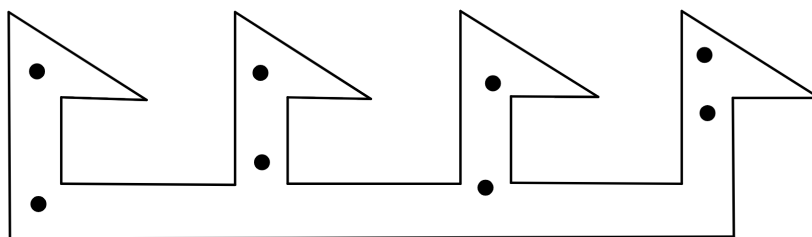
### 5.1 Čuvanje čuvara

Možda ne bi bilo loše da i čuvar netko čuva. Stoga ćemo za potpuni nadzor galerije postaviti jedan dodatan uvjet, odnosno zahtijevat ćemo da čuvari čuvaju i jedni druge. Dakle, svaki čuvar mora biti vidljiv barem jednom drugom čuvaru.

Za ovakav nadzor poligona s 3, 4, 5 i 6 vrhova trebamo samo dva čuvara koji će međusobno čuvati jedan drugog, tj. trebamo dva čuvana čuvara. Nadalje, mora biti da je broj čuvanih čuvara potrebnih za nadzor poligona s  $n$  vrhova manji ili jednak  $2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  jer za čuvanje poligona nikada ne trebamo više od  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  samostalnih čuvara te nam preostaje samo još svakom tom čuvaru dodijeliti jednog čuvara u blizini.

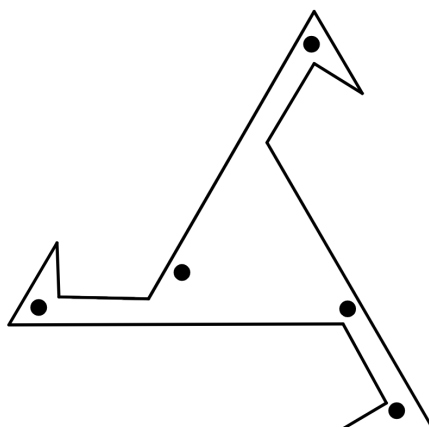
Kako bismo odredili koliko je najmanje čuvanih čuvara potrebno za nadzor poligona proučit ćemo još jednu modifikaciju poligona u obliku češlja. Poligon sa slike 5.1 više podjeća na valove, a svaki dodatni val ovog poligona zahtjeva dva dodatna čuvara te povećava ukupan broj vrhova poligona za 5. Prema tome, možemo očekivati da za čuvanje poligona s  $n \geq 5$  vrhova nikad nećemo trebati više od  $\lfloor \frac{2n}{5} \rfloor$  čuvanih čuvara. No, pogledajmo je li to uistinu tako.

**Primjer 5.1.1.** *Slika 5.2 prikazuje poligon s 12 vrhova koji zahtjeva 5 čuvanih čuvara, što je u suprotnosti s prethodnom slutnjom koji nam kaže da za čuvanje poligona s 12 vrhova*



Slika 5.1: Čuvanje čuvara

nikada nećemo trebati više od  $\lfloor \frac{2 \cdot 12}{5} \rfloor = \lfloor \frac{24}{5} \rfloor = 4$  čuvara.



Slika 5.2: Poligon s 12 vrhova koja zahtjeva 5 čuvanih čuvara

Dakle, poligon sa slike 5.1 nam nije pomogao pri otkrivanju nužnosti određenog broja čuvara. Prava formula koja nam kaže koliko najviše čuvanih čuvara možemo zatrebati za nadzor poligona s  $n \geq 5$  vrhova je nešto kompliciranija i glasi  $\lfloor \frac{3n-1}{7} \rfloor$ . Drugim riječima:

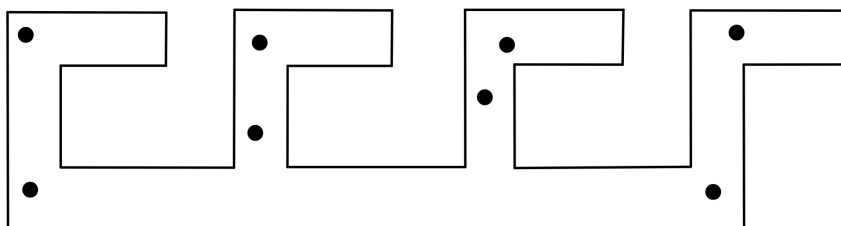
**Teorem 5.1.2.** *Za nadzor poligona s  $n \geq 5$  vrhova,  $\lfloor \frac{3n-1}{7} \rfloor$  čuvanih čuvara je ponekad nužno i uvijek dovoljno.*

Dokaz ovog teorema provodi se indukcijom po broju vrhova poligona uz složenu analizu slučajeva te ga možemo pronaći u članku [5].

## 5.2 Čuvanje čuvara u ortogonalnoj galeriji

Kako bismo čuvali čuvare u ortogonalnoj galeriji?

**Primjer 5.2.1.** *Promotrimo ortogonalni poligon u obliku valova, slika 5.3. Svaki dodatni val ovog poligona zahtjeva 2 dodatna čuvara te povećava ukupan broj vrhova poligona za 6. Iz toga možemo zaključiti da za nadzor ortogonalnog poligona s  $n \geq 6$  vrhova nikada nećemo trebati više od  $\lfloor \frac{2n}{6} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvanih čuvara.*



Slika 5.3: Čuvanje čuvara u ortogonalnom poligonu

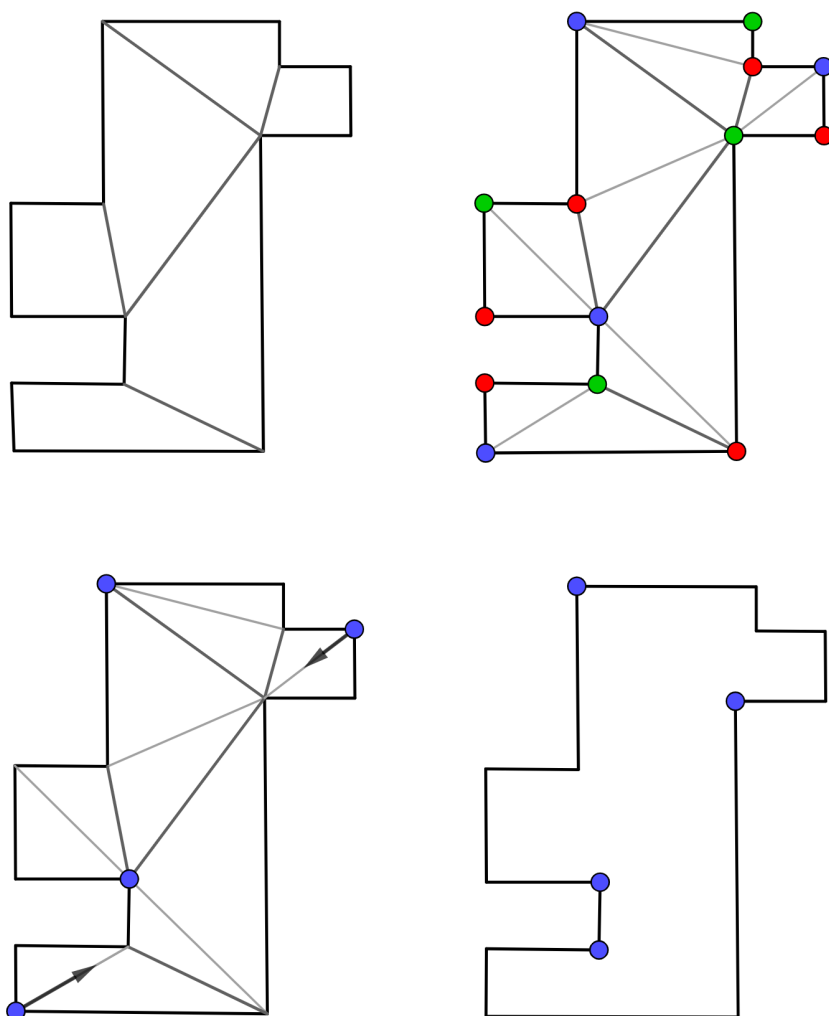
Ovaj put nema iznenađenja pa možemo odmah formulirati sljedeći teorem.

**Teorem 5.2.2.** *Za nadzor ortogonalnog poligona s  $n \geq 6$  vrhova,  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvanih čuvara je ponekad nužno i uvijek dovoljno.*

Kako bismo dokazali dovoljnost opet ćemo modificirati Fiskov argument. Dokaz se također može pronaći u članku [5], a mi ćemo ga ilustrirati na primjeru jednog poligona, slika 5.4.

Započet ćemo podjelom poligona na konveksne četverokute, a zatim ćemo triangulirati poligon umetanjem dijagonale unutar svakog četverokuta. Ovdje, kako bismo uskladili naš primjer s argumentima iz spomenutog članka, moramo paziti da ukoliko dva četverokuta dijele stranicu, njihove dijagonale ne smiju imati zajednički vrh. Sljedeći korak je obojiti dobivenu triangulaciju dopustivim 3-bojanjem kojeg smo opisali u prethodom poglavlju. Nakon bojanja, čuvare privremeno postavljamo u vrhove obojene bojom koja se pojavljuje najmanji broj puta. U našem slučaju to je plava boja te odmah možemo primijetiti kako nisu svi čuvari čuvani od strane nekog drugog čuvara. Navedeni problem ćemo riješiti premještanjem nekih čuvara.

Čuvare koji se nalaze u vrhu poligona iz kojeg izlazi točno jedna dijagonala premjestit ćemo duž dijagonale u suprotan vrh. Ukoliko dva ili više čuvara završe u istom vrhu,



Slika 5.4: Čuvanje čuvara u ortogonalnom poligону

onda dodatne čuvare isključujemo iz nadzora poligona. Prema tome, ovaj poligon možemo pokriti s četiri čuvana čuvara.

Kao i ranije, ovim postavljanjem čuvara ne možemo sa sigurnošću reći da je najmanje četiri čuvara potrebno za nadzor poligona sa slike 5.4 jer je sasvim jasno da je poligon moguće čuvati i s manje čuvara.

## 5.3 Tri dimenzije

Do sada smo galerije modelirali poligonom. No, poznavanje prostorne strukture galerije uvelike bi olakšalo odabir načina na koji ćemo čuvati galeriju. U nastavku ćemo proučavati galerije modelirane poliedrom, prema knjizi [4]. Koristit ćemo kamere umjesto čuvara jer će možda biti potrebno postaviti čuvara na strop ili na neka druga nezgodna mjesta. Kao i do sada, svaki dio galerije mora biti pokriven barem jednom kamerom te ćemo pretpostaviti da kamera može vidjeti u svim smjerovima.

**Definicija 5.3.1.** *Poliedar je geometrijsko tijelo omeđeno mnogokutima koje nazivamo stranama poliedra. Dužine u kojima se sastaju dvije susjedne strane nazivamo **bridovima**, a točke u kojima se sastaju susjedni bridovi nazivamo **vrhovi poliedra**.*

Pitamo se koliko najviše kamera možemo zatrebati za nadzor poliedra koji ima  $c$  vrhova. Glavni argument uz pomoć kojeg smo dokazali dovoljnost određenog broja čuvara za nadzor poligona je podjela poligona na trokute, odnosno triangulacija. Prenošenjem tog argumenta u tri dimenzije dolazimo do podjele poliedra na tetraedre.

**Definicija 5.3.2.** *Poliedar omeđen s četiri trokuta nazivamo **tetraedar**.*

U prvom poglavlju vidjeli smo da poligon može imati više različitih triangulacija, ali sve one imaju jednak broj trokuta. Pogledajmo je li to tako kod podjele poliedra na tetraedre.

**Primjer 5.3.3.** *Na slici 5.5 prikazan je jedan poliedar te njegove dvije različite podjele na tetraedre. Zapažamo da ove podjele ne sadrže jednak broj tetraedara.*

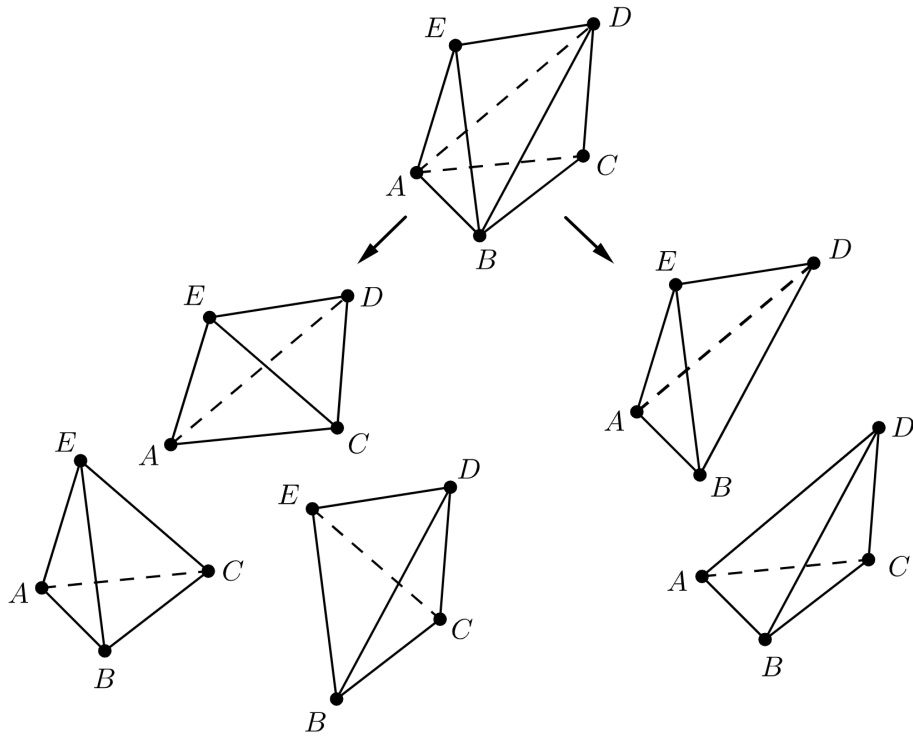
Je li uopće moguće svaki poliedar podijeliti na tetraedre? Najjednostavniji primjer poliedra koji se ne može podijeliti na tetraedre dao je 1928. godine Erich Schönhardt<sup>1</sup>.

Schönhardtov poliedar nastaje tako da poliedru sa slike 5.6 rotiramo gornji trokut, npr. za  $30^\circ$  u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu. Pravokutne strane poliedra se u tom slučaju savijaju prema unutrašnjosti poliedra duž dijagonala tih pravokutnika (na slici označene narančastom bojom), a dužine  $\overline{AC'}$ ,  $\overline{BA'}$  i  $\overline{CB'}$  više nisu dio poliedra, tj. leže izvan njega. Primijetimo da ukoliko želimo konstruirati tetraedre unutar ovog poliedra, svaki taj tetraedar morao bi nužno sadržavati jednu od navedenih dužina  $\overline{AC'}$ ,  $\overline{BA'}$  ili  $\overline{CB'}$ . Prema tome, ovakav poliedar ne možemo podijeliti na tetraedre.

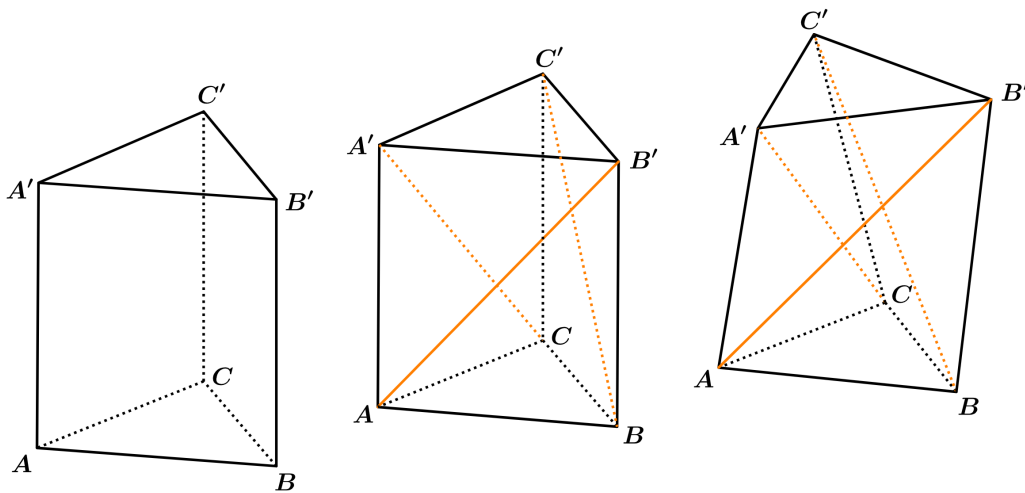
Postavljanjem čuvara u svaki vrh poligona pokrili bismo čitav poligon. No, ovdje ni to nije slučaj. 1992. godine Raimund Seidel<sup>2</sup> konstruirao je poliedar kod kojeg postavljanjem

<sup>1</sup>E. Schönhardt (1891. - 1979.), njemački matematičar

<sup>2</sup>R. Seidel (1957. -), austrijski informatičar



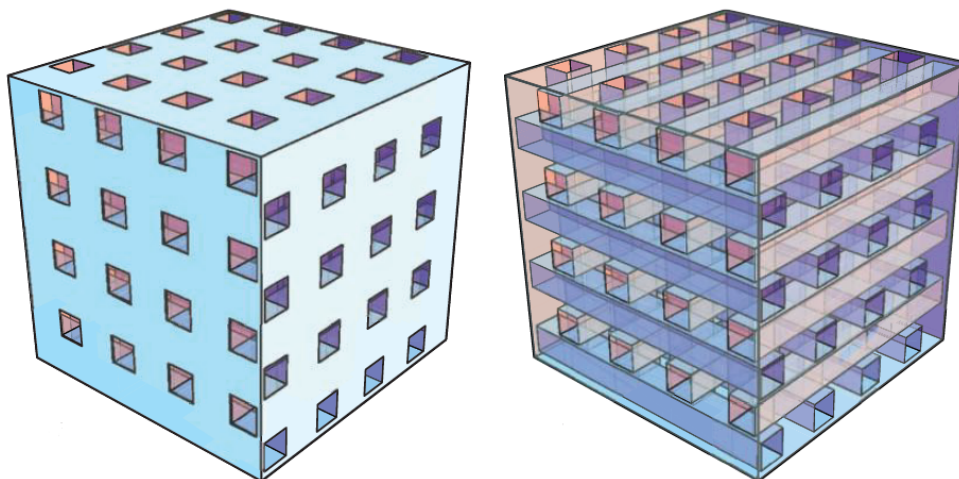
Slika 5.5: Podjela na tetraedre



Slika 5.6: Schönhardtov poliedar



kamera u svaki njegov vrh ne uspijevamo pokriti čitav poliedar, slika 5.7.



Slika 5.7: Seidelov poliedar <sup>3</sup>

Iz svega navedenog zaključujemo da ne možemo donositi opće zaključke o broju čuvara potrebnih za nadzor proizvoljnog poliedra koristeći argumente slične onima za nadzor poligona.

---

<sup>3</sup>Slika preuzeta iz knjige [4].



# Bibliografija

- [1] S. Fisk, *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, Journal of combinatorial theory, Series B **24** (1978), 347.
- [2] J. O'Rourke, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, 1998.
- [3] J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, New York, 1987.
- [4] S. L. Devadoss, J. O'Rourke, *Discrete and Computational geometry*, Princeton University Press, 2011.
- [5] T. S. Michael, V. Pinciu, *Art gallery theorems for guarded guards*, Computational Geometry **26** (2003), 247–258.
- [6] T. S. Michael, *How to Guard an Art Gallery and Other Discrete Mathematical Adventures*, Johns Hopkins University Press, 2009.



# Sažetak

*Problem čuvara umjetničke galerije* sastoji se u određivanju najmanjeg broja čuvara potrebnih za nadzor galerije čiji tlocrt odgovara poligonu s  $n$  vrhova. Václav Chvátal prvi je dokazao da su  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvara uvijek dovoljna za nadzor poligona s  $n$  vrhova. Glavni cilj ovog rada je temeljito proučiti ovaj rezultat, tj. Chvátalov teorem. U prvom dijelu rada izneseni su osnovni pojmovi i nekoliko zapažanja vezanih uz triangulaciju poligona koji su ključan dio Chvátalovog teorema. U nastavku je iznesen Chvátalov dokaz, a zatim i Fiskov dokaz istog rezultata koji se temelji na bojanju vrhova poligona. U drugom dijelu rada izdvojeno je nekoliko modifikacija izvornog problema te je dana detaljna analiza jedne posebne vrste poligona, ortogonalnih poligona. Potom je dokazano da za nadzor ortogonalnog poligona s  $n$  vrhova nikada neće zatrebati više od  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  stacionarnih čuvara. Na samom kraju, galerije su prenesene u tri dimenzije te su navedena osnovna zapažanja vezana uz čuvanje proizvoljnog poliedra.



# Summary

*The Art Gallery Problem* consists of determining the minimum number of guards required to guard a gallery whose floor plan corresponds to a polygon with  $n$  vertices. Václav Chvátal was the first to prove that  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guards will always be sufficient to guard a polygon with  $n$  vertices. The primary goal of this thesis is to thoroughly examine this result, i.e. Chvátal's theorem. The first part of the thesis presents the fundamental concepts, results and several observations regarding polygon triangulation, which is a crucial part of Chvátal's theorem. The text proceeds with Chvátal's proof, followed by Fisk's proof of the same result based on the coloring of the polygon vertices. In the second part of the thesis, several modifications of the original problem and a detailed analysis of a special type of polygon, the orthogonal polygon, are presented. A proof for the claim that guarding an orthogonal polygon with  $n$  vertices will never require more than  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  stationary guards is provided in the subsequent section. At the very end of the thesis, galleries in three-dimensional space are considered, and the essential observations related to guarding an arbitrary polyhedron are presented.





# Životopis

Rođena sam 2. veljače 1995. godine u Splitu. Srednjoškolsko obrazovanje stječem u Prirodoslovno-tehničkoj školi Split, smjer: Prirodoslovna gimnazija. 2014. godine upisujem preddiplomski studij Matematika, smjer: nastavnički, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija, 2018. godine, stječem titulu sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike. Iste godine i na istom fakultetu upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika, smjer: nastavnički.