Geometrijske primjene numeričke slike matrice

Šanje, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2022

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Šanje

GEOMETRIJSKE PRIMJENE NUMERIČKE SLIKE MATRICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem mom bratu Nikoli i roditeljima. Neizmjerno sam zahvalna na bezuvjetnoj ljubavi i jer nikada niste sumnjali u mene!
Hvala ostatku obitelji jer je uz Vas sve bilo moguće.
Hvala svim divnim prijateljima i kolegama, posebno mojoj Moniki koja je studiranje učinila bezbrižnijim i ljepšim.
Hvala mom Leu, on je onaj povoljan vjetar u leđa koji je širio moja jedra i svemu dao smisao.
Naposljetku, veliko hvala mentoru prof. dr. sc. Juraju Šiftaru na ogromnoj strpljivosti i nesebičnom zalaganju.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu prikazat ćemo osnovna svojstva numeričke slike matrice i njene primjene. Numerička slika se koristi pri rješavanju mnogih problema iz raznih područja kao što su teorija operatora i funkcionalna analiza, multilinearna algebra, kvantna fizika i dr. Postoje još neki nazivi za numeričku sliku pa bismo tako, ovisno o literaturi, mogli naići na nazive kao što su *polje vrijednosti*, *Wertovorrat*, *Hausdorffova domena* i *slika vrijednosti*. Numerička slika operatora najčešće je korišten naziv i prvi ga je koristio Marshall Stone[1] 1932. godine u svojoj knjizi *Linear Transformations in Hilbert Space*.

U radu će biti prikazano kako Teorem o eliptičkoj slici matrice omogućuje da opišemo nekoliko poznatih rezultata iz raznih područja, gdje će u svakom fokus biti na pojmu elipse. Drugi glavni rezultat je Toeplitz-Hausdorffov teorem koji pokazuje da je numerička slika kvadratne matrice reda n uvijek konveksan skup. Otto Toeplitz (1881.-1940.) je u jednom od svojih radova objavljenih 1918. godine pokazao da je granica numeričke slike uvijek konveksna, dok je Felix Hausdorff (1868.-1942.) godinu nakon pokazao da njena nutrina nema rupa. Ovim rezultatima njemačkih matematičara rađa se znameniti Toeplitz-Hausdorffov teorem za čiji se dokaz često koristi Teorem o eliptičkoj slici.

Geometrijske primjene numeričke slike matrice odnose se na Siebeckov[2] teorem koji govori o nultočkama kompleksnog polinoma stupnja 3 i njegovim derivacijama. Prvi ga je dokazao Siebeck 1864. godine, dok se proširenje teorema pojavljuje u knjizi *Geometry of Polynomials* koju je napisao američki matematičar Marden[3]. Iz tog razloga teorem ponekad nosi njihovo ime, Siebeck-Mardenov teorem.

Osim toga, opisat ćemo vezu s poznatim Ponceletovim[4] teoremom iz područja projektivne geometrije, dokazanim 1813. godine. Riječ je o n-terokutima koji su upisani jednoj, a opisani drugoj zadanoj elipsi. Tvrdnja je teorema da ako postoji jedan takav n-terokut, onda je svaka točka prve elipse vrh jednog n-terokuta s istim svojstvom. Teorem se još naziva Ponceletov teorem o zatvaranju ili Ponceletov porizam. Dokaz općenite tvrdnje je vrlo težak, a ovdje promatramo slučaj trokuta.

[1] Marshall Harvey Stone (1903.-1989.), američki matematičar

[2] Herman Siebeck (1842-1920.), njemački matematičar i filozof

[3] Morris Marden (1905.-1991.), američki matematičar

[4] Jean Victor Poncelet (1788.-1867.), francuski matematičar i vojni inženjer

Naposljetku se Ponceletov teorem povezuje s Blaschkeovim[5] produktom $B(z)$ iz kompleksne analize. $B(z)$ formira se kao umnožak određenih Möbiusovih transformacija, ima n zadanih nultočaka te preslikava jediničnu kružnicu na sebe. Za točku λ jedinične kružnice jednadžba $B(z) = \lambda$ ima točno n različitih rješenja. Posebno za $n = 3$ i za svaki zadani λ na jediničnoj kružnici tri rješenja određuju trokut opisan jednoj elipsi, određenoj nultočkama $B(z)$. Variranjem točke λ zapravo se dobiva situacija iz Ponceletovog teorema, a time i dokaz za slučaj Ponceletove 3-elipse. Ujedno se dodatno razjašnjava Siebeckov teorem.

[5]Wilhelm Blaschke (1885.-1962.), austrijski matematičar

Poglavlje 1

Numerička slika matrice

Da bismo definirali numeričku sliku operatora pa tako i matrice, prisjetit ćemo se nekih bitnih pojmova. Također, uvest ćemo i oznake koje ćemo koristiti u daljnjem radu. Za početak definirajmo skalarni produkt i normu na vektorskom prostoru. Neka je V vektorski prostor nad poljem F pri čemu je $F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$.

Definicija 1.0.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Preslikavanje $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ koje svakom vektoru $x \in V$ pridružuje realan broj $\|x\|$ naziva se norma na prostoru V ako pritom zadovoljava svojstva:*

1. $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in V;$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_v, \ \forall x \in V;$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \ \forall x \in V, \lambda \in F;$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in V.$

Definicija 1.0.2. *Preslikavanje $s : V \times V \to F$ koje svakom uređenom paru vektora (x, y) pridružuje skalar $s(x, y) = \langle x, y\rangle \in F$ naziva se skalarno množenje na vektorskom prostoru V ako vrijede svojstva:*

1. $\langle x, x\rangle \geq 0, \forall x \in V,$ *pri čemu je* $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_V;$
2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \ \forall x, y \in V;$
3. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \ \forall x, y \in V, \lambda \in F;$
4. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle y, z\rangle, \ \forall x, y, z \in V.$

Skalar $\langle x, y\rangle$ nazivamo skalarni produkt vektora x i y. Nadalje, vektorski prostor V koji je snabdjeven operacijom skalarnog množenja naziva se unitarni prostor nad poljem F, u oznaci $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Osim toga, ako je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni produkt na V onda je s $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ zadana norma na V. Definirajmo još neke pojmove koji će nam poslužiti u radu.

Definicija 1.0.3. *Neka su x i y vektori unitarnog prostora V, kažemo da su međusobno ortogonalni ako vrijedi $\langle x, y\rangle = 0$.*

Definicija 1.0.4. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem F. Preslikavanje $A : V \to W$ nazivamo linearni operator ako vrijede svojstva:*

1. $A(x + y) = A(x) + A(y), \forall x, y \in V;$
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x), \forall x \in V, \lambda \in F.$

Definicija 1.0.5. *Neka je $A \in M_{mn}(F)$. Matrica $A^T \in M_{nm}(F)$ se naziva transponirana matrica matrice A ako vrijedi:*

$$a^T_{ij} = a_{ji},\ za\ sve\ 1 \le i \le n, 1 \le j \le n.$$

Propozicija 1.0.6. *Operacija transponiranja ima svojstva:*

1. $(A^T)^T = A,$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T,$
3. $(AB)^T = B^T A^T,$
4. $(\alpha A)^T = \alpha A^T,\ \forall \alpha \in F.$

Matricu A nazivat ćemo simetričnom ako je $A^T = A$ te ćemo matricu O nazivati ortogonalnom ako je $OO^T = O^T O = I$.

Definicija 1.0.7. *Neka je $A \in M_{mn}(F)$. Matrica $A^* \in M_{nm}(F)$ se naziva hermitski adjungirana (kompleksno transponirana) matrica matrice A ako vrijedi:*

$$a^*_{ij} = \overline{a_{ji}},\ za\ sve\ 1 \le i \le n, 1 \le j \le n.$$

Propozicija 1.0.8. *Operacija hermitskog adjungiranja ima svojstva:*

1. $(A^*)^* = A,$
2. $(A + B)^* = A^* + B^*,$
3. $(AB)^* = B^* A^*,$

4. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, $\forall \alpha \in F$.

Napomenimo da matricu A za koju je $A = A^*$ nazivamo hermitskom, matricu U za koju vrijedi $UU^* = U^*U = I$ unitarnom i matricu N za koju vrijedi $NN^* = N^*N$ normalnom. Uočimo da normalne matrice obuhvaćaju i hermitske i unitarne matrice.

Standardni skalarni produkt na kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^n$ definiramo na ovaj način:

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i,$$

gdje su $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ iz $\mathbb{C}^n$.

Bazu unitarnog prostora nazivamo ortonormiranom ako se sastoji od međusobno ortogonalnih jediničnih vektora. Poznato je da svaki konačnodimenzionalni unitarni prostor posjeduje ortonormiranu bazu. Pomoću Gram-Schmidtova postupka ortonormiranja moguće je konstruirati ortonormirane baze s nekim dodatnim svojstvima.

Ovdje ćemo sažeto povezati određene tipove linearnih operatora s istoimenim matricama koje su takvim operatorima pridružene u (bilo kojoj) ortonormiranoj bazi.

Skup svih linearnih operatora na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V označavat ćemo s $L(V)$.

Za $A \in L(V)$ postoji jedinstveni $A^* \in L(V)$ takav da za sve $x, y \in V$ vrijedi $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$. Operator A^* naziva se adjungiranim operatorom operatora A.

Matrica operatora A^* u ortonormiranoj bazi upravo je hermitski adjungirana matrici operatora A u toj bazi.

Unitarni operator $U \in L(V)$ je operator sa svojstvom $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ za sve $x, y \in V$. Za unitarni operator vrijedi $UU^* = U^*U = I$ te $\|Ux\| = \|x\|$ za svaki $x \in V$, tj. unitarni operator čuva normu, a iz definicije očito čuva i relaciju ortogonalnosti. Stoga unitarni operator svaku ortonormiranu bazu preslikava u bazu s istim svojstvom.

Matrica unitarnog operatora u ortonormiranoj bazi je unitarna matrica. S druge strane, preslikavanje na V zadano s $x \mapsto Ux$ pri čemu je U unitarna matrica je unitarni operator.

Simetrični (hermitski simetrični) operator A definiran je svojstvom $A = A^*$, odnosno karakteriziran prikazom u ortonormiranoj bazi pomoću simetrične (hermitski) simetrične matrice.

Nadalje, operator $N \in L(V)$ naziva se normalnim ako vrijedi $NN^* = N^*N$. Matrica normalnog operatora u ortonormiranoj bazi je normalna matrica. S druge strane, preslikavanje na V zadano s $x \mapsto Nx$ pri čemu je N normalna matrica je normalni operator. Unitarni i hermitski simetrični operatori su normalni.

Istaknut ćemo neka od najvažnijih svojstava normalnih matrica odnosno normalnih operatora zbog njihove važnosti općenito pa posebno i u ovom radu. Pritom, budući da ćemo se uglavnom baviti kompleksnim matricama reda 2 odnosno linearnim operatorima na unitarnom prostoru $\mathbb{C}^2$, za neke činjenice se nećemo morati pozivati na opće teoreme nego će se u dvije dimenzije moći izvesti izravno.

Propozicija 1.0.9. *Neka je $T \in L(V)$. Tada je T normalan operator ako i samo ako za svaki $x \in V$ vrijedi $\|Tx\| = \|T^*x\|$.*

Dokaz. T je normalan ako i samo ako je $T^*T - TT^* = 0$.

Uočimo da općenito za $A \in L(V)$ vrijedi $A = 0$ (nuloperator) ako i samo ako za svaki $x \in V$ vrijedi $\langle Ax, x\rangle = 0$. Naime, očito je $A = 0$ ako i samo ako za svaka dva vektora x, y vrijedi $\langle Ax, y\rangle = 0$, a $\langle Ax, y\rangle$ se može izraziti ovako:

$$\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle\right) + \frac{i}{4}\left(\langle A(x+iy), x+iy\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle\right),$$

pri čemu su na desnoj strani svi skalarni produkti oblika $\langle Av, v\rangle$ za neke vektore v. Imamo i ekvivalenciju normalnosti operatora T s jednakostima $\langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle = 0$ za svaki $x \in V$ i zatim s $\langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$ odnosno $\langle T^*x, T^*x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle$ što nam je i potrebno. □

Iz ove karakterizacije svojstva normalnosti operatora izravno slijedi da se podudaraju jezgre $\operatorname{Ker} N$ i $\operatorname{Ker} N^*$ za normalni operator N. Zatim možemo pokazati važna svojstva s obzirom na spektar i svojstvene vektore normalnog operatora.

Najprije uočimo da ako je N normalan, a $\lambda \in \mathbb{C}$, onda je i $N - \lambda I$ normalan, pri čemu $(N - \lambda I)^* = N^* - \overline{\lambda} I$.

Propozicija 1.0.10.

(a) Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ svojstvena vrijednost normalnog operatora N, onda je $\overline{\lambda}$ svojstvena vrijednost za N^* i to s istim svojstvenim vektorom.

(b) Ako su $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ različite svojstvene vrijednosti normalnog operatora N, onda su njima pridruženi svojstveni vektori ortogonalni.

Dokaz.

(a) Neka je $Nx = \lambda x, x \neq 0$. Tada je $\|(N - \lambda I)x\| = 0$. Prema propoziciji (1.0.9) slijedi $\|(N^* - \overline{\lambda} I)x\| = 0$ pa je $N^*x = \overline{\lambda} x$.

(b) Pretpostavimo da je $Nx = \lambda x$, $Ny = \mu y$ pri čemu su $x, y \neq 0$ i $\lambda \neq \mu$. Imamo $\langle Nx, y\rangle = \langle x, N^* y\rangle$ i odatle $\langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \overline{\mu} y\rangle = \langle \mu x, y\rangle$. Stoga je $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$ pa je nužno $\langle x, y\rangle = 0$. □

Uz pomoć prethodnih propozicija može se dokazati ključni teorem da je operator $A \in L(V)$ na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru normalan ako i samo ako je dijagonalizabilan u ortonormiranoj bazi ili, ekvivalentno, unitarno sličan dijagonalnoj matrici $A = U^* D U$. Ovo ćemo koristiti uglavnom za prostor $V = \mathbb{C}^2$.

1.1 Definicija i neka svojstva

Definicija 1.1.1. *Numerička slika $n \times n$ matrice $A \in L(V)$ je definirana s*

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in V,\ \|x\| = 1\}.$$

Dakle, numerička slika matrice A skup je kompleksnih brojeva, kraće $W(A) \subseteq \mathbb{C}$. Numerička slika je važna iz više razloga, primjerice zato što sadrži spektar matrice, ali pruža i druge informacije. To će doći do izražaja u geometrijskim primjenama.

Numerička slika matrice je kompaktan i konveksan podskup skupa $\mathbb{C}$. Pod pojmom kompaktnosti ovdje podrazumijevamo zatvorenost i ograničenost, dok ćemo važno svojstvo konveksnosti razmatrati u drugom poglavlju. Zasad ćemo navesti još samo neka jednostavna, ali korisna svojstva koja direktno slijede iz definicije numeričke slike.

Tako se naprimjer numerička slika matrice A neće promijeniti ako na nju djelujemo unitarnom transformacijom sličnosti. Odnosno, vrijedi:

- $W(A) = W(U^* A U)$, gdje je U proizvoljna unitarna matrica.

Naime, vrijedi:

$$\langle U^* A U x, x\rangle = \langle A U x, U x\rangle = \langle Ay, y\rangle,\ \|y\| = 1.$$

Potom, vrijedi i svojstvo:

- $W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta,$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Tada je:

$$\langle(\alpha A + \beta I)x, x\rangle = \langle \alpha A x, x\rangle + \langle \beta I x, x\rangle = \alpha\langle Ax, x\rangle + \beta\langle x, x\rangle = \alpha\langle Ax, x\rangle + \beta.$$

Uočimo što ovakva transformacija znači geometrijski u kompleksnoj ravnini. Pribrajanje $\beta \in \mathbb{C}$ znači translaciju, a množenje s $\alpha \in \mathbb{C}$ znači kompoziciju rotacije za *arg* α i dilataciju s koeficijentom $|\alpha|$.

Poglavlje 2

Teorem o eliptičkoj slici i konveksnost

U ovom poglavlju ćemo iskazati i dokazati Teorem o eliptičkoj slici matrice reda 2. Tim teoremom pokazat ćemo da je numerička slika takve matrice eliptički disk s fokusima u svojstvenim vrijednostima matrice i sporednom osi čija je duljina također poznata. Pomoću tog teorema može se dokazati i Toeplitz–Hausdorffov teorem koji kaže da je numerička slika kvadratne matrice bilo kojeg reda konveksan skup. Prethodno napomenimo da nam prilikom pokazivanja teorema pomaže pojednostaviti matricu $A \in M_2(\mathbb{C})$ unitarnim transformacijama sličnosti koliko je god to moguće. Jednom kada pronađemo sličnu matricu matrici A tada se svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori prenose na tu sličnu matricu.

Također, bit će važna činjenica da je kompleksna kvadratna matrica reda 2 unitarno slična nekoj gornjetrokutastoj matrici. Kako vrijedi da je numerička slika matrice invarijantna s obzirom na unitarne transformacije dovoljno je pronaći numeričku sliku matrice koja ima jednostavniju strukturu.

2.1 Teorem o eliptičkoj slici matrice

Radi pojednostavljenja problema, razmatrat ćemo numeričku sliku kompleksne matrice 2×2, odnosno ponašanje operatora na $\mathbb{C}^2$. Pod pojmom eliptičkog diska podrazumijevaju se i dva degenerirana oblika elipse. Tako numerička slika može biti jedna točka ako se radi o jediničnoj matrici ili segment s krajnjim točkama u svojstvenim vrijednostima ako se radi o dijagonalnoj matrici. Osim toga, ako eliptički disk nije degeneriran i ako su svojstvene vrijednosti jednake tada će numerička slika biti krug (glavna i sporedna os jednake). Svi ostali slučajevi nam posljedično za numeričku sliku daju eliptički disk s fokusima u svojstvenim vrijednostima matrice i duljinom sporedne osi iskazane idućim teoremom.

Teorem 2.1.1. *(Teorem o eliptičkoj slici matrice) Neka je $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrica sa svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2. Numerička slika $W(A)$ matrice A je eliptički disk s fokusima u svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2 i duljinom sporedne osi $(tr(A^*A) - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2)^{1/2}$.*

Dokaz. Neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti od A i neka je numerička slika matrice dana s $W(A)$. Teorem ćemo dokazati analizirajući više slučajeva.

Pretpostavimo najprije da je A normalna matrica. Iz rezultata navedenih u prvom poglavlju znamo da se A može dijagonalizirati prikladnom unitarnom transformacijom. Također, u prvom poglavlju smo pokazali i kako takva transformacija ne mijenja $W(A)$. Tada matrica A ima oblik:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

- Promotrimo slučaj kada su svojstvene vrijednosti jednake $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Tada je matrica A skalarna:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ako je $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ i $\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$, onda je $Ax = (\lambda x_1, \lambda x_2)$. Slijedi $\langle Ax, x\rangle = \lambda|x_1|^2 + \lambda|x_2|^2$. Tada je:

$$W(A) = \{\lambda|x_1|^2 + \lambda|x_2|^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{C},\ |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\}.$$

Jasno nam je da je skup $W(A) = \{\lambda|x_1|^2 + \lambda|x_2|^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{C},\ |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\} = \{\lambda\}$. Drugim riječima, numerička slika matrice je jednočlan skup i njegov jedini element je svojstvena vrijednost matrice. Ovime smo pokazali prvi slučaj - numerička slika je točka.

- Sada promotrimo slučaj kada su svojstvene vrijednosti različite $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Tada je matrica A dana s:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Ako je $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ i $\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$, onda je $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$. Slijedi da je $\langle Ax, x\rangle = \lambda_1|x_1|^2 + \lambda_2|x_2|^2$ pa je tada:

$$W(A) = \{\lambda_1|x_1|^2 + \lambda_2|x_2|^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{C},\ |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\}.$$

Uvedemo li supstituciju $t = |x_1|^2$ iz uvjeta $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ slijedi i $|x_2|^2 = 1 - t$. Prema tome, skup

$$W(A) = \{t\lambda_1 + (1 - t)\lambda_2 : t \in [0, 1]\}$$

je skup svih konveksnih kombinacija točaka λ_1 i λ_2. Dakle, zatvoreni interval u skupu $\mathbb{C}$ s krajnjim točkama u λ_1 i λ_2. Taj skup smatramo degeneriranim oblikom elipse sa sporednom osi duljine $(\mathrm{tr}(A^*A) - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2)^{1/2} = 0$. Ovime je pokazan i drugi slučaj - numerička slika je segment.

Sada ćemo pretpostaviti da A nije normalna. Kako znamo da je svaka kompleksna kvadratna matrica unitarno slična nekoj gornjetrokutastoj matrici možemo promatrati matricu A oblika:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu $b \neq 0$ budući da A nije normalna. Uzmimo matricu $A - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A))I$, njezin trag je jednak nuli, a njezina numerička slika nastaje translacijom $W(A)$ po svojstvu dokazanom u prvom poglavlju. Dakle, bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathrm{tr}(A) = 0$.

- Sada promotrimo slučaj kada $\lambda_1 = \lambda_2$.

Kako su svojstvene vrijednosti jednake, a pritom je trag jednak nuli, matrica A je:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slično kao i u prethodnim slučajevima iz $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ i $\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ slijedi da je $Ax = (bx_2, 0)$. Slijedi i $\langle Ax, x\rangle = bx_2\overline{x_1}$. Tada je:

$$W(A) = \{bx_2\overline{x_1} : x_1, x_2 \in \mathbb{C},\ |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\}.$$

Vrijedi $|bx_2\overline{x_1}| \leq |b||x_2||x_1| \leq \frac{|b|}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2)$, budući da iz $0 \leq (|x_1| - |x_2|)^2$ slijedi $2|x_1||x_2| \leq |x_1|^2 + |x_2|^2$. Uz uvjet $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ imamo $|bx_2\overline{x_1}| \leq \frac{|b|}{2}$.

Stoga je $W(A)$ sadržan u zatvorenom krugu $K(0, \frac{|b|}{2})$, a zapravo je $W(A)$ i jednak tom skupu budući da za svaki realni broj $r \in [0, 1]$ postoji $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ sa svojstvom $|x_1||x_2| = r$.

- Promotrimo i posljednji slučaj kada $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Sada su svojstvene vrijednosti suprotni brojevi različiti od nule te matrica A ima oblik:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & b \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Zamjenom matrice A matricom $\frac{1}{\lambda}A$ možemo uzeti da je $\lambda = 1$. Budući da ima dvije različite svojstvene vrijednosti, ali nije normalna, matrica A dijagonalizira se u bazi koja nije ortonormirana. Iz istog razloga kao prije želimo naći pogodnu matricu koja je unitarno ekvivalentna s A, jer će tada numerička slika $W(A)$ ostati nepromijenjena.

U ovom slučaju možemo izabrati ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{C}^2$ tako da prvi njezin vektor bude svojstveni za svojstvenu vrijednost 1, a da matrica A (odnosno njoj unitarno ekvivalentna) ima oblik:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2c \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

pri čemu je c pozitivan realan broj.

Naime, ako je $Au = u$ i $Av = -v$, pri čemu su u, v jedinični vektori, možemo drugi vektor tražene baze $\{u, w\}$ izraziti iz uvjeta da je ortogonalan na u i da je $Aw = 2cu - w$, uz $c > 0$.

Najprije uzmimo vektor $w' = v - \langle v, u\rangle u$ (očito ortogonalan na u) i tada slijedi da je $Aw' = -v - \langle v, u\rangle u$. Ako pomnožimo w' kompleksnim brojem t takvim da uz vektor u dobijemo pozitivan realni koeficijent (to će onda biti traženi c), imat ćemo $w = tw' = tv + cu$. Tada je $Aw = -tv + cu = 2cu - w$, što smo i željeli.

Time još nismo dobili $W(A)$, nego ćemo tu numeričku sliku opisati pomoću $W(C)$ za matricu C izabranu tako da ima obje svojstvene vrijednosti jednake 0.

Neka je matrica C dana s $C = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{\gamma}{2}(A - A^*)$ i označimo $\gamma = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}$. Tada vrijedi:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & (1+\gamma)c \\ (1-\gamma)c & -1 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\mathrm{tr}(C) = 0$ i $\det(C) = -1 - c^2(1 - \gamma^2) = 0$, vidimo da C ima dvostruku svojstvenu vrijednost 0. Dakle, C je unitarno ekvivalentna matrici:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{1+c^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Naime, možemo izabrati ortonormiranu bazu u kojoj je prvi vektor svojstveni za dvostruku svojstvenu vrijednost 0 (čija je geometrijska kratnost 1). Prije normiranja, to je vektor $(1, (1-\gamma)c)$ pa se za njemu ortogonalni vektor može uzeti $((1-\gamma)c, -1)$. Djelovanjem C na vektore baze dobiva se oblik matrice koja samo na poziciji $(1, 2)$ ima koeficijent različit od 0 i račun pokazuje da je to $2\sqrt{1+c^2}$.

Pozovemo li se na prethodni slučaj zaključujemo kako je $W(C)$ disk radijusa $\sqrt{1+c^2}$. Tada je rub od $W(C)$ dan s $\{\sqrt{1+c^2}\cos t + i\sqrt{1+c^2}\sin t : t \in \mathbb{R}\} = \{\sqrt{1+c^2}e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$.

Pokažimo još da vrijedi ekvivalencija:

$$x + iy \in W(A) \Leftrightarrow x + i\gamma y \in W(C).$$

Obzirom da je $z = x + iy \in W(A)$, $\|z\| = 1$, onda su

$$\langle Az, z\rangle = x + iy, \qquad \langle A^* z, z\rangle = \langle z, Az\rangle = \overline{\langle Az, z\rangle} = x - iy.$$

Prema tome, možemo lako pokazati kako je:

$$\begin{aligned}
\langle Cz, z\rangle &= \frac{1}{2}\langle (A + A^*)z, z\rangle + \frac{\gamma}{2}\langle (A - A^*)z, z\rangle \\
&= \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) + \frac{\gamma}{2}(x + iy - (x - iy)) \\
&= x + \frac{\gamma}{2} \cdot 2iy \\
&= x + i\gamma y.
\end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da vrijedi ekvivalencija pa zbog toga vrijedi da je rub $W(A)$ dan s:

$$\sqrt{1 + c^2}\cos t + i \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \sqrt{1 + c^2}\sin t = \sqrt{1 + c^2}\cos t + i \cdot \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} \cdot \sqrt{1 + c^2}\sin t.$$

Odnosno, rub od $W(A)$ je skup $\{\sqrt{1 + c^2}\cos t + ic\sin t : t \in \mathbb{R}\}$. Iz toga proizlazi da je numerička slika $W(A)$ matrice A eliptički disk kojemu je duljina glavne osi $2\sqrt{1 + c^2}$, duljina sporedne osi $2c$ te su fokusi u -1 i 1.

Zaključno, dokazan je teorem o eliptičkoj slici matrice. $\square$

2.2 Toeplitz-Hausdorffov teorem

U ovom dijelu ćemo iskazati i dokazati Toeplitz-Hausdorffov teorem koji govori o konveksnosti numeričke slike matrice. Dokazi ovog teorema se najčešće pozivaju na Teorem o eliptičkoj slici matrice, a razlog tome je činjenica da je konveksnost dvodimenzionalno svojstvo. Iako se u ovoj formulaciji teorem specijalno odnosi na matrice, rezultat vrijedi za sve operatore na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru.

Da bi eliptička slika bila konveksna, svake dvije točke numeričke slike i njihova spojnica moraju biti sadržani u numeričkoj slici. Kao što je prethodno pokazano, numerička slika matrice može biti jedna točka ili segment pa u tom slučaju lako zaključujemo da je ona zaista konveksan skup. Prije nego krenemo na dokaz teorema uvest ćemo pojam kompresije operatora.

Definicija 2.2.1. *Kompresija operatora $A \in L(V)$ na zatvoreni potprostor Z prostora V je operator $PA|_Z : Z \to Z$, gdje je P ortogonalna projekcija na potprostor Z.*

U dokazu ćemo koristiti činjenicu da za ortogonalni projektor P vrijedi $P = P^2 = P^*$ i $Px = x$.

Teorem 2.2.2. *(Toeplitz-Hausdorffov teorem) Za sve $A \in M_n(\mathbb{C})$ numerička slika $W(A)$ je konveksan skup.*

Dokaz. Neka je dana matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ i neka su $\lambda_x = \langle Ax, x \rangle, \lambda_y = \langle Ay, y \rangle$ proizvoljni elementi $W(A)$, gdje su $\|x\| = 1$ i $\|y\| = 1$. Pretpostavimo da su jedinični vektori $x, y \in \mathbb{C}^n$ linearno nezavisni pa čine bazu dvodimenzionalnog prostora $Z = [\{x, y\}]$.

Neka je P projekcija prostora $\mathbb{C}^n$ na Z. Tada je $PA|_Z$ kompresija od A i dana je 2×2 matricom. Pozivajući se na prethodno dokazani teorem o eliptičkoj slici matrice i uzimajući u obzir da je P ortogonalni projektor te da za kompresiju $PA|_Z$ vrijedi:

$$\langle PAx, x \rangle = \langle Ax, Px \rangle = \langle Ax, x \rangle = \lambda_x \in W(PA|_Z),$$

$$\langle PAy, y \rangle = \langle Ay, Py \rangle = \langle Ay, y \rangle = \lambda_y \in W(PA|_Z),$$

slijedi da je $W(PA|_Z)$ eliptički disk. Kako numerička slika matrice A sadrži i numeričku sliku svake kompresije od A, onda je $W(PA|_Z) \subseteq W(A)$. Iz toga proizlazi da $\lambda_x, \lambda_y \in W(PA|_Z) \subseteq W(A)$. Prema tome, segment koji povezuje λ_x i λ_y također je sadržan u $W(A)$ pa je $W(A)$ konveksan skup što je i trebalo dokazati.

□

Poglavlje 3

Siebeckov teorem

U ovom poglavlju ćemo opisati geometrijsku vezu između nultočaka kubnog polinoma i nultočaka njegove derivacije koju je prvi uočio Herman Siebeck, njemački matematičar. Iako prvi daje i dokaz teorema, često se zasluge pripisuju i matematičaru Morrisu Mardenu koji oko osam desetljeća nakon daje proširenje teorema. Posljednjih nekoliko desetljeća javlja se veliki interes za ovaj rezultat kao i pitanja oko naziva istog. Rezultat se u većini literature spominje kao Siebeck-Mardenov teorem kako bismo odali priznanje obojici matematičara. U nastavku ga kraće nazivamo Siebeckov teorem.

Iako je rezultat od najvećeg značaja u području matematike, ima nekoliko primjena kod rješavanja inženjerskih problema. Naprimjer, koristi se kao model podjele rizika za lociranje štetnih objekata između tri grada.

3.1 Siebeckov teorem za kubne polinome

Siebeckov teorem opisuje vezu između nultočaka kubnog polinoma i nultočaka njegove derivacije. Drugim riječima, teorem tvrdi da ako su nultočke polinoma nekolinearne točke kompleksne ravnine tada su nultočke derivacije fokusi elipse upisane trokutu s vrhovima u nultočkama koja dodiruje stranice tog trokuta.

Dakle, točke u kojima elipsa dira stranice tog trokuta dijele stranicu u određenom omjeru. U dokazima koji slijede pokazat ćemo i specijalan slučaj kada su te točke upravo polovišta stranica spomenutog trokuta.

Teorem 3.1.1. *(Siebeckov teorem) Neka su z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$ nekolinearne točke kompleksne ravnine. Nultočke z_1' i z_2' funkcije*

$$F(z) = \frac{m_1}{z - z_1} + \frac{m_2}{z - z_2} + \frac{m_3}{z - z_3}, \quad m_1, m_2, m_3 > 0$$

su fokusi elipse koja dira segmente z_1z_2, z_2z_3, z_3z_1 *u točkama* t_3, t_1 *i* t_2 *i koje dijele te segmente u omjerima* $m_1 : m_2, m_2 : m_3$ *i* $m_3 : m_1$, *redom.*

Motivacija

Za dokaz ovog teorema inspiraciju ćemo potražiti u Toeplitz-Hausdorffovom teoremu gdje ćemo kao glavni alat koristiti kompresiju 3×3 dijagonalne matrice D na 2×2 matricu A preko 3×2 projekcije P. Projekciju P zadajemo na način da su njeni stupci ortonormirani. Tada je $P^*P = I_2$, gdje je P^* adjungirana matrica matrice P. Vrijedi:

$$\langle Px, y\rangle = \langle P^*Px, P^*y\rangle = \langle x, P^*y\rangle.$$

Matricu A možemo definirati kao $A = P^*DP$. No, definicija numeričke slike dijagonalne matrice D govori da je ona konveksna ljuska svojstvenih vrijednosti od D pa ako pritom pretpostavimo da su z_1, z_2, z_3 na dijagonali one su i svojstvene vrijednosti. Tada možemo pisati $D = D_3$ pa slijedi:

$$A = P^*D_3P.$$

Također, primijetimo da za jedinični vektor $x \in \mathbb{C}^2$ vrijedi:

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle P^*Px, x\rangle = 1.$$

Istaknimo sljedeću važnu činjenicu: Ako je $A = P^*DP$, pri čemu su P i D prethodno definirani, tada $W(A) \subseteq W(D)$.

Kako bismo to dokazali uzmimo neki $\mu \in W(A)$. To znači da je $\mu = \langle Ay, y\rangle$ za neki jedinični vektor $y \in \mathbb{C}^2$. Budući da smo pokazali da je Py jedinični vektor iz $\mathbb{C}^2$ slijedi:

$$\mu = \langle Ay, y\rangle = \langle P^*DPy, y\rangle = \langle DPy, Py\rangle \in W(D).$$

Prije nego krenemo na dokaz Siebeckovog teorema iskažimo i dokažimo njegovu polinomijalnu verziju.

- Radi jednostavnosti računa dokaz ćemo provesti za sve $m_j = 1/3$.

Teorem 3.1.2. *(Siebeckov teorem, polinomijalna verzija) Neka je p polinom čije su nultočke* z_1, z_2, z_3 *nekolinearne točke kompleksne ravnine. Neka je T trokut s vrhovima* z_1, z_2 *i* z_3. *Tada postoji tom trokutu jedinstvena upisana elipsa E koja dira svaku stranicu trokuta T u njenom polovištu. Fokusi elipse su nultočke derivacije* p' *polinoma p.*

Dokaz. Definirajmo funkciju F kao $F(z) := p'(z)/(3p(z))$. Kako znamo da je kubni polinom p dan s $p(z) = \alpha(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ te da je njegova derivacija $p'(z)$ jednaka $p'(z) = \alpha\,[(z - z_2)(z - z_3) + (z - z_3)(z - z_1) + (z - z_1)(z - z_2)]$ funkciju F sada zapisujemo:

$$F(z) = \frac{p'(z)}{3p(z)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3}\right).$$

Neka je D dijagonalna matrica s nultočkama na dijagonali, vrijedi $D = diag(z_1, z_2, z_3)$. Odaberimo sada 3×2 projekciju P takvu da su njeni stupci ortonormirani i da su ortogonalni na vektor $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & \sqrt{m_2} & \sqrt{m_3} \end{bmatrix}^t$. Jedna takva projekcija dana je s:

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Kako je 3×2 matrica P s ortonormiranim stupcima, vrijedi da je $P^*P = I_2$. Neka je dana i matrica $A = P^*DP$. Pretpostavimo li sada da je E_j dijagonalna 3×3 matrica s 1 na jj poziciji, slijedi da je matrica A dimenzije 2×2 i možemo ju zapisati:

$$A = \sum_{j=1}^{3} z_j P^* E_j P.$$

Prisjetimo se da $W(A) \subseteq W(D)$, što znači da je elipsa koja omeđuje $W(A)$ sadržana unutar trokuta koji omeđuje $W(D)$ ili dodiruje njegove stranice u nekim točkama.

Preostaje nam pronaći točke dodira, ako postoje. Pronaći ćemo točku dodira jedne stranice trokuta, a za preostale dvije rezultat bismo dobili analogno. Ovime problem svodimo na jednostavniji račun jer ćemo sada promatrati samo dvije od tri nultočke z_j polinoma p. Prema tome, odabiremo $x \in \ker(P^*E_3P)$ tako da u računu jedna od nultočaka nestane. Uzmimo $x_3 = [1\ 0]^t$, pa $P^*E_3Px_3 = 0$. Tada dobivamo:

$$\begin{aligned} \langle Ax_3, x_3 \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{3} z_j P^* E_j P x_3, x_3 \right\rangle \\ &= z_1 \langle E_1 P x_3, P x_3 \rangle + z_2 \langle E_2 P x_3, P x_3 \rangle \\ &= \frac{z_1 + z_2}{2}. \end{aligned}$$

Pokazali smo da polovište segmenta z_1z_2 pripada $W(A)$. Kako je $W(A) \subseteq W(D)$ vidimo da je elipsa upisana danom trokutu, a točke dirališta su polovišta stranica trokuta.

Po teoremu o eliptičkoj slici matrice znamo da elipsa E ima svoje fokuse u svojstvenim vrijednostima od A. Nakon što direktno dobijemo matricu A i tako odredimo svojstvene vrijednosti, a samim tim i fokuse elipse, lako ćemo pokazati da se one podudaraju s nultočkama derivacije p'. Direktnim izračunom slijedi da:

$$A = \begin{bmatrix} (z_1 + z_2)/2 & (z_1 - z_2)/\sqrt{12} \\ (z_1 - z_2)/\sqrt{12} & (z_1 + z_2 + 4z_3)/6 \end{bmatrix}.$$

Neka su svojstvene vrijednosti matrice A dane sa a i b, tada vrijede sljedeće jednakosti:

$$a + b = \mathrm{tr}(A) = \frac{2}{3}(z_1 + z_2 + z_3), \quad ab = \det(A) = \frac{1}{3}(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3).$$

Preostaje nam pronaći nultočke derivacije p':

$$\begin{aligned} p'(z) &= ((z - z_1)(z - z_2)(z - z_3))' \\ &= 3\left(z^2 - \frac{2}{3}(z_1 + z_2 + z_3)z + \frac{1}{3}(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)\right) \\ &= 3(z^2 - (a + b)z + ab) \\ &= 3(z - a)(z - b). \end{aligned}$$

Svojstvene vrijednosti se podudaraju s nultočkama derivacije pa je dokazana polinomijalna verzija Siebeckovog teorema. □

Sada se možemo vratiti dokazu Siebeckovog teorema, točnije njegovoj prvoj verziji. Koristit ćemo se istim oznakama kao i u prethodnom dokazu.

Dokaz Teorema 3.1.1. Kao što smo već spomenuli dokaz će se provoditi za $m_j = \frac{1}{3}$, gdje $j = 1, 2, 3$. U tom slučaju je $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. Ponovno, tražimo 2×2 matricu P_1 takvu da su njeni stupci ortonormirani i da su ortogonalni na vektor $[\sqrt{m_1}\ \ \sqrt{m_2}\ \ \sqrt{m_3}]^t$. Jedna takva projekcija dana je s:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{bmatrix} \sqrt{m_2} & \sqrt{m_1}\sqrt{m_3} \\ -\sqrt{m_1} & \sqrt{m_2}\sqrt{m_3} \\ 0 & -(m_1 + m_2) \end{bmatrix}.$$

Definirajmo matricu A_1 analogno kao i u prethodnom dokazu. Dakle, $A_1 := P_1^* D P_1$ i to je matrica reda 2. Prisjetimo se da $W(A_1) \subseteq W(D)$ pa je s A_1 određena elipsa koja je sadržana u trokutu $\triangle z_1z_2z_3$.

Preostaje pronaći točke dodira. Ponovno, zapišemo li matricu A_1 kao:

$$A_1 = \sum_{j=1}^{3} z_j P_1^* E_j P_1$$

i odaberemo li $x_3 = [1\ 0]^t$ iz jezgre od $P_1^* E_3 P_1$, slijedi da je $P_1^* E_3 P_1 x_3 = 0$. Tada dobivamo:

$$\begin{aligned} \langle A_1x_3, x_3\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{3} z_j P_1^* E_j P_1 x_3, x_3 \right\rangle \\ &= z_1\langle E_1P_1x_3, P_1x_3\rangle + z_2\langle E_2P_1x_3, P_1x_3\rangle \\ &= \frac{m_1z_2 + m_2z_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Dakle, ovo je omjer u kojem dиralište dijeli jednu stranicu trokuta. Analogno bismo dobili i preostala dva omjera za druge dvije stranice. Zaključno, teorem je dokazan. □

3.2 Siebeckov opći teorem

U želji da generaliziramo Siebeckov teorem prirodno je pitati se kako bismo generalizirali pojam fokusa na krivulje višeg stupnja. Osim algebre kojom smo se do sada najviše služili, kod ovog problema se javlja i potreba za poznavanjem projektivne geometrije.

Projektivna geometrija će nam pomoći u samoj interpretaciji problema i da bismo lakše prepoznali smisao istog. No, linearna algebra i dalje ostaje glavni alat u dokazu ove generalizacije.

Kao što slutimo, teorem koji slijedi reći će nam nešto više o fokusima algebarske krivulje višeg reda.

Motivacija

Navedimo neke od osnovnih činjenica o kompleksnoj projektivnoj ravnini $P^2(\mathbb{C})$. Naime, bilo koja točka kompleksne projektivne ravnine definira se kao klasa uređenih trojki kompleksnih brojeva $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ za $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, osim trojke $(0, 0, 0)$. Ovako definiran skup točaka uz definiciju skupa pravaca i relaciju incidencije među njima tvori projektivnu ravninu.

Kako se sljedeći teorem odnosi na algebarske krivulje reda n definirat ćemo ih.

Definicija 3.2.1. *Skup svih točaka kompleksne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{C})$, čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu n-tog stupnja*

$$p(x, y, z) = 0,$$

nazivamo algebarskom krivuljom n-tog reda.

Također, prema [3] točka P će biti fokus algebarske krivulje reda n ako nije jednaka nekoj od tzv. cirkularnih točaka $I = (1, i, 0)$ ili $J = (1, -i, 0)$, a PI i PJ su tangente te krivulje.

Teorem 3.2.2. *(Siebeckov teorem, generalizacija) Neka su $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ i neka je dana funkcija*

$$F(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{z - z_j}, \quad m_j > 0.$$

Tada su nultočke od F fokusi algebarske krivulje reda $n - 1$ koja dodiruje svaki segment $z_j z_k$ u točki koja dijeli taj segment u omjeru $m_j : m_k$.

Dokaz. Dokaz ćemo provoditi slično kao i u prethodnom poglavlju. Krenimo od pretpostavke da $z_j \neq z_k$ za $j \neq k$. Ukoliko je $n = 3$, generalizacija Siebeckovog teorema se svodi na dokaz teorema (3.1.1). Promatrat ćemo slučajeve kada $n > 3$.

Ponovno inspiraciju pronalazimo u Toeplitz-Hausdorffovom teoremu pa razmatramo kompresiju dijagonalne matrice D_n na $(n-1) \times (n-1)$ matricu A preko projekcije P koja zadovoljava $P^*P = I_{n-1}$. Tada je matrica A dana s $A = P^*D_nP$. Pretpostavimo li sada da je E_j dijagonalna $n \times n$ matrica s 1 na jj poziciji, slijedi da je matrica A tipa $(n-1) \times (n-1)$ i možemo ju zapisati:

$$A = \sum_{j=1}^{n} z_j P^* E_j P.$$

Sada odaberimo proizvoljan $x \in \mathbb{C}^{n-1}$ sa svojstvom da se nalazi u jezgri svih operatora osim dva, P^*E_jP i P^*E_kP. Slično kao i prije, zapišimo:

$$\langle Ax, x \rangle = z_j \langle E_j Px, Px \rangle + z_k \langle E_k Px, Px \rangle.$$

Očito je da su $\langle E_j Px, Px \rangle$ i $\langle E_k Px, Px \rangle$ nenegativni po definiciji skalarnog produkta. Pa prema tome, dokaz u ovom trenutku možemo podijeliti na dva slučaja, kada je suma ovih dviju vrijednosti 1 i kada je različita od 1.

U slučaju kada je $\langle E_j Px, Px \rangle + \langle E_k Px, Px \rangle = 1$ možemo pronaći točku koja se nalazi na segmentu $z_j z_k \subseteq W(A)$. Međutim, kako sumu možemo zapisati i na ovaj način:

$$\sum_{j=1}^{n} P^* E_j P = P^* \left(\sum_{j=1}^{n} E_j \right) P = P^* I P = I_{n-1},$$

a pritom odaberemo i proizvoljan $x \in \mathbb{C}^{n-1}$ tada vrijedi:

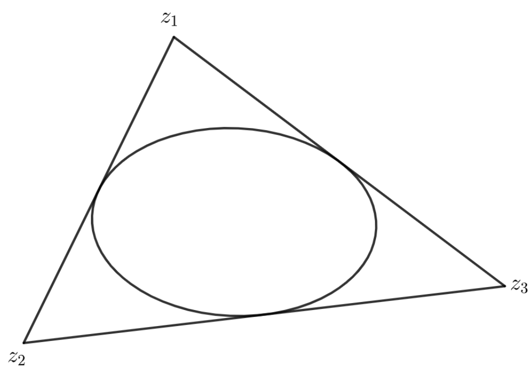
$$1 = \langle Ix, x \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} P^* E_j P x, x \right\rangle = \langle P^* E_j P x, x \rangle + \langle P^* E_k P x, x \rangle.$$

Zaključujemo, ako možemo pronaći P znat ćemo i gdje se na segmentu $z_j z_k$ nalazi $\langle Ax, x \rangle$.

Promotrimo i drugi slučaj, kada $\langle E_j Px, Px \rangle + \langle E_k Px, Px \rangle \neq 1$. Ako još uz to vrijedi i da je $m_1 + m_2 + ... + m_n \neq 0$, dozvoljeno je dijeliti ovom sumom. Pretpostavimo da m_j iz iskaza teorema zadovoljava $m_1 + m_2 + ... + m_n = 1$. Sada se ovaj slučaj svodi na dokaz teorema sa stranice 17. Dakle, jednom kada pronađemo jedinični vektor u definiran kao $u := [\sqrt{m_1} \ \sqrt{m_2} \ \ldots \ \sqrt{m_n}]^t$ i matricu P takvu da su njeni stupci ortonormirani, lako dobijemo A. Tada slijedi da $W(A) \subseteq W(D_n)$, gdje je $W(D_n)$ konveksna ljuska svojstvenih vrijednosti. $\square$

3.3 Steinerova elipsa

Postoje verzije teorema koje dopuštaju da $m_j < 0$, ali se tim slučajem nećemo baviti. No, u slučaju da su $m_1 = m_2 = m_3$ tada je elipsa upisana trokutu i točke dodira se nalaze točno u polovištima stranica trokuta. Ovu elipsu često nazivamo *Steinerova elipsa*. Ime je dobila po matematičaru Jakobu Steineru koji je pokazao da je takva elipsa jedinstvena.



Slika 3.1: Steinerova elipsa

Poglavlje 4

Blaschkeova i Ponceletova 3-elipsa

U ovom poglavlju povezat ćemo dva važna teorema, Blaschkeov teorem o elipsi i Ponceletov teorem. Iako se dokaz prvog teorema temelji na kompleksnoj analizi, a drugog na projektivnoj geometriji pokazat ćemo da zapravo postoji ne baš očita veza među njima. Uz definiranje Blaschkeove i Ponceletove 3-elipse, glavni cilj je objasniti odnos ovih dviju konika.

Radi lakšeg snalaženja, u radu ćemo jedinični krug označavati sa K pa je tada jedinična kružnica koja ga omeđuje δK.

4.1 Blaschkeov produkt

Möbiusova transformacija je funkcija kompleksne varijable koju još nazivamo homografska ili razlomljena linearna transformacija, ovisno o literaturi. Ovdje se uzimaju Möbiusove transformacije oblika $z \mapsto \lambda(z-a)/(1-\overline{a}z)$ gdje su a i λ kompleksni brojevi za koje vrijedi $|a| < 1$ i $|\lambda| = 1$. Dakle, $a_j \in K$ i $\lambda \in \delta K$.

Pomoću Möbiusovih transformacija definira se funkcija koja se naziva *Blaschkeov produkt stupnja n* ili *konačan Blaschkeov produkt*:

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z-a_j}{1-\overline{a}_j z}, \text{ pri čemu su } a_j, \lambda \in \mathbb{C}, \ |a_j| < 1, \ \ |\lambda| = 1.$$

Stupanj n jednostavno predstavlja broj nultočaka od B, koji se broji uzimajući u obzir njihovu višestrukost. Spomenuta funkcija preslikava jediničnu kružnicu i jedinični krug u same sebe. Jednadžba $B(z) = \lambda$ ima n različitih rješenja za svaki $\lambda \in \delta K$.

4.2 Blaschkeov teorem o elipsi

Teorem 4.2.1. *(Blaschkeov teorem o elipsi) Neka je B Blaschkeov produkt s nultočkama $0, a, b$ i neka je λ kompleksan broj za koji vrijedi $|\lambda| = 1$. Tada tri različita rješenja jednadžbe $B(z) = \lambda$, u oznaci z_1, z_2, z_3, imaju svojstvo da je svaki pravac koji prolazi kroz dvije od ovih točaka ujedno i tangenta na elipsu E danu jednadžbom*

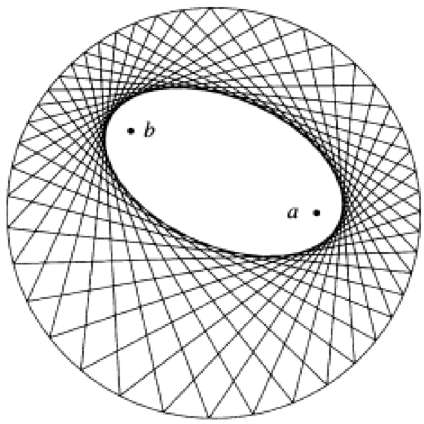
$$|z - a| + |z - b| = |1 - \overline{a}b|.$$

Obrnuto, svaka točka na E je točka dodira odsječka pravca koji spaja dvije različite točke z_1 i z_2 na δK za koje vrijedi $B(z_1) = B(z_2)$.

Ovu elipsu nazivamo *Blaschkeovom elipsom* koja odgovara Blaschkeovom produktu B. Općenito, ako znamo da je neka elipsa upisana u n-strani konveksni poligon s vrhovima u točkama na δK koje su određene Blaschkeovim produktom B nazivat ćemo ju *Blaschkeova n-elipsa*.

Blaschkeova 3-elipsa

Ukoliko se radi o Blaschkeovom produktu stupnja 3, povezujući tri točke kruga koje su ujedno rješenja od $B(z) = \lambda$ za svaki $\lambda \in \delta K$, dobit ćemo trokut s vrhovima na δK. Dakle, dobit ćemo beskonačno mnogo trokuta opisanih istoj elipsi i upisanih kružnici δK. Jedna Blaschkeova 3-elipsa dana je slikom (preuzeto iz [9]).



Slika 4.1: Blaschkeova 3-elipsa

4.3 Ponceletov teorem

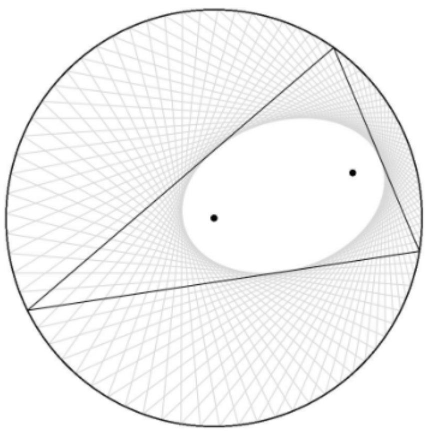
Teorem 4.3.1. *(Ponceletov teorem o zatvaranju) Neka su E_1 i E_2 elipse takve da je E_1 potpuno sadržana u E_2. Ako postoji n-strani poligon koji istovremeno upisan E_2, a opisan E_1, tada je svaka točka elipse E_2 vrh takvog n-stranog poligona.*

U ovom slučaju elipsu E_1, upisanu u n-strani poligon, koja je upisana u drugu elipsu E_2 nazivamo *Ponceletova n-elipsa*.

Služeći se afinom transformacijom možemo postići to da je vanjska elipsa zapravo jedinična kružnica. Drugim riječima, Ponceletova elipsa je ona elipsa koja je upisana poligonu koji je istovremeno upisan jediničnoj kružnici. Pokažemo li da postoji poligon za koji vrijedi spomenuto, tada slijedi da takvih poligona ima beskonačno mnogo.

Ponceletova 3-elipsa

Za slučaj $n = 3$ Ponceletova 3-elipsa upisana je trokutu koji je upisan jediničnoj kružnici. Jedna takva elipsa dana je slikom (preuzeto iz [6]).



Slika 4.2: Ponceletova 3-elipsa

4.4 Odnos dviju elipsi

Intuitivno nam je jasno da je Blaschkeova 3-elipsa ujedno i Ponceletova 3-elipsa, no zanima nas vrijedi li i obrat. To jest, zanima nas hoće li Ponceletova 3-elipsa biti i Blaschkeova 3-elipsa. U tekstu koji slijedi pokazat ćemo da hoće. Dokaz Ponceletovog teorema provest ćemo u dva koraka.

Dokaz.

1. Svaka Ponceletova 3-elipsa ujedno je i Blaschkeova 3-elipsa.

   Treba dokazati da za svaku Ponceletovu 3-elipsu E postoji Blaschkeov produkt za koji je Blaschkeova elipsa upravo E, odnosno da je E slika neke Blaschkeove elipse pod afinom transformacijom. Općenito, trokut kojem je upisana elipsa E nije upisan u jediničnu kružnicu, ali afinom transformacijom to možemo postići, kao što je i prethodno navedeno.

   Neka su a i b fokusi elipse E, upisane trokutu koji je upisan jediničnoj kružnici. Uzmimo Blaschkeov produkt zadan točkama 0, a i b. Tom produktu pridružena je Blaschkeova elipsa E'. Na taj način imamo konfokalne elipse E i E', upisane trokutima koji su upisani kružnici dK.

   Ako se elipse E i E' ne podudaraju, jedna od njih mora imati dulju veliku os pa pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da je to Ponceletova elipsa E. Tada se E' nalazi unutar trokuta opisanog elipsi E, ali jedna od stranica trokuta koji bi trebao biti opisan elipsi E' prolazi izvan tog trokuta pa ne može dirati elipsu E'. Stoga elipse E i E' ne samo što imaju zajedničke fokuse, nego imaju i zajedničku veliku os pa se podudaraju.

2. Pretpostavimo da je Ponceletova 3-elipsa E_1 upisana trokutu koji je upisan drugoj elipsi, E_2. Primjenom afine transformacije elipsu možemo preslikati u jediničnu kružnicu δK, pri čemu će se E_1 i njoj opisani trokut ponovno preslikati u neku elipsu i opisani trokut. Možemo stoga pretpostaviti da je elipsa E_1 upisana trokutu, koji je upisan jediničnoj kružnici δK.

   Neka su a i b fokusi elipse E_1. Uzmimo Blaschkeov produkt $B(z)$ kojem su nultočke 0, a i b. Izaberemo li bilo koju točku λ jedinične kružnice, tri različita rješenja jednadžbe $B(z) = \lambda$, označimo ih sa $z_1(\lambda)$, $z_2(\lambda)$ i $z_3(\lambda)$, odgovaraju vrhovima trokuta upisanog jediničnoj kružnici. Prema Blaschkeovom teoremu o elipsi, stranice tog trokuta leže na tangentama elipse s jednadžbom $|z - a| + |z - b| = |1 - \overline{a}b|$.

   Prema 1. ta elipsa upravo je Ponceletova elipsa E_1. Kako je točka λ jedinične kružnice dK izabrana po volji, Ponceletov teorem za 3-elipse time je dokazan.

$\square$

Ovim dokazom smo potvrdili da se Blaschkeova 3-elipsa i Ponceletova 3-elipsa podudaraju, to jest da se radi o istim elipsama.

Odnos dviju elipsi i Siebeckovog teorema

Budući da tri nekolinearne točke leže na kružnici Ponceletov teorem nam može otkriti što se događa u Siebeckovom teoremu. Dakle, odaberemo li bilo koje tri točke z_1, z_2, z_3 na kružnici, tada $\triangle z_1 z_2 z_3$ ima sve vrhove na kružnici i opisuje elipsu iz Siebeckovog teorema. Pozivajući se na Ponceletov teorem lako zaključujemo da svaka točka koja se nalazi na vanjskoj kružnici, specijalno jediničnoj kružnici, jest vrh takvog opisanog trokuta. No sada kako bismo rekli nešto više o vrhovima tako opisanih trokuta ili upisanoj elipsi možemo se pozvati na Blaschkeov teorem.

Dakle, Blaschkeov teorem o elipsi nam može reći nešto više o Siebeckovom teoremu. U slučaju kada je dan Siebeckov teorem za stupanj 3, imamo upisane trokute bez obzira od koje točke jedinične kružnice krenuli. Tako možemo pronaći vrhove svih trokuta služeći se Blaschkeovim produktom stupnja 3.

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, 2008.

[2] B.Bogosel, *A geometric proof of the Siebeck-Marden theorem*, Amer. Math. Monthly 124(5) (2017), 459-463.

[3] P. Gorkin, *Four Theorems with Their Foci on Ellipses*, Amer. Math. Monthly 126(2) (2019), 99-111.

[4] D. Kalman, *An elementary proof of Marden's theorem*, Amer. Math. Monthly 115(4) (2008), 330-338.

[5] C. K. Li, *A simple proof of the elliptical range theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 124(7) (1996), 1985-1986.

[6] T. Poe B. Simanek M. Hunziker, A. Martnez-Finkelshtein, *On foci of ellipses inscribed in cyclic polygons*, Math CA. (2021).

[7] P. Matić, *Numerička slika operatora i matrica, Diplomski rad*, `https://zir.nsk.hr/islandora/object/pmf:9391/datastream/PDF/view`, 2020, Accessed: 2022-06-22.

[8] M. Sošić, *Projektivna geometrija, predavanja - Konike*, `https://www.math.uniri.hr/~msosic/Projektivna%20geometrija/Predavanja/str_71-77.pdf`, Accessed: 2022-06-22.

[9] R. Mortini U. Daepp, P. Gorkin, *Ellipses and Finite Blaschke Products*, Amer. Math. Monthly 109(9) (2002), 785-795.

Sažetak

U ovom diplomskom radu obrađena je tema geometrijskih primjena numeričke slike operatora, koja se specijalno bavi kompleksnim matricama reda 2. U prvom poglavlju je definirana numerička slika te su dana neka od njenih svojstava koja su ključna u geometrijskim dokazima. Zatim, u sljedećem poglavlju je detaljno opisano svojstvo konveksnosti numeričke slike matrice potkrijepljeno Teoremom o eliptičkoj slici matrice. U radu je prikazano i kako Teorem o eliptičkoj slici matrice omogućuje zajednički pristup dokazima teorema koji slijede, od kojih svaki na svoj način uključuje pojam elipse. U trećem poglavlju je dano nekoliko verzija Siebeckovog teorema gdje se opisuje veza između kompleksnog polinoma stupnja 3 i njegove derivacije. Nadalje, četvrto poglavlje prikazuje vezu Blaschkeova produkta iz kompleksne analize i Ponceletova teorema iz područja projektivne geometrije. Ovdje je fokus na Blaschkeovoj 3-elipsi i Ponceletovoj 3-elipsi koje su u svojoj suštini jednake. U konačnici je opisana međusobna povezanost ovih naizgled nepovezanih teorema.

Summary

The main topic of this master thesis are geometric applications of the numerical range of the operator, which specifically deals with the 2×2 complex matrices. The first chapter defines a numerical range and gives some of its properties that are crucial in geometric proofs. Then, in the next chapter, the convexity property of the numerical range of the matrix is described in detail, supported by the Elliptical Range Theorem. It is also shown that the Elliptical Range Theorem enables a common approach to the proofs of the following theorems and each of them in its own way includes the notion of an ellipse. In the third chapter several versions of Siebeck's Theorem are shown, that describe the connection between a complex polynomial of degree 3 and its derivative. Furthermore, the fourth chapter presents the connection between Blaschke's product from complex analysis and Poncelet's Theorem from the field of projective geometry. Also, here is the focus on the Blaschke's 3-ellipse and the Poncelet's 3-ellipse which are essentially equal. Finally, connection between these theorems that seem unrelated at first glance will be given.

Životopis

Rođena sam 29. rujna 1995. godine u Dubrovniku. Odrasla sam u Mokošici gdje sam završila Osnovnu školu Nova Mokošica. Paralelno sam završila i Umjetničku školu Luke Sorkočevića u Dubrovniku, smjer violoncello. Potom 2010. godine upisujem Gimnaziju Dubrovnik, opći smjer. Po završetku, 2014. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu. Isti završavam 2019. godine kada upisujem diplomski studij Matematika, smjer nastavnički na istom odsjeku.