Nizovi u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj matematici

Šuflaj, Ines

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ines Šuflaj

NIZOVI U OSNOVNOŠKOLSKOJ I SREDNJOŠKOLSKOJ MATEMATICI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentorici prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš na ugodnoj suradnji, savjetima i pomoći pri pisanju ovog rada.

Veliko hvala mojim roditeljima koji su mi pokazali kako se ljubavlju i međusobnom podrškom svaki loš dan i neuspjeh može pretvoriti u poticaj za rad i trud koji na koncu rezultiraju uspjehom.

Hvala najvećem borcu, mojoj baki, koja je čak i u vrijeme najteže borbe uvijek pronalazila vremena i načina da me ohrabri, usmjeri i potakne da dam sve od sebe.

Hvala mojoj stijeni, Filipu, koji mi je na ovom putu pružao ogromnu podršku, mnogo strpljenja i utjehe i pomogao mi da ostvarim svoje snove.

Hvala vam što ste vjerovali u mene.
Ovaj rad posvećujem vama.

Sadržaj

Uvod

S pojmom niza učenici se susreću od najranijih dana svog obrazovanja. Najprije se nizovi vežu uz fizičke objekte i stvarne pojave, a zatim se taj pojam nadograđuje i razvija u pojam funkcije sa specifičnim svojstvima čije je proučavanje nužno za kasnije shvaćanje koncepta derivacije.

Ovaj rad podijeljen je na četiri dijela. U prvom dijelu promatra se Predmetni kurikulum za nastavni predmet matematike s posebnim naglaskom na odgojno- obrazovne ishode vezane za koncept niza te preporuke za ostvarivanje tih ishoda. Proučava se razvoj pojma niza i njegova zastupljenost kroz godine obrazovanja.
Drugi dio posvećen je tipičnim zadacima koji uključuju nizove, a s kojima se učenici susreću pri učenju raznih matematičkih koncepata poput brojeva i linearne funkcije. Također, u poglavlju su sadržani i zadaci iz četvrtog razreda srednje škole u kojem se obrađuju definicija i svojstva nizova te aritmetički i geometrijski niz i njihova primjena u stvarnim situacijama na primjeru kamatnog računa.
Zatim se opisuje pojam progresivne formalizacije Hansa Freudenthala i njenog značaja na primjeru poučavanja nizova u školi i formiranju pojma od slikovnih prikaza pa sve do definicije.
U zadnjem dijelu rada, hrvatki način poučavanja nizova uspoređuje se s dva različita primjera iz svijeta- Irske i Australije. U poglavlju se opisuju obrazovni sustavi ovih dviju zemalja te se navode obrazovni ishodi vezani za nizove kroz cijelo primarno i sekundarno obrazovanje.

Poglavlje 1

Nizovi u kurikulumu

U ovom poglavlju istražit ćemo zastupljenost pojma niza u Predmetnom kurikulumu za nastavni predmet matematike u osnovnoj i srednjoj školi te odgojno- obrazovne ishode koje učenici trebaju usvojiti.

1.1 Osnovna škola

Razredna nastava

U razrednoj nastavi (1.- 4. razred) naglasak je na usvajanju koncepta broja, uočavanju pravilnosti u nizu brojeva ili oblika, stvaranju predodžbe o objektima i prostoru te provođenju osnovnih mjerenja.
Učenici pomoću nizova usvajaju koncept rednog broja postavljajući pitanje: *Koji je to broj u nizu, redu, i sl.?*
Sam pojam niza kao matematičkog objekta se u osnovnoj školi ne definira niti postoji jedinstvena nastavna cjelina u kojoj se nizovi obrađuju već je naglasak na zadacima u kojima se uočavaju pravilnosti u redoslijedu oblika, brojeva i pojava iz svakodnevnog života. Također, od učenika se očekuje da objasne pravilnost nizanja brojeva, objekata ili pojava te da kreiraju vlastite nizove.
U tablici 1.1 navedeni su ishodi učenja vezani za nizove i pravilnosti.

Primijetimo kako u trećem i četvrtom razredu osnovne škole nema ishoda učenja vezanih za nizove i uočavanje pravilnosti, ali kako će biti vidljivo u drugom poglavlju, postoje zadaci u udžbenicima u kojima treba nastaviti niz brojeva, geometrijskih likova, itd.

Prvi razred	
MAT OŠ A.1.1.	Određuje broj neposredno ispred i neposredno iza zadanoga broja.
MAT OŠ A.1.3.	Uočava redoslijed i određuje ga rednim brojem.
MAT OŠ B.1.2.	Uočava uzorak nizanja. Objašnjava pravilnost nizanja. Objašnjava kriterije nizanja. Niže po zadanome kriteriju.
MAT OŠ D.1.1.	Uspoređuje, razvrstava i niže objekte prema mjerivu svojstvu.
Drugi razred	
MAT OŠ A.2.1.	Služi se prirodnim brojevima do 100 u opisivanju i prikazivanju količine i redoslijeda.
MAT OŠ B.2.1.	Uočava pravilnosti nizanja brojeva, objekata, aktivnosti i pojava. Određuje višekratnike kao brojevni niz. Kreira nizove. Objašnjava kriterije nizanja.
Treći razred	
Četvrti razred	

Tablica 1.1: Prikaz ishoda učenja od prvog do četvtog razreda osnovne škole

Predmetna nastava

Predmetna nastava u osnovnoj školi obuhvaća razdoblje obrazovanja od petog do osmog razreda. Dolaskom u peti razred od učenika se očekuje da su osnovni principi računanja, mjerenja i prepoznavanja oblika već usvojeni te se matematički koncepti proširuju i produbljuju, a učenici se upoznaju sa skupovima brojeva, poučcima u geometriji i osnovama vjerojatnosti i statistike. U predmetnom kurikulumu se ne spominju ishodi učenja vezani za nizove u razdolju od petog do osmog razreda, ali se u sedmom razredu obrađuje linearna ovisnost koja se može povezati s nizovima.

1.2 Srednja škola

U predmetnom kurikulumu srednja škola je podijeljena po broju sati matematike godišnje, a ne po školskim programima. Opće gimnazije nastavni sadržaj obrađuju po kurikulumu za 140 sati godišnje, a većina prirodoslovno- matematičkih gimnazija po kurikulumu za 175 sati godišnje. Imajmo na umu da učenicima završnih razreda nastava završava ranije, stoga u četvrtom razredu učenici umjesto 140 sati, ukupno imaju 128 sati matematike, odnosno, umjesto 175, imaju 160 sati matematike.

Nizovi se u srednjoj školi obrađuju tek u četvrtom razredu kao zasebna cjelina. Tada se oni definiraju, promatraju se aritmetički i geometrijski niz te se bavi pitanjima monotonosti i konvergencije nizova.

U tablici 1.2 navedeni su ishodi učenja vezani za nizove u četvrtom razred srednje škole jer se u predmetnom kurikulumu od trećeg razreda osnovne škole pa sve do četvrtog razreda srednje škole ne spominju nizovi.

Primijetimo kako se u programima s 96 i 128 sati matematike godišnje redovno ne obrađuju geometrijski red i neprekidno ukamaćivanje, ali je neprekidno ukamaćivanje u kurikulumu navedeno kao prošireni sadržaj.

Najveća razlika u programima matematike srednjih škola je kompleksnost zadataka i nastavnog sadržaja. Na primjer, prirodoslovno- matematičke gimnazije dublje zalaze u matematičku analizu nego opće gimnazije. U prirodoslovno- matematičkim gimnazijama se promatranje konvergentnosti i monotonosti ne temelji samo na uočavanju rasta i pada te omeđenosti nego i na dokazivanju monotonosti, omeđenosti i konvergencije te se dokazuju limesi nizova koji se u općim gimnazijama prihvate kao poznate činjenice.

Četvrti razred 96, 128 sati godišnje	
MAT SŠ B.4.2.	Opisuje aritmetički i geometrijski niz, zapisuje opći član niza, povezuje s aritmetičkom i geometrijskom sredinom. Računa zbroj prvih n članova niza. Rješava probleme iz svakodnevnoga života primjenom aritmetičkoga i geometrijskoga niza, osobito složeni kamatni račun.
MAT SŠ B.4.3.	Opisuje pojam limesa niza. Uočava rast ili pad članova niza i postojanje granice, tj. konvergentnost ili divergentnost. Prošireni sadržaj: Primjenjuje neprekidno ukamaćivanje.
Četvrti razred 160 sati godišnje	
MAT SŠ B.4.2.	Opisuje aritmetički i geometrijski niz i geometrijski red. Zapisuje opći član niza, povezuje s aritmetičkom i geometrijskom sredinom. Računa zbroj prvih n članova niza, računa zbroj geometrijskoga reda. Rješava probleme iz svakodnevnoga života primjenom aritmetičkoga i geometrijskoga niza i geometrijskoga reda, osobito složeni kamatni račun.
MAT SŠ B.4.3.	Opisuje pojam limesa niza, uočava rast ili pad članova niza i postojanje granice, tj. konvergentnost ili divergentnost. Računa limes niza i primjenjuje na problemskim zadatcima, primjerice pri neprekidnome ukamaćivanju.

Tablica 1.2: Prikaz ishoda učenja u četvrtom razredu srednje škole s 96, 128 i 160 sati matematike godišnje

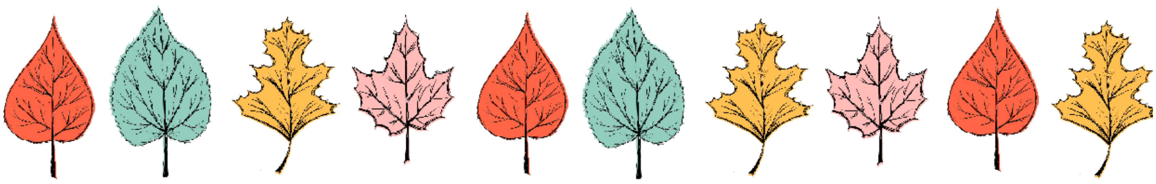
Poglavlje 2

Nizovi u zadacima

2.1 Osnovna škola

U osnovnoj školi nizovi se ne definiraju, već se povezuju s pojmom redoslijeda, a u zadacima se koriste poznati objekti, u početku iz svakodnevnog života, a kasnije i iz matematike.
Prvi zadaci s kojima se učenici susreću iz matematike dolaskom u osnovnu školu su zadaci u kojima treba uočiti pogrešku, nastaviti niz ili uočiti pravilo. Na početku učenici uočavaju pravilnosti izmjene dana i noći, redoslijed dana u tjednu, izmjene godišnjih doba i slično, a zatim se zadaju jednostavni zadaci sa slikovnim prikazom predmeta iz svakodnevnog života u kojima se od učenika očekuje da uoče pravilnost, pogrešku ili nastave niz te se na taj način razvija njihovo logičko mišljenje.

Primjer 2.1.1. *Pronađimo pogrešku.*

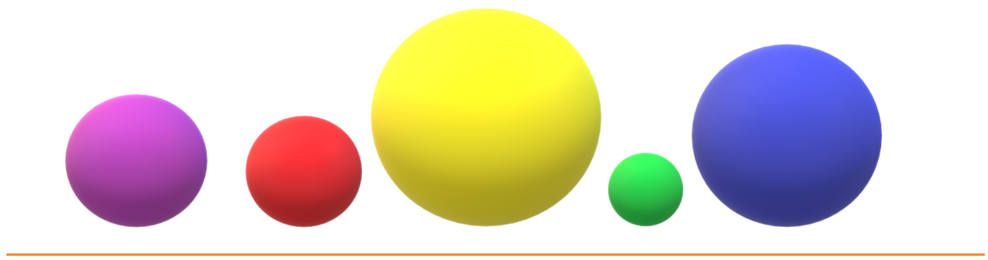


Slika 2.1: Primjer zadatka u kojem učenici u nizu elemenata trebaju pronaći element koji ne pripada nizu

U ovom primjeru učenici trebaju prepoznati da bi zadnji član niza trebao biti zeleni list, a ne žuti. Na taj način učenici vježbaju uočavanje uzoraka i pravilnosti te objašnjavaju zašto je neki član niza baš na tom mjestu i zašto smatraju da je negdje u nizu greška i kako bi ju ispravili.

Kada se počnu obrađivati redni brojevi često se ponavljaju zadaci u kojima se postavlja pitanje: *Koji je po redu ili u nizu?* te *Koji po veličini?*. Vrlo su česti zadaci u udžbenicima u kojima se učenicima zadaje nekoliko objekata koje trebaju poredati po veličini ili po nekom drugom mjerljivom svojstvu. Na početku su ti objekti predmeti iz svakodnevnog života, kao u primjeru 2.1.2., a kasnije postaju geometrijski likovi i tijela, pa i brojevi.

Primjer 2.1.2. *Lopte poredajmo po veličini*



Slika 2.2: Primjer zadatka u kojem učenici objekte slažu po veličini

U ovom primjeru učenici prvo trebaju uočiti da objekte po veličini možemo poredati od najmanjeg prema najvećem ili od najvećeg prema najmanjem te da su to dva različita poretka. Nakon toga, lopte poredaju u poretku zelena, crvena, ljubičasta, plava, žuta ili žuta, plava, ljubičasta, crvena, zelena.

U prvom razredu, učenici se upoznaju i s brojevima do 20 te s parnim i neparnim brojevima. Za usvajanje pojma paran, odnosno neparan broj, bitno je zadati zadatke u kojima je potrebno sastaviti niz samo parnih, odnosno samo neparnih brojeva kako učenike nebi zbunili.

Primjer 2.1.3. *Nastavimo niz parnih brojeva.*

Slika 2.3: Primjer zadatka u kojem učenici nastavljaju niz parnih brojeva do 20

Zadaci s nizovima javljaju se i u području geometrije. Učenici dobiju nekoliko geometrijskih likova poredanih u niz među kojima treba otkriti i objasniti pravilnost nizanja te nadopuniti niz, odnosno nacrtati nekoliko članova na temelju prethodnih zapažanja.

Primjer 2.1.4. *Objasnimo pravilnost nizanja te nadopunimo niz.*

Slika 2.4: Primjer zadatka u kojem učenici nastavljaju niz geometrijskih likova

Na slici 2.4 nalazi se niz sastavljen od pravokutnika, kruga i trokuta. Učenici trebaju zaključiti kako u jednom ciklusu ponavljanja imamo jedan pravokutnik, zatim dva kruga i nakon toga tri trokuta. Kako bi nastavili niz, nakon tri trokuta iznad crte treba nacrtati pravokutnik, a zatim dva kruga.

Primjer 2.1.5. *Nadopunimo niz brojevima koji nedostaju.*

Slika 2.5: Primjer zadatka u kojem učenici nadopunjavaju niz višekratnicima broja 7

U drugom razredu osnovne škole slikovni prikazi objekata iz svakodnevnog života zamjenjuju se brojevima do 100. Učenicima se zadaje niz dvoznamenkastih brojeva s nekoliko članova niza koji nedostaju. Od učenika se očekuje da otkriju pravilnost i dopune niz, ali i

da pravilnost opisuju matematičkim jezikom.
Iako se u kurikulumu za treći razred osnovne škole ne spominju ishodi vezani uz nizove i uočavanje pravilnosti, u udžbenicima se pojavljuju zadaci slični primjerima 2.1.3. i 2.1.5., ali s troznamenkastim brojevima.
Od trećeg razreda pa do kraja osnovne škole u kurikulumu nema spomena o nizovima, ali se u sedmom razredu obrađuje linearna ovisnost te se nizovi mogu pojavljivati u smislu uzastopnog dodavanja nekog broja nekoj varijabli.
Zadaci su zadani tablicom i/ili popratnim tekstom na temelju kojeg treba zapisati algebarski izraz koji odgovara situaciji opisanoj u zadatku.

Primjer 2.1.6. *Cijena kilograma mandarina košta 9 kuna. Opišimo formulom ovisnost troška y koji treba platiti za x kilograma mandarina.*
Koliki je trošak ako uz mandarine treba kupiti i papirnatu vrećicu koja stoji 1 kn?

Zapišimo iznose troška y ovisno o broju kilograma kupljenih mandarina x

x... masa u kg	1	2	3	4	5	...
y... trošak u kn	9	18	27	36	45	...

Tablica 2.1: Tablični prikaz linearne ovisnosti troška y o x kilograma mandarina

Uočimo kako trošak možemo zapisati i u obliku niza gdje nam je prvi član niza 9, drugi član 18, treći 27, četvrti 36, itd.

$$9, 18, 27, 36, 45, ...$$

Promatrajući ovaj niz zaključujemo da je svaki član za 9 veći nego prethodni pa niz možemo opisati formulom

$$y = 9x.$$

Ako bismo uz svaku kupnju mandarina trebali kupiti i papirnatu vrećicu svaki član niza povećao bi se za 1. Tada imamo niz

$$10, 19, 28, 37, 46, ...$$

Sada je ukupan trošak opisan formulom

$$y = 9x + 1.$$

2.2 Srednja škola

Do četvrtog razreda srednje škole nizovi se ne definiraju, ali se mogu pojaviti u zadacima pri obradi linearne funkcije u prvom razredu srednje škole i to u obliku linearne funkcije kojoj je domena skup prirodnih brojeva. Dakle, za funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ možemo nanizati vrijednosti funkcije

$$f(1), f(2), f(3), f(4), ...$$

U idućem primjeru učenici trebaju odrediti linearnu funkciju s podacima iz teksta. Obzirom da funkcija kao argument ima prirodan broj, odnosno u ovom primjeru broj dostavljenih pizza, njene vrijednosti možemo nanizati. Učenici u ovom trenutku još nisu svjesni da se niz može zapisati kao funkcija jer su dosad nizove zapisivali pomoću tablice ili samo nanizali elemente te nisu koristili druge zapise. Tek će u četvrtom razredu srednje škole nizove početi promatrati kao funkcije.

Primjer 2.2.1. *Maturant Ivo tijekom ljeta zarađuje dostavljajući pizze. Uz fiksni iznos plaće f, vlasnik ugostiteljskog obrta ga stimulira i bonusom b po dostavljenoj pizzi. U prvom tjednu je Ivo dostavio 100 pizza i zaradio 2200 kn, a u drugom tjednu dostavio je 85 pizza i zaradio 2050 kn. Napišimo funkciju koja prikazuje zaradu $z(n)$ u ovisnosti o broju dostavljenih pizza n.*

Tražena funkcija je obzirom na zadane podatke oblika

$$z(n) = b \cdot n + f.$$

Trebamo otkriti vrijednost bonusa b i fiksne plaće f.
U prvom tjednu Ivo je dostavio 100 pizza i zaradio 2200 kn. Te podatke uvrstimo u funkciju $z(n)$ i dobivamo

$$2200 = 100b + f$$

U drugom tjednu je zaradio 2050 i dostavio 85 pizza. Dakle, imamo

$$2050 = 85b + f$$

Riješimo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{cases} 2200 = 100b + f \\ 2050 = 85b + f. \end{cases}$$

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobivamo

$$150 = 15b \iff b = 10 \text{ kn}.$$

Nakon uvrštavanja u drugu jednadžbu slijedi

$$85 \cdot 10 + f = 2050 \iff f = 1200 \text{ kn}.$$

Tražena funkcija glasi

$$z(n) = 10n + 1200.$$

Dakle, za dostavu jedne pizze Ivo zaradi 1210 kn, za dostavu dvije pizze 1220 kn, za tri 1230, itd.

Kao što je već spomenuto, u četvrtom razredu srednje škole nizovi se javljaju kao zasebna cjelina u kojoj se oni cjelovito promatraju.
Tada priča o nizovima započinje motivacijskim primjerima s kojima su se učenici već susreli kroz svoje školovanje, ali i primjerima iz testova inteligencije koje je zasigurno velika većina učenika u svom životu rješavala, a u kojima se traži da se uoči određena pravilnost ili nastavi niz objekata ili brojeva.

Dosad su se nizovi zadavali opisno, opisivanjem pravilnosti riječima ili rekurzivno, zadavanjem prvih nekoliko članova niza i pravilom po kojem se nižu elementi jer je matematički izazovno doći do formule za opći član.
Pri proučavanju nizova u četvrtom razredu srednje škole pojavljuju se primjeri u kojima se od učenika očekuje da rekurzivno zadanom nizu odrede formulu za opći član niza te pretvaraju iz jednog oblika u drugi.
Također, po prvi puta u njihovom obrazovanju, učenici se susreću s definicijom niza kao funkcije.

Definicija 2.2.2. ***Niz*** *u skupu S je svaka funkcija $a : \mathbb{N} \to S$. Ona prirodnom broju n pridružuje element a_n iz skupa S. Element a_n nazivamo* ***općim*** *ili* ***n-tim*** *članom niza, a sam niz označavamo simbolom a_n.*

Pogledajmo nekoliko primjera iz udžbenika.

Primjer 2.2.3. *Odredimo prvih nekoliko članova niza ako je $a_n = \frac{n+1}{n+2}$.*

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

Ovim primjerom želi se pokazati kako izgledaju nizovi zadani formulom općeg člana i na koji način iz formule dobivamo niz s kakvim su se učenici dosad susretali u školi.
U literaturi se mogu pronaći mnogi primjeri pretvaranja iz rekurzivne fomule u formulu za opći član niza i obrnuto.

Primjer 2.2.4. *Zapišimo niz pomoću formule općeg člana, ako je zadan rekurzivnom formulom*

$$a_1 = 1,\ a_n = n \cdot a_{n-1},\ n \geq 2.$$

Iz rekurzivne formule niza možemo iščitati prvih nekoliko članova niza

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2 \cdot 1 = 2,\ a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

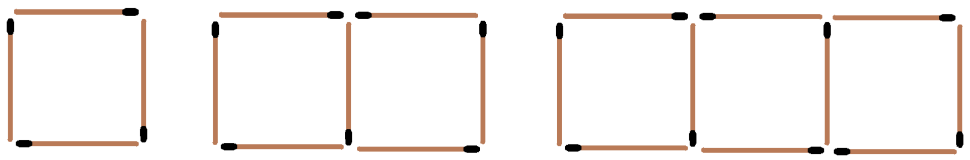
Sada zapišimo taj niz pomoću općeg člana

$$a_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Kada učenici dobiju formulu za opći član niza, treba ju dokazati principom matematičke indukcije koju su, ovisno o programu koji pohađaju, učili u trećem ili na početku četvrtog razreda srednje škole prije ove nastavne cjeline.
Nakon toga učenici se upoznaju s aritmetičkim i geometrijskim nizom, nastavnim jedinicama koje su bogate raznovrsnim zadacima u kojima se traži određeni član niza, zbroj svih članova niza ili određivanje općeg člana niza pomoću zadanih uvjeta. Također, u udžbenicima se mogu pronaći i tekstualni zadaci koji služe kao poveznica sa svakodnevnim životom i pokazuju primjenu nizova u stvarnosti.

Pogledajmo uvodni primjer u nastavnu jedinicu *Aritmetički niz* preuzet s Edutorija koji učenicima ostavlja pitanje za razmišljanje kao motivaciju za rad na ovoj temi.

Primjer 2.2.5. *Luka slaže šibice u nizove kvadrata kao na slici 2.6 Prvo složi jedan kvadrat, onda dva kvadrata u nizu, tri kvadrata u nizu i tako dalje. Koliko će mu komada šibica trebati da složi* 10 *kvadrata u jednome nizu? Može li neki niz kvadrata složiti od točno* 200 *komada šibica?*



Slika 2.6: Prikaz niza iz primjera 2.2.5.

Primijetimo kako je prvi kvadrat složen od četiri šibice, zatim su dva kvadrata složena od sedam šibica, tri kvadrata od deset šibica i da za svaki idući treba dodati točno po tri šibice. Zapišemo li dobivene brojeve u niz imamo

$$4, 7, 10, 13, 15, 18, ...$$

Sada lako možemo zaključiti koji bi bio odgovor na prvo pitanje: *Koliko će mu komada šibica trebati da složi* 10 *kvadrata u jednome nizu?* Do odgovora učenici mogu doći skiciranjem i brojanjem šibica u svakom idućem članu niza ili mogu zaključiti da ako svaki idući kvadrat možemo dobiti tako da dodajemo tri šibice na prethodni tada će nam za deset kvadrata u nizu trebati $4 + 3 \cdot 9 = 31$ šibica.
Sada im na kraju primjera ostaje pitanje za razmišljanje: *Može li neki niz kvadrata složiti od točno* 200 *komada šibica?*
Neki učenici će odgovor na to pitanje znati tek nakon što se na satu dođe do formule za opći član aritmetičkog niza, a neki će odmah znati da obzirom da $200 - 4 = 196$ nije djeljiv s 3, ne možemo složiti niz kvadrata od točno 200 šibica.

Definicija 2.2.6. *Niz je **aritmetički** ako je razlika bilo kojeg člana i člana ispred njega stalna i iznosi d:*

$$a_n - a_{n-1} = d\ ,\ n \geq 2.$$

*Broj d naziva se **razlika** ili **diferencija aritmetičkog niza.***

Primjer 2.2.7. *Zbroj triju uzastopnih članova aritmetičkog niza iznosi* 33. *Njihov je umnožak jednak* 1287. *Odredimo te brojeve.*

Označimo uzastopne članove niza s a_{n-1}, a_n, a_{n+1}.
Prema definiciji aritmetičkog niza slijedi da se a_{n-1} i a_n razlikuju za d te da se a_n i a_{n+1} razlikuju za d pa možemo pisati

$$a_{n-1} = a_n - d \tag{2.1}$$

$$a_{n+1} = a_n + d \tag{2.2}$$

Ovdje smo pretpostavili da je $a_{n+1} > a_n > a_{n-1}$.
Poznato nam je da je njihov zbroj jednak

$$(a_n - d) + a_n + (a_n + d) = 33$$

$$(a_n - d) \cdot a_n \cdot (a_n + d) = 1287.$$

Riješimo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} (a_n - d) + a_n + (a_n + d) = 33 \\ (a_n - d) \cdot a_n \cdot (a_n + d) = 1287. \end{cases}$$

Na kraju dobivamo $a_n = 11, d = 2$ i njihovim uvrštavanjem u jednadžbe 2.1 i 2.2 dobivamo $a_{n-1} = 9$ i $a_{n+1} = 13$. Ne zaboravimo kako smo u ovom zadatku pretpostavili da je niz rastući pa su traženi članovi takvog niza $9, 11, 13$, ali ovaj niz može biti i padajući pa dobivena rješenja zapisujemo kao $13, 11, 9$.

Nakon što se obradi aritmetički niz i njegova svojstva, učenici se upoznaju s geometrijskim nizom. Zadaci s kojima se susrećemo u ovoj nastavnoj jedinici slični su onima prisutnima u jedinici *Aritmetički niz* u kojima se traži zbroj prvih n članova niza ili opći član niza ako su opisani odnosi između pojedinih članova niza. Nakon kurikularne reforme u udžbenicima se povećala količina tekstualnih zadataka koji opisuju situacije iz stvarnog života poput primjera 2.2.9. u kojima se i dalje računa suma prvih n elemenata niza, ali u kontekstu stvarne životne situacije.

Definicija 2.2.8. *Niz je **geometrijski** ako je omjer svakog člana i člana ispred njega*

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

*Broj q naziva se **kvocijent** ili **količnik geometrijskog niza.***

Primjer 2.2.9. *Ivan igra računalnu igricu koja ima* 8 *razina. Na prvoj razini osvaja se* 128 *bodova, a na svakoj sljedećoj* 50% *više nego na prethodnoj.*
a) Koliko se bodova može osvojiti na 5. razini?
b) Koliko se ukupno bodova može osvojiti ako se prođe svih 8 *razina?*
c) Na kojoj je razini Ivan osvojio 1458 *bodova?*

Označimo s n broj razine igrice, a s $a_1, a_2, ..., a_8$ broj bodova na pojedinoj razini igrice. Sada imamo $a_1 = 128$, a obzirom da se na drugoj razini dobije 50% bodova više, tada je $a_2 = 128 \cdot 1.5$. Na svakoj sljedećoj razini dobivamo 50% bodova više nego na prethodnoj pa je opći član jednak

$$a_n = 128 \cdot 1.5^{n-1}.$$

a) Traži se broj bodova koji je moguće osvojiti na 5. razini pa računamo

$$a_5 = 128 \cdot 1.5^4 = 648.$$

b) Ukupan broj bodova koji se može osvojiti završetkom svih razina jednak je sumi svih članova niza

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \tag{2.3}$$

Uvrštavanjem u formulu 2.3 za sumu geometrijskog niza dobivamo

$$S_8 = 128 \cdot \frac{1 - 1.5^8}{1 - 1.5} = 6035.$$

c) Zadana nam je vrijednost $a_n = 1458$, a trebamo izračunati koji je to član niza. Uvrštavanjem zadanog u 2.6 dobivamo

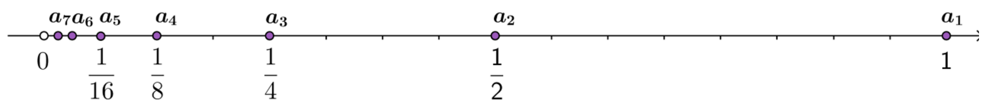
$$\begin{aligned} 1458 &= 128 \cdot 1.5^{n-1} \\ \Rightarrow \frac{729}{64} &= 1.5^{n-1} \\ \Rightarrow n &= 1 + \log_{1.5} \frac{729}{64} \\ \Rightarrow n &= 7. \end{aligned}$$

Dakle, Ivan je na sedmoj razini osvojio 1458 bodova.

Koncept niza nastavlja se nadograđivati ispitivanjem monotonosti i omeđenosti te konačno, promatranjem konvergencije nizova. Tada se učenici prvi puta susreću s pojmom limesa niza.

Nastavna jedinica *Limes niza* u udžbenicima najčešće započinje primjerom niza koji teži nekom broju, na primjer niz

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$



Slika 2.7: Prvih sedam članova niza $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

Na ovom primjeru lako se objasni što znači težiti nekom broju, a nakon toga slijedi definicija limesa i teoremi o limesima.

Definicija 2.2.10. *Kažemo da je realni broj a* ***limes niza*** (x_n) *ako za svaki (ma kako malen) broj* $\varepsilon > 0$ *postoji prirodni broj* n_0 *takav da za sve* $n > n_0$ *vrijedi*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Niz je ***konvergentan*** *ako ima limes. Inače je* ***divergentan***.

Teorem 2.2.11. *Neka su (x_n) i (y_n) konvergentni nizovi. Tada vrijedi:*

1.
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2.
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

3. Ako je $y_n \neq 0$ za svaki n i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, onda je
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

4. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, onda je
$$\lim_{n\to\infty}(x_n)^{y_n} = (\lim_{n\to\infty} x_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

5. Ako je $x_n \leq y_n$ za svaki n, onda je
$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Primjer 2.2.12. *Izračunajmo*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+2}.$$

Na prvi pogled možemo pomisliti kako u ovom primjeru samo treba primijeniti teorem o dijeljenju limesa, ali primijetimo kako niz u brojniku, a i niz u nazivniku teže u beskonačnost pa kažemo da imamo neodređen oblik $\frac{\infty}{\infty}$.
Podijelimo brojnik i nazivnik s n, a zatim primijenimo teorem o dijeljenju limesa i poznat limes $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Dobivamo
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(5-\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n})} = \frac{5}{3}.$$

Kad učenici usavrše računanje limesa nizova i primjenu teorema o limesima u zadacima počinju se baviti svojstvima nizova, točnije monotonosti i omeđenosti te njihovom vezom s konvergencijom niza. U srednjim školama s manje od 5 sati matematike tjedno uočava se rast ili pad niza te omeđenost dok se u prirodoslovno- matematičkim gimnazijama monotonost i omeđenost trebaju znati matematički dokazati.

Definicija 2.2.13. *Za niz (x_n) kažemo da je* ***rastući*** *ako za svaki n vrijedi $x_n \leq x_{n+1}$*
Za niz (x_n) kažemo da je ***padajući*** *ako za svaki n vrijedi $x_n \geq x_{n+1}$*
Rastuće i padajuće nizove nazivamo ***monotonim nizovima****.*

Definicija 2.2.14. *Niz (x_n) je* ***omeđen*** *ako postoje brojevi m i M takvi da za svaki n vrijedi*

$$m \leq x_n \leq M.$$

Broj M se naziva ***gornja****, a broj m* ***donja međa****.*

Primjer 2.2.15. *Ispitajmo monotonost i omeđenost niza*

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

Ispišimo prvih nekoliko članova niza:

$$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \ldots$$

Promatrajući prvih nekoliko članova niza možemo naslutiti da je niz a_n rastuć, ali to treba dokazati.
Pretpostavimo da je niz a_n rastuć, tada vrijedi $a_{n+1} - a_n > 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{n-1}{n+1} &= \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} \\
&= \frac{n(n+1)-(n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{n^2+n-n^2-2n+n+2}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{2}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}$$

Obzirom da je $n \in \mathbb{N}$ nazivnik je veći od nule, pa je cijeli razlomak veći od nule. Zaključujemo da je niz a_n rastući.

Lako primijetimo da je niz a_n omeđen odozdo s 0, obzirom da je rastući pa je prvi član ujedno i donja međa. Primijetimo kako se svaki idući član niza sve više približava broju 1, pa možemo pretpostaviti da je niz a_n odozgo omeđen s 1. Dokažimo tu tvrdnju.

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} = 1 - \frac{2}{n+2}$$

Razlomak $\frac{2}{n+2}$ je manji od 1 za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa možemo zaključiti da je $a_{n+1} < 1$, a s time i a_n za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadnja tema koja se obrađuje u kontekstu nizova, a koja je kao zasebna tema relativno nova u hrvatskom školstvu je kamatni račun. Izuzetno primjenjiva tema u svakodnevnom životu obrađuje se kao primjena aritmetičkog i geometrijskog niza u financijama. Učenici se upoznaju s pojmovima kamatne stope, glavnice, oročene štednje te s jednostavnim i složenim ukamaćivanjem.

Primjer 2.2.16. *Tena je oročila* 10000 *kn na rok od* 5 *godina uz kamatnu stopu od* 10%. *Kamate se na oročenu štednju svake godine obračunavaju i dodaju na glavnicu. Koliko će novca Tena imati na računu nakon pet godina?*

Označimo s C_0 početni iznos, a s C_n iznos na računu nakon n godina.
Na kraju prve godine, Tena će na računu imati početni iznos uvećan za kamatu

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot 0.1 = C_0 \cdot 1.1$$

Na kraju druge godine, Tena će na računu imati iznos prve godine uvećan za kamatu

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot 0.1 = C_1 \cdot 1.1 = C_0 \cdot 1.1^2$$

Na kraju treće,

$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot 0.1 = C_2 \cdot 1.1 = C_0 \cdot 1.1^3$$

Možemo zaključiti kako se iznos na računu nakon n godina može računati po formuli

$$C_n = C_0 \cdot 1.1^n$$

Ovdje se radi o geometrijskom nizu s kvocijentom 1.1.
Sada slijedi da Tena nakon 5 godina na računu ima $C_5 = 10000 \cdot 1.1^5 = 16105.1$ kuna.

Primjer 2.2.17. *Marko je uštedio* 30000 *kn i želi kupiti električni bicikl. Cijena bicikla je* 40000 *kn. Pronašao je banku koja za oročenu štednju nudi kamatnu stopu od* 2%. *Na koliko bi godina morao oročiti svoju ušteđevinu?*

Općenito, ako se kamate obračunavaju po složenom kamatnom računu uz godišnju kamatnu stopu p izraženu u postotcima, početni iznos C_0 nakon n godina narast će na iznos $C_n = C_0(1 + p)^n$.

Dakle, u ovom slučaju imamo

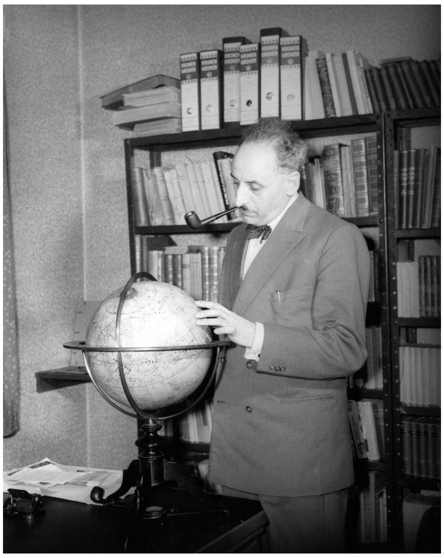
$$\begin{aligned} 40000 &= 3000 \cdot (1 + 0.02)^n \\ \frac{40000}{30000} &= 1.02^n \\ \frac{4}{3} &= 1.02^n \\ n &= \log_{1.02} \frac{4}{3} = 14.53 \end{aligned}$$

Zaključujemo da bi Marko ušteđevinu trebao oročiti na 15 godina kako bi početni iznos narastao na 40 000 kuna.

Poglavlje 3

Hans Freudenthal

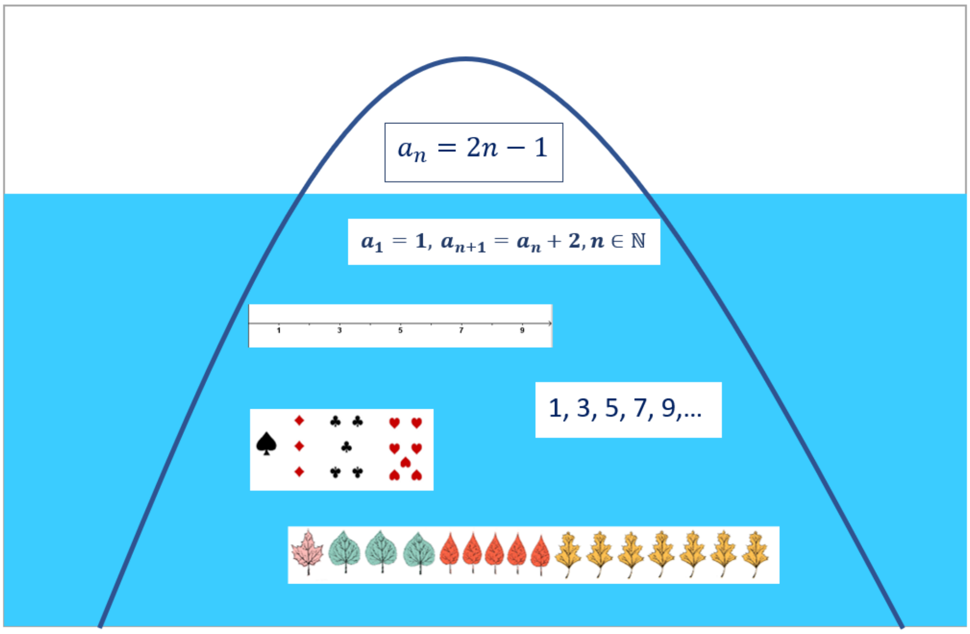
Hans Freudenthal je nizozemski matematičar koji je, osim svojih doprinosa u području algebarske topologije, poznat i po utjecaju na matematičko obrazovanje. On je začetnik ideje realističnog matematičkog obrazovanja koja se razvila 80-ih godina prošlog stoljeća kao kritika na veliku promjenu kurikuluma koja se popularno zvala "New Math".



Slika 3.1: Portret Hansa Freudenthala

Ideja realističnog matematičkog obrazovanja je da se učenicima ne daju gotove činjenice i definicije već prilika da ih sami otkriju uz usmjeravanje nastavnika. Samim time, oni postaju odgovorni za svoje učenje te razvijaju znanstvenu znatiželju i istraživačko razmišljanje.

U tako konstruiranoj nastavi naglasak je na razumijevanju sadržaja, a ne na gotovim algoritmima.
Hans Freudenthal je smatrao kako proces učenja treba početi s konkretnim i učenicima bliskim primjerima koje razvijaju vlastitim metodama i uz vodstvo nastavnika dolaze do formalnog znanja. Taj proces zove se progresivna formalizacija. Ona se često prikazuje modelom sante, odnosno ledenjaka koji viri iz mora i predstavlja formalno znanje, a ispod površine nalaze se svi neformalni primjeri, koncepti i ideje koji su učenike postupno doveli do formalnog znanja.



Slika 3.2: Model sante koji prikazuje progresivnu formalizaciju pojma niz

Na taj način smo razvijali i pojam niza. Učenici su se u prvom razredu osnovne škole susreli s raznim slikovnim prikazima niza koji su nadopunjivali slikama koje nedostaju, zatim su se slike zamijenile brojevima, u početku jednoznamenkastima, a kasnije višeznamenkastima. Pravilnost koju je valjalo uočiti za nastavljanje niza s nastavkom obrazovanja je kompleksnija, u sedmom razredu se javlja i linearna ovisnost, pa linearna funkcija kojoj je domena skup prirodnih brojeva i na kraju u četvrtom razredu srednje škole niz se definira i obrađuju se razna svojstva niza poput monotonosti i konvergencije. Dakle, pojam niza se razvijao kroz cijelo osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje učenika.

Poglavlje 4

Nizovi u kurikulumu Irske i Australije

4.1 Irska

Osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje Republike Irske sastoji se od primarnog i sekundarnog ciklusa od kojih se sekundarni dijeli na junior, prijelaznu godinu i senior.
Obrazovanje je besplatno i većinom započinje s djetetovih navršenih 5 godina.
Primarno obrazovanje traje osam godina i podijeljeno je na: *Junior infants, Senior infants* i šest razreda 1- 6.

Irska je prije nekoliko godina započela reformu obrazovanja čija se konačna implementacija u škole očekuje do 2023. godine. Kao i u Hrvatskoj, tijekom reforme je fokus s nastavnog sadržaja prešao na odgojno- obrazovne ishode te se u tim terminima piše novi kurikulum.
Zasad su objavljeni dokumenti koji navode okvirne promjene u obrazovanju, a one uključuju povećanje učenikove aktivnosti i odgovornosti u nastavnom procesu, usmjeravanje pažnje na primjene iz svijeta oko nas, ključne kompetencije i realističko matematičko obrazovanje koje slijedi ideju Hansa Freudenthala.

Cilj novog kurikuluma je pružanje mogućnosti učenicima da stvaraju svoje ideje i strategije za rješavanje problema te integriraju nove koncepte tako da grade na tim strategijama. Također, promoviraju se matematičke diskusije, prikladne aktivnosti, učenje kroz igru i formativno vrednovanje. Dapače, u Irskoj se ocjenjuje svega jednom do dvaput godišnje, ali se redovito formativno vrednuje učenike kako bi dobili valjanu i pravovremenu informaciju o svom napretku i postignućima u učenju.

Kao što je već navedeno u poglavlju 1.1 u hrvatskom kurikulumu ishodi koji se odnose na uočavanje pravilnosti, uzoraka i nizova nestaju u trećem razredu osnovne škole i do srednje škole nema govora o toj temi. U Irskom kurikulumu se kroz cijeli ciklus primarnog obrazovanja provlače uzorci, uočavanje pravilnosti, nastavljanje nizova i matematički zapisi uočenih pravilnosti.

Tijekom *Junior infant* i *Senior infant* stupnjeva obrazovanja učenici kroz zabavne i edukativne aktivnosti objekte redaju po veličini, istražuju i nastavljaju uzorke te broje od 1 do 5 i unazad od 5 do 1.
Naglasak je na opipljivim modelima s kojima učenici mogu fizički baratati i slagati ih na temelju nekih atributa, na primjer kreirati nove uzorke koristeći papirnate oblike.

U prvom i drugom razredu pojavljuju se redni brojevi i razlikuju se parni i neparni brojevi, a uzorci raznoraznih svakodnevnih oblika i objekata zamijenjuju se geometrijskih oblicima i brojevima. U ovom periodu učenike se ohrabljuje da uočavaju i opisuju odnose u uzorcima, uključujući nizove brojeva i geometrijskih oblika.

Zatim, u trećem razredu obrađuju se nizovi brojeva do 1000, na primjer broji se po 2, 4, 10, itd., a u četvrtom i petom razredu javljaju se prve jednostavnije generalizacije u svrhu predviđanja i nastavljanja nizova i uzoraka.

Posljednju godinu primarnog obrazovanja učenici obrađuju linearnu ovisnost i proporcionalnost koje su već i prije bili svjesni, ali sada ju zapisuju formulom, a nastala je iz brojevnih uzoraka.
Novi kurikulum naglašava važnost istraživanja i razmjene ideja kako bi učenici sami uočili pravilnosti, nastavljali nizove i kreirali nove na temelju dosadašnjeg iskustva.

Srednjoškolsko obrazovanje započinje s *Junior cycle* koji razvija sposobnosti logičkog, strateškog i kritičkog mišljenja učenika kroz pet domena:

- brojevi,
- geometrija i trigonometrija,
- algebra i funkcije,
- vjerojatnost i statistika,
- domena koja ujedinjuje sadržaje prethodnih domena.

Peta domena prožima sadržaje iz svih ostalih domena te se sastoji od šest elemenata kroz koje se ona ostvaruje.

1. Nadogradnja znanja- učenici razumiju i prisjećaju se koncepata iz svih domena te su sposobni točno i učinkovito izvesti račune i postupke pri rješavanju zadataka.

2. Povezivanje- učenici povezuju razne matematičke domene kao i matematiku sa svijetom oko nas.

3. Rješavanje problema- učenici istražuju obrasce, formuliraju pretpostavke i bave se zadacima u kojima rješenje nije očito.

4. Generalizacija i dokaz- učenici prelaze sa specifičnih slučajeva na opće matematičke iskaze te prezentiraju i vrednuju matematičke argumente i dokaze.

5. Matematička komunikacija- učenici komuniciraju matematičkim jezikom verbalno i pisano.

Ishodi učenja vezani za nizove se u ovom stupnju obrazovanja ne pojavljuju već se pojavljuju ishodi učenja vezani za linearnu i kvadratnu funkciju koje možemo promatrati kao nizove u slučaju da je njihova domena skup prirodnih brojeva. Kao i u Hrvatskoj, u ovom trenu nizovi se ne definiraju niti promatraju kao zasebna cjelina.

Nakon tri godine srednje škole, učenici se mogu odlučiti na prijelaznu godinu tijekom koje im se nude razni programi praktičnog učenja te mogu steći razne vještine i radno iskustvo. Zadnji dio srednjoškolskog obrazovanja zove se *Senior cycle* u kojem učenici mogu slušati i polagati matematiku na tri razine: temeljnoj, srednjoj i višoj razini.

Na temeljnoj, odnosno nižoj razini nizovi se obrađuju poprilično površno u odnosu na hrvatski kurikulum za škole s relativno malo sati matematike godišnje. Od učenika se očekuje da koriste tablice i grafički prikaz članova niza, generaliziraju i opisuju obrasce i odnose riječima i brojevima te zapisuju određene aritmetičke izraze u niz.

Učenici na srednjoj razini promatraju aritmetički i geometrijski niz i njihova svojstva te se od njih očekuje da po završetku nastavnog procesa prepoznaju je li dani niz aritmetički ili geometrijski te računaju sumu prvih n članova niza.

Na višoj razini ide se korak dalje. Učenici primjenjuju matematičku indukciju pri dokazivanju monotonosti i omeđenosti nizova. Također, računaju limese primjenjujući teorem o limesima i rješavaju probleme s konačnim i beskonačnim nzovima koji se mogu primjeniti u financijama, na primjer izvođenje formule za otplatu hipoteke.

Primijetimo sličnost irskog kurikuluma za višu razinu matematike i hrvatskog kurikuluma za gimnazije. Oboje obuhvaćaju iste sadržaje, ali istraživajući irski obrazovni sustav primjetila sam kako se u njihovom obrazovanju već dugi niz godina naglašava važnost primjene znanja u svakodnevnom životu i problemskih zadataka, što je kod nas tek na početku svog implementiranja u sve sfere obrazovanja.

Niža razina	Srednja razina	Viša razina
Učenik koristi tablice i grafički prikaz za prikaz nizova	Učenik zapisuje nizove formulom	Učenik istražuje svojstva geometrijskih nizova i redova
Učenik zapisuje aritmetičke izraze u niz i opisuje pravilo po kojem je sastavljen	Učenik istražuje uzorke među nizovima	Učenik primjenjuje pravila za sumu, produkt i kvocijent limesa
Učenik razumije da je svaki niz funkcija kojoj je domena skup prirodnih brojeva	Učenik prepoznaje je li niz aritmetički, geometrijski ili ništa od navedenog	Učenik rješava probleme pomoću konačnih i beskonačnih nizova, poput primjene u financijama
	Učenik određuje zbroj prvih n članova aritmetičkog niza	

Tablica 4.1: Usporedba ishoda učenja na tri razine matematike u *Senior cycle*

4.2 Australija

Australski obrazovni sustav sastoji se od primarnog, sekundarnog i tercijarnog obrazovanja, a za potrebe diplomskog rada istraživala sam primarno i sekundardno obrazovanje.

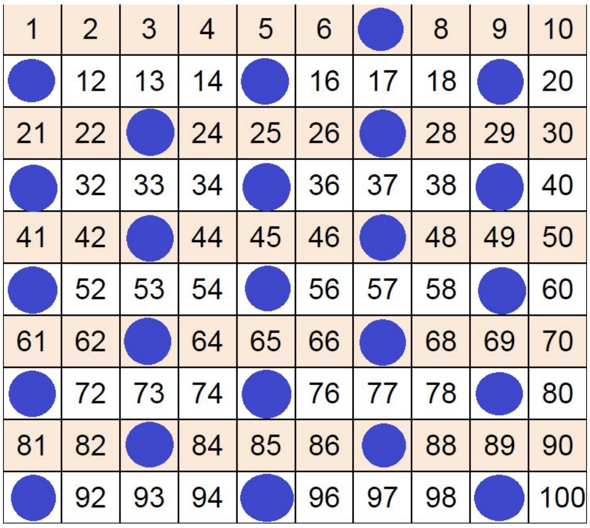
Primarno obrazovanje započinje sa šest ili sedam godina, ovisno o tome je li učenik polazio predškolu koja se, kao i u Hrvatskoj, odvija godinu dana prije polaska u osnovnu školu te se u njoj uče slova, brojevi, vrijeme, itd.
Primarno obrazovanje traje sedam ili osam godina, a zatim slijede tri ili četiri godine sekundarnog obrazovanja i nakon toga dvije godine višeg sekundarnog obrazovanja.
Kao i u Hrvatskoj, nakon završetka višeg sekundarnog obrazovanja, za upis na fakultet potrebno je polagati državnu maturu.

U kurikulumu primarnog obrazovanja postoji posebna poddomena koja se zove uzorci i algebra te se ona proteže cijelim primarnim i nižim sekundarnim obrazovanjem.

Dakle, učenici u Australiji u prosjeku 10 godina svog obrazovanja uče o nizovima u nekoj mjeri. Za usporedbu, učenici u Hrvatskoj nemaju tu vrstu kontinuiteta u učenju nizova te između trećeg razreda osnovne škole i četvrtog razreda srednje škole nema spomena ni o nizovima ni o uzorcima već je sve prepušteno dobroj volji nastavnika i autora udžbenika.

U predškoli, koja se u Australiji zove *Foundation year*, učenici prepoznaju uzorke, obrađuju redne brojeve i redaju objekte po veličini ili nekom zajedničkom svojstvu. Uz to, od njih se očekuje da kopiraju, nastave ili stvore niz objekata i brojeva do 10.

U prvom razredu nizovi se nadograđuju brojevnim nizovima do 100, s tim da nizove stvaraju ili nadopunjuju brojanjem po dva, deset, itd.
U kurikulumu se za realizaciju tog ishoda preporučuju igre poput Sam- yuk-gu u kojima svi učenici sudjeluju. Na početku se definira da se, na primjer svaki treći broj zamijeni pljeskom. Jedan učenik započinje i kaže 1, drugi 2 , a treći učenik ne bi trebao reći 3 već pljesnuti, i tako dalje dok netko ne pogriješi.
Također, ova igra može se izmijeniti na način da jedan učenik izvlači dvije kartice: na prvoj piše broj od kojeg treba početi brojati, a na drugoj piše po koliko se broji. Svaki učenik dobiva tablicu s brojevima od 1 do 100 i žetone kojima prekrije broj koji pripada nizu.



Slika 4.1: Primjer igre u kojoj se počinje brojati od broja 7 i broji se po četiri

U Australiji se kroz cijelo primarno obrazovanje stavlja veliki naglasak na matematičke igre poput navedene kako bi učenici kroz igru učili te im nastava ne bi bila dosadna. Također, u sklopu kurikuluma postoje linkovi na web stranicu digitalnog repozitorija materijala za nastavnike na kojoj se nalaze prijedlozi za razne aktivnosti, igre i zadaci.

U drugom i trećem razredu od učenika se traži da uočavaju i opisuju pravilnosti u brojevnim nizovima te da stvaraju nove nizove na temelju uočenog.
Zatim se brojevni nizovi kompliciraju te se u čevtrtom razredu promatraju brojevni nizovi višekratnika brojeva 3, 4, 6, 7, 8 i 9. Tada prepoznaju da neki nizovi ne moraju biti konačni te da imamo beskonačno mnogo višekratnika brojeva.

Kroz peti, šesti i sedmi razred nizovi se provlače u sklopu proučavanja skupova brojeva te se stvaraju jednostavne generalizacije uzoraka, a zatim se postepeno njihova zastupljenost smanjuje i do kraja desetog razreda zamjenjuje linearnim jednadžbama.

Za vrijeme višeg sekundarnog obrazovanja, učenici mogu učiti matematiku u jednoj od četiri varijante:

- temeljna matematika,
- opća matematika,
- matematičke metode,
- stručna matematika.

Temeljna matematika fokusira se na primjenu matematike u svakodnevnom životu. Većinom ju upisuju učenici koji nemaju namjeru nastaviti obrazovanje na fakultetu. Nastavni sadržaj obuhvaća primjenu postotaka, statistike, grafova i omjera u svakodnevnici, ali ne obuhvaća definiranje nizova kao funkcije i promatranje njihovih svojstava.

Zatim, slijedi opća matematika, koja je po obujmu nastavnog sadržaja ekvivalent matematici u hrvatskim općim gimnazijama. Učenici koji ju upisuju bave se algebrom, geometrijom i trigonometrijom, grafovima i statistikom te planiraju u budućnosti upisati fakultet. Također, definiraju se nizovi te promatraju aritmetički i geometrijski niz i njihova svojstva. Naglasak se stavlja na praktičnoj primjeni i analizi tih nizova u svakodnevnici, kao na primjer jednostavno i složeno ukamaćivanje.

Učenici koji planiraju upisati tehničke fakultete upisuju predmet matematičke metode u kojem se naglasak stavlja na matematičku analizu i statistiku. Aritmetički i geometrijski nizovi obrađuju se kao i na općoj matematici, ali se dodatno obrađuje i suma prvih n elemenata niza i limes geometrijskog niza.

Stručna matematika namjenjena je učenicima koji se planiraju baviti zanimanjima usko povezanima s matematikom. Zamišljeno je da se polaže uz matematičke metode jer se nastavni sadržaj matematičkih metoda nadograđuje raznim teoremima i dokazima te služi kao spona između srednjoškolske i fakultetske matematike.
Učenici uče o vektorima u prostoru, primjeni integrala, kompleksnim brojevima, funkcijama i kombinatorici, ali u kurikulumu stručne matematike nema govora o nizovima jer se oni obrađuju na matematičkim metodama.

Bibliografija

[1] S. Antoliš, A. Copić, R. Kalazić, S. Lukač, Z. Šikić, E. Špalj, *Matematika 4*, udžbenik za četvrti razred gimnazije i srednje strukovne škole - 1. svezak, Profil- Klett, Zagreb, 2020.

[2] Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, *The Australian Curriculum*, (lipanj 2022.) `https://www.australiancurriculum.edu.au/`

[3] J. Barišin, R. Gortan, Lj. Jukić Matić, A. Pletikosić, V. Vujasin Ilić, *Matematika 4*, udžbenik matematike u prvom razredu srednje škole, 5 sati tjedno- 2. svezak, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[4] A. Boras Mandić, L. Lončar, M. Križman Roškar, R. Pešut, *Nina i Tino 1*, udžbenik matematike za prvi razred osnovne škole- 1. dio, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[5] A. Boras Mandić, L. Lončar, M. Križman Roškar, R. Pešut, *Nina i Tino 1*, udžbenik matematike za prvi razred osnovne škole- 2. dio, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[6] A. Boras Mandić, L. Lončar, M. Križman Roškar, R. Pešut, *Nina i Tino 2*, udžbenik matematike za drugi razred osnovne škole- 1. dio, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[7] A. Boras Mandić, L. Lončar, M. Križman Roškar, R. Pešut, *Nina i Tino 2*, udžbenik matematike za drugi razred osnovne škole- 2. dio, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[8] A. Boras Mandić, L. Lončar, M. Križman Roškar, R. Pešut, *Nina i Tino 3*, udžbenik matematike za treći razred osnovne škole- 1. dio, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[9] A. Boras Mandić, L. Lončar, M. Križman Roškar, R. Pešut, *Nina i Tino 3*, udžbenik matematike za treći razred osnovne škole- 2. dio, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[10] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4*, udžbenik za četvrti razred prirodoslovno- matematičke gimnazije- 1.dio, Element, Zagreb, 2013.

[11] Department of Education, Skills and Employment, *Australian education system*, (lipanj 2022.) https://www.studyaustralia.gov.au/english/study/education-system

[12] J. Markovac, I.Lović Štenc, *Matematika 1*, radni udžbenik iz matematike za prvi razred osnovne škole- 1. dio, Alfa, Zagreb, 2020.

[13] J. Markovac, I.Lović Štenc, *Matematika 1*, radni udžbenik iz matematike za prvi razred osnovne škole- 2. dio, Alfa, Zagreb, 2020.

[14] J. Markovac, D. Vrgoč, *Matematika 2*, radni udžbenik iz matematike za drugi razred osnovne škole- 1. dio, Alfa, Zagreb, 2020.

[15] J. Markovac, D. Vrgoč, *Matematika 2*, radni udžbenik iz matematike za drugi razred osnovne škole- 2. dio, Alfa, Zagreb, 2020.

[16] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*, Narodne novine, Zagreb, 2019.
https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html, (svibanj 2022.)

[17] National Council for Curriculum and Assessment, *Primary School Mathematics Curriculum*, (lipanj 2022.) https://www.curriculumonline.ie/getmedia/9df5f3c5-257b-471e-8d0f-f2cf059af941/PSEC02_Mathematics_Curriculum.pdf

[18] National Council for Curriculum and Assessment, *Primary Mathematics Curriculum Draft specification for consultation*, (lipanj 2022.) https://ncca.ie/media/5370/draft_primary_mathematics_curriculum_specification.pdf

[19] National Council for Curriculum and Assessment, *Junior Cycle Mathematics* , (lipanj 2022.) https://www.curriculumonline.ie/getmedia/6a7f1ff5-9b9e-4d71-8e1f-6d4f932191db/JC_Mathematics_Specification.pdf

[20] National Council for Curriculum and Assessment, *Leaving Certificate Mathematics* , (lipanj 2022.) https://www.curriculumonline.ie/getmedia/f6f2e822-2b0c-461e-bcd4-dfcde6decc0c/SCSEC25_Maths_syllabus_examination-2015_English.pdf

[21] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, *Matematički izazovi 7*, udžbenik sa zadacima za vježbanje iz matematike za sedmi razred osnovne škole- 2. svezak, Alfa, Zagreb, 2020.

[22] M. Stepić, S. Antoliš, A. Copić, E. Špalj, *Nizovi*, Edutorij, https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/2275f95f-7c02-443e-b577-97df13345923/html/353_nizovi.html, (svibanj 2022.)

[23] Z. Šikić, V. D. Žitko, I. G. Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić. T. Nemeth, G. Stajčić, M. Vuković, *Matematika 7*, udžbenik matematike za sedmi razred osnovne škole- 1. svezak, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[24] Wikipedia, *Hans Freudenthal*, https://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Freudenthal, (svibanj 2022.)

Sažetak

U ovom radu analizirano je uvođenje i realizacija matematičkog pojma niza u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj matematici. Prvi dio rada nudi pregled ishoda učenja iz Predmetnog kurikuluma za matematičko područje vezanih za uzorke i nizove kroz osnovnu i srednju školu. Drugi dio je orijentiran na tipične zadatke kojima se obrađuje pojam niza i razvija kroz učenikovo obrazovanje te se nastavlja s opisom progresivne formalizacije Hansa Freudenthala na primjeru razvoja pojma niza. Na kraju rada analiziraju se kurikulumi Irske i Australije te se uspoređuju s hrvatskim kurikulumom.

Summary

This thesis analyzes the introduction and realization of the mathematical concept of a sequence in primary and secondary mathematics. The first part of the thesis offers an overview of the learning outcomes from the Mathematics Curriculum related to patterns and sequences through primary and secondary school. The second part focuses on typical tasks that deal with the concept of a sequence and how the concept develops through the student's education. It continues with a description of Hans Freudenthal's progressive formalization on the example of the development of the concept of a sequence. At the end of the thesis, the curricula of Ireland and Australia are analyzed and compared with the Croatian curriculum.

Životopis

Rođena sam 23. 3. 1997. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Samobor do 2011. godine te nakon toga upisala prirodoslovno- matematički smjer X. gimnazije "Ivan Supek" u Zagrebu gdje sam se zainteresirala za matematiku i otkrila svoj poziv.

2015. godine upisala sam nastavnički smjer preddiplomskog studija matematike na Prirodoslovno- matematičkom fakuletu u Zagrebu koji sam završila 2019. godine sa zvanjem sveučilišna prvostupnica edukacije matematike. Iste godine, svoje obrazovanje nastavila sam na nastavničkom smjeru diplomskog studija matematike na istom fakultetu koji završavam akademske godine 2021/2022.