Efektivna kompaktnost

Vasung, Patrik

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Patrik Vasung

EFEKTIVNA KOMPAKTNOST

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **2**

1 Izračunljivost **3**
1.1 Rekurzivne funkcije i rekurzivni skupovi . . . 3
1.2 Rekurzivno prebrojivi skupovi . . . 15
1.3 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ . . . 20
1.4 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ . . . 22
1.5 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ . . . 25
1.6 Rekurzivne i rekurzivno omeđene funkcije . . . 31

2 Izračunljivost na metričkim prostorima **39**
2.1 Izračunljivi metrički prostori . . . 39
2.2 Izračunljivo prebrojivi skupovi . . . 43
2.3 Izračunljivi skupovi . . . 46
2.4 Hiperprostor . . . 49

3 Efektivna kompaktnost **53**
3.1 Osnovni rezultati i primjeri . . . 53
3.2 Neovisnost efektivne kompaktnosti o efektivnom separirajućem nizu . . . 60

Bibliografija **69**

Uvod

Izračunljivost kao grana matematike bavi se proučavanjem rekurzivnih funkcija. Intuitivno, rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je funkcija za koju možemo napisati program, odnosno za koju postoji "algoritam", koji kao ulaz prima $i \in \mathbb{N}$ i vraća vrijednost funkcije $f(i)$. Na primjer, na intuitivnoj razini je jasno da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ čija vrijednost je jednaka 1, ako je i prost broj, a 0 ako i nije prost broj, rekurzivna. Naime, algoritam za tu funkciju bi za dani $i \in \mathbb{N}$ trebao napraviti konačno mnogo provjera, je li i djeljiv s nekim brojem manjim od njega. Prvo poglavlje ovog diplomskog rada namijenjeno je klasičnoj teoriji izračunljivosti i u njemu formaliziramo pojam rekurzivne funkcije. Precizno ćemo definirati što znači da za neku funkciju postoji "algoritam" koji izračunava njene vrijednosti. Štoviše, proširiti ćemo pojam rekurzivne funkcije na funkcije čija kodomena je $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Također, uvodimo i obrađujemo pojmove kao što su rekurzivan i rekurzivno prebrojiv skup, koji su temeljni pojmovi u teoriji izračunljivosti. Za kraj prvog poglavlja obrađujemo r.r.o. funkcije koje će nam biti potrebne kasnije u diplomskom radu.

Sljedeći cilj je povezati teoriju metričkih prostora sa izračunljivosti. U diplomskom radu podrazumijeva se osnovno znanje o metričkim prostorima pa neke definicije i rezultati vezani uz to nisu posebno navedeni. Kako bi povezali te dvije teorije uvodimo pojam efektivnog separirajućeg niza u metričkom prostoru (X, d). Za niz $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji je gust u (X, d) te takav da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna kažemo da je efektivan separirajući niz u (X, d). Uređenu trojku (X, d, α) tada nazivamo izračunljivim metričkim prostorom. Na izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) poručavamo svojstva izračunljivo prebrojivih i izračunljivih podskupova od X. Ispostavit će se da je svaki izračunljiv skup ujedno i izračunljivo prebrojiv skup te da ga možemo promatrati kao izračunljiv metrički prostor.

Jednu klasu metričkih prostora čine kompaktni metrički prostori. Može se pokazati da je metrički prostor (X, d) kompaktan ako i samo ako je potpun i ako za svaki $\epsilon > 0$ postoje točke $x_1, \dots, x_n \in X$ takve da je

$$X = \bigcup_{i=0}^{n} K(x_i, \epsilon).$$

Ovaj rezultat nas motivira na sljedeću definiciju. Za izračunljiv metrički prostor (X, d, α)

kažemo da je efektivno kompaktan ako je (X, d) kompaktan i ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$X = \bigcup_{i=0}^{f(k)} K(\alpha_i, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Jedan od primjera efektivno kompaktnog izračunljivog metričkog prostora biti će $([0, 1], d, \alpha)$, gdje je d euklidska metrika i α efektivan separirajući niz u $([0, 1], d)$. S druge strane, pokazuje se da za $\gamma > 0$ takav da γ nije izračunljiv broj izračunljiv metrički prostor $([0, \gamma], d, \alpha)$, gdje je d euklidska metrika i α efektivan separirajući niz u $([0, \gamma], d)$, nije efektivno kompaktan. Ključna razlika između ova dva metrička prostora je ta da je 1 izračunljiv broj, dok γ nije. Ispostavit će se da su izračunljivi skupovi gledani kao izračunljivi metrički prostori efektivno kompaktni. Još jedan zanimljiv rezultat je da efektivna kompaktnost ne ovisi o efektivnom separirajućem nizu. Preciznije, ako je (X, d) metrički prostor i α, β efektivni separirajući nizovi u (X, d), tada vrijedi

$$(X, d, \alpha) \text{ je efektivno kompaktan} \iff (X, d, \beta) \text{ je efektivno kompaktan.}$$

Poglavlje 1

Izračunljivost

1.1 Rekurzivne funkcije i rekurzivni skupovi

Neka je $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $z(x) = 0,$ za svaki $x \in \mathbb{N}$ te neka je $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $s(x) = x + 1,$ za svaki $x \in \mathbb{N}$.
Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Definiramo funkciju $I^k_j : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa

$$I^k_j(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_j.$$

Za funkcije z, s, I^k_j kažemo da su **inicijalne funkcije**.
Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ i $g_1, g_2, \ldots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcije. Za funkciju $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiranu sa

$$h(x) = f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k$$

kažemo da je **dobivena kompozicijom** funkcija $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$.
Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcije. Za fiksne $x_1, x_2, \ldots x_k \in \mathbb{N}$ definiramo funkciju $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ induktivno po $y \in \mathbb{N}$ sa

$$h(0, x_1, x_2, \ldots., x_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

$$h(y + 1, x_1, x_2, \ldots, x_k) = g(h(y, x_1, x_2, \ldots, x_k), y, x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Za ovako definiranu funkciju h kažemo da je **dobivena primitivnom rekurzijom** funkcija f i g.
Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pretpostavimo da je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija takva da za svaki $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $g(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) = 0$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiranu sa

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid g(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) = 0\}$$

kažemo da je **dobivena primjenom** μ **− operatora** na funkciju g. Broj $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ još označavamo sa $\mu y(g(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) = 0)$.
Definirajmo sada pojam rekurzivne funkcije.
Neka je R_0 skup svih inicijalnih funkcija. Pretpostavimo da smo za neki $n \in \mathbb{N}$ definirali skup R_n.
Označimo sa A skup svih funkcija h sa svojstvom da postoje $f, g_1, g_2, \ldots, g_k \in R_n$ takve da je funkcija h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, g_2, \ldots, g_k$.
Označimo sa B skup svih funkcija h sa svojstvom da postoje $f, g \in R_n$ takve da je funkcija h dobivena primitivnom rekurzijom funkcija f i g.
Označimo sa C skup svih funkcija h sa svojstvom da postoji $g \in R_n$ takva da je funkcija h dobivena primjenom μ − operatora na funkciju g.
Definiramo skup R_{n+1} sa $R_{n+1} = R_n \cup A \cup B \cup C$. Na ovaj način smo induktivno definirali niz skupova $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$, iz same definicije niza jasno je da vrijedi $R_n \subseteq R_m$, za sve $n, m \in \mathbb{N}$ takve da je $n \leq m$.
Za funkciju h kažemo da je **rekurzivna** ako je $h \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, odnosno ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $h \in R_n$.
Uočimo da su sve inicijalne funkcije rekurzivne te da je skup svih rekurzivnih funkcija prebrojiv. Naime, indukcijom se lako pokaže da je R_n prebrojiv skup za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa je onda $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ prebrojiv skup kao prebrojiva unija prebrojivih skupova.

Propozicija 1.1.1. *a) Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$ rekurzivne funkcije. Tada je funkcija h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$ rekurzivna funkcija.*

b) Neka su f i g rekurzivne funkcije. Tada je funkcija h dobivena primitivnom rekurzijom funkcija f i g rekurzivna funkcija.

c) Neka je g rekurzivna funkcija. Tada je funkcija h dobivena primjenom μ − operatora na funkciju g rekurzivna funkcija.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju a). Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka su $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$ rekurzivne funkcije te neka je h funkcija dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$. Iz činjenice da su funkcije $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$ rekurzivne slijedi da postoje $k, k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ takvi da je $f \in R_k, g_1 \in R_{k_1}, g_2 \in R_{k_2}, \ldots, g_n \in R_{k_n}$. Neka je $K = \max\{k, k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Kako je

$$k \leq K, k_1 \leq K, \ldots, k_n \leq K,$$

te kako je $R_i \subseteq R_j$ za sve $i, j \in \mathbb{N}$ takve da je $i \leq j$ slijedi $R_k \subseteq R_K, R_{k_1} \subseteq R_K, \ldots, R_{k_n} \subseteq R_K$, pa vrijedi $f, g_1, g_2, \ldots, g_n \in R_K$. Kako je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$ imamo $h \in R_{K+1}$, pa je h rekurzivna funkcija.
Tvrdnje b) i c) dokazuju se analogno. □

Primjer 1.1.2. *Funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa $h(y,x) = y + x$ je rekurzivna. Vrijedi:*

$$h(0,x) = x = I_1^1(x),$$

$$h(y+1,x) = (y+1) + x = (y+x) + 1 = G(h(y,x), y, x),$$

pri čemu je $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $G(x,y,z) = x + 1$.
Dakle, funkcija h je dobivena primitivnom rekurzijom funkcija I_1^1 i G. I_1^1 je inicijalna funkcija pa je rekurzivna, a kako vrijedi $G(x,y,z) = s(I_1^3(x,y,z))$ imamo da je G dobivena kompozicijom funkcija s i I_1^3 koje su rekurzivne pa je prema propoziciji 1.1.1 funkcija G rekurzivna.
Konačno, kako je h dobivena primitivnom rekurzijom rekurzivnih funkcija I_1^1 i G iz propozicije 1.1.1 slijedi da je h rekurzivna funkcija.

Primjer 1.1.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $m \in \mathbb{N}$. Funkcija $c_m : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana sa $c_m(x) = m$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ je rekurzivna. Dokažimo to indukcijom po m. Vrijedi*

$$c_0(x) = 0 = z(I_1^k(x))$$

pa je c_0 rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija z i I_1^k. Pretpostavimo sad da je funkcija c_m rekurzivna za neki $m \in \mathbb{N}$. Imamo

$$c_{m+1}(x) = m + 1 = s(c_m(x)),$$

dakle c_{m+1} je dobivena kompozicijom funkcija s i c_m. Funkcija s je rekurzivna, a c_m je rekurzivna po induktivnoj pretpostavci. Sada iz propozicije 1.1.1 slijedi da je funkcija c_{m+1} rekurzivna. Dakle, dokazali smo da je funkcija c_m rekurzivna za svaki $m \in \mathbb{N}$.

Propozicija 1.1.4. *Neka je $m \in \mathbb{N}$, te neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana sa*

$$h(0) = m$$

$$h(y+1) = g(h(y), y).$$

Tada je h rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $h' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h'(y,x) = h(y)$. Primjetimo da je

$$h(y) = h'(y,0) = h'(I_1^1(y), z(y))$$

pa je h dobivena kompozicijom funkcija h', I_1^1, z. Kako su funkcije I_1^1, z rekurzivne da bismo pokazali da je h rekurzivna funkcija prema propoziciji 1.1.1 dovoljno je pokazati da je funkcija h' rekurzivna. Imamo

$$h'(0,x) = h(0) = m = c_m(x),$$

$$h'(y+1,x) = h(y+1) = g(h(y),y) = G(h'(y,x),y,x),$$

pri čemu je $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija dana sa $G(x,y,z) = g(x,y)$. Funkcija G je dobivena kompozicijom funkcija g, I_1^3, I_2^3 jer je $G(x,y,z) = g(x,y) = g(I_1^3(x,y,z), I_2^3(x,y,z))$. Stoga je G rekurzivna prema propoziciji 1.1.1 Nadalje h' je dobivena primitivnom rekurzijom funkcija c_m i G koje su rekurzivne pa je prema propoziciji 1.1.1 h' rekurzivna funkcija. □

Uzmemo li u prethodnoj propoziciji da je $m = 0$ i $g = I_2^2$ lako dobivamo da je funkcija $pr : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$pr(y) = \begin{cases} y-1, y \geq 1 \\ 0, y = 0 \end{cases}$$

rekurzivna.
Navedimo sad još neke važne primjere rekurzivnih funkcija. Dokaz da su te funkcije rekurzivne može se pronaći u [7].

Primjer 1.1.5. *Sljedeće funkcije su rekurzivne:*

a) $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto x \cdot y$

b) $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto x \dot{-} y$*, pri čemu je*

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, x \geq y \\ 0, x < y \end{cases}$$

Funkciju $(x,y) \mapsto x \dot{-} y$ *nazivamo* ***modificirano oduzimanje***.

c) $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto x^y$

d) $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto |x-y|$

e) $sg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$sg(x) = \begin{cases} 1, x \geq 1 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

f) $\overline{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, x \geq 1 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

g) $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto \max\{x,y\}$

h) $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto \min\{x,y\}$

Propozicija 1.1.6. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $f + g$ i $f \cdot g$ rekurzivne.*

Dokaz. Funkcije $F, G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirane sa $F(x, y) = x + y$ i $G(x, y) = x \cdot y$ su rekurzivne. Imamo da je

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = F(f(x), g(x)),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = G(f(x), g(x)).$$

Vidimo da je $f + g$ dobivena kompozicijom funkcija F, f, g, te da je $f \cdot g$ dobivena kompozicijom funkcija G, f, g. Kako su funkcije F, G, f, g rekurzivne, iz propozicije 1.1.1 slijedi da su i funkcije $f + g$ i $f \cdot g$ rekurzivne. □

Napomena 1.1.7. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Induktivnim argumentom iz prethodne propozicije lako dobivamo da za rekurzivne funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ vrijedi da su funkcije $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ i $f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n$ rekurzivne.*

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je **rekurzivan** ako je $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, karakteristična funkcija skupa S, rekurzivna funkcija. Gdje je karakteristična funkcija skupa S definirana sa

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, x \in S \\ 0, x \notin S \end{cases}$$

Propozicija 1.1.8. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi. Tada su skupovi $A \cup B, A \cap B$ i A^c rekurzivni.*

Dokaz. Kako su skupovi A i B rekurzivni imamo da su funkcije χ_A i χ_B rekurzivne. Očito je

$$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Prema tome funkcija $\chi_{A \cap B}$ je rekurzivna prema propoziciji 1.1.6 kao umnožak rekurzivnih funkcija, stoga je skup $A \cap B$ rekurzivan.
Nadalje, vrijedi

$$\chi_{A^c}(x) = c_1(x) \dot{-} \chi_A(x).$$

Označimo li sa G modificirano oduzimanje iz prethodne jednakosti vidimo da je funkcija χ_{A^c} dobivena kompozicijom funkcija G, c_1, χ_A koje su rekurzivne. Sada je funkcija χ_{A^c} rekurzivna prema propoziciji 1.1.1, stoga je A^c rekurzivan skup.
Iz prethodno dokazanih tvrdnji i jednakosti $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ slijedi da je i $A \cup B$ rekurzivan skup. □

Napomena 1.1.9. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Induktivnim argumentom iz prethodne propozicije lako dobivamo da za rekurzivne skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{N}^k$ vrijedi da su skupovi $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ i $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ rekurzivni.*

Propozicija 1.1.10. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ konačan skup. Tada je S rekurzivan.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, tada je $\chi_S(x) = 0 = z(I_1^k(x))$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, pa je S rekurzivan skup.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$.
Tada postoje $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}^k$ takvi da je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Iz prethodne napomene i činjenice da je $S = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$ slijedi da je dovoljno pokazati da je svaki jednočlan podskup od $\mathbb{N}^k$ rekurzivan. Neka je $x_0 \in \mathbb{N}^k$ proizvoljan, tada postoje $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ takvi da je $x_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Vrijedi:

$$\chi_{\{x_0\}}(x) = \overline{sg}(\sum_{i=0}^{k} |I_i^k(x) - a_i|).$$

Lako se pokaže da je funkcija $x \mapsto \overline{sg}(\sum_{i=0}^{k} |I_i^k(x) - a_i|)$ rekurzivna. Sada imamo da je skup $\{x_0\}$ rekurzivan za proizvoljan $x_0 \in \mathbb{N}$, pa je i S rekurzivan prema napomeni 1.1.9 . $\square$

Propozicija 1.1.11. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka su $S_1, S_2, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi takvi da vrijedi: $S_i \cap S_j = \emptyset$,* sve *$i \neq j$ i $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = \mathbb{N}^k$. Pretpostavimo još da su $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada je funkcija $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana sa:*

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in S_1 \\ f_2(x), x \in S_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x), x \in S_n \end{cases}$$

rekurzivna.

Dokaz. Iz činjenice da su skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ međusobno disjunktni i da u uniji daju $\mathbb{N}^k$ slijedi da je:

$$F = f_1 \cdot \chi_{S_1} + \cdots + f_n \cdot \chi_{S_n}.$$

Za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ funkcija $f_i \cdot \chi_{S_i}$ je rekurzivna kao umnožak rekurzivnih funkcija. Imamo da je F zbroj rekurzivnih funkcija pa je i sama rekurzivna. □

Propozicija 1.1.12. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup sa svojstvom da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in S$. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid (x, y) \in S\} = \mu y((x, y) \in S).$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$g(x, y) = \overline{sg}(\chi_S(x, y)), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k, \text{ za svaki } y \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da je g rekurzivna funkcija te da vrijedi: $g(x, y) = 0$ ako i samo ako $(x, y) \in S$. Dakle, imamo

$$f(x) = \mu y((x, y) \in S) = \mu y(g(x, y) = 0),$$

stoga je f rekurzivna prema propoziciji 1.1.1 jer je dobivena primjenom $\mu-$operatora na funkciju g. □

Propozicija 1.1.13. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Tada je i funkcija $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ dana sa:*

$$f(y, x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^{y} g(i, x_1, \dots, x_k)$$

rekurzivna.

Dokaz. Primjetimo da vrijedi:

$$f(0, x_1, \dots, x_k) = g(0, x_1, \dots, x_k),$$

$$f(y + 1, x_1, \dots, x_k) = f(y, x_1, \dots, x_k) + g(y + 1, x_1, \dots, x_k).$$

Zbog toga što je g rekurzivna funkcija lako vidimo da je funkcija $G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ dana sa $G(x_1, \dots, x_k) = g(0, x_1, \dots, x_k)$ rekurzivna. Također lako se vidi da je funkcija $H : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$, $H(z, y, x_1, \dots, x_k) = z + g(y + 1, x_1, \dots, x_k)$ rekurzivna. Sada vrijedi:

$$f(0, x_1, \dots, x_k) = G(x_1, \dots, x_k)$$

$$f(y + 1, x_1, \dots, x_k) = H(f(y, x_1, \dots, x_k), y, x_1, \dots, x_k)$$

pa je f rekurzivna jer je dobivena primitivnom rekurzijom rekurzivnih funkcija G i H. □

Propozicija 1.1.14. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Tada je funkcija $f : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ dana sa* $f(a, b, x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} \sum\limits_{i=a}^{b} g(i, x_1, \ldots, x_k), a \leq b \\ 0, a > b \end{cases}$ *rekurzivna.*

Dokaz. Definirajmo funkcije $g', f' : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ sa

$$g'(i, a, x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} g(i, x_1, \ldots, x_k), i \geq a \\ 0, i < a \end{cases}$$

$$f'(b, a, x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=0}^{b} g'(i, a, x_1, \ldots, x_k).$$

Iz činjenice da je g rekurzivna funkcija i propozicije 1.1.11 slijedi da je funkcija g' rekurzivna, a sada iz propozicije 1.1.13 slijedi da je i f' rekurzivna funkcija. Pretpostavimo da su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $a \leq b$. Tada vrijedi:

$$f'(b, a, x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=0}^{b} g'(i, a, x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=0}^{a-1} g'(i, a, x_1, \ldots, x_k) + \sum_{i=a}^{b} g'(i, a, x_1, \ldots, x_k)$$

$$= 0 + \sum_{i=a}^{b} g(i, a, x_1, \ldots, x_k) = f(a, b, x_1, \ldots, x_k).$$

S druge strane, za $a > b$ očito vrijedi:

$$f'(b, a, x_1, \ldots, x_k) = 0 = f(a, b, x_1, \ldots, x_k)$$

Prema tome za sve $a, b, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ imamo

$$f(a, b, x_1, \ldots, x_k) = f'(I_2^{k+2}(a, b, x_1, \ldots, x_k), I_1^{k+2}(a, b, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$$

iz čega zaključujemo da je f rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.1.15. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Pretpostavimo još da su $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada je funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ dana sa*

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} \sum_{\alpha(x_1,\ldots,x_k)}^{\beta(x_1,\ldots,x_k)} g(i, x_1, \ldots, x_k), \alpha(x_1, \ldots, x_k) \leq \beta(x_1, \ldots, x_k) \\ 0, \alpha(x_1, \ldots, x_k) > \beta(x_1, \ldots, x_k) \end{cases}$$

rekurzvina.

Dokaz. Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ sa

$$h(a, b, x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} \sum_{i=a}^{b} g(i, x_1, \ldots, x_k), a \leq b \\ 0, a > b. \end{cases}$$

Prema propoziciji 1.1.14 h je rekurzivna funkcija. Vrijedi:

$$f(x_1, \ldots, x_k) = h(\alpha(x_1, \ldots, x_k), \beta(x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k).$$

Jer su α, β i h rekurzivne funkcije zaključujemo da je f rekurzivna funkcija . □

Sljedeća propozicija dokazuje se na sličan način kao propozicija 1.1.15.

Propozicija 1.1.16. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Pretpostavimo još da su $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada je funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ dana sa*

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} \prod_{\alpha(x_1,\ldots,x_k)}^{\beta(x_1,\ldots,x_k)} g(i, x_1, \ldots, x_k), \alpha(x_1, \ldots, x_k) \leq \beta(x_1, \ldots, x_k) \\ 1, \alpha(x_1, \ldots, x_k) > \beta(x_1, \ldots, x_k) \end{cases}$$

rekurzivna.

Propozicija 1.1.17. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ dane sa*

$$f(x) = \max\nolimits_{0 \leq i \leq \alpha(x)} h(i, x),$$

$$g(x) = \min\nolimits_{0 \leq i \leq \alpha(x)} h(i, x)$$

rekurzivne.

Dokaz. Dokažimo da je funkcija f rekurzivna. Analogno se dokazuje da je i funkcija g rekurzivna. Neka je $f' : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f'(i, x) = \max\{h(0, x), \ldots, h(i, x)\}, \text{ za sve } i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}^k.$$

Vrijedi

$$f'(0, x) = h(0, x),$$

$$f'(i + 1, x) = \max\{f'(i, x), h(i + 1, x)\}, \text{ za sve } i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}^k.$$

Vidimo da je funkcija f' dobivena primitivnom rekurzijom rekurzivnih funkcija. Stoga je f' rekurzivna funkcija. Nadalje, očito za sve $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(x) = f'(\alpha(x), x).$$

Zaključujemo da je f rekurzivna funkcija jer je kompozicija rekurzivnih funkcija. □

Lema 1.1.18. *Funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa* $f(x,y) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor, y \geq 1 \\ x, y = 0 \end{cases}$ *je rekurzivna.*

Dokaz. Primjetimo da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ takve da je $y \geq 1$ vrijedi:

$$f(x,y) = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = \max\{j \in \mathbb{N} \mid j \leq \frac{x}{y}\} = \max\{j \in \mathbb{N} \mid j \cdot y \leq x\} = \sum_{i=1}^{x} \overline{sg}(i \cdot y \dot{-} x)$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz činjenice da za svaki i takav da je $i \leq \max\{j \in \mathbb{N} \mid j \cdot y \leq x\}$ vrijedi $\overline{sg}(i \cdot y \dot{-} x) = 1$, a za svaki i takav da je $i > \max\{j \in \mathbb{N} \mid j \cdot y \leq x\}$ vrijedi $\overline{sg}(i \cdot y \dot{-} x) = 0$. Primjetimo da jednakost:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{x} \overline{sg}(i \cdot y \dot{-} x)$$

vrijedi i za $y = 0$. Definirajmo sada funkcije $\alpha, \beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ te funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa $\alpha(x,y) = 0$, $\beta(x,y) = x$ i $g(i,x,y) = \overline{sg}(i \cdot y \dot{-} x)$. Lako se pokaže da su α, β, g rekurzivne funkcije. Nadalje, imamo da je

$$f(x,y) = \sum_{i=\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} g(i,x,y)$$

pa iz propozicije 1.1.15 slijedi da je f rekurzivna funkcija. □

Lema 1.1.19. *Skup $D = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : y \mid x\}$ je rekurzivan.*

Dokaz. Neka je f funkcija iz leme 1.1.18. Tvrdimo da vrijedi:

$$\chi_D(x,y) = \overline{sg}(x \dot{-} (y \cdot f(x,y))), \text{ za sve } x, y \in \mathbb{N}.$$

Zaista, pretpostavimo da je $(x,y) \in D$, tada $y \mid x$. Ako je $y = 0$ imamo $x = 0$ pa je

$$\overline{sg}(x \dot{-} (y \cdot f(x,y)) = \overline{sg}(0 \dot{-} (0 \cdot f(0,0)) = 1.$$

Ako je $y \neq 0$ imamo

$$\overline{sg}(x \dot{-} (y \cdot f(x,y)) = \overline{sg}(x \dot{-} (y \cdot \frac{x}{y})) = \overline{sg}(x \dot{-} x) = \overline{sg}(0) = 1.$$

Pretpostavimo sada da $(x,y) \notin D$. Tada $y \nmid x$. Ako je $y = 0$ imamo $x > 0$ pa je

$$\overline{sg}(x \dot{-} (y \cdot f(x,y)) = \overline{sg}(x \dot{-} (0 \cdot x) = \overline{sg}(x \dot{-} 0) = \overline{sg}(x) = 0.$$

Ako je $y \neq 0$ iz $y \nmid x$ slijedi

$$f(x,y) < \frac{x}{y} \Rightarrow y \cdot f(x,y) < y \cdot \frac{x}{y} = x \Rightarrow x \dot{-} (y \cdot f(x,y)) > 0 \Rightarrow \overline{sg}(x \dot{-} (y \cdot f(x,y)) = 0.$$

Iz leme 1.1.18 slijedi da je f rekurzivna funkcija pa se lako vidi da je i funkcija $(x,y) \mapsto \overline{sg}(x \dot{-} (y \cdot f(x,y))$ rekurzivna. Iz prethodno dokazanog imamo da je χ_D rekurzivna funkcija pa je D rekurzivan skup. □

Lema 1.1.20. *Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x) = \begin{cases} \text{najmanji } y > 1 \text{ takav da } y \mid x, x \geq 2 \\ 2, x < 2 \end{cases}$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Primjetimo da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$f(x) = \mu y((x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : y > 1 \text{ i } (y \mid x \text{ ili } y > x)\})$$

Neka je D skup iz leme 1.1.19 te neka su S_1 i S_2 skupovi dani sa $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : y > 1\}$ i $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : y > x\}$. Skup D rekurzivan je prema lemi 1.1.19, a vrijedi:

$$\chi_{S_1}(x,y) = sg(y \dot{-} 1)$$
$$\chi_{S_2}(x,y) = sg(y \dot{-} x),$$

pa su i S_1, S_2 rekurzivni skupovi. Iz propozicije 1.1.8 slijedi da je skup $S_1 \cap (D \cup S_2)$ rekurzivan. Nadalje, vrijedi

$$f(x) = \mu y((x,y) \in S_1 \cap (D \cup S_2))$$

pa iz propozicije 1.1.12 slijedi da je f rekurzivna funkcija. □

Teorem 1.1.21. *Neka je $\mathcal{P}$ skup svih prostih brojeva. Skup $\mathcal{P}$ je rekurzivan.*

Dokaz. Neka je f funkcija iz leme 1.1.20 Vrijedi:

$$x \in \mathcal{P} \iff f(x) = x.$$

Zaista, neka je $x \in \mathcal{P}$. Tada je $x \geq 2$ i ne postoji $y < x$ i $y > 1$ takav da $y \mid x$, a kako $x \mid x$ imamo $f(x) = x$.
Obratno, neka je $f(x) = x$. Iz same definicije od f slijedi da je u tom slučaju $x \geq 2$ i da je najmanji $y > 1$ takav da $y \mid x$ upravo x, što znači da je x prost broj odnosno $x \in \mathcal{P}$. Iz prethodnog vidimo da vrijedi:

$$\chi_{\mathcal{P}}(x) = \overline{sg}(|f(x) - x|), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}.$$

Iz leme 1.1.20 slijedi da je f rekurzivna funkcija pa se lako vidi da je funkcija $x \mapsto \overline{sg}(|f(x) - x|)$ rekurzivna, prema tome $\mathcal{P}$ je rekurzivan skup. □

Neka je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija koja prirodnom broju i pridružuje $(i+1)$-vi po redu prost broj. Dakle,

$$p(0) = 2, p(1) = 3, p(2) = 5, p(3) = 7, \ldots.$$

Vrijednost $p(i)$ kraće ćemo označavati sa p_i.

Propozicija 1.1.22. *p je rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : y \text{ je prost broj}\}$ te neka je $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : y > x\}$. Vrijedi:

$$\chi_{S_1}(x,y) = \chi_{\mathcal{P}}(y)$$

pa iz teorema 1.1.21 slijedi da je S_1 rekurzivan skup. Nadalje u dokazu leme 1.1.20 pokazano je da je S_2 rekurzivan skup. Sada iz propozicije 1.1.8 slijedi da je skup $S_1 \cap S_2$ rekurzivan. Definiramo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa $f(x) = \mu y((x,y) \in S_1 \cap S_2)$. Iz propozicije 1.1.12 slijedi da je ovako definirana funkcija f rekurzivna. Vrijedi:

$$p(0) = 2$$

$$p(y+1) = f(p(y)) = G(p(y), y)$$

pri čemu je $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija dana sa $G(x,y) = f(x)$. Iz činjenice da je f rekurzivna lako vidimo da je G rekurzivna funkcija. Sada iz propozicije 1.1.4 slijedi da je p rekurzivna funkcija. □

Definirajmo funkciju $e : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$e(x,i) = \begin{cases} \text{eksponent s kojim prost broj } p_i \text{ ulazi u rastav od } x \text{ na proste faktore}, x \geq 1 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Propozicija 1.1.23. *e je rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $x, i \in \mathbb{N}$. Za $x \geq 1$ vrijedi: $p_i^{e(x,i)} \mid x$ i $p_i^{e(x,i)+1} \nmid x$, prema tome $e(x,i)$ je najmanji prirodan broj y takav da $p_i^{y+1} \nmid x$ pa je $e(x,i)$ također najmanji prirodan broj y takav da $p_i^{y+1} \nmid x + \overline{sg}(x)$. Primjetimo da to vrijedi i za $x = 0$, stoga je

$$e(x,i) = \mu y((x,i,y) \in S))$$

gdje je $S = \{(x,i,y) \in \mathbb{N}^3 : p_i^{y+1} \nmid x + \overline{sg}(x)\}$. Prema propoziciji 1.1.12 dovoljno je dokazati da je S rekurzivan skup. Neka je D skup iz leme 1.1.19. Tvrdimo da vrijedi:

$$\chi_S(x,i,y) = \chi_{D^c}(p_i^{y+1}, x + \overline{sg}(x)).$$

Imamo $\chi_S(x,i,y) = 1 \iff (x,i,y) \in S \iff (p_i^{y+1}, x + \overline{sg}(x)) \notin D \iff (p_i^{y+1}, x + \overline{sg}(x)) \in D^c \iff \chi_{D^c}(p_i^{y+1}, x + \overline{sg}(x)) = 1$.
Lako se pokaže da je funkcija $(x,i,y) \mapsto \chi_{D^c}(p_i^{y+1}, x + \overline{sg}(x))$ rekurzivna pa je S rekurzivan skup. □

1.2 Rekurzivno prebrojivi skupovi

Neka su $n, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ funkcija. Tada vrijedi $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, pri čemu su $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f.
Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ kažemo da je **rekurzivna** ako su njene komponentne funkcije $f_1, \ldots, f_n$ rekurzivne.
Uočimo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ prebrojiv. Naime, označimo sa $S = \{f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \mid f \text{ je rekurzivna}\}$. Znamo da je S prebrojiv skup, a skup svih rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ je očito ekvipotentan kartezijevom produktu od n skupova S koji je također prebrojiv. Zaključujemo da rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ ima prebrojivo mnogo za sve $k, n \in \mathbb{N}$. Kako je prebrojiva unija prebrojivih skupova ponovno prebrojiv skup imamo da ukupno rekurzivnih funkcija ima prebrojivo mnogo.
Neka su $n, k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^l$ rekurzivne funkcije. Tvrdimo da je tada $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ rekurzivna funkcija.
Ako je $l = 1$ imamo da je $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x))$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ funkcija g_i je funkcija sa $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{N}$ i rekurzivna je po definiciji rekurzivnosti funkcije g. Sada Sada vidimo da je $f \circ g$ dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$ koje su rekurzivne, pa je i $f \circ g$ rekurzivna funkcija.
Pretpostavimo sada da je $l > 1$, u tom slučaju vrijedi:

$$(f \circ g)(x) = ((f_1 \circ g)(x), \ldots, (f_l \circ g)(x)), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, l\}$ funkcija f_i je funkcija sa $\mathbb{N}^n$ u $\mathbb{N}$, pa prema dokazanoj tvrdnji za $l = 1$ imamo da je funkcija $f_i \circ g$ rekurzivna. Kako su $f_i \circ g$ komponentne funkcije od $f \circ g$ imamo da je $f \circ g$ rekurzivna po definiciji.

Propozicija 1.2.1. *Neka su $k, n, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi takvi da vrijedi: $S_i \cap S_j = \emptyset$, za sve $i \neq j$ i $\bigcup_{i=1}^n S_i = \mathbb{N}^k$. Pretpostavimo još da su $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ rekurzivne funkcije.*
Tada je funkcija $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ definirana sa:

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in S_1 \\ f_2(x), x \in S_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x), x \in S_n \end{cases}$$

rekurzivna.

Dokaz. Označimo sa $F^1, F^2, \dots, F^l : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od F. Za $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ označimo sa $f_i^1, f_i^2, \dots, f_i^l$ komponentne funkcije od f_i. Tada za fiksan $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ imamo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$F^j(x) = \begin{cases} f_1^j(x), x \in S_1 \\ f_2^j(x), x \in S_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n^j(x), x \in S_n \end{cases}.$$

Sada iz propozicije 1.1.11 slijedi da je za svaki $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ funkcija F^j rekurzivna. Stoga je i funkcija F rekurzivna po definiciji. □

Propozicija 1.2.2. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivan skup. Tada je $f^{-1}(S)$ rekurzivan skup.*

Dokaz. Tvrdimo da vrijedi: $\chi_{f^{-1}(S)}(x) = \chi_S(f(x))$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Pretpostavimo prvo da je $x \in f^{-1}(S)$, to znači da je $f(x) \in S$ pa je tada

$$\chi_{f^{-1}(S)}(x) = 1 = \chi_S(f(x)).$$

S druge strane ako $x \notin f^{-1}(S)$ onda $f(x) \notin S$ pa vrijedi

$$\chi_{f^{-1}(S)}(x) = 0 = \chi_S(f(x)).$$

Funkcije χ_S i f su rekurzivne pa je i $\chi_S \circ f$ rekurzvina, a iz prehodnog imamo $\chi_{f^{-1}(S)} = \chi_S \circ f$ što znači da je $f^{-1}(S)$ rekurzivan skup. □

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je **rekurzivno prebrojiv** ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $S = f(\mathbb{N})$.

Propozicija 1.2.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivan skup. Tada je S rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Za $S = \emptyset$ tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana sa:

$$f(x) = (e(x, 1), \dots, e(x, k)), \text{za svaki } x \in \mathbb{N}^k,$$

gdje je e funkcija iz propozicije 1.1.23. Funkcija f je rekurzivna jer su joj komponentne funkcije rekurzivne. Tvrdimo da je f surjekcija.

Neka je $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ proizvoljan. Tada je očito $f(p_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{a_k}) = (a_1, \ldots, a_k)$, prema tome f je surjekcija. Neka je $s \in S$ proizvoljan. Definiramo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), x \in f^{-1}(S) \\ s, x \notin f^{-1}(S) \end{cases}.$$

Iz propozicija 1.2.2 i 1.1.11 slijedi da je g rekurzivna funkcija. Dokažimo da je $g(\mathbb{N}) = S$.
Neka je $y \in g(\mathbb{N})$, tada postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $g(x) = y$. Ako vrijedi $x \notin f^{-1}(S)$ imamo $y = g(x) = s$ pa je $y \in S$. Ako vrijedi $x \in f^{-1}(S)$ onda je po definiciji praslike $f(x) \in S$, a kako je $f(x) = y$ opet imamo $y \in S$. Dokazali smo $g(\mathbb{N}) \subseteq S$.
Neka je sada $y \in S$. Pokazali smo da je f surjekcija pa postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x) = y$. Za taj x vrijedi $x \in f^{-1}(S)$ pa imamo $g(x) = f(x) = y$ iz čega slijedi $y \in g(\mathbb{N})$. Dokazali smo $S \subseteq g(\mathbb{N})$.
Sve zajedno imamo $g(\mathbb{N}) = S$, prema tome dokazali smo da je g rekurzivna funkcija čija slika je skup S, dakle S je rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 1.2.4. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojiv. Tada je skup $f(S)$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Za $S = \emptyset$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo $S \neq \emptyset$, tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $S = g(\mathbb{N})$. Funkcija $f \circ g$ je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija i vrijedi $(f \circ g)(\mathbb{N}) = f(g(\mathbb{N})) = f(S)$, pa je skup $f(S)$ rekurzivno prebrojiv. □

Teorem 1.2.5 (Teorem o projekciji)**.** *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid$ postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in T\}$. Tada je S rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Definiramo funkciju $P : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k$ sa $P(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}) = (x_1, \ldots, x_k)$. Funkcija P je očito rekurzivna, tvrdimo da je $S = P(T)$. Neka je $x \in S$. Tada po definiciji skupa S postoji $y \in T$ takav da je $(x, y) \in T$ i vrijedi $P(x, y) = x$ što znači da je $x \in P(T)$. Dakle, vrijedi $S \subseteq P(T)$.
S druge strane neka je $x \in P(T)$. Tada postoji $z \in T$ takav da je $P(z) = x$. Neka je $z = (z_1, \ldots, z_{k+n})$ iz $P(z) = x$ slijedi da je $(z_1, \ldots, z_k) = x$. Definiramo $y = (z_{k+1}, \ldots, z_{k+n})$. Vrijedi $(x, y) = z \in T$ prema tome imamo $x \in S$. Dakle, vrijedi $P(T) \subseteq S$.
Dokazali smo $S = P(T)$, sada direktno iz propozicije 1.2.4 slijedi tvrdnja teorema. □

Lema 1.2.6. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$. Tada je skup S rekurzivan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $n = 1$. Tada imamo $\chi_S(x) = \overline{sg}(|f(x) - g(x)|$ iz čega slijedi da je χ_S rekurzivna funkcija pa je skup S rekurzivan.
Pretpostavimo sada $n > 1$. Označimo sa $f_1, \ldots, f_n$ komponentne funkcije od f te sa

$g_1, \ldots, g_n$ komponentne funkcije od g. Imamo da je $S = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in \mathbb{N}^k \mid f_i(x) = g_i(x)\}$, prema dokazanoj tvrdnji za $n = 1$ imamo da je za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ skup $\{x \in \mathbb{N}^k \mid f_i(x) = g_i(x)\}$ rekurzivan. Sada je S rekurzivan skup prema napomeni 1.1.9 kao konačan presjek rekurzivnih skupova. $\square$

Propozicija 1.2.7. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $S, T \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojivi. Tada su skupovi $S \cup T$ i $S \cap T$ rekurzvino prebrojivi.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ ili $T = \emptyset$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da je $S \neq$ i $T \neq \emptyset$. Tada postoje rekurzivne funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takve da je $S = f(\mathbb{N})$ i $T = g(\mathbb{N})$. Definiramo funkciju $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa

$$h(x) = \begin{cases} f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right), x \text{ paran} \\ g\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right), x \text{ neparan.} \end{cases}$$

Označimo sa $2\mathbb{N}$ skup parnih brojeva i sa $2\mathbb{N} + 1$ skup neparnih brojeva. Neka je D skup iz leme 1.1.19. Pokazali smo da je D rekurzivan skup, a vrijedi $\chi_{2\mathbb{N}}(x) = \chi_D(x, 2)$ pa je i $2\mathbb{N}$ rekurzivan skup. Nadalje, $2\mathbb{N} + 1$ je rekurzivan kao komplement skupa $2\mathbb{N}$. Sada iz propozicije 1.1.11 i leme 1.1.18 slijedi da je h rekurzivna funkcija. Lako se vidi da su funkcije $2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ i $2\mathbb{N} + 1 \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ surjekcije iz čega slijedi $h(\mathbb{N}) = f(\mathbb{N}) \cup g(\mathbb{N}) = S \cup T$ pa je $S \cup T$ rekurzivno prebrojiv.
Vrijedi:

$$x \in S \cap T \iff x \in S \text{ i } x \in T \iff \text{postoje } y, z \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } x = f(y) \text{ i } x = g(z).$$

Definiramo skup

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_k, y, z) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid (x_1, \ldots, x_k) = f(y) \text{ i } (x_1, .., x_k) = g(z)\}.$$

Primjetimo da jednakost $(x_1, \ldots, x_k) = f(y)$ možemo zapisati na sljedeći način $P(x_1, \ldots, x_k, y, z) = (f \circ I_{k+1}^{k+2})(x_1, \ldots, x_k, y, z)$ gdje je $P : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}^k$ funkcija dana sa: $P(x_1, \ldots, x_k, y, z) = (x_1, \ldots, x_k)$. Na sličan način mogli bismo zapisati i jednakost $(x_1, \ldots, x_k) = g(z)$. Sada iz leme 1.2.6 lako dobivamo da je Ω rekurzivan skup kao presjek dva rekurzivna skupa. Nadalje, iz prethodno pokazanih ekvivalencija imamo

$$x \in S \cap T \iff \text{postoje } y, z \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } (x, y, z) \in \Omega.$$

Iz teorema o projekciji sada slijedi da je $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv. $\square$

Propozicija 1.2.8. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija i $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv. Tada je skup $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja očito vrijedi. Ako je $S \neq \emptyset$ onda postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je $S = g(\mathbb{N})$. Neka je

$$T := \{(x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid f(x_1, \ldots, x_k) = g(y)\}$$

te neka je $P : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana sa: $P(x_1, \ldots, x_k, y) = (x_1, \ldots, x_k)$. Očito je P rekurzivna funkcija. Nadalje, vrijedi

$$T = \{z \in \mathbb{N}^{k+1} \mid (f \circ P)(z) = (g \circ I^{k+1}_{k+1})(z)\}.$$

Iz leme 1.2.6 sada slijedi da je T rekurzivan skup, a iz propozicije 1.2.3 slijedi da je i rekurzivno prebrojiv. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$ proizvoljan. Vrijedi:

$$x \in f^{-1}(S) \iff f(x) \in S \iff \text{postoji } y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } f(x) = g(y)$$

$$\iff \text{postoji } y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, y) \in T.$$

Zaključujemo, $f^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \text{ postoji } y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, y) \in T\}$. Kako je T rekurzivno prebrojiv, iz teorema o projekciji odmah slijedi da je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 1.2.9. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in S$. Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ takva da je $(x, \varphi(x)) \in S$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Očito je $S \neq \emptyset$, pa postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+n}$ takva da je $S = f(\mathbb{N})$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in S$, pa postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) = f(i)$. Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoje $y_1, \ldots, y_n, i \in \mathbb{N}$ takvi da je $(x, y_1, \ldots, y_n) = f(i)$. Definiramo $z = p_0^i \cdot p_1^{y_1} \cdot \cdots \cdot p_n^{y_n}$. Imamo da je $(x, e(z, 1), \ldots, e(z, n)) = f(e(z, 0))$, pri čemu je e funkcija iz propozicije 1.1.23. Pokazali smo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $z \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $(x, e(z, 1), \ldots, e(z, n)) = f(e(z, 0))$. Definiramo skup T na sljedeći način:

$$T = \{(x, z) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k, z \in \mathbb{N}, (x, e(z, 1), \ldots, e(z, n)) = f(e(z, 0))\}.$$

Iz propozicije 1.1.23 i leme 1.2.6 slijedi da je T rekurzivan skup. Iz dokazanog slijedi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $z \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, z) \in T$. Iz propozicije 1.1.12 sada slijedi da postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, g(x)) \in T$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Fiksirajmo $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo:

$$(x, g(x)) \in T \Rightarrow (x, e(g(x), 1), \ldots, e(g(x), n)) = f(e(g(x), 0)) \Rightarrow (x, e(g(x), 1), \ldots, e(g(x), n)) \in S.$$

Definiramo funkciju $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ sa $\varphi(x) = (e(g(x), 1), \ldots, e(g(x), n))$. Prema prethodnom vrijedi $(x, \varphi(x)) \in S$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, a lako se vidi da je funkcija φ rekurzivna. Prema tome dokazali smo tvrdnju propozicije. □

1.3 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ kažemo da je **rekurzivna** ako postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{b(x)} \cdot a(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Uočimo da rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ ima prebrojivo mnogo.
Pretpostavimo da je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Definiramo $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa $a(x) = f(x)$ i $b(x) = 0$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada su a i b rekurzivne funkcije i $f(x) = (-1)^{b(x)} \cdot a(x)$. Dakle, funkcija f je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.
Obratno, neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(\mathbb{N}^k) \subseteq \mathbb{N}$. Tvrdimo da je tada f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Imamo $f(x) = (-1)^{b(x)} \cdot a(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, gdje su $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Kako je $f(\mathbb{N}^k) \subseteq \mathbb{N}$ slijedi $f(x) = |f(x)| = a(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, pa je f rekurzivna funkcija i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Lema 1.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ funkcija. Tada je f rekurzivna funkcija ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = g(x) - h(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f rekurzivna funkcija. Tada je $f(x) = (-1)^{b(x)} \cdot a(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, gdje su $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ neke rekurzivne funkcije. Primjetimo da vrijedi sljedeće:

$$f(x) = \begin{cases} a(x), x \in b^{-1}(2\mathbb{N}) \\ -a(x), x \in \mathbb{N}^k \setminus b^{-1}(2\mathbb{N}). \end{cases} .$$

Prema tome, ako definiramo funkcije $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa:

$$g(x) = \begin{cases} a(x), x \in b^{-1}(2\mathbb{N}) \\ 0, x \in \mathbb{N}^k \setminus b^{-1}(2\mathbb{N}), \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, x \in b^{-1}(2\mathbb{N}) \\ a(x), x \in \mathbb{N}^k \setminus b^{-1}(2\mathbb{N}), \end{cases}$$

vrijedit će $f(x) = g(x) - h(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Lako se vidi da su funkcije g i h rekurzivne čime je dokazan prvi dio leme.
Obratno, pretpostavimo da postoje rekurzivne funkcije $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi $f(x) = g(x) - h(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada vrijedi:

$$f(x) = (-1)^{\overline{sg}(g(x) \dot{-} h(x))} \cdot |g(x) - h(x)|, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirane sa $a(x) = |g(x) - h(x)|$ i $b(x) = \overline{sg}(g(x) \dot{-} h(x))$ su rekurzivne i prema prethodnom vrijedi: $f(x) = (-1)^{b(x)} \cdot a(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, pa je f rekurzivna po definiciji. □

Propozicija 1.3.2. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada je $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Kako je f rekurzivna funkcija postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ vrijedi: $f(x) = (-1)^{b(x)} \cdot a(x)$. Imamo:

$$(f \circ g)(x) = (-1)^{(b \circ g)(x)} \cdot (a \circ g)(x), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Funkcije $a \circ g$ i $b \circ g$ su rekurzivne kao kompozicije rekurzivnih funkcija čija kodomena je $\mathbb{N}$, pa iz prethodnog slijedi da je $f \circ g$ rekurzivna. □

Propozicija 1.3.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $-f$, $|f|$, $f + g$, $f \cdot g$ rekurzivne.*

Dokaz. Kako su funkcije f i g rekurzivne postoje funkcije $a, b, c, d : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{b(x)} \cdot a(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i $g(x) = (-1)^{d(x)} \cdot c(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Vrijedi:

$$(-f)(x) = -f(x) = (-1)^{b(x)+1} \cdot a(x),$$

iz čega odmah slijedi da je $-f$ rekurzivna funkcija.
Nadalje, očito je $|f|(x) = |f(x)| = a(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, pa je funkcija $|f|$ rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ iz čega slijedi da je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.
Vrijedi:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (-1)^{b(x)} \cdot a(x) \cdot (-1)^{d(x)} \cdot c(x) = (-1)^{(b+d)(x)} \cdot (a \cdot c)(x), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Iz propozicije 1.1.6 slijedi da su funkcije $b + d$ i $a \cdot c$ rekurzivne, pa je $f \cdot g$ rekurzivna po definiciji.
Iz leme 1.3.1 slijedi da postoje rekurzivne funkcije $g_1, h_1, g_2, h_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = g_1(x) - h_1(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i $g(x) = g_2(x) - h_2(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) = g_1(x) - h_1(x) + g_2(x) - h_2(x) \\ &= (g_1 + g_2)(x) - (h_1 + h_2)(x), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.\end{aligned}$$

Iz propozicije 1.1.6 slijedi da su funkcije $g_1 + g_2$ i $h_1 + h_2$ rekurzivne, pa iz leme 1.3.1. slijedi da je funkcija $f + g$ rekurzivna.

□

1.4 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ kažemo da je **rekurzivna** ako postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Uočimo da rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ ima prebrojivo mnogo.
Pretpostavimo da je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija, tada postoje rekurzivne funkcije $a, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot a(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Definiramo funkciju $b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa $b(x) = 1$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Očito je funkcija b rekurzivna i vrijedi $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}$, prema tome funkcija f je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$.
Obratno, neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(\mathbb{N}^k) \subseteq \mathbb{Z}$. Tada postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $b(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}$. Iz $f(\mathbb{N}^k) \subseteq \mathbb{Z}$ i činjenice da je kodomena funkcija a i b jednaka $\mathbb{N}$ slijedi $\frac{a(x)}{b(x)} \in \mathbb{N}$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Dakle vrijedi: $\frac{a(x)}{b(x)} = \left\lfloor \frac{a(x)}{b(x)} \right\rfloor$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo:

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \left\lfloor \frac{a(x)}{b(x)} \right\rfloor, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Iz leme 1.1.18. sada slijedi da je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.

Propozicija 1.4.1. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada je $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Kako je f rekurzivna funkcija postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $b(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}$. Imamo:

$$(f \circ g)(x) = (-1)^{(c \circ g)(x)} \cdot \frac{(a \circ g)(x)}{(b \circ g)(x)}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Funkcije $a \circ g$, $b \circ g$ i $c \circ g$ su rekurzivne kao kompozicije rekurzivnih funkcija čija kodomena je $\mathbb{N}$ i vrijedi $(b \circ g)(x) \neq 0$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, pa iz prethodnog slijedi da je $f \circ g$ rekurzivna. □

Propozicija 1.4.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $-f$, $|f|$, $f + g$, $f \cdot g$ rekurzivne.*

Dokaz. Kako su f i g rekurzivne funkcije postoje rekurzivne funkcije $a, b, c, u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $b(x) \neq 0$, $v(x) \neq 0$, $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}$ i $g(x) = (-1)^{w(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}$. Imamo:

$$(-f)(x) = -f(x) = (-1)^{c(x)+1} \cdot \frac{a(x)}{b(x)},$$

iz čega slijedi da je $-f$ rekurzivna funkcija. Također vrijedi

$$|f|(x) = |f(x)| = \frac{a(x)}{b(x)} = (-1)^0 \cdot \frac{a(x)}{b(x)},$$

iz čega slijedi da je funkcija $|f|$ rekurzivna. Nadalje, vrijedi:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)} + (-1)^{w(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$= \frac{(-1)^{c(x)} \cdot a(x) \cdot v(x) + (-1)^{w(x)} \cdot u(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot v(x)}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Funkcije $x \mapsto (-1)^{c(x)} \cdot a(x) \cdot v(x)$ i $x \mapsto (-1)^{w(x)} \cdot u(x) \cdot b(x)$ su rekurzivne kao funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ pa iz propozicije 1.3.3 slijedi da je funkcija $x \mapsto (-1)^{c(x)} \cdot a(x) \cdot v(x) + (-1)^{w(x)} \cdot u(x) \cdot b(x)$ rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, iz čega slijedi da postoje rekurzivne funkcije $h, k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(-1)^{c(x)} \cdot a(x) \cdot v(x) + (-1)^{w(x)} \cdot u(x) \cdot b(x) = (-1)^{h(x)} \cdot k(x).$$

Imamo:

$$(f+g)(x) = (-1)^{h(x)} \cdot \frac{k(x)}{b(x) \cdot v(x)}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k,$$

iz čega slijedi da je $f + g$ rekurzivna funkcija.
Vrijedi:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)} \cdot (-1)^{w(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$= (-1)^{c(x)+w(x)} \cdot \frac{a(x) \cdot u(x)}{b(x) \cdot v(x)}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Dakle, $f \cdot g$ je rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.4.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija takva da je $f(x) \neq 0$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je funkcija $\frac{1}{f}$ rekurzivna.*

Dokaz. Funkcija f je rekurzivna, pa postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $b(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}$. Kako je $f(x) \neq 0$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ mora biti $a(x) \neq 0$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, pa vrijedi:

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}} = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{b(x)}{a(x)},$$

iz čega slijedi da je $\frac{1}{f}$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.4.4. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada su skupovi $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\}$, $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$ i $V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < 0\}$ rekurzivni.*

Dokaz. Funkcija f je rekurzivna, pa postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $b(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}$. Vrijedi:

$$f(x) = 0 \iff a(x) = 0, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k,$$

iz čega slijedi $S = f^{-1}(\{0\}) = a^{-1}(\{0\})$. Skup $\{0\}$ je rekurzivan prema propoziciji 1.1.10, a kako je a rekurzivna funkcija iz propozicije 1.2.2 slijedi da je $a^{-1}(\{0\})$ rekurzivan skup. Imamo $S = a^{-1}(\{0\})$, pa je S rekurzivan skup.
Nadalje, vrijedi:

$$f(x) > 0 \iff c(x) \in 2\mathbb{N} \text{ i } a(x) \neq 0, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k,$$

iz čega zaključujemo:

$$\chi_T(x) = \chi_{2\mathbb{N}}(c(x)) \cdot sg(a(x)), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Lako se vidi da je funkcija na desnoj strani jednakosti rekurzivna, pa je i χ_T rekurzivna funkcija, iz čega slijedi da je T rekurzivan skup. Konačno, uočimo da vrijedi $V = (S \cup T)^c$, pa iz propozicije 1.1.8 slijedi da je V rekurzivan skup. □

Korolar 1.4.5. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su skupovi $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$, $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > g(x)\}$ i $V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\}$ rekurzivni.*

Dokaz. Iz propozicije 1.4.2 slijedi da je funkcija $f - g$ rekurzivna, kako je $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\} = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) - g(x) = 0\}$ iz propozicije 1.4.4 slijedi da je S rekurzivan skup. Analogno se pokaže da su skupovi T i V rekurzivni. □

1.5 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ kažemo da je **rekurzivna** ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$|f(x) - F(x,l)| < 2^{-l}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k \text{ i za svaki } l \in \mathbb{N}.$$

Za funkciju F kažemo da je **rekurzivna aproksimacija** funkcije f.
Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija te neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija funkcije f. Uočimo da niz $F(x,l)_{l\in\mathbb{N}}$ teži prema $f(x)$ kad $l \to \infty$. Iz toga zaključujemo da dvije različite rekurzivne funkcije ne mogu imati iste rekurzivne aproksimacije. Kako je skup svih rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ prebrojiv zaključujemo da rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ ima prebrojivo mnogo.
Pretpostavimo da je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Definiramo funkciju $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $F(x,l) = f(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Iz propozicije 1.4.1. slijedi da je F rekurzivna funkcija i vrijedi:

$$|f(x) - F(x,l)| = |f(x) - f(x)| = 0 < 2^{-l}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k \text{ i za svaki } l \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, f je rekurzivna funkcija i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.
S druge strane može se pokazati da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ takva da je $f(\mathbb{N}^k) \subseteq \mathbb{Q}$, ali da f nije rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ ([9]).

Lema 1.5.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da postoje rekurzivne funkcije $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ i $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i da postoji $q \in \langle 0, 1\rangle$ takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi $|f(x) - F(x,l)| < H(x) \cdot q^l$. Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $q \leq \frac{a}{b} < 1$. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $l \in \mathbb{N}$ proizvoljni. Kako je $\frac{a}{b} < 1$ imamo da niz $((\frac{a}{b})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema 0, pa niz $H(x) \cdot ((\frac{a}{b})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ također teži prema 0. To znači da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $H(x) \cdot (\frac{a}{b})^n < \frac{1}{2^l}$. Dokazali smo sljedeće: za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$H(x) \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n < \frac{1}{2^l}.$$

Neka je $S = \{(x,l,n) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid H(x) \cdot (\frac{a}{b})^n < 2^{-l}\}$. Iz korolara 1.4.5 slijedi da je S rekurzivan skup, pa je i rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 1.2.3. Iz propozicije 1.2.9 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, l, \varphi(x,l)) \in S$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$H(x) \cdot q^{\varphi(x,l)} \leq H(x) \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\varphi(x,l)} < 2^{-l}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k \text{ i za svaki } l \in \mathbb{N}$$

Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $G(x, l) = F(x, \varphi(x, l))$. Funkcija G je očito rekurzivna te za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$|f(x) - G(x, l)| = |f(x) - F(x, \varphi(x, l))| < H(x) \cdot q^{\varphi(x,l)} < 2^{-l}.$$

Prema tome, G je rekurzivna aproksimacija funkcije f, čime je dokazano da je f rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.5.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija. Pretpostavimo da postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrjedi $|f(x) - F(x, l)| < 2^{-l}$. Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $F' : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija funkcije F. Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $G(x, l) = F'(x, l, l)$. Imamo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$|f(x) - G(x, l)| = |f(x) - F'(x, l, l)| \leq |f(x) - F(x, l)| + |F(x, l) - F'(x, l, l)|$$

$$< 2^{-l} + 2^{-l} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^l.$$

Sada iz leme 1.5.1 slijedi da je f rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.5.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi $|f(x)| < H(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Imamo:

$$|f(x) - F(x, 0)| < 2^{-0} = 1, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k,$$

iz čega slijedi:

$$|f(x)| < |F(x, 0)| + 1, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Funkcija $x \mapsto |F(x, 0)| + 1$ je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, pa postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$ i $|F(x, 0) + 1| = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Konačno, vrijedi:

$$|f(x)| < |F(x, 0)| + 1 = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)} \leq \frac{a(x)}{b(x)} \leq a(x), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Pri tome zadnja nejednakost vrijedi jer je $b(x) \geq 1$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Ovime je dokazana tvrdnja propozicije, tražena funkcija H je upravo funkcija a. □

Propozicija 1.5.4. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $-f$, $|f|$, $f + g$, $f \cdot g$ rekurzivne.*

Dokaz. Neka su $F, G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ redom rekurzivne aproksimacije funkcija f i g. Vrijedi:

$$|-f(x) - (-F(x,l))| = |f(x) - F(x,l)| < 2^{-l}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k \text{ i za svaki } l \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije 1.4.2 slijedi da je $-F$ rekurzivna funkcija, a iz prethodnog slijedi da je $-F$ rekurzivna aproksimacija funkcije $-f$. Dakle, $-f$ je rekurzivna funkcija. Nadalje, vrijedi

$$||f(x)| - |F(x,l)|| \leq |f(x) - F(x,l)| < 2^{-l}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k \text{ i za svaki } l \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije 1.4.2 slijedi da je $|F|$ rekurzivna funkcija, a iz prethodnog slijedi da je $|F|$ rekurzivna aproksimacija od $|f|$. Dakle, $|f|$ je rekurzivna funkcija.
Također, imamo

$$|(f(x) + g(x)) - (F(x,l) + G(x,l))| = |(f(x) - F(x,l)) + (g(x) - G(x,l))|$$

$$\leq |f(x) - F(x,l)| + |g(x) - G(x,l)| < 2^{-l} + 2^{-l} < 2 \cdot 2^{-l}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k \text{ i za svaki } l \in \mathbb{N}.$$

Funkcija $F + G$ je rekurzivna prema propoziciji 1.4.2, pa iz leme 1.5.1 slijedi da je funkcija $f + g$ rekurzivna.
Za umnožak primjetimo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) \cdot g(x) - (F(x,l) \cdot G(x,l))| = |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot G(x,l) + f(x) \cdot G(x,l) - F(x,l) \cdot G(x,l)|$$

$$\begin{aligned}
&= |f(x) \cdot (g(x) - G(x,l)) + G(x,l) \cdot (f(x) - F(x,l))| \\
&\leq |f(x) \cdot (g(x) - G(x,l))| + |G(x,l) \cdot (f(x) - F(x,l))| \\
&\leq |f(x)| \cdot 2^{-l} + |G(x,l)| \cdot 2^{-l} = (|f(x)| + |G(x,l)|) \cdot 2^{-l}.
\end{aligned}$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ imamo

$$|f(x) \cdot g(x) - (F(x,l) \cdot G(x,l))| \leq (|f(x)| + |G(x,l)|) \cdot 2^{-l}.$$

Također, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ prema definiciji rekurzivne aproksimacije vrijedi:

$$|g(x) - G(x,l)| < 2^{-l} \leq 1,$$

iz čega slijedi:

$$|G(x,l)| \leq 1 + |g(x)|.$$

Sada imamo:

$$|f(x) \cdot g(x) - (F(x,l) \cdot G(x,l))| \leq (|f(x)| + |G(x,l)|) \cdot 2^{-l}$$

$$\leq (|f(x)| + |g(x)| + 1) \cdot 2^{-l}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k \text{ i za svaki } l \in \mathbb{N}.$$

Funkcija $x \mapsto |f(x)| + |g(x)| + 1$ je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ prema prethodno dokazanim tvrdnjama. Prema propoziciji 1.5.3 postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $|f(x)| + |g(x)| + 1 < H(x)$. Konačno, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ imamo:

$$|f(x) \cdot g(x) - (F(x,l) \cdot G(x,l))| \leq (|f(x)| + |g(x)| + 1) \cdot 2^{-l} < H(x) \cdot 2^{-l}.$$

Funkcija $F \cdot G$ je rekurzivna prema propoziciji 1.4.2 pa iz leme 1.5.1 slijedi da je funkcija $f \cdot g$ rekurzivna. □

Propozicija 1.5.5. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da vrijedi $f(x) \neq 0$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je funkcija $\frac{1}{f}$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija funkcije f. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$ proizvoljan. Iz same definicje rekurzivne aproksimacije jasno je da niz $(F(x,l))_{l \in \mathbb{N}}$ teži prema $f(x)$ pa kada bi za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijedilo $|F(x,l)| \leq \frac{3}{2^l}$ imali bismo $f(x) = 0$, što je suprotno pretpostavci propozicije.
Zaključujemo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $|F(x,l)| > \frac{3}{2^l}$. Neka je

$$S = \left\{(x,l) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k, l \in \mathbb{N}, |F(x,l)| > \frac{3}{2^l}\right\}.$$

Skup S je rekurzivan prema korolaru 1.4.5, a samim time i rekurzivno prebrojiv. Dokazali smo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $(x,l) \in S$, pa prema propoziciji 1.2.9 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, \varphi(x)) \in S$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$, jer je $(x, \varphi(x)) \in S$ imamo:

$$\frac{3}{2^{\varphi(x)}} < |F(x, \varphi(x))|.$$

Također, vrijedi:

$$|F(x, \varphi(x))| - |f(x)| \leq |F(x, \varphi(x)) - f(x)| < 2^{-\varphi(x)}.$$

Iz čega slijedi $|F(x, \varphi(x))| < 2^{-\varphi(x)} + |f(x)|$, pa imamo:

$$\frac{3}{2^{\varphi(x)}} < |F(x, \varphi(x))| < 2^{-\varphi(x)} + |f(x)| \Rightarrow |f(x)| > \frac{2}{2^{\varphi(x)}}.$$

Sada za proizvoljni $l \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$|f(x)| - |F(x, l + \varphi(x))| \leq |f(x) - F(x, l + \varphi(x))| < 2^{-(l+\varphi(x))} \leq 2^{-\varphi(x)}.$$

To povlači:

$$|F(x, l + \varphi(x))| > |f(x)| - 2^{-\varphi(x)} > \frac{2}{2^{\varphi(x)}} - 2^{-\varphi(x)} = \frac{1}{2^{\varphi(x)}}.$$

Dakle, vrijedi:

$$|F(x, l + \varphi(x))| > \frac{1}{2^{\varphi(x)}}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k \text{ i za svaki } l \in \mathbb{N}.$$

Posebno, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi $F(x, l + \varphi(x)) \neq 0$, pa imamo:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F(x, l + \varphi(x))}\right| = \left|\frac{F(x, l + \varphi(x)) - f(x)}{f(x) \cdot F(x, l + \varphi(x))}\right| < 2^{\varphi(x)} \cdot 2^{-l}.$$

Funkcija $(x, l) \mapsto \frac{1}{F(x, l + \varphi(x))}$ rekurzivna je prema propoziciji 1.4.3 pa iz leme 1.5.1 slijedi da je $\frac{1}{f}$ rekurzivna funkcija.

□

Propozicija 1.5.6. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je skup $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija funkcije f. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$ proizvoljan. Ako je $f(x) > 0$ tada postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x) > 2 \cdot 2^{-l}$, pa imamo

$$f(x) - F(x, l) \leq |f(x) - F(x, l)| < 2^{-l},$$

iz čega slijedi

$$F(x, l) > f(x) - 2^{-l} > 2 \cdot 2^{-l} - 2^{-l} = 2^{-l}.$$

Dakle, imamo $F(x, l) > 2^{-l}$. S druge strane, pretpostavimo da postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $F(x, l) > 2^{-l}$. Tada je $F(x, l) - 2^{-l} > 0$. Iz $|f(x) - F(x, l)| < 2^{-l}$ slijedi

$$f(x) > F(x, l) - 2^{-l} > 0.$$

Dakle, $f(x) > 0$. Dokazali smo da je $f(x) > 0$ ako i samo ako postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $F(x, l) > 2^{-l}$. Definiramo

$$S' = \{(x, l) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k, l \in \mathbb{N}, F(x, l) > 2^{-l}\}.$$

Skup S' je rekurzivan prema korolaru 1.4.5 pa je i rekurzivno prebrojiv. Imamo da je $x \in S$ ako i samo ako je $f(x) > 0$ što vrijedi ako i samo ako postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, l) \in S$ pa tvrdnja propozicije slijedi iz teorema o projekciji. □

Lema 1.5.7. *Neka su $u, \epsilon \in \mathbb{R}$ takvi da je $u > 0$ i $\epsilon > 0$. Tada postoji $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ takav da je $r < u < r + \epsilon$.*

Dokaz. Skup $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$, pa postoji $r \in \mathbb{Q} \cap \langle \max\{u - \epsilon, 0\}, u\rangle$. Za taj r vrijedi $r \in \mathbb{Q}$ te $r < u$. Također vrijedi $r > 0$ i $r > u - \epsilon$ iz čega slijedi $u < r + \epsilon$, čime je dokazana tvrdnja leme. □

Propozicija 1.5.8. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je funkcija $\sqrt{f}$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa $q(i) = \frac{e(i,0)}{e(i,1)+1}$, pri čemu je e funkcija iz propozicije 1.1.23. Iz propozicije 1.4.3 slijedi da je q rekurzivna funkcija, a lako se vidi da je $q(\mathbb{N}) = \mathbb{Q} \cap [0, +\infty\rangle$. Naime, očito je $q(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Q} \cap [0, +\infty\rangle$. S druge strane, neka je $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \cap [0, +\infty\rangle$. Tada je $q(2^a \cdot 3^{b-1}) = \frac{a}{b}$, pa je $\mathbb{Q} \cap [0, +\infty\rangle \subseteq q(\mathbb{N})$. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $l \in \mathbb{N}$ proizvoljni. Ako je $f(x) > 0$ tada prema lemi 1.5.7 postoji $r \in \mathbb{Q} \cap [0, +\infty\rangle$ takav da je $r < \sqrt{f(x)} < r + 2^{-l}$, a prema dokazanom postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $q(i) = r$. Dakle, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $q(i) < \sqrt{f(x)} < q(i) + 2^{-l}$, odnosno $q(i)^2 < f(x) < (q(i) + 2^{-l})^2$. Ako je $f(x) = 0$ tada jer je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$ postoji $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $0 = \sqrt{f(x)} < r < 2^{-l}$, odnosno $f(x) < r^2 < (2^{-l})^2$. Sada na isti način kao prije zaključujemo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x) < q(i)^2 < (2^{-l})^2$. Dokazali smo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$q(i)^2 < f(x) < (q(i) + 2^{-l})^2 \text{ ili } f(x) < q(i)^2 < (2^{-l})^2.$$

Definiramo skupove

$$S = \left\{(x, l, i) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid q(i)^2 < f(x) < (q(i) + 2^{-l})^2\right\},$$

$$T = \left\{(x, l, i) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid f(x) < q(i)^2 < (2^{-l})^2\right\}.$$

Iz propozicije 1.5.6 slijedi da su skupovi S i T rekurzivno prebrojivi pa je prema propoziciji 1.2.7 skup $S \cup T$ rekurzivno prebrojiv. Prema dokazanom za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, l, i) \in S \cup T$. Prema propoziciji 1.2.9 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, l, \varphi(x, l)) \in S \cup T$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$. Ako je $(x, l, \varphi(x, l)) \in S$ tada imamo

$$q(\varphi(x, l))^2 < f(x) < (q(\varphi(x, l)) + 2^{-l})^2 \Rightarrow q(\varphi(x, l)) < \sqrt{f(x)} < q(\varphi(x, l)) + 2^{-l}$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{f(x)} - q(\varphi(x, l))\right| < 2^{-l}.$$

S druge strane, ako je $(x, l, \varphi(x, l)) \in T$ imamo

$$f(x) < (q(\varphi(x, l)))^2 < (2^{-l})^2 \Rightarrow \sqrt{f(x)} < q(\varphi(x, l)) < 2^{-l}$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{f(x)} - q(\varphi(x, l))\right| = q(\varphi(x, l)) - \sqrt{f(x)} \leq q(\varphi(x, l)) < 2^{-l}.$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\left| \sqrt{f(x)} - q(\varphi(x, l)) \right| < 2^{-l}.$$

Prema propoziciji 1.4.1 funkcija $q \circ \varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna, pa je prema prethodno dokazanom $\sqrt{f}$ rekurzivna funkcija. □

1.6 Rekurzivne i rekurzivno omeđene funkcije

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je **rekurzivna** ako je funkcija $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ definirana sa $\overline{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $y \in \mathbb{N}^n$, rekurzivna. Uočimo, funkcija $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ je rekurzivna ako i samo ako je skup $\{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid x \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N}^n, y \in \Phi(x)\}$ rekurzivan.
Neka je $m \in \mathbb{N}$. Skup $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_i \leq m,$ za svaki $i \in \{1, \dots n\}\}$ označavamo sa $\mathbb{N}^n_m$.
Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je **rekurzivno omeđena** ako postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Za funkciju φ kažemo da je **rekurzivna međa** za Φ.
Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ koja je rekurzivna i rekurzivno omeđena kažemo da je **r.r.o. funkcija**.

Propozicija 1.6.1. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Tada su funkcije $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$, definirane sa*

$$\Psi_1(x) = \Phi_1(x) \cup \Phi_2(x), \Psi_2(x) = \Phi_1(x) \cap \Phi_2(x), \Psi_3(x) = \Phi_1(x) \setminus \Phi_2(x), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k,$$

r.r.o. funkcije.

Dokaz. Neka su $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne međe za Φ_1 i Φ_2. Tada vrijedi

$$\Phi_1(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi_1(x)} \text{ i } \Phi_2(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi_2(x)}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Neka je $\psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $\psi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo da je ψ rekurzivna funkcija i očito vrijedi

$$\mathbb{N}^n_{\varphi_1(x)} \cup \mathbb{N}^n_{\varphi_2(x)} \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)} = \mathbb{N}^n_{\psi(x)}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Također, imamo

$$\Psi_2(x) \subseteq \Psi_1(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi_1(x)} \cup \mathbb{N}^n_{\varphi_2(x)}, \Psi_3(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi_1(x)} \cup \mathbb{N}^n_{\varphi_2(x)}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Stoga je ψ rekurzivna međa za Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 pa su to rekurzivno omeđene funkcije. Preostalo je dokazati da su $\overline{\Psi_1}, \overline{\Psi_2}, \overline{\Psi_3}$ rekurzivne funkcije. Dokažimo da je $\overline{\Psi_1}$ rekurzivna, za ostale funkcije je dokaz posve analogan. Već smo komentirali da je $\overline{\Psi_1}$ rekurzivna ako i samo ako je skup $\{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid x \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N}^n, y \in \Psi_1(x)\}$ rekurzivan. Kako su Φ_1, Φ_2 r.r.o funkcije skupovi

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid x \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N}^n, y \in \Phi_1(x)\},$$

$$T := \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid x \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N}^n, y \in \Phi_2(x)\}$$

su rekurzivni. Tvrdnja sada slijedi iz skupovne jednakosti

$$\{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid x \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N}^n, y \in \Psi_1(x)\} = S \cup T$$

i propozicije 1.1.8. $\square$

Propozicija 1.6.2. *Neka su $k, n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $\Phi_1 : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Phi_2 : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Tada je funkcija $\Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^{n+m})$, definirana sa*

$$\Psi(x) = \Phi_1(x) \times \Phi_2(x), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k,$$

r.r.o. funkcija.

Dokaz. Neka su $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne međe za Φ_1 i Φ_2. Tada je očito $\varphi_1 + \varphi_2$ rekurzivna međa za Ψ, prema tome Ψ je rekurzivno omeđena funkcija. Tvrdimo da za sve $x \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N}^n, z \in \mathbb{N}^m$ vrijedi

$$\overline{\Psi}(x, y, z) = \overline{\Phi_1}(x, y) \cdot \overline{\Phi_2}(x, z).$$

Naime, pretpostavimo da je $\overline{\Psi}(x, y, z) = 1$. Tada je $(y, z) \in \Psi(x) = \Phi_1(x) \times \Phi_2(x)$, odnosno $y \in \Phi_1(x)$ i $z \in \Phi_2(x)$. Stoga je $\overline{\Phi_1}(x, y) \cdot \overline{\Phi_2}(x, z) = 1 \cdot 1 = 1$. S druge strane, ako je $\overline{\Psi}(x, y, z) = 0$ onda vrijedi $y \notin \Phi_1(x)$ ili $z \notin \Phi_2(x)$ pa ponovno vrijedi gornja jednakost. Sada iz propozicije 1.1.6 slijedi da je $\overline{\Psi}$ rekurzivna funkcija $\square$

Lema 1.6.3. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada postoje rekurzivne funkcije $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ i $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $\mathbb{N}^n_m \subseteq \{g(i) \mid i \in \{0, \ldots, h(m)\}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Definiramo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ sa

$$g(i) = (e(i, 0) \dot{-} 1, \ldots, e(i, n - 1) \dot{-} 1), \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(m) = p_0^{m+1} \cdot \cdots \cdot p_{n-1}^{m+1}.$$

Tvrdimo da su ovako definirane funkcije g i h tražene funkcije.
Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan te neka je $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n_m$.
Tada vrijedi $p_0^{x_1+1} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{x_n+1} \leq p_0^{m+1} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{m+1} = h(m)$ i imamo $g(p_0^{x_1+1} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{x_n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$. Dakle, vrijedi $(x_1, \dots, x_n) \in \{g(i) \mid i \in \{0, \dots, h(m)\}$ čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Teorem 1.6.4. *Neka su $k, n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Tada je funkcija $\Gamma : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$, definirana sa*

$$\Gamma(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k,$$

r.r.o. funkcija.

Dokaz. Neka su $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $\psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne međe za Φ i Ψ te neka su $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ i $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije iz leme 1.6.3 Imamo

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{g(i) \mid i \in \{0, \dots, h(\varphi(x))\}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

iz čega slijedi

$$\Gamma(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y) \subseteq \bigcup_{i=0}^{h(\varphi(x))} \Psi(g(i)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{h(\varphi(x))} \mathbb{N}^m_{\psi(g(i))}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Definiramo funkciju $\gamma : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa $\gamma(x) = \sum_{i=0}^{h(\varphi(x))} \psi(g(i))$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Funkcija γ je rekurzivna prema propoziciji 1.1.15 te vrijedi

$$\Gamma(x) \subseteq \bigcup_{i=0}^{h(\varphi(x))} \mathbb{N}^m_{\psi(g(i))} \subseteq \mathbb{N}^m_{\gamma(x)}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Stoga je Γ rekurzivno omeđena funkcija.
Pretpostavimo da su $x \in \mathbb{N}^k$ i $z \in \mathbb{N}^m$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} z \in \Gamma(x) &\iff \text{postoji } y \in \Phi(x) \text{ takav da je } z \in \Psi(y) \\ &\iff \text{postoji } i \in \{0, \dots, h(\varphi(x))\} \text{ takav da je } z \in \Psi(g(i)) \text{ i } g(i) \in \Phi(x) \\ &\iff \sum_{i=0}^{h(\varphi(x))} \overline{\Psi}(g(i), z) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i)) > 0, \end{aligned}$$

što povlači

$$\overline{\Gamma}(x, z) = \operatorname{sg}\left(\sum_{i=0}^{h(\varphi(x))} \overline{\Psi}(g(i), z) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i)) \right).$$

Lako se vidi da je funkcija $(x, z) \mapsto \operatorname{sg}\left(\sum_{i=0}^{h(\varphi(x))} \overline{\Psi}(g(i), z) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i))\right)$ rekurzivna pa je $\overline{\Gamma}$ također rekurzivna funkcija. $\square$

Korolar 1.6.5. *Neka su $k, n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nadalje, neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija te neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ rekurzivna funkcija. Tada je funkcija $f(\Phi) : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$, definirana sa $f(\Phi)(x) = f(\Phi(x))$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, r.r.o. funkcija.*

Dokaz. Neka je $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ funkcija definirana sa $\Psi(x) = \{f(x)\}$, za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Tada je Ψ r.r.o. funkcija. Naime, neka su $f_1, \dots, f_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ komponetne funkcije od f. Tada očito vrijedi

$$\Psi(x) = \{f(x)\} \subseteq \mathbb{N}^m_{f_1(x)+\cdots+f_m(x)}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^n.$$

Zaključujemo, funkcija Ψ je rekurzivno omeđena.
Nadalje, za sve $x \in \mathbb{N}^n$ i $z \in \mathbb{N}^m$ vrijedi $z \in \Psi(x)$ ako i samo ako je $z = f(x)$. Neka je

$$\Omega := \{(x, z) \in \mathbb{N}^k \mid z = f(x)\}.$$

Imamo da je Ω rekurzivan skup, a prema prethodnom vrijedi $\overline{\Psi}(x, z) = \overline{\mathrm{sg}}(\chi_\Omega(x, z))$, iz čega slijedi da je Ψ rekurzivna funkcija. Dakle, Ψ je r.r.o. funkcija. Nadalje, imamo

$$f(\Phi)(x) = f(\Phi(x)) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Sada iz prethodnog teorema slijedi tvrdnja korolara. $\square$

Propozicija 1.6.6. *Neka su $k, n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nadalje, neka je $\Phi : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcija te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Tada je $\Phi \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcija.*

Dokaz. Neka je $\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivna međa za Φ. Budući da je $(\Phi \circ f)(x) = \Phi(f(x)) \subseteq \mathbb{N}^m_{\varphi(f(x))}$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, imamo da je $\Phi \circ f$ rekurzivno omeđena. Nadalje, lako se vidi da za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $z \in \mathbb{N}^m$ vrijedi $\overline{\Phi \circ f}(x, z) = \overline{\Phi}(f(x), z)$ pa je $\Phi \circ f$ r.r.o. funkcija. $\square$

Propozicija 1.6.7. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija. Tada je skup $S := \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \emptyset\}$ rekurzivan.*

Dokaz. Neka je $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna međa za Φ te neka su $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ i $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije iz leme 1.6.3. Tada vrijedi

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{g(i) \mid i \in \{0, \dots, h(\varphi(x))\}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Stoga, vrijedi

$$x \in S \iff \Phi(x) = \emptyset \iff g(i) \notin \Phi(x), \text{ za svaki } i \in \{0, \dots, h(\varphi(x))\}$$

$$\iff \sum_{i=0}^{h(\varphi(x))} \overline{\Phi}(x, g(i)) = 0.$$

Zaključujemo,

$$\chi_S(x) = \overline{\mathrm{sg}}\left(\sum_{i=0}^{h(\varphi(x))} \overline{\Phi}(x, g(i))\right), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Dakle, funkcija χ_S je rekurzivna pa je S rekurzivan skup. □

Korolar 1.6.8. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Tada su skupovi $S := \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi_1(x) \subseteq \Phi_2(x)\}$ i $T := \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi_1(x) = \Phi_2(x)\}$ rekurzivni.*

Dokaz. Uočimo da vrijedi

$$S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi_1(x) \setminus \Phi_2(x) = \emptyset\}$$

i

$$T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi_1(x) \setminus \Phi_2(x) = \emptyset\} \cap \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi_2(x) \setminus \Phi_1(x) = \emptyset\}.$$

Sada tvrdnja korolara slijedi iz propozicije 1.6.1, propozicije 1.6.7 i propozicije 1.1.8. □

Propozicija 1.6.9. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funckija i $T \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv skup. Tada je skup $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq T\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Ako je $T = \emptyset$ tvrdnja slijedi direktno iz propozicije 1.6.7.
Pretpostavimo da je $T \neq \emptyset$. Budući da je T rekurzivno prebrojiv skup postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je $f(\mathbb{N}) = T$. Neka je $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ funkcija definirana sa

$$\Psi(i) = \{f(0), \ldots, f(i)\}, \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da je $\Psi = f(\Psi')$, gdje je $\Psi' : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija dana sa $\Psi'(i) = \{0, \ldots, i\}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Lako se pokaže da je Ψ' r.r.o. funkcija. Prema korolaru 1.6.5 imamo da je Ψ r.r.o. funkcija te očito vrijedi $T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Psi(i)$. Definiramo skup

$$\Omega := \{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}, \Phi(x) \subseteq \Psi(i)\}.$$

Skup Ω je rekurzivan prema korolaru 1.6.8. Nadalje, tvrdimo da vrijedi $x \in S$ ako i samo ako postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, i) \in \Omega$. Neka je $x \in S$, tada je $\Phi(x) \subseteq T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Psi(i)$. Budući da je $\Psi(i) \subseteq \Psi(i+1)$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ te kako je $\Phi(x)$ konačan skup postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $\Phi(x) \subseteq \Psi(i)$. Odnosno, imamo $(x, i) \in \Omega$. S druge strane, ako je $(x, i) \in \Omega$ imamo da je

$$\Phi(x) \subseteq \Psi(i) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Psi(i) = T.$$

Odnosno, $x \in S$. Tvrdnja propozicije sada slijedi iz teorema o projekciji. □

Neka su $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane na sljedeći način:

$$\sigma(i,j) = e(i,j)\dot{-}1, \text{ za sve } i,j \in \mathbb{N},$$

$$\eta(i) = \mu_k(p_{k+1} \nmid i \text{ ili } i = 0), \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Lako se vidi da su σ i η rekurzivne funkcije. Tvrdimo da je $\{(\sigma(i,0),\dots,\sigma(i,\eta(i)) \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih konačnih nizova u $\mathbb{N}$. Naime, očito je svaki element tog skupa neki konačan niz u $\mathbb{N}$. Obratno, neka je $n \in \mathbb{N}$ i $(a_0,\dots,a_n)$ konačan niz u $\mathbb{N}$. Stavimo $i := p_0^{a_0+1} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n+1}$. Tada je $\eta(i) = n$ te za svaki $j \in \{0,\dots,n\}$ vrijedi $\sigma(i,j) = a_j + 1\dot{-}1 = a_j$. Dakle, $(\sigma(i,0),\dots,\sigma(i,\eta(i))) = (a_0,\dots,a_n)$. Neka su odsad pa nadalje $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fiksirane rekurzivne funkcije takve da je $\{(\sigma(i,0),\dots,\sigma(i,\eta(i)) \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih konačnih nizova u $\mathbb{N}$. Umjesto $\sigma(i,j)$ pisat ćemo $(i)_j$, a umjesto $\eta(i)$ pišemo $\bar{i}$.
Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$[i] = \{(i)_0, \dots (i)_{\bar{i}}\}.$$

Uočimo da je $\{[i] \mid i \in \mathbb{N}\}$ familija svih konačnih nepraznih podskupova od $\mathbb{N}$.

Primjer 1.6.10. *Neka je $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa $\Psi(i) = [i]$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je Ψ r.r.o. funkcija. Naime, uočimo da za $i \in \mathbb{N}$ imamo*

$$\Psi(i) = [i] = \{(i)_0,\dots,(i)_{\bar{i}}\} = \sigma(\{(i,0),\dots,(i,\eta(i))\} = \sigma(\{i\} \times \{0,\dots,\eta(i)\}).$$

Lako se pokaže da su $i \mapsto \{i\}$, $i \mapsto \{0,\dots,\eta(i)\}$ r.r.o. funkcije. Stoga je, prema propoziciji 1.6.2 i korolaru 1.6.5, Ψ r.r.o. funkcija.

Propozicija 1.6.11. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ r.r.o. funkcija takva da je $\Phi(x) \neq \emptyset$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(x) = [f(x)]$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Definiramo skup $\Omega := \{(x,i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}, \Phi(x) = [i]\}$. Korolar 1.6.8 i primjer 1.6.10 povlače da je Ω rekurzivan skup, posebno Ω je rekurzivno prebrojiv. Nadalje, za $x \in \mathbb{N}^k$ imamo da je $\Phi(x)$ konačan podskup od $\mathbb{N}$, a prema pretpostavci propozicije imamo i da je $\Phi(x) \neq \emptyset$. Stoga, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\Phi(x) = [i]$, odnosno $(x,i) \in \Omega$. Tvrdnja propozicije sada slijedi iz propozicije 1.2.9. □

Dokaz sljedeće dvije leme može se pronaći u [9]. Za dokaz sljedeće propozicije trebati će nam samo jedna, ali kasnije ćemo trebati i drugu. Tvrdnje su slične prirode pa odmah navodimo i jednu i drugu.

Lema 1.6.12. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Neka su $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcije definirane sa*

$$g(x) = \min_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i,x), h(x) = \max_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i,x), \text{ za sve } i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}^k.$$

Tada su g i h rekurzivne funkcije.

Lema 1.6.13. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Neka su $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa*

$$g(x) = \min_{0 \leq i \leq \alpha(x)} f(i, x), h(x) = \max_{0 \leq i \leq \alpha(x)} f(i, x), \text{ za sve } i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}^k.$$

Tada su g i h rekurzivne funkcije.

Propozicija 1.6.14. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija te neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada postoje rekurzivne funkcije $\varphi, \psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ sa svojstvom $\Phi(x) \neq \emptyset$ vrijedi*

$$\varphi(x) = \min_{y \in \Phi(x)} f(y), \psi(x) = \max_{y \in \Phi(x)} f(y).$$

Dokaz. Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna surjekcija. Na primjer možemo staviti $\alpha(i) = (e(i, 0), \ldots e(i, n))$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $\Gamma : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ funkcija definirana sa $\Gamma(i) = \alpha([i])$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Funkcija Γ je r.r.o. prema korolaru 1.6.5 te vrijedi da je $\{\Gamma(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ familija svih nepraznih konačnih podskupova od $\mathbb{N}^n$. Neka je

$$\Omega := \{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid \Phi(x) = \Gamma(i) \text{ ili } \Phi(x) = \emptyset\}.$$

Prema propoziciji 1.6.7 i korolaru 1.6.8 imamo da je Ω unija dva rekurzivna skupa pa je rekurzivan, a samim time i rekurzivno prebrojiv. Propozicija 1.2.9 povlači da postoji rekurzivna funkcija $\lambda : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, \lambda(x)) \in \Omega$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ takav da je $\Phi(x) \neq \emptyset$ vrijedi $\Phi(x) = \Gamma(\lambda(x))$. Definiramo $\varphi, \psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ sa

$$\varphi(x) = \min_{0 \leq j \leq \overline{\lambda(x)}} f(\alpha((\lambda(x))_j)), \psi(x) = \min_{0 \leq j \leq \overline{\lambda(x)}} f(\alpha((\lambda(x))_j)), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}^k.$$

Koristeći lemu 1.6.13 lako dobivamo da su φ i ψ rekurzivne funkcije, a lako se vidi da ovako definirane funkcije zadovoljavaju tražena svojstva. □

Poglavlje 2

Izračunljivost na metričkim prostorima

2.1 Izračunljivi metrički prostori

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz u (X, d), kojeg kraće označavamo sa α, takav da je skup $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust u (X, d) te takav da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna. Tada za α kažemo da je **efektivan separirajući niz** u (X, d).
Neka je (X, d) metrički prostor te α efektivan separirajući niz u (X, d). Tada za uređenu trojku (X, d, α) kažemo da je **izračunljiv metrički prostor**.

Primjer 2.1.1. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ niz definiran sa*

$$\alpha_i = (-1)^{e(i,2)} \cdot \frac{e(i, 1)}{e(i, 0) + 1}, \text{ za svaki } i \in \mathbb{N},$$

gdje je e funkcija iz propozicije 1.1.23. Lako se vidi da je α rekurzivna funkcija te da je $\alpha(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$. Prema tome, funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j) = |\alpha_i - \alpha_j|$ je također rekurzivna i $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$ je gust u $(\mathbb{R}, d)$. Zaključujemo da je α efektivan separirajući niz u $(\mathbb{R}, d)$ te da je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor.

Primjer 2.1.2. *Označimo sa S^1 jediničnu kružnicu u $\mathbb{R}^2$. Preciznije neka je*

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\},$$

pri čemu je $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ euklidska norma. Neka je $\alpha' : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ niz definiran sa

$$\alpha'_i = \left((-1)^{e(i,2)} \cdot \frac{e(i, 1) + 1}{e(i, 0) + 1}, (-1)^{e(i,5)} \cdot \frac{e(i, 4)}{e(i, 3) + 1}\right), \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Lako se vidi da je $\alpha'(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to S^1$ niz definiran sa

$$\alpha_i = \frac{\alpha'_i}{\|\alpha'_i\|}, \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Tvrdimo da je α efektivan separirajući niz u metričkom prostoru (S^1, d), pri čemu je d euklidska metrika. Dokažimo da je α gust u (S^1, d). Neka je $x \in S^1$ te neka je $\epsilon > 0$. Kako je α' gust u $\mathbb{R}^2$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $d(\alpha'_i, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Pretpostavimo da je $\|\alpha'_i\| \geq 1$. Imamo

$$d(\alpha'_i, \alpha_i) = \left\| \alpha'_i - \frac{\alpha'_i}{\|\alpha'_i\|} \right\| = \left| 1 - \frac{1}{\|\alpha'_i\|} \right| \cdot \|\alpha'_i\| = \|\alpha'_i\| - 1.$$

S druge strane, koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$\|\alpha'_i\| - 1 = \|\alpha'_i\| - \|x\| \leq \|\alpha'_i - x\| = d(\alpha'_i, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zaključujemo,

$$d(\alpha'_i, \alpha_i) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Konačno, iz nejednakosti trokuta slijedi

$$d(x, \alpha_i) \leq d(x, \alpha'_i) + d(\alpha'_i, \alpha_i) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Na sličan način bismo pokazali da je $d(x, \alpha_i) < \epsilon$ i u slučaju da je $\|\alpha'_i\| < 1$. Dakle, imamo da je α gust u (S^1, d). Nadalje, označimo sa $\alpha'^1, \alpha'^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ komponentne funkcije od α' te sa $\alpha^1, \alpha^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ komponentne funkcije od α. Očito su α'^1, α'^2 rekurzivne funkcije, a kako je

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ za sve } x, y \in \mathbb{R}^2,$$

iz propozicije 1.5.5 i propozicije 1.5.8 slijedi da su α^1, α^2 rekurzivne funkcije. Koristeći ponovno propoziciju 1.5.8 i definiciju euklidske metrike sada lako vidimo da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna. Dakle, α je efektivan separirajući niz u (S^1, d). Zaključujemo, (S^1, d, α) je izračunljiv metrički prostor.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je x_0 **izračunljiva točka** u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_0, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz u X. Kažemo da je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ **izračunljiv niz** u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \text{ za sve } i, k \in \mathbb{N}.$$

Uočimo, ako je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz u (X, d, α) onda je x_i izračunljiva točka, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Naime, definiramo rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa $f(k) = F(i, k)$. Tada vrijedi $d(x_i, \alpha_{f(k)}) = d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Uočimo da je tada $(\alpha_{f(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz. Posebno, ako za f uzmemo I_1^1 dobivamo da je α izračunljiv niz u (X, d, α).

Za realan broj x kažemo da je **izračunljiv** ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|x - f(k)| < 2^{-k}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$ izračunljiv broj te neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija koja zadovoljava svojstvo iz definicije izračunljivog broja. Uočimo da tada niz $(f(k))_{k\in\mathbb{N}}$ teži prema x kad $k \to \infty$ pa f ne može zadovoljavati svojstvo definicije za dva različita izračunljiva broja.
Iz toga i činjenice da rekurzivnih funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ima prebrojivo mnogo zaključujemo da je skup izračunljivih brojeva prebrojiv. Na sličan način vidimo da u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) ima najviše prebrojivo mnogo izračunljivih točaka.
Uočimo da je svaki $x \in \mathbb{Q}$ izračunljiv jer za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ možemo uzeti konstatnu funkciju $f(k) = x$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, koja je rekurzivna.

Propozicija 2.1.3. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je $g(x)$ izračunljiv broj za svaki $x \in \mathbb{N}^n$.*

Dokaz. Neka je $G : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ rekruzivna aproksimacija funkcije g. Neka je $x \in \mathbb{N}^n$ proizvoljan. Definiramo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sa $f(k) = G(x, k)$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Funkcija f je očito rekurzivna i vrijedi:

$$|g(x) - f(k)| = |g(x) - G(x, k)| < 2^{-k}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $g(x)$ je izračunljiv broj. □

Propozicija 2.1.4. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je $c \in \mathbb{R}$ izračunljiv broj te neka je $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $g(x) = c$, za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Tada je g rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Kako je c izračunljiv broj postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|c - f(k)| < 2^{-k}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ sa $G(x, k) = f(k)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i za svaki $k \in \mathbb{N}$. Funkcija G je očito rekurzivna i za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$|g(x) - G(x, k)| = |c - f(k)| < 2^{-k}.$$

Dakle, g je rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.1.5. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ izračunljivi brojevi. Tada su $-x$, $|x|$, $x + y$, $x \cdot y$ izračunljivi brojevi. Dodatno, ako je $x \neq 0$ tada je i $\frac{1}{x}$ izračunljiv broj.*

Dokaz. Definiramo funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa $f(i) = x$, $g(i) = y$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 2.1.4 funkcije f i g su rekurzivne. Iz propozicije 1.5.4 slijedi da su funkcije $-f, |f|, f + g, f \cdot g$ rekurzivne pa su prema propoziciji 2.1.3 $-x$, $|x|$, $x + y$, $x \cdot y$ izračunljivi brojevi. Ako je $x \neq 0$ tada je $f(i) \neq 0$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa iz propozicije 1.5.5 slijedi da je $\frac{1}{f}$ rekurzivna funkcija. Sada ponovno iz propozicije 2.1.3 slijedi da je $\frac{1}{x}$ izračunljiv broj. □

Primjer 2.1.6. *Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor iz primjera 2.1.1 te neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da je x_0 izračunljiv broj ako i samo ako je x_0 izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Pretpostavimo da je x_0 izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x_0, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Kako je α rekurzivna funkcija imamo da je $\alpha \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna i vrijedi $d(x_0, (\alpha \circ f)(k)) < 2^{-k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dakle, x_0 je izračunljiv broj.*
S druge strane, pretpostavimo da je x_0 izračunljiv broj. Tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi $d(x_0, g(k)) = |x_0 - g(k)| < 2^{-k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Neka je

$$S = \{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid g(k) = \alpha(i)\}.$$

Skup S je rekurzivan prema korolaru 1.4.5, a kako je $\alpha(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$ vrijedi da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, i) \in S$. Prema propoziciji 1.2.9 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, \varphi(k)) \in S$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dakle, imamo $g(k) = \alpha(\varphi(k))$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa vrijedi

$$d(x_0, \alpha(\varphi(k))) = d(x_0, g(k)) < 2^{-k}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}$$

pa je x_0 izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ po definiciji.

Primjer 2.1.7. *Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor iz primjera 2.1.1 te neka je $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}$. Slično kao u primjeru 2.1.6 pokaže se da vrijedi da je $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ izračunljiv niz u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ ako i samo ako je $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, gledan kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, rekurzivna funkcija.*

Propozicija 2.1.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ izračunljivi nizovi u (X, d, α). Tada je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka su $F, G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da vrijedi:

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k} \text{ i } d(y_j, \alpha_{G(j,k)}) < 2^{-k}, \text{ za sve } i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Iz nejednakosti trokuta slijedi:

$$d(x_i, y_j) \leq d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) + d(\alpha_{F(i,k)}, \alpha_{G(j,k)}) + d(\alpha_{G(j,k)}, y_j), \text{ za sve } i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Odnosno,

$$d(x_i, y_j) - d(\alpha_{F(i,k)}, \alpha_{G(j,k)}) \leq d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) + d(\alpha_{G(j,k)}, y_j), \text{ za sve } i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Na sličan način dobijemo

$$d(\alpha_{F(i,k)}, \alpha_{G(j,k)}) - d(x_i, y_j) \leq d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) + d(\alpha_{G(j,k)}, y_j), \text{ za sve } i, j, k \in \mathbb{N},$$

pa imamo

$$\left| d(x_i, y_j) - d(\alpha_{F(i,k)}, \alpha_{G(j,k)}) \right| \leq d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) + d(\alpha_{G(j,k)}, y_j) < 2 \cdot 2^{-k}, \text{ za sve } i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Iz toga slijedi

$$\left| d(x_i, y_j) - d(\alpha_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(j,k+1)}) \right| \leq d(x_i, \alpha_{F(i,k+1)}) + d(\alpha_{G(j,k+1)}, y_j) < 2^{-k}, \text{ za sve } i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Lako se vidi da je funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, $(i, j, k) \mapsto d(\alpha_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(j,k+1)})$ rekurzivna, pa iz leme 1.5.2 slijedi tvrdnja propozicije. □

2.2 Izračunljivo prebrojivi skupovi

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za otvorenu kuglu $K(\alpha_i, r)$ u (X, d) gdje je $i \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty \rangle$ kažemo da je **racionalna otvorena kugla**.
Neka su $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $\{(\tau_1(i), \tau_2(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$ te neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija takva da je $q(\mathbb{N}) = \mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty \rangle$. Na primjer, lako se vidi da funkcije

$$\tau_1(i) = e(i, 0), \tau_2(i) = e(i, 1), q(i) = \frac{e(i, 0) + 1}{e(i, 1) + 1}$$

zadovoljavaju gornja svojstva.
Za $i \in \mathbb{N}$ označimo sa $\lambda_i := \alpha_{\tau_1(i)}, \rho_i := q_{\tau_2(i)}$ te sa $I_i := K(\lambda_i, \rho_i)$. Tada se lako provjeri da je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ familija svih racionalnih kugala u (X, d, α).
Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ zatvoren skup u (X, d) takav da je $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv skup. Tada za S kažemo da je **izračunljivo prebrojiv skup** u (X, d, α).
Htjeli bismo dokazati da ova definicija ne ovisi o izboru rekurzivnih funkcija τ_1, τ_2, q. Stoga, pretpostavimo da su τ'_1, τ'_2, q' rekurzivne funkcije koje također zadovojavaju gore navedena svojstva. Označimo sada sa $\lambda'_i := \alpha_{\tau'_1(i)}, \rho'_i := q'_{\tau'_2(i)}$ te sa $I'_i := K(\lambda'_i, \rho'_i)$. Nadalje, označimo sa $T := \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ i sa $T' := \{i \in \mathbb{N} \mid I'_i \cap S \neq \emptyset\}$. Sada je dovoljno pokazati da je T rekurzivno prebrojiv skup ako i samo ako je T' rekurzivno prebrojiv skup.
Pretpostavimo da je T rekurzivno prebrojiv skup. Definiramo skup

$$\Omega := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \tau'_1(i) = \tau_1(j) \text{ i } q'_{\tau'_2(i)} = q_{\tau_2(j)}\}.$$

Lako se vidi da je Ω rekurzivan, pa samim time i rekurzivno prebrojiv skup. Neka je $i \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Iz činjenice da je $q(\mathbb{N}) = \mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty \rangle$ slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$q'_{\tau'_2(i)} = q_k$. Nadalje, za taj k je $(\tau'_1(i), k) \in \mathbb{N}^2$, pa postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$(\tau'_1(i), k) = (\tau_1(j), \tau_2(j)),$$

što povlači $(i, j) \in \Omega$.
Dokazali smo da za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in \Omega$. Kako je Ω rekurzivno prebrojiv skup propozicija 1.2.9 povlači da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, \varphi(i)) \in \Omega,$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada je, prema definiciji od Ω,

$$I'_i = I_{\varphi(i)} \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Lako se vidi da prethodna relacija povlači $T' = \varphi^{-1}(T)$, pa je T' rekurzivno prebrojiv skup prema propoziciji 1.2.8.

Propozicija 2.2.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz u (X, d, α). Tada je $S := \overline{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$ izračunljivo prebrojiv skup.*

Dokaz. S je definiran kao zatvarač skupa $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, pa je očito zatvoren skup. Preostaje dokazati da je skup $T := \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv. Neka je

$$\Omega := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid d(x_j, \lambda_i) < \rho_i\}.$$

Tvrdimo da vrijedi:

$$i \in T \iff \text{postoji } j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i, j) \in \Omega.$$

Pretpostavimo da je $i \in T$, tada je $I_i \cap S \neq \emptyset$. Ako otvorena kugla siječe zatvarač nekog skupa onda mora sjeći i sam skup. Stoga, postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $x_j \in I_i$, iz čega slijedi $d(x_j, \lambda_i) < \rho_i$, odnosno $(i, j) \in \Omega$.
Obratno, ako postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in \Omega$ onda je, prema definiciji skupa Ω, $x_j \in I_i$. Stoga je $I_i \cap S \neq \emptyset$, odnosno $i \in T$.
Primjetimo da iz propozicije 2.1.8 i propozicije 1.5.6 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup. Tvrdnja propozicije sada slijedi iz prethodno dokazane ekvivalencije i teorema o projekciji. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j$. Tada kažemo da je I_i **formalno sadržan** u I_j i pišemo $I_i \subseteq_F I_j$.

Lema 2.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x, y \in X$ i $r, s > 0$ takvi da vrijedi $d(x, y) + r \leq s$. Tada vrijedi $K(x, r) \subseteq K(y, s)$.*

Dokaz. Neka je $z \in K(x, r)$ proizvoljan. Tada je $d(x, z) < r$, pa koristeći nejednakost trokuta dobivamo:

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < d(x, y) + r \leq s.$$

Stoga je $z \in K(y, s)$, a kako je z bio proizvljan lema je dokazana. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Uočimo da iz leme 2.2.2. slijedi:

$$I_i \subseteq_F I_j \Rightarrow I_i \subseteq I_j, \text{ za sve } i, j \in \mathbb{N}.$$

Lema 2.2.3. *Skup $S := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_F I_j\}$ je rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(i, j) = \rho_j - \rho_i - d(\lambda_i, \lambda_j)$. Lako se vidi da je funkcija f rekurzivna. Vrijedi:

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_F I_j\} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j\} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid f(i, j) > 0\}.$$

Stoga, iz propozicije 1.5.6 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

Lema 2.2.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $x \in I_i$ za neki $i \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$, $I_k \subseteq_F I_i$ i $\rho_k < \epsilon$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Kako je $x \in I_i$ imamo da je $d(x, \lambda_i) < \rho_i$. Stoga, postoji $s \in \mathbb{Q}$, $s < \epsilon$ takav da vrijedi $d(x, \lambda_i) + 2s < \rho_i$. Kako je α gust u (X, d) postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $d(\alpha_j, x) < s$. Imamo:

$$d(\lambda_i, \alpha_j) + s \leq d(\lambda_i, x) + d(x, \alpha_j) + s < d(\lambda_i, x) + 2s < \rho_i.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(\lambda_k, \rho_k) = (\alpha_j, s)$. Imamo da je $I_k = K(\alpha_j, s)$ te je prema prethodno dokazanom $I_k \subseteq_F I_i$. Kako je $d(\alpha_j, x) < s$ imamo $x \in I_k$ i $\rho_k = s < \epsilon$. □

Dokaz sljedećeg teorema može se pronaći u [8].

Teorem 2.2.5. *Neka je (X, d) potpun metrički prostor te neka je $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nepraznih, zatvorenih i omeđenih skupova u (X, d) takvih da je $F_{n+1} \subseteq F_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da niz realnih brojeva $(\operatorname{diam} F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži k nuli. Tada je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Teorem 2.2.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $S \subseteq X$ neprazan i potpun izračunljivo prebrojiv skup. Tada postoji izračunljiv niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u (X, d, α) takav da je $S = \overline{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$.*

Dokaz. Označimo sa $T := \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$. Kako je S izračunljivo prebrojiv skup postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $f(\mathbb{N}) = T$. Neka je Ω skup definiran sa:

$$\Omega := \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid I_{f(j)} \subseteq_F I_{f(i)} \text{ i } \rho_{f(j)} < 2^{-k}\}.$$

Skup Ω je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 1.5.6, lemi 2.2.3 i propoziciji 1.2.7. Neka su $i, k \in \mathbb{N}$. Imamo da je $I_{f(i)} \cap S \neq \emptyset$ pa postoji $x \in I_{f(i)} \cap S$. Prema lemi 2.2.4 postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$x \in I_m \subseteq_F I_{f(i)} \text{ i } \rho_m < 2^{-k}.$$

Kako je $x \in I_m \cap S$ imamo $m \in T$ pa postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $f(j) = m$ iz čega slijedi $(i, k, j) \in \Omega$. Dakle, za sve $i, k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, k, j) \in \Omega$. Iz propozicije 1.2.9 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, k, \varphi(i, k)) \in \Omega$, za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Definiramo funkciju $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ na sljedeći način

$$h(0, i) = i,$$

$$h(n + 1, i) = \varphi(h(n, i), n).$$

Lako se vidi da je h rekurzivna funkcija te da vrijedi $(h(n, i), n, h(n + 1, i)) \in \Omega$, za sve $i, n \in \mathbb{N}$. Za $i \in \mathbb{N}$ imamo:

$$I_{f(h(n+1,i))} \subseteq_F I_{f(h(n,i))} \text{ i } \rho_{f(h(n+1,i))} < 2^{-n}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},$$

što povlači da je $(S \cap \overline{I_{f(h(n,i))}})_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz zatvorenih i omeđenih skupova čiji dijametri teže k nuli. Kako je S potpun iz teorema 2.2.5 slijedi da postoji $x_i \in S$ takav da je $x_i \in \overline{I_{f(h(n,i))}}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Na ovaj način dobivamo niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u S. Tvrdimo da je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz koji je gust u S. Neka je $i \in \mathbb{N}$, tada iz $x_i \in \overline{I_{f(h(n+1,i))}}$ slijedi

$$d(x_i, \lambda_{f(h(n+1,i))}) \leq \rho_{f(h(n+1,i))} < 2^{-n}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je izračunljiv.
Neka su $y \in S$ i $\epsilon > 0$. Odaberimo $s \in \mathbb{Q}$ takav da je $0 < 2s < \epsilon$. Niz α je gust u (X, d), stoga postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_j \in K(y, s)$. Imamo

$$d(\alpha_j, y) < s \Rightarrow y \in K(\alpha_j, s).$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(\lambda_k, \rho_k) = (\alpha_j, s)$. Tada je $I_k = K(\alpha_j, s)$. Kako je $y \in I_k$ imamo $k \in T$ pa postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $f(i) = k$, što povlači $y \in I_{f(i)}$. S druge strane, imamo

$$x_i \in \overline{I_{f(h(0,i))}} = \overline{I_{f(i)}} \Rightarrow d(x_i, y) \leq 2\rho_{f(i)} = 2s < \epsilon.$$

Dakle, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je gust u S, odnosno $S = \overline{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$. □

2.3 Izračunljivi skupovi

Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $A, B \subseteq X$ i $\epsilon > 0$. Pišemo $A \approx_\epsilon B$ ako za svaki $x \in A$ postoji $y \in B$ takav da je $d(x, y) < \epsilon$ i ako za svaki $y \in B$ postoji $x \in A$ takav da je $d(x, y) < \epsilon$.

Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ r.r.o. funkcija takva da je $\{\Phi(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih konačnih nepraznih podkupova od $\mathbb{N}$. Takva funkcija postoji prema primjeru 1.6.10.
Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je K neprazan kompaktan skup u (X, d). Kažemo da je K **Φ-izračunljiv** skup u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_j \mid j \in \Phi(f(k))\}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Lema 2.3.1. *Neka su $\Phi, \Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(N)$ r.r.o. funkcije takve da su $\{\Phi(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ i $\{\Psi(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ skupovi svih konačnih nepraznih podskupova od $\mathbb{N}$. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je K neprazan kompaktan podskup od (X, d). Tada je K Φ-izračunljiv u (X, d, α) ako i samo ako je K Ψ-izračunljiv skup u (X, d, α).*

Dokaz. Pretpostavimo da je K Φ-izračunljiv skup u (X, d, α). Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_j \mid j \in \Phi(f(k))\}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Definiramo skup

$$\Omega := \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(f(k)) = \Psi(j)\}.$$

Imamo da je Ω rekurzivan skup prema propoziciji 1.6.6 i korolaru 1.6.8, posebno Ω je rekurzivno prebrojiv skup. Nadalje, očito za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, j) \in \Omega$. Propozicija 1.2.9 povlači da postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(f(k)) = \Psi(g(k))$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Konačno, imamo

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_j \mid j \in \Phi(f(k))\} = \{\alpha_j \mid j \in \Psi(g(k))\}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, skup K je Ψ-izračunljiv. Obrat se dokazuje posve analogno. □

Neka su $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije takve da je $\{(\sigma(i, 0), \ldots, \sigma(i, \eta(i))) \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih konačnih nizova u $\mathbb{N}$. Već smo komentirali da takve funkcije postoje te da za $i, j \in \mathbb{N}$ koristimo oznake $\sigma(i, j) = (i)_j, \eta(i) = \bar{i}, [i] = \{(i)_0, \ldots, (i)_{\bar{i}}\}$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Uvodimo još jednu oznaku, za $i \in \mathbb{N}$ stavimo

$$\Lambda_i = \alpha([i]) = \{\alpha_{(i)_0}, \ldots, \alpha_{(i)_{\bar{i}}}\}.$$

Neka je K kompaktan skup u (X, d). Kažemo da je K **izračunljiv skup** u (X, d, α) ako je $K = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ r.r.o. funkcija iz primjera 1.6.10. Uočimo da vrijedi sljedeće:

$$K \text{ je izračunljiv skup u } (X, d, \alpha) \iff K = \emptyset \text{ ili } K \text{ je } \Phi - \text{izračunljiv u } (X, d, \alpha).$$

Prethodna karakterizacija i lema 2.3.1 povlače da definicija izračunljivog skupa ne ovisi o odabiru funkcija σ i η.

Teorem 2.3.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je K izračunljiv skup u (X, d, α). Tada je K izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α).*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da je $K \neq \emptyset$. Trebamo dokazati da je skup $S := \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap K \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv. Budući da je K neprazan izračunljiv skup postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$. Tada postoji $x \in K$ takav da vrijedi $d(x, \lambda_i) < \rho_i$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $d(x, \lambda_i) + 2 \cdot 2^{-k} < \rho_i$. Budući da je $K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}$ postoji $j \in [f(k)]$ takav da vrijedi $d(x, \alpha_j) < 2^{-k}$. Imamo

$$d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} \leq d(\lambda_i, x) + d(x, \alpha_j) + 2^{-k} < d(\lambda_i, x) + 2 \cdot 2^{-k} < \rho_i.$$

Zaključujemo, ako je $i \in S$ onda postoje $k \in \mathbb{N}$ i $j \in [f(k)]$ takvi da je $d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i$. Vrijedi i obratno, pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ takav da postoje $k \in \mathbb{N}$ i $j \in [f(k)]$ takvi da je $d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i$. Tada imamo

$$K(\alpha_j, 2^{-k}) \subseteq K(\lambda_i, \rho_i) = I_i.$$

Budući da je $K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}$ imamo da je $K \cap K(\alpha_j, 2^{-k}) \neq \emptyset$, što povlači $K \cap I_i \neq \emptyset$. Dakle, za svaki $i \in \mathbb{N}$ imamo

$$i \in S \iff \text{postoje } k \in \mathbb{N}, j \in [f(k)] \text{ takvi da vrijedi } d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i.$$

Definiramo skup

$$\Omega := \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in [f(k)], d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i\}.$$

Preostaje dokazati da je Ω rekurzivno prebrojiv skup i primjeniti teorem o projekciji. Uočimo da je Ω presjek skupova $T_1 := \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in [f(k)]\}$ i $T_2 := \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i\}$. Dovoljno je pokazati da su T_1 i T_2 rekurzivno prebrojivi skupovi. Propozicija 2.1.8 i propozicija 1.5.6 povlače da je T_2 rekurzivno prebrojiv skup. Uočimo da vrijedi

$$T_1 = \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid \{j\} \subseteq [f(k)]\}.$$

Funkcija $(i, k, j) \mapsto [f(k)]$ je r.r.o. funkcija prema primjeru 1.6.10 i propoziciji 1.6.6. Također, lako se vidi da je $(i, k, j) \mapsto \{j\}$ r.r.o. funkcija pa je T_1 rekurzivan skup prema korolaru 1.6.8, a onda posebno i rekurzivno prebrojiv. Kao što smo već napomenuli tvrdnja teorema sada slijedi iz teorema o projekciji. □

Napomena 2.3.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $K \neq \emptyset$ izračunljiv skup u (X, d, α). Prethodni teorem povlači da je K izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α). Budući da je K kompaktan skup u (X, d) on je i potpun pa teorem 2.2.6 povlači da postoji izračunljiv niz $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ u (X, d, α) takav da vrijedi $K = \overline{\{\beta_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$. Uočimo da iz propozicije 2.1.8 slijedi da je $(K, d_{|K \times K}, \beta)$ izračunljiv metrički prostor.*

2.4 Hiperprostor

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{K}(X, d)$ skup svih kompaktnih nepraznih skupova u (X, d). Definiramo funkciju $d_H : \mathcal{K}(X, d) \times \mathcal{K}(X, d) \to \mathbb{R}$ sa

$$d_H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \approx_\epsilon B\}.$$

Tvrdimo da je funkcija d_H metrika na $\mathcal{K}(X, d)$. Uočimo prvo da je d_H dobro definirana funkcija. Naime, svaki kompaktan skup je omeđen pa su A i B omeđeni skupovi i svakako vrijedi $\{\epsilon > 0 \mid A \approx_\epsilon B\} \neq \emptyset$. Također, očito je $\{\epsilon > 0 \mid A \approx_\epsilon B\}$ odozdo omeđen s 0 pa infimum iz definicije postoji. Dakle, funkcija d_H je dobro definirana.
Očito za sve $A, B \in \mathcal{K}(X, d)$ vrijedi $d_H(A, B) \geq 0$.
Trebamo pokazati da za sve vrijedi $A, B \in \mathcal{K}(X, d)$ vrijedi

$$d_H(A, B) = 0 \iff A = B.$$

Ako je $A = B$ imamo da za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi $A \approx_\epsilon B$ pa je $d_H(A, B) = \inf\langle 0, +\infty\rangle = 0$. Obratno, pretpostavimo da je $d_H(A, B) = 0$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada prema definiciji infimuma postoji $\epsilon' < \epsilon$ takav da je $\epsilon' > 0$ i $A \approx_{\epsilon'} B$, ali tada je i $A \approx_\epsilon B$. Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ imamo $A \approx_\epsilon B$. Neka je $a \in A$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $A \approx_{\frac{1}{n+1}} B$ pa postoji $b_n \in B$ takav da je $d(a, b_n) < \frac{1}{n+1}$. Na ovaj način dobili smo niz $(b_n)_{n \in n}$ u B koji teži prema a. Budući da je B kompaktan imamo $a \in B$. Dakle, $A \subseteq B$. Analogno se pokaže i obratna inkluzija.
Nadalje, očito je $d_H(A, B) = d_H(B, A)$, za sve $A, B \in \mathcal{K}(X, d)$.
Posljednje što trebamo dokazati je nejednakost trokuta. Neka su $A, B, C \in \mathcal{K}(X, d)$.
Stavimo

$$\epsilon_1 := d_H(A, B), \epsilon_2 := d_H(B, C).$$

Neka je $\epsilon > 0$. Imamo da vrijedi

$$A \approx_{\epsilon_1 + \frac{\epsilon}{2}} B \text{ i } B \approx_{\epsilon_2 + \frac{\epsilon}{2}} C.$$

Koristeći nejednakost trokuta metrike d lako dobivamo da za $r_1, r_2 > 0$ vrijedi

$$A \approx_{r_1} B \text{ i } B \approx_{r_2} C \Rightarrow A \approx_{r_1 + r_2} C.$$

Posebno, u našem slučaju za svaki $\epsilon > 0$ imamo

$$A \approx_{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon} C \Rightarrow d_H(A, C) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon.$$

Dakle, $d_H(A, C) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 = d_H(A, B) + d_H(B, C)$.
Dokazali smo da je d_H metrika na $\mathcal{K}(X, d)$. Za metriku d_H kažemo da je **Haussdorfova metrika**, a metrički prostor $(\mathcal{K}(X, d), d_H)$ nazivamo **hiperprostor** od (X, d).

Propozicija 2.4.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $A, B \in \mathcal{K}(X, d)$ i $\epsilon > 0$. Tada je $d_H(A, B) < \epsilon$ ako i samo ako vrijedi $A \approx_\epsilon B$.*

Dokaz. Ako je $d_H(A, B) < \epsilon$ onda direktno iz definicije od d_H slijedi $A \approx_\epsilon B$.
Obratno, pretpostavimo da je $A \approx_\epsilon B$. Imamo da za svaki $a \in A$ postoji $b_a \in B$ takav da vrijedi $d(a, b_a) < \epsilon$. Za $a \in A$ neka je $\epsilon_a > 0$ takav da vrijedi $d(a, b_a) < \epsilon_a < \epsilon$. Neka je $r_a > 0$ takav da $d(a, b_a) + r_a < \epsilon_a$. Prema lemi 2.2.2 imamo

$$K(a, r_a) \subseteq K(b_a, \epsilon_a) \Rightarrow d(x, b_a) < \epsilon_a, \text{ za svaki } x \in K(a, r_a).$$

Budući da je A kompaktan postoje $a_0, \dots, a_n \in A$ takvi da je

$$A \subseteq K(a_0, r_{a_0}) \cup \cdots \cup K(a_n, r_{a_n}).$$

Neka je $x \in A$, imamo da je $x \in K(a_i, r_{a_i})$ za neki $i \in \{0, \dots, n\}$. Prema dokazanom je $d(x, b_{a_i}) < \epsilon_{a_i} \leq \max\{\epsilon_{a_i} \mid i \in \{0, \dots, n\}\}$. Stavimo

$$\epsilon' := \max\{\epsilon_{a_i} \mid i \in \{0, \dots, n\}\}.$$

Imamo da za svaki $x \in A$ postoji $y \in B$ takav da je $d(x, y) < \epsilon'$ i vrijedi $0 < \epsilon' < \epsilon$. Na analogan način dolazimo do $\epsilon'' > 0$ takvog da je $0 < \epsilon'' < \epsilon$ te da za svaki $x \in B$ postoji $y \in A$ takav da je $d(x, y) < \epsilon''$. Stavimo li $\epsilon_0 = \max\{\epsilon', \epsilon''\}$ imamo $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ i $A \approx_{\epsilon_0} B$. Iz definicije od d_H sada slijedi da je $d_H(A, B) < \epsilon$ što smo i htjeli dokazati. □

Propozicija 2.4.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, A gust skup u (X, d) te K kompaktan i neprazan skup u (X, d). Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji konačan podskup A' od A takav da je $K \approx_\epsilon A'$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Tada je $\{K(x, \frac{\epsilon}{2}) \mid x \in K\}$ otvoreni pokrivač od K. Budući da je K kompaktan postoje $x_0, \dots, x_n \in K$ takvi da je $\{K(x_i, \frac{\epsilon}{2}) \mid i \in \{0, \dots, n\}\}$ otvoreni pokrivač od K. Kako je A gust u (X, d) za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ postoji $a_i \in A$ takav da je $a_i \in K(x_i, \frac{\epsilon}{2})$. Definiramo

$$A' := \{a_0, \dots, a_n\}.$$

Tvrdimo da vrijedi $A' \approx_\epsilon K$.
Neka je $i \in \{0, \dots, n\}$. Tada je

$$a_i \in K(x_i, \frac{\epsilon}{2}) \Rightarrow d(a_i, x_i) < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Dakle, za svaki $a \in A'$ postoji $x \in K$ takav da je $d(a, x) < \epsilon$.
Obratno, neka je $x \in K$. Tada postoji $i \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $x \in K(x_i, \frac{\epsilon}{2})$. Također je $a_i \in K(x_i, \frac{\epsilon}{2})$ pa imamo

$$d(x, a_i) \leq d(x, x_i) + d(x_i, a_i) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle, za svaki $x \in K$ postoji $a \in A'$ takav da je $d(x, a) < \epsilon$, čime smo dokazali tvrdnju. □

Napomena 2.4.3. *Ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te K neprazan kompaktan skup u (X, d) onda prethodna propozicija povlači da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $K \approx_\epsilon \Lambda_i$. Posebno, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da $K \approx_{2^{-k}} \Lambda_i$. Uočimo još da ovo pokazuje da je familija $\{\Lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust skup u $(\mathcal{K}(X, d), d_H)$.*

Lema 2.4.4. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}$. Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $a_0, \ldots, a_n \in X$ i $b_0, \ldots, b_k \in X$. Stavimo*

$$M := \max\{\max_{0 \le i \le n}(\min_{0 \le j \le k} d(a_i, b_j)), \max_{0 \le j \le k}(\min_{0 \le i \le n} d(b_j, a_i))\}.$$

Tada je $d_H(\{a_0, \ldots, a_n\}, \{b_0, \ldots, b_k\}) = M$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Želimo pokazati da vrijedi $\{a_0, \ldots, a_n\} \approx_{M+\epsilon} \{b_0, \ldots, b_k\}$. Neka je $i \in \{0, \ldots, n\}$ i $j_0 \in \{0 \ldots, k\}$ takav da je $d(a_i, b_{j_0}) = \min_{0 \le j \le k} d(a_i, b_j)$. Tada je

$$d(a_i, b_{j_0}) \le \max_{0 \le i \le n}(\min_{0 \le j \le k} d(a_i, b_j)) \le M < M + \epsilon.$$

Dakle, za svaki $a \in \{a_0, \ldots, a_n\}$ postoji $b \in \{b_0, \ldots, b_k\}$ takav da je $d(a, b) < M + \epsilon$. Analogno se pokaže da za svaki $b \in \{b_0, \ldots, b_k\}$ postoji $a \in \{a_0, \ldots, a_n\}$ takav da je $d(b, a) < M + \epsilon$. Prema propoziciji 2.4.1 imamo

$$d_H(\{a_0, \ldots, a_n\}, \{b_0, \ldots, b_k\}) < M + \epsilon, \text{ za svaki } \epsilon > 0 \Rightarrow d_H(\{a_0, \ldots, a_n\}, \{b_0, \ldots, b_k\}) \le M.$$

Dakle, pokazali smo $d_H(\{a_0, \ldots, a_n\}, \{b_0, \ldots, b_k\}) \le M$. Pretpostavimo da je $d_H(\{a_0, \ldots, a_n\}, \{b_0, \ldots, b_k\}) < M$. Tada prema propoziciji 2.4.1 imamo $\{a_0, \ldots, a_n\} \approx_M \{b_0, \ldots, b_k\}$ pa za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$ postoji $j \in \{0, \ldots, k\}$ takav da vrijedi $d(a_i, b_j) < M$. Stoga je

$$\min_{0 \le j \le k} d(a_i, b_j) < M, \text{ za svaki } i \in \{0, \ldots, n\} \Rightarrow \max_{0 \le i \le n}(\min_{0 \le j \le k} d(a_i, b_j)) < M.$$

Analogno se pokaže da vrijedi

$$\max_{0 \le j \le k}(\min_{0 \le i \le n} d(b_j, a_i)) < M.$$

Prethodne dvije nejednakosti povlače $M < M$, što je kontradikcija pa je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 2.4.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je $(\Lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ efektivan separirajući niz u $(\mathcal{K}(X, d), d_H)$.*

Dokaz. Prema napomeni 2.4.3 imamo da je $\{\Lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust skup u $(\mathcal{K}(X, d), d_H)$. Preostaje dokazati da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}, (i, j) \mapsto d_H(\Lambda_i, \Lambda_j)$ rekurzivna. Lema 2.4.4 povlači da za $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d_H(\Lambda_i, \Lambda_j) = d_H(\{\alpha_{(i)_0}, \ldots, \alpha_{(i)_{\bar{i}}}\}, \{\alpha_{(j)_0}, \ldots, \alpha_{(j)_{\bar{j}}}\})$$

$$= \max\{\max_{0 \le p \le \bar{i}}(\min_{0 \le r \le \bar{j}} d(\alpha_{(i)_p}, \alpha_{(j)_r})), \max_{0 \le r \le \bar{j}}(\min_{0 \le p \le \bar{i}} d(\alpha_{(j)_r}, \alpha_{(i)_p}))\}.$$

Koristeći lemu 2.4.4 lako se pokaže da je gornja funkcija rekurzivna. □

Napomena 2.4.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je prema prethodnoj propoziciji $(\mathcal{K}(X, d), d_H, \Lambda)$ također izračunljiv metrički prostor. Uočimo, ako je $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$ tada je K izračunljiv u (X, d, α) ako i samo ako je K izračunljiva točka u $(\mathcal{K}(X, d), d_H, \Lambda)$. Naime, ako je K izračunljiv skup u (X, d, α) onda je K kompaktan i postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Stoga je prema propoziciji 2.4.1 $d_H(K, \Lambda_{f(k)}) < 2^{-k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Obrat se dokazuje analogno.*

Poglavlje 3

Efektivna kompaktnost

3.1 Osnovni rezultati i primjeri

Za metrički prostor (X, d) kažemo da je **potpuno omeđen** ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ i točke $x_0, \ldots, x_n \in X$ takve da vrijedi

$$X = \bigcup_{i=0}^{n} K(x_i, \epsilon).$$

Za izračunljiv metrički prostor (X, d, α) kažemo da je **efektivno potpuno omeđen** ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$X = \bigcup_{i=0}^{f(k)} K(\alpha_i, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Uočimo, ako je (X, d, α) efektivno potpuno omeđen izračunljiv metrički prostor, onda je (X, d) potpuno omeđen.
Za izračunljiv metrički prostor (X, d, α) kažemo da je **efektivno kompaktan** ako je efektivno potpuno omeđen i ako je (X, d) kompaktan metrički prostor.

Napomena 3.1.1. *Poznato je da vrijedi sljedeća tvrdnja ([8]): metrički prostor* (X, d) *je kompaktan ako i samo ako je potpun i potpuno omeđen. Stoga, imamo da je izračunljiv metrički prostor* (X, d, α) *efektivno kompaktan ako i samo ako je potpun i efektivno potpuno omeđen.*

Primjer 3.1.2. *Promotrimo metrički prostor* $([0, 1], d)$*, pri čemu je d euklidska metrika na* $[0, 1]$. *Definiramo funkciju* $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *sa*

$$\alpha(i) = \frac{\min\{e(i, 0), e(i, 1)\}}{\max\{e(i, 0), e(i, 1)\} + 1}, \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Tvrdimo da je $\alpha(\mathbb{N}) = \mathbb{Q} \cap [0, 1\rangle$. *Očito je* $\alpha(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Q} \cap [0, 1\rangle$. *Dokažimo obratnu inkluziju. Neka je* $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1\rangle$. *Tada postoje* $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *takvi da je* $p < q$ *i* $r = \frac{p}{q}$. *Vrijedi* $\alpha(2^p \cdot 3^{q-1}) = \frac{p}{q-1+1} = r$. *Ovime smo pokazali da je* α *gust niz u* $([0, 1], d)$. *Nadalje, lako se vidi da je funkcija* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ *rekurzivna. Zaključujemo da je* α *efektivan separirajući niz u* $([0, 1], d)$, *odnosno* $([0, 1], d, \alpha)$ *je izračunljiv metrički prostor. Tvrdimo da je* $([0, 1], d, \alpha)$ *efektivno kompaktan. Znamo da je* $([0, 1], d)$ *kompaktan pa preostaje dokazati efektivnu potpunu omeđenost. Neka je* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *rekurzivna funkcija definirana sa* $f(k) = 6^k$, *za svaki* $k \in \mathbb{N}$. *Neka je* $x \in [0, 1]$. *Tada postoji* $i \in \{0, \dots k\}$ *takav da je*

$$\frac{i}{k+1} \leq x \leq \frac{i+1}{k+1}.$$

Imamo da je $\alpha(2^i \cdot 3^k) = \frac{i}{k+1}$, *za* $i \leq k$. *Zaključujemo da za svaki* $x \in [0, 1]$ *postoji* $i \leq 6^k = f(k)$ *takav da je* $x \in K(\alpha_i, \frac{2}{k+1})$, *odnosno*

$$[0, 1] = \bigcup_{i=0}^{f(k)} K\left(\alpha_i, \frac{2}{k+1}\right), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Definiramo rekurzivnu funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *sa* $g(k) = 2^{k+1} \dot{-} 1$. *Sada imamo*

$$[0, 1] = \bigcup_{i=0}^{f(2^{k+1} \dot{-} 1)} K\left(\alpha_i, \frac{2}{2^{k+1} \dot{-} 1 + 1}\right) = \bigcup_{i=0}^{f(g(k))} K(\alpha_i, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Očito je $f \circ g$ *rekurzivna funkcija pa smo pokazali da je* $([0, 1], d, \alpha)$ *efektivno kompaktan.*

Sada ćemo dati primjer izračunljivog metričkog prostora koji je kompaktan kao metrički prostor, ali nije efektivno kompaktan. Za to će nam trebati sljedeći rezultat čiji dokaz se može pronaći u [9].

Lema 3.1.3. *Postoji* $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ *koji nije izračunljiv broj i rekurzivna funkcija* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *takva da vrijedi* $f(0) \geq 0, f(i) \leq f(i+1)$, *za svaki* $i \in \mathbb{N}$ *i* $\lim_{i\to\infty} f(i) = \gamma$.

Primjer 3.1.4. *Neka su* $\gamma > 0$ *i* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *neizračunljiv broj i rekurzivna funkcija iz leme 3.1.3 Lako se vidi da će promjenom vrijednosti funkcije* f *u jednoj točki novodobivena funkcija i dalje biti rekurzivna. Stoga možemo pretpostaviti da vrijedi* $f(0) = 0$. *Neka je* $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *rekurzivan niz čija slika je jednaka* $[0, 1\rangle \cap \mathbb{Q}$. *Primjer 3.1.2 između ostalog pokazuje da takva funkcija postoji. Definiramo funkciju* $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ *sa*

$$h(i, j) = f(i) + q_j(f(i+1) - f(i)), \text{ za sve } i, j \in \mathbb{N}.$$

Očito je h *rekurzivna funkcija. Tvrdimo da je* $h(\mathbb{N}^2) = [0, \gamma\rangle \cap \mathbb{Q}$. *Neka je* $x \in [0, \gamma\rangle \cap \mathbb{Q}$. *Kako* $(f(i))_{i\in\mathbb{N}}$ *teži prema* γ *postoji* $i \in \mathbb{N}$ *takav da je* $x < f(i+1)$. *Uzmimo najmanji* i *s tim* *svojstvom. Ako je* $i = 0$*, onda je* $x \in [f(0), f(1)\rangle$*. Ako je* $i \geq 1$*, onda je* $x \in [f(i), f(i+1)\rangle$*. U svakom slučaju postoji* $i \in \mathbb{N}$ *takav da je* $x \in [f(i), f(i+1)\rangle$ *. Definiramo*

$$\lambda := \frac{x - f(i)}{f(i+1) - f(i)}.$$

Tada je $\lambda \in [0, 1\rangle \cap \mathbb{Q}$ *pa postoji* $j \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\lambda = q_j$*. Imamo*

$$h(i, j) = f(i) + q_j(f(i+1) - f(i)) = f(i) + \frac{x - f(i)}{f(i+1) - f(i)}(f(i+1) - f(i)) = x.$$

Dakle, imamo da je $[0, \gamma\rangle \cap \mathbb{Q} \subseteq h(\mathbb{N}^2)$*. Neka su sada* $i, j \in \mathbb{N}$*. Tada vrijedi* $h(i, j) \in \mathbb{Q}$ *i*

$$h(i, j) = f(i) + q_j(f(i+1) - f(i)) < f(i) + f(i+1) - f(i) = f(i+1) \leq \gamma.$$

Dakle, imamo $h(i, j) \in [0, \gamma\rangle \cap \mathbb{Q}$ *za sve* $i, j \in \mathbb{N}$*. Stoga je* $h(\mathbb{N}^2) = [0, \gamma\rangle \cap \mathbb{Q}$*. Neka je sada* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ *rekurzivna surjekcija. Definiramo* $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *sa* $\alpha = h \circ \tau$*. Imamo*

$$\alpha(\mathbb{N}) = h(\tau(\mathbb{N})) = h(\mathbb{N}^2) = [0, \gamma\rangle \cap \mathbb{Q}.$$

Ovime smo pokazali da je α *gust niz u* $([0, \gamma], d)$*, pri čemu je* d *euklidska metrika. Nadalje,* α *je rekurzivna funkcija pa se lako vidi da je i funkcija* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$*,* $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ *rekurzivna. Imamo da je* $([0, \gamma], d, \alpha)$ *izračunljiv metrički prostor. Uočimo da je* $([0, \gamma], d)$ *kompaktan metrički prostor. Tvrdimo da* $([0, \gamma], d, \alpha)$ *nije efektivno kompaktan. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji rekurzivna funkcija* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takva da vrijedi*

$$[0, \gamma\rangle = \bigcup_{i=0}^{\varphi(k)} K(\alpha_i, 2^{-k}).$$

Definiramo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *sa* $g(k) = \max\{\alpha_i \mid i \in \{0, \ldots, \varphi(k)\}\}$*. Funkcija* g *je rekurzivna prema lemi 1.6.12. Neka je* $k \in \mathbb{N}$*. Tada postoji* $i \in \{0, \ldots, \varphi(k)\}$ *takav da je*

$$|\gamma - \alpha_i| < 2^{-k}.$$

Znamo da je $\alpha_i \leq g(k) \leq \gamma$*, iz čega slijedi*

$$|\gamma - g(k)| < 2^{-k}.$$

Dobili smo da γ *izračunljiv broj što je kontradikcija. Dakle,* $([0, \gamma], d, \alpha)$ *nije efektivno kompaktan.*

Propozicija 3.1.5. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor. Neka je* $K \neq \emptyset$ *izračunljiv skup u* (X, d, α) *te neka je* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *izračunljiv niz u* (X, d, α) *takav da je* $K = \overline{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$*. Tada je* $(K, d_{|K\times K}, (x_i)_{i\in\mathbb{N}})$ *efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor.*

Dokaz. Imamo da je $K \neq \emptyset$ izračunljiv skup pa postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)} = \{\alpha_{(f(k))_0}, \dots, \alpha_{(f(k))_{\overline{f(k)}}}\}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Stoga je

$$K \subseteq \bigcup_{i=0}^{\overline{f(k)}} K(\alpha_{(f(k))_i}, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Definiramo skup

$$\Omega := \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid d(\alpha_{(f(k))_i}, x_j) < 2^{-k} \text{ ili } i > \overline{f(k)}\}.$$

Propozicija 2.1.8, propozicija 1.5.6 te propozicija 1.2.7 povlače da je Ω rekurzivno prebrojiv skup. Nadalje, neka su $i, k \in \mathbb{N}$. Ako je $i > \overline{f(k)}$, onda za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi $(i, k, j) \in \Omega$. Ako je $i \leq \overline{f(k)}$, onda postoji $y \in K$ takav da je $d(\alpha_{(f(k))_i}, y) < 2^{-k}$. Neka je $\epsilon > 0$ takav da je $d(\alpha_{(f(k))_i}, y) + \epsilon < 2^{-k}$. Kako je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gust u K postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $d(y, x_j) < \epsilon$. Sada koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$d(\alpha_{(f(k))_i}, x_j) \leq d(\alpha_{(f(k))_i}, y) + d(y, x_j) < d(\alpha_{(f(k))_i}, y) + \epsilon < 2^{-k}.$$

Dakle, za sve $i, k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, k, j) \in \Omega$. Stoga, prema propoziciji 1.2.9 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, k, \varphi(i, k)) \in \Omega$, za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ te neka je $i \in \{0, \dots, \overline{f(k)}\}$. Tada $(i, k, \varphi(i, k)) \in \Omega$ povlači

$$d(\alpha_{(f(k))_i}, x_{\varphi(i,k)}) < 2^{-k} \Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=0}^{\overline{f(k)}} K(x_{\varphi(i,k)}, 2 \cdot 2^{-k}).$$

Stoga, imamo

$$K \subseteq \bigcup_{i=0}^{\overline{f(k+1)}} K(x_{\varphi(i,k+1)}, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$g(k) = \max\{\varphi(i, k + 1) \mid i \in \{0, \dots, \overline{f(k + 1)}\}\}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Funkcija g je rekurzivna prema propoziciji 1.1.17 i imamo

$$K \subseteq \bigcup_{i=0}^{\overline{f(k+1)}} K(x_{\varphi(i,k+1)}, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N} \Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=0}^{g(k)} K(x_i, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Označimo li sa $K_{d_{|K\times K}}(x_i, 2^{-k})$ otvorenu kuglu oko x_i radijusa 2^{-k} u metričkom prostoru $(K, d_{|K\times K})$ iz prethodnog lako zaključujemo

$$K = \bigcup_{i=0}^{g(k)} K_{d_{|K\times K}}(x_i, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $(K, d_{|K\times K}, (x_i)_{i\in\mathbb{N}})$ je efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor. □

Teorem 3.1.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$ kompaktan skup u (X, d). Pretpostavimo da je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz u (X, d, α) takav da je $K = \overline{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$. Tada je $(K, d_{|K\times K}, (x_i)_{i\in\mathbb{N}})$ izračunljiv metrički prostor te vrijedi da je $(K, d_{|K\times K}, (x_i)_{i\in\mathbb{N}})$ efektivno kompaktan ako i samo ako je K izračunljiv skup u (X, d, α).*

Dokaz. Direktno iz propozicije 2.1.8 slijedi da je $(K, d_{|K\times K}, (x_i)_{i\in\mathbb{N}})$ izračunljiv metrički prostor. Dokaz jedne implikacije je upravo prethodna propozicija. Preostaje dokazati drugi smjer. Pretpostavimo da je $(K, d_{|K\times K}, (x_i)_{i\in\mathbb{N}})$ efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor. Za $x \in K$ i $r > 0$ označimo sa $K_{d_{|K\times K}}(x, r)$ otovorenu kuglu oko x radijusa r u metričkom prostoru $(K, d_{|K\times K})$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$K = \bigcup_{i=0}^{f(k)} K_{d_{|K\times K}}(x_i, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Imamo da je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz u (X, d, α) pa postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k} \text{ za sve } i, k \in \mathbb{N}.$$

Stoga je

$$K \subseteq \bigcup_{i=0}^{f(k+1)} K(\alpha_{F(i,k+1)}, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Također vrijedi $x_i \in K(\alpha_{F(i,k)}, 2^{-k})$, za sve $i, k \in \mathbb{N}$, što povlači

$$K(\alpha_{F(i,k)}, 2^{-k}) \cap K \neq \emptyset, \text{ za sve } i, k \in \mathbb{N}.$$

Ovo zajedno sa $K \subseteq \bigcup_{i=0}^{f(k+1)} K(\alpha_{F(i,k)}, 2^{-k})$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ povlači da je

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_{F(i,k)} \mid i \in \{0, \ldots, f(k+1)\}\}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Definiramo skup

$$\Omega := \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid (F(0, k+1), \ldots, F(f(k+1), k+1)) = ((j)_0, \ldots, (j)_{\overline{j}})\}.$$

Lako se vidi da je Ω rekurzivan skup, a očito za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, j) \in \Omega$. Stoga prema propoziciji 1.2.9 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$(F(0, k+1), \dots, F(f(k+1), k+1)) = ((\varphi(k))_0, \dots, (\varphi(k))_{\overline{\varphi(k)}}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_{F(i,k)} \mid i \in \{0, \dots, f(k+1)\}\} = \{\alpha_{\varphi(k)} \mid i \in \{0, \dots, \overline{\varphi(k)}\}\} = \Lambda_{\varphi(k)}.$$

Ovime smo pokazali da je K izračunljiv skup u (X, d, α). □

Napomena 3.1.7. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Pretpostavimo da je $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$ kompaktan skup u (X, d) za kojeg postoji izračunljiv niz $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ u (X, d, α) takav da je $K = \overline{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$. Teorem 3.1.6 i napomena 2.4.6 povlače da je $(K, d_{|K \times K}, (x_i)_{i \in \mathbb{N}})$ efektivno kompaktan ako i samo ako je K izračunljiva točka u hiperprostoru od (X, d).*

Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α i β efektivni separirajući nizovi u (X, d). Kažemo da su α i β ekvivalentni i pišemo $\alpha \sim \beta$ ako je β izračunljiv niz u (X, d, α). Tvrdimo da je $\sim$ relacija ekvivalencije.
Pretpostavimo da je α efektivan separirajući niz u (X, d). Već smo komentirali da je α izračunljiv niz u (X, d, α) pa vrijedi $\alpha \sim \alpha$.
Pretpostavimo da su α i β efektivni separirajući nizovi u (X, d) takvi da je $\alpha \sim \beta$. Tvrdimo da vrijedi $\beta \sim \alpha$. Imamo da postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$d(\beta_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \text{ za sve } i, k \in \mathbb{N}.$$

Definiramo skup

$$\Omega := \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid d(\alpha_i, \beta_j) < 2^{-k}\}.$$

Skup Ω je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.1.8 i propoziciji 1.5.6. Kako je β gust u (X, d), za sve $i, k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, k, j) \in \Omega$. Prema propoziciji 1.2.9 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi $(i, k, \varphi(i, k)) \in \Omega$, za sve $i, k \in \mathbb{N}$.
Dakle, imamo

$$d(\alpha_i, \beta_{\varphi(i,k)}) < 2^{-k}, \text{ za sve } i, k \in \mathbb{N}.$$

Dokazali smo da je α izračunljiv niz u (X, d, β) odnosno $\beta \sim \alpha$.
Pretpostavimo da su α, β, γ efektivni separirajući nizovi u (X, d) takvi da vrijedi $\alpha \sim \beta$ i $\beta \sim \gamma$. Tvrdimo da vrijedi $\alpha \sim \gamma$. Imamo da postoje rekurzivne funkcije $F, G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$d(\beta_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k} \text{ i } d(\gamma_i, \beta_{G(i,k)}) < 2^{-k} \text{ za sve } i, k \in \mathbb{N}.$$

Stoga je
$$d(\beta_{G(i,k)}, \alpha_{F(G(i,k),k)}) < 2^{-k}, \text{ za sve } i, k \in \mathbb{N}.$$
Koristeći nejednakost trokuta za sve $i, k \in \mathbb{N}$ dobivamo
$$d(\gamma_i, \alpha_{F(G(i,k+1),k+1)}) \leq d(\gamma_i, \beta_{G(i,k+1)}) + d(\beta_{G(i,k+1)}, \alpha_{F(G(i,k+1),k+1)}) < 2 \cdot 2^{-(k+1)} = 2^{-k}.$$
Lako se vidi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(i, k) \mapsto F(G(i, k+1), k+1)$ rekurzivna pa smo dokazali $\alpha \sim \gamma$.
Dakle, imamo da je $\sim$ relacija ekvivalencije.

Propozicija 3.1.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor takav da je (X, d) kompaktan. Pretpostavimo da postoji izračunljiv niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u (X, d, α) i rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je*
$$X = \bigcup_{i=0}^{f(k)} K(x_i, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$
Tada je (X, d, α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor.

Dokaz. Niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je izračunljiv u (X, d, α) pa postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je
$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \text{ za sve } i, k \in \mathbb{N}.$$
Prema pretpostavci teorema imamo da je $X = \bigcup_{i=0}^{f(k)} K(x_i, 2^{-k})$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Stoga je
$$X = \bigcup_{i=0}^{f(k+1)} K(\alpha_{F(i,k+1)}, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$
Definiramo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa
$$g(k) = \max\{F(i, k + 1) \mid i \in \{0, \dots, f(k + 1)\}\}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$
Imamo da je g rekurzivna funkcija prema propoziciji 1.1.17 i vrijedi
$$X = \bigcup_{i=0}^{g(k)} K(\alpha_i, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$
Dakle, izračunljiv metrički prostor (X, d, α) je efektivno kompaktan. □

Sljedeći korolar je direktna posljedica prethodne propozicije.

Korolar 3.1.9. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α i β efektivni separirajući nizovi u (X, d) takvi da je $\alpha \sim \beta$. Tada je (X, d, α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor ako i samo ako je (X, d, β) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor.*

Sljedeći primjer pokazuje da postoji metrički prostor (X, d) na kojem nisu svi efektivni separirajući nizovi međusobno ekvivalentni. Međutim, kasnije ćemo pokazati da prethodni korolar vrijedi i bez pretpostavke da je $\alpha \sim \beta$.

Primjer 3.1.10. *Neka je (S^1, d, α) izračunljiv metrički prostor iz primjera 2.1.2. Kako je S^1 neprebrojiv skup, postoji točka $(x, y) \in S^1$ koja nije izračunljiva u (S^1, d, α). Neka je $f : S^1 \to S^1$ rotacija takva da je $f(1, 0) = (x, y)$. Posebno, f čuva udaljenost, iz čega odmah slijedi da je $f \circ \alpha$ gust niz u S^1 i da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(f(\alpha_i), f(\alpha_j)) = d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna. Stoga je $f \circ \alpha$ efektivan separirajući niz u (S^1, d). Pretpostavimo da je $f \circ \alpha \sim \alpha$. Tada je $f \circ \alpha$ izračunljiv niz u (S^1, d, α). Kako je svaki element izračunljivog niza izračunljiva točka u (S^1, d, α) imamo da je $f(\alpha(1)) = f(1, 0)$ izračunljiva točka u (S^1, d, α), što je kontradikcija. Zaključujemo da $f \circ \alpha \nsim \alpha$.*

3.2 Neovisnost efektivne kompaktnosti o efektivnom separirajućem nizu

Neka je (X, d) metrički prostor te $r > 0$. Za skup $S \subseteq X, S \neq \emptyset$ kažemo da je r-**gust** u (X, d) ako je $X = \bigcup_{s \in S} K(s, r)$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za konačan niz $x_0, \ldots, x_n$ u X kažemo da je r-**gust** u (X, d) ako je skup $\{x_0, \ldots, x_n\}$ r-gust u (X, d).
Neka je $s > 0$. Za skup $S \subseteq X, S \neq \emptyset$ kažemo da je s-**raspršen** u (X, d) ako vrijedi $d(x, y) > s$, za sve $x, y \in S$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za konačan niz $x_0, \ldots, x_n$ u X kažemo da je s-**raspršen** ako vrijedi $d(x_i, x_j) > s$, za sve $i, j \in \{0, \ldots n\}, i \neq j$. Uočimo ako imamo niz $x_0, \ldots, x_n$ koji je s-raspršen u (X, d) onda je i skup $\{x_0, \ldots, x_n\}$ s-raspršen u (X, d), ali obrat ne vrijedi uvijek.

Propozicija 3.2.1. *Neka je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor te neka je $s > 0$. Tada je skup* $A := \{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \text{ postoji niz } x_1, \ldots, x_k \text{ u } X \text{ koji je } s-\text{raspršen}\}$ *konačan.*

Dokaz. Kako je (X, d) potpuno omeđen postoji $p \in \mathbb{N}$ i niz $y_0, \ldots, y_p$ u X koji je $\frac{s}{2}$-gust u (X, d). Pretpostavimo da je $x_1, \ldots, x_k$ s-raspršen niz u (X, d). Za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ postoji $a_i \in \{0, \ldots, p\}$ takav da je $x_i \in K(y_{a_i}, \frac{s}{2})$. Imamo da vrijedi

$$d(x_i, x_j) > s, \text{ za sve } i, j \in \{1, \ldots, k\}, i \neq j.$$

Stoga mora biti $a_i \neq a_j$, za sve $i, j \in \{1, \ldots, k\}, i \neq j$. Naime, u suprotnom bismo imali da postoje $i, j \in \{1, \ldots, k\}, i \neq j$ takvi da je $x_i, x_j \in K(y_{a_i}, \frac{s}{2})$. Tada bismo imali $d(x_i, x_j) < s$, što je kontradikcija. Dakle, funkcija $\{1, \ldots, k\} \to \{0, \ldots, p\}$, $i \mapsto a_i$ je injekcija pa je $k < p$. Zaključujemo da je A konačan skup. □

Neka je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor te $S \subseteq X, S \neq \emptyset$. Neka je $s > 0$. Prema prethodnoj propoziciji skup $\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \text{ postoji niz } x_1, \ldots, x_k \in S \text{ koji je } s-\text{raspršen}\}$

je konačan. Posebno, postoji maksimum tog skupa. Za $S \subseteq X, S \neq \emptyset$ i $s > 0$ sa $\Pi(S, s)$ označavamo maksimum skupa $\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid$ postoji niz $x_1, \dots, x_k \in S$ koji je $s-$raspršen$\}$.

Lema 3.2.2. *Neka je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor te neka je $s > 0$. Označimo sa $n := \Pi(X, s)$ i pretpostavimo da je $x_0, \dots, x_{n-1}$ niz koji je s-raspršen u (X, d). Tada je niz $x_0, \dots, x_{n-1}$ $2s$-gust.*

Dokaz. Neka je $a \in X$ proizvoljan. Tada niz $a, x_0, \dots, x_{n-1}$ nije s-raspršen jer bi u suprotnom imali $\Pi(X, s) > n$. Iz toga i pretpostavke da je $x_0, \dots, x_{n-1}$ s-raspršen slijedi da postoji $i \in \{0, \dots, n-1\}$ takav da je $d(a, x_i) \leq s$. Stoga je $a \in K(x_i, 2s)$. Kako je $a \in X$ bio proizvoljan imamo da je $X = \bigcup_{i=0}^{n-1} K(x_i, 2s)$, odnosno $x_0, \dots, x_{n-1}$ je $2s$-gust. □

Za potpuno omeđen metrički prostor (X, d) kažemo da je **efektivno raspršen** ako postoji rekurzivna funkcija $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je $s_k \in \left\langle 0, 2^{-k} \right\rangle$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i takva da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto \Pi(X, s_k)$ rekurzivna.
Neka je X skup i $p \in \mathbb{N}$. Označimo sa $\mathcal{F}^p(X)$ skup svih funkcija $x : \{0, \dots, p\} \to X$. Za $x \in \mathcal{F}^p(X)$ uvodimo oznaku $d(x) := p$.
Neka je $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$ te neka je $x \in \mathcal{F}^p(X)$. Definiramo

$$\rho(x) := \min\{d(x_i, x_j) \mid i, j \in \{0 \dots, p\}, i \neq j\}.$$

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $A \subseteq X$ ograničen skup u (X, d). Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$C_n(A) := \sup\{\epsilon \in \mathbb{R} \mid \text{ postoji } x \in \mathcal{F}^{n+1}(A) \text{ koji je } \epsilon - \text{raspršen}\}.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$C_n(A) = \sup\{\rho(x) \mid x \in \mathcal{F}^{n+1}(A)\}.$$

Naime, neka je $x \in \mathcal{F}^{n+1}(A)$. Tada za svaki $r > 0$ vrijedi da je x $(\rho(x) - r)-$raspršen. Tada vrijedi $\rho(x) - r \in \{\epsilon \in \mathbb{R} \mid$ postoji $x \in \mathcal{F}^{n+1}(A)$ koji je $\epsilon -$ raspršen$\}$, za svaki $r > 0$. Slijedi da je

$$\sup\{\epsilon \in \mathbb{R} \mid \text{ postoji } x \in \mathcal{F}^{n+1}(A) \text{ koji je } \epsilon - \text{raspršen}\} \geq \rho(x), \text{ za svaki } x \in \mathcal{F}^{n+1}(A).$$

Stoga je

$$\sup\{\epsilon \in \mathbb{R} \mid \text{ postoji } x \in \mathcal{F}^{n+1}(A) \text{ koji je } \epsilon - \text{raspršen}\} \geq \sup\{\rho(x) \mid x \in \mathcal{F}^{n+1}(A)\}.$$

S druge strane, pretpostavimo da je $\epsilon \in \{\epsilon \in \mathbb{R} \mid$ postoji $x \in \mathcal{F}^{n+1}(A)$ koji je $\epsilon -$ raspršen$\}$. Tada postoji $x \in \mathcal{F}^{n+1}(A)$ koji je $\epsilon-$raspršen pa za taj x vrijedi $\rho(x) > \epsilon$. Slijedi da je

$$\sup\{\rho(x) \mid x \in \mathcal{F}^{n+1}(A)\} \geq \sup\{\epsilon \in \mathbb{R} \mid \text{ postoji } x \in \mathcal{F}^{n+1}(A) \text{ koji je } \epsilon - \text{raspršen}\}.$$

Dakle, vrijedi

$$\sup\{\rho(x) \mid x \in \mathcal{F}^{n+1}(A)\} = \sup\{\epsilon \in \mathbb{R} \mid \text{ postoji } x \in \mathcal{F}^{n+1}(A) \text{ koji je } \epsilon - \text{raspršen}\},$$

što smo i htjeli dokazati.

Lema 3.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka su $x, x', y, y' \in X$ te neka su $\epsilon, r > 0$ takvi da vrijedi*

$$d(x, y) > r, d(x, x') < \epsilon, d(y, y') < \epsilon.$$

Tada vrijedi $d(x', y') > r - 2\epsilon$.

Dokaz. Koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y),$$

što povlači

$$d(x', y') \geq d(x, y) - d(x, x') - d(y, y') > r - 2\epsilon.$$

□

Propozicija 3.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka su $A, B \subseteq X$ ograničeni podskupovi od X te neka je $\epsilon > 0$ takav da vrijedi $A \approx_\epsilon B$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$|C_n(A) - C_n(B)| \leq 2\epsilon.$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Stavimo

$$\overline{A} := \{r \in \mathbb{R} \mid \text{ postoji } x \in \mathcal{F}^{n+1}(A) \text{ koji je } r - \text{raspršen}\},$$

$$\overline{B} := \{r \in \mathbb{R} \mid \text{ postoji } y \in \mathcal{F}^{n+1}(B) \text{ koji je } r - \text{raspršen}\}.$$

Tada vrijedi

$$C_n(A) = \sup\overline{A} \text{ i } C_n(B) = \sup\overline{B}.$$

Pretpostavimo da je $r \in \overline{A}$. Tada postoje $x_0, \ldots, x_{n+1}$ koji su r-raspršeni. Kako je $A \approx_\epsilon B$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n+1\}$ postoji $y_i \in B$ takav da je $d(x_i, y_i) < \epsilon$. Neka su $i, j \in \{0, \ldots, n+1\}, i \neq j$. Tada vrijedi

$$d(x_i, x_j) > r, d(x_i, y_i) < \epsilon, d(x_j, y_j) < \epsilon.$$

Stoga, prema lemi 3.2.3 imamo

$$d(y_i, y_j) > r - 2\epsilon, \text{ za sve } i, j \in \{0, \ldots, n + 1\}, i \neq j.$$

Dokazali smo da je $y_0, \ldots, y_{n+1}$ $(r-2\epsilon)$-raspršen. Dakle, ako je $r \in \overline{A}$ onda je $r - 2\epsilon \in \overline{B}$. Stoga je

$$r - 2\epsilon \leq \sup\overline{B} \Rightarrow r \leq \sup\overline{B} + 2\epsilon \Rightarrow \sup\overline{A} \leq \sup\overline{B} + 2\epsilon \Rightarrow C_n(A) - C_n(B) \leq 2\epsilon.$$

Analogno bismo dokazali $C_n(B) - C_n(A) \leq 2\epsilon$ pa imamo

$$|C_n(A) - C_n(B)| \leq 2\epsilon.$$

□

Propozicija 3.2.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $l \in \mathbb{N}$ označimo sa $\alpha_{[l]}$ niz $\alpha_{(l)_0}, \ldots, \alpha_{(l)_{\bar{l}}}$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(l) = \rho(\alpha_{[l]})$, za svaki $l \in \mathbb{N}$ takav da je $d(\alpha_{[l]}) \geq 1$.*

Dokaz. Definiramo funkciju $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^3)$ sa

$$\Phi(l) = \{(l, i, j) \in \mathbb{N}^3 \mid i \neq j, 0 \leq i, j \leq \bar{l}\}.$$

Imamo da je Φ r.r.o. funkcija. Naime, očito je

$$\Phi(l) \subseteq \mathbb{N}^3_{\bar{l}+l}, \text{ za svaki } l \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, za sve $l, k, i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\overline{\Phi}(l, k, i, j) = \chi_{\Phi(l)}(k, i, j) = \overline{sg}(|k-l|) \cdot sg(|i-j|) \cdot sg\left(\left(\bar{l}+1\right) \dot{-} i\right) \cdot sg\left(\left(\bar{l}+1\right) \dot{-} j\right).$$

Zaključujemo da je Φ r.r.o. funkcija. Također, imamo da je funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$, $(l, i, j) \mapsto ((l)_i, (l)_j)$ rekurzivna. Korolar 1.6.5 sada povlači da je $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ definirana sa

$$\Psi(l) = \{((l)_i, (l)_j) \mid i \neq j, 0 \leq i, j \leq \bar{l}\}$$

r.r.o. funkcija. Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $g(i, j) = d(\alpha_i, \alpha_j)$, za sve $i, j \in \mathbb{N}^2$. Znamo da je g rekurzivna funkcija pa je prema propoziciji 1.6.13 funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$f(l) = \min_{y \in \Psi(l)} g(y), \text{ za svaki } l \in \mathbb{N},$$

rekurzivna. Lako se vidi da funkcija f zadovoljava tražena svojstva. □

Korolar 3.2.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ rekurzivan niz u $\mathbb{R}$. Tada je skup $D := \{(l, k) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_{[l]}$ je s_k – raspršen$\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathcal{F}^p(X)$, pri čemu je $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$. Za $r > 0$ imamo da je x r-raspršen ako i samo ako je $\rho(x) > r$. Stoga, za sve $l, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(l, k) \in D \iff \rho(\alpha_{[l]}) > s_k \text{ ili } \bar{l} = 0.$$

Prema propoziciji 3.2.5 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi $f(l) = \rho(\alpha_{[l]})$, za svaki $l \in \mathbb{N}$ takav da je $\bar{l} > 0$. Imamo da vrijedi

$$D = \{(l, k) \in \mathbb{N}^2 \mid f(l) > s_k \text{ ili } \bar{l} = 0\}.$$

Propozicija 1.5.6 i lema 1.2.6 povlače da je D rekurzivno prebrojiv skup. □

Lema 3.2.7. *Postoji rekurzivna funkcija $\zeta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je za sve $m, p \in \mathbb{N}$ vrijedi da je svaki konačan niz $x_0, \dots, x_p$ u $\{0, \dots, m\}$ oblika $(i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}$, za neki $i \leq \zeta(m, p)$.*

Dokaz. Pokažimo prvo da tražena funkcija postoji za funkcije $\sigma' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirane sa

$$\sigma'(i, j) = e(i, j) \dot{-} 1, \text{ za sve } i, j \in \mathbb{N},$$

$$\eta'(i) = \mu_k(p_{k+1} \nmid i \text{ ili } i = 0), \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Za $i \in \mathbb{N}$ stavimo $\lambda'(i) := (\sigma'(i, 0), \dots, \sigma'(i, \eta'(i))$. Definiramo funkciju $\zeta' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $\zeta'(m, q) = p_0^{m+1} \cdot \dots \cdot p_q^{m+1}$. Lako se vidi da je ζ' rekurzivna funkcija. Nadalje, neka su $m, q \in \mathbb{N}$ te neka je $(a_0, \dots, a_q) \in \mathbb{N}_m^{q+1}$. Stavimo $i = p_0^{a_0+1} \cdot \dots \cdot p_q^{a_q+1}$. Imamo da je $i \leq \zeta'(m, q)$ i $\lambda'(i) = (a_0, \dots, a_q)$. Pokazali smo da za sve $m, p \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathbb{N}_m^{p+1} \subseteq \{\lambda'(i) \mid 0 \leq i \leq \zeta'(m, p)\},$$

a to smo i htjeli dobiti.
Za $j \in \mathbb{N}$ neka je $\lambda(j) := ((j)_0, \dots, (j)_{\bar{j}})$. Definiramo skup

$$\Omega := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \lambda'(i) = \lambda(j)\}.$$

Lako se vidi da je Ω rekurzivan skup, a očito vrijedi da za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in \Omega$. Prema propoziciji 1.2.9 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi $(i, \varphi(i)) \in \Omega$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Imamo da za svaki $m, p \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathbb{N}_m^{p+1} \subseteq \{\lambda'(i) \mid 0 \leq i \leq \zeta'(m, p)\} = \{\lambda(\varphi(i)) \mid i \in \{0, \dots, \zeta'(m, p)\}$$

$$\subseteq \{\lambda(j) \mid 0 \leq j \leq \max_{0 \leq i \leq \zeta'(m,p)} \varphi(i)\}.$$

Dakle, ako definiramo $\zeta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$\zeta(m, p) = \max_{0 \leq i \leq \zeta'(m,p)} \varphi(i), \text{ za sve } m, p \in \mathbb{N},$$

dobivamo traženu funkciju. □

Propozicija 3.2.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $m \in \mathbb{N}$ označimo sa A_m skup $\{\alpha_0, \dots, \alpha_m\}$. Tada je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n, m) \mapsto C_n(A_m)$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $i \in \mathbb{N}$. Ponovno označimo niz $\alpha_{(i)_0}, \dots, \alpha_{(i)_{\bar{i}}}$ sa $\alpha_{[i]}$. Imamo da je za svaki $m \in \mathbb{N}$ skup A_m konačan pa vrijedi

$$C_n(A_m) = \max_{x \in \mathcal{F}^{n+1}(A_m)} \rho(x), \text{ za sve } n, m \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\zeta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija iz leme 3.2.7. Tada je za $n \in \mathbb{N}$ svaki element skupa $\mathcal{F}^{n+1}(\{0, \dots, m\})$ oblika $(i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}$, za neki $i \leq \zeta(m, n+1)$. Definiramo funkciju $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sa

$$\Phi(n, m) = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq \zeta(m, n+1), \bar{i} = n+1, (i)_j \leq m, \text{ za svaki } j \in \{0, \dots, \bar{i}\}\}.$$

Lako se vidi da je Φ r.r.o funkcija. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$. Imamo da je

$$\mathcal{F}^{n+1}(\{0, \dots, m\}) = \{((i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}) \mid i \in \Phi(n, m)\}.$$

Stoga je

$$\mathcal{F}^{n+1}(A_m) = \{\alpha_{[i]} \mid i \in \Phi(n, m)\}.$$

Konačno, imamo da je

$$C_n(A_m) = \max_{i \in \Phi(n,m)} \rho(\alpha_{[i]}).$$

Sada iz propozicije 3.2.5 i propozicije 1.6.13 slijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n, m) \mapsto C_n(A_m)$ rekurzivna. □

Teorem 3.2.9. *Neka je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor te neka je α efektivan separirajući niz u (X, d). Tada je ekvivalentno:*

a) (X, d, α) je efektivno potpuno omeđen.

b) Funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto C_n(X)$ je rekurzivna.

c) (X, d) je efektivno raspršen.

Dokaz. Dokažimo *a)* ⇒ *b)*. Pretpostavimo da je (X, d, α) efektivno potpuno omeđen i za $m \in \mathbb{N}$ stavimo $A_m := \{\alpha_0, \dots, \alpha_m\}$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$X = \bigcup_{i=0}^{f(k)} K(\alpha_i, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Iz gornje jednakosti slijedi da je $A_{f(k+2)} \approx_{2^{-(k+2)}} X$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 3.2.4 za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$|C_n(X) - C_n(A_{f(k+2)})| \leq 2 \cdot 2^{-(k+2)} < 2^{-k}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Koristeći propoziciju 3.2.8 i propoziciju 1.5.2 zaključujemo da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto C_n(X)$ rekurzivna.
Dokažimo sada $b) \Rightarrow c)$. Pretpostavimo da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto C_n(X)$ rekurzivna. Ako je X konačan skup onda je X očito efektivno raspršen. Stoga, pretpostavimo da je X beskonačan skup. Uočimo da je tada

$$0 < C_{n+1}(X) \leq C_n(X), \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Imamo da je $\lim_{n\to\infty} C_n(X) = 0$. Naime, u suprotnom bi imali da postoji $s > 0$ takav da je $C_n(X) > s$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ što bi bila kontradikcija s propozicijom 3.2.1. Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna surjekcija. Definiramo skup

$$\Omega := \{(k, i, n) \in \mathbb{N}^3 \mid q_i < 2^{-k} \text{ i } C_{n+1}(X) < q_i < C_n(X)\}.$$

Kako je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto C_n(X)$ rekurzivna imamo da je Ω rekurzivno prebrojiv skup. Nadalje, kako je $q(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$ gust skup u $\mathbb{R}$ i kako je $\lim_{n\to\infty} C_n(X) = 0$ imamo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoje $i, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $(k, i, n) \in \Omega$. Prema propoziciji 1.2.9 postoje rekurzivne funkcije $\varphi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $(i, \varphi(k), \psi(k)) \in \Omega$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Odnosno, imamo da je

$$q_{\varphi(k)} < 2^{-k} \text{ i } C_{\psi(k)+1}(X) < q_{\varphi(k)} < C_{\psi(k)}(X), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Ovo povlači da je $\Pi(X, q_{\varphi(k)}) = \psi(k)+1$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Naime, neka je $k \in \mathbb{N}$. Budući da je $C_{\psi(k)}(X) > q_{\varphi(k)}$ postoji niz duljine $\psi(k) + 1$ koji je $q_{\varphi(k)}$-raspršen. Slijedi da je $\Pi(X, q_{\varphi(k)}) \geq \psi(k) + 1$. Budući da je $C_{\psi(k)+1}(X) < q_{\varphi(k)}$ ne postoji niz duljine $\psi(k) + 2$ koji je $q_{\varphi(k)}$-raspršen pa je $\Pi(X, q_{\varphi(k)}) \leq \psi(k) + 1$. Konačno, kako je $q_{\varphi(k)}$ rekurzivan niz za kojeg vrijedi $q_{\varphi(k)} \in \left\langle 0, 2^{-k} \right\rangle$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, imamo da je (X, d) efektivno raspršen.
Preostaje pokazati $c) \Rightarrow a)$. Pretpostavimo da je (X, d) efektivno raspršen. Tada postoji rekurzivna funkcija $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je $s_k \in \left\langle 0, 2^{-k} \right\rangle$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto \Pi(X, s_k)$ rekruzivna. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Stavimo $p := \Pi(X, s_k)$. Tada postoji niz $x_1, \ldots, x_p$ u X koji je s_k-raspršen. Imamo da je $\rho(x_1, \ldots, x_p) > s_k$. Neka je $a > 0$ takav da je $\rho(x_1, \ldots, x_p) > s_k + 2a$. Kako je α gust u X za svaki $i \in \{1, \ldots, p\}$ postoji α_{t_i} takav da je $d(x_i, \alpha_{t_i}) < a$. Neka su $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, $i \neq j$. Primjenom leme 3.2.3 na $x_i, x_j, \alpha_{t_i}, \alpha_{t_j}$ dobivamo

$$d(\alpha_{t_i}, \alpha_{t_j}) > s_k + 2a - 2a = s_k.$$

Zaključujemo da je niz $\alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_p}$ s_k-raspršen. Neka je

$$S := \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_{[l]} \text{ je } s_k - \text{raspršen i } \bar{l} + 1 = \Pi(X, s_k)\}.$$

Upravo smo pokazali da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, l) \in S$, a koristeći korolar 3.2.6 lako vidimo da je S rekurzivno prebrojiv skup. Stoga, prema propoziciji

1.2.9 postoji rekurzivna funkcija $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je za svaki $k \in \mathbb{N}$ niz $\alpha_{[\lambda(k)]}$ s_k-raspršen i $\overline{\lambda(k)} + 1 = \Pi(X, s_k)$. Lema 3.2.2 povlači da je $\alpha_{[\lambda(k)]}$ $2s_k$-gust u (X, d), za svaki $k \in \mathbb{N}$. Definiramo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa $\max\{(\lambda(k+1))_i \mid 0 \leq i \leq \overline{\lambda(k+1)}\}$. Funkcija g je rekurzivna prema propoziciji 1.1.17. Nadalje, imamo da je $\alpha_0, \ldots \alpha_{g(k)}$ $2s_{k+1}-$gust jer sadrži $\alpha_{[\lambda(k+1)]}$. Kako je

$$2s_{k+1} < 2 \cdot 2^{-(k+1)} = 2^{-k}$$

dobivamo da je $\alpha_0, \ldots, \alpha_{g(k)}$ 2^{-k}-gust, odnosno vrijedi

$$X = \bigcup_{i=0}^{g(k)} K(\alpha_i, 2^{-k}), \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, (X, d, α) je efektivno potpuno omeđen.

□

Uočimo da je efektivna raspršenost svojstvo koje ne ovisi o efektivnom separirajućem nizu pa dobivamo sljedeći korolar kao direktnu posljedicu prethodnog teorema.

Korolar 3.2.10. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α i β efektivni separirajući nizovi u (X, d). Tada je (X, d, α) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor ako i samo ako je (X, d, β) efektivno kompaktan izračunljiv metrički prostor.*

Bibliografija

[1] Vasco Brattka i Gero Presser, *Computability on subsets of metric spaces*, Theoretical Computer Sciednce **305** (2003), br.1-3, 43-76.

[2] Zvonko Iljazović i Takayuki Kihara, *Computability of subsets of metric spaces*, Handbook of Computability and Complexity in Analysis, Springer, 2021, 29-69.

[3] M. B. Pour-El, I. Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer–Verlag, Berlin–Heielberg-New York, 1989

[4] Klaus Weihrauch, *Computable analysis*, Springer, Berlin, 2000.

[5] Zvonko Iljazović, *Isometries and Computability Structures.*, J. Univers. Comput. Sci. **16** (2010), br. 18, 2569-2596.

[6] Anita Kuruc, *Izračunljivi metrički prostori*, Diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2015.

[7] Mladen Vuković, *Izračunljivost*, skripta, 2009.

[8] Sibe Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[9] Zvonko iljazović, *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih kontinuuma*, Disertacija, PMF-MO, Zagreb, 2009.

[10] Lucija Validžić, *Topološki aspekti izračunljivosti*, Diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2016.

[11] Matea Čelar, *Topološki prostori izračunljivog tipa*, Diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2019.

Sažetak

U ovom dipomskom radu proučavamo izračunljive metričke prostore. Posebnu pažnju pridajemo takozvanim efektivno kompaktnim izračunljivim metričkim prostorima.

U prvom poglavlju obrađujemo teoriju izračunljivosti. Uvodimo pojam rekurzivne funkcije, rekurzivnog skupa i rekurzivnog prebrojivog skupa. Također, proširujemo pojam rekurzivne funkcije na kodomene $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ te dokazujemo neke važne rezultate koji će nam biti potrebni. Obrađujemo još i r.r.o. funkcije koje će se pokazati vrlo korisne pri dokazivanju rezultata vezanih za efektivnu kompaktnost.

U drugom poglavlju bavimo se izračunljivim metričkim prostorima. Obrađujemo pojam izračunljivo prebrojivog skupa i izračunljivog skupa u izračunljivom metričkom prostoru. Dokazujemo da se izračunljivi skupovi u izračunljivom metričkom prostoru mogu promatrati i sami kao izračunljivi metrički prostori. Također, pokazujemo da svaki izračunljiv metrički prostor na svojevrstan način inducira novi izračunljiv metrički prostor, kojeg nazivamo hiperprostorom.

U trećem poglavlju posvećujemo se efektivno kompaktnim izračunljivim metričkim prostorima. Navodimo neke važne primjere. Dokazujemo da su izračunljivi skupovi gledani kao izračunljivi metrički prostori efektivno kompatkni te dokazujemo i svojevrstan obrat te tvrdnje. Glavni rezultat kojeg dokazujemo je da efektivna kompaktnost ne ovisi o efektivnom separirajućem nizu.

Summary

In this thesis we study computable metric spaces. Special attention is paid to the so-called effectively compact computable metric spaces.

In the first chapter, we study the theory of computability. We introduce the concept of recursive function, recursive set and recursevly enumerable set. Also, we extend the notion of recursive function to codomains $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ and prove some important results that we will need. We also study r.r.b. functions, which will prove to be very useful in proving results related to effective compactness.

In the second chapter we study computable metric spaces. We analyze the notion of a computably enumerable set and a computable set in a computable metric space. We prove that computable sets in a computable metric space can be viewed as computable metric spaces themselves. Also, we show that every computable metric space in a particular way induces a new computable metric space, which we call a hyperspace.

In the third chapter, we devote ourselves to effectively compact computable metric spaces. We state some important examples. We prove that computable sets viewed as computable metric spaces are effectively compact and we also prove a kind of reversal of that claim. The main result we prove is that the effective compactness does not depend on the effective separating sequence.

Životopis

Rođen sam 17. studenog 1998. godine u Zagrebu gdje sam pohađao Osnovnu školu Petar Zrinski. Nakon završetka osnovne škole upisujem matematički smjer u Gimnaziji Lucijana Vranjanina. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sudjelovao sam na natjecanjima iz matematike i informatike. Godine 2017. upisujem preddiplomski studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Na drugoj godinini preddiplomskog studija držao sam demonstrature iz kolegija Programiranje 1 i Programiranje 2. Preddiplomski studij završavam 2020. godine i upisujem diplomski studij Teorijska matematika na istom fakultetu. Na prvoj godini diplomskog studija dodatno sam položio fakultativni kolegij Natjecateljsko programiranje na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu.