Afine verteks algebre tipa A na nivoima bliskim dopustivima

Vukorepa, Ivana

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Vukorepa

Afine verteks algebre tipa A na nivoima bliskim dopustivima

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2022.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Vukorepa

Afine verteks algebre tipa A na nivoima bliskim dopustivima

DOKTORSKI RAD

Mentori:

prof. dr. sc. Dražen Adamović, prof. dr. sc. Ozren Perše

Zagreb, 2022.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ivana Vukorepa

Affine vertex algebras of type A beyond admissible levels

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisors:

prof. dr. sc. Dražen Adamović, prof. dr. sc. Ozren Perše

Zagreb, 2022.

ZAHVALA

Iskreno sam zahvalna mentorima, profesorima Draženu Adamoviću i Ozrenu Peršeu, na pomoći i trudu iskazanim pri izradi ove disertacije. Hvala im na svim idejama, savjetima i usmjeravanju kroz cijeli doktorski studij i znanstveno istraživanje.

Hvala i profesoru Gordanu Radobolji koji me kroz mentorstvo na diplomskom radu usmjerio u znanstvene vode.

Veliko hvala mojim roditeljima, sestri i prijateljima koji su mi cijelo vrijeme bili potpora i saslušali me kad god je trebalo.

Na kraju, hvala mom Anti koji je sa mnom proživljavao svaki korak ovog puta i pružao mi bezrezervnu podršku.

Ova disertacija izrađena je sredstvima ”QuantiXLie - Znanstvenog centra izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri”, projekta sufinanciranog od Vlade Republike Hrvatske i Europske unije, iz Europskog fonda za regionalni razvoj - Operativni program Kompetitivnost i kohezija (KK.01.1.1.01.0004).

Sažetak

U ovoj disertaciji proučavamo neke afine verteks algebre na nivoima bliskim dopustivima. Poseban naglasak je na prostoj afinoj verteks algebri $L_{-5/2}(sl(4))$. Određujemo eksplicitnu formulu za singularni vektor konformne težine četiri u univerzalnoj afinoj verteks algebri $V^{-5/2}(sl(4))$ i dokazujemo da generira maksimalni ideal u $V^{-5/2}(sl(4))$. Klasificiramo ireducibilne $L_{-5/2}(sl(4))$–module u kategoriji $\mathcal{O}$ i određujemo pravila fuzije za ireducibilne module u kategoriji jakih modula $KL_{-5/2}$. Dokazujemo i da je $KL_{-5/2}$ poluprosta tenzorska kategorija.

U dokazima koristimo eksplicitnu formulu za singularni vektor i Zhuovu teoriju. Također koristimo svojstva konformnog ulaganja $gl(4) \hookrightarrow sl(5)$ na nivou $k = -5/2$ [6] i teoriju afinih $\mathscr{W}$-algebri. Pritom dokazujemo da je $k = -5/2$ kolapsirajući nivo obzirom na subregularni nilpotentni element f_{subreg} i dokazujemo određene rezultate o iščezavanju i neiščezavanju funktora hamiltonske kvantne redukcije $H_{f_{subreg}}$.

U drugom dijelu disertacije dajemo novi pristup klasifikaciji ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ za proste afine verteks algebre na nivoima bliskim dopustivima. Uvodimo pojam skoro dopustivih i glavnih skoro dopustivih težina i pokazujemo kako se pomoću njih mogu opisati ireducibilni moduli u kategoriji $\mathcal{O}$ za verteks algebru $L_{-5/2}(sl(4))$. Pokazujemo da se takav pristup može primijeniti i za verteks algebre $L_{-1}(sl(n))$, za $n \geq 3$, čija je klasifikacija ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ određena u [12]. Za navedene verteks algebre konstruiramo široku familiju modula za koje vrijedi Kac-Wakimotova formula karaktera. Na kraju proučavamo verteks algebru $L_{-7/2}(sl(6))$ i navodimo slutnju u slučaju višeg ranga.

SUMMARY

In this thesis we study certain affine vertex algebras beyond admissible levels. Our primary focus is the simple affine vertex algebra $L_{-5/2}(sl(4))$. We determine an explicit formula for the singular vector of conformal weight four in the universal affine vertex algebra $V^{-5/2}(sl(4))$ and show that it generates the maximal ideal in $V^{-5/2}(sl(4))$. We classify irreducible $L_{-5/2}(sl(4))$–modules in the category $\mathscr{O}$, and determine the fusion rules between irreducible modules in the category of ordinary modules $KL_{-5/2}$. We also prove that $KL_{-5/2}$ is a semi-simple tensor category.

In our proofs we use an explicit formula for singular vectors and Zhu's theory. We also use properties of conformal embedding $gl(4) \hookrightarrow sl(5)$ at level $k=-5/2$ [6] and the theory of affine $\mathscr{W}$–algebras. We show that $k=-5/2$ is a collapsing level with respect to the subregular nilpotent element f_{subreg} and prove certain results on vanishing and non-vanishing of the quantum Hamiltonian reduction functor $H_{f_{subreg}}$.

In the second part of this thesis we give a new approach to the classification of irreducible modules in the category $\mathscr{O}$ for simple affine vertex algebras beyond admissible levels. We introduce the notion of almost admissible and principal almost admissible weights and show how they can be used to describe irreducible modules in the category $\mathscr{O}$ for vertex algebra $L_{-5/2}(sl(4))$. We also show that such an approach can be applied to vertex algebras $L_{-1}(sl(n))$, for $n \geq 3$, whose classification of irreducible modules in the category $\mathscr{O}$ was determined in [12]. For the above algebras, we construct a large family of modules to which the Kac-Wakimoto character formula applies. In the end, we study the vertex algebra $L_{-7/2}(sl(6))$ and give the conjecture for the higher-rank cases.

Sadržaj

1. UVOD

Teorija verteks algebri je matematička teorija koja ima važnu ulogu u proučavanju reprezentacija beskonačnodimenzionalnih Liejevih algebri i tenzorskih kategorija. U fizici se verteks algebre pojavljuju u konformnoj teoriji polja i teoriji struna [23]. Razvoj aksiomatske teorije verteks algebri počinje 1980-ih godina u radovima R. Borcherdsa [24] i I. Frenkela, J. Lepowskog i A. Meurmana [37]. Detaljan pregled teorije može se naći u monografijama E. Frenkel, D. Ben Zvi [35], V. Kac [44] i J. Lepowsky, H. Li [54].

Jedna od najvažnijih klasa verteks algebri su verteks algebre pridružene afinim Liejevim algebrama. I. Frenkel i Y.-C. Zhu [38] te H. Li [55] konstruirali su univerzalnu afinu verteks algebru $V^k(\mathfrak{g})$ pridruženu afinoj Liejevoj algebri $\hat{\mathfrak{g}}$ na nivou k, gdje je k kompleksni broj. U slučaju konačnodimenzionalne proste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i nivoa $k \neq -h^\vee$, verteks algebra $V^k(\mathfrak{g})$ ima jedinstveni maksimalni ideal, a onda i jedinstveni prosti kvocijent $L_k(\mathfrak{g})$. Nužan i dovoljan uvjet kad će vrijediti $V^k(\mathfrak{g}) = L_k(\mathfrak{g})$ dali su V. Kac i M. Gorelik u [41].

Teorija reprezentacija proste afine verteks algebre $L_k(\mathfrak{g})$ jako ovisi o nivou k te je usko povezana sa strukturom maksimalnog ideala u $V^k(\mathfrak{g})$. Jedan od glavnih problema je klasifikacija ireducibilnih $L_k(\mathfrak{g})$–modula i struktura određenih kategorija $L_k(\mathfrak{g})$–modula. Za proizvoljne $\mathfrak{g}$ i k ovo je još uvijek otvoren problem. Prvi rezultati dobiveni su za nenegativne cjelobrojne nivoe u radovima [38], [30] i [55]. Dokazano je da je tada maksimalni ideal u $V^k(\mathfrak{g})$ generiran jednim singularnim vektorom i da je kategorija $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduiranih $L_k(\mathfrak{g})$–modula poluprosta s konačno mnogo ireducibilnih modula. Ireducibilni moduli su upravo integrabilni $\hat{\mathfrak{g}}$–moduli najveće težine i nivoa k.

Slični rezultati dobiveni su i za verteks algebre na tzv. dopustivim nivoima. U radovima [47] i [48] V. Kac i M. Wakimoto definirali su dopustive module afinih Liejevih algebri i dokazali da za njih vrijedi formula karaktera iz koje slijedi da je maksimalni ideal u $V^k(\mathfrak{g})$ generiran jednim singularnim vektorom kao u slučaju nenegativnih cjelobrojnih nivoa. D. Adamović je u članku [1] proučavao proste verteks algebre pridružene afinim Liejevim algebrama tipa $C_l^{(1)}$ na dopustivim polucijelim nivoima te klasificirao njihove ireducibilne module u kategoriji $\mathscr{O}$. Dobiveno da je da ih ima konačno mnogo te je dokazano da su najveće težine tih modula upravo sve dopustive težine za $C_l^{(1)}$ nivoa k i da je svaki modul za te verteks algebre u kategoriji $\mathscr{O}$ potpuno reducibilan. Ključni koraci u dokazima tih tvrdnji bili su izračun eksplicitne formule za singularne vektore i primjena Zhuove teorije koja daje bijektivnu korespondenciju između ireducibilnih modula u kategoriji $\mathscr{O}$ za verteks algebru i modula za Zhuovu algebru koja je asocijativna, a time i znatno jednostavnija ([38], [60]). Analogne rezultate dobili su D. Adamović i A. Milas u članku [10] te C. Dong, H. Li i G. Mason u članku [31] za tip $A_1^{(1)}$ na svim dopustivim nivoima, kao i O. Perše u radovima [57] i [58] za tipove $A_l^{(1)}$ i $B_l^{(1)}$ na nekim dopustivim polucijelim nivoima. Autori su u [10] iznijeli slutnju da takvi rezultati vrijede za sve verteks algebre na dopustivim nivoima. Kasnije ju je dokazao T. Arakawa u [18].

Za verteks algebre pridružene afinim Liejevim algebrama na nedopustivim nivoima zasad nije dobiveno mnogo rezultata. Budući da se u nedopustivom slučaju ne mogu primijeniti Kac-Wakimotovi rezultati o strukturi maksimalnog podmodula, potrebno je razviti drugačije metode. Pokazalo se da je moguće primijeniti teoriju afinih $\mathscr{W}$–algebri. Naime, za nilpotentni element f Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i kompleksni broj k, u radovima [46] i [49] definiran je funktor kvantne redukcije koji univerzalnu afinu verteks algebru preslikava u univerzalnu afinu $\mathscr{W}$–algebru $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ te pritom čuva Vermaove module, pa se moduli afinih verteks algebri mogu proučavati u okviru teorije afinih $\mathscr{W}$–algebri. D. Adamović, V. G. Kac, P. M. Frajria, P. Papi i O. Perše u radu [9] proučavali su teoriju reprezentacija afinih verteks algebri na kolapsirajućim nivoima za minimalni nilpotentni element f. Nadalje, određeni rezultati dobiveni su i za neke negativne cjelobrojne nivoe koji se javljaju u free-field realizacijama određenih prostih afinih verteks algebri [13] i kod afinih verteks algebri pridruženih Deligneovoj izuzetnoj seriji [22].

Navedimo neke primjere za koje vjerujemo da će imati važnu ulogu u budućem proučavanju nedopustivih afinih verteks algebri:

(1) Afine verteks algebre na negativnim nivoima koje se javljaju u dekompozicijama konformnih ulaganja iz [6], [7], [5],

(2) Afine verteks algebre na kolapsirajućim nivoima za afine $\mathscr{W}$–algebre.

Iz nedavnih rezultata iz teorije verteks tenzorskih kategorija ([26], [29]), za očekivati je da će za sve verteks algebre koje se javljaju u (1) i (2), kategorija KL_k jakih modula imati strukturu rigidne pleteničaste tenzorske kategorije. U slučaju kolapsirajućih nivoa za minimalne afine

$\mathscr{W}$–algebre, iz [9] slijedi da je kategorija KL_k poluprosta. Koristeći taj rezultat i dekompozicije iz (1), u članku [29] pokazano je da KL_k ima strukturu rigidne pleteničaste tenzorske kategorije. No, postoji mnogo nedopustivih afinih vereks algebri koje se javljaju u (1), a koje nisu proučavane ni u [9] ni u [29]. Za takve verteks algebre minimalne afine $\mathscr{W}$–algebre su jako komplicirane, pa je potrebno primijeniti drugačije metode da bi se dokazala egzistencija tenzorske kategorije. Čini se da bi bilo prirodno koristiti funktor kvantne redukcije i $\mathscr{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ za neminimalni nilpotentni element f. Nažalost, rezultati o iščezavanju i neiščezavanju QHR funktora $H_f(\cdot)$ nisu dani eksplicitno kao u slučaju minimalne redukcije, pa nije moguće jednostavno generalizirati metode iz [9]. Određeni rezultati u tom smjeru dobiveni su nedavno u [19], [20], ali samo u slučaju dopustivih nivoa.

U slučaju $\mathfrak{g} = sl(n)$, nivo k je dopustiv ako i samo ako vrijedi jednakost

$$k+n = \frac{p}{q}, \text{ pri čemu su } p \text{ i } q \text{ relativno prosti prirodni brojevi, } p \geq n.$$

U ovom radu proučavat ćemo verteks algebre pridružene $\mathfrak{g} = sl(n)$, za $n \geq 3$, na nivoima bliskim dopustivima. Njih definiramo kao nivoe oblika $k = -n + \frac{n-1}{q}$, pri čemu su $n-1$ i q relativno prosti prirodni brojevi. Posebno detaljno proučavamo prostu afinu verteks algebru $L_{-5/2}(sl(4))$ koja pripada oba prethodno navedena slučaja (1) i (2). Ovaj primjer je od posebne važnosti jer gledajući Liejeve algebre $\mathfrak{g} = sl(n)$, i koristeći kriterij iz [41], dobivamo da je nivo $k = -5/2$ za $\widehat{sl(4)}$ novi primjer nedopustivog, negeneričkog, polucijelog nivoa koji nije dosad istražen. Još jedna motivacija za proučavanje ovog slučaja je konformno ulaganje $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M(1)$ u $L_{-5/2}(sl(5))$ iz [6] (ovdje $M(1)$ označava Heisenbergovu verteks algebru pridruženu abelovoj Liejevoj algebri ranga 1). Nadalje, određene rezultate dokazujemo i za afine verteks algebre višeg ranga na nivou -1 te na polucijelim nivoima bliskim dopustivima na kojima imamo konformno ulaganje $gl(n) \hookrightarrow sl(n+1)$ [6].

Sada ćemo dati kratki prikaz sadržaja ovog rada s pregledom najvažnijih rezultata.

Poglavlje 2: Verteks algebre

U ovom poglavlju navodimo osnovne definicije i rezultate vezane za verteks algebre i povezane strukture koji će nam biti potrebni u ostatku disertacije. U izlaganju pratimo [44] i [54]. Definiramo verteks algebre i s njima povezane pojmove kao što su verteks podalgebra, ideal, homomorfizam i tenzorski produkt. Zatim definiramo module za verteks algebre, operatore ispreplitanja i pravila fuzije. Detaljno navodimo ključne definicije i rezultate vezane za afine Liejeve algebre i njihove module te opisujemo konstrukciju strukture verteks algebre na određenim modulima za afine Liejeve algebre. Posebno, definiramo i Heisenbergovu verteks algebru i navodimo klasifikaciju njenih ireducibilnih modula. Na kraju, navodimo osnovne definicije i rezultate vezane za afine $\mathscr{W}$–algebre i module.

Poglavlje 3: Teorija reprezentacija afine verteks algebre $L_{-5/2}(sl(4))$

Ovo poglavlje je središnji dio disertacije te je zajednički rad s D. Adamovićem i O. Peršeom koji je objavljen u časopisu Communications in Contemporary Mathematics [14].

U točki 3.2 navodimo osnovne rezultate vezane za Zhuovu teoriju koju ćemo koristiti za klasifikaciju ireducibilnih $L_{-5/2}(sl(4))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$. Također navodimo i poznate rezultate o afinim $\mathscr{W}$–algebrama i posebno ih primjenjujemo na slučaj $\mathscr{W}$–algebre $\mathscr{W}^{-5/2}(sl(4), f_{subreg})$, gdje je f_{subreg} određeni subregularni nilpotenti element. Za ovu $\mathscr{W}$–algebru poznate su OPE formule koje navodimo u točki 3.10.

U proučavanju proste afine verteks algebre $L_{-5/2}(sl(4))$ prvi korak nam je određivanje eksplicitne formule za singularni vektor v konformne težine četiri u univerzalnoj afinoj verteks algebri $V^{-5/2}(sl(4))$. Ova formula se pokazuje dosta kompliciranom, a dajemo je u točki 3.3 (vidi Teorem 3.3.1).

Koristeći metode iz [2,10] i Zhuovu teoriju, klasifikacija ireducibilnih modula u kategoriji $\mathscr{O}$ za pripadni kvocijent $\widetilde{L}_{-5/2}(sl(4)) = V^{-5/2}(sl(4))/\langle v\rangle$ svodi se na rješavanje određenog sustava polinomijalnih jednadžbi. U točki 3.4 dokazujemo da su ireducibilne reprezentacije

$$L_{-5/2}(\mu_i(t)),\ t \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, 16,$$

te su parametrizirane kao unija 16 pravaca u $\mathbb{C}^3$ (vidi Teorem 3.4.4). Dakle, za razliku od dopustivih nivoa, postoji beskonačno mnogo ireducibilnih modula u kategoriji $\mathscr{O}$. Kao posljedicu dobivamo da su ireducibilni $\widetilde{L}_{-5/2}(sl(4))$–moduli u kategoriji $KL_{-5/2}$ jakih modula:

$$\pi_r = L_{-5/2}(r\omega_1),\ \pi_{-r} = L_{-5/2}(r\omega_3) \quad (r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

U točki 3.5 dokazujemo da je $\widetilde{L}_{-5/2}(sl(4))$ prosta, odnosno da je maksimalni ideal u $V^{-5/2}(sl(4))$ generiran singularnim vektorom v kao u slučaju dopustivih nivoa (cf. [10], [18]). Također dokazujemo i da je kategorija $KL_{-5/2}$ poluprosta.

Slična situacija bila je u slučaju afine verteks algebre pridružene prostoj Liejevoj algebri $sl(n)$, $n \geq 4$ na nivou -1. Klasifikacija ireducibilnih $L_{-1}(sl(n))$–modula dobivena je u [12,13] koristeći vrlo slične metode kao u ovom slučaju (ali su formule za singularne vektore bile znatno jednostavnije). Opis maksimalnog ideala u $V^{-1}(sl(n))$ dobiven je u [21] koristeći funktor kvantne redukcije za minimalni nilpotentni element, a da je kategorija KL_{-1} poluprosta dokazano je u [9]. Pregled ovog pristupa dan je u točki 3.5.1.

U ovom slučaju koristimo afinu $\mathcal{W}$-algebru $W^{-5/2}(sl(4), f_{subreg})$ pridruženu određenom subregularnom nilpotentom elementu. Kao posebno važan rezultat dobivamo:

Teorem 3.5.1 *Nivo $k = -5/2$ je kolapsirajući nivo za $W^k(\mathfrak{g}, f_{subreg})$ i vrijedi*

$$W_{-5/2}(\mathfrak{g}, f_{subreg}) \cong M_J(1),$$

gdje je $M_J(1)$ Heisenbergova verteks algebra generirana s J.

Koristeći svojstva funktora kvantne redukcije $H_{f_{subreg}}(\cdot)$ koja dokazujemo u točki 3.6, dobivamo:

Teorem 3.5.6 *Vrijedi:*

(i) $J^{-5/2}$ je maksimalan ideal u $V^{-5/2}(sl(4))$, odnosno $L_{-5/2}(sl(4)) \cong V^{-5/2}(sl(4))/J^{-5/2}$.

(ii) Kategorija $KL_{-5/2}$ je poluprosta.

U točki 3.6 proučavamo funktor kvantne redukcije $H_{f_{subreg}}(\cdot)$ i dokazujemo da ima malo drugačija svojstva nego u slučaju minimalnog nilpotentnog elementa. Preciznije, dokazujemo sljedeći teorem:

Teorem 3.5.4 *Za svaki $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ vrijedi:*
(P) $H_{f_{subreg}}(L_{-5/2}(n\omega_3)) \neq \{0\}$ i $H_{f_{subreg}}(M) = \{0\}$ za svaki $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modul M najveće težine u $KL_{-5/2}$, $\mathfrak{g}$–težine $n\omega_1$.

Dokaz se temelji na određivanju eksplicitnih formula za singularne vektore stupnja dva u generaliziranim Vermaovim modulima $V^k(\mu)$ za $\mu = n\omega_1, n\omega_3$, $n > 0$ i opisu njihovih maksimalnih podmodula $J^k \cdot V^k(\mu)$. Zatim konstruiramo univerzalne $\widetilde{L}_k(sl(4))$–module na kojima određujemo djelovanje funktora $H_{f_{subreg}}(\cdot)$. Pritom nam je jedna od ključnih činjenica poznavanje klasifikacije ireducibilnih $\widetilde{L}_k(sl(4))$–modula u KL_k.

U točki 3.7 proučavamo rezultate vezane za konformno ulaganje $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M(1)$ u $L_{-5/2}(sl(5))$ iz [6] iz kojih slijedi da se svi moduli π_r, $r \in \mathbb{Z}$ realiziraju u $L_{-5/2}(sl(5))$. Pomoću toga određujemo pravila fuzije za ireducibilne $L_{-5/2}(sl(4))$–module u kategoriji $KL_{-5/2}$ (vidi Propoziciju 3.7.3):

$$\pi_r \times \pi_s = \pi_{r+s} \quad (r, s \in \mathbb{Z}).$$

Primjenom rezultata iz [29], dokazujemo da je $KL_{-5/2}$ rigidna, pleteničasta tenzorska kategorija.

U točki 3.8 određujemo dekompoziciju ireducibilnih $L_{-5/2}(sl(5))$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$ kao $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M(1)$–modula.

U točki 3.9 proučavamo $L_{-5/2}(sl(4))$–module $L_{-5/2}(t\omega_1)$, za $t \in \mathbb{C}$, kao potkvocijente određenih relaksiranih $L_{-5/2}(sl(5))$–modula. Također dokazujemo da postoji homomorfizam iz Zhuove algebre pridružene $L_{-5/2}(sl(4))$ u odgovarajuću Weylovu algebru, za kojeg se nadamo da bi mogao biti korisan pri proučavanju $L_{-5/2}(sl(4))$–modula izvan kategorije $\mathcal{O}$.

Poglavlje 4: Novi pristup opisu ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ za afine verteks algebre na nivoima bliskim dopustivima

U ovom poglavlju bavimo se klasifikacijom ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ za verteks algebre pridružene afinim Liejevim algebrama tipa $A_l^{(1)}$ na nivoima bliskim dopustivima. U slučaju dopustivih nivoa dokazano je da su najveće težine ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ za pridruženu prostu afinu verteks algebru upravo dopustive težine danog nivoa. Pri klasifikaciji ireducibilnih modula za verteks algebru $L_{-5/2}(sl(4))$ koja je proučavana u poglavlju 3, neki od ključnih koraka bili su izračun eksplicitne formule za singularni vektor u $V^{-5/2}(sl(4))$ koja se pokazala dosta kompliciranom (vidi Teorem 3.3.1) i rješavanje određenog sustava polinomijalnih jednadžbi (vidi Lemu 3.4.1 i Propoziciju 3.4.2). Po uzoru na dopustive nivoe, dat ćemo algebarski opis tih težina. Zato uvodimo skoro dopustive i glavne skoro dopustive težine. Dokazat ćemo da se takav opis može primijeniti i u slučaju verteks algebre $L_{-1}(sl(n))$, za $n \geq 3$, čiju su klasifikaciju ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ dobili D. Adamović i O. Perše u [12]. Slutimo da se klasifikacija ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ može opisati ovim metodama i za ostale proste verteks algebre na nivoima bliskim dopustivima. Posebno, detaljno ćemo opisati što se događa u slučaju verteks algebre $L_{-7/2}(sl(6))$.

U točki 4.1 uvodimo pojmove skoro dopustive i glavne skoro dopustive težine za afinu Liejevu algebru pridruženu $sl(n)$ te skoro dopustivog i glavnog skoro dopustivog modula za $\widehat{sl(n)}$.

U točki 4.2 određujemo sve glavne skoro dopustive težine nivoa $-5/2$ za afinu Liejevu algebru $\widehat{sl(4)}$. Dobivamo da su dane s

$$\{\mu_i(t) \mid i = 1, \ldots, 16,\ t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}\},$$

pri čemu su težine $\mu_i(t)$ definirane u Propoziciji 3.4.2. Budući da za glavne skoro dopustive module vrijedi Kac-Wakimotova formula karaktera [47], dajemo opis nekih ireducibilnih $L_{-5/2}(sl(4))$–modula.

U točki 4.3 određujemo sve glavne skoro dopustive težine nivoa -1 za afinu Liejevu algebru

$\widehat{sl(n)}$, $n \geq 3$. Dobivamo:

Teorem 4.3.2 *Sve glavne skoro dopustive težine λ za $\widehat{sl(n)}$ nivoa -1 dane su s $\lambda = -\Lambda_0 + \lambda(t)$, gdje je*

$$\lambda(t) \in \{t\omega_1 \mid t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\} \cup \{t\omega_{n-1} \mid t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-2} \{t\omega_i + (-1-t)\omega_{i+1} \mid t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\}.$$

Za sve glavne skoro dopustive težine λ, dajemo opis ireducibilnih $L_{-1}(sl(n))$–modula $L(\lambda)$ (vidi Teorem 4.3.5).

U točki 4.4 proučavamo konformno ulaganje $gl(n) \hookrightarrow sl(n+1)$ na nivou $k = -\frac{n+1}{2}$. Navodimo rezultate o tom konformnom ulaganju iz [6] i, analogno Propozicijama 3.8.2 i 3.8.3 iz poglavlja 3, određujemo eksplicitne formule za $\widehat{gl(n)}$–singularne vektore u ireducibilnim $L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n+1))$–modulima u kategoriji $\mathcal{O}$.

U točki 4.5 primjenom rezultata iz točke 4.4 za $n = 6$ određujemo dekompozicije ireducibilnih $L_{-7/2}(sl(7))$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$ kao $L_{-7/2}(sl(6)) \otimes M(1)$–modula (vidi Teorem 4.5.1). Za težine $-\frac{7}{2}\Lambda_0 + \mu_i(t)$, $i = 1, \ldots, 84$, $L_{-7/2}(sl(6))$–modula koje se javljaju u dekompozicijama za prebrojivo mnogo t, dokazat ćemo da su najveće težine ireducibilnih $L_{-7/2}(sl(6))$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$ za sve $t \in \mathbb{C}$ (vidi Teorem 4.5.2).

U točki 4.6 određujemo sve glavne skoro dopustive težine nivoa $-7/2$ za afinu Liejevu algebru $\widehat{sl(6)}$. Dobivamo:

Teorem 4.6.1 *Uz oznake iz točke 4.5, skup svih glavnih skoro dopustivih težina za $\widehat{sl(6)}$ nivoa $-7/2$ dan je s*

$$\{-\frac{7}{2}\Lambda_0 + \mu_i(t) \mid i = 1, \ldots, 96, \ t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}\}.$$

Na kraju navodimo slutnju o klasifikaciji ireducibilnih $L_{-7/2}(sl(6))$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$:

Slutnja 4.6.2 Skup svih ireducibilnih $L_{-7/2}(sl(6))$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$ dan je s

$$\{L_{-7/2}(\mu_i(t)) \mid i = 1, \ldots, 96, \ t \in \mathbb{C}\}.$$

U točki 4.7 na temelju rezultata dobivenih u slučajevima verteks algebri $L_{-1}(sl(n))$, $n \geq 3$ i $L_{-5/2}(sl(4))$, dajemo slutnju o parametrizacijama najvećih težina ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ za sve proste verteks algebe $L_k(sl(n))$, gdje je $k = -\frac{n+1}{2}$, $n \geq 4$ paran.

2. VERTEKS ALGEBRE

U ovom poglavlju navodimo osnovne definicije i rezultate vezane za verteks algebre i njima pridružene strukture koji će nam biti potrebni u ostatku disertacije. Detaljan pregled teorije može se naći u monografijama E. Frenkel, D. Ben Zvi [35], V. Kac [44] i J. Lepowsky, H. Li [54].

2.1. FORMALNI RAČUN

Neka je V kompleksni vektorski prostor. Uvedimo sljedeće oznake:

$$V\{z\} = \{\sum_{n\in\mathbb{Q}} v_n z^n | v_n \in V\}, \quad V[[z,z^{-1}]] = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n | v_n \in V\}.$$

Označimo sa $\mathbb{Z}_+$ skup svih nenegativnih cijelih brojeva, tj. $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$. Definiramo sljedeće potprostore od $V[[z,z^{-1}]]$:

$$\begin{aligned}
V[z] &= \{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} v_n z^n | v_n \in V, v_n = 0 \ \text{ za } n \text{ dovoljno velik}\},\\
V[z,z^{-1}] &= \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n | v_n \in V, v_n = 0 \ \text{ za sve osim konačno mnogo } n\},\\
V[[z]] &= \{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} v_n z^n | v_n \in V\},\\
V((z)) &= \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n | v_n \in V, v_n = 0 \ \text{ za } n \text{ dovoljno malen}\}.
\end{aligned}$$

Za $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n \in V[[z,z^{-1}]]$, definiramo formalnu derivaciju s

$$\frac{d}{dz} f(z) = f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n v_n z^{n-1}.$$

Formalna δ–funkcija je formalni red definiran s

$$\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n \in \mathbb{C}[[z,z^{-1}]].$$

2.2. OSNOVNE DEFINICIJE IZ TEORIJE VERTEKS ALGEBRI

U ovoj točki pri izlaganju pratimo [54].

Definicija 2.2.1. **Verteks algebra** je uređena trojka $(V, Y, \mathbf{1})$ gdje je V vektorski prostor, $\mathbf{1} \in V$ istaknuti vektor kojeg zovemo **vakuum vektor** i Y linearno preslikavanje

$$Y(\cdot, z) : V \to (\mathrm{End}V)[[z, z^{-1}]], \;\; v \mapsto Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$$

koje zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $Y(u, z)v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n v z^{-n-1}$ ima konačno mnogo negativnih potencija za sve $u, v \in V$,
2. (aksiom vakuuma) $Y(\mathbf{1}, z) = \mathrm{id}_V$,
3. (aksiom stvaranja) $Y(v, z)\mathbf{1} \in V[[z]]$ i $\lim_{z \to 0} Y(v, z)\mathbf{1} = v$ za sve $v \in V$,
4. (Jacobijev identitet)

$$z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_2}{z_0} \right) Y(u, z_1) Y(v, z_2) - z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0} \right) Y(v, z_2) Y(u, z_1) =$$
$$= z_2^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) Y(Y(u, z_0)v, z_2)$$

   za sve $u, v \in V$.

Za $v \in V$, red $Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$ zovemo **verteks operator** pridružen vektoru v.

Može se dokazati da je, uz prisutnost aksioma (1)-(3) iz definicije verteks algebre, Jacobijev identitet ekvivalentan sa sljedeća dva aksioma:

1. (aksiom derivacije) postoji operator $D \in \mathrm{End}(V)$ za koji vrijedi

$$[D, Y(v, z)] = Y(Dv, z) = \frac{d}{dz} Y(v, z), \;\; v \in V,$$

2. (lokalnost) za sve $u, v \in V$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(z_1 - z_2)^N [Y(u, z_1), Y(v, z_2)] = 0.$$

Operator D zove se **operator derivacije** u verteks algebri V i definiran je s

$$Dv = v_{-2}\mathbf{1}, \;\; v \in V.$$

Definicija 2.2.2. Neka je V verteks algebra. Za vektor $\omega \in V$ kažemo da je **konformni** ili **Virasorov vektor** ako $Y(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_n z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}$ zadovoljava komutacijske relacije Virasorove algebre

$$[L(m),L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c_V, \tag{2.1}$$

pri čemu je $c_V \in \mathbb{C}$ konstanta koju zovemo **centralni naboj** ili **rang** od V.

Definicija 2.2.3. **Algebra verteks operatora (VOA)** je uređena četvorka $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ gdje je $(V,Y,\mathbf{1})$ verteks algebra, a $\omega \in V$ konformni vektor koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $L(0)$ djeluje poluprosto na V s cjelobrojnim svojstvenim vrijednostima, odnosno vrijedi $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{(n)}$, pri čemu je $V_{(n)} = \{v \in V \mid L(0)v = nv\}$,
2. $\dim V_{(n)} < \infty$ za sve $n \in \mathbb{Z}$,
3. postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $V_{(n)} = \{0\}$ za svaki $n \leq n_0$,
4. $D = L(-1)$.

Za vektor $v \in V_{(n)}$ kažemo da je homogeni vektor **konformne težine** n i uvodimo oznaku $|v| = \mathrm{wt} v = n$.

Propozicija 2.2.4. Neka je V verteks algebra. Vektor $\omega \in V$ je konformni vektor ako i samo ako vrijedi

$$\omega_0 w = D\omega,\ \omega_1 w = 2\omega,\ \omega_2\omega = 0,\ \omega_3\omega = \frac{c_V}{2}\mathbf{1} \text{ i } \omega_n\omega = 0 \text{ za } n \geq 4.$$

Propozicija 2.2.5. [32] Neka je $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ algebra verteks operatora centralnog naboja c. Pretpostavimo da postoji vektor $v \in V$ za kojeg vrijedi

$$L(n)v = \delta_{n,0}v,\ v_n v = K\delta_{n,1}\mathbf{1}, \text{ za sve } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

pri čemu je $K \in \mathbb{C}$. Tada je

$$\overline{\omega} = \omega + Dv$$

konformni vektor u verteks algebri V, centralnog naboja $c_v = c - 12K$. Neka je $Y(\overline{\omega},z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{L}(n) z^{-n-2}$. Tada je djelovanje od $\overline{L}(n)$ dano s $\overline{L}(n) = L(n) - (n+1)v_n$, za $n \in \mathbb{Z}$. Posebno, vrijedi

$$\overline{L}(0) = L(0) - v_0,$$
$$\overline{L}(-1) = L(-1).$$

Definicija 2.2.6. **Homomorfizam verteks algebri** $(V_1, Y_1, \mathbf{1}_1)$ i $(V_2, Y_2, \mathbf{1}_2)$ je linearno preslikavanje $\phi : V_1 \to V_2$ za koje vrijedi

$$\phi(\mathbf{1}_1) = (\mathbf{1}_2),$$
$$\phi(u_n b) = \phi(u)_n \phi(b), \text{ za } u, v \in V, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Homomorfizam verteks algebri operatora $(V_1, Y_1, \mathbf{1}_1, \omega_1)$ i $(V_2, Y_2, \mathbf{1}_2, \omega_2)$ je linearno preslikavanje $\phi : V_1 \to V_2$ koje je homomorfizam verteks algebri $(V_1, Y_1, \mathbf{1}_1)$ i $(V_2, Y_2, \mathbf{1}_2)$ te zadovoljava $\phi(\omega_1) = \omega_2$.

Definicija 2.2.7. Neka je $(V, Y, \mathbf{1})$ verteks algebra. **Verteks podalgebra** od V je vektorski potprostor U od V takav da je $\mathbf{1} \in U$ i $(U, Y|_U, \mathbf{1})$ je verteks algebra.

Napomena 2.2.8. Vektorski potprostor U od V je verteks podalgebra verteks algebre $(V, Y, \mathbf{1})$ ako i samo ako je $\mathbf{1} \in U$ i $u_n v \in U$ za sve $u, v \in U, n \in \mathbb{Z}$.

Sljedeća definicija uvedena je u [6].

Definicija 2.2.9. Neka su V_1 i V_2 algebre verteks operatora s konformnim vektorima ω_1 i ω_2, redom, i neka je V_1 verteks podalegbra od V_2. Kažemo da je V_1 **konformno uložena** u V_2 ako je $\omega_1 = \omega_2$.

Neka je V verteks algebra i $S \subseteq V$. Verteks podalgebra $\langle S \rangle$ **generirana skupom** S definirana je kao najmanja verteks podalgebra od V koja sadrži S, odnosno $\langle S \rangle$ je presjek svih verteks podalgebri od V koje sadrže skup S.

Propozicija 2.2.10. Neka je V verteks algebra i $S \subseteq V$. Tada je

$$\langle S \rangle = \left\{ u^{(1)}_{n_1} \cdots u^{(r)}_{n_r} \mathbf{1} \mid r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ u^{(1)}, \dots, u^{(r)} \in S, \ n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ako je $V = \langle S \rangle$, kažemo da je verteks algebra V **generirana skupom** S. Ako je pritom

$$V = \left\{ u^{(1)}_{n_1} \cdots u^{(r)}_{n_r} \mathbf{1} \mid r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ u^{(1)}, \dots, u^{(r)} \in S, \ n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_{<0} \right\},$$

kažemo da je verteks algebra V **jako generirana skupom** S.

Definicija 2.2.11. **Ideal** u verteks algebri V je vektorski potprostor I od V takav da je $u_n v \in I$ i $v_n u \in I$ za sve $u \in V, v \in I, n \in \mathbb{Z}$. Za verteks algebru V kažemo da je **prosta** ako su joj jedini ideali $\{0\}$ i V.

Ideali u verteks algebri imaju sljedeće važno svojstvo.

Propozicija 2.2.12. Neka je I ideal u algebri verteks operatora V takav da $\mathbf{1} \notin I,\ \omega \notin I$. Struktura algebre verteks operatora na V inducira strukturu algebre verteks operatora na V/I istog centralnog naboja, pri čemu je $\mathbf{1}_{V/I} = \mathbf{1} + I$ i

$$(u+I)_n(v+I) = u_n v + I, \quad u,v \in V, n \in \mathbb{Z}.$$

Definicija 2.2.13. Neka je V verteks algebra i $S \subseteq V$. Definiramo **centralizator** (ili **komutant**) od S u V sa

$$C_V(S) = \{v \in V \mid [Y(v,z_1), Y(s,z_2)] = 0 \text{ za sve } s \in S\}.$$

Može se lagano dokazati da je $C_V(S)$ verteks podalgebra od V.

Kao i u teoriji asocijativnih algebri, može se definirati direktni produkt i tenzorski produkt konačno mnogo algebri verteks operatora:

Propozicija 2.2.14. Neka su $(V_1, Y_1, \mathbf{1}_1, \omega_1)$ i $(V_2, Y_2, \mathbf{1}_2, \omega_2)$ algebre verteks operatora istog centralnog naboja c. Direktna suma vektorskih prostora $V_1 \oplus V_2$ ima strukturu algebre verteks operatora centralnog naboja c danu sa

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1} = (\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2),\\
&Y((u,v),z) = (Y_1(u,z), Y_2(v,z)), \quad u \in V_1, v \in V_2,\\
&\omega = (\omega_1, \omega_2).
\end{aligned}$$

Propozicija 2.2.15. Neka su $(V_1, Y_1, \mathbf{1}_1, \omega_1)$ i $(V_2, Y_2, \mathbf{1}_2, \omega_2)$ algebre verteks operatora centralnih naboja c_1 i c_2, redom. Tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1 \otimes V_2$ ima strukturu algebre verteks operatora centralnog naboja $c_1 + c_2$ danu sa

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1} = \mathbf{1}_1 \otimes \mathbf{1}_2,\\
&Y(u \otimes v, z) = Y_1(u,z) \otimes Y_2(v,z),\ u \in V_1, v \in V_2,\\
&\omega = \omega_1 \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_1 \otimes \omega_2.
\end{aligned}$$

Ako su V_1 i V_2 verteks algebre, tenzorski produkt $V_1 \otimes V_2$ karakterizirat ćemo određenim univerzalnim svojstvom.

Neka su $(V_1, Y_1, \mathbf{1}_1)$ i $(V_2, Y_2, \mathbf{1}_2)$ verteks algebre. Stavimo $V = V_1 \otimes V_2$. Definiramo preslikavanja $e_i : V_i \to V$, $i = 1,2$ sa

$$e_1(v) = v \otimes \mathbf{1}_2, \quad v \in V_1,$$

$$e_2(v) = \mathbf{1}_1 \otimes v, \quad v \in V_2.$$

Preslikavanja e_i, $i = 1,2$ su homomorfizmi verteks algebri. Lako se vidi da vrijedi

$$e_1(V_1) \subset C_V(e_2(V_2)).$$

Propozicija 2.2.16. Neka su V_1 i V_2 verteks algebre. Neka je U verteks algebra i neka su $g_i : V_i \to U$, $i = 1,2$ homomorfizmi verteks algebri takvi da je $g_1(V_1) \subset C_U(g_2(V_2))$. Tada postoji jedinstveni homomorfizam verteks algebri $g : V_1 \otimes V_2 \to U$ takav da je $g \circ e_i = g_i$, za $i = 1,2$.

Napomena 2.2.17. Tvrdnje propozicija 2.2.14, 2.2.15 i 2.2.16 vrijede i za proizvoljno konačno mnogo algebri verteks operatora. Više detalja može se naći u poglavlju 3.12 u [54].

2.3. Moduli za verteks algebre i algebre verteks operatora

U ovom dijelu navodimo osnovne definicije teorije modula za verteks algebre i algebre verteks operatora. Pritom pratimo izlaganja iz [36] i [55].

Definicija 2.3.1. **Modul** za verteks algebru $(V, Y, \mathbf{1})$ je uređeni par (M, Y_M) gdje je M vektorski prostor, a Y_M linearno preslikavanje

$$Y_M(\cdot, z) : V \to (\mathrm{End} M)[[z, z^{-1}]], \;\; v \mapsto Y_M(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$$

koje zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $Y_M(v, z)a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n a z^{-n-1}$ ima samo konačno mnogo negativnih potencija za sve $v \in V, a \in M$,
2. (aksiom vakuuma) $Y_M(\mathbf{1}, z) = \mathrm{id}_M$,
3. (Jacobijev identitet)

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y_M(u, z_1) Y_M(v, z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y_M(v, z_2) Y_M(u, z_1) =$$
$$= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y_M(Y(u, z_0)v, z_2)$$

   za sve $u, v \in V$.

Definicija 2.3.2. Neka je $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ algebra verteks operatora. Ako je (M, Y_M) modul za verteks algebru $(V, Y, \mathbf{1})$, kažemo da je M **slabi modul** za algebru verteks operatora V.

Važna klasa slabih modula dana je u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.3.3. Neka je $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ algebra verteks operatora i neka je (M, Y_M) slabi modul za V. Kažemo da je (M, Y_M) $\mathbb{Z}_+$–**graduiran modul** za V ako postoji rastav $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{(n)}$ takav da za homogene $v \in V$ vrijedi

$$v_m M_{(n)} \subseteq M_{(n+|v|-m-1)}, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

pri čemu uzimamo da je $M_{(n)} = 0$ za $n < 0$. Za vektore $v \in M_{(n)}$ kažemo da su **stupnja** n i pišemo $\deg(v) = n$.

Definicija 2.3.4. Neka je $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ algebra verteks operatora i neka je (M, Y_M) slabi modul za V. Kažemo da je (M, Y_M) **(jaki) modul** za V ako vrijedi:

1. $L(0)$ djeluje poluprosto na M, odnosno postoji rastav $M = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}} M_{(\alpha)}$, pri čemu je $M_{(\alpha)} = \{a \in M \mid L(0)a = \alpha a\}$,

2. $\dim M_{(\alpha)} < \infty$ za sve $\alpha \in \mathbb{C}$,

3. Za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$ postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $M_{(\alpha+n)} = 0$ za svaki $n \leq n_0$.

Definicija 2.3.5. Neka je V algebra verteks operatora te M_1, M_2 i M_3 V–moduli. **Operator ispreplitanja** tipa $\binom{M_3}{M_1 \ M_2}$ je linearno preslikavanje $I = I(\cdot, z) : M_1 \to \mathrm{Hom}(M_2, M_3)\{z\}$,

$$a \mapsto I(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Q}} a_n^I z^{-n-1}, \ \ a \in M_1,$$

koje zadovoljava sljedeća svojstva:

1. za sve $a \in M_1$, $b \in M_2$ je $a_n^I b = 0$ za dovoljno veliki n,

2. vrijedi Jacobijev identitet

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y_{M_3}(a, z_1) I(b, z_2) c - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) I(b, z_2) Y_{M_2}(a, z_1) c =$$
$$= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) I(Y_{M_1}(a, z_0) b, z_2) c,$$

   za sve $a \in V$, $b \in M_1$, $c \in M_2$,

3. $I(L(-1)a, z) = \dfrac{d}{dz} I(a, z)$, za svaki $a \in M_1$.

Napomena 2.3.6. Za algebru verteks operatora V verteks operator $Y(\cdot, z)$ je operator ispreplitanja tipa $\binom{V}{V \ V}$. Ako je (M, Y_M) V–modul, onda je $Y_M(\cdot, z)$ operator ispreplitanja tipa $\binom{M}{V \ M}$.

Svi operatora ispreplitanja tipa $\binom{M_3}{M_1 \ M_2}$ tvore vektorski prostor kojeg ćemo označavati s $I\binom{M_3}{M_1 \ M_2}$. Uvodimo oznaku

$$N_{M_1, M_2}^{M_3} = \dim I \begin{pmatrix} M_3 \\ M_1 \ \ M_2 \end{pmatrix}.$$

Brojeve $N_{M_1, M_2}^{M_3}$ zovemo **pravila fuzije** pridružena verteks algebri V i odgovarajućim modulima.

Neka je K kategorija V–modula dijagonalizabilnih obzirom na operator $L(0)$ i neka je $\{M_j \mid j \in J\}$ familija iz K koja za sve $i, j \in J$ zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $N_{M_i,M_j}^{M_k}$ je konačan za svaki $k \in J$,

2. $N_{M_i,M_j}^{M_k} = 0$ za sve osim konačno mnogo $k \in J$.

Tada algebru s bazom $\{M_j \mid j \in J\}$ i produktom

$$M_i \times M_j = \sum_{k \in J} N_{M_i,M_j}^{M_k} M_k, \quad i, j \in J$$

zovemo **fuzijskom algebrom** pridruženoj verteks algebri V i kategoriji K.

Neka je K kategorija V–modula i neka su M_1, M_2 i M_3 ireducibilni V–moduli iz K. Ako za pravila fuzije vrijedi $N_{M_1,M_2}^{M_3} = 1$ i $N_{M_1,M_2}^{R} = 0$ za svaki ireducibilni V–modul R iz kategorije K koji nije izomorfan M_3, onda pišemo

$$M_1 \times M_2 = M_3.$$

2.4. Afine Liejeve algebre i moduli

U ovom dijelu navodimo osnovne definicije i rezultate iz teorije afinih Liejevih algebri. U izlaganju pratimo [42] i [43].

Neka je $\mathfrak{g}$ prosta, konačnodimenzionalna Liejeva algebra s trokutastom dekompozicijom $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ i neka je Δ pripadni sistem korijena. Fiksiramo skup pozitivnih korijena Δ_+. Označimo $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$. Neka je θ maksimalni korijen i neka je $(\cdot,\cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ Killingova forma. Restrikcija $(\cdot,\cdot)|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ je nedegenerirana, pa za svaki $\varphi \in \mathfrak{h}^*$ postoji jedinstveni $t_\varphi \in \mathfrak{h}$ takav da je $\varphi(x) = (t_\varphi, x)$ za svaki $x \in \mathfrak{h}$. Preslikavanje $\varphi \mapsto t_\varphi$ je izomorfizam vektorskih prostora $\mathfrak{h}^*$ i $\mathfrak{h}$. Zato možemo definirati Killingovu formu na $\mathfrak{h}^*$ sa $(\varphi, \psi) = (t_\varphi, t_\psi)$, $\varphi, \psi \in \mathfrak{h}^*$. Normaliziramo je uvjetom $(\theta, \theta) = 2$. Za $\alpha \in \Delta$ označimo s $\alpha^\vee = \frac{2t_\alpha}{\langle t_\alpha, t_\alpha\rangle}$ pripadni kokorijen. Označimo s $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ skup prostih korijena.

Skup dominantnih integralnih težina od $\mathfrak{g}$, u oznaci P_+, definiran je s

$$P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}_+, \text{ za sve } \alpha \in \Delta_+\}.$$

Fundamentalne težine od $\mathfrak{g}$ su $\omega_1, \ldots, \omega_l \in P_+$ definirane uvjetom

$$\omega_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{i,j}, \ \ i, j = 1, \ldots, l.$$

Za težinu $\mu \in \mathfrak{h}^*$ označimo s $V(\mu)$ ireducibilni $\mathfrak{g}$–modul najveće težine μ. $V(\mu)$ je konačnodimenzionalan ako i samo ako je $\mu \in P_+$.

Označimo $d = \dim \mathfrak{g}$. Neka je $\{u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}\}$ ortonormirana baza za $\mathfrak{g}$ obzirom na $(\cdot,\cdot)$. Casimirov element od $\mathfrak{g}$ definiran je s

$$\Omega = \sum_{i=1}^{d} u^{(i)} u^{(i)} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}).$$

Vrijedi da je $\Omega \in Z(\mathscr{U}(\mathfrak{g}))$ i da Ω na modulima najveće težine $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ djeluje skalarom $\langle \lambda, \lambda + 2\rho\rangle$. Posebno, skalar kojim Ω djeluje na $\mathfrak{g}$ označimo s $2h^\vee$. Skalar $h^\vee$ zovemo dualni Coxeterov broj od $\mathfrak{g}$. Vrijedi $h^\vee = \langle \theta, \rho \rangle + 1$.

Definicija 2.4.1. **Afina Liejeva algebra** $\hat{\mathfrak{g}}$ je vektorski prostor $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ s komutacijskim relacijama

$$[x(m), y(n)] = [x, y](m+n) + m\delta_{m,-n}(x, y)K, \ \ x, y \in \mathfrak{g}, \ m, n \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

$$[K, \hat{\mathfrak{g}}] = 0, \tag{2.3}$$

pri čemu $x(m)$ označava $x \otimes t^m \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

Zbog relacije $[x(0), y(0)] = [x, y](0)$, $x, y \in \mathfrak{g}$, slijedi da je preslikavanje $x \mapsto x(0) = x \otimes 1$ izomorfizam Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}(0)$, pa $\mathfrak{g}$ smatramo podalgebrom od $\hat{\mathfrak{g}}$.

Definicija 2.4.2. **Afina Kac-Moodyjeva algebra** $\widetilde{\mathfrak{g}}$ je vektorski prostor $\widetilde{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}d$ s komutacijskim relacijama (2.2), (2.3) i

$$[d, x(n)] = nx(n), \quad x \in \mathfrak{g},\ n \in \mathbb{Z},$$
$$[d, K] = 0.$$

Da bismo dobili trokutastu dekompoziciju od $\hat{\mathfrak{g}}$, definiramo Cartanovu podalgebru $\hat{\mathfrak{h}}$ od $\hat{\mathfrak{g}}$ sa $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K$. Nadalje, definiramo sljedeće podalgebre od $\hat{\mathfrak{g}}$:

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\pm} = \mathfrak{g} \otimes t^{\pm 1}\mathbb{C}[t^{\pm 1}],$$
$$\hat{\mathfrak{n}}_{\pm} = \hat{\mathfrak{g}}_{\pm} \oplus \mathfrak{n}_{\pm}.$$

Sada je $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}}_{-} \oplus \hat{\mathfrak{h}} \oplus \hat{\mathfrak{n}}+$ trokutasta dekompozicija od $\hat{\mathfrak{g}}$.

Da bismo opisali pripadni sistem korijena od $\hat{\mathfrak{g}}$, promotrit ćemo afinu Kac-Moodyjevu algebru $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Definirajmo Cartanovu podalgebru $\widetilde{\mathfrak{h}}$ od $\widetilde{\mathfrak{g}}$ sa $\widetilde{\mathfrak{h}} = \hat{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}d$. Neka su $\Lambda_0, \delta \in \widetilde{\mathfrak{h}}^*$ definirani s

$$\Lambda_0|_{\mathfrak{h}} = 0,\ \Lambda_0(K) = 1,\ \Lambda_0(d) = 0,$$
$$\delta|_{\mathfrak{h}} = 0,\ \delta(K) = 0,\ \delta(d) = 1.$$

Stavimo $\alpha_0 = \delta - \theta$. Fiksiramo skup prostih korijena $\hat{\Pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Skup pozitivnih korijena je $\hat{\Delta}_+ = \Delta_+ \cup \{n\delta + \alpha \mid \alpha \in \Delta,\ n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{n\delta \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Označimo s $\hat{\Pi}^\vee = \{\alpha_0^\vee, \alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee\}$ skup prostih kokorijena. Fundamentalne težine od $\hat{\mathfrak{g}}$ su $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_l \in \widetilde{\mathfrak{h}}^*$ definirane uvjetom

$$\Lambda_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, l.$$

Definicija 2.4.3. Za $\hat{\mathfrak{g}}$–modul M kažemo da je **težinski** ako $\hat{\mathfrak{h}}$ djeluje poluprosto na M, odnosno ako je $M = \bigoplus_{\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*} M_\lambda$, pri čemu su

$$M_\lambda = \{v \in M \mid h.v = \lambda(h)v,\ \forall h \in \hat{\mathfrak{h}}\}, \quad \lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$$

težinski prostori. Skup $P(M) = \{\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^* \mid M_\lambda \neq 0\}$ zovemo **skup težina** od M.

Definicija 2.4.4. Neka je M težinski $\hat{\mathfrak{g}}$–modul. Za vektor $v \in M_\lambda$ kažemo da je **singularan vektor** ako je $\hat{\mathfrak{n}}_+.v = 0$. Za vektor $v \in M_\lambda$ kažemo da je **primitivni (ili subsingularni) vektor** ako postoji podmodul U od M takav da je v singularan u kvocijentnom modulu M/U.

Na $\hat{\mathfrak{h}}^*$ definiramo parcijalni uređaj $\leq$ sa:

$$\mu \leq \lambda \iff \lambda - \mu = \sum_{i=0}^{l} n_i \alpha_i,\ n_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Za $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ definirajmo

$$D(\lambda) = \{\mu \in \hat{\mathfrak{h}}^* \mid \mu \leq \lambda\}.$$

Definicija 2.4.5. Za $\hat{\mathfrak{g}}$–modul M kažemo da je iz **kategorije** $\mathscr{O}$ ako vrijedi:

1. M je težinski $\hat{\mathfrak{g}}$–modul s konačnodimenzionalnim težinskim prostorima,
2. postoji konačno mnogo elemenata $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ takvih da je $P(M) \subset \bigcup_{i=1}^{s} D(\lambda_i)$.

Važna klasa modula iz kategorije $\mathscr{O}$ dana je u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.4.6. Za $\hat{\mathfrak{g}}$–modul M kažemo da je **modul najveće težine** $\Lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ ako postoji vektor $v_\Lambda \in M$ koji zadovoljava sljedeće uvjete:

1. $\hat{\mathfrak{n}}_+ . v_\Lambda = 0$,
2. $h.v_\Lambda = \Lambda(h) v_\Lambda$, za svaki $h \in \hat{\mathfrak{h}}$,
3. $\mathscr{U}(\hat{\mathfrak{g}}).v_\Lambda = M$.

U tom slučaju vektor v_Λ zovemo **vektor najveće težine**, a Λ zovemo **najveća težina** od M.

Neka je $\Lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ fiksan. Na $\mathbb{C}v_\Lambda \cong \mathbb{C}$ definiramo strukturu $\hat{\mathfrak{n}}_+ \oplus \hat{\mathfrak{h}}$–modula stavljajući $\hat{\mathfrak{n}}_+ . v_\Lambda = 0$ i $h.v_\Lambda = \Lambda(h) v_\Lambda$ za svaki $h \in \hat{\mathfrak{h}}$. Inducirani $\hat{\mathfrak{g}}$–modul

$$M(\Lambda) = \mathscr{U}(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathscr{U}(\hat{\mathfrak{n}}_+ \oplus \hat{\mathfrak{h}})} \mathbb{C}v_\Lambda$$

zovemo **Vermaov modul** najveće težine Λ. Vermaov modul ima sljedeće univerzalno svojstvo: svaki $\hat{\mathfrak{g}}$–modul U najveće težine Λ je kvocijent od $M(\Lambda)$, odnosno postoji surjektivni $\hat{\mathfrak{g}}$–homomorfizam $M(\Lambda) \to U$. Nadalje, $M(\Lambda)$ sadrži jedinstveni maksimalni podmodul $M^1(\Lambda)$ (moguće i $M^1(\Lambda)$=0). Pripadni kvocijentni modul

$$L(\Lambda) = M(\Lambda)/M^1(\Lambda)$$

je jedinstveni ireducibilni $\hat{\mathfrak{g}}$–modul najveće težine Λ.

2.4.1. Dopustivi moduli afinih Liejevih algebri

Neka je R (odnosno R_+)$\subset \hat{\mathfrak{h}}$ skup svih realnih (pozitivnih realnih) kokorijena od $\hat{\mathfrak{g}}$. Fiksirajmo $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$. Neka je $R^\lambda = \{\alpha \in R \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}\}$, $R^\lambda_+ = R^\lambda \cap R_+$, Π skup prostih kokorijena u R i $\Pi^\lambda = \{\alpha \in R^\lambda_+ \mid \alpha$ nije suma nekih kokorijena iz $R^\lambda_+\}$. Označimo $\rho = h^\vee \Lambda_0 + \bar{\rho}$, gdje je $\bar{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$.

Definicija 2.4.7. [48] Težina $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ naziva se **dopustivom** ako zadovoljava sljedeće uvjete:

$$\begin{aligned} &\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle \notin -\mathbb{Z}_+, \text{ za sve } \alpha \in R^\lambda_+, \\ &\mathbb{Q}R^\lambda = \mathbb{Q}\Pi. \end{aligned}$$

Definicija 2.4.8. Za ireducibilni $\hat{\mathfrak{g}}$–modul $L(\lambda)$ kažemo da je **dopustiv** ako je λ dopustiva težina.

V. Kac i M. Wakimoto su dokazali da za dopustive module vrijedi formula karaktera [47]. Iz nje slijedi opis maksimalnog podmodula u Vermaovom modulu $M(\lambda)$:

Teorem 2.4.9. [47] Neka je $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ dopustiva težina. Tada je

$$L(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{\sum_{\alpha \in \Pi^\lambda} \mathscr{U}(\hat{\mathfrak{g}}) v^\alpha},$$

gdje je $v^\alpha \in M(\lambda)$ singularni vektor težine $r_\alpha.\lambda$, vektor najveće težine u $M(r_\alpha.\lambda) = \mathscr{U}(\hat{\mathfrak{g}}) v^\alpha \subset M(\lambda)$.

2.5. NEKE KLASE VERTEKS ALGEBRI

2.5.1. Afine verteks algebre

U ovom dijelu navodimo rezultate iz radova [38] i [55] u kojima je opisana konstrukcija algebri verteks operatora pridruženih afinim Liejevim algebrama. Od posebne važnosti će nam biti slučajevi kad je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna, prosta Liejeva algebra i kad je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna, komutativna Liejeva algebra.

Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra sa simetričnom, invarijantnom, bilinearnom formom $(\cdot,\cdot)$. Analogno kao u točki 2.4, uvodimo pojam afinizacije od $\mathfrak{g}$:

Definicija 2.5.1. **Afina Liejeva algebra** $\hat{\mathfrak{g}}$ je vektorski prostor $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ s komutatorom

$$
\begin{aligned}
&[x(m),y(n)] = [x,y](m+n) + m\delta_{m,-n}(x,y)K, \quad x,y \in \mathfrak{g}, \ m,n \in \mathbb{Z}, \\
&[K,\hat{\mathfrak{g}}] = 0,
\end{aligned}
$$

pri čemu $x(m)$ označava $x \otimes t^m \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]$.

Definiramo sljedeće podalgebre od $\hat{\mathfrak{g}}$:

$$
\hat{\mathfrak{g}}_{\pm} = \mathfrak{g} \otimes t^{\pm 1}\mathbb{C}[t^{\pm 1}], \quad \hat{\mathfrak{g}}_{\geq 0} = \hat{\mathfrak{g}}_{+} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}K.
$$

Definicija 2.5.2. Za $\hat{\mathfrak{g}}$–modul W kažemo da je **restringiran** ako za svaki $a \in \mathfrak{g}$ i $w \in W$ postoji $n \in \mathbb{Z}_{+}$ takav da je $a(m)w = 0$ za svaki $m \geq n$.

Definicija 2.5.3. Ako je W $\hat{\mathfrak{g}}$–modul na kojem K djeluje kao k id za neki $k \in \mathbb{C}$, kažemo da je W **nivoa** k.

Opišimo konstrukciju tzv. generaliziranog Vermaovog modula na kojem ćemo u posebnom slučaju dobiti strukturu verteks algebre. Neka je U $\mathfrak{g}$–modul i $k \in \mathbb{C}$. Stavimo da $\hat{\mathfrak{g}}_{+}$ djeluje trivijalno na U, a K kao operator $k\,\mathrm{id}_U$. Tada U ima strukturu $\hat{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$–modula. Inducirani $\hat{\mathfrak{g}}$–modul

$$
V^k(U) = \mathscr{U}(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathscr{U}(\hat{\mathfrak{g}}_{\geq 0})} U
$$

zovemo **generalizirani Vermaov modul**. Lako se vidi da je $V^k(U)$ restringirani $\hat{\mathfrak{g}}$–modul nivoa k.

Ako je $U = \mathbb{C}v_0$ trivijalni $\mathfrak{g}$–modul, onda $V^k(U)$ označavamo s $V^k(\mathfrak{g})$. Iz Poincaré-Birkhoff-Wittovog (PBW) teorema dobivamo izomorfizam vektorskih prostora

$$V^k(\mathfrak{g}) \cong \mathscr{U}(\hat{\mathfrak{g}}_-).$$

Stavimo $\mathbf{1} = 1 \otimes v_0$. Tada je

$$V^k(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \geq 0} V^k(\mathfrak{g})_{(n)},$$

gdje je $V^k(\mathfrak{g})_{(n)}$ potprostor linearno razapet monomima oblika

$$a^{(1)}(-m_1) \cdots a^{(r)}(-m_r)\mathbf{1},$$

pri čemu je $r \geq 0,\ a^{(i)} \in \mathfrak{g},\ m_i \geq 1,\ m_1 + \cdots + m_r = n$. Uz identifikaciju $a \leftrightarrow a(-1)\mathbf{1}$ imamo $V^k(\mathfrak{g})_{(1)} = \mathfrak{g}$.

Sljedeći teorem daje egzistenciju i jedinstvenost strukture verteks algebre na modulu $V^k(\mathfrak{g})$. Dokazuje se korištenjem Teorema o generirajućim poljima [54, Teorem 5.7.1].

Teorem 2.5.4. Za svaki $k \in \mathbb{C}$ postoji jedinstvena struktura verteks algebre $(V^k(\mathfrak{g}), Y, \mathbf{1})$ na $\hat{\mathfrak{g}}$–modulu $V^k(\mathfrak{g})$ takva da je $\mathbf{1}$ vakuum vektor i

$$Y(a,z) = a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) z^{-n-1}.$$

Verteks operator dan je s

$$Y(a^{(1)}(-n_1) \cdots a^{(r)}(-n_r)\mathbf{1}, z) = a^{(1)}(z)_{n_1} \cdots a^{(r)}(z)_{n_r} \mathrm{id}_{V^k(\mathfrak{g})}.$$

Pretpostavimo sada je da je forma $(\cdot,\cdot)$ i nedegenerirana. Neka je $d = \dim\mathfrak{g}$. Neka je $\{u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}\}$ ortonormirana baza za $\mathfrak{g}$ obzirom na $(\cdot,\cdot)$. Casimirov element od $\mathfrak{g}$ definiran je s

$$\Omega = \sum_{i=1}^{d} u^{(i)} u^{(i)} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}).$$

Pretpostavimo da Ω djeluje na $\mathfrak{g}$ skalarom kojeg ćemo označiti $2h^\vee$, $h^\vee \in \mathbb{C}$.

Neka je $k \in \mathbb{C}$, $k \neq -h^\vee$. Tada je

$$\omega = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_{i=1}^{d} u^{(i)}(-1) u^{(i)}(-1)\mathbf{1} \in V^k(\mathfrak{g})_{(2)} \tag{2.4}$$

konformni vektor u verteks algebri $V^k(\mathfrak{g})$ centralnog naboja $\frac{k \cdot \dim\mathfrak{g}}{k+h^\vee}$. Ovo je generalizacija Sugawarine konstrukcije konformnog vektora u konačnodimenzionalnoj, prostoj Liejevoj algebri.

Teorem 2.5.5. [38, 55] Za $k \in \mathbb{C}$, $k \neq -h^\vee$, četvorka $(V^k(\mathfrak{g}), Y, \mathbf{1}, \omega)$ je algebra verteks operatora. Svaki restirngirani $\hat{\mathfrak{g}}$–modul nivoa k je slabi $V^k(\mathfrak{g})$–modul.

Algebre verteks operatora $V^k(\mathfrak{g})$ i $L_k(\mathfrak{g})$ za $\mathfrak{g}$ prostu i $k \neq -h^\vee$

Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna, prosta Liejeva algebra. Budući da Casimirov element Ω na $\mathfrak{g}$ djeluje skalarom $2h^\vee$, pri čemu je $h^\vee$ dualni Coxeterov broj, iz Teorema 2.5.5 za svaki $k \in \mathbb{C}$, $k \neq -h^\vee$ dobivamo algebru verteks operatora $V^k(\mathfrak{g})$. Nazivamo je **univerzalna afina verteks algebra**.

Neka je $k \in \mathbb{C}$, $k \neq -h^\vee$. Za $\mu \in \mathfrak{h}^*$ uvedimo oznaku

$$V^k(\mu) = V^k(V(\mu)).$$

Primijetimo da je $V^k(\mathfrak{g}) = V^k(0)$. Modul $V^k(\mu)$ sadrži jedinstveni maksimalni podmodul $V_1^k(\mu)$. Tada je

$$L_k(\mu) = V^k(\mu)/V_1^k(\mu)$$

ireducibilni $\hat{\mathfrak{g}}$–modul. Proizvoljna težina $\Lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ je oblika $\Lambda = k\Lambda_0 + \mu$, pri čemu je $\mu \in \mathfrak{h}^*$ i $k = \Lambda(K)$. Dakle, $V^k(\mu)$ je $\hat{\mathfrak{g}}$–modul najveće težine $k\Lambda_0 + \mu$, pa je kvocijent Vermaovog modula $M(k\Lambda_0 + \mu)$. $V^k(\mu)$ i $L_k(\mu)$ su $\mathbb{Z}_+$–graduirani slabi $V^k(\mathfrak{g})$–moduli. Ako je $\mu \in P_+$ dominantna integralna težina, onda su $V^k(\mu)$ i $L_k(\mu)$ jaki $V^k(\mathfrak{g})$–moduli.

Posebno, označimo s $L_k(\mathfrak{g})$ ireducibilni $\hat{\mathfrak{g}}$–modul $L_k(0)$.

Propozicija 2.5.6. Za $k \neq -h^\vee$, $L_k(\mathfrak{g})$ je prosta algebra verteks operatora.

Označimo s $\mathscr{C}^k$ kategoriju restringiranih $\hat{\mathfrak{g}}$–modula nivoa $k \in \mathbb{C}$, $k \neq -h^\vee$. Neka je KL^k kategorija modula $M \in \mathscr{C}^k$ koji su kao $\hat{\mathfrak{g}}$–moduli u kategoriji $\mathscr{O}$ te obzirom na djelovanje $L(0)$ imaju dekompoziciju

$$M = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}} M_\alpha, \ \ L(0)|_{M_\alpha} = \alpha \mathrm{Id}, \ \ \dim M_\alpha < \infty.$$

Kategoriju KL_k definiramo kao kategoriju svih modula u KL^k koji su moduli za prostu verteks algebru $L_k(\mathfrak{g})$ [9].

Napomena 2.5.7. Neka je $k \in \mathbb{C}$, $k \neq -h^\vee$ i neka je W restringirani $\hat{\mathfrak{g}}$–modul nivoa k. Na W vrijedi $[L(0), x(n)] = -nx(n)$, $x \in \mathfrak{g}$, $n \in \mathbb{Z}$, pa je W modul i za Kac-Moodyjevu algebru $\widetilde{\mathfrak{g}}$, pri čemu je djelovanje od d definirano kao $-L(0)$.

2.5.2. Heisenbergova verteks algebra

Neka je $\mathfrak{h}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor kojeg promatramo kao komutativnu Liejevu algebru i neka je $(\cdot,\cdot)$ simetrična, nedegenerirana, bilinearna forma na $\mathfrak{h}$. Ta forma je invarijantna jer je $\mathfrak{h}$ komutativna. Promotrimo pripadnu afinu Liejevu algebru

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K.$$

Neka su $k \in \mathbb{C}$ i $\mu \in \mathfrak{h}^*$ proizvoljni. Neka je $\mathbb{C}_\mu \cong \mathbb{C}$ jednodimenzionalni $\mathfrak{h}$–modul na kojem je djelovanje dano sa $h.1 = \mu(h)1$, $h \in \mathfrak{h}$. Uvedimo oznake

$$M(k,\mu) = V^k(\mathbb{C}_\mu), \;\; M(k) = M(k,0) = V^k(\mathfrak{h}).$$

Ako je $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$, koristimo i oznake $M_h(k,\mu)$ za $M(k,\mu)$, te $M_h(k)$ za $M(k)$. Budući da je $\mathfrak{h}$ komutativna, Casimirov element Ω djeluje trivijalno na $\mathfrak{h}$, pa je $h^\vee = 0$. Kao poseban slučaj Teorema 2.5.5 dobivamo: Za $k \neq 0$

$$\omega = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{d} u^{(i)}(-1)u^{(i)}(-1)\mathbf{1}$$

je konformni vektor u $M(k)$ te je $(M(k), Y, \mathbf{1}, \omega)$ algebra verteks operatora centralnog naboja $d = \dim \mathfrak{h}$. Nazivamo je **Heisenbergova verteks algebra**.

Teorem 2.5.8. Neka je $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$. Heisenbergova verteks algebra $M(k)$ je prosta. Svi ireducibilni $M(k)$–moduli dani su sa $\{M(k,\mu) \mid \mu \in \mathfrak{h}^*\}$.

Propozicija 2.5.9. Neka je $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$. Tada je preslikavanje $\varphi : M(k) \to M(1)$ definirano s

$$a^{(1)}(-n_1)\cdots a^{(r)}(-n_r)\mathbf{1} \to (\sqrt{k})^r a^{(1)}(-n_1)\cdots a^{(r)}(-n_r)\mathbf{1}$$

za $r \geq 0$, $a^{(i)} \in \mathfrak{h}$, $n_i \geq 1$ izomorfizam algebri verteks operatora.

2.6. Afine $\mathscr{W}$–algebre i moduli

Za prostu, konačnodimenzionalnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$, nilpotentni element $f \in \mathfrak{g}$ i $k \in \mathbb{C}$, V. Kac, S. Roan i M. Wakimoto su u članku [46] metodom kvantne redukcije konstruirali univerzalnu afinu $\mathscr{W}$–algebru $W^k(\mathfrak{g}, f)$. Prethodno su je tom metodom konstruirali E. Frenkel i B. Feigin [33] u slučaju kad je f glavni nilpotentni element. Afine $\mathscr{W}$–algebre nedavno su proučavane u [4], [28], [50], [20]. U ovom izlaganju pratimo [46] i [49].

Neka je $\mathfrak{g}$ prosta, konačnodimenzionalna Liejeva algebra sa simetričnom, nedegeneriranom, invarijantnom, bilinearnom formom $(\cdot,\cdot)$.

Definicija 2.6.1. Neka je

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j \tag{2.5}$$

$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$–gradacija od $\mathfrak{g}$ i $f \in \mathfrak{g}_{-1}$. Za gradaciju (2.5) kažemo da je **dobra obzirom na** f ako je

$$\mathfrak{g}^f := \{a \in \mathfrak{g} \mid [f,a] = 0\} \subset \bigoplus_{j \leq 0} \mathfrak{g}_j. \tag{2.6}$$

Za potrebe ovog rada pretpostavljat ćemo da je $\mathfrak{g}_j = 0$, za $j \notin \mathbb{Z}$. U tom slučaju kažemo da je gradacija (2.5) parna. Neka je (x, f) par elemenata iz $\mathfrak{g}$ koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. f je nilpotentan i vrijedi $[x, f] = -f$,

2. $\mathrm{ad}x$ djeluje poluprosto na $\mathfrak{g}$ s cjelobrojnim svojstvenim vrijednostima, tj. imamo gradaciju $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$, gdje je $\mathfrak{g}_j = \{a \in \mathfrak{g} \mid [x,a] = ja\}$,

3. gradacija iz (2) je dobra obzirom na f.

Stavimo $\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{j>0} \mathfrak{g}_j$. Neka su A i A^* neparni vektorski prostori $\mathfrak{g}_+$ i $\mathfrak{g}_+^*$, redom, i neka je $A_{\mathrm{ch}} = A \oplus A^*$. Definirajmo simetričnu, nedegeneriranu, bilinearnu formu $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{ch}}$ na A_{ch} s

$$\langle A, A \rangle_{\mathrm{ch}} = 0 = \langle A^*, A^* \rangle_{\mathrm{ch}},$$
$$\langle a, b^* \rangle_{\mathrm{ch}} = \langle b^*, a \rangle_{\mathrm{ch}} = b^*(a), \;\; a \in A, \; b^* \in A^*.$$

Označimo s $F(A_{\mathrm{ch}})$ pripadnu verteks algebru nabijenih fermiona. Ako je $\varphi \in A$, onda za elemente $\varphi(z)$ kažemo da imaju naboj 1, a za $\varphi^*(z)$ kažemo da imaju naboj -1. Neka je $k \in \mathbb{C}$, $k \neq -h^\vee$. Za elemente iz univerzalne afine verteks algebre $V^k(\mathfrak{g})$ kažemo da imaju naboj 0. Neka je $\mathscr{C}(\mathfrak{g}, x, f, k)$ verteks algebra definirana s

$$\mathscr{C}(\mathfrak{g}, x, f, k) = V^k(\mathfrak{g}) \otimes F(A_{\mathrm{ch}}).$$

Obzirom na naboj imamo dekompoziciju $\mathscr{C}(\mathfrak{g},x,f,k)=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\mathscr{C}_m$. U $\mathscr{C}(\mathfrak{g},x,f,k)$ definirano je polje $d(z)$ [46]. Stavimo $d_0=\mathrm{Res}_z d(z)$. Može se pokazati $d_0^2=0$ i $d_0(\mathscr{C}_m)\subset\mathscr{C}_{m-1}$ za sve $m\in\mathbb{Z}$, pa je $(\mathscr{C}(\mathfrak{g},x,f,k),d_0)$ $\mathbb{Z}$–graduiran homološki kompleks. Nulta homologija tog kompleksa ima strukturu verteks algebre koju označavamo s $W^k(\mathfrak{g},x,f)$. Kažemo da je dobivena kvantnom redukcijom za četvorku $(\mathfrak{g},x,f,k)$ i pišemo $W^k(\mathfrak{g},x,f)=H_f(V^k(\mathfrak{g}))$. Verteks algebra $W^k(\mathfrak{g},x,f)$ naziva se **univerzalna afina $\mathscr{W}$–algebra** pridružena $\mathfrak{g}$ i f. Za $W^k(\mathfrak{g},x,f)$ kraće ćemo pisati $W^k(\mathfrak{g},f)$. Jedinstveni prosti kvocijent od $W^k(\mathfrak{g},f)$ označavamo s $W_k(\mathfrak{g},f)$.

Moduli za $\mathscr{W}$–algebru $W^k(\mathfrak{g},f)$

U [49] konstruiran je funktor $H_f(\cdot)$ iz kategorije restringiranih $\hat{\mathfrak{g}}$–modula nivoa k u kategoriju $\mathbb{Z}$–graduiranih $W^k(\mathfrak{g},f)$–modula koji omogućava proučavanje reprezentacija afinih verteks algebri u okviru teorije afinih $\mathscr{W}$–algebri. Važno svojstvo tog funktora dano je u sljedećoj propoziciji:

Propozicija 2.6.2. [16] Neka je $k\in\mathbb{C}$, $k\neq-h^\vee$. Funktor

$$KL_k\to W^k(\mathfrak{g},f)-\mathrm{Mod},\;\; M\mapsto H_f(M)$$

je egzaktan.

3. Teorija reprezentacija afine verteks algebre $L_{-5/2}(sl(4))$

Ovo poglavlje je zajednički rad s D. Adamovićem i O. Peršeom te je objavljeno u časopisu Communications in Contemporary Mathematics [14].

3.1. Uvod

Teorija reprezentacija proste afine verteks algebre $L_k(\mathfrak{g})$, za proizvoljnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i nivo $k \in \mathbb{C}$, dugi niz godina je vrlo zanimljiv problem. Neki od najbolje proučenih slučajeva su nenegativni cjelobrojni nivoi $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (cf. [38], [55]), i klasa određenih racionalnih nivoa, tzv. dopustivi nivoi (cf. [10], [18], [47], [48]), koji uključuju i nenegativne cjelobrojne nivoe. S druge strane, zasad nema mnogo rezultata o teoriji reprezentacija verteks algebre $L_k(\mathfrak{g})$ za nedopustive (negeneričke, nekritične) nivoe $k \in \mathbb{Q}$. Zasad je najviše rezultata dobiveno za neke negativne cjelobrojne nivoe budući da se oni javljaju u free-field realizacijama određenih prostih afinih verteks algebri (cf. [13]), kod afinih verteks algebri pridruženih Deligneovoj izuzetnoj seriji (cf. [22]), te u kontekstu kolapsirajućih nivoa za minimalne afine $\mathscr{W}$–algebre (cf. [9]).

No, ostalo je mnogo slučajeva u kojima teorija reprezentacija afinih verteks algebri nije poznata. Navedimo primjere za koje vjerujemo da će imati važnu ulogu u budućem proučavanju nedopustivih afinih verteks algebri:

(1) Afine verteks algebre na negativnim nivoima koje se javljaju u dekompozicijama konformnih ulaganja iz [6], [7], [5].

(2) Afine verteks algebre na kolapsirajućim nivoima za afine $\mathscr{W}$–algebre.

Iz nedavnih rezultata iz teorije verteks tenzorskih kategorija (cf. [26], [29]), za očekivati je da će za sve verteks algebre koje se javljaju u (1) i (2), kategorija KL_k jakih modula imati strukturu rigidne pleteničaste tenzorske kategorije. U slučaju kolapsirajućih nivoa za minimalne afine $\mathscr{W}$–algebre, iz [9] slijedi da je kategorija KL_k poluprosta. Koristeći taj rezultat i dekompozicije iz (1), u članku [29] pokazano je da KL_k ima strukturu rigidne pleteničaste tenzorske kategorije. No, postoji mnogo nedopustivih afinih vereks algebri koje se javljaju u (1), a koje nisu proučavane ni u [9] ni u [29]. Za takve verteks algebre minimalne afine $\mathscr{W}$–algebre su jako komplicirane, pa je potrebno primijeniti drugačije metode da bi se dokazala egzistencija tenzorske kategorije. Čini se da bi bilo prirodno koristiti funktor kvantne redukcije i $\mathscr{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ za neminimalni nilpotentni element f. Nažalost, rezultati o iščezavanju i neiščezavanju QHR funktora $H_f(\,\cdot\,)$ nisu dani eksplicitno kao u slučaju minimalne redukcije, pa ne možemo jednostavno generalizirati metode iz [9]. Određeni rezultati u tom smjeru dobiveni su nedavno u [19], [20], ali samo u slučaju dopustivih nivoa.

U ovom članku proučavamo novi primjer nedopustive afine verteks algebre koja pripada oba prethodno navedena slučaja (1) i (2). Preciznije, proučavamo prostu afinu verteks algebru $L_{-5/2}(sl(4))$. Ovaj je primjer od posebne zanimljivosti budući da gledajući Liejeve algebre $\mathfrak{g} = sl(n)$, i koristeći kriterij iz [41], dobivamo da je nivo $k = -5/2$ za $\widehat{sl(4)}$ novi primjer nedopustivog, negeneričkog, polucijelog nivoa koji nije dosad istražen. Još jedna motivacija za proučavanje ovog slučaja je konformno ulaganje $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M(1)$ u $L_{-5/2}(sl(5))$ (cf. [6]) (ovdje $M(1)$ označava Heisenbergovu verteks algebru pridruženu abelovoj Liejevoj algebri ranga 1).

Naš prvi korak u proučavanju proste afine verteks algebre $L_{-5/2}(sl(4))$ je određivanje eksplicitne formule za singularni vektor v konformne težine četiri u univerzalnoj afinoj verteks algebri $V^{-5/2}(sl(4))$. To nam omogućava da koristeći metode iz [2,10] klasificiramo ireducibilne module u kategoriji $\mathscr{O}$ za pripadni kvocijent $\widetilde{L}_{-5/2}(sl(4)) = V^{-5/2}(sl(4))/\langle v \rangle$. Ireducibilne reprezentacije su

$$L_{-5/2}(\mu_i(t)),\ t \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, 16,$$

te su parametrizirane kao unija 16 pravaca u $\mathbb{C}^3$ (vidi Teorem 3.4.4). Dakle, postoji beskonačno mnogo ireducibilnih modula u kategoriji $\mathscr{O}$. Kao posebno zanimljivu posljedicu dobivamo da su ireducibilni moduli u kategoriji $KL_{-5/2}$ jakih modula:

$$\pi_r = L_{-5/2}(r\omega_1),\ \pi_{-r} = L_{-5/2}(r\omega_3) \quad (r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

Sljedeće želimo zaključiti da je $\widetilde{L}_{-5/2}(sl(4))$ prosta, tj. da singularni vektor v generira maksimalni ideal u $V^{-5/2}(sl(4))$, što se također događa u slučaju dopustivih afinih verteks algebri (cf. [10], [18]). Umjesto da ovu tvrdnju dokazujemo direktno u okviru afinih verteks algebri, koristit ćemo afine $\mathscr{W}$–algebre. Usko povezan problem s tim je dokaz da je kategorija jakih $L_{-5/2}(sl(4))$–modula poluprosta.

Slična situacija bila je u slučaju afine verteks algebre $V^{-1}(sl(n))$, za $n \geq 3$. Klasifikacija ireducibilnih $L_{-1}(sl(n))$–modula dobivena je u [12,13] koristeći vrlo slične metode kao u ovom članku (ali su formule za singularne vektore bile znatno jednostavnije). Opis maksimalnog ideala u $V^{-1}(sl(n))$ dobiven je u [21], a da je kategorija KL_{-1} poluprosta dokazano je u [9]. Pregled ovog pristupa dan je u točki 3.5.1.

Pokazujemo da se sličan pristup može primijeniti u slučaju afine verteks algebre $V^{-5/2}(sl(4))$. Prvo proučavamo afinu $\mathscr{W}$-algebru $W^{-5/2}(sl(4), f_{subreg})$ i dokazujemo da je njen prost kvocijent izomorfan Heisenbergovoj verteks algebri. Tada se koristeći svojstva funktora kvantne redukcije $H_{f_{subreg}}(\cdot)$ dokaže da je verteks algebra $\widetilde{L}_{-5/2}(sl(4))$ prosta i da je kategorija $KL_{-5/2}$ poluprosta. Pokazuje se da $H_{f_{subreg}}(\cdot)$ ima malo drugačija svojstva nego u slučaju minimalnog nilpotentnog elementa.

U Teoremu 3.5.4 dokazujemo:

Teorem 3.1.1. $H_{f_{subreg}}(\pi_r) \neq \{0\}$ za $r \leq 0$, ali $H_{f_{subreg}}(M) = \{0\}$ za svaki modul M najveće težine u $KL_{-5/2}$ težine $n\omega_1$, $n > 0$.

Čini se da se generalno neiščezavanje QHR funktora za ireducibilne module može dokazati metodama iz [15]. Budući da su nam ovdje potrebne informacije o modulima koji nisu nužno ireducibilni, odlučili smo dati drugačiji dokaz. Dajemo ga u točki 3.6, a zasniva se na sljedećim ključnim zapažanjima:

- Neka je $k = -5/2$. Generalizirani Vermaov modul $V^k(\mu)$ za $\mu = n\omega_1, n\omega_3$, $n > 0$, sadrži singularni vektor w_ν stupnja 2 i w_ν pripada podmodulu $J^k \cdot V^k(\mu)$ (ovdje J^k označava ideal u $V^{-5/2}(sl(4))$ generiran singularnim vektorom v). Zatim konstruiramo univerzalne $\widetilde{L}_k(sl(4))$–module $\overline{M}(\mu)$.

- Za $\mu = n\omega_1$, QHR funktor $H_{f_{subreg}}(\cdot)$ preslikava w_ν u vektor najveće težine u $H_{f_{subreg}}(V^k(\mu))$, odakle slijedi iščezavanje kohomologije za sve module najveće težine u KL_k težine μ.

- Za $\mu = n\omega_3$, w_ν preslikava se u singularni vektor stupnja 1 u $H_{f_{subreg}}(V^k(\mu))$ koji generira pravi podmodul. Koristeći taj rezultat pokazujemo $H_{f_{subreg}}(\overline{M}(n\omega_3)) \neq \{0\}$. Klasifikacija ireducibilnih $\widetilde{L}_k(sl(4))$–modula omogućava nam da dokažemo neiščezavanje kohomologije za sve module najveće težine u KL_k težine μ.

U Teoremu 3.5.6 pokazujemo kako iz ovih svojstava slijedi da je $\widetilde{L}_{-5/2}(sl(4))$ prosta i da je kategorija $KL_{-5/2}$ poluprosta.

Nadalje, koristimo konformno ulaganje $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M(1)$ u $L_{-5/2}(sl(5))$ i rezultate iz [6] iz kojih slijedi da se svi moduli π_r, $r \in \mathbb{Z}$ realiziraju u $L_{-5/2}(sl(5))$. To nam omogućava da odredimo pravila fuzije za ireducibilne $L_{-5/2}(sl(4))$–module u kategoriji $KL_{-5/2}$ (cf. Propozicija 3.7.3):

$$\pi_r \times \pi_s = \pi_{r+s} \quad (r, s \in \mathbb{Z}). \tag{3.1}$$

Tada primjenom novih rezultata iz [29], dokazujemo da je $KL_{-5/2}$ rigidna, pleteničasta tenzorska kategorija.

Kratki pregled glavnih rezultata našeg članka dan je sljedećim teoremom:

Teorem 3.1.2. Neka je $k = -5/2$.

(1) Skup $\{\pi_r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ daje sve ireducibilne $L_k(sl(4))$–module u kategoriji KL_k.

(2) Maksimalni ideal J^k u $V^k(sl(4))$ generiran je singularnim vektorom v stupnja četiri i $\mathfrak{g}$–težine $2\omega_2$ (vidi Teorem 3.3.1).

(3) $KL_{-5/2}$ je poluprosta, rigidna pleteničasta tenzorska kategorija s pravilima fuzije (3.1).

(4) Skup $\{L_{-5/2}(\mu_i(t)) \mid i = 1, \ldots, 16, t \in \mathbb{C}\}$ daje sve ireducibilne $L_{-5/2}(sl(4))$–module u kategoriji $\mathscr{O}$.

(5) Postoje nerastavljivi $L_{-5/2}(sl(4))$–moduli u kategoriji $\mathscr{O}$ (vidi Napomenu 3.9.5).

Primijetimo da su top komponente ireducibilnih $L_{-5/2}(sl(4))$–modula iz kategorije $KL_{-5/2}$ jednake top komponentama ireducibilnih $L_{-1}(sl(4))$–modula iz kategorije KL_{-1} te da se pravila fuzije za ireducibilne module u kategorijama $KL_{-5/2}$ i KL_{-1} podudaraju (cf. [13]).

Nadalje, određujemo dekompoziciju ireducibilnih $L_{-5/2}(sl(5))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$ kao $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M(1)$–modula (primijetimo da je nivo $k = -5/2$ dopustiv za $\widehat{sl(5)}$). Također pokazujemo da postoji homomorfizam iz Zhuove algebre pridružene $L_{-5/2}(sl(4))$ u odgovarajuću Weylovu algebru i proučavamo neke $L_{-5/2}(sl(4))$–module kao potkvocijente relaksiranih $L_{-5/2}(sl(5))$–modula.

3.2. Preliminarne definicije i rezultati

3.2.1. Afine verteks algebre

Neka je $\mathfrak{g}$ prosta Liejeva algebra s trokutastom dekompozicijom $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$. Označimo s $(\cdot\,|\,\cdot)$ invarijantnu bilinearnu formu na $\mathfrak{g}$ normaliziranu uvjetom $(\theta\,|\,\theta) = 2$, gdje je θ maksimalni korijen od $\mathfrak{g}$. Često ćemo pomoću forme $(\cdot\,|\,\cdot)$ identificirati $\mathfrak{h}^*$ s $\mathfrak{h}$. Za $\mu \in \mathfrak{h}^*$, označimo s $V(\mu)$ ireducibilni $\mathfrak{g}$–modul najveće težine s najvećom težinom μ. Označimo s $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ proste korijene, s $h_1, \dots, h_\ell$ proste kokorijene ($h_i = \alpha_i^\vee$, za $i = 1, \dots, \ell$), te s $\omega_1, \dots, \omega_\ell$ fundamentalne težine za $\mathfrak{g}$ ($\ell = \dim \mathfrak{h}$). Neka je $\hat{\mathfrak{g}}$ (nezakrenuta) afinizacija od $\mathfrak{g}$. Neka su $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ prosti korijeni, $\alpha_0^\vee, \alpha_1^\vee \dots, \alpha_\ell^\vee$ prosti kokorijeni te $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell$ fundamentalne težine za $\hat{\mathfrak{g}}$. Za $\mu \in \mathfrak{h}^*$ i $k \in \mathbb{C}$, označimo s $L_k(\mu)$ ireducibilni $\hat{\mathfrak{g}}$–modul najveće težine s najvećom težinom $\widehat{\mu} := k\Lambda_0 + \mu \in \hat{\mathfrak{h}}^*$.

Označimo s $V^k(\mathfrak{g})$ univerzalnu afinu verteks algebru pridruženu prostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ i nivou $k \in \mathbb{C}$, $k \neq -h^\vee$, te s $L_k(\mathfrak{g})$ jedinstveni prosti kvocijent od $V^k(\mathfrak{g})$. Za svaki kvocijent V od $V^k(\mathfrak{g})$, definiramo kategoriju KL_k V–modula kao u [9]. Ako je $\mathfrak{g}$ 1–dimenzionalna komutativna Liejeva algebra i $k \neq 0$, onda je $V^k(\mathfrak{g})$ prosta Heisenbergova verteks algebra koju ćemo označavati s $M(1)$.

Neka je v $\hat{\mathfrak{g}}$–singularni vektor u $V^k(\mathfrak{g})$. Označimo s $\langle v \rangle$ ideal u $V^k(\mathfrak{g})$ generiran s v te s

$$\widetilde{L}_k(\mathfrak{g}) = V^k(\mathfrak{g})/\langle v \rangle \tag{3.2}$$

pridruženu kvocijentnu verteks algebru.

3.2.2. Zhuova algebra

Za verteks algebru V, označimo s $A(V)$ Zhuovu algebru pridruženu V (cf. [60]). Označimo s $[a]$ sliku vektora $a \in V$ u $A(V)$. Imamo:

Propozicija 3.2.1. [60, Teorem 2.1.2, Teorem 2.2.1]

(1) Neka je $M = \oplus_{n=0}^\infty M(n)$ $\mathbb{Z}_+$–graduiran V–modul. Tada je $M(0)$ $A(V)$–modul.

(2) Neka je W $A(V)$–modul. Tada postoji $\mathbb{Z}_+$–graduiran V–modul $M = \oplus_{n=0}^\infty M(n)$ takav da je $M(0)$ izomorfan W kao $A(V)$–modul.

Propozicija 3.2.2. [60, Teorem 2.2.2] Postoji bijektivna korespondencija između ireducibilnih $A(V)$–modula i ireducibilnih $\mathbb{Z}_+$–graduiranih V–modula.

Iz [38, Teorem 3.1.1] slijedi da je Zhuova algebra $A(V^k(\mathfrak{g}))$ izomorfna univerzalnoj omotačkoj algebri $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$, gdje je izomorfizam $F: A(V^k(\mathfrak{g})) \to \mathscr{U}(\mathfrak{g})$ dan s

$$F([a_1(-n_1-1)\dots a_m(-n_m-1)\mathbf{1}]) = (-1)^{n_1+\dots+n_m} a_m \dots a_1, \tag{3.3}$$

za $a_1,\dots,a_m \in \mathfrak{g}$ i $n_1,\dots,n_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Za kvocijentnu verteks algebru $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$ definiranu relacijom (3.2), pridružena Zhuova algebra je

$$A(\widetilde{L}_k(\mathfrak{g})) \cong \mathscr{U}(\mathfrak{g})/\langle v' \rangle,$$

gdje je $\langle v' \rangle$ dvostrani ideal u $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ generiran vektoron $v' = F([v])$ (cf. [38, Propozicija 1.4.2]).

Nadalje, navodimo metodu za klasifikaciju ireducibilnih $A(\widetilde{L}_k(\mathfrak{g}))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$ iz [2, 10]. Označimo s $_L$ adjungirano djelovanje od $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ na $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ definirano s $X_L f = [X, f]$ za $X \in \mathfrak{g}$ i $f \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$. Neka je R $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$–podmodul od $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ generiran vektorom v'. Očito je R ireducibilni konačnodimenzionalni $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$–modul. Neka je R_0 potprostor od R težine 0.

Propozicija 3.2.3. [2, 10] Neka je $V(\mu)$ ireducibilni $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$–modul najveće težine s vektorom najveće težine v_μ, za $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. $V(\mu)$ je $A(\widetilde{L}_k(\mathfrak{g}))$–modul,

2. $RV(\mu) = 0$,

3. $R_0 v_\mu = 0$.

Označimo s $\mathscr{U}(\mathfrak{g})_0$ potprostor težine nula od $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ i promotrimo Harish-Chandrin homomorfizam

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g})_0 \to \mathscr{U}(\mathfrak{h})$$

koji je dobiven kao restrikcija projekcije

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g}) = \mathscr{U}(\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{n}_- \mathscr{U}(\mathfrak{g}) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+) \to \mathscr{U}(\mathfrak{h})$$

na $\mathscr{U}(\mathfrak{g})_0$ (cf. [21]).

Neka je $r \in R_0$. Budući da je $R_0 \subset \mathscr{U}(\mathfrak{g})_0$, slijedi da postoji jedinstveni polinom $p_r \in \mathscr{S}(\mathfrak{h}) = \mathscr{U}(\mathfrak{h})$ takav da je

$$r v_\mu = p_r(\mu) v_\mu.$$

Stavimo

$$\mathscr{P}_0 = \{\, p_r \mid r \in R_0 \}. \tag{3.4}$$

Imamo:

Korolar 3.2.4. [2, 10] Postoji bijektivna korespondencija između

1. ireducibilnih $A(\widetilde{L}_k(\mathfrak{g}))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$,
2. težina $\mu \in \mathfrak{h}^*$ takvih da je $p(\mu) = 0$ za sve $p \in \mathscr{P}_0$.

3.2.3. Zhuova C_2–algebra

Za verteks algebru V, označimo $R_V = V/C_2(V)$ Zhuovu C_2–algebru od V (cf. [60]). Tada je

$$R_{V^k(\mathfrak{g})} \cong \mathscr{S}(\mathfrak{g})$$

uz izomorfizam algebri jedinstveno određen s

$$\overline{x(-1)\mathbf{1}} \mapsto x, \quad \text{za } x \in \mathfrak{g}, \tag{3.5}$$

gdje $\overline{w}$ označava sliku vektora w u $R_{V^k(\mathfrak{g})}$, za $w \in V^k(\mathfrak{g})$. Za kvocijentnu verteks algebru $\widetilde{L}_k(\mathfrak{g})$ definiranu relacijom (3.2), označimo s v'' sliku vektora $\bar{v}$ pri preslikavanju (3.5). Tada je

$$R_{\widetilde{L}_k(\mathfrak{g})} \cong \mathscr{S}(\mathfrak{g})/I_W,$$

gdje je W $\mathfrak{g}$–modul generiran s v'' uz adjungirano djelovanje, a I_W ideal u $\mathscr{S}(\mathfrak{g})$ generiran s W (cf. [22], [21]).

3.2.4. Afine $\mathscr{W}$–algebre

U ovoj točki dajemo kratak pregled nekih rezultata o afinim $\mathscr{W}$–algebrama (vidi [49] za detalje).

Neka je $\mathfrak{g}$ prosta Liejeva algebra i (x, f) par elemenata iz $\mathfrak{g}$ takvih da je f nilpotentan, ad$x$ djeluje poluprosto na $\mathfrak{g}$ s polucijelim svojstvenim vrijednostima:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j, \tag{3.6}$$

i neka je ova gradacija dobra obzirom na f. Neka je $W^k(\mathfrak{g}, x, f)$ afina $\mathscr{W}$–algebra pridružena $\mathfrak{g}$, x i f na nivou k, dobivena Drinfeld-Sokolovljevom redukcijom. Pretpostavljat ćemo da je $k \neq -h^\vee$. Označimo $W^k(\mathfrak{g}, x, f)$ kraće s $W^k(\mathfrak{g}, f)$. Dakle,

$$W^k(\mathfrak{g}, f) = H_f(V^k(\mathfrak{g})).$$

Nadalje, označimo $W_k(\mathfrak{g}, f)$ jedinstveni prosti kvocijent od $W^k(\mathfrak{g}, f)$.

Neka je $\{u_1,\dots,u_d\}$ baza centralizatora $\mathfrak{g}^f$ takva da je $u_i \in \mathfrak{g}_{-j_i}$, za sve $i=1,\dots,d$, gdje su j_i neki nenegativni polucijeli brojevi. Tada je $\mathscr{W}$–algebra $W^k(\mathfrak{g},f)$ jako generirana elementima

$$J^{\{u_i\}} = J^{(u_i)} + (\text{članovi nižeg reda}),$$

gdje je

$$J^{(u_i)} = u_i + (\text{nabijeni fermionski dio}),$$

takav da je konformna težina od $J^{\{u_i\}}$ jednaka j_i+1, za $i=1,\dots,d$ (vidi [49] za detalje).

Nadalje, navodimo opis C_2–algebre $R_{W^k(\mathfrak{g},f)}$ iz [59], [17] (vidi i [21]). Neka je $\chi = (f\,|\,\cdot) \in \mathfrak{g}^*$. Odaberimo Lagrangeov potprostor $\mathscr{L} \subset \mathfrak{g}_{1/2}$ i stavimo

$$\mathfrak{m} = \mathscr{L} \oplus \bigoplus_{j\geq 1} \mathfrak{g}_j, \quad J_\chi = \sum_{x\in\mathfrak{m}} \mathscr{S}(\mathfrak{g})(x-\chi(x)). \tag{3.7}$$

Neka je M unipotentna podgrupa od G pridružena $\mathfrak{m}$.

Propozicija 3.2.5 ([59], [17]). Vrijedi:

$$R_{W^k(\mathfrak{g},f)} \cong \left(\mathscr{S}(\mathfrak{g})/J_\chi\right)^M.$$

3.2.5. Afina $\mathscr{W}$–algebra $W^k(sl(4), f_{subreg})$

U ovoj točki primijenit ćemo rezultate iz točke 3.2.4 na afinu $\mathscr{W}$–algebru $W^k(sl(4), f_{subreg})$. Ova verteks algebra nedavno je proučavana u [27] i [40].

Označimo s $\mathfrak{g}$ prostu Liejevu algebru $sl(4)$. Neka je

$$f = f_{subreg} = f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3} + f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4} \tag{3.8}$$

subregularni nilpotentni element i neka je

$$x = \frac{1}{4}(3h_1+6h_2+5h_3) = \omega_2+\omega_3 \tag{3.9}$$

poluprost element iz $\mathfrak{g}$ koji definira dobru gradaciju od $\mathfrak{g}$ obzirom na f (cf. [40]). Dobivena gradacija (3.6) je i parna, tj. $\mathfrak{g}_j = 0$ za $j \notin \mathbb{Z}$. U ovom slučaju je $\dim \mathfrak{g}^f = 5$, pa je $W^k(\mathfrak{g}, f_{subreg})$ jako generirana s pet elemenata koje ćemo označiti s $J, \bar{L}, W, G^+, G^-$. Njihove konformne težine su $1,2,3,1,3$, redom. Eksplicitne OPE formule za generatore od $W^k(\mathfrak{g}, f_{subreg})$ bit će dane u Dodatku.

Primijetimo da, budući da je $e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \in \mathfrak{g}_0^f$, dobivamo pridruženi generator

$$G^+ = J^{\{e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}\}} = J^{(e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2})}$$

konformne težine 1. Više detalja o ovim generatorima bit će dano u točki 3.5.

3.3. Afina verteks algebra pridružena $\widehat{sl(4)}$ na nivou $-5/2$

U ovom dijelu određujemo eksplicitnu formulu za singularni vektor konformne težine četiri u univerzalnoj afinoj verteks algebri $V^{-5/2}(sl(4))$. Eksplicitno određujemo i Zhuovu algebru te Zhuovu C_2–algebru za pripadnu kvocijentnu verteks algebru. U ovoj točki s $\mathfrak{g}$ ćemo označavati prostu Liejevu algebru $sl(4)$, te ćemo podrazumijevati standardni izbor korijenskih vektora za $sl(4)$.

Teorem 3.3.1. U univerzalnoj afinoj verteks algebri $V^{-5/2}(\mathfrak{g})$ singularni vektor v težine $-\frac{5}{2}\Lambda_0 - 4\delta + 2\omega_2$ dan je s:

$$
\begin{aligned}
v = {} & e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-3)\mathbf{1} + e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-3)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1} \\
& + \frac{1}{2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-2)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-2)\mathbf{1} - e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-3)\mathbf{1} \\
& - e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-3)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)\mathbf{1} - \frac{1}{2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-2)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-2)\mathbf{1} \\
& + e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-2)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)\mathbf{1} - e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-2)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)\mathbf{1} \\
& - e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-2)e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1} - 3e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-2)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1} \\
& + 2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)^2e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1} - \frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)h_2(-2)\mathbf{1} \\
& - e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-2)h_1(-1)\mathbf{1} - e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-2)h_2(-1)\mathbf{1} \\
& - e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-2)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)h_2(-1)\mathbf{1} - e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-2)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)h_3(-1)\mathbf{1} \\
& + \frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)h_2(-2)\mathbf{1} + e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-2)h_1(-1)\mathbf{1} \\
& + e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-2)h_2(-1)\mathbf{1} + e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-2)h_3(-1)\mathbf{1} \\
& + e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-2)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)h_2(-1)\mathbf{1} + \frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)h_1(-1)h_2(-1)\mathbf{1} \\
& - \frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)h_1(-1)h_3(-1)\mathbf{1} + \frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)h_2(-1)^2\mathbf{1} \\
& + \frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)h_2(-1)h_3(-1)\mathbf{1} - \frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)h_1(-1)h_2(-1)\mathbf{1} \\
& - \frac{4}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)h_1(-1)h_3(-1)\mathbf{1} - \frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)h_2(-1)^2\mathbf{1} \\
& - \frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)h_2(-1)h_3(-1)\mathbf{1} - \frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)\mathbf{1} \\
& + \frac{4}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)\mathbf{1} + \frac{4}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1} \\
& + \frac{4}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)\mathbf{1} + \frac{4}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)^2f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1}+\frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)\mathbf{1}\\
&-\frac{4}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)\mathbf{1}-\frac{4}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1}\\
&-\frac{4}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)^2f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)\mathbf{1}-\frac{4}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1}\\
&+\frac{2}{3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1}-2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)h_3(-1)\mathbf{1}\\
&+2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)h_1(-1)\mathbf{1}+2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)h_3(-1)\mathbf{1}\\
&+e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-2)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)\mathbf{1}-e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-2)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)\mathbf{1}\\
&-2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)^2e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)\mathbf{1}-2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)h_1(-1)\mathbf{1}\\
&+e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-2)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1}-e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-2)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1}\\
&-2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)^2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1}+2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)^2f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)\mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Direktno se provjeri da vrijede relacije $e_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}(0).v=0$ za $i=1,2,3$ i $f_\theta(1).v=0$. ■

Napomena 3.3.2. Formulu za singularni vektor iz Teorema 3.3.1 također su odredili i P. Moseneder Frajria i P. Papi.

Napomena 3.3.3. Kao $\hat{\mathfrak{g}}$–modul, jasno je da je $V^{-5/2}(\mathfrak{g})$ kvocijent Vermaovog modula $M(-\frac{5}{2}\Lambda_0)$. Zato je pri određivanju singularnih vektora u $V^{-5/2}(\mathfrak{g})$ prirodno promatrati projekciju singularnih vektora iz $M(-\frac{5}{2}\Lambda_0)$ na $V^{-5/2}(\mathfrak{g})$. Koristeći rezultate iz [45] dobivamo da u modulu $M(-\frac{5}{2}\Lambda_0)$ postoji singularni vektor težine $-\frac{5}{2}\Lambda_0-4\delta+2\omega_2$. No, koristeći formulu iz [56] za taj singularni vektor, lako se dokaže da je njegova projekcija u $V^{-5/2}(\mathfrak{g})$ nulvektor. Stoga je vektor v dan u Teoremu 3.3.1 subsingularni (odnosno primitivni) vektor u $M(-\frac{5}{2}\Lambda_0)$ iste težine $-\frac{5}{2}\Lambda_0-4\delta+2\omega_2$ kao i singularni vektor u $M(-\frac{5}{2}\Lambda_0)$.

Uvedimo oznaku

$$\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})=V^{-5/2}(\mathfrak{g})/\langle v\rangle$$

za pridruženu kvocijentnu verteks algebru.

Napomena 3.3.4. Automorfizam Dynkinovog dijagrama od $\mathfrak{g}$ definiran s:

$$\sigma(\alpha_1)=\alpha_3,\ \sigma(\alpha_2)=\alpha_2,\ \sigma(\alpha_3)=\alpha_1$$

podiže se do automorfizma σ reda dva verteks algebre $V^{-5/2}(\mathfrak{g})$. Lako se provjeri da za singularni vektor v iz Teorema 3.3.1 vrijedi $\sigma(v)=v$. Iz toga slijedi da σ inducira automorfizam verteks algebre $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$. Ova činjenica bit će korištena u točki 3.5.

U sljedećoj propoziciji određujemo Zhuovu algebru verteks algebre $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$.

Propozicija 3.3.5. Zhuova algebra $A(\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g}))$ izomorfna je $\mathscr{U}(\mathfrak{g})/\langle v'\rangle$, gdje je $\langle v'\rangle$ dvostrani ideal u $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ generiran vektorom v' danim s:

$$
\begin{aligned}
v' = {} & \frac{5}{2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} - \frac{5}{2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} + 4e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + 2e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \\
& + \frac{8}{3}h_2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + h_1e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \\
& - \frac{8}{3}h_2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} - h_1e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} - h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \\
& + \frac{2}{3}h_1h_2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} - \frac{2}{3}h_1h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + \frac{2}{3}h_2^2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + \frac{2}{3}h_2h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \\
& - \frac{2}{3}h_1h_2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} - \frac{4}{3}h_1h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} - \frac{2}{3}h_2^2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} - \frac{2}{3}h_2h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \\
& - \frac{2}{3}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + \frac{4}{3}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + \frac{4}{3}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \\
& + \frac{4}{3}f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + \frac{4}{3}f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} - \frac{2}{3}f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \\
& + \frac{2}{3}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} - \frac{4}{3}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} - \frac{4}{3}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \\
& - \frac{4}{3}f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} - \frac{4}{3}f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} + \frac{2}{3}f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \\
& - 2h_3e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4} + 2h_1e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + 2h_3f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \\
& - 2f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e^2_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} - 2h_1f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} - 2f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_4} + 2f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e^2_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Koristeći relaciju (3.3) lako se dokaže da vrijedi $v' = F([v])$. Tvrdnja sada slijedi iz [38, Propozicija 1.4.2, Teorem 3.1.1]. ■

Opis Zhuove C_2–algebre pridružene verteks algebri $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$ slijedi iz rezultata izloženih u točki 3.2.3.

Propozicija 3.3.6. Zhuova C_2–algebra $R_{\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})}$ izomorfna je $\mathscr{S}(\mathfrak{g})/I_W$, gdje je I_W ideal u $\mathscr{S}(\mathfrak{g})$ generiran s W, a W je $\mathfrak{g}$–modul generiran sljedećim vektorom v'' uz adjungirano djelovanje:

$$
\begin{aligned}
v'' = {} & 2e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} + \frac{2}{3}(h_1h_2 - h_1h_3 + h_2^2 + h_2h_3)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \\
& + \frac{2}{3}(-h_1h_2 - 2h_1h_3 - h_2^2 - h_2h_3)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \\
& + \frac{2}{3}\Big(-f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} + 2f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + 2f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} + 2f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \\
& \qquad + 2f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4} - f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}\Big)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \\
& + \frac{2}{3}\Big(f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} - 2f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} - 2f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} - 2f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad -2f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}+f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}\Big)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\\
&-2h_3e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}+2h_1e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}+2h_3f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\\
&-2f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e^2_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}-2h_1f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}-2f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}+2f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e^2_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}.
\end{aligned}
$$

Napomena 3.3.7. U nastavku ćemo dokazati da je verteks algebra $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$ prosta (vidi točku 3.5), pa će Propozicija 3.3.5 i Propozicija 3.3.6 dati opis Zhuove algebre $A(L_{-5/2}(\mathfrak{g}))$ i Zhuove C_2–algebre $R_{L_{-5/2}(\mathfrak{g})}$ pridružene prostoj verteks algebri $L_{-5/2}(\mathfrak{g})$.

Sljedeća lema koristit će se u točki 3.5.

Lema 3.3.8. Neka je f_{subreg} subregularni nilpotentni element definiran relacijom (3.8), x poluprosti element definiran s (3.9), i J_χ odgovarajući ideal in $\mathscr{S}(\mathfrak{g})$ definiran relacijom (3.7). Tada je

$$v'' \equiv 2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} (\text{mod } J_\chi).$$

Dokaz. Prisjetimo se da je gradacija od $\mathfrak{g}$ dana svojstvenim potprostorima od ad$x$ parna. Posebno, imamo $\mathfrak{g}_{1/2}=0$. Nadalje, vrijedi

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}_1 &= \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}, e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}, e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}\},\\
\mathfrak{g}_2 &= \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}, e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}\},
\end{aligned}
$$

i $\mathfrak{g}_j=0$ za $j>2$. Budući da je $\chi=(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}+f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}\,|\,\cdot)$, dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\chi(e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3})=\chi(e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4})=1,\\
&\chi(e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})=\chi(e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})=\chi(e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4})=0.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Sada iz relacija (3.10) i formule za vektor v'' iz Propozicije 3.3.6 slijedi

$$v'' \equiv 2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} (\text{mod } J_\chi).$$

■

3.4. KLASIFIKACIJA IREDUCIBILNIH $\widetilde{L}_{-5/2}(sl(4))$–MODULA U KATEGORIJI $\mathscr{O}$

Neka je $\mathfrak{g} = sl(4)$. U ovom dijelu, koristeći Zhuovu teoriju i metode za klasifikaciju iz Propozicije 3.2.3 i Korolara 3.2.4, proučavamo teoriju reprezentacija verteks algebre $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$ definirane u točki 3.3. Posebno, za tu verteks algebru određujemo klasifikaciju ireducibilnih modula u kategoriji $\mathscr{O}$.

U sljedećoj lemi određujemo bazu prostora polinoma $\mathscr{P}_0$ definiranog relacijom (3.4):

Lema 3.4.1. Vrijedi

$$\mathscr{P}_0 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{p_1, p_2\},$$

gdje je

$$\begin{aligned}
p_1(h) = & -\frac{5}{2}h_2 - \frac{7}{2}h_1h_2 + \frac{3}{2}h_1h_3 - \frac{7}{2}h_2h_3 - \frac{31}{6}{h_2}^2 - \frac{13}{3}h_1{h_2}^2 - {h_1}^2h_2 - 2h_1h_2h_3 - \\
& - \frac{10}{3}{h_2}^3 + h_1{h_3}^2 + {h_1}^2h_3 - \frac{13}{3}{h_2}^2h_3 - h_2{h_3}^2 - \frac{4}{3}h_1{h_2}^3 - \frac{2}{3}{h_1}^2{h_2}^2 + \\
& + \frac{2}{3}{h_1}^2{h_3}^2 - \frac{4}{3}h_1{h_2}^2h_3 - \frac{2}{3}{h_2}^4 - \frac{4}{3}{h_2}^3h_3 - \frac{2}{3}{h_2}^2{h_3}^2,
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
p_2(h) = & \frac{5}{2}h_2 + \frac{7}{2}h_1h_2 + \frac{7}{2}h_2h_3 + \frac{31}{6}{h_2}^2 + \frac{13}{3}h_1{h_2}^2 + {h_1}^2h_2 + \frac{16}{3}h_1h_2h_3 + \\
& + \frac{10}{3}{h_2}^3 + \frac{13}{3}{h_2}^2h_3 + h_2{h_3}^2 + \frac{4}{3}h_1{h_2}^3 + \frac{2}{3}{h_1}^2{h_2}^2 + \frac{4}{3}{h_1}^2h_2h_3 + \\
& + \frac{8}{3}h_1{h_2}^2h_3 + \frac{4}{3}h_1h_2{h_3}^2 + \frac{2}{3}{h_2}^4 + \frac{4}{3}{h_2}^3h_3 + \frac{2}{3}{h_2}^2{h_3}^2.
\end{aligned}$$

Dokaz. Neka je R $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$–podmodul od $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ generiran vektorom v' (iz Propozicije 3.3.5) uz adjungirano djelovanje. Očito je R izomorfan $V(2\omega_2)$. Lako se dokaže da je $\dim R_0 = 2$, pa je $\dim \mathscr{P}_0 \leq 2$. Uvedimo sljedeće oznake:

$$\begin{aligned}
v_1 = & \quad (f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4} f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L v', \\
v_2 = & \quad (f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3} f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})_L v'.
\end{aligned}$$

Tada vektori v_1 i v_2 linearno razapinju R_0.

Dokažimo da je $p_1 \in \mathscr{P}_0$. Direktnim računom odredimo djelovanje $(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4} f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L$ na svaki monom koji se javlja u formuli za v' iz Propozicije 3.3.5:

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4} f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4} e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in -h_1h_2 - h_1h_3 - h_2^2 - h_2h_3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_1 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in -h_1^2h_2 - h_1^2h_3 - h_1h_2^2 - h_1h_2h_3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_2 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in -h_1h_2^2 - h_1h_2h_3 - h_2^3 - h_2^2h_3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_3 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in -h_1h_2h_3 - h_1h_3^2 - h_2^2h_3 - h_2h_3^2 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_1h_2 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in -h_1^2h_2^2 - h_1^2h_2h_3 - h_1h_2^3 - h_1h_2^2h_3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_1h_3 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in -h_1^2h_2h_3 - h_1^2h_3^2 - h_1h_2^2h_3 - h_1h_2h_3^2 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_2^2 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in -h_1h_2^3 - h_1h_2^2h_3 - h_2^4 - h_2^3h_3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_2h_3 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in -h_1h_2^2h_3 - h_1h_2h_3^2 - h_2^3h_3 - h_2^2h_3^2 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in h_2 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_1 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in h_1h_2 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_2 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in h_2^2 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_3 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in h_2h_3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_1h_2 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in h_1h_2^2 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_1h_3 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in h_1h_2h_3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_2^2 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in h_2^3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_2h_3 e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in h_2^2h_3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in h_1h_3 + h_2h_3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_1 e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in h_1^2h_3 + h_1h_2h_3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}^2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \in -2h_2h_3 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_3 e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4} \in -h_1h_2h_3 - h_1h_3^2 + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g}) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g}) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g}) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g}) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}^2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g}) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g}) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g}) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g}) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g}) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g})+\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g})+\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g})+\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_3 f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g})+\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e^2_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g})+\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L h_1 f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g})+\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_4} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g})+\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$$

$$(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3})_L f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e^2_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} \in \mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g})+\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+.$$

Koristeći eksplicitnu formulu za v' iz Propozicije 3.3.5, dobivamo

$$\begin{aligned} v_1 \in &-\frac{5}{2}h_2-\frac{7}{2}h_1h_2+\frac{3}{2}h_1h_3-\frac{7}{2}h_2h_3-\frac{31}{6}h_2{}^2-\frac{13}{3}h_1h_2{}^2-h_1{}^2h_2-2h_1h_2h_3- \\ &-\frac{10}{3}h_2{}^3+h_1h_3{}^2+h_1{}^2h_3-\frac{13}{3}h_2{}^2h_3-h_2h_3{}^2-\frac{4}{3}h_1h_2{}^3-\frac{2}{3}h_1{}^2h_2{}^2+ \\ &+\frac{2}{3}h_1{}^2h_3{}^2-\frac{4}{3}h_1h_2{}^2h_3-\frac{2}{3}h_2{}^4-\frac{4}{3}h_2{}^3h_3-\frac{2}{3}h_2{}^2h_3{}^2+\mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g})+\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+, \end{aligned}$$

odakle slijedi $p_1 \in \mathscr{P}_0$. Analogno se dobije

$$v_2 \in p_2(h)+\mathfrak{n}_-\mathscr{U}(\mathfrak{g})+\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+,$$

odakle slijedi $p_2 \in \mathscr{P}_0$. Budući da su p_1 i p_2 linearno nezavisni, slijedi tvrdnja leme. ■

U sljedećoj propoziciji dana je klasifikacija ireducibilnih $A(\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g}))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$:

Propozicija 3.4.2. Skup svih ireducibilnih $A(\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g}))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$ dan je s

$$\{V(\mu_i(t)) \mid i=1,\dots,16,\ t\in\mathbb{C}\}, \tag{3.11}$$

gdje je:

$\mu_1(t)=t\omega_1,$	$\mu_9(t)=-\frac{3}{2}\omega_1+t\omega_3,$
$\mu_2(t)=t\omega_3,$	$\mu_{10}(t)=t\omega_1-\frac{3}{2}\omega_3,$
$\mu_3(t)=t\omega_1+(-t-\frac{5}{2})\omega_2,$	$\mu_{11}(t)=-\frac{3}{2}\omega_1+t\omega_2+(-t-1)\,\omega_3,$
$\mu_4(t)=t\omega_2+(-t-\frac{5}{2})\omega_3,$	$\mu_{12}(t)=(-t-1)\,\omega_1+t\omega_2-\frac{3}{2}\omega_3,$
$\mu_5(t)=t\omega_1-\frac{3}{2}\omega_2,$	$\mu_{13}(t)=-\frac{1}{2}\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2+t\omega_3,$
$\mu_6(t)=-\frac{3}{2}\omega_2+t\omega_3,$	$\mu_{14}(t)=-\frac{1}{2}\omega_1+t\omega_2+(-t-\frac{3}{2})\omega_3,$
$\mu_7(t)=t\omega_1+(-t-1)\omega_2,$	$\mu_{15}(t)=t\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2-\frac{1}{2}\omega_3,$
$\mu_8(t)=t\omega_2+(-t-1)\omega_3,$	$\mu_{16}(t)=(-t-\frac{3}{2})\omega_1+t\omega_2-\frac{1}{2}\omega_3.$

Dokaz. Neka je $V(\mu)$, za $\mu \in \mathfrak{h}^*$, ireducibilni $A(\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g}))$–modul u kategoriji $\mathscr{O}$. Iz Korolara 3.2.4 i Leme 3.4.1 slijedi da je najveća težina μ rješenje polinomijalnih jednadžbi

$$p_1(\mu(h)) = p_2(\mu(h)) = 0.$$

Označimo $H_i = \mu(h_i)$, za $i = 1,2,3$. Iz relacije $p_2(\mu(h)) = 0$ dobivamo

$$H_2\left(H_1+H_2+H_3+\frac{5}{2}\right)\underbrace{\left(3+3H_1+5H_2+2H_1H_2+2{H_2}^2+3H_3+4H_1H_3+2H_2H_3\right)}_{Q_2}=0, \tag{3.12}$$

a iz relacije $p_1(\mu(h)) + p_2(\mu(h)) = 0$ dobivamo

$$H_1H_3\underbrace{\left(9+6H_1+20H_2+8H_1H_2+8{H_2}^2+6H_3+4H_1H_3+8H_2H_3\right)}_{Q_1}=0. \tag{3.13}$$

Sada iz relacija (3.12) i (3.13) zaključujemo:

- Za $H_1 = 0$ i $H_2 = 0$, dobivamo $\mu = t\omega_3$.
- Za $H_2 = 0$ i $H_3 = 0$, dobivamo $\mu = t\omega_1$.
- Za $H_1 = 0$ i $H_1+H_2+H_3+\frac{5}{2} = 0$, dobivamo $\mu = t\omega_2 + \left(-t-\frac{5}{2}\right)\omega_3$.
- Za $H_3 = 0$ i $H_1+H_2+H_3+\frac{5}{2} = 0$, dobivamo $\mu = \left(-t-\frac{5}{2}\right)\omega_1 + t\omega_2$.
- Za $H_1 = 0$ i $Q_2 = 0$, imamo $(3+2H_2)(H_2+H_3+1) = 0$, pa dobivamo $\mu = -\frac{3}{2}\omega_2 + t\omega_3$ ili $\mu = t\omega_2 + (-t-1)\omega_3$.
- Za $H_3 = 0$ i $Q_2 = 0$, imamo $(3+2H_2)(H_1+H_2+1) = 0$, pa dobivamo $\mu = t\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_2$ ili $\mu = (-t-1)\omega_1 + t\omega_2$.
- Za $Q_1 = 0$ i $H_2 = 0$, imamo $(3+2H_1)(3+2H_3) = 0$, pa dobivamo $\mu = -\frac{3}{2}\omega_1 + t\omega_3$ ili $\mu = t\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_3$.
- Za $Q_1 = 0$ i $H_1+H_2+H_3+\frac{5}{2} = 0$, imamo $(3+2H_1)(3+2H_3) = 0$, pa dobivamo $\mu = -\frac{3}{2}\omega_1 + t\omega_2 + (-t-1)\omega_3$ ili $\mu = (-t-1)\omega_1 + t\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_3$.
- Za $Q_1 = 0$ i $Q_2 = 0$, imamo

$$Q_1 - 4Q_2 = -12H_1H_3 - 6H_1 - 6H_3 - 3 = 0,$$

odakle slijedi $(1+2H_1)(1+2H_3)=0$. Ako je $H_1=-\frac{1}{2}$, onda iz $Q_1=0$ slijedi

$$(1+2H_2)\left(H_2+H_3+\frac{3}{2}\right)=0,$$

pa dobivamo $\mu=-\frac{1}{2}\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2+t\omega_3$ ili $\mu=-\frac{1}{2}\omega_1+t\omega_2+\left(-t-\frac{3}{2}\right)\omega_3$. Analogno, ako je $H_3=-\frac{1}{2}$, onda iz $Q_1=0$ slijedi

$$(1+2H_2)\left(H_1+H_2+\frac{3}{2}\right)=0,$$

pa dobivamo $\mu=t\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2-\frac{1}{2}\omega_3$ ili $\mu=\left(-t-\frac{3}{2}\right)\omega_1+t\omega_2-\frac{1}{2}\omega_3$.

Tvrdnja sada slijedi iz Korolara 3.2.4. ■

Primijetimo da su težine $\mu_i(t)$ iz skupa (3.11) dominantne integralne samo za $i=1,2$ i $t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Stoga vrijedi:

Korolar 3.4.3. Skup svih ireducibilnih, konačnodimenzionalnih modula za Zhuovu algebru $A(\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g}))$ dan je s

$$\{V(t\omega_1)\mid t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}\cup\{V(t\omega_3)\mid t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Iz Zhuove teorije sada slijedi:

Teorem 3.4.4. Uz oznake iz Propozicije 3.4.2, skup svih ireducibilnih $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$ dan je s

$$\left\{L_{-5/2}(\mu_i(t))\mid i=1,\ldots,16,\ t\in\mathbb{C}\right\}.$$

Korolar 3.4.5. Skup svih ireducibilnih $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modula u kategoriji $KL_{-5/2}$ dan je s

$$\left\{L_{-5/2}(t\omega_1)\mid t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}\cup\left\{L_{-5/2}(t\omega_3)\mid t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}.$$

Napomena 3.4.6. U nastavku ćemo dokazati da je verteks algebra $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$ prosta (vidi točku 3.5), pa će Teorem 3.4.4 i Korolar 3.4.5 dati klasifikaciju ireducibilnih $L_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$, i ireducibilnih $L_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modula u kategoriji $KL_{-5/2}$, redom. Jedan od ključnih koraka u dokazu prostote od $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$ je klasifikacija ireducibilnih $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modula u kategoriji $KL_{-5/2}$ iz Korolara 3.4.5.

3.5. Opis maksimalnog ideala u $V^{-5/2}(sl(4))$ i poluprostota kategorije $KL_{-5/2}$

U ovom dijelu dokazat ćemo da je verteks algebra $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$ definirana u poglavlju 3.3 prosta, odnosno da je ideal $\langle v\rangle$ generiran singularnim vektorom v iz Teorema 3.3.1 maksimalan u $V^{-5/2}(\mathfrak{g})$. Nadalje, dokazat ćemo da je kategorija $KL_{-5/2}$ za $L_{-5/2}(\mathfrak{g})$ poluprosta. U ovoj točki i u točki 3.6 koristit ćemo oznaku

$$J^{-5/2} := \langle v\rangle,$$

odnosno $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g}) = V^{-5/2}(\mathfrak{g})/J^{-5/2}$.

3.5.1. Maksimalni ideal u $V^{-1}(sl(4))$

Za usporedbu navodimo opis maksimalnog ideala u slučaju $k=-1$ kojeg su dali T. Arakawa i A. Moreau.

- Nivo $k=-1$ je kolapsirajući te pripadna minimalna afina $\mathscr{W}$–algebra $W_{-1}(sl(4), f_\theta)$ kolapsira u Heisenbergovu verteks algebru $M(1)$. Ovo je dokazano na dva različita načina: u [21] koristeći singularne vektore u $V^{-1}(sl(4))$ (određene u [12]), te u [8] dokazujući da G-generatori od $W^{-1}(sl(4), f_\theta)$ konformne težine $3/2$ pripadaju maksimalnom idealu.

- Primjenom funktora kvantne redukcije, ideal J^{-1} generiran singularnim vektorom iz [12] preslikava se u ideal u $W^{-1}(sl(4), f_\theta)$ koji sadrži sve G-generatore. No, iz G-generatora može se rekonstruirati $sl(2)$–dio od $\mathfrak{g}^\natural = gl(2)$. Stoga, funktor kvantne redukcije preslikava ideal J^{-1} u maksimalan ideal u $W^{-1}(sl(4), f_\theta)$, tj. $H_{f_\theta}(V^{-1}(sl(4))/J^{-1}) = M(1)$.

- Ako pretpostavimo da $V^{-1}(sl(4))/J^{-1}$ nije prosta, koristeći svojstva funktora $H_{f_\theta}(\cdot)$ dobivamo $H_{f_\theta}(L_{-1}(sl(4))) = 0$, što je kontradikcija.

- Dakle, J^{-1} mora biti maksimalan ideal u $V^{-1}(sl(4))$.

- Sličnim dokazom kasnije je u [9] dokazano da je KL_{-1} poluprosta. Koristeći tu činjenicu, u članku [29] dokazano je da je KL_{-1} pleteničasta tenzorska kategorija.

3.5.2. Pristup u slučaju $V^{-5/2}(sl(4))$

U slučaju $k=-5/2$ za $\mathfrak{g}=sl(4)$ primijenit ćemo slične metode kao za $k=-1$. No, umjesto minimalne afine $\mathscr{W}$–algebre $W^k(\mathfrak{g},f_\theta)$, koristit ćemo $\mathscr{W}$–algebru $W^k(\mathfrak{g},f_{subreg})$ pridruženu subregularnom nilpotentnom elementu, definiranom u točki 3.2.5.

Verteks algebra $W^k(\mathfrak{g},f_{subreg})$ generirana je elementima $J, L=\bar{L}-\partial J, W, G^+, G^-$. Njihove konformne težine su $1,2,3,2,2$, redom. Formule za OPE dali su T. Creutzig i A. Linshaw u [27] (vidi i [40]). Navodimo ih u Dodatku.

Teorem 3.5.1. Nivo $k=-5/2$ je kolapsirajući nivo za $W^k(\mathfrak{g},f_{subreg})$ i vrijedi

$$W_{-5/2}(\mathfrak{g},f_{subreg})\cong M_J(1),$$

gdje je $M_J(1)$ Heisenbergova verteks algebra generirana s J.

Dokaz. U dokazu koristimo metode razvijene u [8] za kolapsirajuće nivoe. Trebamo dokazati da generatori $G^\pm$ pripadaju maksimalnom idealu u $W^{-5/2}(\mathfrak{g},f_{subreg})$. Koristeći OPE relacije za $W^k(\mathfrak{g},f_{subreg})$ u slučaju $k=-5/2$ zaključujemo:

$$G_3^+G^-=G_2^+G^-=0,\ G_1^+G^-\sim(L-4:JJ:).$$

Zajedno s ostalim OPE relacijama, odavde slijedi da $G^\pm$ pripadaju maksimalnom idealu u $W^{-5/2}(\mathfrak{g},f_{subreg})$, tj. $G^\pm=0$ u $W_{-5/2}(\mathfrak{g},f_{subreg})$. Posljedično dobivamo $L=4:JJ:$, odakle slijedi da je $M_J(1)$ konformno uložena u $W_{-5/2}(\mathfrak{g},f_{subreg})$.

Preostaje pokazati da je $W\in M_J(1)$.

Primjenom OPE relacija i koristeći činjenicu da je $G_0^+G^-=0$ i $L=4:JJ:$, dobivamo da je $W\in M_J(1)\subset W_{-5/2}(\mathfrak{g},f_{subreg})$. Ovim je dokazano da je $W_{-5/2}(\mathfrak{g},f_{subreg})$ generirana samo Heisenbergovim poljem, pa je izomorfna $M_J(1)$. Slijedi tvrdnja teorema. ■

Dokaz sljedeće leme sličan je dokazu Leme 7.3. iz [21]:

Lema 3.5.2. Slika singularnog vektora v iz Teorema 3.3.1 u $W^{-5/2}(\mathfrak{g},f_{subreg})$ podudara se (do na nenul skalarni faktor) s vektorom G^+.

Dokaz. Budući da je v singularni vektor u $V^{-5/2}(\mathfrak{g})$, preslikava se u singularni vektor $\tilde{v}$ u $W^{-5/2}(\mathfrak{g},f_{subreg})$. Ako je $\tilde{v}$ različit od nulvektora, može se lako pokazati da je onda njegova konformna težina obzirom na $\bar{L}$ jednaka 1. Njegova slika u $R_{W^{-5/2}(\mathfrak{g},f_{subreg})}$ je slika vektora v'' iz Propozicije 3.3.6 u $\left(\mathscr{S}(\mathfrak{g})/J_\chi\right)^M$, gdje je $\chi=\left(f_{subreg}\,|\,\cdot\right)$ (vidi Propoziciju 3.2.5). Sada iz

Leme 3.3.8 dobivamo $v'' \equiv 2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} (\mathrm{mod}\, J_\chi)$, odakle slijedi $\tilde{v} \equiv 2G^+ (\mathrm{mod}\, C_2(W^{-5/2}(\mathfrak{g}, f_{subreg})))$. Odavde zaključujemo da je $\tilde{v}$ različit od nulvektora, te da se $\tilde{v}$ i $2G^+$ podudaraju budući da imaju istu konformnu težinu i oba su singularni vektori za $M_J(1)$. ■

Propozicija 3.5.3. Vrijedi:

(1) $H_{f_{subreg}}(\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})) \cong M_J(1)$.

(2) $H_{f_{subreg}}(L_{-5/2}(\mathfrak{g})) \cong M_J(1)$.

Dokaz. Budući da je $J^{-5/2} = \langle v \rangle$, iz Leme 3.5.2 slijedi da $H_{f_{subreg}}(J^{-5/2})$ sadrži generator G^+ od $W^{-5/2}(\mathfrak{g}, f_{subreg})$. Kao u dokazu Teorema 3.5.1 zaključujemo $L - 4 : JJ : \in H_{f_{subreg}}(J^{-5/2})$. Odavde slijedi

$$(L - 4 : JJ :)_1 G^- = -2G^- \in H_{f_{subreg}}(J^{-5/2}).$$

Nadalje, kao u dokazu Teorema 3.5.1 dobivamo da se $H_{f_{subreg}}(J^{-5/2})$ podudara s maksimalnim idealom u $W^{-5/2}(\mathfrak{g}, f_{subreg})$. Koristeći egzaktnost QHR funktora $H_{f_{subreg}}(\,\cdot\,)$ u kategoriji $KL_{-5/2}$, dobivamo $H_{f_{subreg}}(\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})) = W_{-5/2}(\mathfrak{g}, f_{subreg}) = M_J(1)$.

Ovim je dokazana tvrdnja (1).

Koristeći ponovno egzaktnost funktora $H_{f_{subreg}}(\,\cdot\,)$ zaključujemo $H_{f_{subreg}}(L_{-5/2}(\mathfrak{g})) \cong M_J(1)$ ili $H_{f_{subreg}}(L_{-5/2}(\mathfrak{g})) = \{0\}$.

Pretpostavimo $H_{f_{subreg}}(L_{-5/2}(\mathfrak{g})) = \{0\}$. Tada $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$ mora sadržavati singularni vektor w_μ koji se preslikava u $\mathbf{1} \in M_J(1)$.

Iz klasifikacije $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modula iz Korolara 3.4.5 slijedi da je $\mathfrak{g}$–težina vektora w_μ jednaka $\mu = n\omega_1$ ili $\mu = n\omega_3$, za $n > 0$. Direktnim računom dobivamo da se w_μ preslikava u vektor najveće težine u $W_{-5/2}(\mathfrak{g}, f_{subreg})$, $\bar{L}(0)$ težine $\frac{n(n+1)}{4}$ (za $\mu = n\omega_1$) ili $\frac{n(n-1)}{4}$ (za $\mu = n\omega_3$). Odavde slijedi da u slučaju $\mu = n\omega_1$ mora biti $n = 0$, što je kontradikcija. U slučaju $\mu = n\omega_3$ imamo $n = 0$ ili $n = 1$. Za $n = 0$ ponovno dobivamo kontradikciju. Slučaj $n = 1$ također nije moguć jer bi tada konformna težina vektora w_μ bila $5/4 \notin \mathbb{Z}$. Ovim je dokazana tvrdnja (2). ■

Sljedećim teoremom dana su neka temeljna svojstva funktora $H_{f_{subreg}}(\cdot)$:

Teorem 3.5.4. Za svaki $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ vrijedi:

(P) $H_{f_{subreg}}(L_{-5/2}(n\omega_3)) \neq \{0\}$ i $H_{f_{subreg}}(M) = \{0\}$ za svaki $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modul M najveće težine u $KL_{-5/2}$, $\mathfrak{g}$–težine $n\omega_1$.

Dokaz Teorema 3.5.4 bit će dan u točki 3.6.

Napomena 3.5.5. Svojstvo (P) iz Teorema 3.5.4 je glavna razlika slučaja $\mathfrak{g} = sl(4)$ na nivou $k = -5/2$, kojeg ovdje proučavamo, i slučaja $\mathfrak{g} = sl(4)$ na nivou $k = -1$ koji je opisan u točki 3.5.1, te riješen koristeći funktor minimalne redukcije $H_{f_\theta}(\cdot)$. U slučaju $k = -1$ imamo:

$$H_{f_\theta}(L_{-1}(n\omega_1)) \neq \{0\} \quad \text{i} \quad H_{f_\theta}(L_{-1}(n\omega_3)) \neq \{0\}.$$

Ova svojstva su jako važna pri određivanju maksimalnog ideala u $V^{-1}(sl(4))$. Ideja u slučaju $k = -5/2$ je koristiti svojstva iz Teorema 3.5.4 zajedno s automorfizmom σ iz Napomene 3.3.4 koji težinu $n\omega_1$ preslikava u $n\omega_3$, i obrnuto.

Teorem 3.5.4 daje nam važan tehnički rezultat koji ćemo koristiti pri dokazivanju sljedećih strukturnih rezultata za prostu verteks algebru $L_{-5/2}(\mathfrak{g})$ i pripadnu kategoriju modula $KL_{-5/2}$:

Teorem 3.5.6. Vrijedi:

(i) $J^{-5/2}$ je maksimalan ideal u $V^{-5/2}(sl(4))$, odnosno $L_{-5/2}(sl(4)) \cong V^{-5/2}(sl(4))/J^{-5/2}$.

(ii) Kategorija $KL_{-5/2}$ je poluprosta.

Dokaz. Iz Propozicije 3.5.3 slijedi $H_{f_{subreg}}(\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})) = W_{-5/2}(\mathfrak{g}, f_{subreg}) = M_J(1)$. Ako $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$ nije prosta, iz klasifikacije $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modula iz Korolara 3.4.5 slijedi da onda sadrži netrivijalni singularni vektor w_μ $\mathfrak{g}$–težine $\mu = n\omega_1$ ili $\mu = n\omega_3$, za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neka je σ automorfizam od $V^{-5/2}(\mathfrak{g})$ reda dva iz Napomene 3.3.4.

Budući da σ fiksira singularni vektor v, slijedi da je σ automorfizam i od $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$, te da se svaki singularni vektor (ako postoji) težine $n\omega_1$ mora preslikati u singularni vektor težine $n\omega_3$. Stoga zaključujemo da $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$ sadrži singularni vektor $\mathfrak{g}$–težine $\mu = n\omega_3$ za $n > 0$. Tada iz Teorema 3.5.4 slijedi da se ideal generiran tim singularnim vektorom funktorom kvantne redukcije $H_{f_{subreg}}(\cdot)$ preslikava u netrivijalni ideal u verteks algebri $W_{-5/2}(\mathfrak{g}, f_{subreg})$, koja je prosta. Koristeći egzaktnost funktora $H_{f_{subreg}}(\cdot)$, dobivamo $H_{f_{subreg}}(L_{-5/2}(\mathfrak{g})) = \{0\}$, što je kontradikcija s Propozicijom 3.5.3 (2). Ovim je dokazano (i), tj. $L_{-5/2}(\mathfrak{g}) \cong \widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$.

Sličnim argumentima kao u (i) dokaže se da svaki modul najveće težine u $KL_{-5/2}$ mora biti ireducibilan. Dokažimo tu tvrdnju. Promotrimo $L_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modul najveće težine $M(\mu)$, $\mathfrak{g}$–težine $\mu = n\omega_1$ ili $\mu = n\omega_3$ za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Pretpostavimo da $M(\mu)$ nije ireducibilan. Tada postoji singularni vektor $z_\nu \in M(\mu)$ najveće težine $\nu = m\omega_3$ ili $\nu = m\omega_1$, gdje je $m \in \mathbb{Z}, m > n$. Označimo $Z(\nu) = L_{-5/2}(\mathfrak{g}).z_\nu$. Primjenom funktora kvantne redukcije $H_{f_{subreg}}(\cdot)$ vidjet ćemo da u svim slučajevima dobivamo kontradikciju s Teoremom 3.5.4.

(1) Slučaj $\mu = n\omega_3$, $\nu = m\omega_3$. Dobivamo $H_{f_{subreg}}(M(\mu)) = H_{f_{subreg}}(Z(\nu)) = M_J(1,a)$ za neki $a \in \mathbb{C}$. Odavde slijedi $H_{f_{subreg}}(L_{-5/2}(n\omega_3)) = \{0\}$. Kontradikcija.

(2) Slučaj $\mu = n\omega_1$, $\nu = m\omega_3$. Dobivamo $H_{f_{subreg}}(M(\mu)) = \{0\}$, $H_{f_{subreg}}(Z(\nu)) = M_J(1,a)$ za neki $a \in \mathbb{C}$. Odavde slijedi da $H_{f_{subreg}}(\cdot)$ preslikava egzaktan niz

$$0 \to Z(\nu) \to M(\mu) \to M(\mu)/Z(\nu) \to 0$$

u neegzaktan niz

$$0 \to M_J(1,a) \to 0 \to 0 \to 0.$$

Kontradikcija.

(3) Slučaj $\mu = n\omega_1$, $\nu = m\omega_1$. Primjenom automorfizma σ na (1) dobivamo kontradikciju.

(4) Slučaj $\mu = n\omega_3$, $\nu = m\omega_1$. Primjenom automorfizma σ na (2) dobivamo kontradikciju.

Iz [9, Teorem 5.5] slijedi ako je svaki $L_k(\mathfrak{g})$–modul najveće težine u KL_k ireducibilan, onda je kategorija KL_k poluprosta. Dakle, $KL_{-5/2}$ je poluprosta.

$\blacksquare$

3.6. SINGULARNI VEKTORI U $V^k(n\omega_1)$ I $V^k(n\omega_3)$ I DOKAZ TEOREMA 3.5.4

U ovom dijelu dajemo dokaz Teorema 3.5.4. Glavna metoda dokaza zasniva se na konstrukciji singularnih vektora u generaliziranim Vermaovim modulima $V^k(n\omega_i)$, $i = 1,3$, i opisu njihovih podmodula $J^k \cdot V^k(n\omega_i)$. Posljedično konstruiramo univerzalne $\widetilde{L}_k(sl(4))$–module $\overline{M}(n\omega_i)$, za koje dokazujemo iščezavanje i neiščezavanje $H_{f_{subreg}}(\overline{M}(n\omega_i))$.

3.6.1. Univerzalni $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–moduli $\overline{M}(n\omega_1)$ i $\overline{M}(n\omega_3)$

Za ireducibilni $\mathfrak{g} = sl(4)$–modul $V(\mu)$, definiramo generalizirani Vermaov modul nivoa k:

$$V^k(\mu) := U(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t]+CK)} V(\mu).$$

Modul $V^k(\mu)$ je $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduiran:

$$V^k(\mu) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V^k(\mu)(m),$$

$$L(0)|V^k(\mu)(m) \equiv \left(m + \frac{(\mu \,|\, \mu + 2\rho)}{2(k+h^\vee)}\right) \text{ id}.$$

Za $w \in V^k(\mu)(m)$ pišemo $\deg(w) = m$. Označimo s v_μ vektor najveće težine u modulu $V^k(\mu)$.

Neka je $k = -5/2$. Podsjetimo se da $V^k(\mathfrak{g})$ sadrži singularni vektor v, $\mathfrak{g}$–težine $2\omega_2$ i konformne težine 4. Dakle, imamo netrivijalni $\hat{\mathfrak{g}}$–homomorfizam:

$$V^k(2\omega_2) \to V^k(\mathfrak{g}).$$

Nadalje, zanima nas konstrukcija univerzalnog $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modula $\overline{M}(\mu)$ u $KL_{-5/2}$, za najveće težine $\mu = n\omega_1$ i $\mu = n\omega_3$. Realiziran je kao

$$\overline{M}(\mu) = \frac{V^k(\mu)}{J^k \cdot V^k(\mu)},$$

gdje je $J^k \cdot V^k(\mu) = \text{span}\{a_n w \mid a \in J^k, w \in V^k(\mu), n \in \mathbb{Z}\}$ $V^k(\mathfrak{g})$–podmodul od $V^k(\mu)$ generiran djelovanjem J^k. Budući da top komponenta od $V^k(\mu)$ ne pripada $J^k \cdot V^k(\mu)$, dobivamo da je $J^k \cdot V^k(\mu)$ pravi podmodul od $V^k(\mu)$. Dakle, modul $\overline{M}(\mu)$ nije nula, te je $L_k(\mu)$ njegov prost kvocijent.

Lema 3.6.1. Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Vrijedi:

(1) Kao $V^k(\mathfrak{g})$–modul, $J^k \cdot V^k(n\omega_1)$ je generiran singularnim vektorima w_ν, $\mathfrak{g}$–težine ν za neki

$$\nu \in \{n\omega_1 + 2\omega_2, (n-1)\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, (n-2)\omega_1 + 2\omega_3\}.$$

(2) Kao $V^k(\mathfrak{g})$–modul, $J^k \cdot V^k(n\omega_3)$ je generiran singularnim vektorima w_ν, $\mathfrak{g}$–težine ν za neki

$$\nu \in \{n\omega_3 + 2\omega_2, (n-1)\omega_3 + \omega_1 + \omega_2, (n-2)\omega_3 + 2\omega_1\}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da su M_1 i M_2 $V^k(\mathfrak{g})$–moduli u KL^k takvi da postoje surjektivni operatori ispreplitanja tipa

$$\binom{M_1}{J^k \ \ V^k(n\omega_1)}, \quad \binom{M_2}{J^k \ \ V^k(n\omega_3)}.$$

Tada koristeći argumente za pravila fuzije i sljedeće dekompozicije tenzorskih produkata $\mathfrak{g}$–modula:

$$V(2\omega_2) \otimes V(n\omega_1) = V(n\omega_1 + 2\omega_2) \oplus V((n-1)\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \oplus V((n-2)\omega_1 + 2\omega_3),$$

$$V(2\omega_2) \otimes V(n\omega_3) = V(n\omega_3 + 2\omega_2) \oplus V((n-1)\omega_3 + \omega_1 + \omega_2) \oplus V((n-2)\omega_3 + 2\omega_1),$$

dobivamo da u kategoriji $V^k(\mathfrak{g})$–modula vrijedi

$$\begin{aligned} M_1 \quad &\subset \quad \widetilde{V}^k(n\omega_1 + 2\omega_2) + \widetilde{V}^k((n-1)\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + \widetilde{V}^k((n-2)\omega_1 + 2\omega_3) \\ M_2 \quad &\subset \quad \widetilde{V}^k(n\omega_3 + 2\omega_2) + \widetilde{V}^k((n-1)\omega_3 + \omega_1 + \omega_2) + \widetilde{V}^k((n-2)\omega_3 + 2\omega_1), \end{aligned}$$

pri čemu $\widetilde{V}^k(\lambda)$ označava neki kvocijent od $V^k(\lambda)$.

Budući da restrikcija verteks operatora na $V^k(\mu)$ daje netrivijalni surjektivni operator ispreplitanja tipa

$$\binom{J^k \cdot V^k(\mu)}{J^k \ \ V^k(\mu)},$$

dokazali smo da postoje netrivijalni surjektivni homomorfizmi

$$\begin{aligned} V^k(n\omega_1 + 2\omega_2) + V^k((n-1)\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + V^k((n-2)\omega_1 + 2\omega_3) \quad &\to \quad J^k \cdot V^k(n\omega_1), \\ V^k(n\omega_3 + 2\omega_2) + V^k((n-1)\omega_3 + \omega_1 + \omega_2) + V^k((n-2)\omega_3 + 2\omega_1) \quad &\to \quad J^k \cdot V^k(n\omega_3), \end{aligned}$$

odakle slijedi tvrdnja leme. ∎

Lema 3.6.2. Neka je $\mu = n\omega_1$ ili $\mu = n\omega_3$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tada $J^k \cdot V^k(\mu)$ sadrži netrivijalni singularni vektor w_ν takav da je $\deg(w_\nu) = 2$ i koji ima $\mathfrak{g}$–težinu $\nu = (n-1)\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ (za $\mu = n\omega_1$) ili $\nu = (n-1)\omega_3 + \omega_1 + \omega_2$ (za $\mu = n\omega_3$).

Dokaz. Direktno se vidi da je $v_{-1}v_\mu$ nenul vektor stupnja 4 u podmodulu $J^k \cdot V^k(\mu)$, pa $J^k \cdot V^k(\mu)$ mora sadržavati singularni vektor stupnja 1, 2, 3 ili 4.

Ako pretpostavimo da postoji singularni vektor w_ν neke $\mathfrak{g}$–težine ν, lagano se mogu izračunati stupnjevi singularnih vektora:

- Za $\nu = n\omega_1 + 2\omega_2$ (odn. $\nu = n\omega_3 + 2\omega_2$), u $V^k(n\omega_1)$ (odn. $V^k(n\omega_3)$) je $\deg(w_\nu) = 4 + \frac{2}{3}n$.

- Za $\nu = (n-1)\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ (odn. $\nu = (n-1)\omega_3 + \omega_1 + \omega_2$), u $V^k(n\omega_1)$ (odn. $V^k(n\omega_3)$) je $\deg(w_\nu) = 2$.

- Za $\nu = (n-2)\omega_1 + 2\omega_3$ (odn. $\nu = (n-2)\omega_3 + 2\omega_1$), u $V^k(n\omega_1)$ (odn. $V^k(n\omega_3)$) je $\deg(w_\nu) = \frac{2(2-n)}{3}$.

Odavde slijedi da $J^k \cdot V^k(\mu)$ mora sadržavati netrivijalni singularni vektor stupnja 2 i težine $\nu = (n-1)\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ (za $\mu = n\omega_1$) ili $\nu = (n-1)\omega_3 + \omega_1 + \omega_2$ (za $\mu = n\omega_3$). Time je dokazana tvrdnja leme. ∎

Eksplicitne formule za ove singularne vektore stupnja dva su jako komplicirane i bit će dane u Propoziciji 3.6.4. Sada za $\mu = n\omega_1$ i $\nu = (n-1)\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ (odn. za $\mu = n\omega_3$ i $\nu = (n-1)\omega_3 + \omega_1 + \omega_2$), možemo definirati kvocijentni modul:

$$M(\mu) = \frac{V^k(\mu)}{V^k(\mathfrak{g}).w_\nu}. \tag{3.14}$$

Općenito ne tvrdimo da je $M(\mu)$ $\widetilde{L}_k(\mathfrak{g})$–modul, ali svaki $\widetilde{L}_k(\mathfrak{g})$–modul u KL_k mora biti kvocijent od $M(\mu)$. Budući da stupanj singularnog vektora mora biti prirodan broj, dobivamo sljedeći opis univerzalnih $\widetilde{L}_k(\mathfrak{g})$–modula u KL_k:

Propozicija 3.6.3. Za univerzalni $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modul $\overline{M}(n\omega_i)$ u $KL_{-5/2}$, $\mathfrak{g}$–težine $n\omega_i$, za $i = 1,3$ vrijedi:

- $\overline{M}(n\omega_i) = M(n\omega_i)$ ako $\frac{2}{3}n \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

- $\overline{M}(n\omega_i)$ je kvocijent od $M(n\omega_i)$ po singularnom vektoru $w_{\nu'}$ težine $\nu' = n\omega_i + 2\omega_2$, ako $\frac{2}{3}n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i ako takav singularni vektor postoji.

3.6.2. Formule za singularne vektore stupnja 2 u $V^k(n\omega_1)$ i $V^k(n\omega_3)$ i njihove posljedice

U ovoj točki određujemo eksplicitne formule za singularne vektore stupnja dva u $V^k(\mu)$ i njihove slike u $H_{f_{subreg}}(V^k(\mu))$, za $\mu = n\omega_1$ i $\mu = n\omega_3$. Izostavljamo detalje dokaza radi sličnosti s nekim dokazima iz prethodne točke.

Neka je $\mathfrak{g} = sl(4)$ i $k = -5/2$.

Propozicija 3.6.4. Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Vrijedi:

(1) Za $\mu = n\omega_1$, sljedeći vektor w_ν je (jedinstven, do na skalar) singularni vektor u $V^k(\mu)$ stupnja 2 i $\mathfrak{g}$–težine $\nu = (n-1)\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$:

$$\begin{aligned}
w_\nu &= 3n(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)v_\mu - n(\frac{19}{4}+\frac{3}{2}n)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-2)v_\mu \\
&+ n(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)v_\mu - n(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)v_\mu \\
&+ (\frac{19}{4}+\frac{3}{2}n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-2)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\mu - \frac{5}{2}h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\mu \\
&- (\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\mu + (\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\mu \\
&- (\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\mu - 3(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\mu \\
&+ 2(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(0)v_\mu - (2+3n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(0)v_\mu \\
&+ (1-n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(0)v_\mu + e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)^2v_\mu \\
&+ e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(0)v_\mu + e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)^2f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(0)v_\mu \\
&+ \frac{5}{2}nf_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)v_\mu.
\end{aligned}$$

(2) Za $\mu = n\omega_3$, sljedeći vektor w_ν je (jedinstveni, do na skalar) singularni vektor u $V^k(\mu)$ stupnja 2 i $\mathfrak{g}$–težine $\nu = (n-1)\omega_3 + \omega_2 + \omega_1$:

$$\begin{aligned}
w_\nu &= 3n(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)v_\mu + n(\frac{19}{4}+\frac{3}{2}n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-2)v_\mu \\
&- n(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)v_\mu + n(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)v_\mu \\
&+ (\frac{19}{4}+\frac{3}{2}n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-2)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)v_\mu - \frac{5}{2}h_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)v_\mu \\
&- (\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)v_\mu + (\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)v_\mu \\
&+ (\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)v_\mu + 3(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)v_\mu \\
&- 2(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(0)v_\mu + (2+3n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(0)v_\mu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(1-n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(0)v_\mu+e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)^2v_\mu\\
&+e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(0)v_\mu+e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)^2f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(0)v_\mu\\
&+\frac{5}{2}nf_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)v_\mu.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Tvrdnja (1) dokaže se direktnom provjerom relacija $e_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}(0).w_\nu=0$ za $i=1,2,3$ i $f_\theta(1).w_\nu=0$. Tvrdnja (2) sada slijedi iz tvrdnje (1) primjenom automorfizma σ iz Napomene 3.3.4. ■

U sljedećoj propoziciji određujemo slike singularnih vektora w_ν iz Propozicije 3.6.4 u $R_{V^k(\mu)}=V^k(\mu)/C_2(V^k(\mu))$, za $\mu=n\omega_1,n\omega_3$. Za $x\in\mathfrak{g}$ i $u\in V(\mu)$, označimo s $\{x,u\}$ djelovanje od x na u. Koristimo oznaku v''_μ za sliku od $v_\mu\in V^k(\mu)$ u $R_{V^k(\mu)}$.

Propozicija 3.6.5. Neka je $n\in\mathbb{Z}_{>0}$. Vrijedi:

(1) Za $\mu=n\omega_1$, slika singularnog vektora w_ν iz Propozicije 3.6.4 (1) u $R_{V^k(\mu)}$ jednaka je:

$$
\begin{aligned}
w''_\nu=\;&3n(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}v_\mu+n(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}v_\mu-n(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}v_\mu\\
&-\frac{5}{2}h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2},v_\mu\}-(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2},v_\mu\}\\
&+(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2},v_\mu\}-(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2},v_\mu\}\\
&-3(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2},v_\mu\}+2(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3},v_\mu\}\\
&-(2+3n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3},v_\mu\}+(1-n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4},v_\mu\}\\
&+e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2},\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2},v_\mu\}\}+e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2},\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3},v_\mu\}\}\\
&+e^2_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2},\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4},v_\mu\}\}+\frac{5}{2}nf_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}v_\mu.
\end{aligned}
$$

(2) Za $\mu=n\omega_3$, slika singularnog vektora w_ν iz Propozicije 3.6.4 (2) u $R_{V^k(\mu)}$ jednaka je:

$$
\begin{aligned}
w''_\nu=\;&3n(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}v_\mu-n(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}v_\mu+n(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}v_\mu\\
&-\frac{5}{2}h_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4},v_\mu\}-(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4},v_\mu\}\\
&+(\frac{3}{2}+n)h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4},v_\mu\}+(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\{f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4},v_\mu\}\\
&+3(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}\{f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4},v_\mu\}-2(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\{f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4},v_\mu\}\\
&+(2+3n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}\{f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4},v_\mu\}-(1-n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4},v_\mu\}\\
&+e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4},\{f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4},v_\mu\}\}+e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4},\{f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4},v_\mu\}\}\\
&+e^2_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}\{f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4},\{f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4},v_\mu\}\}+\frac{5}{2}nf_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}v_\mu.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Direktno. ■

Dokaz sljedeće leme analogan je dokazu Leme 3.3.8:

Lema 3.6.6. Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neka je f_{subreg} subregularni nilpotentni element definiran relacijom (3.8), x poluprost element definiran s (3.9), i J_χ odgovarajući ideal u $\mathscr{S}(\mathfrak{g})$ definiran relacijom (3.7). Vrijedi:

(1) Za $\mu = n\omega_1$,

$$w''_\nu \equiv 3n(\frac{3}{2}+n)v_\mu \ (\mathrm{mod}\ J_\chi R_{V^k(\mu)}).$$

(2) Za $\mu = n\omega_3$,

$$w''_\nu \equiv 3n(\frac{3}{2}+n)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}v_\mu \ (\mathrm{mod}\ J_\chi R_{V^k(\mu)}).$$

Napomena 3.6.7. Ovdje navodimo neka svojstva djelovanja funktora $H_{f_{subreg}}$ na univerzalnim $V^k(\mathfrak{g})$–modulima. V. Kac i M. Wakimoto su u [49, Poglavlje 6] dokazali generalni rezultat o egzistenciji Vermaovih modula za $W^k(\mathfrak{g}, f)$ dobivenih funktorom kvantne redukcije od Vermaovih modula za $V^k(\mathfrak{g})$. Odredili su formule karaktera Vermaovih modula i dokazali da imaju PBW bazu. Njihov pristup može se modificirati za generalizirane Vermaove module (vidi i [15]). Primjenom u našem slučaju $\mathfrak{g} = sl(4)$ i $k = -5/2$, zaključujemo

$$H_{f_{subreg}}(V^k(\mu)) \neq \{0\}, \text{ za } \mu \in \{n\omega_1, n\omega_3\}.$$

Nadalje, $H_{f_{subreg}}(V^k(\mu))$ je $W^k(\mathfrak{g}, f_{subreg})$–modul, s vektorom najveće težine v_μ^W koji ima $(\bar{L}(0), J(0))$–težinu određenu s:

$$\bar{L}(0)v_\mu^W = \left(\frac{(\mu \,|\, \mu+2\rho)}{2(k+h^\vee)} - \mu(x)\right)v_\mu^W,$$
$$J(0)v_\mu^W = (\mu \,|\, \omega_1)v_\mu^W.$$

Kao u Napomeni 3.6.7, označimo s v_μ^W vektor najveće težine u $H_{f_{subreg}}(V^k(\mu))$, za $\mu = n\omega_1$, $n\omega_3$. Dokaz sljedeće leme analogan je dokazu Leme 3.5.2:

Lema 3.6.8. Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Vrijedi:

(1) Za $\mu = n\omega_1$, slika singularnog vektora w_ν iz Propozicije 3.6.4 (1) u $H_{f_{subreg}}(V^k(\mu))$ podudara se (do na nenul skalar) s vektorom v_μ^W.

(2) Za $\mu = n\omega_3$, slika singularnog vektora w_ν iz Propozicije 3.6.4 (2) u $H_{f_{subreg}}(V^k(\mu))$ podudara se (do na nenul skalar) s vektorom $G^+(-1)v_\mu^W$.

3.6.3. Dokaz Teorema 3.5.4

U dokazima sljedećih rezultata koriste se eksplicitne formule za singularne vektore w_ν iz Propozicije 3.6.4 i njihove posljedice proučavane u točki 3.6.2.

Propozicija 3.6.9. Za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ vrijedi:

- $H_{f_{subreg}}(\overline{M}(n\omega_1)) = \{0\}$.
- $H_{f_{subreg}}(M) = \{0\}$, za svaki $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modul M najveće težine u $KL_{-5/2}$, $\mathfrak{g}$–težine $n\omega_1$.

Dokaz. Iz Leme 3.6.8 slijedi da se slika singularnog vektora w_ν u $W^k(\mathfrak{g}, f_{subreg})$–modulu $H_{f_{subreg}}(V^k(n\omega_1))$ podudara s njegovim vektorom najveće težine. Odavde slijedi da je $H_{f_{subreg}}(M(n\omega_1)) = \{0\}$ i stoga je $H_{f_{subreg}}(\overline{M}(n\omega_1)) = \{0\}$. Dokaz druge tvrdnje slijedi iz prve i činjenice da svaki $\widetilde{L}_k(\mathfrak{g})$–modul najveće težine u $KL_{-5/2}$, $\mathfrak{g}$–težine $n\omega_1$ mora biti kvocijent od $\overline{M}(n\omega_1)$. ■

Propozicija 3.6.10. Za svaki $\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})$–modul najveće težine M u $KL_{-5/2}$, $\mathfrak{g}$–težine $n\omega_3$, vrijedi $H_{f_{subreg}}(M) = M_J(1, \frac{1}{4}n) \neq \{0\}$.

Dokaz. Iz Leme 3.6.8 slijedi da se vektor w_ν funktorom $H_{f_{subreg}}(\,\cdot\,)$ preslika u singularni vektor stupnja različitog od nula u $H_{f_{subreg}}(V^k(n\omega_3))$. Izračunamo li konformne težine, dobivamo da se i vektor $w_{\nu'}$ funktorom $H_{f_{subreg}}(\,\cdot\,)$ preslika u singularni vektor stupnja različitog od nula. Stoga se slike generatora od $J^k \cdot V^k(n\omega_3)$ ne mogu podudarati s vektorom najveće težine u $H_{f_{subreg}}(V^k(n\omega_3))$. Ovim je dokazano $H_{f_{subreg}}(\overline{M}(n\omega_3)) \neq \{0\}$. Budući da je $H_{f_{subreg}}(\widetilde{L}_{-5/2}(\mathfrak{g})) \cong M_J(1)$, zaključujemo $H_{f_{subreg}}(\overline{M}(n\omega_3)) \cong M_J(1, \frac{1}{4}n)$.

Promotrimo neki kvocijent od $\overline{M}(n\omega_3)$. On može imati singularni vektor težine $m\omega_1$ ili $m\omega_3$. No, podmoduli generirani singularnim vektorima težine $m\omega_1$ preslikaju se u nulu po Propoziciji 3.6.9.

S druge strane, singularni vektori težine $m\omega_3$ imaju $\bar{L}(0)$–težinu $\frac{m(m-1)}{4} \neq \frac{n(n-1)}{4}$ za sve $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \neq n$. Odavde slijedi da ne postoji singularni vektor u $\overline{M}(n\omega_3)$ koji se preslika u vektor najveće težine u $M_J(1, \frac{1}{4}n)$. Time je dokazana tvrdnja propozicije. ■

Napomena 3.6.11. Propozicijama 3.6.9 i 3.6.10 dokazan je Teorem 3.5.4.

3.7. KONFORMNO ULAGANJE $gl(4) \hookrightarrow sl(5)$ NA NIVOU $k = -5/2$ I PRAVILA FUZIJE ZA IREDUCIBILNE $L_{-5/2}(sl(4))$–MODULE U KATEGORIJI $KL_{-5/2}$

U ovom dijelu navodimo rezultate o konformnom ulaganju $gl(4) \hookrightarrow sl(5)$ na nivou $k = -5/2$ iz [6]. Koristeći ovo konformno ulaganje, određujemo pravila fuzije za ireducibilne $L_{-5/2}(sl(4))$–module u kategoriji $KL_{-5/2}$. Kao posljedicu dobivamo da je $KL_{-5/2}$ rigidna pleteničasta tenzorska kategorija.

Neka je $V = L_{-5/2}(sl(5))$. Uzmimo c iz Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g} = sl(5)$ takav da je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1,$$

$$\mathfrak{g}_0 = gl(4) = sl(4) + \mathbb{C}c,$$

$$\mathfrak{g}_1 = V_{sl(4)}(\omega_1), \quad \mathfrak{g}_{-1} = V_{sl(4)}(\omega_3)$$

$$c \equiv j \,\mathrm{id} \quad \text{na } \mathfrak{g}_j,\ j \in \{-1, 0, 1\}.$$

Neka je $M_c(1)$ Heisenbergova podalgebra od V generirana s c. Označimo s $M_c(1,s)$ ireducibilni $M_c(1)$–modul na kojem $c(0)$ djeluje kao s id.

Propozicija 3.7.1. [6] Postoji konformno ulaganje $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1)$ u V takvo da je

$$V = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} V^{(s)} \quad c(0) \equiv s \,\mathrm{id} \text{ na } V^{(s)},$$

i svaki $V^{(s)}$ je ireducibilni $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1)$–modul.

Propozicija 3.7.2. Pretpostavimo da je $\mathscr{M}$ ireducibilni V–modul takav da $c(0)$ djeluje poluprosto na $\mathscr{M}$:

$$\mathscr{M} = \bigoplus_{s \in \Delta + \mathbb{Z}} \mathscr{M}^{(s)} \quad c(0) \equiv s \,\mathrm{id} \text{ na } \mathscr{M}^{(s)}.$$

Tada vrijedi:

(1) Svaki $\mathscr{M}^{(s)}$ je ireducibilni $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1)$–modul.

(2) Ako postoji vektor $v \in \mathscr{M}$ koji je vektor najveće težine za $\widehat{sl(4)}$ težine λ takav da je $c(0)v = sv$ za neki s, onda je $\mathscr{U}(\widehat{sl(4)}).v$ ireducibilni $L_{-5/2}(sl(4))$–modul takav da

$$\mathscr{M}^{(s)} = L_{-5/2}(\lambda) \otimes M_c(1,s).$$

Dokaz. Dokaz tvrdnje (1) slijedi iz Propozicije 3.7.1 i analognih argumenata kao u [11, Teorem 5.1].

Tvrdnja (2) lagano slijedi iz tvrdnje (1). ■

Imamo sljedeću dekompoziciju $L_{-5/2}(sl(5))$ kao $L_{-5/2}(gl(4)) = L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1)$–modula (cf. [6]):

$$L_{-5/2}(sl(5)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(n\omega_1) \otimes M_c(1,n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(n\omega_3) \otimes M_c(1,-n). \tag{3.15}$$

Uvodimo sljedeće oznake za ireducibilne $L_{-5/2}(sl(4))$–module u kategoriji $KL_{-5/2}$:

$$\pi_i = L_{-5/2}(i\omega_1),\ \pi_{-i} = L_{-5/2}(i\omega_3),\ i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Top komponente su

$$\pi_i(0) = V(i\omega_1),\ \pi_{-i}(0) = V(i\omega_3).$$

Dokaz sljedeće propozicije analogan je dokazu [13, Teorem 6.2].

Propozicija 3.7.3. Neka su $i, j \in \mathbb{Z}$. Tada vrijede sljedeća pravila fuzije:

$$\pi_i \times \pi_j = \pi_{i+j}.$$

To znači da je za $i, j, k \in \mathbb{Z}$

$$\dim I \begin{pmatrix} & \pi_k & \\ \pi_i & & \pi_j \end{pmatrix} = \delta_{i+j,k}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $I\binom{\pi_k}{\pi_i \ \ \pi_j} \neq \{0\}$, tj. da postoji netrivijalni operator ispreplitanja I tipa $\binom{\pi_k}{\pi_i \ \ \pi_j}$. Kao u [13], odavde slijedi da je $\pi_k(0)$ netrivijalni sumand u tenzorskom produktu $\mathfrak{g}$–modula $\pi_i(0) \otimes \pi_j(0)$. Koristeći dekompoziciju tenzorskog produkta, vidimo da se $\pi_k(0)$ javlja u tenzorskom produktu $\pi_i(0) \otimes \pi_j(0)$ ako i samo ako je $k = i + j$, i da je multipliciteta 1. Dakle,

$$\dim I \begin{pmatrix} & \pi_k & \\ \pi_i & & \pi_j \end{pmatrix} \leq \delta_{i+j,k}.$$

Preostaje konstruirati netrivijani operator ispreplitanja tipa $\binom{\pi_{i+j}}{\pi_i \ \ \pi_j}$. Analogno slučaju promatranom u [13], koristeći verteks operator na $V = L_{-5/2}(sl(5))$ dobivamo netrivijalni operator ispreplitanja $\mathscr{Y}$ u prostoru $I\binom{V^{(i+j)}}{V^{(i)}\ \ V^{(j)}}$. Budući da je $V^{(s)} = \pi_s \otimes M_c(1,s)$, slijedi $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}_1 \otimes \mathscr{Y}_2$, gdje je

$$\mathscr{Y}_1 \in I\begin{pmatrix} \pi_{i+j} \\ \pi_i \ \ \pi_j \end{pmatrix}, \ \mathscr{Y}_2 \in I\begin{pmatrix} M_c(1,i+j) \\ M_c(1,i) \ \ M_c(1,j) \end{pmatrix}.$$

Dakle, $\dim I\binom{\pi_{i+j}}{\pi_i \ \ \pi_j} = 1$. Time je dokazana tvrdnja propozicije. ■

Korolar 3.7.4. *$KL_{-5/2}$ je poluprosta rigidna pleteničasta tenzorska kategorija s pravilima fuzije*

$$\pi_i \boxtimes \pi_j = \pi_{i+j}, \quad i,j \in \mathbb{Z}.$$

Dokaz. Iz [29, Teorem 3.3] slijedi da je generalno KL_k pleteničasta tenzorska kategorija ako je zadovoljen sljedeći uvjet:

- Svaki $L_k(\mathfrak{g})$–modul najveće težine u KL_k je konačne duljine.

Ovaj uvjet je zadovoljen u našem slučaju jer je kategorija KL_k poluprosta. Stoga vrijedi da je $KL_{-5/2}$ pleteničasta tenzorska kategorija.

Primijetimo da iz dekompozicije (3.15) slijedi da kompaktna Liejeva grupa $U(1)$ djeluje na $L_{-5/2}(sl(5))$:

- $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1) = L_{-5/2}(sl(5))^{U(1)}$,
- Svi $L_{-5/2}(sl(4))$–moduli u $KL_{-5/2}$ javljaju se u dekompoziciji od $L_{-5/2}(sl(5))$ kao $L_{-5/2}(sl(5))^{U(1)} \times U(1)$–modula.

Tada se iste metode koje su korištene u dokazima rigidnosti primjera proučavanih u [29, Poglavlje 5] i [3] mogu primijeniti i u slučaju $L_{-5/2}(sl(4))$. Time je dokazana rigidnost. Posljedično, pravila fuzije iz Propozicije 3.7.3 daju pravila fuzije u kontekstu verteks tenzorskih kategorija. (Detalji dokaza jednaki su kao u slučaju tenzorske kategorije KL_{-1}.) ■

Napomena 3.7.5. U [29], autori predlažu teoriju tenzorskih kategorija za proučavanje pravila fuzije afinih verteks algebri. Ako pretpostavimo da kategorija $V_k(\mathfrak{g}_0)$–modula iz KL_k ima strukturu pleteničaste tenzorske kategorije, njihov bi rezultat, zajedno s dekompozicijom iz [6], trebao dati pravila fuzije u KL_k.

Slično se događa za sva konformna ulaganja $\mathfrak{g}_0 \hookrightarrow \mathfrak{g}$ na konformnim nivoima k čije su dekompozicije kao u [6, Teorem 5.1]. Slutnja je da su svi moduli koji se javljaju u dekompozicijama tih konformnih ulaganja moduli proste struje, odakle bi slijedilo da ti moduli u KL_k imaju izomorfne fuzijske algebre kao $KL_{-5/2}$.

3.8. Dekompozicija ireducibilnih modula u kategoriji $\mathscr{O}$ za konformno ulaganje $gl(4) \hookrightarrow sl(5)$ na nivou $k = -5/2$

U ovom dijelu određujemo dekompoziciju ireducibilnih $L_{-5/2}(sl(5))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$ kao $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1)$–modula.

Navedimo klasifikaciju ireducibilnih $L_{-5/2}(sl(5))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$.

Propozicija 3.8.1. [18, 58] Svi ireducibilni $L_{-5/2}(sl(5))$–moduli u kategoriji $\mathscr{O}$ dani su s

$$\{L_{-5/2}(\lambda_i) \mid i = 1, \ldots, 16\},$$

gdje je:

$\lambda_1 = 0,$	$\lambda_9 = -\frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3,$
$\lambda_2 = -\frac{5}{2}\omega_1,$	$\lambda_{10} = -\frac{3}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_4,$
$\lambda_3 = -\frac{5}{2}\omega_2,$	$\lambda_{11} = -\frac{3}{2}\omega_3 + \frac{1}{2}\omega_4,$
$\lambda_4 = -\frac{5}{2}\omega_3,$	$\lambda_{12} = -\frac{3}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_3,$
$\lambda_5 = -\frac{5}{2}\omega_4,$	$\lambda_{13} = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_4,$
$\lambda_6 = \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_2,$	$\lambda_{14} = -\frac{3}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_4,$
$\lambda_7 = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_3,$	$\lambda_{15} = -\frac{3}{2}\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{3}{2}\omega_4,$
$\lambda_8 = -\frac{3}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_4,$	$\lambda_{16} = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_4.$

Označimo s v_{λ_i} vektor najveće težine u $L_{-5/2}(sl(5))$–modulu $L_{-5/2}(\lambda_i)$, za $i = 1, \ldots, 16$. Da bismo dekomponirali $L_{-5/2}(sl(5))$–module iz Propozicije 3.8.1 kao $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1)$–module, odredit ćemo eksplicitne formule za $\widehat{gl(4)}$–singularne vektore u tim modulima. Prvo određujemo singularne vektore najmanje konformne težine:

Propozicija 3.8.2. Za svaki $i = 1, \ldots, 16$ neka je $\lambda_i = \sum_{k=1}^{4} a_{i,k}\omega_k$. Ako $a_{i,j} \neq 0$ i $a_{i,k} = 0$ za $k > j$, onda je $f_{\varepsilon_j - \varepsilon_5}(0)^n v_{\lambda_i}$ (netrivijalni) singularni vektor za $L_{-5/2}(gl(4)) = L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1)$.

Dokaz. Direktnim računom. ■

U sljedećoj propoziciji dani su preostali singularni vektori:

Propozicija 3.8.3. (1) Za svaki $i = 1, \ldots, 16$ takav da $\widehat{\lambda}_i(\alpha_0^\vee) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i svaki $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_5}(-1)^n v_{\lambda_i}$ je (netrivijalni) singularni vektor za $L_{-5/2}(gl(4)) = L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1)$.

(2) U sljedećoj tablici dane su formule (netrivijalnih) singularnih vektora za $L_{-5/2}(gl(4)) = L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1)$ u $L_{-5/2}(\lambda_i)$, za $i = 2,3,4,5,12,13,14,15$, i za sve $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

λ_i	singularni vektori
$\lambda_2, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}$	$e_{\varepsilon_2-\varepsilon_5}(-1)^n v_{\lambda_i}$
λ_3, λ_{15}	$e_{\varepsilon_3-\varepsilon_5}(-1)^n v_{\lambda_i}$
λ_4	$e_{\varepsilon_4-\varepsilon_5}(-1)^n v_{\lambda_i}$
λ_5	$e_{\varepsilon_1-\varepsilon_5}(-2)^n v_{\lambda_i}$

Dokaz. Direktno. Budući da je uvjet $\widehat{\lambda}_i(\alpha_0^\vee) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zadovoljen za $i = 1,6,7,8,9,10,11,16$, tvrdnja (1) daje singularne vektore u ovim slučajevima. Za ostale slučajeve dani su u tvrdnji (2). ∎

Teorem 3.8.4. Uz oznake iz Propozicije 3.4.2, dekompozicije ireducibilnih $L_{-5/2}(sl(5))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$ kao $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1)$–modula dane su sljedećim relacijama:

$$L_{-5/2}(\lambda_1) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_1(n)) \otimes M_c(1,n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_2(n)) \otimes M_c(1,-n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_1(-n-\tfrac{5}{2})) \otimes M_c(1,-\tfrac{1}{2}-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_3(-n-\tfrac{5}{2})) \otimes M_c(1,-\tfrac{1}{2}+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_3) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_3(n)) \otimes M_c(1,-1-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_4(-n-\tfrac{5}{2})) \otimes M_c(1,-1+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_4) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_4(n)) \otimes M_c(1,-\tfrac{3}{2}-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_2(-n-\tfrac{5}{2})) \otimes M_c(1,-\tfrac{3}{2}+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_5) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_2(n)) \otimes M_c(1,-2-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_1(n)) \otimes M_c(1,-2+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_6) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_7(n+\tfrac{1}{2})) \otimes M_c(1,-\tfrac{1}{2}-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_5(n+\tfrac{1}{2})) \otimes M_c(1,-\tfrac{1}{2}+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_7) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{14}(n)) \otimes M_c(1,-1-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{10}(n-\tfrac{1}{2})) \otimes M_c(1,-1+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_8) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_9(n)) \otimes M_c(1,-\tfrac{3}{2}-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_1(n-\tfrac{3}{2})) \otimes M_c(1,-\tfrac{3}{2}+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_9) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_8(n-\tfrac{1}{2})) \otimes M_c(1,-\tfrac{1}{2}-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{15}(n)) \otimes M_c(1,-\tfrac{1}{2}+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_{10}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_6(n)) \otimes M_c(1,-1-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_5(n)) \otimes M_c(1,-1+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_{11}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_2(n-\tfrac{3}{2})) \otimes M_c(1,-\tfrac{1}{2}-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{10}(n)) \otimes M_c(1,-\tfrac{1}{2}+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_{12}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{11}(n+\tfrac{1}{2})) \otimes M_c(1,-1-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{12}(n+\tfrac{1}{2})) \otimes M_c(1,-1+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_{13}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{13}(n)) \otimes M_c(1,-\tfrac{3}{2}-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{7}(-n-\tfrac{1}{2})) \otimes M_c(1,-\tfrac{3}{2}+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_{14}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{9}(n-\tfrac{1}{2})) \otimes M_c(1,-1-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{16}(n)) \otimes M_c(1,-1+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_{15}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{6}(n+\tfrac{1}{2})) \otimes M_c(1,-\tfrac{3}{2}-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{8}(-n-\tfrac{3}{2})) \otimes M_c(1,-\tfrac{3}{2}+n),$$

$$L_{-5/2}(\lambda_{16}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{13}(n-\tfrac{1}{2})) \otimes M_c(1,-1-n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-5/2}(\mu_{15}(n-\tfrac{1}{2})) \otimes M_c(1,-1+n).$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz Propozicija 3.7.2, 3.8.2 i 3.8.3. ■

3.9. $L_{-5/2}(sl(4))$–MODULI $L_{-5/2}(t\omega_1)$ KAO POTKVOCIJENTI RELAKSIRANIH $L_{-5/2}(sl(5))$–MODULA

U prethodnim sekcijama dokazali smo da je $L_{-5/2}(t\omega_1)$ ireducibilni $L_{-5/2}(sl(4))$–modul za svaki $t \in \mathbb{C}$ (vidi Teorem 3.4.4, Napomenu 3.4.6, Teorem 3.5.6). S druge strane, u Teoremu 3.8.4 module $L_{-5/2}(t\omega_1)$ identificirali smo kao podmodule $L_{-5/2}(sl(5))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$ samo za prebrojivo mnogo $t \in \mathbb{C}$. U ovom dijelu proučavamo realizaciju modula $L_{-5/2}(t\omega_1)$ kao potkvocijenata $L_{-5/2}(sl(5))$–modula za bilo koji $t \in \mathbb{C}$. Da bi se dobila takva realizacija, pokazuje se da je potrebno promatrati module izvan kategorije $\mathscr{O}$, preciznije relaksirane $L_{-5/2}(sl(5))$–module. Relaksirani moduli za afine verteks algebre nedavno su proučavani u [39], [51], [52], [53].

Također dokazujemo da postoji netrivijalni homomorfizam iz Zhuove algebre $A(L_{-5/2}(sl(4)))$ u Weylovu algebru $\mathscr{A}_4$, odakle slijedi da je svaki modul za $\mathscr{A}_4$ prirodno i modul za $A(L_{-5/2}(sl(4)))$, pa inducira $L_{-5/2}(sl(4))$–modul (vidi Propoziciju 3.2.1 (2)). Nadamo se da bi ovaj rezultat mogao biti koristan pri proučavanju $L_{-5/2}(sl(4))$–modula izvan kategorije $\mathscr{O}$.

3.9.1. Homomorfizam iz Zhuove algebre u Weylovu algebru

Označimo s $\mathscr{A}_4$ Weylovu algebru generiranu s $x_1, x_2, x_3, x_4, \partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4$ i netrivijalnim komutacijskim relacijama:

$$[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Teorem 3.9.1. Postoji netrivijalni homomorfizam

$$\Phi\colon A(L_{-5/2}(sl(4))) \to \mathscr{A}_4$$

jedinstveno određen s

$$e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \mapsto x_i\partial_j, \quad f_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \mapsto x_j\partial_i, \quad 1 \leq i < j \leq 4. \tag{3.16}$$

Dokaz. Očito postoji netrivijalni homomorfizam $\Phi\colon \mathscr{U}(sl(4)) \to \mathscr{A}_4$ jedinstveno određen relacijom (3.16). Direktnim računom dobivamo

$$\Phi(e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(h_1e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(h_1e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(h_2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(h_2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(h_1h_2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(h_1h_2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(h_2^2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(h_2^2e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(h_2h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(h_2h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4})$$

$$\Phi(h_1h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = \Phi(h_1h_3e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}) =$$

$$= x_1^2x_2x_3\partial_1\partial_3^2\partial_4 - x_1x_2^2x_3\partial_2\partial_3^2\partial_4 - x_1^2x_2x_4\partial_1\partial_3\partial_4^2 + x_1x_2^2x_4\partial_2\partial_3\partial_4^2$$

$$\Phi(e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = x_1x_2x_3\partial_3^2\partial_4$$

$$\Phi(e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}) = x_1x_2^2x_3\partial_2\partial_3^2\partial_4$$

$$\Phi(h_3e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}) = 2x_1x_2x_3\partial_3^2\partial_4 + x_1x_2^2x_3\partial_2\partial_3^2\partial_4 - 2x_1x_2x_4\partial_3\partial_4^2 - x_1x_2^2x_4\partial_2\partial_3\partial_4^2$$

$$\Phi(h_1e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = x_1^2x_2x_3\partial_1\partial_3^2\partial_4 - x_1x_2^2x_3\partial_2\partial_3^2\partial_4$$

$$\Phi(h_3f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = 2x_1x_2x_3\partial_3^2\partial_4 + x_1^2x_2x_3\partial_1\partial_3^2\partial_4 - 2x_1x_2x_4\partial_3\partial_4^2 - x_1^2x_2x_4\partial_1\partial_3\partial_4^2$$

$$\Phi(f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e^2_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}) = 2x_1x_2x_3\partial_3^2\partial_4 + x_1^2x_2x_3\partial_1\partial_3^2\partial_4$$

$$\Phi(h_1f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}) = x_1^2x_2x_4\partial_1\partial_3\partial_4^2 - x_1x_2^2x_4\partial_2\partial_3\partial_4^2$$

$$\Phi(f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e^2_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}) = 2x_1x_2x_4\partial_3\partial_4^2 + x_1x_2^2x_4\partial_2\partial_3\partial_4^2$$

$$\Phi(f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}e^2_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}) = 2x_1x_2x_4\partial_3\partial_4^2 + x_1^2x_2x_4\partial_1\partial_3\partial_4^2.$$

Iz ovih relacija slijedi $\Phi(v') = 0$, gdje je v' dan u Propoziciji 3.3.5. Budući da je $A(L_{-5/2}(sl(4))) = \mathscr{U}(sl(4))/\langle v'\rangle$, slijedi tvrdnja teorema. ■

3.9.2. Neki relaksirani $L_{-5/2}(sl(5))$–moduli

U ovoj točki opisujemo realizaciju $L_{-5/2}(sl(4))$–modula $L_{-5/2}(t\omega_1)$ koristeći $sl(n)$–module $M(\mathbf{a})$, definirane u [25], i konformno ulaganje $gl(4) \hookrightarrow sl(5)$ na nivou $k = -5/2$.

Navedimo definiciju modula $M(\mathbf{a})$ iz [25]. Za $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, definiramo $M(\mathbf{a})$ kao kompleksni vektorski prostor razapet s

$$\{x^{\mathbf{b}} = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \mid b_i - a_i \in \mathbb{Z}\ \forall i,\ \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = 0\}.$$

Djelovanje od $sl(n)$ dano je s

$$e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = x_i \partial_j,\ f_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = x_j \partial_i, \tag{3.17}$$

za $1 \leq i < j \leq n$.

Propozicija 3.9.2. [25] Za svaku n-torku $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ takvu da $a_i \notin \mathbb{Z}$ za sve $i = 1, \dots, n$, $M(\mathbf{a})$ je ireducibilni $sl(n)$–modul bez torzije.

Propozicija 3.9.3. Za svaki $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_5) \in \mathbb{C}^5$, $M(\mathbf{a})$ je $A(L_{-5/2}(sl(5)))$–modul ako i samo ako je $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = -5/2$.

Dokaz. Iz [58] slijedi da je vektor

$$\begin{aligned} u = (&\frac{3}{5} h_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}(-1) e_\theta(-1) + \frac{1}{5} h_{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}(-1) e_\theta(-1) - \frac{1}{5} h_{\varepsilon_3 - \varepsilon_4}(-1) e_\theta(-1) - \frac{3}{5} h_{\varepsilon_4 - \varepsilon_5}(-1) e_\theta(-1) + \\ &+ e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}(-1) e_{\varepsilon_2 - \varepsilon_5}(-1) + e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}(-1) e_{\varepsilon_3 - \varepsilon_5}(-1) + e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_4}(-1) e_{\varepsilon_4 - \varepsilon_5}(-1) - \frac{3}{2} e_\theta(-2)) \mathbf{1} \end{aligned}$$

singularni vektor u $V^{-5/2}(sl(5))$ i da generira maksimalni ideal. Projekcija vektora u u Zhuovu algebru je $u' = F([u])$ dan sljedećom formulom:

$$\begin{aligned} u' = &\frac{3}{5} e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_5} h_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} + \frac{1}{5} e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_5} h_{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} - \frac{1}{5} e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_5} h_{\varepsilon_3 - \varepsilon_4} - \frac{3}{5} e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_5} h_{\varepsilon_4 - \varepsilon_5} + \\ &+ e_{\varepsilon_2 - \varepsilon_5} e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} + e_{\varepsilon_3 - \varepsilon_5} e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} + e_{\varepsilon_4 - \varepsilon_5} e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_4} + \frac{3}{2} e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_5} \in \mathscr{U}(sl(5)). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Očito, $M(\mathbf{a})$ je $A(L_{-5/2}(sl(5)))$–modul ako i samo ako u' poništava $M(\mathbf{a})$. Koristeći formulu (3.18), i definiciju $sl(5)$–djelovanja (3.17), dobivamo da u' djeluje na $M(\mathbf{a})$ kao

$$\frac{3}{5} x_1 \partial_5 \left(x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + x_3 \partial_3 + x_4 \partial_4 + x_5 \partial_5 + \frac{5}{2} \right). \tag{3.19}$$

Neka je $x^{\mathbf{b}} = x_1^{b_1} \cdots x_5^{b_5}$ proizvoljni element iz $M(\mathbf{a})$. Iz relacije (3.19) slijedi

$$u'.x^{\mathbf{b}} = \frac{3}{5} b_5 (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + 5/2) x^{\mathbf{b}'},$$

gdje je

$$x^{\mathbf{b}'} = x_1^{b_1+1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} x_4^{b_4} x_5^{b_5 - 1}.$$

Tvrdnja propozicije sada slijedi iz relacije $\sum_{i=1}^{5} (b_i - a_i) = 0$. ∎

Teorem 3.9.4. Za svaki $t \in \mathbb{C}$, ireducibilni $L_{-5/2}(sl(4))$–modul $L_{-5/2}(t\omega_1)$ je potkvocijent $L_{-5/2}(sl(5))$–modula $\widehat{M(\mathbf{a})}$ takvog da je $\widehat{M(\mathbf{a})}(0) \cong M(\mathbf{a})$, za $\mathbf{a} = (t,0,0,0,-t-\frac{5}{2})$.

Dokaz. Iz Propozicije 3.9.3 slijedi da je $M(\mathbf{a})$ $A(L_{-5/2}(sl(5)))$–modul za $\mathbf{a} = (t,0,0,0,-t-\frac{5}{2})$, $t \in \mathbb{C}$. Sada iz Propozicije 3.2.1 (2) slijedi da postoji $L_{-5/2}(sl(5))$–modul $\widehat{M(\mathbf{a})}$ takav da je $\widehat{M(\mathbf{a})}(0) \cong M(\mathbf{a})$. Vektor

$$v_t := x_1^t x_5^{-t-\frac{5}{2}}$$

je singularni vektor za $\widehat{sl(4)}$, $sl(4)$–težine $t\omega_1$. Budući da je $L_{-5/2}(sl(4)) \otimes M_c(1)$ konformno uložena u $L_{-5/2}(sl(5))$, dobivamo da je $\widetilde{L}_{-5/2}(t\omega_1) = \mathscr{U}(\widehat{sl(4)}).v_t$ modul za $L_{-5/2}(sl(4))$. Odavde slijedi da je $L_{-5/2}(t\omega_1)$ potkvocijent od $\widehat{M(\mathbf{a})}$ jer je kvocijent od $\widetilde{L}_{-5/2}(t\omega_1)$. ■

Sljedeća napomena pokazuje da postoje nerastavljivi $L_{-5/2}(sl(4))$–moduli u kategoriji $\mathscr{O}$.

Napomena 3.9.5. Promotrimo singularni vektor v_t za $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada:

- $\widetilde{U}_t := \mathscr{U}(sl(4))v_t$ je beskonačnodimenzionalan $sl(4)$–modul najveće težine.
- Najveća težina modula $\widetilde{U}_t$ je $\mu_1(t) = t\omega_1$, pa je dominantna integralna. Stoga, $\widetilde{U}_t$ je nerastavljivi $A(L_{-5/2}(sl(4)))$–module.
- $\widetilde{L}_{-5/2}(t\omega_1)$ je nerastavljivi $L_{-5/2}(sl(4))$–modul.

3.10. Dodatak: OPE za $W^k(sl(4), f_{subreg})$

Prisjetimo se da je verteks algebra $W^k(sl(4), f_{subreg})$, dobivena funktorom kvantne redukcije, generirana s pet polja $J, \bar{L}, W, G^+, G^-$ konformnih težina $1,2,3,1,3$, redom. Odaberimo novo Virasorovo polje $L = \bar{L} - \partial J$ tako da $G^\pm$ imaju konformnu težinu 2. Ovdje navodimo OPE relacije za $W^k(sl(4), f_{subreg})$ iz [27].

$$
\begin{aligned}
L(z)L(w) &\sim -\frac{(8+3k)(17+8k)}{2(4+k)}(z-w)^{-4} + 2L(w)(z-w)^{-2} + \partial L(w)(z-w)^{-1},\\
L(z)J(w) &\sim J(w)(z-w)^{-2} + \partial J(w)(z-w)^{-1},\\
L(z)W(w) &\sim 3W(w)(z-w)^{-2} + \partial W(w)(z-w)^{-1},\\
L(z)G^\pm(w) &\sim 2G^\pm(w)(z-w)^{-2} + \partial G^\pm(w)(z-w)^{-1},\\
J(z)J(w) &\sim (2+\frac{3k}{4})(z-w)^{-2},\\
J(z)G^\pm(w) &\sim \pm G^\pm(w)(z-w)^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W(z)G^\pm(w) \sim\ & \pm\frac{2(4+k)(7+3k)(16+5k)}{(8+3k)^2}G^\pm(w)(z-w)^{-3}\\
&+\left(\pm\frac{3(4+k)(16+5k)}{2(8+3k)}\partial G^\pm - \frac{6(4+k)(16+5k)}{(8+3k)^2} :JG^\pm:\right)(w)(z-w)^{-2}\\
&+\left(-\frac{8(3+k)(4+k)}{(2+k)(8+3k)} :J\partial G^\pm: -\frac{4(4+k)(16+15k+3k^2)}{(2+k)(8+3k)^2} :(\partial J)G^\pm:\right.\\
&\pm\frac{(3+k)(4+k)}{2+k}\partial^2 G^\pm \mp \frac{2(4+k)^2}{(2+k)(8+3k)} :LG^\pm:\\
&\left.\pm\frac{4(4+k)(16+5k)}{(2+k)(8+3k)^2} :JJG^\pm:\right)(w)(z-w)^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G^+(z)G^-(w) \sim\ & (2+k)(5+2k)(8+3k)(z-w)^{-4} + 4(2+k)(5+2k)J(w)(z-w)^{-3}\\
&+\Big(-(2+k)(4+k)L + 6(2+k) :JJ: + 2(2+k)(5+2k)\partial J\Big)(w)(z-w)^{-2}\\
&+\left((k+2)W + \frac{8(2+k)(32+11k)}{3(8+3k)^2} :JJJ: - \frac{4(2+k)(4+k)}{8+3k} :LJ: + 6(2+k) :(\partial J)J:\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}(2+k)(4+k)\partial L + \frac{4(2+k)(26+17k+3k^2)}{3(8+3k)}\partial^2 J\right)(w)(z-w)^{-1},
\end{aligned}
$$

$$W(z)W(w) \sim \frac{2(k+4)(2k+5)(3k+7)(5k+16)}{3k+8}(z-w)^{-6} + \cdots .$$

Preostali članovi u OPE od $W(z)W(w)$ mogu se naći u [34].

4. NOVI PRISTUP OPISU IREDUCIBILNIH MODULA U KATEGORIJI $\mathcal{O}$ ZA AFINE VERTEKS ALGEBRE NA NIVOIMA BLISKIM DOPUSTIVIMA

U članku [1] D. Adamović je proučavao proste verteks algebre pridružene afinim Liejevim algebrama tipa $C_l^{(1)}$ na dopustivim polucijelim nivoima te klasificirao njihove ireducibilne module u kategoriji $\mathcal{O}$. Dokazano je da su najveće težine tih modula upravo sve dopustive težine za $C_l^{(1)}$ nivoa k i da je svaki modul za te verteks algebre u kategoriji $\mathcal{O}$ potpuno reducibilan. Analogne rezultate dobili su D. Adamović i A. Milas u članku [10] te C. Dong, H. Li i G. Mason u članku [31] za tip $A_1^{(1)}$ na svim dopustivim nivoima, kao i O. Perše u radovima [57] i [58] za tipove $A_l^{(1)}$ i $B_l^{(1)}$ na nekim dopustivim polucijelim nivoima. Autori su u [10] iznijeli slutnju da takvi rezultati vrijede za sve verteks algebre na dopustivim nivoima. Kasnije ju je dokazao T. Arakawa u [18].

Dakle, u slučaju dopustivog nivoa k, ireducibilni $L_k(\mathfrak{g})$–moduli u kategoriji $\mathcal{O}$ su upravo dopustivi $\hat{\mathfrak{g}}$–moduli nivoa k.

U poglavlju 3 klasificirali smo ireducibilne $L_{-5/2}(sl(4))$–module u kategoriji $\mathcal{O}$ (vidi Teorem 3.4.4) i vidjeli da su njihove najveće težine parametrizirane kao unija 16 pravaca u $\mathbb{C}^3$. Budući da se ta klasifikacija pokazuje dosta kompliciranom, po uzoru na dopustive nivoe dat ćemo njihov algebarski opis. U tu ćemo svrhu definirati tzv. skoro dopustive i glavne skoro dopustive module te pokazati kako se pomoću njih mogu dobiti parametrizacije najvećih težina ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ za proste verteks algebre $L_{-5/2}(sl(4))$ i $L_{-1}(sl(n))$, za $n \geq 3$. Slutimo da bi se takva metoda mogla primijeniti i za dobiti klasifikaciju ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ i za druge verteks algebre na nivoima bliskim dopustivima. Nadalje, vidjet ćemo da za skoro dopustive i glavne skoro dopustive module vrijedi Kac-Wakimotova formula karaktera kao u slučaju dopustivih modula [47], [48].

4.1. Skoro dopustivi i glavni skoro dopustivi moduli

Označimo s $\mathfrak{g}$ prostu Liejevu algebru $sl(n)$ i neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Neka je $\hat{\mathfrak{g}}$ (nezakrenuta) afinizacija od $\mathfrak{g}$ i neka je $\hat{\mathfrak{h}}$ Cartanova podalgebra od $\hat{\mathfrak{g}}$. Neka je R (odnosno R_+)$\subset \hat{\mathfrak{h}}$ skup svih realnih (pozitivnih realnih) kokorijena od $\hat{\mathfrak{g}}$. Neka je $K = \{\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^* \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ za sve osim konačno mnogo $\alpha \in R_+$ i $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$ za izotropan $\alpha\}$. Fiksirajmo $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$. Neka je $R^\lambda = \{\alpha \in R \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}\}$, $R_+^\lambda = R^\lambda \cap R_+$ i $\Pi^\lambda = \{\alpha \in R_+^\lambda \mid \alpha$ nije suma nekih kokorijena iz $R_+^\lambda\}$. Kardinalni broj od Π^λ zovemo rang od R_+^λ i pišemo $r(R_+^\lambda)$.

Definicija 4.1.1. Za težinu $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ kažemo da je **skoro dopustiva** ako vrijede sljedeći uvjeti:

1. $\lambda \in -\rho + K$ i $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle > 0$ za sve $\alpha \in R_+^\lambda$ (odnosno λ zadovoljava uvjete Teorema 1 iz [47]),
2. $r(R_+^\lambda) = n - 1$.

Definicija 4.1.2. Za težinu $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ kažemo da je **glavna skoro dopustiva** ako je λ skoro dopustiva težina i skup Π^λ je tipa $A_{n-2}^{(1)}$.

Definicija 4.1.3. Neka je $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$. Za ireducibilni $\hat{\mathfrak{g}}$–modul $L(\lambda)$ najveće težine λ kažemo da je **(glavni) skoro dopustivi modul** ako je λ (glavna) skoro dopustiva težina.

4.2. SLUČAJ $\mathfrak{g} = sl(4)$, $k = -5/2$

4.2.1. Karakterizacija najvećih težina $L_{-5/2}(sl(4))$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$

Označimo s $\mathfrak{g}$ prostu Liejevu algebru $sl(4)$. U Teoremu 3.4.4 klasificirani su ireducibilni $L_{-5/2}(\mathfrak{g})$–moduli koji su u kategoriji $\mathcal{O}$ kao moduli za afinu Liejevu algebru $\hat{\mathfrak{g}}$. Uz oznake kao u Propoziciji 3.4.2, dokazat ćemo da je skup ireducibilnih skoro dopustivih $\hat{\mathfrak{g}}$–modula nivoa $k = -5/2$ dan s

$$\{L_{-5/2}(\mu_i(t)) \mid i = 1, \dots, 16,\ t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}\}.$$

Odavde će slijediti da se najveće težine ireducibilnih $L_k(\mathfrak{g})$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$ podudaraju sa skoro dopustivim težinama nivoa $-5/2$ do na prebrojivo mnogo $t \in \mathbb{C}$.

Uvedimo oznake

$$S_i = \Pi^{\mu_i(t)},\ \text{za } i \in \{1, \dots, 16\},\ t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Propozicija 4.2.1. Sve težine $\mu \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ oblika $\mu = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + \mu_i(t)$, gdje je $i \in \{1, \dots, 16\}$ i $t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, su skoro dopustive težine.

Dokaz. Lako se vidi da za sve takve težine vrijedi $\mu \in -\rho + K$. Pokažimo da za težinu $\mu = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + \mu_1(t) = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + t\omega_1$, gdje je $t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, vrijedi $\langle \mu + \rho, \alpha \rangle > 0$ za sve $\alpha \in R^{\mu}_{+}$. Izračunamo

$$\begin{aligned}
&\langle \mu + \rho, n\delta \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \rangle = \frac{3}{2}n \pm (t+1), \quad \langle \mu + \rho, n\delta \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \rangle = \frac{3}{2}n \pm 1, \\
&\langle \mu + \rho, n\delta \pm (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) \rangle = \frac{3}{2}n \pm 1, \quad \langle \mu + \rho, n\delta \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \rangle = \frac{3}{2}n \pm (t+2), \\
&\langle \mu + \rho, n\delta \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_4) \rangle = \frac{3}{2}n \pm 2, \quad \langle \mu + \rho, n\delta \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_4) \rangle = \frac{3}{2}n \pm (t+3),
\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
R^{\mu}_{+} = \{&\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_2 - \varepsilon_4, \varepsilon_3 - \varepsilon_4\} \cup \\
&\cup \{2n\delta \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_3),\ 2n\delta \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_4),\ 2n\delta \pm (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\},
\end{aligned}$$

Iz gornjeg računa je jasno da je $\langle \mu + \rho, \alpha \rangle > 0$ za svaki $\alpha \in R^{\mu}_{+}$. Nadalje, lako se vidi da je $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \varepsilon_3 - \varepsilon_4,\ 2\delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)\}$. Dakle, μ je skoro dopustiva težina.
Pokažimo to i za težinu $\mu = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + \mu_{16}(t) = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + \left(-t - \frac{3}{2}\right)\omega_1 + t\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3$, gdje je $t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.
Izračunamo

$$\langle \mu + \rho, n\delta \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \rangle = \frac{3}{2}n \mp (t + \frac{1}{2}), \quad \langle \mu + \rho, n\delta \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \rangle = \frac{3}{2}n \pm (t+1),$$

$$\langle \mu+\rho, n\delta \pm (\varepsilon_3-\varepsilon_4)\rangle = \frac{3}{2}n \pm \frac{1}{2}, \quad \langle \mu+\rho, n\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_3)\rangle = \frac{3}{2}n \pm \frac{1}{2},$$
$$\langle \mu+\rho, n\delta \pm (\varepsilon_2-\varepsilon_4)\rangle = \frac{3}{2}n \pm (t+\frac{3}{2}), \quad \langle \mu+\rho, n\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_4)\rangle = \frac{3}{2}n \pm 1,$$

odakle slijedi

$$R_+^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_4\} \cup \{2n\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_4),\ (2n+1)\delta \pm (\varepsilon_3-\varepsilon_4),\ (2n+1)\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_3) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Iz prethodnog računa vidi se da vrijedi $\langle \mu+\rho, \alpha\rangle > 0$ za svaki $\alpha \in R_+^\mu$. Lagano se vidi da je $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_4, \delta-(\varepsilon_3-\varepsilon_4), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\}$, pa je μ skoro dopustiva težina. Analogno se pokaže i za sve ostale težine $-\frac{5}{2}\Lambda_0+\mu_i(t)$, $i=2,\ldots,15$, $t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Posebno, pokaže se da vrijedi

$$S_1 = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_3-\varepsilon_4, 2\delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4)\}, \qquad S_9 = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_3), \delta+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\},$$

$$S_2 = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_3, 2\delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\}, \qquad S_{10} = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4), \delta+(\varepsilon_3-\varepsilon_4)\},$$

$$S_3 = \{\varepsilon_3-\varepsilon_4, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_4), \delta+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\}, \qquad S_{11} = \{\varepsilon_2-\varepsilon_4, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_4), \delta+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\},$$

$$S_4 = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_4), \delta+(\varepsilon_2-\varepsilon_4)\}, \qquad S_{12} = \{\varepsilon_1-\varepsilon_3, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_4), \delta+(\varepsilon_3-\varepsilon_4)\},$$

$$S_5 = \{\varepsilon_3-\varepsilon_4, \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4), \delta+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\}, \qquad S_{13} = \{\varepsilon_1-\varepsilon_3, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_2), \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\},$$

$$S_6 = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_3), \delta+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\}, \qquad S_{14} = \{\varepsilon_1-\varepsilon_4, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_2), \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4)\},$$

$$S_7 = \{\varepsilon_1-\varepsilon_3, \varepsilon_3-\varepsilon_4, 2\delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_4)\}, \qquad S_{15} = \{\varepsilon_2-\varepsilon_4, \delta-(\varepsilon_3-\varepsilon_4), \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\},$$

$$S_8 = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_4, 2\delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_4)\}, \qquad S_{16} = \{\varepsilon_1-\varepsilon_4, \delta-(\varepsilon_3-\varepsilon_4), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\}.$$

■

Dakle, svi $\hat{\mathfrak{g}}$–moduli najveće težine $\mu = -\frac{5}{2}\Lambda_0+\mu_i(t)$, gdje je $i \in \{1,\ldots,16\}$ i $t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, su skoro dopustivi moduli. Da bismo dokazali obrat, potrebna nam je sljedeća lema. Uvedimo oznaku $\mathscr{S} = \{S_1,\ldots,S_{16}\}$.

Lema 4.2.2. Ako je μ težina od $\hat{\mathfrak{g}}$ nivoa $-5/2$ takva da je $\mathrm{card}(\Pi^\mu)=3$, onda je $\Pi^\mu \in \mathscr{S}$.

Dokaz. Neka je $\mu = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3$ težina od $\hat{\mathfrak{g}}$ takva da je $\mathrm{card}(\Pi^\mu)=3$. Izračunamo

$$\langle \mu+\rho, n\delta \pm (\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})\rangle = \frac{3}{2}n \pm (x_i+1), \;\; i=1,2,3,$$
$$\langle \mu+\rho, n\delta \pm (\varepsilon_i-\varepsilon_{i+2})\rangle = \frac{3}{2}n \pm (x_i+x_{i+1}+2), \;\; i=1,2,$$
$$\langle \mu+\rho, n\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_4)\rangle = \frac{3}{2}n \pm (x_1+x_2+x_3+3).$$

Promotrit ćemo kako izgledaju skupovi Π^μ ovisno o koeficijentima x_1, x_2 i x_3.

1. slučaj: Pretpostavimo $x_1 \in \mathbb{Z}$. Tada je $\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ 2\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_2) \in R_+^\mu$. Kako je $\mathrm{card}(\Pi^\mu)=3$, neki od brojeva x_2 i x_2+x_3 mora biti cijeli ili polucijeli. Primijetimo $x_3 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ jer bi u suprotnom bilo $\mathrm{card}(\Pi^\mu) > 3$.

- Ako je $x_2 \in \mathbb{Z}$, onda je i $x_1+x_2 \in \mathbb{Z}$, pa je $\{\varepsilon_1-\varepsilon_2, 2\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_2), \varepsilon_1-\varepsilon_3, 2\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_3), \varepsilon_2-\varepsilon_3, 2\delta \pm (\varepsilon_2-\varepsilon_3)\} \subset R_+^\mu$. Slijedi $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_3, 2\delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\} = S_2 \in \mathscr{S}$.

- Ako je $x_2 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, onda je i $x_1+x_2 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, pa je $\{\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ 2\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_2),\ \delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_3),\ \delta \pm (\varepsilon_2-\varepsilon_3)\} \subset R_+^\mu$. Slijedi $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \delta+(\varepsilon_2-\varepsilon_3), 2\delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4)\} = S_6 \in \mathscr{S}$.

- Ako je $x_2+x_3 \in \mathbb{Z}$, onda je i $x_1+x_2+x_3 \in \mathbb{Z}$, pa je $\{\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ 2\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_2),\ \varepsilon_1-\varepsilon_4,\ 2\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_4),\ \varepsilon_2-\varepsilon_4,\ 2\delta \pm (\varepsilon_2-\varepsilon_4)\}$. Slijedi $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_4, 2\delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_4)\} = S_8 \in \mathscr{S}$.

- Ako je $x_2+x_3 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, onda je i $x_1+x_2+x_3 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, pa je $\{\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ 2\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_2),\ \delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_4),\ \delta \pm (\varepsilon_2-\varepsilon_4)\} \subset R_+^\mu$. Slijedi $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \delta+(\varepsilon_2-\varepsilon_4), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_4)\} = S_4 \in \mathscr{S}$.

2. slučaj: Pretpostavimo $x_1 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$. Tada je $\delta \pm (\varepsilon_1-\varepsilon_2) \in R_+^\mu$. Kako je $\mathrm{card}(\Pi^\mu) = 3$, neki od brojeva x_2 i x_2+x_3 mora biti cijeli ili polucijeli. Primijetimo $x_3 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ jer bi u suprotnom bilo $\mathrm{card}(\Pi^\mu) > 3$. Analogno prethodnom slučaju zaključujemo:

- Ako je $x_2 \in \mathbb{Z}$, dobivamo $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_4), \delta+(\varepsilon_2-\varepsilon_4)\} = S_9 \in \mathscr{S}$.

- Ako je $x_2 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, dobivamo $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_3, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_2), \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\} = S_{13} \in \mathscr{S}$.

- Ako je $x_2+x_3 \in \mathbb{Z}$, dobivamo $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2-\varepsilon_4, \delta+(\varepsilon_1-\varepsilon_2), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_4)\} = S_{11} \in \mathscr{S}$.

- Ako je $x_2+x_3 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, dobivamo $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_4, \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\} = S_{14} \in \mathscr{S}$.

3. slučaj: Pretpostavimo $x_1 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Provodimo razmatranje obzirom na x_2. Ako je $x_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, budući da je $\mathrm{card}(\Pi^\mu) = 3$, vrijedi da x_3 mora biti cijeli ili polucijeli.
3.a) Neka je $x_2 \in \mathbb{Z}$. Tada je $\varepsilon_2-\varepsilon_3, 2\delta \pm (\varepsilon_2-\varepsilon_3) \in R_+^\mu$.

- Ako je $x_3 \in \mathbb{Z}$, dobivamo $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_3-\varepsilon_4, 2\delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4)\} = S_1 \in \mathscr{S}$.

- Ako je $x_3 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, dobivamo $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4), \delta+(\varepsilon_3-\varepsilon_4)\} = S_{10} \in \mathscr{S}$.

3.b) Neka je $x_2 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$. Tada je $\delta \pm (\varepsilon_2-\varepsilon_3) \in R_+^\mu$.

- Ako je $x_3 \in \mathbb{Z}$, dobivamo $\Pi^\mu = \{\varepsilon_3-\varepsilon_4, \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4), \delta+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\} = S_5 \in \mathscr{S}$.

- Ako je $x_3 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2-\varepsilon_4, \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_3), \delta-(\varepsilon_3-\varepsilon_4)\} = S_{15} \in \mathscr{S}$.

3.c) Neka je $x_2 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Provodimo razmatranje obzirom na x_3. Ako je $x_3 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, budući da je $\mathrm{card}(\Pi^\mu) = 3$, vrijedi da $x_1 + x_2$ mora biti cijeli ili polucijeli.

3.c-1) Pretpostavimo $x_3 \in \mathbb{Z}$. Tada je $\varepsilon_3 - \varepsilon_4, 2\delta \pm (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) \in R_+^\mu$.

- Ako je $x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$, dobivamo $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, 2\delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_4)\} = S_7 \in \mathscr{S}$.
- Ako je $x_1 + x_2 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, dobivamo $\Pi^\mu = \{\varepsilon_3 - \varepsilon_4, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_4), \delta + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\} = S_3 \in \mathscr{S}$.

3.c-2) Pretpostavimo $x_3 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Tada je $\delta \pm (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) \in R_+^\mu$.

- Ako je $x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$, dobivamo $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_3, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_4), \delta + (\varepsilon_3 - \varepsilon_4)\} = S_{12} \in \mathscr{S}$.
- Ako je $x_1 + x_2 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, dobivamo $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_4)\} = S_{16} \in \mathscr{S}$.

3.c-3) Pretpostavimo $x_3 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Ako je $x_1 + x_2, x_2 + x_3 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, onda je $\mathrm{card}(\Pi^\mu) > 3$. Ako je $x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, onda je $x_3 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, što je kontradikcija. Analogno se dobije ako je $x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Dakle, u svim slučajevima dobivamo $\Pi^\mu \in \mathscr{S}$, što je i trebalo dokazati. ■

Propozicija 4.2.3. Ako je težina $\mu \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ nivoa $-5/2$ skoro dopustiva, onda je $\mu = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + \mu_i(t)$ za neki $i \in \{1, \dots, 16\}$ i $t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Dokaz. Ako je težina $\mu \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ skoro dopustiva, onda je $\mathrm{card}(\Pi^\mu) = 3$, pa iz Leme 4.2.2 slijedi $\Pi^\mu \in \mathscr{S}$. Neka je $\mu = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3$, $x_i \in \mathbb{C}$. Pretpostavimo da je $\Pi^\mu = S_1 = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, 2\delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)\}$. Budući da je $\langle \mu + \rho, \alpha \rangle > 0$ za sve $\alpha \in R_+^\mu$, slijedi

$$
\begin{aligned}
\langle \mu + \rho, \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \rangle \geq 1 &\implies x_2 + 1 \geq 1, \\
\langle \mu + \rho, \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \rangle \geq 1 &\implies x_3 + 1 \geq 1, \\
\langle \mu + \rho, 2\delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_4) \rangle \geq 1 &\implies 3 - (x_2 + x_3 + 2) \geq 1.
\end{aligned}
$$

Dobivamo $x_2 = x_3 = 0$. Iz dokaza Leme 4.2.2, vidi se $x_1 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, pa je $\mu = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + t\omega_1 = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + \mu_1(t)$, $t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Pretpostavimo sada da je $\Pi^\mu = S_{16} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\}$. Kao u prethodnom slučaju dobivamo sustav nejednakosti:

$$
\begin{aligned}
\langle \mu + \rho, \varepsilon_1 - \varepsilon_4 \rangle \geq 1 &\implies x_1 + x_2 + x_3 + 3 \geq 1, \\
\langle \mu + \rho, \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) \rangle \geq 1 &\implies \frac{3}{2} - (x_3 + 1) \geq 1, \\
\langle \mu + \rho, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \rangle \geq 1 &\implies \frac{3}{2} - (x_1 + x_2 + 2) \geq 1.
\end{aligned}
$$

Rješavanjem tog sustava dobivamo $x_3 = -\frac{1}{2}$ i $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$, pa je $\mu = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + (-t - \frac{3}{2})\omega_1 + t\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3$, $t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Analogno se dokaže za slučajeve $\Pi^\mu = S_i$, za $i = 2, \dots, 15$. ■

4.2.2. Opis nekih ireducibilnih $L_{-5/2}(sl(4))$–modula

Neka je λ glavna skoro dopustiva $\widehat{sl(4)}$–težina nivoa $-5/2$. Budući da λ zadovoljava uvjete Teorema 1 iz [47], za ireducibilni modul $L(\lambda)$ vrijedi Kac-Wakimotova formula karaktera i stoga je maksimalni podmodul u Vermaovom modulu $M(\lambda)$ generiran s tri singularna vektora. Direktnim računom mogu se odrediti njihove eksplicitne formule.

Primjer 4.2.4. Neka je $\lambda = -\frac{5}{2}\Lambda_0 + t\omega_1$, $t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Neka je v_λ vektor najveće težine λ u Vermaovom modulu $M(\lambda)$. Tada je

$$L(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{\sum_{j=1,2,3} \mathscr{U}(\widehat{sl(4)})v_j},$$

gdje je

$$\begin{aligned}
v_1 &= f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(0)v_\lambda,\\
v_2 &= f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)v_\lambda,\\
v_3 &= 3t(\frac{3}{2}+t)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)v_\lambda - t(\frac{19}{4}+\frac{3}{2}t)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-2)v_\lambda\\
&\quad + t(\frac{3}{2}+t)h_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)v_\lambda - t(\frac{3}{2}+t)h_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)v_\lambda\\
&\quad + (\frac{19}{4}+\frac{3}{2}t)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-2)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\lambda - \frac{5}{2}h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\lambda\\
&\quad - (\frac{3}{2}+t)h_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\lambda + (\frac{3}{2}+t)h_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\lambda\\
&\quad - (\frac{3}{2}+t)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\lambda - 3(\frac{3}{2}+t)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\lambda\\
&\quad + 2(\frac{3}{2}+t)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(0)v_\lambda - (2+3t)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(0)v_\lambda\\
&\quad + (1-t)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(0)v_\lambda + e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)^2v_\lambda\\
&\quad + e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(0)v_\lambda + e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)^2f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(0)v_\lambda\\
&\quad + \frac{5}{2}tf_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)v_\lambda.
\end{aligned}$$

Primjer 4.2.5. Neka je $\lambda = -\frac{5}{2}\Lambda_0 - \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 + t\omega_3$, $t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Neka je v_λ vektor najveće težine λ u Vermaovom modulu $M(\lambda)$. Tada je

$$L(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{\sum_{j=1,2,3} \mathscr{U}(\widehat{sl(4)})v_j},$$

gdje je

$$v_1 = f_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(0)v_\lambda + 2f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(0)v_\lambda,$$

$$\begin{aligned}
v_2 &= -(t+\frac{1}{2})e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(-1)v_\lambda + (2t+1)e_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(0)v_\lambda + \\
&\quad + e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(0)v_\lambda + 2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(0)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)v_\lambda, \\
v_3 &= te_{\varepsilon_2-\varepsilon_3}(-1)v_\lambda + e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)v_\lambda + \\
&\quad + 2te_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)v_\lambda + 2e_{\varepsilon_1-\varepsilon_4}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0)f_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}(0)v_\lambda.
\end{aligned}$$

4.3. SLUČAJ $\mathfrak{g} = sl(n)$, $n \geq 3$, $k = -1$

4.3.1. Karakterizacija najvećih težina $L_{-1}(sl(n))$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$

Označimo s $\mathfrak{g}$ prostu Liejevu algebru $sl(n)$, za $n \geq 3$. D. Adamović i O. Perše u članku [12] su klasificirali ireducibilne $L_{-1}(\mathfrak{g})$–module u kategoriji $\mathcal{O}$. Najveće težine tih modula parametrizirane su kao unija n pravaca u $\mathbb{C}^{n-1}$. U ovom ćemo dijelu dokazati da se te težine podudaraju s glavnim skoro dopustivim težinama za $\hat{\mathfrak{g}}$ nivoa -1 do na prebrojivo mnogo $t \in \mathbb{C}$.

Navodimo klasifikaciju ireducibilnih $L_{-1}(\mathfrak{g})$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$ iz [12]:

Propozicija 4.3.1. [12] Svi ireducibilni $L_{-1}(\mathfrak{g})$–moduli u kategoriji $\mathcal{O}$ dani su s

$$\{L_{-1}(t\omega_1) \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{L_{-1}(t\omega_{n-1}) \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-2} \{L_{-1}(t\omega_i + (-1-t)\omega_{i+1}) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

Teorem 4.3.2. Sve glavne skoro dopustive težine λ za $\hat{\mathfrak{g}}$ nivoa -1 dane su s $\lambda = -\Lambda_0 + \lambda(t)$, gdje je

$$\lambda(t) \in \{t\omega_1 \mid t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\} \cup \{t\omega_{n-1} \mid t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-2} \{t\omega_i + (-1-t)\omega_{i+1} \mid t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\}.$$

Dokaz. Neka je $m \in \mathbb{Z}$. Stavimo $\lambda = -\Lambda_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \omega_i$, $x_i \in \mathbb{C}$. Računamo

$$\langle \lambda + \rho, m\delta \pm (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \rangle = (n-1)m \pm (x_i + 1), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\langle \lambda + \rho, m\delta \pm (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+2}) \rangle = (n-1)m \pm (x_i + x_{i+1} + 2), \quad i = 1, 2, \ldots, n-2$$

$$\langle \lambda + \rho, m\delta \pm (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+3}) \rangle = (n-1)m \pm (x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + 3), \quad i = 1, 2, \ldots, n-3$$

$$\vdots$$

$$\langle \lambda + \rho, m\delta \pm (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+n-2}) \rangle = (n-1)m \pm (x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+n-3} + n - 2), \quad i = 1, 2$$

$$\langle \lambda + \rho, m\delta \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_n) \rangle = (n-1)m \pm (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + n - 1).$$

Odatle slijedi da se skupovi Π^λ takvi da je $r(R_+^\lambda) = n-1$ i Π^λ tipa $A_{n-2}^{(1)}$ dobivaju se u sljedećim slučajevima:

- Za $x_1, \ldots, x_{n-2} \in \mathbb{Z}$, $x_{n-1} \notin \mathbb{Z}$, imamo

$$\Pi^\lambda = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-2} - \varepsilon_{n-1}, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_{n-1})\}.$$

  Iz pretpostavke da λ zadovoljava uvjete Teorema 1 iz [47], dobivamo sustav nejednakosti

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots\ , x_{n-2} \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_{n-2} \leq 0,$$

  odakle slijedi $\lambda = -\Lambda_0 + t\omega_{n-1}$, $t \notin \mathbb{Z}$.

- Za $x_2,\dots,x_{n-1}\in\mathbb{Z}$, $x_1\notin\mathbb{Z}$, imamo

$$\Pi^\lambda=\{\varepsilon_2-\varepsilon_3,\varepsilon_3-\varepsilon_4,\dots,\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_{n-2})\}.$$

  Dobivamo sustav nejednakosti

$$x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ \dots\ ,x_{n-1}\geq 0,\ x_2+\cdots+x_{n-1}\leq 0,$$

  odakle slijedi $\lambda=-\Lambda_0+t\omega_1$, $t\notin\mathbb{Z}$.

- Neka je $i\in\{1,2,\dots,n-2\}$. Za $x_1,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n-1}\in\mathbb{Z}$, $x_i\notin\mathbb{Z}$, imamo

$$\Pi^\lambda=\{\varepsilon_1-\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i,\varepsilon_i-\varepsilon_{i+2},\varepsilon_{i+2}-\varepsilon_{i+3},\dots,\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_n)\}.$$

  Dobivamo sustav nejednakosti

$$\begin{aligned}&x_1\geq 0,\ \dots\ ,x_{i-1}\geq 0,\ x_i+x_{i+1}\geq -1,\ x_{i+2}\geq 0,\ \dots\ ,x_{n-1}\geq 0,\\&x_1+\cdots+x_{n-1}\leq -1,\end{aligned}$$

  odakle slijedi $\lambda=-\Lambda_0+t\omega_i+(-1-t)\omega_{i+1}$, $t\notin\mathbb{Z}$.

  Time je tvrdnja teorema dokazana.

■

Napomena 4.3.3. Lagano se može vidjeti da je u slučajevima $\mathfrak{g}=sl(3)$ i $\mathfrak{g}=sl(4)$ svaka skoro dopustiva težina nivoa -1 ujedno i glavna skoro dopustiva težina. Dakle, parametrizacije najvećih težina ireducibilnih $L_{-1}(sl(n))$–modula za $n=3,4$ u kategoriji $\mathscr{O}$ mogu se dobiti promatranjem skoro dopustivih težina. Za veće rangove ta tvrdnja nije istinita, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 4.3.4. Neka je $\mathfrak{g}=sl(5)$. Promotrimo $\hat{\mathfrak{g}}$–težinu $\mu=-\Lambda_0+\frac{1}{2}\omega_2+\frac{1}{2}\omega_4$. Lako se vidi da je $\Pi^\mu=\{\varepsilon_1-\varepsilon_2,\delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_2),\varepsilon_3-\varepsilon_4,\delta-(\varepsilon_3-\varepsilon_4)\}$ te da vrijedi $\mu\in-\rho+K$ i $\langle\mu+\rho,\alpha\rangle>0$ za sve $\alpha\in R_+^\mu$, pa je μ skoro dopustiva težina. No, budući da Π^μ nije tipa $A_3^{(1)}$, μ nije glavna skoro dopustiva težina. Iz Propozicije 4.3.1 vidimo da $L_{-1}(\frac{1}{2}\omega_2+\frac{1}{2}\omega_4)$ nije modul za $L_{-1}(\mathfrak{g})$. Dakle, za dobiti parametrizacije najvećih težina ireducibilnih $L_{-1}(sl(n))$–modula, $n\geq 5$ u kategoriji $\mathscr{O}$, ne možemo promatrati skoro dopustive težine, već se trebamo ograničiti na glavne skoro dopustive težine.

4.3.2. Opis nekih ireducibilnih $L_{-1}(sl(n))$–modula

Neka je $\mathfrak{g} = sl(n)$, za $n \geq 3$. Neka je λ glavna skoro dopustiva $\hat{\mathfrak{g}}$–težina nivoa -1. Budući da λ zadovoljava uvjete Teorema 1 iz [47], za ireducibilni modul $L(\lambda)$ vrijedi Kac-Wakimotova formula karaktera te posljedično dobivamo da je maksimalni podmodul u Vermaovom modulu $M(\lambda)$ generiran s $n-1$ singularnih vektora. Direktnim računom mogu se odrediti njihove eksplicitne formule. Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 4.3.5. Neka je λ glavna skoro dopustiva težina nivoa -1. Neka je v_λ vektor najveće težine λ u Vermaovom modulu $M(\lambda)$. Tada je

$$L(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{\sum_{j=1}^{n-1} \mathscr{U}(\hat{\mathfrak{g}}) v_j},$$

gdje je:

- Za $\lambda = -\Lambda_0 + t\omega_1$ je

$$\begin{aligned} v_j &= f_{\varepsilon_{j+1}-\varepsilon_{j+2}}(0)v_\lambda, \ \text{ za } j = 1, \ldots, n-2, \\ v_{n-1} &= (e_{\varepsilon_1-\varepsilon_n}(-1)f_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(0) - te_{\varepsilon_2-\varepsilon_n}(-1))v_\lambda. \end{aligned}$$

- Za $\lambda = -\Lambda_0 + t\omega_{n-1}$ je

$$\begin{aligned} v_j &= f_{\varepsilon_j-\varepsilon_{j+1}}(0)v_\lambda, \ \text{ za } j = 1, \ldots, n-2, \\ v_{n-1} &= e_{\varepsilon_1-\varepsilon_n}(-1)f_{\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n}(0)v_\lambda + te_{\varepsilon_1-\varepsilon_{n-1}}(-1)v_\lambda. \end{aligned}$$

- Za $\lambda = -\Lambda_0 + t\omega_i + (-1-t)\omega_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-2$ je

$$\begin{aligned} v_j &= f_{\varepsilon_j-\varepsilon_{j+1}}(0)v_\lambda, \ \text{ za } j = 1, \ldots, i-1, \\ v_i &= f_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}(0)f_{\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_{i+2}}(0)v_\lambda + (t+1)f_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+2}}(0)v_\lambda, \\ v_j &= f_{\varepsilon_{j+1}-\varepsilon_{j+2}}(0)v_\lambda, \ \text{ za } j = i+1, \ldots, n-2, \\ v_{n-1} &= e_{\varepsilon_1-\varepsilon_n}(-1)v_\lambda. \end{aligned}$$

4.4. Konformno ulaganje $gl(n) \hookrightarrow sl(n+1)$ na nivou $k = -(n+1)/2$

U ovom dijelu navodimo rezultate o konformnom ulaganju $gl(n) \hookrightarrow sl(n+1)$ na nivou $k = -(n+1)/2$ iz [6] i određujemo eksplicitne formule za $\widehat{gl(n)}$–singularne vektore u ireducibilnim $L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n+1))$–modulima u kategoriji $\mathscr{O}$. Neka je n paran, $n \geq 4$.

Neka je $V = L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n+1))$. Uzmimo c iz Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g} = sl(n+1)$ takav da je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1,$$

$$\mathfrak{g}_0 = gl(n) = sl(n) + \mathbb{C}c,$$

$$\mathfrak{g}_1 = V_{sl(n)}(\omega_1), \quad \mathfrak{g}_{-1} = V_{sl(n)}(\omega_{n-1})$$

$$c \equiv j \text{ id} \quad \text{na } \mathfrak{g}_j, \ j \in \{-1, 0, 1\}.$$

Neka je $M_c(1)$ Heisenbergova podalgebra od V generirana s c. Označimo s $M_c(1,s)$ ireducibilni $M_c(1)$–modul na kojem $c(0)$ djeluje kao s id.

Propozicija 4.4.1. [6] Postoji konformno ulaganje $L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n)) \otimes M_c(1)$ u V takvo da je

$$V = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} V^{(s)} \quad c(0) \equiv s \text{ id na } V^{(s)},$$

i svaki $V^{(s)}$ je ireducibilni $L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n)) \otimes M_c(1)$–modul.

Analogno Propoziciji 3.7.2 dobivamo:

Propozicija 4.4.2. Pretpostavimo da je $\mathscr{M}$ ireducibilni V–modul takav da $c(0)$ djeluje poluprosto na $\mathscr{M}$:

$$\mathscr{M} = \bigoplus_{s \in \Delta + \mathbb{Z}} \mathscr{M}^{(s)} \quad c(0) \equiv s \text{ id na } \mathscr{M}^{(s)}.$$

Tada vrijedi:

(1) Svaki $\mathscr{M}^{(s)}$ je ireducibilni $L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n)) \otimes M_c(1)$–modul.

(2) Ako postoji vektor $v \in \mathscr{M}$ koji je vektor najveće težine za $\widehat{sl(n)}$ težine λ takav da je $c(0)v = sv$ za neki s, onda je $\mathscr{U}(\widehat{sl(n)}).v$ ireducibilni $L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n))$–modul takav da

$$\mathscr{M}^{(s)} = L_{-\frac{n+1}{2}}(\lambda) \otimes M_c(1,s).$$

Imamo sljedeću dekompoziciju $L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n+1))$ kao $L_{-\frac{n+1}{2}}(gl(n)) = L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n)) \otimes M_c(1)$–modula (cf. [6]):

$$L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n+1)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{-\frac{n+1}{2}}(n\omega_1) \otimes M_c(1,n) \ \oplus \ \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{-\frac{n+1}{2}}(n\omega_{n-1}) \otimes M_c(1,-n).$$

4.4.1. Formule za pripadne singularne vektore

Navedimo klasifikaciju ireducibilnih $L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n+1))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$ iz [58]:

Propozicija 4.4.3. [18, 58] Svi ireducibilni $L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n+1))$–moduli u kategoriji $\mathscr{O}$ dani su s

$$\{L_{-\frac{n+1}{2}}(\lambda_S) \mid S \subseteq \{1,2,\dots,n\}\},$$

pri čemu je za $S = \{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$, $i_1 < \cdots < i_k$, težina λ_S definirana s

$$\lambda_S = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{s=j+1}^{k} (-1)^{s-j} i_s + \sum_{s=1}^{j-1} (-1)^{j-s+1} i_s + (-1)^{k-j+1} \frac{n+1}{2} \right) \omega_{i_j}.$$

Označimo s v_{λ_S} vektor najveće težine u $L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n+1))$–modulu $L_{-\frac{n+1}{2}}(\lambda_S)$, za $S \subseteq \{1,2,\dots,n\}$. Analogno Propozicijama 3.8.2 i 3.8.3 odredit ćemo eksplicitne formule za $\widehat{gl(n)}$–singularne vektore u tim modulima.

Propozicija 4.4.4. Za svaki $S \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ neka je $\lambda_S = \sum_{k=1}^{n} a_{S,k}\omega_k$. Ako $a_{S,j} \neq 0$ i $a_{S,k} = 0$ za $k > j$, onda je $f_{\varepsilon_j - \varepsilon_{n+1}}(0)^m v_{\lambda_S}$ za svaki $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (netrivijalni) singularni vektor za $L_{-\frac{n+1}{2}}(gl(n)) = L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n)) \otimes M_c(1)$.

Dokaz. Direktnim računom. ∎

U sljedećoj propoziciji dani su preostali singularni vektori:

Propozicija 4.4.5. Neka je $S = \{i_1,\dots,i_k\} \subset \{1,2,\dots,n\}$.

(1) Za k paran i za svaki $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_{n+1}}(-1)^m v_{\lambda_S}$ je (netrivijalni) singularni vektor za $L_{-\frac{n+1}{2}}(gl(n)) = L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n)) \otimes M_c(1)$.

(2) Za k neparan, neka je $\lambda_S = \sum_{i=1}^{n} a_{S,i}\omega_i$ i neka je $a_{S,j}$ takav da je $a_{S,i} = 0$ za $i < j$. U sljedećoj tablici dane su formule (netrivijalnih) singularnih vektora za $L_{-\frac{n+1}{2}}(gl(n)) = L_{-\frac{n+1}{2}}(sl(n)) \otimes M_c(1)$ u $L_{-\frac{n+1}{2}}(\lambda_S)$, za k neparan, i za sve $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

j	singularni vektori
$1,\ldots,n-1$	$e_{\varepsilon_{j+1}-\varepsilon_{n+1}}(-1)^m v_{\lambda_S}$
n	$e_{\varepsilon_1-\varepsilon_{n+1}}(-2)^m v_{\lambda_S}$

Dokaz. Direktnim računom. ■

4.5. Dekompozicije ireducibilnih modula u kategoriji $\mathscr{O}$ za konformno ulaganje $gl(6) \hookrightarrow sl(7)$ na nivou $k = -7/2$

U ovom dijelu odredit ćemo dekompozicije ireducibilnih $L_{-7/2}(sl(7))$–modula u kategoriji $\mathscr{O}$ kao $L_{-7/2}(sl(6)) \otimes M_c(1)$–modula. Za težine $-\frac{7}{2}\Lambda_0 + \mu_i(t)$, $i = 1, \ldots, 84$, koje se javljaju u dekompozicijama, dokazat ćemo da su najveće težine ireducibilnih modula u kategoriji $\mathscr{O}$ za prostu verteks algebru $L_{-7/2}(sl(6))$ za sve $t \in \mathbb{C}$.

Za $t \in \mathbb{C}$ definirajmo sljedeće težine za $sl(6)$:

$\mu_1(t) = t\omega_1,$

$\mu_2(t) = t\omega_5,$

$\mu_3(t) = t\omega_1 + (-t - \frac{7}{2})\omega_2,$

$\mu_4(t) = t\omega_2 + (-t - \frac{7}{2})\omega_3,$

$\mu_5(t) = t\omega_3 + (-t - \frac{7}{2})\omega_4,$

$\mu_6(t) = t\omega_4 + (-t - \frac{7}{2})\omega_5,$

$\mu_7(t) = t\omega_1 + (-t - 1)\omega_2,$

$\mu_8(t) = t\omega_2 + (-t - 1)\omega_3,$

$\mu_9(t) = t\omega_3 + (-t - 1)\omega_4,$

$\mu_{10}(t) = t\omega_4 + (-t - 1)\omega_5,$

$\mu_{11}(t) = t\omega_1 - \frac{5}{2}\omega_2,$

$\mu_{12}(t) = t\omega_1 - \frac{5}{2}\omega_3,$

$\mu_{13}(t) = t\omega_1 - \frac{5}{2}\omega_4,$

$\mu_{14}(t) = t\omega_1 - \frac{5}{2}\omega_5,$

$\mu_{15}(t) = -\frac{5}{2}\omega_1 + t\omega_5,$

$\mu_{16}(t) = -\frac{5}{2}\omega_2 + t\omega_5,$

$\mu_{17}(t) = -\frac{5}{2}\omega_3 + t\omega_5,$

$\mu_{18}(t) = -\frac{5}{2}\omega_4 + t\omega_5,$

$\mu_{19}(t) = -\frac{5}{2}\omega_1 + t\omega_2 + (-1 - t)\omega_3,$

$\mu_{20}(t) = -\frac{5}{2}\omega_1 + t\omega_3 + (-1 - t)\omega_4,$

$\mu_{21}(t) = -\frac{5}{2}\omega_1 + t\omega_4 + (-1 - t)\omega_5,$

$\mu_{49}(t) = \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_2 + t\omega_5,$

$\mu_{50}(t) = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_3 + t\omega_5,$

$\mu_{51}(t) = -\frac{3}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_4 + t\omega_5,$

$\mu_{52}(t) = -\frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3 + t\omega_5,$

$\mu_{53}(t) = -\frac{3}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_4 + t\omega_5,$

$\mu_{54}(t) = -\frac{3}{2}\omega_3 + \frac{1}{2}\omega_4 + t\omega_5,$

$\mu_{55}(t) = t\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{3}{2}\omega_4,$

$\mu_{56}(t) = t\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{3}{2}\omega_5$

$\mu_{57}(t) = t\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_4 - \frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{58}(t) = t\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_3 + \frac{1}{2}\omega_4 - \frac{3}{2}\omega_5,$

$\mu_{59}(t) = -\frac{3}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_3 + t\omega_5,$

$\mu_{60}(t) = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_4 + t\omega_5,$

$\mu_{61}(t) = -\frac{3}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_4 + t\omega_5,$

$\mu_{62}(t) = -\frac{3}{2}\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{3}{2}\omega_4 + t\omega_5,$

$\mu_{63}(t) = t\omega_1 + (-\frac{5}{2} - t)\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{3}{2}\omega_4,$

$\mu_{64}(t) = t\omega_1 + (-\frac{3}{2} - t)\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{3}{2}\omega_5,$

$\mu_{65}(t) = t\omega_1 + (-\frac{5}{2} - t)\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_4 - \frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{66}(t) = t\omega_1 + (-1 - t)\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_4,$

$\mu_{67}(t) = t\omega_1 + (-1 - t)\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{68}(t) = t\omega_1 + (-1 - t)\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_4 + \frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{69}(t) = t\omega_2 + (-\frac{5}{2} - t)\omega_3 + \frac{1}{2}\omega_4 - \frac{3}{2}\omega_5,$

$\mu_{22}(t)=\frac{1}{2}\omega_1+t\omega_2+(-\frac{5}{2}-t)\omega_3,$

$\mu_{23}(t)=-\frac{1}{2}\omega_1+t\omega_3+(-\frac{5}{2}-t)\omega_4,$

$\mu_{24}(t)=-\frac{3}{2}\omega_1+t\omega_4+(-\frac{5}{2}-t)\omega_5,$

$\mu_{25}(t)=-\frac{5}{2}\omega_2+t\omega_3+(-1-t)\omega_4,$

$\mu_{26}(t)=-\frac{5}{2}\omega_2+t\omega_4+(-1-t)\omega_5,$

$\mu_{27}(t)=-\frac{1}{2}\omega_2+t\omega_3+(-\frac{3}{2}-t)\omega_4,$

$\mu_{28}(t)=-\frac{3}{2}\omega_2+t\omega_4+(-\frac{3}{2}-t)\omega_5,$

$\mu_{29}(t)=-\frac{5}{2}\omega_3+t\omega_4+(-1-t)\omega_5,$

$\mu_{30}(t)=-\frac{3}{2}\omega_3+t\omega_4+(-\frac{1}{2}-t)\omega_5,$

$\mu_{31}(t)=t\omega_1+(-1-t)\omega_2-\frac{5}{2}\omega_5,$

$\mu_{32}(t)=t\omega_2+(-1-t)\omega_3-\frac{5}{2}\omega_5,$

$\mu_{33}(t)=t\omega_3+(-1-t)\omega_4-\frac{5}{2}\omega_5,$

$\mu_{34}(t)=t\omega_1+(-\frac{5}{2}-t)\omega_2-\frac{3}{2}\omega_5,$

$\mu_{35}(t)=t\omega_2+(-\frac{5}{2}-t)\omega_3-\frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{36}(t)=t\omega_3+(-\frac{5}{2}-t)\omega_4+\frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{37}(t)=t\omega_1+(-1-t)\omega_2-\frac{5}{2}\omega_4,$

$\mu_{38}(t)=t\omega_2+(-1-t)\omega_3-\frac{5}{2}\omega_4,$

$\mu_{39}(t)=t\omega_1+(-\frac{3}{2}-t)\omega_2-\frac{3}{2}\omega_4,$

$\mu_{40}(t)=t\omega_2+(-\frac{3}{2}-t)\omega_3-\frac{1}{2}\omega_4,$

$\mu_{41}(t)=t\omega_1+(-1-t)\omega_2-\frac{5}{2}\omega_3,$

$\mu_{42}(t)=t\omega_1+(-\frac{1}{2}-t)\omega_2-\frac{3}{2}\omega_3,$

$\mu_{43}(t)=t\omega_1+\frac{1}{2}\omega_2-\frac{3}{2}\omega_3,$

$\mu_{44}(t)=t\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2-\frac{3}{2}\omega_4,$

$\mu_{45}(t)=t\omega_1-\frac{3}{2}\omega_2-\frac{3}{2}\omega_5,$

$\mu_{46}(t)=t\omega_1-\frac{1}{2}\omega_3-\frac{1}{2}\omega_4,$

$\mu_{47}(t)=t\omega_1-\frac{3}{2}\omega_3-\frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{48}(t)=t\omega_1-\frac{3}{2}\omega_4+\frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{70}(t)=t\omega_2+(-1-t)\omega_3-\frac{3}{2}\omega_4+\frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{71}(t)=-\frac{3}{2}\omega_1+\frac{1}{2}\omega_2+t\omega_3+(-\frac{5}{2}-t)\omega_4,$

$\mu_{72}(t)=-\frac{1}{2}\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2+t\omega_4+(-\frac{5}{2}-t)\omega_5,$

$\mu_{73}(t)=-\frac{3}{2}\omega_1-\frac{1}{2}\omega_3+t\omega_4+(-\frac{3}{2}-t)\omega_5,$

$\mu_{74}(t)=-\frac{3}{2}\omega_2+\frac{1}{2}\omega_3+t\omega_4+(-\frac{5}{2}-t)\omega_5,$

$\mu_{75}(t)=\frac{1}{2}\omega_1-\frac{3}{2}\omega_2+t\omega_4+(-1-t)\omega_5,$

$\mu_{76}(t)=-\frac{1}{2}\omega_1-\frac{3}{2}\omega_3+t\omega_4+(-1-t)\omega_5,$

$\mu_{77}(t)=-\frac{1}{2}\omega_2-\frac{1}{2}\omega_3+t\omega_4+(-1-t)\omega_5,$

$\mu_{78}(t)=\frac{1}{2}\omega_1-\frac{3}{2}\omega_2+t\omega_3+(-1-t)\omega_4,$

$\mu_{79}(t)=t\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2-\frac{1}{2}\omega_3-\frac{1}{2}\omega_4-\frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{80}(t)=-\frac{1}{2}\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2-\frac{1}{2}\omega_3-\frac{1}{2}\omega_4+t\omega_5$

$\mu_{81}(t)=t\omega_1+(-1-t)\omega_2-\frac{3}{2}\omega_3+\frac{1}{2}\omega_4-\frac{3}{2}\omega_5$

$\mu_{82}(t)=t\omega_1+(-\frac{3}{2}-t)\omega_2-\frac{1}{2}\omega_3-\frac{1}{2}\omega_4-\frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{83}(t)=-\frac{3}{2}\omega_1+\frac{1}{2}\omega_2-\frac{3}{2}\omega_3+t\omega_4+(-1-t)\omega_5,$

$\mu_{84}(t)=-\frac{1}{2}\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2-\frac{1}{2}\omega_3+t\omega_4+(-\frac{3}{2}-t)\omega_5,$

$\mu_{85}(t)=-\frac{3}{2}\omega_2+t\omega_3+(-1-t)\omega_4-\frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{86}(t)=-\frac{3}{2}\omega_1+t\omega_3+(-1-t)\omega_4-\frac{3}{2}\omega_5,$

$\mu_{87}(t)=-\frac{3}{2}\omega_2+t\omega_3+(-\frac{1}{2}-t)\omega_4-\frac{3}{2}\omega_5,$

$\mu_{88}(t)=-\frac{1}{2}\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2+t\omega_3+(-1-t)\omega_4-\frac{3}{2}\omega_5,$

$\mu_{89}(t)=-\frac{3}{2}\omega_1+t\omega_3+(-\frac{3}{2}-t)\omega_4-\frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{90}(t)=-\frac{1}{2}\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2+t\omega_3+(-\frac{3}{2}-t)\omega_4-\frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{91}=-\frac{1}{2}\omega_1+t\omega_2+(-1-t)\omega_3-\frac{3}{2}\omega_4$,

$\mu_{92}=-\frac{3}{2}\omega_1+t\omega_2+(-1-t)\omega_3-\frac{3}{2}\omega_5,$

$\mu_{93}=-\frac{1}{2}\omega_1+t\omega_2+(-\frac{1}{2}-t)\omega_3-\frac{3}{2}\omega_4,$

$\mu_{94}=-\frac{3}{2}\omega_1+t\omega_2+(-1-t)\omega_3-\frac{1}{2}\omega_4-\frac{1}{2}\omega_5,$

$\mu_{95}=-\frac{1}{2}\omega_1+t\omega_2+(-\frac{3}{2}-t)\omega_3-\frac{3}{2}\omega_5,$

$\mu_{96}=-\frac{1}{2}\omega_1+t\omega_2+(-\frac{3}{2}-t)\omega_3-\frac{1}{2}\omega_4-\frac{1}{2}\omega_5.$

Teorem 4.5.1. Dekompozicije ireducibilnih $L_{-7/2}(sl(7))$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$ kao $L_{-7/2}(sl(6))\otimes M_c(1)$–modula dane su s

$$L_{-7/2}(\lambda_S)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}L_{-7/2}(\mu)\otimes M_c(1,r-n)\oplus\bigoplus_{n=1}^{\infty}L_{-7/2}(\mu')\otimes M_c(1,r+n),$$

gdje su S,μ,μ' i r dani u sljedećoj tablici:

S	μ	μ'	r	S	μ	μ'	r
$\emptyset$	$\mu_2(n)$	$\mu_1(n)$	0	$\{2,3,4\}$	$\mu_{25}(n+\frac{3}{2})$	$\mu_{38}(-n-\frac{5}{2})$	$-\frac{3}{2}$
$\{1\}$	$\mu_1(-n-\frac{7}{2})$	$\mu_3(-n-\frac{7}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$\{2,3,5\}$	$\mu_{74}(n)$	$\mu_{32}(-n-\frac{3}{2})$	-2
$\{2\}$	$\mu_3(n)$	$\mu_4(-n-\frac{7}{2})$	-1	$\{2,3,6\}$	$\mu_{52}(n)$	$\mu_8(-n-\frac{1}{2})$	$-\frac{5}{2}$
$\{3\}$	$\mu_4(n)$	$\mu_5(-n-\frac{7}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$\{2,4,5\}$	$\mu_{26}(n+\frac{1}{2})$	$\mu_{69}(-n-\frac{5}{2})$	$-\frac{3}{2}$
$\{4\}$	$\mu_5(n)$	$\mu_6(-n-\frac{7}{2})$	-2	$\{2,4,6\}$	$\mu_{53}(n)$	$\mu_{40}(-n-\frac{3}{2})$	-2
$\{5\}$	$\mu_6(n)$	$\mu_2(-n-\frac{7}{2})$	$-\frac{5}{2}$	$\{2,5,6\}$	$\mu_{16}(n-\frac{1}{2})$	$\mu_{35}(-n-\frac{5}{2})$	$-\frac{3}{2}$
$\{6\}$	$\mu_2(n)$	$\mu_1(n)$	-3	$\{3,4,5\}$	$\mu_{29}(n+\frac{3}{2})$	$\mu_{33}(-n-\frac{5}{2})$	-2
$\{1,2\}$	$\mu_7(n+\frac{3}{2})$	$\mu_{11}(n+\frac{3}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$\{3,4,6\}$	$\mu_{54}(n)$	$\mu_9(-n-\frac{3}{2})$	$-\frac{5}{2}$
$\{1,3\}$	$\mu_{22}(n)$	$\mu_{12}(n+\frac{1}{2})$	-1	$\{3,5,6\}$	$\mu_{17}(n-\frac{1}{2})$	$\mu_{36}(-n-\frac{5}{2})$	-2
$\{1,4\}$	$\mu_{23}(n)$	$\mu_{13}(n-\frac{1}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$\{4,5,6\}$	$\mu_{18}(n+\frac{3}{2})$	$\mu_{10}(-n-\frac{5}{2})$	$-\frac{5}{2}$
$\{1,5\}$	$\mu_{24}(n)$	$\mu_{14}(n-\frac{3}{2})$	-2	$\{1,2,3,4\}$	$\mu_{78}(n+\frac{1}{2})$	$\mu_{55}(n+\frac{1}{2})$	-1
$\{1,6\}$	$\mu_{15}(n)$	$\mu_1(n-\frac{5}{2})$	$-\frac{5}{2}$	$\{1,2,3,5\}$	$\mu_{84}(n)$	$\mu_{56}(n-\frac{1}{2})$	$-\frac{3}{2}$
$\{2,3\}$	$\mu_8(n+\frac{1}{2})$	$\mu_{43}(n)$	$-\frac{1}{2}$	$\{1,2,3,6\}$	$\mu_{59}(n)$	$\mu_{43}(n-\frac{3}{2})$	-2
$\{2,4\}$	$\mu_{27}(n)$	$\mu_{44}(n)$	-1	$\{1,2,4,5\}$	$\mu_{75}(n-\frac{1}{2})$	$\mu_{57}(n+\frac{1}{2})$	-1
$\{2,5\}$	$\mu_{28}(n)$	$\mu_{45}(n)$	$-\frac{3}{2}$	$\{1,2,4,6\}$	$\mu_{60}(n)$	$\mu_{44}(n-\frac{1}{2})$	$-\frac{3}{2}$
$\{2,6\}$	$\mu_{16}(n)$	$\mu_{11}(n)$	-2	$\{1,2,5,6\}$	$\mu_{49}(n-\frac{3}{2})$	$\mu_{45}(n+\frac{1}{2})$	-1
$\{3,4\}$	$\mu_9(n-\frac{1}{2})$	$\mu_{46}(n)$	$-\frac{1}{2}$	$\{1,3,4,5\}$	$\mu_{76}(n+\frac{1}{2})$	$\mu_{58}(n-\frac{1}{2})$	$-\frac{3}{2}$
$\{3,5\}$	$\mu_{30}(n)$	$\mu_{47}(n)$	-1	$\{1,3,4,6\}$	$\mu_{61}(n)$	$\mu_{46}(n-\frac{3}{2})$	-2
$\{3,6\}$	$\mu_{17}(n)$	$\mu_{12}(n)$	$-\frac{3}{2}$	$\{1,3,5,6\}$	$\mu_{50}(n-\frac{1}{2})$	$\mu_{47}(n-\frac{1}{2})$	$-\frac{3}{2}$
$\{4,5\}$	$\mu_{10}(n-\frac{3}{2})$	$\mu_{48}(n)$	$-\frac{1}{2}$	$\{1,4,5,6\}$	$\mu_{51}(n+\frac{1}{2})$	$\mu_{48}(n-\frac{3}{2})$	-2
$\{4,6\}$	$\mu_{18}(n)$	$\mu_{13}(n)$	-1	$\{2,3,4,5\}$	$\mu_{77}(n-\frac{1}{2})$	$\mu_{79}(n)$	-1
$\{5,6\}$	$\mu_2(n-\frac{5}{2})$	$\mu_{14}(n)$	$-\frac{1}{2}$	$\{2,3,4,6\}$	$\mu_{62}(n)$	$\mu_{55}(n)$	$-\frac{3}{2}$
$\{1,2,3\}$	$\mu_{19}(n+\frac{3}{2})$	$\mu_{41}(-n-\frac{5}{2})$	-1	$\{2,3,5,6\}$	$\mu_{52}(n-\frac{3}{2})$	$\mu_{56}(n)$	-1
$\{1,2,4\}$	$\mu_{71}(n)$	$\mu_{37}(-n-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$\{2,4,5,6\}$	$\mu_{53}(n-\frac{1}{2})$	$\mu_{57}(n)$	$-\frac{3}{2}$
$\{1,2,5\}$	$\mu_{72}(n)$	$\mu_{31}(-n-\frac{1}{2})$	-2	$\{3,4,5,6\}$	$\mu_{54}(n-\frac{3}{2})$	$\mu_{58}(n)$	-1
$\{1,2,6\}$	$\mu_{49}(n)$	$\mu_7(-n+\frac{1}{2})$	$-\frac{5}{2}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\mu_{83}(n+\frac{1}{2})$	$\mu_{81}(-n-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$
$\{1,3,4\}$	$\mu_{20}(n+\frac{1}{2})$	$\mu_{63}(-n-\frac{5}{2})$	-1	$\{1,2,3,4,6\}$	$\mu_{80}(n)$	$\mu_{66}(-n-\frac{1}{2})$	-2
$\{1,3,5\}$	$\mu_{73}(n)$	$\mu_{64}(-n-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$\{1,2,3,5,6\}$	$\mu_{59}(n-\frac{1}{2})$	$\mu_{67}(-n-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$
$\{1,3,6\}$	$\mu_{50}(n)$	$\mu_{42}(-n-\frac{1}{2})$	-2	$\{1,2,4,5,6\}$	$\mu_{60}(n+\frac{1}{2})$	$\mu_{68}(-n-\frac{1}{2})$	-2
$\{1,4,5\}$	$\mu_{21}(n-\frac{1}{2})$	$\mu_{65}(-n-\frac{5}{2})$	-1	$\{1,3,4,5,6\}$	$\mu_{61}(n-\frac{1}{2})$	$\mu_{82}(-n-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$

$\{1,4,6\}$	$\mu_{51}(n)$	$\mu_{39}(-n-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$\{2,3,4,5,6\}$	$\mu_{62}(n+\frac{1}{2})$	$\mu_{70}(-n-\frac{3}{2})$	-2
$\{1,5,6\}$	$\mu_{15}(n-\frac{3}{2})$	$\mu_{34}(-n-\frac{5}{2})$	-1	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\mu_{80}(n-\frac{1}{2})$	$\mu_{79}(n-\frac{1}{2})$	$-\frac{3}{2}$

Dokaz. Slijedi direktno iz Propozicija 4.4.2, 4.4.4 i 4.4.5 za $n=6$. ■

Teorem 4.5.2. Svi moduli iz skupa

$$\{L_{-7/2}(\mu_i(t)) \mid i=1,\dots,84,\ t\in\mathbb{C}\}$$

su ireducibilni moduli u kategoriji $\mathcal{O}$ za prostu verteks algebru $L_{-7/2}(sl(6))$.

Dokaz. Iz Teorema 4.5.1 slijedi da su $L_{-7/2}(\mu_i(t))$ moduli za $L_{-7/2}(sl(6))$ za sve $i=1,\dots,84$ i beskonačno mnogo $t\in\mathbb{C}$. Poopćenjem Korolara 3.2.4, (vidi i [18]) dobivamo da se najveće težine ireducibilnih $L_{-7/2}(sl(6))$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$ podudaraju s nultočkama nekog skupa polinoma u $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$. Budući da je prsten polinoma u konačno mnogo varijabli Noetherin, tražene najveće težine su nultočke konačnog skupa polinoma. Označimo ga s $\{f_1,\dots,f_n\}$. Dakle, trebamo dokazati da je

$$f_j(\mu_i(t))=0,$$

za sve $j\in\{1,\dots,n\}$, $i\in\{1,\dots,84\}$ i $t\in\mathbb{C}$. Fiksirajmo i,j. Budući da je $\mu_i(t)$ polinom prvog stupnja u varijabli t, dobivamo da je

$$g_{i,j}(t)=f_j(\mu_i(t))$$

polinom u varijabli t. Budući da su $L_{-7/2}(\mu_i(t))$ moduli za $L_{-7/2}(sl(6))$ za beskonačno mnogo t, dobivamo da je $g_{i,j}(t)=0$ za beskonačno mnogo t. Zato $g_{i,j}(t)$ mora biti nulpolinom, pa je $f_j(\mu_i(t))=0$ za sve $t\in\mathbb{C}$. Time je tvrdnja teorema dokazana. ■

4.6. Glavne skoro dopustive težine za $\widehat{sl(6)}$ nivoa $k = -7/2$

Označimo $\mathfrak{g} = sl(6)$. U ovom dijelu odredit ćemo sve glavne skoro dopustive težine za $\hat{\mathfrak{g}}$ nivoa $-7/2$.

Teorem 4.6.1. Uz oznake iz točke 4.5, skup svih glavnih skoro dopustivih težina za $\hat{\mathfrak{g}}$ nivoa $-7/2$ dan je s

$$\{-\frac{7}{2}\Lambda_0 + \mu_i(t) \mid i = 1, \ldots, 96,\ t \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}\}. \tag{4.1}$$

Dokaz. Označimo

$$\mu = -\frac{7}{2}\Lambda_0 + \sum_{i=1}^{5} x_i \omega_i,\ x_i \in \mathbb{C}.$$

Skupovi Π^μ takvi da je $r(R_+^\mu) = 5$ i Π^μ tipa $A_4^{(1)}$ dobivaju se ako i samo ako za koeficijente $x_1, \ldots, x_5$ vrijedi neki od sljedećih uvjeta:

1) $x_1, \ldots, x_4 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $x_5 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$,

2) $x_2, \ldots, x_5 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $x_1 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$,

3) za $i \in \{1, \ldots, 4\}$ je $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2} \ldots, x_4 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $x_i \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Promotrimo sljedeće slučajeve obuhvaćene prethodnim uvjetima:

1. slučaj: Pretpostavimo $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$. Tada je $\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, 2\delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_4) \in R_+^\mu$. Mora vrijediti $x_5 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, inače $r(R_+^\mu) > 5$.

- Ako je $x_4 \in \mathbb{Z}$, onda je i $x_3 + x_4, x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \in \mathbb{Z}$, pa je $\{\varepsilon_4 - \varepsilon_5, 2\delta - (\varepsilon_4 - \varepsilon_5), \varepsilon_3 - \varepsilon_5, 2\delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_5), \varepsilon_2 - \varepsilon_5, 2\delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_5), \varepsilon_1 - \varepsilon_5, 2\delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)\} \subset R_+^\mu$. Slijedi $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_5, 2\delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)\}$. Rješavanjem sustava nejednadžbi kao za $\mathfrak{g} = sl(4)$, dobivamo $\mu = t\omega_5 = \mu_2(t)$.

- Ako je $x_4 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, onda je i $x_3 + x_4, x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, pa je $\{\delta \pm (\varepsilon_4 - \varepsilon_5), \delta \pm (\varepsilon_3 - \varepsilon_5), \delta \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_5), \delta \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)\} \subset R_+^\mu$. Slijedi $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \delta + (\varepsilon_4 - \varepsilon_5), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)\}$. Dobivamo $\mu = -\frac{5}{2}\omega_4 + t\omega_5 = \mu_{18}(t)$.

- Ako je $x_4 + x_5 \in \mathbb{Z}$, onda je i $x_3 + x_4 + x_5, x_2 + x_3 + x_4 + x_5, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \in \mathbb{Z}$, pa je $\{\varepsilon_3 - \varepsilon_6, 2\delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_6), \varepsilon_2 - \varepsilon_6, 2\delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_6), \varepsilon_1 - \varepsilon_6, 2\delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6), \varepsilon_4 - \varepsilon_6, 2\delta - (\varepsilon_4 -$

$\varepsilon_6)\} \subset R^{\mu}_{+}$. Slijedi $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_6, 2\delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$. Dobivamo $\mu = t\omega_4 + (-1-t)\omega_5 = \mu_{10}(t)$.

- Ako je $x_4 + x_5 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, onda je i $x_3 + x_4 + x_5, x_2 + x_3 + x_4 + x_5, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, pa je $\{\delta \pm (\varepsilon_3 - \varepsilon_6), \delta \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_6), \delta \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_6), \delta \pm (\varepsilon_4 - \varepsilon_6)\} \subset R^{\mu}_{+}$. Slijedi $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \delta + (\varepsilon_4 - \varepsilon_6), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$. Dobivamo $\mu = t\omega_4 + (-\frac{7}{2} - t)\omega_5 = \mu_6(t)$.

2. slučaj: Pretpostavimo $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_3 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_4 - \varepsilon_5, \delta + (\varepsilon_3 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{5}{2}\omega_3 + t\omega_5 = \mu_{17}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_5, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_4 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_3 + \frac{1}{2}\omega_4 + t\omega_5 = \mu_{54}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_4 - \varepsilon_6, \delta + (\varepsilon_3 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{5}{2}\omega_3 + t\omega_4 + (-1 - t)\omega_5 = \mu_{29}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_4 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_3 + t\omega_4 + (-\frac{1}{2} - t)\omega_5 = \mu_{30}(t)$.

3. slučaj: Pretpostavimo $x_1, x_3 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_5, \delta + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{5}{2}\omega_2 + t\omega_5 = \mu_{16}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 - \varepsilon_5, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_4 + t\omega_5 = \mu_{53}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_6, \delta + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{5}{2}\omega_2 + t\omega_4 + (-1 - t)\omega_5 = \mu_{26}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_2 + t\omega_4 + (-\frac{3}{2} - t)\omega_5 = \mu_{28}(t)$.

4. slučaj: Pretpostavimo $x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$, $x_1 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_5, \delta + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{5}{2}\omega_1 + t\omega_5 = \mu_{15}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_1 - \varepsilon_5, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_4 + t\omega_5 = \mu_{51}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_6, \delta + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{5}{2}\omega_1 + t\omega_4 + (-1 - t)\omega_5 = \mu_{21}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_1 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_1 + t\omega_4 + (-\frac{5}{2} - t)\omega_5 = \mu_{24}(t)$.

5. slučaj: Pretpostavimo $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2, x_3 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_5, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3 + t\omega_5 = \mu_{52}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_4, \varepsilon_3 - \varepsilon_5, \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{3}{2}\omega_4 + t\omega_5 = \mu_{62}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3 + t\omega_4 + (-1 - t)\omega_5 = \mu_{77}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_4, \varepsilon_3 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_3 + t\omega_4 + (-\frac{5}{2} - t)\omega_5 = \mu_{74}(t)$.

6. slučaj: Pretpostavimo $x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_3 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_4 - \varepsilon_5, \varepsilon_1 - \varepsilon_4, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_3 + t\omega_5 = \mu_{50}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_3 - \varepsilon_5, \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_4 + t\omega_5 = \mu_{61}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_3 + t\omega_4 + (-1 - t)\omega_5 = \mu_{76}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_3 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_3 + t\omega_4 + (-\frac{3}{2} - t)\omega_5 = \mu_{73}(t)$.

7. slučaj: Pretpostavimo $x_3 \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_2 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_4 - \varepsilon_5, \varepsilon_1 - \varepsilon_4, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_2 + t\omega_5 = \mu_{49}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_3 - \varepsilon_5, \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_4), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_4 + t\omega_5 = \mu_{59}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_1-\varepsilon_4, \varepsilon_4-\varepsilon_6, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_3), \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_6)\}$, $\mu = \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_2 + t\omega_4 + (-1-t)\omega_5 = \mu_{75}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_1-\varepsilon_4, \varepsilon_3-\varepsilon_6, \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 + t\omega_4 + (-\frac{5}{2}-t)\omega_5 = \mu_{72}(t)$.

8. slučaj: Pretpostavimo $x_1, x_2, x_3 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_4-\varepsilon_5, \varepsilon_1-\varepsilon_4, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_3), \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_3 + t\omega_5 = \mu_{59}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_1-\varepsilon_4, \varepsilon_3-\varepsilon_5, \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3 - \frac{1}{2}\omega_4 + t\omega_5 = \mu_{80}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_1-\varepsilon_4, \varepsilon_4-\varepsilon_6, \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_3), \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{3}{2}\omega_3 + t\omega_4 + (-1-t)\omega_5 = \mu_{83}(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_1-\varepsilon_4, \varepsilon_3-\varepsilon_6, \delta-(\varepsilon_2-\varepsilon_4), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3 + t\omega_4 + (-\frac{3}{2}-t)\omega_5 = \mu_{84}(t)$.

Pretpostavimo $x_3, x_4 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

9. slučaj: Pretpostavimo $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_3 + x_4 \in \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- Za $x_5 \in \mathbb{Z}$ je $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_3-\varepsilon_5, \varepsilon_5-\varepsilon_6, 2\delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_6)\}$, $\mu = t\omega_3 + (-1-t)\omega_4 = \mu_9(t)$,

- Za $x_5 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ je $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_3-\varepsilon_5, \delta+(\varepsilon_5-\varepsilon_6), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_6)\}$, $\mu = t\omega_3 + (-1-t)\omega_4 - \frac{5}{2}\omega_5 = \mu_{33}(t)$.

10. slučaj: Pretpostavimo $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_3 + x_4 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_5-\varepsilon_6, \delta+(\varepsilon_3-\varepsilon_5), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_6)\}$, $\mu = t\omega_3 + (-\frac{7}{2}-t)\omega_4 = \mu_5(t)$,

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_3-\varepsilon_6, \delta-(\varepsilon_5-\varepsilon_6), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_5)\}$, $\mu = t\omega_3 + (-\frac{5}{2}-t)\omega_4 + \frac{1}{2}\omega_5 = \mu_{36}(t)$.

11. slučaj: Pretpostavimo $x_1, x_3 + x_4 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^\mu = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_3-\varepsilon_5, \varepsilon_5-\varepsilon_6, \delta+(\varepsilon_2-\varepsilon_3), \delta-(\varepsilon_1-\varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{5}{2}\omega_2 + t\omega_3 + (-1-t)\omega_4 = \mu_{25}(t)$,

- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_6, \varepsilon_3 - \varepsilon_5, \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_6), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_2 + t\omega_3 + (-1 - t)\omega_4 - \frac{1}{2}\omega_5 = \mu_{85}(t)$.

12. slučaj: Pretpostavimo $x_2, x_3 + x_4 \in \mathbb{Z}$, $x_1 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_5, \varepsilon_5 - \varepsilon_6, \delta + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{5}{2}\omega_1 + t\omega_3 + (-1 - t)\omega_4 = \mu_{20}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_5, \varepsilon_1 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5), \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_1 + t\omega_3 + (-1 - t)\omega_4 - \frac{3}{2}\omega_5 = \mu_{86}(t)$.

13. slučaj: Pretpostavimo $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2, x_3 + x_4 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_5, \varepsilon_5 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_2 + t\omega_3 + (-\frac{3}{2} - t)\omega_4 = \mu_{27}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_5, \varepsilon_3 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_3 - \varepsilon_5), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_2 + t\omega_3 + (-\frac{1}{2} - t)\omega_4 - \frac{3}{2}\omega_5 = \mu_{87}(t)$.

14. slučaj: Pretpostavimo $x_3 + x_4 \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_2 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_5, \varepsilon_5 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_2 + t\omega_3 + (-1 - t)\omega_4 = \mu_{78}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_5, \varepsilon_2 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_5), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 + t\omega_3 + (-1 - t)\omega_4 - \frac{3}{2}\omega_5 = \mu_{88}(t)$.

15. slučaj: Pretpostavimo $x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_3 + x_4 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_5, \varepsilon_5 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_1 + t\omega_3 + (-\frac{5}{2} - t)\omega_4 = \mu_{23}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_5, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_5), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_1 + t\omega_3 + (-\frac{3}{2} - t)\omega_4 - \frac{1}{2}\omega_5 = \mu_{89}(t)$.

16. slučaj: Pretpostavimo $x_1, x_2, x_3 + x_4 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dobivamo:

- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_2 - \varepsilon_5, \varepsilon_5 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{3}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 + t\omega_3 + (-\frac{5}{2} - t)\omega_4 = \mu_{71}(t)$,
- $\Pi^{\mu} = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_5, \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_6, \delta - (\varepsilon_1 - \varepsilon_5), \delta - (\varepsilon_2 - \varepsilon_6)\}$, $\mu = -\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 + t\omega_3 + (-\frac{3}{2} - t)\omega_4 - \frac{1}{2}\omega_5 = \mu_{90}(t)$.

Neka je σ automorfizam Dynkinovog dijagrama od $\mathfrak{g}$ reda dva definiran s

$$\sigma(\alpha_1)=\alpha_5,\ \sigma(\alpha_2)=\alpha_4,\ \sigma(\alpha_3)=\alpha_3.$$

Preostale težine iz skupa (4.1) dobiju se djelovanjem automorfizma σ na težine dobivene u slučajevima 1-16. Time je tvrdnja teorema dokazana. ■

Slutnja 4.6.2. Skup svih ireducibilnih $L_{-7/2}(sl(6))$–modula u kategoriji $\mathcal{O}$ dan je s

$$\{L_{-7/2}(\mu_i(t)) \mid i=1,\ldots,96,\ t\in\mathbb{C}\}.$$

Napomena 4.6.3. Moduli $L_{-7/2}(\mu_i(t))$ realizirani su u $L_{-7/2}(sl(7))$–modulima u kategoriji $\mathcal{O}$ za $i=1,\ldots,84$ i prebrojivo mnogo $t\in\mathbb{C}$. Za realizirati preostale module iz Slutnje 4.6.2 potrebno je promatrati $L_{-7/2}(sl(7))$–module izvan kategorije $\mathcal{O}$, preciznije zakrenute ili relaksirane $L_{-7/2}(sl(7))$–module.

4.7. Slutnja u slučaju višeg ranga

U slučaju verteks algebri $L_{-1}(sl(n))$, za $n \geq 3$, i $L_{-5/2}(sl(4))$ opisali smo najveće težine ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ pomoću parametrizacija glavnih skoro dopustivih težina za pripadnu afinu Liejevu algebru danog nivoa. Budući da je za $n \geq 4$ paran, nivo $k = -\frac{n+1}{2}$ blizak dopustivome za Liejevu algebru $sl(n)$, na temelju tih rezultata očekujemo da se istim metodama mogu opisati ireducibilni $L_k(sl(n))$–moduli u kategoriji $\mathcal{O}$ za $k = -\frac{n+1}{2}$ i sve $n \geq 4$ parne.

Slutnja 4.7.1. Neka je $n \geq 4$ paran i $k = -\frac{n+1}{2}$. Parametrizacija glavnih skoro dopustivih težina za $\widehat{sl(n)}$ nivoa k ima $n2^{n-2}$. Označimo ih s $a_i(t)$, $i = 1, \ldots, n2^{n-2}$. Svi ireducibilni $L_k(sl(n))$–moduli u kategoriji $\mathcal{O}$ dani su s $L_k(a_i(t))$, za $i = 1, \ldots, n2^{n-2}$, $t \in \mathbb{C}$.

ZAKLJUČAK

U ovoj disertaciji dobiveni su novi rezultati o afinim verteks algebrama na nivoima bliskim dopustivima. Glavni primjer koji je proučavan je $L_{-5/2}(sl(4))$. Određena je eksplicitna formula za singularni vektor u univerzalnoj afinoj verteks algebri $V^{-5/2}(sl(4))$ i dokazano je da generira maksimalni ideal u $V^{-5/2}(sl(4))$. Klasificirani su svi ireducibilni $L_{-5/2}(sl(4))$–moduli u kategorijama $\mathcal{O}$ i $KL_{-5/2}$. Dokazano je da je $KL_{-5/2}$ novi primjer poluproste, tenzorske kategorije te su određena pravila fuzije.

Eksplicitno je određeno djelovanje funktora kvantne redukcije za neminimalni nilpotentni element na modulima iz kategorije $KL_{-5/2}$. Pokazalo se da je u ovom slučaju situacija malo drugačija nego u slučaju minimalnog nilpotentnog elementa.

Dali smo novi pristup za klasifikaciju ireducibilnih modula u kategoriji $\mathcal{O}$ za neke proste afine verteks algebre na nivoima bliskim dopustivima. Za verteks algebre $L_{-5/2}(sl(4))$ i $L_{-1}(sl(n))$, $n \geq 3$, pokazali smo kako se najveće težine tih modula mogu opisati određenim algebarskim uvjetima. Vjerujemo da se takav pristup može primijeniti i u drugim slučajevima.

Bibliografija

[1] D. Adamović: *Some rational vertex algebras*. Glasnik Matematički, 29(49): 25–40, 1994. ↑ 1, 68.

[2] D. Adamović: *Representations of vertex algebras associated to symplectic affine Lie algebra at half-integer levels (in Croatian)*. 1996. ↑ 4, 28, 32, 33.

[3] D. Adamović, T. Creutzig, N. Genra i J. Yang: *The vertex algebras $\mathscr{V}^{(p)}$ and $\mathscr{R}^{(p)}$*. Communications in Mathematical Physics, 383: 1207–1241, 2021. ↑ 58.

[4] D. Adamović, P. M. Frajria i P. Papi: *New approaches for studying conformal embeddings and collapsing levels for W–algebras*. arXiv:2203.08497, 2022. ↑ 25.

[5] D. Adamović, P. M. Frajria, P. Papi i O. Perše: *Conformal embeddings in affine vertex superalgebras*. Advances in Mathematics, 360: 106918, 2020. ↑ 2, 27.

[6] D. Adamović, V. G. Kac, P. M. Frajria i P. Papi i O. Perše: *Finite vs infinite decompositions in conformal embeddings*. Communications in Mathematical Physics, 348: 445–473, 2016. ↑ iii, iv, 2, 3, 5, 7, 11, 27, 28, 30, 56, 57, 58, 80, 81.

[7] D. Adamović, V. G. Kac, P. M. Frajria, P. Papi i O. Perše: *Conformal embeddings of affine vertex algebras in minimal W–algebras II: decompositions*. Japanese Journal of Mathematics, 12: 261–315, 2017. ↑ 2, 27.

[8] D. Adamović, V. G. Kac, P. M. Frajria, P. Papi i O. Perše: *Conformal embeddings of affine vertex algebras in minimal W–algebras I: structural results*. Journal of Algebra, 500: 117–152, 2018. ↑ 44, 45.

[9] D. Adamović, V. G. Kac, P. M. Frajria, P. Papi i O. Perše: *An application of collapsing levels to the representation theory of affine vertex algebras*. International Mathematics Research Notices, 13: 4103–4143, 2020. ↑ 2, 3, 4, 23, 27, 28, 29, 31, 44, 48.

[10] D. Adamović i A. Milas: *Vertex operator algebras associated to modular invariant representations for $A_1^{(1)}$*. Mathematical Research Letters, 2: 563–575, 1995. ↑ 2, 4, 27, 28, 29, 32, 33, 68.

[11] D. Adamović i V. Pedić: *On fusion rules and intertwining operators for the Weyl vertex algebra*. Journal of Mathematical Physics, 60: 081701, 2019. ↑ 57.

[12] D. Adamović i O. Perše: *Representations of certain non-rational vertex operator algebras of affine type*. Journal of Algebra, 319: 2434–2450, 2008. ↑ iii, iv, 4, 6, 29, 44, 77.

[13] D. Adamović i O. Perše: *Fusion rules and complete reducibility of certain modules for affine Lie algebras*. Journal of Algebra and Its Applications, 13: 1350062, 2014. ↑ 2, 4, 27, 29, 30, 57.

[14] D. Adamović, O. Perše i I. Vukorepa: *On the representation theory of the vertex algebra $L_{-5/2}(sl(4))$*. Communications in Contemporary Mathematics, 2021. `https://doi.org/10.1142/S0219199721501042`. ↑ 4, 27.

[15] T. Arakawa: *Representation theory of W-algebras, II*. Advanced Studies in Pure Mathematics, 61: 51-90, 2011. ↑ 29, 54.

[16] T. Arakawa: *Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C_2-cofiniteness of W–algebras*. International Mathematics Research Notices, 22: 11605–11666, 2015. ↑ 26.

[17] T. Arakawa: *Rationality of W–algebras: principal nilpotent cases*. Annals of Mathematics, 182: 565–604, 2015. ↑ 34.

[18] T. Arakawa: *Rationality of admissible affine vertex algebras in the category $\mathscr{O}$*. Duke Mathematical Journal, 165: 67–93, 2016. ↑ 2, 4, 27, 29, 59, 68, 81, 86.

[19] T. Arakawa i J. van Ekeren: *Rationality and Fusion Rules of Exceptional W-Algebras*. Journal of the European Mathematical Society, 2022. `arXiv:1905.11473`. ↑ 3, 28.

[20] T. Arakawa, J. van Ekeren i A. Moreau: *Singularities of nilpotent Slodowy slices and collapsing levels of W-algebras*. 2021. `arXiv:2102.13462`. ↑ 3, 25, 28.

[21] T. Arakawa i A. Moreau: *Sheets and associated varieties of affine vertex algebras*. Advances in Mathematics, 320: 157–209, 2017. ↑ 4, 29, 32, 33, 34, 44, 45.

[22] T. Arakawa i A. Moreau: *Joseph ideals and lisse minimal W–algebras*. Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 17: 397–417, 2018. ↑ 2, 27, 33.

[23] A. Belavin, A. M. Polyakov i A. B. Zamolodchikov: *Infinite conformal symmetries in twodimensional quantum field theory*. Nuclear Physics B, 241: 333–380, 1984. ↑ 1.

[24] R. Borcherds: *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 83(10): 3068–3071, 1986. ↑ 1.

[25] D. J. Britten i F. W. Lemire: *A classification of simple Lie modules having a 1-dimensional weight space*. Transactions of the American Mathematical Society, 299: 683–697, 1987. ↑ 63, 64.

[26] T. Creutzig, C. Jiang, F. Orosz Hunziker, D. Ridout i J. Yang: *Tensor categories arising from the Virasoro algebra*. Advances in Mathematics, 380: 107601, 2021. ↑ 2, 27.

[27] T. Creutzig i A. Linshaw: *Cosets of the* $\mathscr{W}_k(sl(4), f_{subreg})$*–algebra, Vertex algebras and geometry*. Contemporary Mathematics, 711: 105–117, 2018. ↑ 34, 45, 66.

[28] T. Creutzig, A. Linshaw, S. Nakatsuka i R. Sato: *Duality via convolution of W–algebras*. 2022. `arXiv:2203.01843`. ↑ 25.

[29] T. Creutzig i J. Yang: *Tensor categories of affine Lie algebras beyond admissible level*. Mathematische Annalen, 380: 1991–2040, 2021. ↑ 2, 3, 5, 27, 28, 30, 44, 58.

[30] C. Dong i J. Lepowsky: *Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators*. Progress in Mathematics, 112, 1993. ↑ 1.

[31] C. Dong, H. Li i G. Mason: *Vertex operator algebras associated to admissible representations of* $\hat{sl}_2$. Communications in Mathematical Physics, 184: 65–93, 1997. ↑ 2, 68.

[32] C. Dong, Z. Lin i G. Mason: *On vertex operator algebras as* sl_2*–modules*. Groups, Difference Sets, and the Monster: Proceedings of a Special Research Quarter at The Ohio State University, 4: 349–362, 1996. ↑ 10.

[33] B. Feigin i E. Frenkel: *Quantization of Drinfeld-Sokolov Reduction*. Physics Letters B, 246: 75–81, 1990. ↑ 25.

[34] B. Feigin i A. Semikhatov: $\mathscr{W}_n^{(2)}$ *algebras*. Nuclear Physics B, 698: 409–449, 2004. ↑ 67.

[35] E. Frenkel i D. Ben-Zvi: *Vertex algebras and algebraic curves*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Soc., Providence, RI, drugo izdanje, 88, 2004. ↑ 1, 8.

[36] I. Frenkel, Y. Z. Huang i J. Lepowsky: *On axiomatic approeaches to vertex operator algebras and modules*. Memoirs of the American Mathematical Society, 104, 1993. ↑ 14.

[37] I. Frenkel, J. Lepowsky i A. Meurman: *Vertex Operator Algebras and the Monster*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, Inc., Boston, MA, 134, 1988. ↑ 1.

[38] I. Frenkel i Y. C. Zhu: *Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras*. Duke Mathematical Journal, 66: 123–168, 1992. ↑ 1, 2, 21, 22, 27, 32, 37.

[39] V. Futorny, O. A. H. Morales i L. E. Ramirez: *Simple modules for Affine vertex algebras in the minimal nilpotent orbit*. International Mathematics Research Notices, 2021. `https://doi-org.eres.qnl.qa/10.1093/imrn/rnab159`. ↑ 62.

[40] N. Genra: *Screening operators for* $\mathscr{W}$*–algebras*. Selecta Mathematica, New Series, 23: 2157–2202, 2017. ↑ 34, 45.

[41] M. Gorelik i V. Kac: *On simplicity of vacuum modules*. Advances in Mathematics, 211: 621–677, 2007. ↑ 1, 3, 28.

[42] J. E. Humphreys: *Introduction to Lie algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag New York, 1972. `https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6398-2`. ↑ 17.

[43] V. Kac: *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, treće izdanje, 1990. ↑ 17.

[44] V. Kac: *Vertex Algebras for Beginners*. University Lecture Series, American Mathematical Society, Providence, RI, drugo izdanje, 10, 1998. ↑ 1, 3, 8.

[45] V. Kac i D. Kazhdan: *Structure of representations with highest weight of infinite-dimensional Lie algebras*. Advances in Mathematics, 34: 97–108, 1979. ↑ 36.

[46] V. Kac, S. Roan i M. Wakimoto: *Quantum Reduction for Affine Superalgebras*. Communications in Mathematical Physics, 241: 307–342, 2003. ↑ 2, 25, 26.

[47] V. Kac i M. Wakimoto: *Modular invariant representations of infinite dimensional Lie algebras and superalgebras*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 85: 4956–4960, 1988. ↑ 1, 6, 20, 27, 69, 70, 75, 77, 79.

[48] V. Kac i M. Wakimoto: *Classification of modular invariant representations of affine algebras*. in Infinite Dimensional Lie algebras and groups, Advanced Series in Mathematical Physics, 7, World Scientific, Teaneck NJ, 1989. ↑ 1, 20, 27, 69.

[49] V. Kac i M. Wakimoto: *Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras*. Advances in Mathematics, 185: 400–458, 2004. ↑ 2, 25, 26, 33, 34, 54.

[50] V. Kac i M. Wakimoto: *On free field realization of quantum affine W-algebras*. 2021. `arXiv:2110.15476`. ↑ 25.

[51] K. Kawasetsu: *Relaxed highest-weight modules III: Character formulae*. Advances in Mathematics, 393: 108079, 2021. ↑ 62.

[52] K. Kawasetsu i D. Ridout: *Relaxed highest-weight modules I: rank 1 cases*. Communications in Mathematical Physics, 368: 627–663, 2019. ↑ 62.

[53] K. Kawasetsu i D. Ridout: *Relaxed highest-weight modules II: classifications for affine vertex algebras*. Communications in Contemporary Mathematics, 2021. `https://doi.org/10.1142/S0219199721500371`. ↑ 62.

[54] J. Lepowsky i H. Li: *Introduction to Vertex Operator Algebras and their representations*. Progress in Mathematics. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 227, 2004. ↑ 1, 3, 8, 9, 13, 22.

[55] H. Li: *Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules*. Journal of Pure and Applied Algebra, 109: 143–195, 1996. ↑ 1, 14, 21, 22, 27.

[56] F. Malikov, B. Feigin i D. Fuks: *Singular vectors in Verma modules over Kac-Moody algebras (in Russian)*. Funktsional. Anal. i Prilozhen, 20(2): 25–37, 1986. ↑ 36.

[57] O. Perše: *Vertex operator algebras associated to type B affine Lie algebras on admissible half-integer levels*. Journal of Algebra, 307(1): 215–248, 2007. ↑ 2, 68.

[58] O. Perše: *Vertex operator algebras associated to certain admissible modules for affine Lie algebras of type A*. Glasnik Matematicki Series III, 43(63): 41–57, 2008. ↑ 2, 59, 64, 68, 81.

[59] A. De Sole i V. Kac: *Finite vs affine W–algebras*. Japanese Journal of Mathematics, 1: 137–261, 2006. ↑ 34.

[60] Y. C. Zhu: *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*. Journal of the American Mathematical Society, 9: 237–302, 1996. ↑ 2, 31, 33.

Životopis

Ivana Vukorepa rođena je 30. prosinca 1993. u Splitu, gdje je završila osnovnu i srednju školu. Preddiplomski studij matematike upisala je 2012. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Splitu. Diplomirala je 2017. godine obranom diplomskog rada „Beskonačnodimenzionalne Liejeve algebre“ pod vodstvom doc. dr. sc. Gordana Radobolje. Od studenog 2018. zaposlena je kao asistent na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu za rad na projektu „Provedba vrhunskih istraživanja u sklopu znanstvenog centra izvrsnosti QuantiXLie“, u istraživačkoj grupi „Kac-Moodyjeve Liejeve algebre, verteks-algebre, W-algebre i konformna teorija polja“ kojoj je voditelj prof. dr. sc. Dražen Adamović. Iste godine upisuje doktorski studij i počinje sudjelovati u radu Seminara za algebru.

Sudjelovala je na konferencijama „Workshop on vertex algebras and infinite-dimensional Lie algebras“, Split, 2018.; „Representation Theory XVI“, Dubrovnik, 2019.; „Geometric and automorphic aspects of W-algebras“, Lille, 2019. Održala je pozvano predavanje na konferenciji „Vertex Algebras and Representation Theory", Luminy (Francuska) u lipnju 2022. godine.

Koautorica je jednog članka:

- D. Adamovć, O. Perše, I. Vukorepa, *On the representation theory of the vertex algebra* $L_{-5/2}(sl(4))$, Communications in Contemporary Mathematics (2021), https://doi.org/10.1142/S0219199721501042.