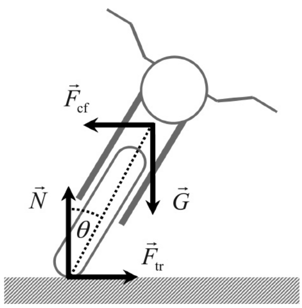
Nagib u vožnji – 1. dio

Petar Žugec[1]

Ovaj prilog sastoji se od dva dijela, u kojima ćemo proučiti stabilnost motocikla ili kojeg drugog dvokotačnog vozila u nagibu. U drugom dijelu razvit ćemo realističniji model motocikla i razmotriti fine korekcije kuta nagiba. U ovom dijelu započet ćemo s izvodom uvjeta stabilnosti na ravnoj cesti, bez bočnoga nagiba. Sastojat će se od identifikacije maksimalne brzine i nagiba koje motocikl može postići u zavoju radijusa R, bez proklizavanja ili bočnog zanošenja. Pri tome je unaprijed jasno iz svakodnevnog iskustva da motocikl u stabilnom nagibu automatski podrazumijeva njegovo gibanje po zakrivljenoj putanji, i suprotno: da je za stabilno gibanje po zakrivljenoj putanji potrebno da je motocikl u nagibu.

Cesta bez bočnog nagiba



Slika A.1.

Promotrimo sile koje na cesti bez bočnog nagiba djeluju na motocikl u nagibu[2] pod kutom θ (slika A.1). Problem rješavamo u neinercijalnom sustavu motocikla, u kojem se pojavljuje centrifugalna sila $\vec{F}_{\text{cf}}$ koja nastoji izbaciti motocikl iz zavoja. Njoj se opire sila $\vec{F}_{\text{tr}}$ trenja dviju guma s tlom. U stabilnom nagibu ove dvije sile uravnotežene su u horizontalnom smjeru ($\vec{F}_{\text{tr}} = -\vec{F}_{\text{cf}}$) jer bi u suprotnom prema drugom Newtonovom zakonu došlo do ubrzavanja motocikla u bočnom smjeru. Uvjet ravnoteže u vertikalnom smjeru nalaže da zajednička težina $\vec{G}$ motocikla i vozača mora biti kompenzirana reakcijom podloge $\vec{N}$, odnosno: $\vec{N} = -\vec{G}$. Kako je težina iznosom jednaka $G = mg$, uz m kao zajedničku masu motocikla i vozača te g kao ubrzanje slobodnog pada, za iznos reakcije podloge također slijedi: $N = mg$. Ovo nam omogućava izračunati iznos *maksimalne*[3] sile trenja, s obzirom da je ona određena upravo reakcijom podloge kao $F_{\text{tr}} = \mu N$, uz koeficijent trenja[4] μ između gume i tla. Prema tome: $F_{\text{tr}} = \mu mg$. A kako

[1] Autor je docent Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `pzugec@phy.hr`

[2] U engleskom jeziku dva su različita pojma: *lean angle* za nagib samog vozila te *camber* za nagib ceste.

[3] Koeficijentom trenja μ izravno je određena maksimalna sila trenja koju je moguće postići. No ona može biti i manja od toga; na primjer, pri vožnji kroz zavoj brzinom manjom od maksimalne održive. Za uspravan motocikl koji vozi pravocrtno, bočno trenje uopće nije prisutno: $F_{\text{tr}} = 0$.

[4] Usvajanje jedinstvenoga koeficijenta trenja μ ekvivalentno je pretpostavci da je za obje gume jednak. Ova pretpostavka ne mora biti zadovoljena; na primjer, zbog različitog tipa prednje i stražnje gume, različitog stupnja potrošenosti, različitih temperatura guma uzrokovanih različitim stupnjem naprezanja, itd. No i u slučaju različitih koeficijenata trenja μ_1 prednje i μ_2 stražnje gume, maksimalna sila trenja obiju guma *koja ne dovodi do bočnog zanošenja motocikla* može se parametrizirati jedinstvenom vrijednošću $\mu = \min(\mu_1, \mu_2)$, što ćemo kasnije pokazati u odlomku *Potpuniji model motocikla* iz drugog dijela ovog priloga. Valja napomenuti da pripisivanje maksimalnog ostvarivog trenja (odnosno punog μ) održavanju motocikla u zavoju vrijedi samo dok je sve trenje u bočnom smjeru, a to vrijedi za motocikl u stabilnoj kružnoj putanji konstantnog radijusa i brzine, i uz pretpostavku da se gume gibaju čistim kotrljanjem, bez proklizavanja.

je centrifugalna sila iznosom jednaka $F_{\mathrm{cf}} = \frac{mv^2}{R}$, uz v kao brzinu motocikla te R kao radijus zakrivljenosti putanje (koja u normalnim okolnostima odgovara radijusu zavoja), iz uvjeta stabilnosti u horizontalnom smjeru ($F_{\mathrm{cf}} = F_{\mathrm{tr}}$) izravno slijedi maksimalna brzina $v_{\max}$ koja se u stabilnom nagibu može postići u zavoju[5]:

$$v_{\max} = \sqrt{\mu g R}. \tag{A.1}$$

Uvjet na održivi kut nagiba slijedi iz zahtjeva da ne dolazi do prevrtanja motocikla oko osi koja prolazi dodirnim točkama dviju guma s tlom (os koja okomito probada sliku A.1, a prolazi hvatištima sila $\vec{N}$ i $\vec{F}_{\mathrm{tr}}$; radi jasnoće je nazovimo *uporišnom osi*). Matematički formuliran, uvjet stabilnosti (u neinercijalnom sustavu motocikla!) ekvivalentan je zahtjevu za iščezavanjem ukupnog momenta sile na cjelokupan sustav: $\vec{M} = \vec{0}$. Detaljan račun ukupnog momenta sile provest ćemo u drugom dijelu ovog priloga, u odlomku *Potpuniji model motocikla*. Radi jednostavnosti, sada ćemo se zadržati samo na komponenti bitnoj za stabilnost bočnog nagiba, a to je upravo komponenta usmjerena duž uporišne osi. Označit ćemo je s M_z radi konzistentnosti s kasnijim računom. Zbog definicije momenta sile kao vektorskog produkta ($\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$), komponenti M_z doprinose samo one komponente sile $\vec{F}$ i pripadnog kraka sile $\vec{r}$ koje su okomite na M_z, a to su komponente sila i krakova okomite na uporišnu os, koje se nalaze upravo u ravnini slike A.1. Prema tome, ako ishodište za račun momenta postavimo bilo gdje duž uporišne osi, imamo:

$$|M_z| = |HF_{\mathrm{cf}} \cos\theta - HG \sin\theta| \tag{A.2}$$

gdje je H udaljenost centra mase od uporišne osi (duljina crtkane linije sa slike A.1), a θ je kut nagiba motocikla[6]. Uz ovakav izbor ishodišta za izračun momenta sile, doprinos reakcije podloge $\vec{N}$ i trenja $\vec{F}_{\mathrm{tr}}$ komponenti M_z iščezava, zbog toga što je njihovo hvatište na samoj uporišnoj osi, tj. odmak kraka sile od uporišne osi jednak je 0. Sa slike A.1 očito je da težina $\vec{G}$ nastoji prevrnuti motocikl na tlo, dok ga centrifuga $\vec{F}_{\mathrm{cf}}$ nastoji izbaciti iz zavoja prevrtanjem na drugu stranu. Zahtjev stabilnosti $M_z = 0$ primijenjen na izraz (A.2) izravno vodi na:

$$\tan\theta = \frac{F_{\mathrm{cf}}}{G} = \frac{v^2}{gR}. \tag{A.3}$$

Ovime je određen nagib motocikla potreban za stabilnu vožnju brzinom v po putanji radijusa R. Maksimalan održivi nagib $\theta_{\max}$ nalazimo uvrštavanjem maksimalne održive brzine $v_{\max}$ iz (A.1):

$$\tan\theta_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{gR} = \mu \tag{A.4}$$

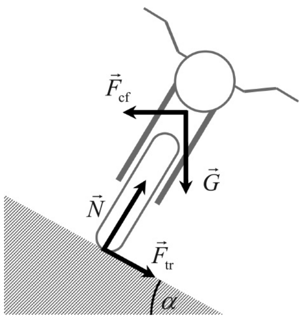
te vidimo da je on određen jedino koeficijentom trenja gume i tla. Dakle, održivi nagib motocikla ograničen je zahtjevom: $\theta \leqslant \arctan\mu$. Još jednom primijetimo da

[5] Alternativno, ovo možemo tumačiti i kao uvjet na radijus $R_{\min}$ najuže stabilne putanje koja se može postići uz danu brzinu v: $R_{\min} = v^2/\mu g$.

[6] Pažljivim promatranjem slike A.1 primijetit ćemo da kut θ iz računa momenata sile samo približno odgovara kutu Φ stvarnog nagiba motocikla! Naime, stvarnom nagibu motocikla odgovara nagib spojnice centra mase i *vrha gume*, dok naginjanjem dolazi do *promjene dodirne točke* gume s tlom, zbog konačnih dimenzija i oblika gume. Međutim, korekcijski član δ koji uspostavlja vezu sa stvarnim kutom nagiba ($\Phi = \theta + \delta$) ovisi o detaljnoj geometriji gume: njezinom obliku i dimenzijama, a putem toga i o samom kutu Φ. Ovu vezu detaljnije ćemo modelirati u odlomku *Korekcija kuta nagiba* iz drugog dijela ovog priloga, dok ćemo ovdje kut θ aproksimativno smatrati stvarnim kutom nagiba motocikla ($\theta \approx \Phi$).

uvjet na maksimalnu brzinu (A.1) slijedi iz zahtjeva ravnoteže sila, a uvjet na stabilan nagib (A.3) i maksimalan nagib (A.4) iz zahtjeva ravnoteže momenata sila.

Cesta s bočnim nagibom



Slika A.2.

Promotrimo općenitiji slučaj kad je površina same ceste nagnuta za neki kut α, kao što je prikazano na slici A.2. Uvjet ravnoteže sila u horizontalnom smjeru sada poprima oblik:

$$F_{\mathrm{cf}} = F_{\mathrm{tr}} \cos\alpha + N \sin\alpha \tag{A.5}$$

dok je uvjet ravnoteže vertikalnih komponenata:

$$G = N\cos\alpha - F_{\mathrm{tr}} \sin\alpha. \tag{A.6}$$

Primijetimo da smo na slici A.2 pretpostavili uobičajen slučaj kad se motocikl giba dovoljno brzo da ga centrifuga nastoji izbaciti iz zavoja, tako da trenje djeluje prema unutrašnjosti zavoja, tj. *niz* kosinu oblikovanu bočnim profilom ceste. Međutim, sad je sasvim moguće da se motocikl giba dovoljno sporo da ga gravitacija nastoji povući prema središtu zavoja, a trenje se tome opire u suprotnom smjeru: *uz* kosinu. Stoga sada moramo dozvoliti da trenje može biti bilo pozitivnog bilo negativnog predznaka, što odražava njegov smjer prema unutrašnjosti ($F_{\mathrm{tr}} > 0$) ili van ($F_{\mathrm{tr}} < 0$) zavoja (kasnije ćemo vidjeti da će se odnos predznaka i pojmova 'niz' i 'uz' kosinu promijeniti u slučaju ceste s negativnim bočnim nagibom).

U slučaju ceste bez bočnog nagiba odmah smo mogli promatrati slučaj maksimalnog ostvarivog trenja, čemu je odgovarala i maksimalna održiva brzina. Ovaj put situacija je nešto složenija, stoga moramo promatrati općenitiji slučaj kad trenje može biti manje od maksimalnog ostvarivog, tj. slučaj kad trenje nije nužno određeno punim koefijentom trenja μ. U tu svrhu silu trenja parametriziramo efektivnim koeficijentom trenja μ_{eff} kao: $F_{\mathrm{tr}} = \mu_{\mathrm{eff}} N$, pri čemu parametar μ_{eff} ne može premašiti vrijednost stvarnog koeficijenta trenja: $|\mu_{\mathrm{eff}}| \leqslant \mu$. Primijetimo da ovakvom parametrizacijom također možemo kontrolirati i smjer trenja, i to predznakom od μ_{eff}. Stoga su dozvoljene vrijednosti ograničene s: $-\mu \leqslant \mu_{\mathrm{eff}} \leqslant \mu$. Sada u jednadžbama (A.5) i (A.6) raspisujemo sve članove:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= \mu_{\mathrm{eff}} N\cos\alpha + N\sin\alpha \\ mg &= N\cos\alpha - \mu_{\mathrm{eff}} N \sin\alpha \end{aligned} \tag{A.7}$$

kako bismo eliminacijom člana N došli do izraza:

$$\frac{v^2}{gR} = \frac{\tan\alpha + \mu_{\mathrm{eff}}}{1 - \mu_{\mathrm{eff}} \tan\alpha} \tag{A.8}$$

koji predstavlja vezu između brzine motocikla i primijenjenog trenja, parametriziranog s μ_{eff}.

Primijetimo da za kut nagiba motocikla *i dalje vrijedi relacija (A.3)* jer su sve sile kojima je on određen (centrifuga $\vec{F}_{\mathrm{cf}}$ i težina $\vec{G}$) ostale iste uvođenjem bočnog nagiba ceste. Doprinos svih sila koje su se između slika A.1 i A.2 promijenile (trenje $\vec{F}_{\mathrm{tr}}$ i reakcija podloge $\vec{N}$) iščezava zbog prikladnog odabira ishodišta za izračun momenata sila. Prema tome, posredstvom relacije (A.3) desna strana izraza (A.8) osim brzine izravno određuje i tangens kuta θ. U tom izrazu još možemo i prepoznati trigonometrijski identitet za tangens zbroja kutova:

$$\tan\theta = \frac{\tan\alpha + \mu_{\text{eff}}}{1 - \mu_{\text{eff}}\tan\alpha} = \tan(\alpha + \operatorname{arctg}\mu_{\text{eff}}) \implies \theta = \alpha + \operatorname{arctg}\mu_{\text{eff}} \qquad \text{(A.9)}$$

čime smo došli do korisne i transparentne relacije za sam kut θ.

Sad ćemo proučiti kako se izrazi (A.8) i (A.9) ponašaju kao funkcije od μ_{eff} kako bismo odrediti njihove ekstreme – minimalnu i maksimalnu održivu brzinu i nagib motocikla u zavoju. Slučaj ceste s pozitivnim bočnim nagibom, kad je površina ceste usmjerena prema unutrašnjosti zavoja ($\alpha \geqslant 0$), analizirat ćemo odvojeno od slučaja s negativnim nagibom, kad je površina ceste usmjerena van zavoja ($\alpha < 0$). Pri tome ćemo, radi preglednosti, sve rezultate koji vrijede isključivo za slučaj $\alpha \geqslant 0$ obilježiti oznakom $+$ (poput $v^+_{\max}$), a one koji se isključivo odnose na slučaj $\alpha < 0$ oznakom $-$ (poput $v^-_{\max}$).

Cesta s pozitivnim bočnim nagibom ($\alpha \geqslant 0$)

Primijetimo da je za $\alpha > 0$ izraz (A.8) rastuća funkcija efektivnog koeficijenta trenja jer porastom μ_{eff} brojnik raste, a nazivnik pada. Također uočimo i da postoji mogućnost njegove divergencije već i za konačnu vrijednost μ_{eff}, što se događa kada nazivnik postane 0, a to se ostvaruje za kritičnu vrijednost $\mu_{\text{eff}} = 1/\tan\alpha$. Prema tome, $\mu_{\text{eff}} < 1/\tan\alpha$ jedno je od ograničenja na vrijednosti μ_{eff} koje se mogu pojaviti u izrazu (A.8). Može li do divergencije uopće doći, ovisi o tome je li moguće postići tu kritičnu vrijednost, s obzirom da su dozvoljene vrijednosti μ_{eff} i fizikalno ograničene s: $\mu_{\text{eff}} \leqslant \mu$. Prema tome, ako je maksimalna ostvariva vrijednost od μ_{eff} – koja odgovara punom koeficijentu trenja μ – manja od kritične vrijednosti: $\mu < 1/\tan\alpha$, divergencija je izbjegnuta te je maksimum izraza (A.8) konačan i postiže se upravo za $\mu_{\text{eff}} = \mu$. No ako je $\mu \geqslant 1/\tan\alpha$, izraz (A.8) divergira već i ranije, za kritičnu vrijednost $\mu_{\text{eff}} = 1/\tan\alpha$. Iz zaključka da maksimalna vrijednost od μ_{eff} koja se može pojaviti u (A.8) iznosi:

$$\max{}^+(\mu_{\text{eff}}) = \min(\mu, 1/\tan\alpha) \qquad \text{(A.10)}$$

odakle slijedi da je maksimalna održiva brzina na cesti pod bočnim nagibom α:

$$v^+_{\max} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\tan\alpha + \mu}{1 - \mu\tan\alpha}\, gR} & \text{ako } \mu < 1/\tan\alpha \\[2ex] \infty & \text{ako } \mu \geqslant 1/\tan\alpha. \end{cases} \qquad \text{(A.11)}$$

Lako je provjeriti da se u slučaju ceste bez bočnog nagiba ($\alpha = 0$) rekonstruira već poznat rezultat (A.1). Da prije ili kasnije postaje moguće održavati proizvoljnu brzinu u zavoju (bez bočnog proklizavanja) sasvim je jasno iz ekstremnog slučaja kad je $\alpha = \pi/2$, tj. kad cesta postaje vertikalan zid (odnosno vertikalni plašt cilindra, radijusa R) po čijoj unutrašnjosti motocikl kruži. Međutim, vidimo da ovaj režim proizvoljne održive brzine nastupa već i za kritičnu vrijednost bočnog nagiba manju od $\pi/2$, a koja iznosi: $\alpha = \operatorname{arctg}(1/\mu)$. Uzrok ovomu je također lako razumjeti iz geometrije sila sa slike A.2. Naime, za dovoljno veliki kut α horizontalna komponenta reakcije podloge postaje dovoljno velika da se u kombinaciji s horizontalnom komponentom trenja može oduprijeti proizvoljno jakoj centrifugi, tako da nikoja vrijednost brzine ne može pokrenuti bočno proklizavanje. Uvštavanjem (A.10) u (A.9) ili (A.11) u (A.3) možemo odrediti i maksimalan održivi nagib:

$$\theta^{+}_{\max} = \begin{cases} \alpha + \operatorname{arctg}\mu & \text{ako } \mu < 1/\tan\alpha \\ \pi/2 & \text{ako } \mu \geqslant 1/\tan\alpha \end{cases} \tag{A.12}$$

Prema tome, kad bi geometrija motocikla to dopuštala i kad bi mogao razviti dovoljnu brzinu, motocikl bi na cesti bočnog nagiba, većeg od kritičnoga, mogao nesmetano voziti u potpuno horizontalnom položaju!

Prelazimo na određivnje minimuma izraza (A.8). Njegovo traženje podrazumijeva scenarij u kojem se motocikl giba dovoljno sporo da ga gravitacija nastoji povući niz kosinu oblikovanu bočnim profilom ceste, i to jače nego li ga centrifuga nastoji potisnuti uz kosinu. U tom slučaju sila trenja mijenja smjer u odnosu na onaj naznačen na slici A.2 te djeluje uz kosinu. Zbog ove promjene smjera (ostvarene kroz promjenu predznaka od μ_{eff}), sada postaje bitno ograničenje: $\mu_{\text{eff}} \geqslant -\mu$. Međutim, dozvoljene vrijednosti od μ_{eff} dodatno su ograničene time što desna strana iz (A.8) mora biti pozitivna jer lijeva ne može biti negativna. Kako je ovo zadovoljeno za $\mu_{\text{eff}} \geqslant -\tan\alpha$, slijedi da je minimalna vrijednost od μ_{eff} koja se može pojaviti u (A.8) jednaka:

$$\min{}^{+}(\mu_{\text{eff}}) = \max(-\mu, -\tan\alpha) \tag{A.13}$$

čime dolazimo do konačnog izraza za minimalnu održivu brzinu:

$$v^{+}_{\min} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\tan\alpha - \mu}{1 + \mu\tan\alpha}\, gR} & \text{ako } \mu < \tan\alpha \\ 0 & \text{ako } \mu \geqslant \tan\alpha. \end{cases} \tag{A.14}$$

Dakle, kad trenje više nije dovoljno jako da nadvlada gravitaciju *bez pomoći centrifugalnog potiska uz kosinu*, motocikl se mora gibati barem brzinom $v^{+}_{\min}$ kako ne bi počeo klizati niz kosinu. Suprotan scenarij, u kojem motocikl može mirovati bez bočnog klizanja, moguć je samo dok je bočni nagib ceste manji od kritične vrijednosti $\alpha = \operatorname{arctg}\mu$. Kao i u slučaju maksimalnog nagiba, uvrštavanjem (A.13) u (A.9) ili (A.14) u (A.3) možemo odrediti minimalan kut nagiba pod kojim je moguće stabilno kruženje u zavoju:

$$\theta^{+}_{\min} = \begin{cases} \alpha - \operatorname{arctg}\mu & \text{ako } \mu < \tan\alpha \\ 0 & \text{ako } \mu \geqslant \tan\alpha. \end{cases} \tag{A.15}$$

Prema tome, kad se motocikl mora gibati da bi se uopće zadržao u zavoju bez bočnog proklizavanja, potreban je i neki minimalan nagib za održavanje tog gibanja. U tim uvjetima, dakle, uspravan motocikl ne može biti stabilan.

⋆ ⋆ ⋆

Još je jedna istaknuta vrijednost brzine koju je korisno identificirati. To je ona pri kojoj se motocikl giba *bez bočnog trenja*, a nalazimo je uvrštavanjem $\mu_{\text{eff}} = 0$ u (A.8):

$$v_0 = \sqrt{gR\tan\alpha}. \tag{A.16}$$

Uvrštavanjem $\mu_{\text{eff}} = 0$ i u (A.9) izravno nalazimo da je kut nagiba u tom slučaju:

$$\theta_0 = \alpha \tag{A.17}$$

odnosno, motocikl je *okomit* na površinu ceste! Na cesti pozitivnog bočnog nagiba vrijednost $\mu_{\text{eff}} = 0$ uvijek je dozvoljena jer je minimum iz (A.13) negativan, a maksimum iz (A.10) pozitivan:

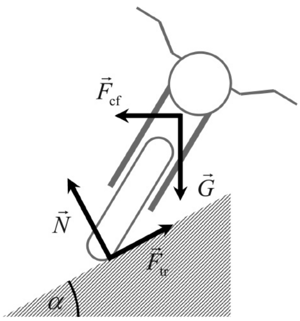
$$\min{}^{+}(\mu_{\text{eff}}) \leqslant 0 \leqslant \max{}^{+}(\mu_{\text{eff}}) \tag{A.18}$$

što znači da je na cesti pozitivnog bočnog nagiba gibanje brzinom v_0 uvijek moguće, ako ju je motocikl u stanju razviti. Iste vrijednosti za v_0 i θ_0, naravno, dobivamo i kao jedine dozvoljene izrazima (A.11) i (A.14), odnosno (A.12) i (A.15) u slučaju iščezavajućeg trenja ($\mu = 0$) jer su jedine koje se nalaze unutar dozvoljenih raspona:

$$\begin{aligned} v^-_{\min}(\mu = 0) \leqslant & v_0 \leqslant v^+_{\min}(\mu = 0) \\ \theta^-_{\min}(\mu = 0) \leqslant & \theta_0 \leqslant \theta^+_{\min}(\mu = 0). \end{aligned} \tag{A.19}$$

Valja primijetiti i da su one ostvarive *samo* na cesti pozitivnog bočnog nagiba jer za $\alpha < 0$ izraz (A.16) više nije definiran zbog pojave negativnog izraza pod korijenom, dok nagib motocikla nikad ne smije biti van zavoja, odnosno izraz (A.17) ne smije biti negativan jer desna strana iz (A.3) nikad nije negativna.

Cesta s negativnim bočnim nagibom ($\alpha < 0$)



Slika A.3.

U slučaju ceste s negativnim bočnim nagibom ($\alpha < 0$), tako da je površina ceste usmjerena van zavoja (slika A.3), dolazi do određenih kvalitativnih promjena. Kako bismo to pokazali, zapišimo izraz (A.8) na način:

$$\left(\frac{v^2}{gR}\right)_{\alpha<0} = \frac{\mu_{\mathrm{eff}} - |\tan\alpha|}{1 + \mu_{\mathrm{eff}}|\tan\alpha|} \tag{A.20}$$

u svrhu olakšane kontrole nad predznacima. Sa slike A.3 odmah možemo uočiti da je u ovom slučaju (baš kao i na slici A.1) trenje uvijek usmjereno prema unutrašnjosti zavoja jer se mora oduprijeti centrifugi i reakciji podloge koje sada obje gledaju van zavoja. Primijetimo pri tome da predznak od F_{tr}, odnosno μ_{eff}, nije vezan uz smjer trenja u vertikalnom smjeru (uz ili niz kosinu), već u horizontalnom (prema unutrašnjosti ili van zavoja) jer se u slučaju $\alpha < 0$ za promjenu smjera vertikalne komponente brine $\sin\alpha$ iz jednadžbe (A.6). Stoga su nam sada dozvoljene samo pozitivne vrijednosti efektivnog koeficijenta trenja: $0 < \mu_{\mathrm{eff}} \leqslant \mu$.

Minimum izraza (A.20) ponovno je ograničen zahtjevom za nenegativnošću desne strane (kao kod $v^+_{\min}$). Vidimo da je ovaj uvjet ostvaren za $\mu_{\mathrm{eff}} \geqslant |\tan\alpha|$, što je novina s obzirom na uvjete s kojima smo se do sada susreli. Naime, za $\alpha \geqslant 0$ je prema (A.18) uvijek bilo dozvoljeno $\mu_{\mathrm{eff}} = 0$, odnosno uvijek je bilo moguće voziti bez bočnog trenja, brzinom v_0 iz (A.16). Činjenica da je za $\alpha < 0$ minimum trenja uopće potreban:

$$\min{}^-(\mu_{\mathrm{eff}}) = |\tan\alpha| \tag{A.21}$$

znači da je trenje ponovno nužno kako ne bi došlo do proklizavanja niz bočni profil ceste. Međutim, za razliku od ceste pozitivnog nagiba – kad je minimum iz (A.13) bio negativan, podrazumijevajući potrebu za gibanjem minimalnom brzinom $v^-_{\min}$ – na cesti negativnog nagiba pozitivnost minimuma iz (A.21) podrazumijeva da je *barem toliko trenje potrebno moći ostvariti*! To je moguće samo ako je isti uvjet ostvaren i za puni koeficijent trenja μ, odnosno ako maksimalno ostvarivo trenje uopće dozvoljava da se zadovolji (A.21), što nas dovodi do uvjeta postojanja minimalne brzine stabilnog kruženja na cesti negativnog bočnog nagiba:

$$v^-_{\min} = \begin{cases} \text{nedefinirano} & \text{ako} \quad \mu < |\tan\alpha| \\ 0 & \text{ako} \quad \mu \geqslant |\tan\alpha|. \end{cases} \tag{A.22}$$

Dakle, pri trenju nedovoljnom za dani nagib ceste motocikl odmah klizi niz cestu, dok svako povećanje brzine samo pospješuje proklizavanje zbog centrifuge, koja (pored reakcije podloge) dodatno nastoji izbaciti motocikl iz zavoja. Uvrštavanjem (A.21) u (A.9), ili (A.22) u (A.3) izravno nalazimo i minimalan mogući kut nagiba:

$$\theta^-_{\min} = \begin{cases} \text{nedefinirano} & \text{ako} \;\; \mu < |\tan\alpha| \\ 0 & \text{ako} \;\; \mu \geqslant |\tan\alpha|. \end{cases} \tag{A.23}$$

Primijetimo da je uvjet nedefiniranosti najlakše bilo odrediti iz matematičke strukture izraza (A.20). Neostvarivost danog kuta nagiba, naravno, izravno slijedi iz neostvarivosti brzine potrebne za održavanje istog nagiba. Da smo samo promatrali izraz (A.9) u kojem je kut nagiba izražen u ovisnosti o trenju, uvrštavanjem preniskih (tj. neodrživih) vrijednosti od μ_{eff} bili bismo dobili negativan kut nagiba. I dok je iz fizikalnih razloga (ravnoteže momenata sila) jasno da *kut nagiba ne može biti negativan*, odnosno centar mase sustava u stabilnom kruženju *ne može biti nagnut van zavoja*[7], bez takvog pažljivog promišljanja negativne vrijednosti nagiba možda nam se ne bi učinile alarmantnima. Za razliku od toga, nekompatibilnost predznaka s dviju strana jednadžbe (A.20) sasvim je jasan znak zabranjenih scenarija, i bez detaljnog poznavanja fizikalne pozadine jednadžbe. Stoga zaključujemo da je veza (A.3) između kuta nagiba i brzine kruženja *fundamentalnija* od pukog raspisa (A.9), koliko god on bio privlačan svojom jednostavnošću i izravnom vezom s pozadinskim parametrima problema.

Na maksimum izraza (A.20) više ne utječe mogućnost divergencije (kao kod $v^+_{\max}$) jer je pozitivnim μ_{eff} više nije moguće ostvariti. Stoga maksimum ostaje ograničen jedino maksimalnim ostvarivim trenjem:

$$\max{}^-(\mu_{\text{eff}}) = \mu. \tag{A.24}$$

Međutim, sada se postavlja pitanje postiže li izraz (A.20) svoj maksimum upravo za maksimalnu vrijednost od μ_{eff}? U (A.8) je za $\alpha > 0$ bilo očito da radimo s rastućom funkcijom od μ_{eff} jer je nazivnik padao kako je brojnik rastao. No u (A.20) i brojnik i nazivnik rastu s porastom μ_{eff}, stoga je sasvim legitimno pitanje je li za $\alpha < 0$ funkcija još uvijek rastuća ili možda ima kakav *lokalni* maksimum koji postiže već i za neku raniju vrijednost $\mu_{\text{eff}} < \mu$? U ovome nam pomaže jednakost iz (A.9) zahvaljujući kojoj i (A.20) možemo zapisati kao:

$$\left(\frac{v^2}{gR}\right)_{\alpha<0} = \tan(-|\alpha| + \operatorname{arctg}\mu_{\text{eff}}) \tag{A.25}$$

odakle je jasno da je funkcija i dalje monotono rastuća i za $\alpha < 0$! Da nam ovakav alternativan zapis nije bio dostupan, lako bismo provjerili monotonost ispitivanjem derivacije:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_{\text{eff}}}\left(\frac{v^2}{gR}\right)_{\alpha<0} = \frac{1+\tan^2\alpha}{(1+\mu_{\text{eff}}|\tan\alpha|)^2} > 0. \tag{A.26}$$

Kako derivacija mjeri prirast funkcije, a iz prethodnog se izraza jasno vidi da je uvijek pozitivna, zaključujemo da funkcija uvijek raste. Stoga se njezin maksimum postiže upravo pri maksimalnom argumentu iz (A.24). Pri tome, naravno, treba uzeti u obzir da uvrštavanje ima smisla samo dok su minimalna i maksimalna vrijednost u pravilnome poretku: $\max^-(\mu_{\text{eff}}) \geqslant \min^-(\mu_{\text{eff}})$, što je uvjet koji nas ponovno dovodi do raspisa po

[7] Već smo ustanovili da za $\alpha < 0$ kruženje bez bočnog trenja nije moguće jer bi odmah došlo do proklizavanja. Sada to možemo lako razumjeti i iz fizikalnih ograničenja na kut nagiba. Prema (A.17), bez bočnog trenja motocikl (točnije, centar mase) mora biti okomit na površinu ceste. Za $\alpha < 0$ to znači da bi centar mase morao biti nagnut van zavoja, što je nemoguće.

slučajevima[8]:

$$v^{-}_{\max} = \begin{cases} \text{nedefinirano} & \text{ako} \quad \mu < |\tan\alpha| \\ \sqrt{\dfrac{\mu - |\tan\alpha|}{1+\mu|\tan\alpha|} gR} & \text{ako} \quad \mu \geqslant |\tan\alpha|. \end{cases} \tag{A.27}$$

Uvrštavanjem (A.24) u (A.9), ili (A.27) u (A.3) odmah slijedi i maksimalni kut nagiba:

$$\theta^{-}_{\max} = \begin{cases} \text{nedefinirano} & \text{ako} \quad \mu < |\tan\alpha| \\ -|\alpha| + \operatorname{arctg}\mu & \text{ako} \quad \mu \geqslant |\tan\alpha|. \end{cases} \tag{A.28}$$

Primijetimo sljedeće. Čak i uz beskonačno visok koeficijent trenja:

$$\lim_{\mu\to\infty} v^{-}_{\max} = \sqrt{\frac{gR}{|\tan\alpha|}} \tag{A.29}$$

maksimalna brzina kruženja koju je moguće održavati na cesti negativnog nagiba je konačna! Uz pretpostavku da je doista $\mu = \infty$, prekoračenjem ove brzine došlo bi do *prevrtanja* motocikla van zavoja jer je ostvarivo trenje dovoljno visoko da se odupre bočnom *proklizavanju*. No u stvarnom slučaju kad je keoficijent trenja konačan ($\mu < \infty$), prije će doći do proklizavanja, i to čim se premaši maksimalna održiva brzina $v^{-}_{\max}$ iz (A.27). Naravno da je i u stvarnom slučaju moguće narušiti stabilnost kružne putanje prevrtanjem motocikla (bilo izlijetanjem van zavoja, bilo urušavanjem na tlo). No *temeljni* uzrok ovome nije prekoračenje granične brzine, već neprilagođenost kuta nagiba danoj brzini[9], suprotno relaciji (A.3).

Konačno, provjerom granične vrijednosti i maksimalnog kuta nagiba:

$$\lim_{\mu\to\infty} \theta^{-}_{\max} = \frac{\pi}{2} - |\alpha| \tag{A.30}$$

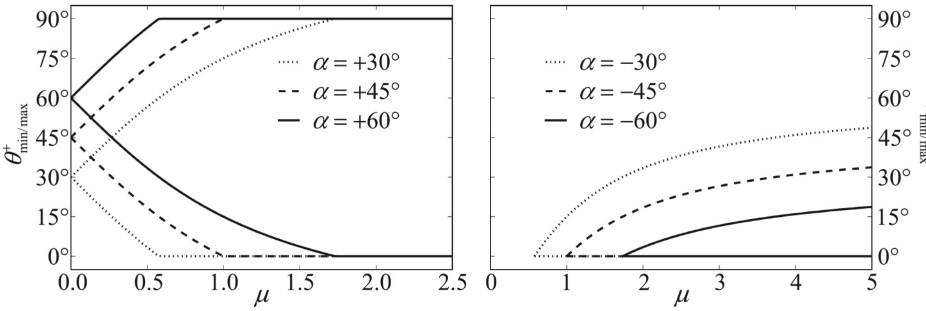
vidimo da apsolutno najveći ostvarivi kut nagiba odgovara upravo polegnuću motocikla uz cestu[10]! A to znači da u ovakvom idealiziranom slučaju beskonačno uskog motocikla doista nismo morali uzimati u obzir dodatna geometrijska ograničenja na $\max^{-}(\mu_{\text{eff}})$ iz (A.24). Morali bismo to učiniti da je maksimalan kut nagiba mogao postati veći od onoga iz (A.30) jer bi to podrazumijevalo "prodiranje" motocikla u cestu.

⋆ ⋆ ⋆

[8] Kao što je brzina iz (A.8) rastuća funkcija koeficijenta trenja, tako je i *rastuća funkcija bočnog nagiba* α, neovisno o tome je li α pozitivan ili negativan. To se najlakše vidi iz toga što se $\tan\alpha$ u (A.8) pojavljuje na potpuno simetričan način kao i μ_{eff}, pa kako izraz raste s μ_{eff}, tako mora i s α. Stoga i maksimumi brzina iz (A.11) i (A.27), koji nasljeđuju isti izraz, također rastu s α. To znači da je maksimalna održiva brzina uvijek veća na cesti većeg bočnog nagiba, a posebno da je na cesti bez bočnog nagiba veća nego na cesti negativnog nagiba. Stoga cesta negativnog nagiba predstavlja namjerno postavljenu zamku za vozača, čija je svrha usporiti promet na osjetljivom dijelu ceste ili biti izazov vozačima na stazi za utrke.

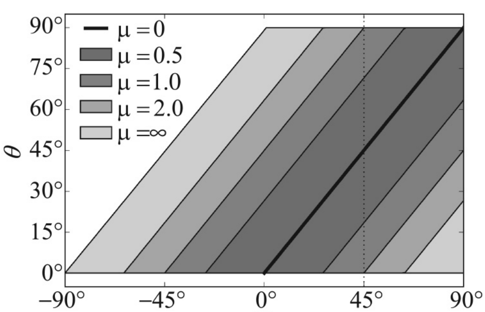
[9] I prekoračenje granične brzine, koje prvo dovodi do bočnog proklizavanja, često uzrokuje pad motocikla prevrtanjem, bilo na tlo (eng. *low-side crash*) bilo izlijetanjem van zavoja ako guma naglo obnovi kontakt s tlom nakon proklizavanja (eng. *high-side crash*). No mehanizam prevrtanja je sljedeći: dok donji kraj naglo proklože, ostatak motocikla zbog inercije nije u stanju pratiti ovaj visoko akcelerirani pomak u stranu. Stoga dolazi do zakretanja čitave konstrukcije oko centra mase, a time i narušenja optimalnog kuta nagiba, što je temeljni uzrok prevrtanja.

[10] U stvarnom slučaju, naravno, ovaj kut nije moguće postići jer zbog konačnih bočnih dimenzija postoji najmanji kut $\vartheta_{\text{real}} > 0$ pod kojim se motocikl može prikloniti tlu. Ovo ćemo detaljnije obraditi u odlomku *Realistična ograničenja brzine i kuta nagiba*.



Slika A.4

Slika A.4 prikazuje raspon održivih nagiba o ovisnosti o koeficijentu trenja, za nekoliko izabranih vrijednosti bočnog nagiba ceste. Slika A.5 na sličan način prikazuje raspon održivih nagiba u ovisnosti o bočnom nagibu ceste, za nekoliko izabranih vrijednosti koeficijenta trenja. Krivulje na lijevom grafu slike A.4 i na desnoj polovici slike A.5 (za $\alpha \geqslant 0$) određene su izrazima (A.12) i (A.15), dok su one s desnog grafa slike A.4 i lijeve polovice slike A.5 (za $\alpha < 0$) određene izrazima (A.23) i (A.28).



Slika A.5

Za dani $\alpha > 0$, vrijednost s lijevog grafa slike A.4 u kojoj se za $\mu = 0$ podudaraju i gornja i donja granica kutnog raspona, odgovara upravo nagibu $\theta_0 = \alpha$ iz (A.17): jedinome održivome na cesti bez trenja, kad je motocikl okomit na površinu ceste. Istoj ovisnosti $\theta_0 = \alpha$ odgovara i središnji "beskonačno uzak" raspon sa slike A.5, istaknut podebljanom linijom za slučaj $\mu = 0$. Točke s lijevog grafa slike A.4 u kojima se krivulje "zasićuju" na $0°$ ili $90°$ odgovaraju kritičnim vrijednostima $\mu^{+}_{0°} = \tan\alpha$ i $\mu^{+}_{90°} = 1/\tan\alpha$, za koje u izrazima (A.15) i (A.12) dolazi do promjene režima. Isto tako, na desnome grafu slike A.4 dozvoljeni kutni rasponi otvaraju se tek pri vrijednosti $\mu^{-}_{0°} = |\tan\alpha|$, kritičnoj točki promjene režima iz (A.23) i (A.28). Istim kritičnim vrijednostima određene su i rubne točke osjenčanih područja sa slike A.5. Nadalje, svaka od krivulja s desnog grafa slike A.4 asimptotski teži graničnoj vrijednosti $90° - |\alpha|$ iz (A.30). Na slici A.5 ovaj limes predstavljen je lijevim rubom najšireg osjenčanog područja (za $\mu = \infty$), van kojeg nema dozvoljenih kutova nagiba ni za koju vrijednost koeficijenta trenja. Konačno, dok lijevi graf slike A.4 jasno pokazuje da su za bilo koji $\alpha > 0$ svi kutovi nagiba $\theta \in [0°, 90°]$ dozvoljeni čim koeficijent trenja premaši vrijednost $\max(\mu^{+}_{0°}, \mu^{+}_{90°})$ – tj. čim vrijedi $\mu \geqslant \max(\tan\alpha\,,\ 1/\tan\alpha)$ – tako slika A.5 sugerira da postoji kritična vrijednost koeficijenta trenja ispod koje ni za koji α nisu dozvoljeni svi kutovi nagiba $\theta \in [0°, 90°]$, dok za vrijednosti iznad kritične postoji raspon mogućih α unutar kojeg svi jesu dozvoljeni. Ovu kritičnu vrijednost nalazimo iz uvjeta da za dani μ moraju postojati takvi α da su u izrazima (A.12) i (A.15) istovremeno dozvoljeni režimi $\theta^{+}_{\min} = 0°$ i $\theta^{+}_{\max} = 90°$. Kombinacija obaju uvjeta izraženih preko α vodi na zahtjev: $\operatorname{arctg}(1/\mu) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{arctg}(\mu)$, čime je ujedno i definiran raspon bočnih nagiba ceste unutar kojih su svi kutovi $\theta \in [0°, 90°]$ dozvoljeni. A raspon definiran tom nejednakošću čini neprazan skup ako i samo ako vrijedi $1/\mu \leqslant \mu$, što izravno vodi do traženog kritičnog uvjeta na koeficijent trenja: $\mu \geqslant 1$, potrebnog da bi barem za neke α svi kutovi $\theta \in [0°, 90°]$ bili dozvoljeni. Za samu kritičnu vrijednost $\mu = 1$ postoji samo jedan takav bočni nagib: $\alpha = \operatorname{arctg}(1) = 45°$, koji je na slici A.5 označen vertikalnom crtkanom linijom.

Realistična ograničenja brzine i kuta nagiba

U izrazu (A.12) maksimalan nagib koji bi motocikl mogao postići odgovarao je potpuno horizontalnom položaju ($\theta^{+}_{\max} = \pi/2$). Međutim, zbog konačnih bočnih dimenzija (npr. raspona oslonaca za noge) ili zbog bočnog profila gume koji podržava nagib samo do određene granice, u realnoj situaciji postoji najmanji kut $\vartheta_{\text{real}} > 0$ pod kojim se motocikl može prikloniti tlu (čija je ravnina otklonjena za kut $\pi/2 + \alpha$ od vertikale). Osim toga, i stvarna ostvariva brzina motocikla v_{real} je ograničena[12], tako da će prema relaciji (A.3) maksimalan ostvariv kut nagiba uvijek odstupati od horizontale:

$$\Theta_{\max} \equiv \max{}^{\text{real}}(\theta^{\pm}_{\max}) \implies \Theta_{\max} = \min\left(\operatorname{arc\,tg}(v^2_{\text{real}}/gR)\ ,\ \pi/2 + \alpha - \vartheta_{\text{real}}\right) \qquad \text{(A.31)}$$

jer bi strogo horizontalan nagib ($\theta = \pi/2$) mogao ostvariti jedino beskonačno uzak motocikl dok se giba beskonačnom brzinom. Pri tome smo odmah, radi preglednosti kasnijih izraza, uveli pokratu $\Theta_{\max}$ za *stvarnu gornju granicu maksimalnog kuta nagiba*, čiji je oblik jednak i za $\alpha \geqslant 0$ i za $\alpha < 0$.

I pri određivanju minimalnog potrebnog nagiba iz (A.15) mogli bismo uzeti u obzir minimalni kut ϑ_{real} pod kojim se motocikl može prikloniti tlu, iako je u tom slučaju razmatranje potpuno artificijelno jer bi za realistične vrijednosti ϑ_{real} postalo bitno jedino na cesti nerealističnog nagiba: onoj koja gotovo da je vertikalan zid ($\alpha \approx \pi/2$). No učinit ćemo to radi potpunosti. Sada umjesto maksimalnog mogućeg kuta priklona niz kosinu sa slike A.2 tražimo minimalni kut priklona uz kosinu, pri čemu nije teško zaključiti da vrijedi:

$$\Theta_{\min} \equiv \min{}^{\text{real}}(\theta^{\pm}_{\min}) \implies \Theta_{\min} = \max\left(0\ ,\ \alpha + \vartheta_{\text{real}} - \pi/2\right) \qquad \text{(A.32)}$$

gdje smo također uveli pokratu $\Theta_{\min}$ za *stvarnu donju granicu minimalnog kuta nagiba*, čiji je oblik ponovno neovisan o predznaku bočnog nagiba ceste. Suprotno ranijem zaključku vezanom uz brzinu v_0 iz (A.16), uvođenje realnog ograničenja na ostvarivu brzinu v_{real} povlači trivijalnu posljedicu da stabilno gibanje bez bočnog trenja više ne mora biti moguće, jer ako $v_{\text{real}} < v_0$, tada brzinu v_0 više nije moguće ostvariti. No za patološke vrijednosti parametara v_{real} i ϑ_{real} pojavljuje se i zanimljiva mogućnost da stabilno kruženje čak i u zavoju pozitivnog bočnog nagiba uopće nije moguće. Naime,

[12] *Obično vrijedi $v_{\text{real}} \leqslant 300$ km/h, no Kawasaki Ninja H2R nedavno je pomaknuo ovu granicu na $v_{\text{real}} = 400$ km/h.* Očito, na stazama za utrke nema potrebe konstruirati zavoje većeg bočnog nagiba od onog potrebnog za prolazak najvišom brzinom ostvarivom u praksi. Stoga gornju granicu na *praktičan pozitivan* nagib α_{real} nalazimo iz uvjeta da, za neki realni očekivani koeficijent trenja μ_{real} između gume i podloge, maksimalna održiva brzina iz (A.11) ne premašuje maksimalnu ostvarivu:

$$v^{+}_{\max}(\alpha_{\text{real}}, \mu_{\text{real}}) \leqslant v_{\text{real}} \implies \alpha_{\text{real}} \leqslant \operatorname{arctg}(v^2_{\text{real}}/gR) - \operatorname{arctg}\mu_{\text{real}}.$$

moguće je samo dok su dozvoljeni minimum i maksimum doista u pravilnome poretku:

$$\Theta_{\min} \leqslant \Theta_{\max}. \tag{A.33}$$

Da bi ovo bilo zadovoljeno, mora vrijediti i $\alpha + \vartheta_{\text{real}} - \pi/2 \leqslant \operatorname{arctg}(v_{\text{real}}^2/gR)$ i $\alpha + \vartheta_{\text{real}} - \pi/2 \leqslant \pi/2 + \alpha - \vartheta_{\text{real}}$. Drugi slučaj[13] je zanimljiv jer predstavlja ograničenje na sam ϑ_{real}. Trivijalnim sređivanjem nalazimo da je nejednakost ekvivalentna: $\vartheta_{\text{real}} \leqslant \pi/2$, što znači da kut minimalnog priklona tlu (na svaku stranu!) mora biti manji od 90°, odnosno raspon rubnih dijelova motocikla, gledano iz dodirne točke gume s tlom, ne smije premašiti 180°. Naravno, ovaj uvjet je u stvarnosti i više nego zadovoljen jer u suprotnome kotač uopće ne bi mogao dosegnuti tlo!

Sada možemo zapisati potpuni oblik korekcije izraza (A.12). Pri tome se ona ne svodi samo na zamjenu člana $\pi/2$ realističnom gornjom granicom iz (A.31), već utječe i na kritičnu vrijednost (efektivnog) koeficijenta trenja pri kojoj dolazi do uspostave tog maksimuma, a pojavljuje se i dodatna mogućnost da gibanje uopće nije moguće:

$$\theta_{\max}^{+} = \begin{cases} \text{nedefinirano} & \text{ako } \Theta_{\min} > \Theta_{\max} \\ \alpha + \operatorname{arctg}\mu & \text{ako } \Theta_{\min} \leqslant \Theta_{\max} \text{ i } \mu < \tan(\Theta_{\max} - \alpha) \\ \Theta_{\max} & \text{ako } \Theta_{\min} \leqslant \Theta_{\max} \text{ i } \mu \geqslant \tan(\Theta_{\max} - \alpha). \end{cases} \tag{A.34}$$

Korekcija izraza (A.15) sasvim je analogna:

$$\theta_{\min}^{+} = \begin{cases} \text{nedefinirano} & \text{ako } \Theta_{\min} > \Theta_{\max} \\ \alpha - \operatorname{arctg}\mu & \text{ako } \Theta_{\min} \leqslant \Theta_{\max} \text{ i } \mu < \tan(\alpha - \Theta_{\min}) \\ \Theta_{\min} & \text{ako } \Theta_{\min} \leqslant \Theta_{\max} \text{ i } \mu \geqslant \tan(\alpha - \Theta_{\min}). \end{cases} \tag{A.35}$$

Također sasvim analogno provodimo i korekciju izraza (A.23) i (A.28) za krajnje kutove nagiba na cesti negativnog bočnog nagiba. Međutim, za $\alpha < 0$ odmah možemo prepoznati da vrijedi:

$$\Theta_{\min}(\alpha < 0) = 0 \tag{A.36}$$

što izravno slijedi uvrštavanjem ograničenja $\vartheta_{\text{real}} \leqslant \pi/2$ – koje smo već izveli iz (A.33) – u (A.32). Stoga se korekcija članova $\theta_{\max}^{-}$ i $\theta_{\min}^{-}$ dodatno pojednostavnjuje mogućnošću da na mjesto $\Theta_{\min}$ odmah uvrstimo 0, za čime preostaje:

$$\theta_{\max}^{-} = \begin{cases} \text{nedefinirano} & \text{ako } \Theta_{\max} < 0 \text{ ili } \mu < |\tan\alpha| \\ -|\alpha| + \operatorname{arctg}\mu & \text{ako } \Theta_{\max} \geqslant 0 \text{ i } |\tan\alpha| \leqslant \mu < \tan(\Theta_{\max} + |\alpha|) \\ \Theta_{\max} & \text{ako } \Theta_{\max} \geqslant 0 \text{ i } \mu \geqslant \tan(\Theta_{\max} + |\alpha|) \end{cases} \tag{A.37}$$

te:

$$\theta_{\min}^{-} = \begin{cases} \text{nedefinirano} & \text{ako } \Theta_{\max} < 0 \text{ ili } \mu < |\tan\alpha| \\ 0 & \text{ako } \Theta_{\max} \geqslant 0 \text{ i } \mu \geqslant |\tan\alpha|. \end{cases} \tag{A.38}$$

U sklopu ovakvog realističnog tretmana istim uvjetima moraju se korigirati i izrazi za krajnje brzine iz (A.11), (A.14), (A.22) i (A.27). Pri tome primijetimo dvije stvari. Kad bi u (A.31) vrijedilo $\pi/2 + \alpha - \vartheta_{\text{real}} > \pi/2$, tada bi se $\operatorname{arctg}(v_{\text{real}}^2/gR)$ član automatski pobrinuo da $\Theta_{\max}$ ne može premašiti vrijednost $\pi/2$ (tj. centar mase ne može biti nagnut “prema dolje”). S druge strane, kad bi minimum iz (A.31) bio određen upravo

---

[13] Želimo li biti formalno ispravni, morali bismo rješiti nejednakost (A.33) po slučajevima iz (A.32):

$$\alpha + \vartheta_{\text{real}} - \pi/2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \pi/2 + \alpha - \vartheta_{\text{real}}$$

$$\alpha + \vartheta_{\text{real}} - \pi/2 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \vartheta_{\text{real}} - \pi/2 \leqslant \pi/2 + \alpha - \vartheta_{\text{real}}.$$

No konačno ograničenje je isto kao i ono dobiveno pojednostavnjenom argumentacijom iz glavnog teksta: $\vartheta_{\text{real}} \leqslant \pi/2$.

ϑ_{real} članom, tada bi (pod uvjetom da je $\vartheta_{\text{real}} - \alpha < \pi/2$) motocikl bio u stanju razviti veću brzinu od one koja odgovara maksimalnom ostvarivom nagibu:

$$\max{}^{\text{real}}(v^{\pm}_{\max}) = \sqrt{gR\tan(\Theta_{\max})} \overset{\vartheta_{\text{real}}}{=} \sqrt{gR/\tan(\vartheta_{\text{real}} - \alpha)} < v_{\text{real}}. \qquad \text{(A.39)}$$

Uz dovoljno visok koeficijent trenja, pri brzini između maksimalne održive i maksimalne ostvarive: $\max^{\text{real}}(v^{\pm}_{\max}) < v < v_{\text{real}}$, ne bi došlo do bočnog proklizavanja, nego do prevrtanja centifugalnim izbačajem van zavoja upravo zato jer je zbog geometrijskih ograničenja nemoguće ostvariti potreban nagib za održavanje takve brzine.

Sagledajmo i kategorizirajmo ograničenja na održivi nagib koja smo do sada identificirali. Iz najopćenitijih dinamičkih razmatranja slijedi da se stabilan nagib centra mase ni u kojem slučaju ne može naći van intervala $[0, \pi/2]$. Na cesti danog bočnog nagiba α svi održivi nagibi strože su ograničeni unutar $[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]$, sasvim neovisno o koeficijentu trenja. Konačno, za dane α i μ dozvoljeni nagibi najstrože su ograničeni unutar $[\theta^{\pm}_{\min}, \theta^{\pm}_{\max}]$. Prema tome:

$$0 \leqslant \Theta_{\min}(\alpha) \leqslant \theta^{\pm}_{\min}(\alpha, \mu) \leqslant \theta(v, R) \leqslant \theta^{\pm}_{\max}(\alpha, \mu) \leqslant \Theta_{\max}(\alpha) \leqslant \pi/2 \qquad \text{(A.40)}$$

gdje eksplicitnom oznakom $\theta(v, R)$ podsjećamo da je nagib tijekom vožnje prepušten na izbor vozaču, a unutar dozvoljenih granica ovisi samo o brzini vožnje i radijusu zakrivljenosti putanje.

U sljedećem broju proučit ćemo realističniji model motocikla koji odvojeno tretira trenje dviju guma s tlom. Konačno, provest ćemo i finu korekciju kuta nagiba, potrebu za kojom smo već mogli uočiti sa slika A.1 i A.3.