Ludi nuklearac

Petar Žugec[1]

Ludi nuklearni fizičar smislio je sljedeći pokus s radioaktivnim uzorkom. Periodično, nakon svakog vremenskog intervala T on mjeri broj preživjelih radioaktivnih atomskih jezgara u uzorku te računa sumu Σ i geometrijski prosjek Γ svih dotadašnjih rezultata mjerenja. Ako je nakon određenog broja mjerenja za rezultat sume dobio $\Sigma = \sigma N_0$, a za geometrijski prosjek $\Gamma = \gamma N_0$, gdje je N_0 broj radioaktivnih jezgara u trenutku prvog mjerenja, koliko je prosječno vrijeme života atomskih jezgara iz uzorka? Koliko je ukupno mjerenja napravio do tog trenutka?

Rješenje

Sasvim prirodno, krećemo od zakona radioaktivnog raspada: $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$ koji opisuje broj atomskih jezgara preživjelih u uzorku nakon vremena t ako je njihov broj u početnom trenutku jednak N_0, a prosječno vrijeme[2] njihova života iznosi τ. Prema uvjetu zadatka, m-to mjerenje (gdje ćemo m brojati od nule) odvija se u trenutku mT, stoga je broj preživjelih jezgara u tom trenutku jednak: $N_m = N(mT) = N_0 e^{-mT/\tau} = N_0 e^{-m\rho}$, gdje smo radi kratkoće zapisa uveli pokratu $\rho \equiv T/\tau$. Rezultat sume Σ koju nuklearac računa nakon ukupno M mjerenja jednak je, stoga:

$$\Sigma = \sum_{m=0}^{M-1} N_m = N_0 \sum_{m=0}^{M-1} e^{-m\rho} = N_0 \frac{1 - e^{-M\rho}}{1 - e^{-\rho}} \tag{1}$$

gdje smo iskoristili poznat rezultat za sumu prvih članova geometrijskoga niza: $\sum_{m=0}^{M-1} x^m = (1 - x^M)/(1 - x)$. Geometrijski prosjek Γ jednak je:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sqrt[M]{\prod_{m=0}^{M-1} N_m} = \sqrt[M]{N_0^M \prod_{m=0}^{M-1} e^{-m\rho}} = N_0 \sqrt[M]{\exp\left(-\sum_{m=0}^{M-1} m\rho\right)} \\ &= N_0 \sqrt[M]{\exp\left(-\frac{M(M-1)}{2}\rho\right)} = N_0 e^{-(M-1)\rho/2} \end{aligned} \tag{2}$$

gdje smo iskoristili također poznat rezultat (slavnu Gaussovu dosjetku) za sumu prvih članova specifičnog aritmetičkog niza – niza prirodnih brojeva: $\sum_{m=0}^{M-1} m = M(M-1)/2$.

[1] Autor je docent na Zavodu za eksperimentalnu fiziku na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `pzugec@phy.hr`

[2] Na nižem stupnju nuklearne fizike često se koristi vrijeme poluživota $T_{1/2}$, korištenjem kojega se zakon radioaktivnog raspada može zapisati u obliku eksponencijalnog pada s bazom 2: $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}$. Međutim, na višem stupnju prikladnija je upotreba prosječnog vremena života τ koje se izravno pojavljuje pod bazom e: $N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$, jer se baza e prirodno pojavljuje u diferencijalnim i integralnim računima. U svakom slučaju, veza između ove dvije veličine je trivijalna: $T_{1/2} = \tau \ln 2$.

Kako je zadano $\Sigma = \sigma N_0$ i $\Gamma = \gamma N_0$, imamo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice – M i ρ – koji trebamo riješiti:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1 - e^{-M\rho}}{1 - e^{-\rho}} \\ \gamma &= e^{-(M-1)\rho/2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Iako nije ključno za daljnje rješavanje, zgodno je primijetiti da je $\sigma \geqslant 1$ te $\gamma \leqslant 1$. Naime, rezultat prvog mjerenja već je N_0, pa njemu upravo odgovaraju i početne vrijednosti sume Σ i geometrijskog prosjeka Γ. Svakim daljnjim mjerenjem ukupnu sumu samo povećavamo pa je $\Sigma \geqslant N_0$, dok geometrijski prosjek smanjujemo jer umnošku dodajemo sve manje članove, odakle slijedi $\Gamma \leqslant N_0$. Iz obiju jednadžbi sustava (3) možemo izraziti ukupan broj mjerenja M:

$$M = -\frac{1}{\rho} \ln \left[1 - (1 - e^{-\rho})\sigma\right] = 1 - \frac{2}{\rho} \ln \gamma. \tag{4}$$

Konačno, ρ nalazimo ili povratkom bilo kojeg od prethodnih izraza za M u bilo koju jednadžbu iz (3), ili izravnim rješavanjem posljednjih dviju strana jednakosti iz (4). U svakom slučaju slijedi rješenje:

$$\rho = \ln \frac{\sigma - \gamma^2}{\sigma - 1} \implies \tau = \frac{T}{\ln \dfrac{\sigma - \gamma^2}{\sigma - 1}} \tag{5}$$

gdje smo traženo prosječno vrijeme života τ dobili raspisom ranije uvedene definicije $\rho = T/\tau$. Vidimo da par vrijednosti σ i γ izračunatih nakon bilo kojeg broja mjerenja uvijek mora dati jedan te isti rezultat jer je τ svojstvo samog uzorka, neovisno o detaljima mjerenja. Kako se u jednadžbi (5) ukupan broj mjerenja M ne pojavljuje eksplicitno, ludi nuklearac u svojoj rastresenosti slobodno smije zaboraviti koliko je mjerenja napravio i još će uvijek moći izračunati prosječno vrijeme života iz para vrijednosti σ i γ koje, nadamo se, ipak nije zaboravio zapisati. Štoviše, povratkom prethodnog rezultata u (4):

$$M = 1 - \frac{2 \ln \gamma}{\ln \dfrac{\sigma - \gamma^2}{\sigma - 1}} \tag{6}$$

nuklearac uvijek može izračunati koliko je mjerenja napravio do trenutka kad je dobio vrijedosti σ i γ. A kako se u ovome rezultatu eksplicitno ne pojavljuje period mjerenja T, ludi nuklearac samo iz rezultata mjerenja uvijek može izračunati koliko ih je ukupno napravio, pa čak i da je u svojoj smetenosti zaboravio s kojom učestalošću ih je radio.