

# Elektromagnetske funkcije strukture hadrona u perturbativnom QCD-u

---

Pavičić, Lovre

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:273340>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-20**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Lovre Pavičić

ELEKTROMAGNETSKE FUNKCIJE STRUKTURE  
HADRONA U PERTURBATIVNOM QCD-U

Diplomski rad

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Lovre Pavičić**

Diplomski rad

**Elektromagnetske funkcije strukture  
hadrona u perturbativnom QCD-u**

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Goran Duplančić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2022.

Zahvalio bih mentoru Goranu Duplančiću na svom prenesenom znanju u prethodnoj godini i što mi je uvijek bio na raspolaganju za bilo kakva pitanja.

## Sažetak

Elektromagnetske funkcije strukture hadrona su funkcije koje opisuju unutarnju raspodjelu naboja i magnetizacije unutar hadrona. Po kvantnoj kromodinamici hadroni su vezana stanja kvarkova i gluona te im je kao takvima za praktične potrebe nemoguće egzaktno teorijski izračunati funkcije strukture. Međutim, pri sudarima s visokim prijenosima impulsa funkcije strukture je moguće napisati u faktoriziranom obliku. Drugim riječima moguće je odvojiti neperturbativnu dinamiku vezanog stanja i dinamiku samog sudara koja je perturbativno izračunljiva. U ovom diplomskom radu će se promatrati ekskluzivni procesi na visokim energijama u kojima sudjeluju pioni ili nukleoni i cilj je u tim procesima izračunati njihove funkcije strukture. Prvi korak je da se na jedan takav proces primjeni faktorizacija i tako se odvoji neperturbativni dio, koji je sadržan u distribucijskim amplitudama, od perturbativnog. Perturbativni dio biti će određen do vodećeg reda, a rezultati za distribucijske amplitude biti će preuzeti iz literature s obzirom da su distribucijske amplitude neovisne o procesu. Na samom kraju će dobiveni rezultati biti uspoređeni s eksperimentalnima.

Ključne riječi: Perturbativni QCD, Funkcije strukture, Faktorizacija, Distribucijske amplitude

# Electromagnetic form factors of hadrons in perturbative QCD

## Abstract

Electromagnetic form factors are the functions that describe internal distributions of charge and magnetization in hadrons. Within Quantum Chromodynamics the hadrons are bound states of quarks and gluons, and as such, their form factors are practically impossible to be theoretically determined. However, in processes with large momentum transfers it is possible to apply factorization, i.e. it is possible to separate nonperturbative dynamics of a bound state from perturbative "hard-scattering" amplitude. The goal of this thesis is to calculate form factors of pions and nucleons by analysing large-momentum-transfer exclusive processes in perturbative Quantum Chromodynamics. First step will be using the valence quark approximation and applying factorization on such processes. Non-perturbative dynamics will be contained in distribution amplitudes and results for those will be taken from literature (since they are process independent) while perturbative part will be calculated up to a leading order. Those two will be combined to calculate form factors. At the end, calculated results will be compared to some experimental values.

Keywords: Perturbative QCD, Form factors, Factorization, Distribution amplitudes

# Sadržaj

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Uvod</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Teorijska pozadina</b>                             | <b>3</b>  |
| 2.1      | Kvantna kromodinamika . . . . .                       | 3         |
| 2.1.1    | Baždarne teorije . . . . .                            | 3         |
| 2.1.2    | Klizna konstanta vezanja . . . . .                    | 5         |
| 2.2      | Funkcije strukture . . . . .                          | 7         |
| 2.2.1    | Funkcije strukture čestica spina 1/2 . . . . .        | 7         |
| 2.2.2    | Funkcije strukture čestica spina 0 . . . . .          | 11        |
| <b>3</b> | <b>Faktorizacija i distribucijske amplitude</b>       | <b>13</b> |
| 3.1      | Distribucijska amplituda za pione . . . . .           | 16        |
| 3.2      | Distribucijske amplitude za nukleone . . . . .        | 21        |
| <b>4</b> | <b>Račun funkcije strukture piona</b>                 | <b>25</b> |
| <b>5</b> | <b>Račun funkcije strukture nukleona</b>              | <b>35</b> |
| <b>6</b> | <b>Zaključak</b>                                      | <b>52</b> |
|          | <b>Dodaci</b>   | <b>54</b> |
| <b>A</b> | <b>Gegenbauerovi polinomi</b>                         | <b>54</b> |
| <b>B</b> | <b>Izospinska simetrija nukleonske valne funkcije</b> | <b>55</b> |
| <b>C</b> | <b>BLM skala</b>                                      | <b>58</b> |
|          | <b>Literatura</b>                                     | <b>62</b> |



# 1 Uvod

Čovjek od pamtivijeka pokušava razumjeti strukturu materije. Još u antičkoj Grčkoj Demokrit je pretpostavio postojanje osnovne nedjeljive jedinice, tj. atoma. U to vrijeme sve pretpostavke o strukturi materije bile su filozofske prirode te su bile praktički znanstveno nedokazane sve do 19. stoljeća i radova Johna Daltona. On je 1803. godine prvi put znanstvenim metodama dokazao postojanje onoga što zovemo atom i smatrao je da su atomi zbilja osnovne, nedjeljive jedinice materije koje su sfernog oblika i konačne veličine. Da atom ipak nije osnovna jedinica potvrdio je skoro 100 godina poslije J. J. Thomson kada je 1897. otkrio u eksperimentu elektron [1]. Relativno nedugo poslije toga je E. Rutherford 1911. otkrio da se svaki atom sastoji od jezgre i elektrona koji kruži oko nje [2], a potom je 1920. otkrio proton [3] i pretpostavio postojanje neutrona (kojeg je eksperimentalno potvrdio J. Chadwick 1932. godine [4]). Tada se smatralo da su elektron, proton i neutron osnovne gradivne jedinice sve materije i da su to točkaste čestice. Međutim, prva naznaka da proton i neutron nisu točkasti je to što je protonu izmjeren magnetski moment oko 2.8, a neutronu oko -1.9 puta veći nego što bi trebao biti za točkastu česticu spina 1/2 (Stern, 1933. [5]). Prošlo je oko dva desetljeća prije nego je Hofstadter napravio prva konkretna eksperimentalna mjerenja strukture protona [6]. On je kombinirao Mottovo raspršenje s unutarnjom raspodjelom gustoće naboja i tako eksperimentalno opisao odstupanja od točkaste čestice. Tu se prvi put spominju funkcije strukture o kojima će biti riječ u ovom diplomskom radu. To su funkcije kojima se parametrizira odstupanje od raspršenja na točkastoj čestici te je u njima sadržana informacija o raspodjeli naboja i magnetizacije unutar promatrane čestice.

Još jedan tip čestica o čijoj strukturi će biti riječ su pioni. Njihovo postojanje je prvi put predvidio H. Yukawa 1935. [7], a eksperimentalno su potvrđeni 1947. (nabijeni pioni, C. Lattes, G. Occhialini i C. Powell [8]), tj. 1950. (neutralni pion, Bjorklund et al. [9]). Bilo je odmah jasno da pioni nisu točkasti, no eksperimentalno proučavanje njihove strukture je otežano činjenicom da je njihovo vrijeme života mnogo kraće od vremena života protona i neutrona.

Cilj ovog diplomskog rada je teorijski opisati strukturu piona i nukleona pomoću elektromagnetskih funkcija strukture (eng. *electromagnetic form factors*) u kontekstu kvantne kromodinamike (QCD - eng. *Quantum Chromodynamics*).

QCD je kvantna teorija polja koja opisuje jaku interakciju, a time i samu hadronsku strukturu. Nastala je početkom 70-ih godina prošlog stoljeća (Gell-Mann je zapravo još ranih 60-ih uveo pojam kvarkova) i od tada su izvršeni brojni eksperimenti kojima su rezultati u skladu s njom pa je zbog toga danas općeprihvaćena kao "prava" teorija jake interakcije. Jedno od najbitnijih svojstava QCD-a je tzv. asimptotska sloboda, tj. svojstvo da konstanta vezanja postaje manja što je energija procesa veća i zbog toga je moguće na velikim energijama primjeniti perturbacijski račun. Međutim, problem stvara činjenica da su fizikalna stanja koja se mogu observirati hadroni, tj. vezana stanja kvarkova i gluona. Zbog toga svaki proces nužno ima praktički neizračunljive neperturbativne doprinose koji potječu od dinamike vezanog stanja hadrona koji prisustvuje reakciji. Tu dolazimo do drugog važnog svojstva QCD-a, a to je postojanje faktorizacijskih teorema. Na osnovu njih se odvaja kratkodosežna od dugodosežne dinamike, tj. temeljna amplituda raspršenja koja uključuje hadronske konstituente od dinamike vezanog stanja. Stoga za temeljnu amplitudu raspršenja možemo koristiti dobro poznati perturbacijski račun, a dinamiku vezanog stanja opišemo pomoću tzv. distribucijskih amplituda. Distribucijska amplituda se odredi pomoću QCD-a na rešeci ili sumacijskih pravila i olakšavajuća okolnost kod toga je što je distribucijska amplituda za neki hadron neovisna o procesu, pa kad je jednom određena može se koristiti za bilo koji proces.

Ovaj diplomski rad podijeljen je u tri dijela. U prvom dijelu objasniti ćemo teorijsku pozadinu potrebnu za izračunavanje funkcija strukture. Dakle objasniti ćemo što su uopće funkcije strukture, kako se definiraju te kako se općenito računaju. Također će biti objašnjena faktorizacija i bit će uvedene distribucijske amplitude. Navesti ćemo općeniti oblik distribucijskih amplituda i navesti par rezultata iz literature s kojima ćemo u kasnijim dijelovima računati konkretne funkcije strukture. U druga dva dijela provesti ćemo konkretan račun funkcija strukture u vodećem redu perturbacijskog računa, prvo za pion, a potom i za nukleone.

## 2 Teorijska pozadina

U ovom poglavlju navest ćemo sve potrebne alate za izračun elektromagnetnih funkcija strukture. U prvom potpoglavlju ćemo započeti s kratkim pregledom kvantne kromodinamike (QCD). Uvest ćemo  $SU(3)$  baždarnu teoriju na kojoj se temelji QCD i reći ukratko što znači klizanje konstante vezanja i asimptotska sloboda. U drugom potpoglavlju ćemo reći što su to točno funkcije strukture, kako se one računaju u kontekstu teorije polja te ukratko objasniti kako se one mjere u eksperimentima. U trećem potpoglavlju ćemo navesti što su distribucijske amplitude i kako se one koriste u razdvajanju kratkodosežne i dugodosežne dinamike, što je možda i najbitniji dio ovog poglavlja.

### 2.1 Kvantna kromodinamika

U ovom odjeljku dati ćemo kratki pregled osnova kvantne kromodinamike oslanjajući se pritom na standardne udžbenike iz kvantne teorije polja poput [10] ili [11]. Dakle, kvantna kromodinamika je kvantna teorija polja koja opisuje jaku interakciju, tj. međudjelovanje kvarkova i gluona. U matematičkom smislu, to je baždarna teorija zasnovana na  $SU(3)$  grupi (tzv. Yang-Millsova teorija).

#### 2.1.1 Baždarne teorije

Najopćenitija definicija grupe  $SU(3)$  je da su njeni elementi "generirani" Liejevom algebrom  $\mathfrak{su}(3)$ . Elementi  $T^a$  Liejeve algebre  $\mathfrak{su}(3)$  su definirani komutacijskim relacijama

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (2.1)$$

gdje su  $f^{abc}$  tzv. strukturne konstante koje su potpuno antisimetrične u indeksima  $a, b$  i  $c$ . Kad kažemo da su elementi grupe generirani elementima algebre mislimo na iduću relaciju

$$SU(3) \ni U(x) = e^{-i\theta_a(x)T^a}, \quad T_a \in \mathfrak{su}(3). \quad (2.2)$$

Dakle elementi algebre  $\mathfrak{su}(3)$  su apstraktni objekti koji zadovoljavaju relaciju (2.1) i oni generiraju objekte  $U$  koji su elementi grupe. Da bi ti objekti djelovali na nešto konkretno moramo ih prikazati u određenoj reprezentaciji. Postoji beskonačno mnogo različitih reprezentacija no najčešće korištena je tzv. fundamentalna repre-

zentacija u kojoj su elementi grupe  $SU(3)$  reprezentirani  $3 \times 3$  unitarnim matricama kojima je determinanta jednaka 1. Takve matrice djeluju na trokomponentne valne funkcije

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_r(x) \\ \psi_g(x) \\ \psi_b(x) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

gdje se indeksi  $i = r, g, b$  nazivaju "boja" ( $r$  - crvena,  $g$  - zelena,  $b$  - plava). Često se indeksi boja označavaju jednostavno brojem  $i = 1, 2, 3$ , a ne slovima. Kažemo da elementi  $SU(3)$  grupe transformiraju valne funkcije na način

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x), \quad U(x) = e^{-i\theta_a(x)T^a}, \quad (2.4)$$

gdje su  $\theta_a(x)$  parametri transformacija (s obzirom da oni ovise o položaju  $x$  transformacija se naziva lokalnom), a  $T_a$  su generatori transformacije. U fundamentalnoj reprezentaciji elementi  $T_a$  Liejeve algebre  $\mathfrak{su}(3)$  su također  $3 \times 3$  matrice i ukupno ih je 8 (9 matrica je potrebno da se razapne prostor  $3 \times 3$  matrica, a u našem slučaju uvjet  $\det(U)=1$  oduzima jedan stupanj slobode). Najčešća baza pomoću koje prikazujemo generatore  $SU(3)$  grupe su Gell-Mannove matrice  $\lambda^a = 2T^a$ .

Sada objasnimo ukratko baždarno načelo. Krenimo od Diracovog lagranžijana za kojeg smatramo da bi trebao opisivati sve fermione, pa tako i kvarkove;

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi_i(x), \quad (2.5)$$

gdje je  $m$  masa kvarka.

Primjetimo da taj lagranžijan nije invarijantan na transformacije (2.2), tj. (2.4) jer je transformacija lokalna pa kažemo da lagranžijan nije baždarno invarijantan. Kako je relacija (2.4) načelno vezana uz lokalnu promjenu faze valne funkcije na koju bi teorija trebala biti invarijantna, uvodimo dodatno polje  $A_\mu^a$  koje će se transformirati točno tako da ukupan lagranžijan bude invarijantan na spomenute transformacije. Polja  $A_\mu^a$  odgovaraju gluonima i ukupan lagranžijan s njima glasi

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i(x)(i\cancel{\partial}\delta_{ij} - g_s T_{ij}^a A^a(x) - m_f \delta_{ij})\psi_j(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

gdje je tenzor  $F_a^{\mu\nu}$  tenzor gluonskog polja (analogno elektromagnetskom tenzoru)

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g_s f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu, \quad (2.7)$$

a  $g_s$  konstanta vezanja. Baždarna transformacija gluonskog polja dana je relacijom

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g_s} \partial_\mu \theta^a + f^{abc} \theta^b A_\mu^c. \quad (2.8)$$

Znamo da u prirodi ne postoji samo jedna vrsta kvarkova već ih postoji šest:  $f = u, d, s, c, b, t$ , tzv. okusi. Moramo ih sve uključiti u lagranžijan i zato radimo sumu po okusima;

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\psi}_{f,i}(x) (i\cancel{\partial}\delta_{ij} - g_s T_{ij}^a A^a(x) - m_f \delta_{ij}) \psi_{f,j}(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Međutim, iako baždarno invarijantan, to još nije potpuni lagranžijan QCD-a. Pokaže se da je na ovako zadan QCD nemoguće primjeniti kanonsku kvantizaciju (kvantizacija pomoću operatora koji zadovoljavaju (anti)komutacijske relacije tipa  $[p_i, q_j] = -i\delta_{ij}$ ) upravo zbog invarijantnosti lagranžijana na navedene transformacije. Iz tog razloga se uvodi član  $-1/2\xi(\partial_\mu A_a^\mu)^2$ . Također, uvodimo još jedan nefizikalni član, tzv. Faddeev-Popov član pa ukupan lagranžijan glasi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_{f,i}(x) (i\cancel{\partial}\delta_{ij} - g_s T_{ij}^a A^a(x) - m_f \delta_{ij}) \psi_{f,j}(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \\ - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_a^\mu)^2 + \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a + g_s f^{abc} (\partial^\mu \bar{c}^a) A^b c^c, \end{aligned} \quad (2.10)$$

gdje su polja  $c^a$  nefizikalna, zovu se Faddeev-Popov duhovi i služe da bi otklonili nefizikalne polarizacije gluona u konkretnim fizikalnim amplitudama.

### 2.1.2 Klizna konstanta vezanja

Za lagranžijan (2.10) su nam dobro poznata Feynmanova pravila i u vodećem redu perturbacijskog računa ih možemo izravno primjeniti. Međutim, u višim redovima perturbativnog računa javljaju se tzv. petlje čiji doprinosi imaju integrale po 4-impulsu koji divergiraju. Nas ovdje u kontekstu klizne konstante vezanja zanimaju ultraljubičaste (UV, eng. *ultraviolet*) divergencije (divergencije u slučaju kad im-

pulsi u petlji idu u beskonačnost). Njih rješavamo procesom regularizacije i potom renormalizacije. Regularizacija je ništa drugo nego "umjetno" uklanjanje divergencija. Neke od metoda su promjena gornje granice integracije iz beskonačnosti u neku konačnu energiju  $\Lambda$  ("cutoff" regularizacija), promjena dimenzije integracije iz 4 u  $4 - \epsilon$  (dimenzionalna regularizacija) i još mnoge druge (Pauli-Villars, itd.). Sve te metode rezultiraju jednim konačnim članom u doprinosima petlji koji u fizikalnom limesu ide u beskonačnost. Njega se rješavamo procesom renormalizacije, tj. prikladnom redefinicijom konstante vezanja u lagranžijanu takvom da se divergentni doprinosi ponište. Treba naglasiti da konstanta vezanja iz lagranžijana (2.10) nije ništa fizikalno i stoga imamo tu slobodu odabira.

Renormalizirana konstanta vezanja ovisi o energiji na kojoj se proces odvija (zato ih zovemo kliznima) i možemo je odrediti samo u odnosu na poznatu vrijednost konstante vezanja na nekoj drugoj energiji (tvore tzv. renormalizacijsku grupu). Za QED renormalizirana konstanta vezanja na jednoj petlji glasi

$$\alpha_e(q^2) = \frac{\alpha_e(\mu^2)}{1 - \frac{4}{3} \frac{\alpha_e(\mu^2)}{4\pi} \ln \frac{q^2}{\mu^2}} \quad (2.11)$$

i vidimo da se konstanta vezanja povećava s energijom. S druge strane imamo QCD konstantu vezanja ( $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ )

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \beta_0 \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \ln \frac{q^2}{\mu^2}}, \quad (2.12)$$

gdje je

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f. \quad (2.13)$$

Član  $n_f$  je broj "aktivnih" kvarkova ( $n_f \leq 6$ ). Vidimo da konstanta vezanja QCD-a za razliku one u QED opada s energijom. To svojstvo QCD-a zovemo asimptotska sloboda. Ono omogućava uporabu perturbativne metode na visokim energijama iako je na niskim energijama ta metoda neuporabljiva i kao takvo je jedno od najbitnijih svojstava QCD-a.

## 2.2 Funkcije strukture

Neka je  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  diferencijalni udarni presjek za raspršenje neke lakše točkaste čestice na težoj čestici kojoj želimo odrediti strukturu. Tada je funkcija strukture teže čestice definirana izrazom

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} |F(|\vec{q}|^2)|^2, \quad (2.14)$$

gdje je  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}$  dobro poznati diferencijalni udarni presjek za raspršenje točkaste nabijene čestice na fiksnom Coulombovom potencijalu, tzv. Mottov udarni presjek

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{kin}}^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \cos^2(\theta/2), \quad (2.15)$$

a  $F(|\vec{q}|^2)$  je funkcija strukture promatrane teže čestice koja ovisi o prijenosu impulsa i ima jednostavnu fizikalnu interpretaciju kao Fourierov transformat raspodjele naboja unutar čestice;

$$F(|\vec{q}|^2) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3\vec{r}. \quad (2.16)$$

Dakle tako je definirana funkcija strukture u prvim eksperimentima koje je radio Hofstadter sredinom 50-ih godina prošlog stoljeća da bi ispitivao strukturu nukleona. Ta formula vrijedi dok se proces odvija na manjim energijama i dok je masa jedne čestice dosta veća od druge.

Treba naglasiti da se funkcije strukture u ovom smislu uvijek određuju iz ekskluzivnih procesa što znači da prilikom sudara dvije čestice promatramo samo jedan jedini proces kojemu su točno zadana ulazna i izlazna stanja. U ovom kontekstu se najčešće promatraju sudari elektrona s hadronom (u ovom slučaju pionom ili nukleonom).

### 2.2.1 Funkcije strukture čestica spina 1/2

Prvo promotrimo поближе funkcije strukture za čestice spina 1/2 (što su u našem slučaju naravno nukleoni). U gore navedenim formulama nisu uzete u obzir dvije stvari - odboj čestice koja stvara Coulombov potencijal i činjenica da ta čestica također ima spin 1/2 pa time ima i magnetsku interakciju s upadnom česticom. Kada se putem Feynmanovih dijagrama izračuna udarni presjek u sudaru dviju točkastih čestica spina 1/2 (od kojih je jedna mnogo teža od druge) dobije se Mottov udarni presjek

plus još jedan dodatan član:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{točka}} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{kin}}^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \left( \cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m_n^2} \sin^2(\theta/2) \right). \quad (2.17)$$

Iz gornje jednadžbe se vidi da je drugi član potisnut masom teže čestice  $m_n$  (u našem slučaju nukleona) za male prijenose impulsa, no za velike prijenose impulsa ga se ne može zanemariti. Također vidimo da više nije dovoljna jedna funkcija strukture za opisivanje raspodjele materije i stoga uvodimo još jednu. Općenita formula za udarni presjek sudara točkaste čestice s ne-točkastom glasi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E_3}{E_1} \left( \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \theta/2 + 2\tau G_M^2 \sin^2 \theta/2 \right), \quad (2.18)$$

gdje je  $\tau = Q^2/4m_n$ ,  $Q^2 = -q^2$ ,  $E_1$  je energija ulazne točkaste čestice, a  $E_3$  energija izlazne. Taj izraz naziva se još i Rosenbluthova formula.  $G_E$  i  $G_M$  nazivaju se električna i magnetska funkcija strukture i one sada ovise o kvadratu četveroimpulsa. Treba napomenuti da za razliku od funkcije strukture definirane u jednadžbi (2.14) ovdje se funkcije strukture ne mogu tako jednostavno napisati kao Fourierovi transformati raspodjele naboja ili magnetizacije. Doduše može se pokazati da ipak u slučaju malih vrijednosti prijenosa impulsa  $Q^2$  vrijedi

$$\begin{aligned} G_E(Q^2) &\approx \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3\vec{r}, \\ G_M(Q^2) &\approx \int \mu(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3\vec{r} \end{aligned} \quad (2.19)$$

pa od tu dolazi poveznica s gustoćama magnetizacije i naboja te njihovi nazivi.

Promotrimo sada definiciju funkcija strukture u kontekstu teorije polja koju ćemo nadalje koristiti u konkretnim računima. U tom slučaju elektromagnetske funkcije strukture se definiraju iz vrha elektromagnetske interakcije u kojem sudjeluju virtualni foton te ulazni i izlazni fermion kojem proučavamo strukturu (takav vrh se uvijek pojavljuje u ekskluzivnim procesima koji nas zanimaju). Općeniti takav vrh prikazan je na slici 2.1 te u prvom redu perturbativnog računa za točkaste fermione on glasi samo

$$-ie\Gamma^\mu = -ie\gamma^\mu, \quad (2.20)$$

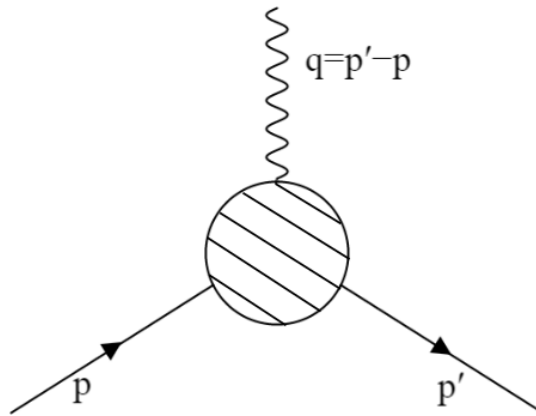
što nam je dobro poznato iz Feynmanovih pravila za kvantnu elektrodinamiku. Ako



računamo amplitudu raspršenja i udarni presjek s tim vrhom dobiti ćemo točno udarni presjek iz formule (2.17), kao što je već spomenuto.

Pogledajmo sada potpuno općeniti oblik elektromagnetskog vrha (za više redove računa smetnje i ne nužno točkaste čestice). Kako na kraju želimo da nam se vrh (tj. elektromagnetska struja) transformira kao vektor i znamo da može ovisiti samo o vanjskim impulsima on može sadržavati samo iduće strukture:

$$\begin{aligned}
 & p^\mu, p'^\mu, \\
 & \gamma^\mu, p^\mu \not{p}, p^\mu \not{p}', p'^\mu \not{p}, p'^\mu \not{p}', \\
 & \sigma^{\mu\nu} p_\nu, \sigma^{\mu\nu} p'_\nu, \sigma^{\alpha\beta} p_\alpha p'_\beta p_\mu, \sigma^{\alpha\beta} p_\alpha p'_\beta p'_\mu, \\
 & \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\nu p'_\alpha \gamma_\beta \gamma_5.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$



**Slika 2.1:** Elektromagnetski vrh u općenitom slučaju.

Međutim, upotrebom raznih identiteta te Diracove jednadžbe pokaže se da su od navedenih struktura samo tri nezavisne i da se općeniti vrh može zapisati kao

$$\Gamma^\mu = A\gamma^\mu + B(p^\mu + p'^\mu) + C(p^\mu - p'^\mu), \tag{2.22}$$

gdje su koeficijenti  $A, B, C$  funkcije samo prijenosa impulsa  $q^2$ . Nadalje, kako treba vrijediti Wardov identitet koeficijent  $C$  nužno treba biti 0. Na posljetku, upotrebom Gordonovog identiteta općeniti oblik vrha se zapiše u malo drugačijem obliku:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2). \tag{2.23}$$

Funkcije  $F_1$  i  $F_2$  se zovu Diracova i Paulijeva funkcija strukture. Kada se s ovako

definiranim vrhom krene računati udarni presjek sudara elektron - nukleon dobije se

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \frac{E_{e'}}{E_e} \left( F_1^2(Q^2) + \tau \left( F_2^2(Q^2) + 2(F_1(Q^2) + F_2(Q^2))^2 \tan^2 \theta/2 \right) \right), \quad (2.24)$$

gdje je  $\tau = Q^2/4M^2$ ,  $Q^2 = -q^2$ . Često se koristi zamjena

$$\begin{aligned} G_E &= F_1 - \tau F_2, \\ G_M &= F_1 + F_2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Kad se ove zamjene uvrste u jednadžbu (2.24) dobije se

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \frac{E_{e'}}{E_e} \frac{1}{1 + \tau} \left( G_E^2 + \tau (1 + 2(1 + \tau) \tan^2(\theta/2)) G_M^2 \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{4E_e^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E_{e'}}{E_e} \left( \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \theta/2 + 2\tau G_M^2 \sin^2 \theta/2 \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

što je upravo Rosenbluthova formula (2.18) koju smo ranije samo naveli.

Dirac-Paulijeve funkcije strukture  $F_1$  i  $F_2$  su prirodnije za račune u kontekstu teorije polja pa ćemo tu definiciju koristiti u teorijskom računu. One se izračunaju jednostavno tako da se izračuna matični element za elektromagnetski vrh u kojem smo uzeli u obzir korekcije koje smo htjeli i potom se samo iščita faktor koji stoji uz  $\gamma^\mu$  odnosno  $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu/2m$ .

Sa druge strane Sachsove funkcije strukture  $G_M$  i  $G_E$  su pogodne za eksperimentalno mjerenje. Ono što u eksperimentu mjerimo je udarni presjek i uspoređujemo ga s Mottovim udarnim presjekom. Stvar je u tome da u izrazu za udarni presjek preko Sachsovih funkcija strukture (2.26) nema miješanih članova poput  $G_M \cdot G_E$  (za razliku od izraza preko Dirac-Paulijevih funkcija strukture (2.24)) pa ih možemo nezavisno mjeriti. Stoga kad budemo uspoređivali teorijske rezultate s eksperimentalnima ćemo koristiti Sachsove funkcije strukture.

Najjednostavnija tehnika određivanja funkcija strukture za nukleone je Rosenbluthova metoda separacije [12]. U suštini ta metoda se sastoji od mjerenja udarnog presjeka za raspršenje  $eN \rightarrow eN$  ( $e$  je elektron/pozitron, a  $N$  nukleon) preko svih eksperimentalno dostupnih kuteva raspršenja  $\theta$  na nekom određenom prijenosu impulsa  $Q^2$  (tj. određujemo  $\frac{d\sigma}{d\theta}$  u ovisnosti o  $\theta$  držeći  $Q^2$  konstantnim). Ako definiramo

tzv. reducirani udarni presjek kao

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{reducirani}} \equiv \frac{\epsilon(1+\tau)}{\tau} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}, \quad (2.27)$$

$$\epsilon \equiv (1 + 2(1 + \tau) \tan^2(\theta/2))^{-1}$$

onda vidimo da on ima linearnu ovisnost o varijabli  $\epsilon$ ;

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{reducirani}} = G_M^2 + \frac{\epsilon}{\tau} G_E^2. \quad (2.28)$$

Ako napravimo prilagodbu gornjeg izraza na izmjerene reducirane udarne presjeke na nekoj fiksiranoj energiji  $Q^2$ , a variranim  $\epsilon$  vidimo da će nagib pravca biti  $G_E^2/\tau$ , a odsječak na y-osi će biti  $G_M^2$ .

Valja napomenuti da je Rosenbluthovom metodom teže određivati funkcije strukture neutrona nego protona. U tom slučaju se često umjesto procesa  $en \rightarrow en$  promatra raspršenje elektrona na deuteronu (jer je deuteron stabilan) i uspoređuje ga se s raspršenjem elektrona na protonu. Iako je tada proces ekstrakcije funkcija strukture nešto kompliciraniji, svejedno se sve de u suštini na Rosenbluthovu metodu. Najteže od svega je odrediti električnu funkciju strukture neutrona  $G_E^n$  jer je ona različita od nule tek na relativno velikim prijenosima impulsa  $Q^2$ . Za njeno određivanje inače se često umjesto Rosenbluthove metode koristi tzv. metoda transfera polarizacije [13].

### 2.2.2 Funkcije strukture čestica spina 0

Za definiranje funkcija strukture čestica spina 0 koristimo analogan pristup kao za čestice spina 1/2. Dakle želimo napisati potpuno općeniti matrični element elektromagnetskog vrha s virtualnim fotonom. Za razliku od prethodnog potpoglavlja, ovdje nemamo strukture s  $\gamma$ -matricama s obzirom da nije riječ o fermionima. Vrh može ovisiti samo o vanjskim impulsima pa njegov općeniti oblik glasi

$$-ie\Gamma^\mu = A(p^\mu + p'^\mu) + B(p^\mu - p'^\mu). \quad (2.29)$$

Faktor B i u ovom slučaju treba biti 0 da bi vrijedio Wardov identitet i stoga

matrični element za općeniti vrh glasi

$$-ie\Gamma^\mu = -ie(p^\mu + p'^\mu)F(Q^2). \quad (2.30)$$

Funkcija  $F(Q^2)$  je tražena funkcija strukture. Kada se izračuna ukupni matrični element za sudar točkaste čestice i neke čestice spina 0 za udarni presjek se dobije

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} |F(Q^2)|^2 \quad (2.31)$$

te vidimo da definicija funkcije strukture iz jednadžbe (2.29) odgovara onoj intuitivnoj općenitoj definiciji iz jednadžbe (2.14).

Čestice spina 0 koje ćemo mi u nastavku promatrati su pioni. Proces iz kojeg se direktno mogu eksperimentalno odrediti pionske funkcije strukture je  $e\pi \rightarrow e\pi$ . Međutim pokaže se da je tim procesom moguće odrediti funkcije strukture samo pri malim prijenosima impulsa  $Q^2$ . Na višim energijama promatramo procese poput

$$\begin{aligned} e^-p &\rightarrow e^-\pi^+n, \\ e^-n &\rightarrow e^-\pi^-p. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Iz takvih procesa nije moguće direktno očitati funkciju strukture kao u procesu  $e\pi \rightarrow e\pi$ , nego postoje razne metode ekstrakcije pionske funkcije strukture iz dobivenih eksperimentalnih podataka.

### 3 Faktorizacija i distribucijske amplitude

U prethodnom poglavlju već je spomenuto da su fizikalna stanja koja observiramo hadroni, tj. vezana stanja kvarkova i gluona. Stoga u svakom procesu imamo neperturbativne doprinose i ne možemo olako primjeniti perturbativni QCD. Pristup za analiziranje tvrdih ekskluzivnih procesa (ekskluzivnih procesa pri velikim prijenosima impulsa) u kontekstu perturbativne kvantne kromodinamike razvijen je krajem sedamdesetih i početkom osamdesetih godina [14], [15], [16] te ćemo taj pristup slijediti i u ovom diplomskom radu.

U navedenim radovima pokazano je da se ukupna amplituda raspršenja za velike prijenose impulsa može prikazati kao konvolucija perturbativno određive i o procesu ovisne amplitude i tzv. distribucijskih amplituda koje opisuju dinamiku vezanog stanja te su one neperturbativne i o procesu neovisne. U standardnom pristupu određivanja amplitude raspršenja koristimo aproksimaciju u kojoj se hadron sastoji samo od valentnih kvarkova te također zanemarujemo transverzalne impulse kvarkova. Argumentaciju za opravdanost te aproksimacije ćemo dati u nastavku. U tom slučaju faktorizacija za amplitudu raspršenja u općenitom obliku glasi

$$\mathcal{M} = \prod_h \int_0^1 [dx] T_H(x_j, Q^2, \mu_F^2) \Phi_h(x_j, \mu_F^2) + R(Q^2), \quad (3.1)$$

gdje su  $\Phi_h(x_j, \mu_F^2)$  distribucijske amplitude hadrona te imamo umnožak po svim hadronima koji sudjeluju u procesu. Parametar  $\mu_F$  predstavlja energetska skalu na kojoj se vrši faktorizacija. Član  $R(Q^2)$  je ostatak koji se ne faktorizira te trne kao negativna potencija od  $Q^2$ , puno brže od faktoriziranog dijela pa ga možemo zanemariti. Varijabla  $x_j$  je udio impulsa koji nosi određeni kvark u danom hadronu te ona izražena preko "light-cone" varijabli glasi  $x_j = k_j^+/p^+ = (k_j^0 + k_j^3)/(p^0 + p^3)$  ( $k_j$  je impuls promatranog kvarka). Integriramo li po svim mogućim udjelima, kako se u konačnici udjeli za jedan hadron trebaju zbrojiti u 1, imamo

$$\int_0^1 [dx] = \int_0^1 \prod_j^{n_h} dx_j \delta(1 - \sum_k^{n_h} x_k), \quad (3.2)$$

gdje je  $n_h$  broj konstituenata u hadronu  $h$ .

Kako želimo odrediti funkcije strukture hadrona, od interesa su nam procesi

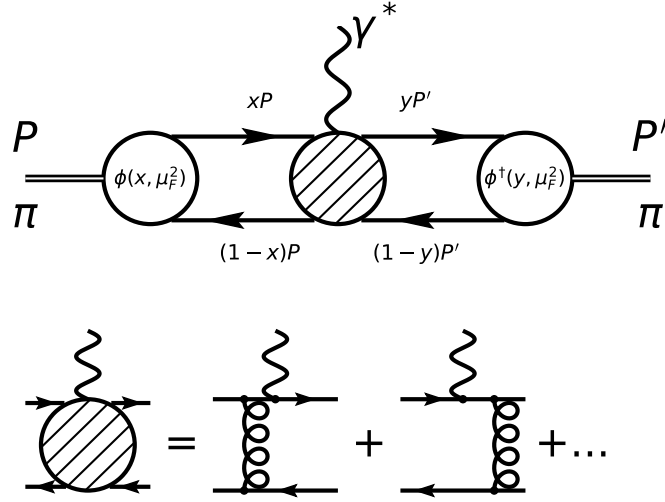
$H(p) + \gamma^*(q) \rightarrow H(p')$ , gdje  $H$  predstavlja pion, proton ili neutron, a  $\gamma^*$  virtualni foton. Radi jednostavnosti, ograničimo se za sada na pion imajući na umu da je generalizacija izravna. Faktorizacija za proces  $\pi + \gamma^* \rightarrow \pi$  po formuli (3.1) glasi

$$\mathcal{M}^\mu = \int_0^1 [dx] \int_0^1 [dy] \Phi^\dagger(y, \mu_F^2) T_H^\mu(x, y, Q^2, \mu_F^2) \Phi(x, \mu_F^2). \quad (3.3)$$

Distribucijska amplituda  $\Phi(x, \mu_F)$  se može interpretirati kao amplituda vjerojatnosti nalaženja kvarka i antikvarka s impulsima  $x p$  i  $(1-x)p$  u ulaznom pionu,  $T_H^\mu$  je amplituda raspršenja para kvark-antikvark impulsa  $x p$  i  $(1-x)p$  u kvark-antikvark impulsa  $y p'$  i  $(1-y)p'$ , a funkcija  $\Phi^\dagger(y, \mu_F)$  je amplituda vjerojatnosti da se par kvark-antikvark opet sastave u pion. Proces i faktorizacija su shematski prikazani na slici 3.1. Ako promotrimo tvrdi dio amplitude (tj.  $T_H$ ) vidimo da postoji jedna gluonska linija koja povezuje dvije kvarkovske linije. Ta linija nužno mora postojati, jer kad bi jedan kvark upio sav impuls fotona (koji je po definiciji problema velik) njega bi dosta skrenulo s putanje, a drugom kvarku se putanja ne bi uopće promjenila i onda bi se hadron raspao. Mi želimo imati isti hadron u početnom i konačnom stanju pa je zato potrebno impuls fotona prenjeti na oba kvarka da bi se i poslije sudara mogli kretati paralelno kao i prije sudara. Zato je nužan barem jedan gluon koji će omogućiti preraspodjelu impulsa. Impuls tog gluona treba biti istog reda veličine kao i impuls fotona što znači da je velik i da je upotreba perturbativnog QCD-a opravdana. Također onda znamo da se interakcija na donjem dijelu slike treba odigrati jako brzo pa je stoga i faktorizacija donekle opravdana u ovoj prilično ilustrativnoj fizikalnoj slici.

Vratimo se na trenutak na aproksimaciju valentinih kvarkova. Kao što znamo, u hadronima osim valentnih kvarkova postoje još i kvarkovi mora. Jedan od razloga zašto njih ne uzimamo u obzir je taj što je za svaki dodatni kvark koji sudjeluje u interakciji potreban još jedan gluonski propagator da preraspodijeli impuls fotona kako bi se svi kvarkovi gibali paralelno poslije sudara. No svaki dodatni gluonski propagator donosi još jedan faktor  $\alpha_s/Q^2$  i to znači da će doprinosi koji uključuju kvarkove mora biti potisnuti na visokim energijama.

Distribucijska amplituda  $\Phi(x, \mu_F^2)$  se može izraziti preko valne funkcije valentnog Fockovog stanja u "light-cone" baždarenju integriranu ("razmrljanu") preko transver-



**Slika 3.1:** Ilustracija faktorizacije na primjeru procesa  $\pi(p) + \gamma^*(q) \rightarrow \pi(p')$  (preuzeto iz [16]). Tvrdi dio amplitude  $T_H$  prikazan je osjenčanim krugom.

zalnih impulsa kvarkova  $k_{\perp j}$ ;

$$\Phi(x_j, \mu_F) \propto \int^{\mu_F} \prod_j d^2 k_{\perp j} \delta^2 \left( \sum_j k_{\perp j} \right) \psi(x_j, k_{\perp j}), \quad (3.4)$$

gdje je  $\psi(x_j, k_{\perp j})$  hadronska valna funkcija (tzv. Bethe - Salpeter funkcija). Teoretski bi se trebalo prointegrirati preko cijelog transverzalnog impulsa, međutim, integralu daleko najviše doprinose valne funkcije pri niskim transverzalnim impulsima, pa integral možemo odrezati na  $\mu_F$ . Fizikalno obrazloženje je da ukoliko su transverzalni impulsi konstituenata hadrona veliki, sve bi se raspalo i stoga je u konačnici doprinos takvih valnih funkcija zanemariv.

Pokaže se da distribucijske amplitude zadovoljavaju evolucijsku jednadžbu [15]

$$\mu_F^2 \frac{\partial \Phi(x, \mu_F^2)}{\partial \mu_F^2} = \frac{\alpha_s(\mu_F^2)}{4\pi} \int_0^1 [dy] V(x, y) \Phi(y, \mu_F^2), \quad (3.5)$$

gdje je  $V(x, y)$  evolucijski potencijal. Iako je distribucijska amplituda intrinzično neperturbativna, evolucijski potencijal  $V$  je perturbativno odrediv (u vodećem redu odredi se iz jedno-gluonskog "kernela") što znači da možemo perturbativno odrediti ovisnost distribucijske amplitude o skali  $\mu_F$ .

### 3.1 Distribucijska amplituda za pione

Detaljan izvod evolucijskog potencijala  $V(x, y)$  za pione u vodećem redu (jednoglonski "kernel") nalazi se u radu [15], a ovdje ćemo samo navesti rezultate. Dakle potencijal u vodećem redu glasi:

$$V(x, y) = 2 \left( x_1 y_2 \theta(y_1 - x_1) \left( \delta_{h_1 \bar{h}_2} + \frac{\Delta}{y_1 - x_1} \right) + (1 \leftrightarrow 2) \right) \quad (3.6)$$

$$\Delta \left( \frac{\Phi(y, \mu_F^2)}{y_1 y_2} \right) = \frac{\Phi(y, \mu_F^2)}{y_1 y_2} - \frac{\Phi(x, \mu_F^2)}{x_1 x_2},$$

gdje je  $\delta_{h_1 \bar{h}_2} = 1$  (0) kada su heliciteti konstituenata antiparalelni (paralelni). Za pione, taj faktor je jednak 1. Potencijal (3.6) se uvrsti u evolucijsku jednadžbu (3.5). Za dobiveni izraz je moguće naći analitičko rješenje što je napravljeno u radu [15] i ono glasi:

$$\phi(x, \mu_F^2) = 6x_1 x_2 \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} A_n C_n^{3/2}(x_1 - x_2) \left( \ln \frac{\mu_F^2}{\Lambda^2} \right)^{-\gamma_n}, \quad (3.7)$$

gdje suma po  $n$  ide samo po parnim  $n$ -ovima,  $\Lambda$  je parametar skale QCD-a, a varijabla  $\gamma_n$  je definirana kao

$$\gamma_n = \frac{C_F}{\beta} \left( 1 + 4 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right) \quad (3.8)$$

i zove se još anomalna dimenzija. Funkcije  $C_n^{3/2}(x_1 - x_2)$  su tzv. Gegenbauerovi polinomi, čija su svojstva opisana u Dodatku A. Koeficijenti  $A_n$  u jednadžbi (3.6) su koeficijenti u razvoju funkcije po Gegenbauerovim polinomima. Ako nam je distribucijska amplituda poznata na nekoj skali  $\mu_0$ , onda koeficijente  $A_n$  možemo odrediti iz relacija ortogonalnosti Gegenbauerovih polinoma (dodatak A):

$$6A_n \left( \ln \frac{\mu_0^2}{\Lambda^2} \right)^{-\gamma_n} = \frac{2(2n+3)}{(2+n)(1+n)} \int_{-1}^1 d(x_1 - x_2) C_n^{3/2}(x_1 - x_2) \phi(x, \mu_0^2). \quad (3.9)$$

Uz korištenje relacije

$$\frac{\ln \frac{\mu_F^2}{\Lambda^2}}{\ln \frac{\mu_0^2}{\Lambda^2}} = \frac{\alpha(\mu_0^2)}{\alpha(\mu_F^2)} \quad (3.10)$$

vidi se da konačan izraz za distribucijsku amplitudu piona u prvom redu perturbativ-



nog računa glasi

$$\phi(x, \mu_F^2) = x_1 x_2 \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} C_n^{3/2}(x_1 - x_2) \frac{2(2n+3)}{(2+n)(1+n)} \left( \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{\alpha_s(\mu_F^2)} \right)^{-\gamma_n} \cdot \int_{-1}^1 d(y_1 - y_2) C_n^{3/2}(y_1 - y_2) \phi(y, \mu_0^2). \quad (3.11)$$

Radi jednostavnosti zapisa najčešće se koriste malo drugačije definirani koeficijenti

$$a_n \equiv A_n \left( \ln \frac{\mu_F^2}{\Lambda^2} \right)^{-\gamma_n} \quad (3.12)$$

pa navedene relacije imaju oblik

$$a_n = \frac{1}{6} \frac{2(2n+3)}{(2+n)(1+n)} \int_{-1}^1 d(x_1 - x_2) C_n^{3/2}(x_1 - x_2) \phi(x, \mu_0^2) \quad (3.13)$$

te

$$\begin{aligned} \phi(x, \mu_F^2) &= 6x_1 x_2 \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} a_n(\mu_0^2) \left( \frac{\alpha(\mu_0^2)}{\alpha(\mu_F^2)} \right)^{-\gamma_n} C_n^{3/2}(x_1 - x_2) \\ &= 6x_1 x_2 \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} a_n(\mu_F^2) C_n^{3/2}(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdje se relacija među koeficijentima na različitim skalama

$$a_n(\mu_F^2) = a_n(\mu_0^2) \left( \frac{\alpha(\mu_0^2)}{\alpha(\mu_F^2)} \right)^{-\gamma_n} \quad (3.15)$$

zove još evolucijska jednadžba Gegenbauerovih koeficijenata.

Gegenbauerovi koeficijenti  $a_n$  redefinirani u jednadžbi (3.13) i njihova evolucijska jednadžba (3.15) najbolje pokazuju bitnu činjenicu - ako poznajemo distribucijsku amplitudu na nekoj skali  $\mu_0$  u principu možemo odrediti i distribucijsku amplitudu na bilo kojoj drugoj skali  $\mu_F$ . Samo treba odrediti koeficijente  $a_n(\mu_0^2)$  pomoću (3.13) i evoluirati ih preko (3.15) do skale  $\mu_F$ . Problem nastaje kada je potrebno beskonačno mnogo članova u Gegenbauerovom razvoju za egzaktno opisati poznatu distribucijsku amplitudu  $\phi(x, \mu_0^2)$ . U praktičnom računu taj razvoj trebamo negdje odrezati, pa onda evoluirati koeficijente koje smo zadržali. Tako dobivena  $\phi(x, \mu_F^2)$  neće biti egzaktna evolucija poznate  $\phi(x, \mu_0^2)$  već samo aproksimacija.

Početna distribucijska amplituda  $\phi(x, \mu_0^2)$  se inače određuje pomoću neperturbativnih metoda QCD-a, kao što su sumacijskih pravila i QCD na rešeci, ili pak koristeći

eksperimentalne podatke.

Također, postoji još jedno bitno ograničenje na distribucijske amplitude. Naime, pokazano je da leptonski raspad  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  nameće ograničenje oblika

$$\int_0^1 [dx] \Phi(x, \mu_F^2) = \frac{f_\pi}{2\sqrt{n_c}}, \quad (3.16)$$

gdje je  $n_c$  broj boja, a  $f_\pi$  konstanta koja iznosi

$$f_\pi \approx 93 \text{ MeV}. \quad (3.17)$$

Relacija (3.16) normalizira distribucijsku amplitudu na bilo kojoj skali te ona ne vrijedi samo za pozitivne pione već i za sve ostale pione zbog izospinske simetrije. Sada ćemo umjesto ukupne distribucijske amplitude  $\Phi(x, \mu_F^2)$  uvesti normaliziranu distribucijsku amplitudu koju definiramo na način da za nju vrijedi

$$\int_0^1 [dx] \phi(x, \mu_F^2) = 1 \quad (3.18)$$

i ona je povezana s  $\Phi(x, \mu_F^2)$  relacijom

$$\Phi(x, \mu_F^2) = \frac{f_\pi}{2\sqrt{n_c}} \phi(x, \mu_F^2). \quad (3.19)$$

U idućem dijelu ćemo navesti par konkretnih distribucijskih amplituda. Za početak promotrimo najjednostavniji slučaj, a to je asimptotska distribucijska amplituda kada  $\mu_F^2 \rightarrow \infty$ . U tom limesu svi članovi iščezavaju osim nultog člana što se vidi iz činjenice da vrijedi  $\gamma_0 > \gamma_n$  za  $n > 0$ , a  $\alpha_s(\mu_F \rightarrow \infty)/\alpha_s(\mu_0) \rightarrow 0$ . Nulti član onda glasi (uz uvjet (3.18) i  $C_0^{3/2}(x) = 1$ )

$$\begin{aligned} \phi_{as}(x, \mu_F^2 \rightarrow \infty) &= 3x_1x_2 \int_{-1}^1 d(y_1 - y_2) \phi(y, \mu_F^2) \\ &= 6x_1x_2 \int_0^1 [dy] \phi(y, \mu_0^2) \\ &= 6x_1x_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

i možemo primjetiti da je u limesu  $\mu_F \rightarrow \infty$  distribucijska amplituda potpuno određena uvjetom (3.18).

O obliku distribucijske amplitude na konačnim skalama se debatira dosta dugo,

još od početka 80-ih godina prošlog stoljeća. Za početak promotrimo slučaj kada na nekoj konačnoj skali  $\mu_0$  uzmemo da distribucijska amplituda ima asimptotski oblik. Onda kao što je vidljivo iz jednadžbe (3.11) ta distribucijska amplituda neće evoluirati s promjenom skale.

Jedan od najranijih netrivialnih prijedloga za distribucijsku amplitudu dali su Chernyak & Zhitnitsky [17]. Oni su predložili funkciju s dvije "grbe" na krajevima koju su dobili pomoću sumacijskih pravila. Iako je takva distribucijska amplituda dovoljno dobro opisivala eksperimentalne podatke dostupne u to vrijeme, danas postoje eksperimentalni podaci i teorijska istraživanja koja dovode u pitanje točnost izvoda takve amplitude. Mi ćemo ipak navesti kako izgleda radi primjera. Dakle CZ distribucijska amplituda dana je na skali  $\mu_0 = 0.5 \text{ GeV}$  i glasi:

$$\phi_{CZ}(x, \mu_0 = 0.5 \text{ GeV}) = 6x_1x_2 [5(x_1 - x_2)^2]. \quad (3.21)$$

Gornji izraz zapravo nije ništa drugo nego razvoj po Gegenbauerovim polinomima s koeficijentima  $a_2 = 2/3$  te  $a_n = 0$  za  $n > 2$  (i naravno  $a_0 = 1$ ). Za distribucijsku amplitudu na drugim skalama se ona samo evoluira po jednadžbi (3.11), odnosno (3.15).

U nastavku ćemo navesti još tri distribucijske amplitude koje su rezultat istraživanja tokom zadnjih par godina. Jedan rezultat dobiven je putem QCD-a na rešeci, drugi je dobiven sumacijskim pravilima, a treći disperzijskim relacijama i OPE-om.

Dakle u prvom radu [18] QCD-jem na rešeci dobiven je prvi koeficijent u Gegenbauerovom razvoju  $a_2$  na skali  $\mu_0 = 2\text{GeV}$ :

$$\begin{aligned} \phi_{LQCD}(x, \mu_0 = 2 \text{ GeV}) &= 6x_1x_2(1 + a_2C_2^{3/2}(x_1 - x_2)), \\ a_2 &= 0.101 \pm 0.023. \end{aligned} \quad (3.22)$$

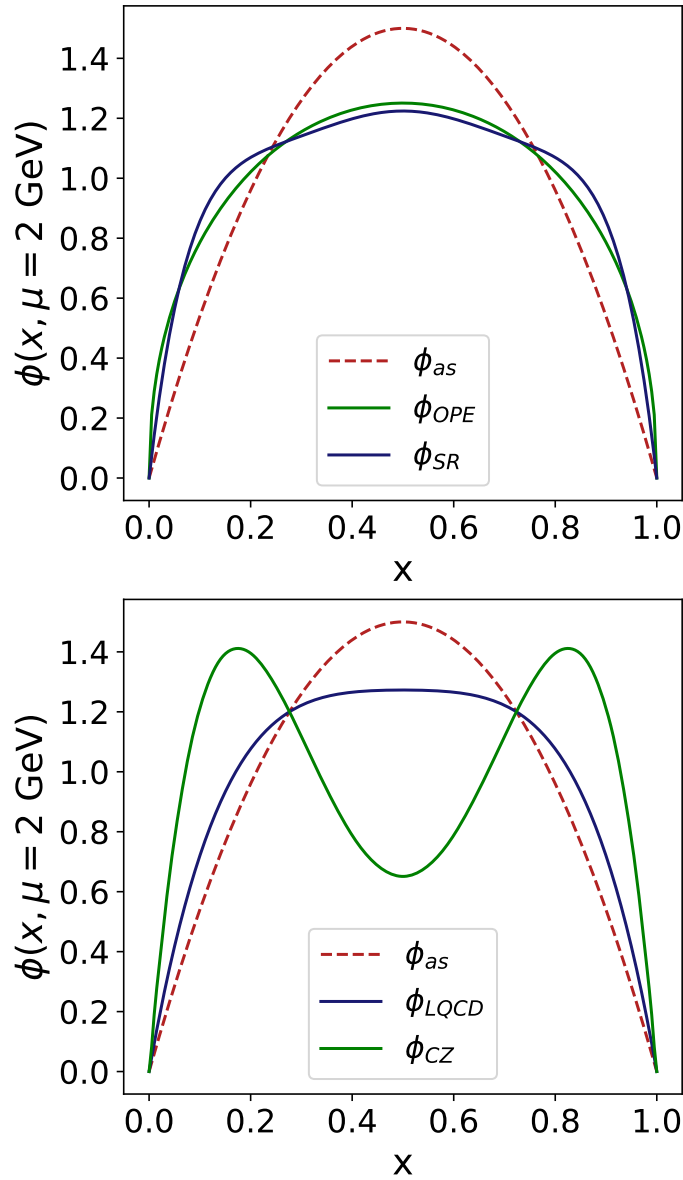
U drugom radu [19] su također dobivena samo prva dva koeficijenta, samo sad pomoću *background field theory sum rules* (BFTSR) i na skali  $\mu_0 = 1 \text{ GeV}$ :

$$\begin{aligned} \phi_{SR}(x, \mu_0 = 1 \text{ GeV}) &= 6x_1x_2(1 + a_2C_2^{3/2}(x_1 - x_2) + a_4C_4^{3/2}(x_1 - x_2)), \\ a_2 &= 0.206 \pm 0.038, \\ a_4 &= 0.047 \pm 0.011. \end{aligned} \quad (3.23)$$

U trećem radu [20] su disperzijskim relacijama dobiveno čak prvih 18 Gegenbauerovih koeficijenata te je na kraju zaključeno da se na skali  $\mu_0 = 2$  GeV distribucijska amplituda izražena pomoću reda od 18 Gegenbauerovih polinoma može dobro aproksimirati izrazom

$$\phi_{OPE}(x, \mu_0 = 2 \text{ GeV}) = \frac{\Gamma(2p + 2)}{\Gamma(p + 1)^2} x^p (1 - x)^p, \quad p \approx 0.45. \quad (3.24)$$

Sve navedene distribucijske amplitude nacrtane su na slici 3.2, a u tablici 3.1 su dani još mnogi rezultati prijašnjih radova za prva dva koeficijenta u Gegenbauerovom razvoju kao i metoda kojom su dobiveni.



**Slika 3.2:** Razne distribucijske amplitude na skali  $\mu = 2$  GeV.

| Metoda               | $\mu_F/\text{GeV}$ | $a_2$                     | $a_4$                      |
|----------------------|--------------------|---------------------------|----------------------------|
| Sumacijska pravila*  | 0.5                | 0.67                      |                            |
| BFSTR*               | 1                  | $0.206 \pm 0.038$         | $0.047 \pm 0.011$          |
| Rešetka*             | 2                  | $0.101 \pm 0.023$         |                            |
| Rešetka              | 2                  | $0.233 \pm 0.065$         |                            |
| Rešetka              | 2                  | $0.136 \pm 0.021$         |                            |
| Rešetka              | 1                  | $0.135 \pm 0.032$         |                            |
| Sumacijska pravila   | 1                  | $0.203^{+0.069}_{-0.057}$ | $-0.143^{+0.094}_{-0.087}$ |
| Sumacijska pravila   | 2                  | $0.149^{+0.052}_{-0.043}$ | $-0.096^{+0.063}_{-0.058}$ |
| LCSR prilagodba      | 1                  | $0.17 \pm 0.08$           | $0.06 \pm 0.10$            |
| LCSR prilagodba      | 2                  | 0.096                     |                            |
| LCSR prilagodba      | 2                  | 0.067                     |                            |
| LCSR prilagodba      | 1                  | 0.22-0.33                 | 0.12-0.25                  |
| Dyson-Schwinger (RL) | 2                  | 0.233                     | 0.115                      |
| Dyson-Schwinger (DB) | 2                  | 0.149                     | 0.080                      |

**Tablica 3.1:** Prva tri koeficijenta u Gegenbauerovom razvoju distribucijske amplitude za pione dobiveni različitim metodama tokom prijašnjih godina. Prva dva reda (označena zvjezdicom) su navedena već i koristimo ih u ovom radu. Ostatak tablice je preuzet iz [19] te se tamo mogu pronaći reference na ostale rezultate. Četvrta distribucijska amplituda koju smo koristili nije navedena u tablici s obzirom da nije dana pomoću razvoja po prva dva Gegenbauerova polinoma.

### 3.2 Distribucijske amplitude za nukleone

Isto kao za pione, ovdje ćemo navesti samo konačan rezultat evolucijskog potencijala  $V(x, y)$ , a detaljan izvod se nalazi u [15];

$$V(x, y) = 2x_1x_2x_3 \sum_{j \neq i} \theta(y_i - x_i) \frac{y_j}{x_j} \left( \frac{\delta_{h_j \bar{h}_j}}{x_i + x_j} + \frac{\Delta}{y_i - x_i} \right), \quad (3.25)$$

gdje su  $\Delta$  i  $\delta_{h_j \bar{h}_j}$  definirani analogno kao u izrazui 3.6

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\Phi}(y, \mu_F^2) &= \tilde{\Phi}(y, \mu_F^2) - \tilde{\Phi}(x, \mu_F^2), \\ x_1x_2x_3 \tilde{\Phi}(x, \mu_F^2) &= \Phi(x, \mu_F^2) \end{aligned} \quad (3.26)$$

te je  $\delta_{h_j \bar{h}_j} = 0(1)$  ako su heliciteti konstituenata (anti)paralelni. Sada prije nego navedemo rješenje jednadžbe (3.5) uz gornji potencijal spomenimo ograničenje na nukleonske distribucijske amplitude analogno ograničenju na pionske (3.16). Dakle

sada imamo normalizaciju nukleonske distribucijske amplitude

$$f_N = \int [dx] \Phi(x, \mu_F^2) \quad (3.27)$$

te opet definiramo distribucijsku amplitudu normiranu na 1:

$$\begin{aligned} \phi(x, \mu_F^2) &\equiv \Phi(x, \mu_F^2) / f_N, \\ 1 &= \int [dx] \phi(x, \mu_F^2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Konstanta  $f_N$  određuje valnu funkciju nukleona u ishodištu i ona je jedna od osnovnih neperturbativnih konstanti u procesima koji uključuju nukleone. Za razliku od pionske konstante (3.17), konstanta  $f_N$  ovisi o faktorizacijskoj skali;

$$f_N(\mu_1) = f_N(\mu_2) (\alpha_S(\mu_1) / \alpha_S(\mu_2))^{\frac{2}{3\beta_0}}. \quad (3.29)$$

Ona se inače određuje sumacijskim pravilima ili QCD-em na rešeci. Na primjer, u [21] su korištena sumacijska pravila da bi se na skali  $\mu_F = 1$  GeV dobio rezultat

$$f_N(\mu_F = 1 \text{ GeV}) = (5.2 \pm 0.6) \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^2 \quad (3.30)$$

dok recimo u [22] je korišten QCD na rešeci da bi se također na skali  $\mu_F = 1$  GeV dobio rezultat

$$f_N(\mu_F = 1 \text{ GeV}) = (3.234 \pm 0.063) \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^2. \quad (3.31)$$

Rješenje jednadžbe (3.5) uz potencijal (3.25) može se opet napisati kao razvoj po karakterističnim polinomima:

$$\phi(x, \mu_F^2) = 120x_1x_2x_3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu_F^2) P_n(x), \quad (3.32)$$

gdje su  $P_n(x)$  karakteristični polinomi (koji pripadaju skupini Appellovih polinoma),

a  $a_n$  konstante koje se određuju iz relacija ortogonalnosti polinoma;

$$\int [dx] W(x) P_n(x) P_m(x) = \delta_{nm},$$

$$W(x) = 120x_1x_2x_3 \quad (3.33)$$

$$\Rightarrow a_n(\mu_F^2) = \int [dx] \phi(x, \mu_F^2) P_n(x).$$

Vidimo da koeficijenti  $a_n(\mu_F^2)$  ovise o skali  $\mu_F$ . U izvodu distribucijskih amplituda se pokaže da se koeficijent  $a_n$  na jednoj energiji može prikazati preko koeficijenta na nekoj drugoj energiji pomoću relacije

$$a_n(\mu_F^2) = a_n(\mu_0^2) \left( \frac{\alpha(\mu_0^2)}{\alpha(\mu_F^2)} \right)^{-\gamma_n} \quad (3.34)$$

i to se još naziva jednađžba evolucije koeficijenata, a  $\gamma_n$  je anomalna dimenzija. Anomalnu dimenziju često radi jednostavnosti zapisa prikazujemo kao

$$\gamma_n = \left( 2c_n C_B + \frac{3}{2} C_F \right) / \beta_0, \quad (3.35)$$

gdje su  $C_B = (n_c + 1)/2n_c$  i  $C_F = (n_c^2 - 1)/2n_c$  ( $n_c$  je broj boja), a koeficijenti  $c_n$  su dani u tablici 3.2 za prvih par  $n$ -ova.

Dakle ako znamo distribucijsku amplitudu na nekoj skali  $\mu_0$  možemo preko jednađžbe (3.33) odrediti koeficijente na toj istoj skali i potom ih evoluirati do bilo kojeg drugog  $\mu_F$  putem jednađžbe (3.34) (analogno pionskom slučaju).

Detaljni izvod jednađžbe (3.32) nalazi se u radovima [15] i [21]. Za polinome  $P_n$  ne postoji kompaktno analitičko rješenje kao za Gegenbauerove polinome, već se oni određuju iz raznih rekurzivnih relacija [15], a ovdje ćemo samo navesti prvih par članova u izrazu (3.32). Dakle ako uzmemo u obzir da uvijek vrijedi  $1 = x_1 + x_2 + x_3$  i eliminiramo npr.  $x_2$  možemo polinome  $P_n$  općenito zapisati kao

$$P_n(x) = \sqrt{N^{(n)}} \sum_{i,j}^{i+j=n} b_{ij}^{(n)} x_1^i x_3^j. \quad (3.36)$$

Prvih par koeficijenata  $N^{(n)}$  i  $b_{ij}^{(n)}$  navedeni su u tablici 3.2.

Primjetimo da asimptotska distribucijska amplituda tj. amplituda u limesu kada

| $n$ | $c_n$          | $N$             | $b_{00}^{(n)}$ | $b_{10}^{(n)}$ | $b_{01}^{(n)}$ | $b_{20}^{(n)}$ | $b_{11}^{(n)}$ | $b_{02}^{(n)}$ |
|-----|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0   | $-\frac{3}{2}$ | 1               | 1              |                |                |                |                |                |
| 1   | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{21}{2}$  |                | 1              | -1             |                |                |                |
| 2   | $\frac{1}{2}$  | $\frac{7}{2}$   | -2             | 3              | 3              |                |                |                |
| 3   | $\frac{7}{6}$  | $\frac{63}{10}$ | 2              | -7             | -7             | 8              | 4              | 8              |
| 4   | $\frac{11}{6}$ | $\frac{567}{2}$ |                | 1              | -1             | $-\frac{4}{3}$ |                | $\frac{4}{3}$  |
| 5   | 2              | $\frac{81}{5}$  | 2              | -7             | -7             | $\frac{14}{3}$ | 14             | $\frac{14}{3}$ |

**Tablica 3.2:** Koeficijenti u izrazima (3.36) i (3.35) koji čine nukleonsku distribucijsku amplitudu (preuzeto iz [15]).

$\mu_F^2 \rightarrow \infty$  glasi

$$\phi_{as}(x, \mu_F^2 \rightarrow \infty) = 120x_1x_2x_3 \quad (3.37)$$

jer u tom slučaju po jednadžbi (3.34) koeficijenti  $a_n(\mu_F^2)$  trnu u 0 za  $n > 0$ .

Kao primjer distribucijske amplitude na konačnoj energiji navedimo funkciju koja je dobivena u radu [23] pomoću sumacijskih pravila. Oni su na skali  $\mu_0 = 1$  GeV izračunali prvih 5 koeficijenata (doduše korištena je drugačija normalizacija Appelovih polinoma) u razvoju (3.32) i oni glase

$$\begin{aligned}
a_1(\mu_F = 1 \text{ GeV}) &= 1.267, \\
a_2(\mu_F = 1 \text{ GeV}) &= 1.101, \\
a_3(\mu_F = 1 \text{ GeV}) &= -1.880, \\
a_4(\mu_F = 1 \text{ GeV}) &= 0.297, \\
a_5(\mu_F = 1 \text{ GeV}) &= 2.311,
\end{aligned} \quad (3.38)$$

a za konstantu  $f_N$  su dobili

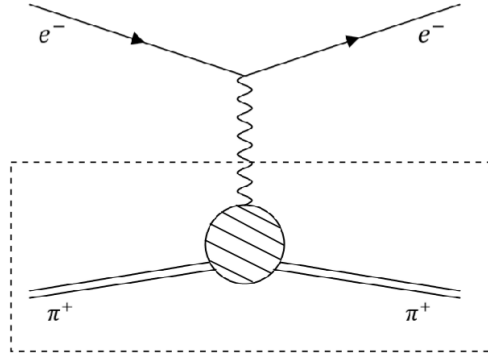
$$f_N(\mu_0 = 1 \text{ GeV}) = (5.0 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^2. \quad (3.39)$$

Primjetimo još da kao i kod piona imamo logaritamsku ovisnost koeficijenata  $a_n$  o skali i stoga će približavanje distribucijske amplitude asimptotskoj biti izrazito sporo povećavanjem faktorizacijske skale.



## 4 Račun funkcije strukture piona

Kao što je već rečeno u odjeljku 2.2 funkcije strukture u teorijskom računu se određuju iz ekskluzivnih procesa poput  $e^- \pi \rightarrow e^- \pi$ . Radi jednostavnosti, promatrati ćemo slučaj pozitivno nabijenog piona  $\pi^+ = u\bar{d}$  no račun je potpuno analogan za negativan pion te se dobivaju praktički isti rezultati. Za neutralan pion stvar je nešto kompliciranija no za njega se najčešće i ne računaju funkcije strukture u ovom smislu. Dakle promatramo proces kao na slici 4.1. S obzirom da nam je gornji dio Feynmanovog dijagrama koji uključuje samo elektronske linije dobro poznat iz kvantne elektrodinamike potrebno je izračunati samo donji, označeni dio koji uključuje pione.



**Slika 4.1:** Proces  $e^- \pi^+ \rightarrow e^- \pi^+$  od kojeg nas zanima donji dio označen crtkanom linijom.

Ukupna amplituda može se zapisati kao

$$\mathcal{M}(e^- \pi^+ \rightarrow e^- \pi^+) = \frac{-ie}{q^2} \bar{u}_e(k_2) \gamma^\mu u_e(k_1) \langle \pi(P') | J_\mu(0) | \pi(P) \rangle \quad (4.1)$$

od čega nas naravno zanima dio  $\langle \pi(P) | J_\mu(0) | \pi(P') \rangle$  koji predstavlja interakcijski vrh virtualnog fotona i piona te kao što je spomenuto u odjeljku 2.2 iz njega se može iščitati funkcija strukture:

$$\langle \pi(P') | J_\mu(0) | \pi(P) \rangle = -ie\Gamma_\mu = -ie\pi(P_\mu + P'_\mu)F(Q^2). \quad (4.2)$$

Stanja u bra i ketu predstavljaju ulazno i izlazno pionsko stanje impulsa  $P$  i  $P'$ , a  $J_\mu(0)$  predstavlja struju u vrhu (smijemo izvrjedniti u 0 jer prostorna translacija rezultira samo pomakom u fazi).

U struji  $J_\mu(0)$  mora postojati QED vrh  $-ie\bar{\psi}(0)\gamma_\mu\psi(0)$  s obzirom da se virtualni

foton mora negdje vezati. Kako se foton može vezati ili na up-kvark (u-kvark) ili down-kvark (d-kvark) funkcija  $\psi$  može predstavljati valnu funkciju up-kvarka ili down-kvarka. Ostale zanemarujemo jer uzimamo aproksimaciju valentnih kvarkova. Zasad ćemo uzeti da se veže na u-kvark imajući na umu da treba uzeti u obzir obe mogućnosti i na kraju ih zbrojiti. Stoga općenita struja (iz definicije S-matrice) glasi:

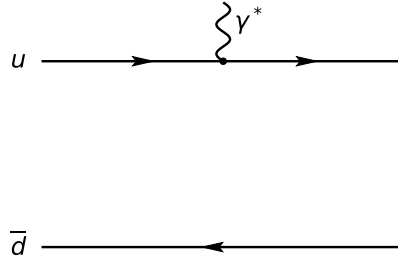
$$J_\mu(0) = (-ie_u)T \left\{ \exp \left( i \int d^4 z_1 \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{int}} \right) \exp \left( i \int d^4 z_2 \mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int}} \right) \bar{u}(0) \gamma_\mu u(0) \right\}, \quad (4.3)$$

gdje je T vremensko uređenje, a  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{int}}$  i  $\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int}}$  interakcijski dio QCD, odnosno QED lagranžijana te je  $u(0)$  spinorno polje up-kvarka (i nadalje će se istim slovom označavati spinorno polje za u-kvark i slobodno rješenje Diracove jednačbe, no iz konteksta će biti jasno o čemu je riječ). QED korekcije nas neće zanimati, stoga od razvoja eksponencijale  $\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int}}$  uzimamo samo jedinicu. Jedinica iz razvoja QCD korekcija nas također ne zanima jer je to doprinos Feynmanovog dijagrama na slici 4.2 i takvi doprinosi su jednaki nuli. Znači prvi i vodeći doprinos koji doprinosi je prvi član u razvoju eksponencijale te ćemo se na njemu i zadržati. Jednačba (4.3) se stoga može zapisati kao

$$J^\mu(0) = (ig)^2 (-ie_u) T \left\{ \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 \bar{u}_\alpha^i(z_1) \gamma_{\alpha\beta}^\rho u_\beta^j(z_1) A_\rho^a T_{ij}^a \cdot \bar{u}_\gamma^k(0) \gamma_{\gamma\delta}^\mu u_\delta^l(0) \bar{d}_\epsilon^m(z_2) \gamma_{\epsilon\eta}^\sigma d_\eta^n(z_2) A_\sigma^b T_{lm}^b \right\}, \quad (4.4)$$

gdje je  $g$  konstanta vezanja jake sile,  $A_\rho^a$  je baždarno gluonsko polje, a  $T^a$  generator grupe SU(3). Indeksi  $\rho, \mu$  i  $\sigma$  su lorentzovi indeksi,  $\alpha, \beta, \gamma$  (itd.) su spinorni indeksi, a  $i, j, k$  (itd.) su indeksi boje.

Vremenski uređen produkt ukliješten između dva stanja zapravo znači sumu po svim mogućim kontrakcijama (Wickov teorem). Kada se izraz u jednačbi (4.4) ukliješti između ulaznog i izlaznog pionskog stanja spinorno polje  $\bar{d}$  i jedno od dva spinorna polja  $u$  će se kontrahirati s ulaznim stanjem  $|\pi(P)\rangle$  te će se spinorno polje  $d$  i jedno od dva spinorna polja  $\bar{u}$  kontrahirati s izlaznim stanjem  $\langle\pi(P')|$ . Ostala polja se međusobno kontrahiraju i tvore propagatore. Izvucimo polja koja se kontrahiraju s vanjskim stanjima ispred (odnosno iza) svega, a ostatak stavimo u bispinornu strukturu  $H$ :



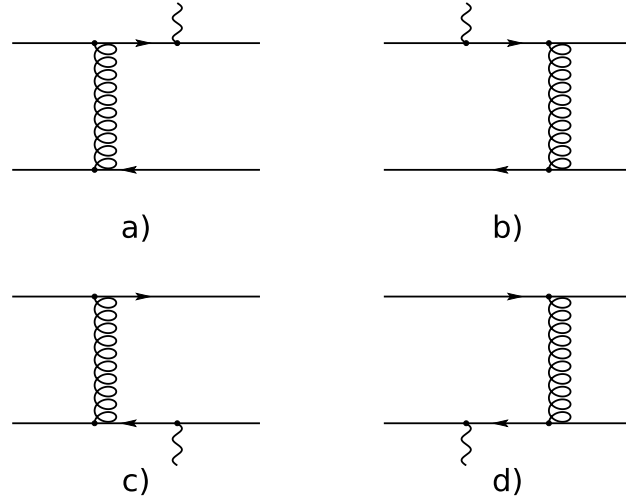
**Slika 4.2:** Nulti red računa smetnje za tvrdi dio raspršenja virtualnog fotona na pionu u slučaju kada se foton veže na u-kvark.

$$\begin{aligned}
\langle \pi(P') | J^\mu(0) | \pi(P) \rangle &= (ig)^2 (-ie_u) \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 \langle \pi(P') | d_\alpha^i(z_2) \bar{u}_\beta^j(z_1) H_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijkl} \cdot \\
&\quad \cdot u_\gamma^k(0) \bar{d}_\delta^l(z_2) | \pi(P) \rangle + \text{permutacije} \quad (4.5) \\
H_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijkl} &= (\gamma^\rho S(z_1 - 0) \gamma^\mu)_{\beta\gamma}^{km} \gamma_{\delta\alpha}^\sigma D_{\sigma\rho}^{ab}(z_1 - z_2) T_{jm}^a T_{li}^b,
\end{aligned}$$

gdje su međusobno pokontrahirana polja dala fermionski propagator  $S(z_1 - 0)$  te gluonski propagator  $D(z_1 - z_2)$ . U gornjem izrazu pod permutacije mislimo na drugu mogućnost kontrahiranja polja up-kvarkova te mogućnost da se foton veže na d-kvark (što smo dosad izostavljali radi jednostavnosti prikaza) i dvije mogućnosti kontrahiranja polja d-kvarka. U smislu Feynmanovih dijagrama te četiri permutacije su prikazane na slici 4.3 (slika pod a prikazuje prvu, eksplicitno napisanu mogućnost).

U nastavku ćemo objasniti kako se točno slobodna polja kvarkova iz lagranžijana  $u(z_1)$  i  $d(z_2)$  "kontrahiraju" s ulaznim/izlaznim stanjima piona koji su zapravo vezana, neperturbativna stanja kvarkova. U tu svrhu promotrimo opet samo prvi član u jednadžbi (4.5) i umetnimo između polja  $d_\alpha^i(z_2) \bar{u}_\beta^j(z_1)$ , odnosno  $u_\gamma^k(0) \bar{d}_\delta^l(z_2)$  i tenzora  $H$  potpun skup stanja  $\mathbf{1} = \sum_n |n\rangle \langle n|$  i zadržimo samo vakuumsko stanje s obzirom da ono daleko najviše doprinosi. Tada od jednadžbe (4.5) dobivamo

$$\begin{aligned}
\langle \pi(P') | J^\mu(0) | \pi(P) \rangle &\approx (ig)^2 (-ie_u) \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 \langle \pi(P') | d_\alpha^i(z_2) \bar{u}_\beta^j(z_1) | 0 \rangle \cdot \\
&\quad \cdot \langle 0 | H_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijkl} | 0 \rangle \langle 0 | u_\gamma^k(0) \bar{d}_\delta^l(z_2) | \pi(P) \rangle. \quad (4.6)
\end{aligned}$$



**Slika 4.3:** Feynmanovi dijagrami najnižeg reda koji doprinose amplitudi  $u\bar{d} + \gamma^* \rightarrow u\bar{d}$ .

Sad promatramo tzv. hadronski matrični element

$$\langle 0 | u_\gamma^k(0) \bar{d}_\delta^l(z_2) | \pi(P) \rangle \quad (4.7)$$

i njega zapišemo kao

$$\langle 0 | u_\gamma^k(0) \bar{d}_\delta^l(z_2) | \pi(P) \rangle = \int_0^1 [dx] \Phi(x, \mu_F^2) \langle 0 | u_\gamma^k(0) \bar{d}_\delta^l(z_2) | \{u\bar{d}\}_\pi \rangle, \quad (4.8)$$

gdje je  $\Phi(x, \mu_F^2)$  distribucijska amplituda, tj. amplituda vjerojatnosti da se u pionu nađu kolinearni kvarkovi  $u$  i  $d$  impulsa  $xP$  odnosno  $(1-x)P$  (što je već diskutirano u odjeljku 3). Stanje  $|\{u\bar{d}\}_\pi\rangle$  je stanje slobodnih kvarkova  $u$  i  $d$  navedenih impulsa s kvantnim brojevima piona. Ovdje već možemo prepoznati oblik (3.1) gdje imamo distribucijske amplitude  $\Phi(x, \mu_F^2)$  i tvrdi dio  $T_H$ :

$$T_H^{(a)}(x, y, Q^2, \mu_F^2) = (ig)^2 (-ie_u) \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 \langle \{u\bar{d}\}_\pi | d_\alpha^i(z_2) \bar{u}_\beta^j(z_1) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | H_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijkl} | 0 \rangle \langle 0 | u_\gamma^k(0) \bar{d}_\delta^l(z_2) | \{u\bar{d}\}_\pi \rangle, \quad (4.9)$$

gdje treba naglasiti da se još uvijek radi samo o prvom dijagramu sa slike 4.3. Dobi-  
veni izraz računamo dio po dio.

Znamo da je pion pseudoskalaro stanje spina nula i da je singlet u boji. Stoga strukturu  $u_\gamma^k(0) \bar{d}_\delta^l(z_2)$  raspisujemo u bazi Diracovih matrica koje razapinju prostor

matrica 4x4 (Fierzov identitet)

$$4u_\gamma^k(0)\bar{d}_\delta^l(z_2) = \bar{d}^l u^k \mathbf{1}_{\gamma\delta} + \bar{d}^l \gamma^\mu u^k (\gamma_\mu)_{\gamma\delta} - \bar{d}^l \gamma^\mu \gamma^5 u^k (\gamma_\mu \gamma_5)_{\gamma\delta} + \bar{d}^l \gamma^5 u^k (\gamma_5)_{\gamma\delta} - \bar{d}^l \sigma^{\mu\nu} u^k (\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\delta} \quad (4.10)$$

te uzimamo samo projekciju na  $\gamma_\mu \gamma_5$ . Iako se bilinearna kovarijanta  $\gamma_\mu \gamma_5$  zapravo transformira kao pseudovektor pokazat ćemo da u predfaktoru iskoči jedan  $P^\mu$  pa se onda sve skupa transformira kao pseudoskalar.

Nadalje, stanje  $|\{u\bar{d}\}_\pi\rangle$  prikažemo kao bojni i spinski singlet te ga napišemo preko operatora poništenja i stvaranja:

$$\begin{aligned} |\{u\bar{d}\}_\pi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{n_c}} \left( |u_\uparrow^i \bar{d}_\downarrow^j\rangle - |u_\downarrow^i \bar{d}_\uparrow^j\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{n_c}} \sqrt{2E_{x_1P}} \sqrt{2E_{x_2P}} (a_{x_1P}^{\uparrow,i} b_{x_2P}^{\downarrow,j} - a_{x_1P}^{\downarrow,i} b_{x_2P}^{\uparrow,j}) |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.11)$$

gdje je  $n_c$  broj boja. Potom polja  $u_\gamma^k(0)$  i  $\bar{d}_\delta^l(z_2)$  također raspisujemo preko operatora stvaranja i poništenja:

$$\begin{aligned} u_\gamma^k(0) &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_1}} \sum_{s_1} (a_{k_1}^{s_1,k} u_\gamma^{s_1}(k_1) e^{-ik_1 \cdot 0} + b_{k_1}^{\dagger s_1,k} v_\gamma^{s_1}(k_1) e^{ik_1 \cdot 0}) \\ \bar{d}_\delta^l(z_2) &= \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_2}} \sum_{s_2} (a_{k_2}^{\dagger s_2,l} \bar{u}_\delta^{s_2}(k_2) e^{ik_2 z_2} + b_{k_2}^{s_2,l} \bar{v}_\delta^{s_2}(k_2) e^{-ik_2 z_2}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

i kad se izrazi (4.11) i (4.12) ubace u jednadžbu (4.10) ostane nam samo

$$\begin{aligned} \langle 0 | u_\gamma^k(0) \bar{d}_\delta^l(z_2) | \pi(P) \rangle &= \int_0^1 [dx] \Phi(x, \mu_F^2) \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta^{kl}}{\sqrt{n_c}} (\bar{v}^\uparrow(x_2P) \gamma^\mu \gamma^5 u^\downarrow(x_1P) - \\ &\quad - \bar{v}^\downarrow(x_2P) \gamma^\mu \gamma^5 u^\uparrow(x_1P)) (\gamma_\mu \gamma_5)_{\gamma\delta} e^{-ix_2 P z_2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

pri čemu smo samo koristili kanonske antikomutacijske relacije operatora stvaranja i poništenja fermionskog polja. Nadalje, može se pokazati (npr. jednostavnim raspisom u Diracovoj bazi  $\gamma$ -matrica) u aproksimaciji bezmasenih kvarkova (što je opravdana aproksimacija na visokim energijama) da vrijedi

$$\begin{aligned} \bar{v}^\uparrow(x_2P) \gamma^\mu \gamma^5 u^\downarrow(x_1P) &= 2\sqrt{x_1 x_2} P^\mu \\ \bar{v}^\downarrow(x_2P) \gamma^\mu \gamma^5 u^\uparrow(x_1P) &= -2\sqrt{x_1 x_2} P^\mu \end{aligned} \quad (4.14)$$

i stoga na kraju za hadronski matični element vrijedi

$$\langle 0 | u_\gamma^k(0) \bar{d}_\delta^l(z_2) | \pi(P) \rangle = \int_0^1 [dx] \Phi(x, \mu_F^2) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta^{kl}}{\sqrt{n_c}} (\not{P} \gamma_5)_{\gamma\delta} e^{-ix_2 P z_2}. \quad (4.15)$$

Za drugi hadronski matični element potpuno analogno se dobiva

$$\langle \pi(P') | d_\alpha^i(z_2) \bar{u}_\beta^j(z_1) | 0 \rangle = \int_0^1 [dy] \Phi(y, \mu_F^2) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta^{ij}}{\sqrt{n_c}} (\not{P}' \gamma_5)_{\alpha\beta} e^{iy_2 P' z_2 + iy_1 P' z_1}. \quad (4.16)$$

Sada opet promotrimo dio  $\langle 0 | H_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijkl} | 0 \rangle$  skupa s  $\delta_{ij}$ ,  $\delta_{kl}$  i eksponencijalama što smo dobili od hadronskih matičnih elemenata te integracijom po  $z_1$  i  $z_2$ . Onda uz standardne definicije fermionskog i gluonskog propagatora u teoriji polja

$$\begin{aligned} S(z_1 - 0)_{km} &= \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{q}_1 + m) \delta_{km}}{q_1^2 - m^2} e^{-iq_1 z_1} \\ D_{\rho\sigma}^{ab}(z_1 - z_2) &= \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\rho\sigma} \delta^{ab}}{q_2^2} e^{-iq_2(z_1 - z_2)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

i zanemarujuću mase kvarkova ( $m = 0$ ) imamo:

$$\begin{aligned} &\int d^4 z_1 \int d^4 z_2 e^{-ix_2 P z_2} e^{-iy_2 P' z_2 - iy_1 P' z_1} \delta_{ij} \delta_{kl} H_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijkl} = \\ &= \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \exp(\dots) \delta_{ij} \delta_{kl} (\gamma^\rho \frac{\not{q}_1}{q_1^2} \gamma^\mu)_{\beta\gamma} \delta_{km} \cdot \\ &\quad \cdot \gamma_{\delta\alpha}^\sigma \frac{g_{\rho\sigma} \delta^{ab}}{q_2^2} T_{jm}^a T_{li}^b, \end{aligned} \quad (4.18)$$

gdje je

$$\exp(\dots) = e^{-ix_2 P z_2} e^{iy_2 P' z_2 + iy_1 P' z_1} e^{-iq_1 z_1} e^{-iq_2(z_1 - z_2)}. \quad (4.19)$$

U cijelom izrazu samo eksponencijala ovisi o koordinatama  $z_1$  i  $z_2$  te će nakon integracije ostati samo dvije  $\delta$ -funkcije, što u biti nije ništa drugo nego očuvanje impulsa u vrhovima. Integracija po impulsima  $q_1$  i  $q_2$  onda rezultira samo zamjenama  $q_2 \rightarrow x_2 P - y_2 P'$  te  $q_1 \rightarrow P' - x_2 P$ . Koristimo još par pojednostavljenja koja vrijede za bezmasene pione (što je također razumna aproksimacija na visokim prijenosima impulsa)

$$\begin{aligned} q_1^2 &= -2x_2(P P') = x_2 q^2 \\ q_2^2 &= -2x_2 y_2(P P') = x_2 y_2 q^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

pa za ukupan matrični element iz jednadžbe (4.6) imamo:

$$\begin{aligned} \langle \pi(P') | J^\mu(0) | \pi(P) \rangle &= -ie_u (ig)^2 \int_0^1 [dx] \int_0^1 [dy] \Phi(x, \mu_F^2) \Phi(y, \mu_F^2) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2n_c} \frac{(\not{P}' \gamma_5)_{\alpha\beta} (\gamma^\rho (\not{P}' - x_2 \not{P}) \gamma^\mu)_{\beta\gamma} (\not{P} \gamma_5)_{\gamma\delta} (\gamma_\rho)_{\delta\alpha} T_{ik}^a T_{ki}^a}{x_2^2 y_2 q^4}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Iz izraza (4.21) lako iščitamo izraz za ukupan  $T_H$ :

$$T_H^{(a)} = -ie_u (ig)^2 \frac{1}{2n_c} \frac{(\not{P}' \gamma_5)_{\alpha\beta} (\gamma^\rho (\not{P}' - x_2 \not{P}) \gamma^\mu)_{\beta\gamma} (\not{P} \gamma_5)_{\gamma\delta} (\gamma_\rho)_{\delta\alpha} T_{ik}^a T_{ki}^a}{x_2^2 y_2 q^4}. \quad (4.22)$$

U gornjim izrazima možemo prepoznati trag T-matrice;

$$T_{ik}^a T_{ki}^a = \text{Tr}\{T^a T^a\} = 4 \quad (4.23)$$

te također trag  $\gamma$ -matrica

$$\begin{aligned} (\not{P}' \gamma_5)_{\alpha\beta} (\gamma^\rho (\not{P}' - x_2 \not{P}) \gamma^\mu)_{\beta\gamma} (\not{P} \gamma_5)_{\gamma\delta} (\gamma_\rho)_{\delta\alpha} &= \text{Tr}\left\{ \not{P}' \gamma_5 \gamma^\rho (\not{P}' - x_2 \not{P}) \gamma^\mu \not{P} \gamma_5 \gamma_\rho \right\} \\ &= -2 \text{Tr}\left\{ \not{P}' (\not{P}' - x_2 \not{P}) \gamma^\mu \not{P} \right\} \\ &= 16x_2 (PP') P^\mu = -8x_2 q^2 P^\mu. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sve skupa se sada može zapisati kao

$$\langle \pi(P') | J^\mu(0) | \pi(P) \rangle = \int_0^1 [dx] \int_0^1 [dy] \Phi(x, \mu_F^2) \Phi(y, \mu_F^2) \frac{64\pi\alpha_s (-ie_u)}{3Q^2} \frac{P^\mu}{x_2 y_2}. \quad (4.25)$$

Međutim treba primjetiti da nismo još uzeli u obzir ostale permutacije. Situacija je potpuno analogna u svim ostalim slučajevima. Za početak, promotrimo slučaj kada se virtualni foton opet veže na u-kvark, ali su polja u-kvarkova drugačije pokontrahirana, tj. slučaj na slici 4.3b. Možemo vidjeti da će situacija biti potpuno ista do na zamjene  $P \rightarrow P'$  te  $x_2 \rightarrow x_1$  (što zapravo ne radi nikakvu razliku s obzirom na to da je integracija simetrična na zamjenu  $x_2 \rightarrow x_1$ ). Za slučaj kada se foton veže na d-kvark očito je situacija potpuno identična samo se na kraju zamjeni  $e_u$  u  $e_d$ . Kad se sva četiri doprinosa zbroje imamo na kraju

$$\langle \pi(P') | J^\mu(0) | \pi(P) \rangle = \frac{64\pi\alpha_s}{3Q^2} (-ie_\pi) (P^\mu + P'^\mu) \left( \int_0^1 [dx] \frac{\Phi(x, \mu_F^2)}{x_1 x_2} \right)^2 \quad (4.26)$$

iz čega se lako očitava funkcija strukture:

$$F(Q^2) = \frac{64\pi\alpha_s}{3Q^2} \left( \int_0^1 [dx] \frac{\Phi(x, \mu_F^2)}{x_1 x_2} \right)^2. \quad (4.27)$$

Sada sve ovisi o tome koju distribucijsku amplitudu ćemo uzeti. Najjednostavniji slučaj imamo kada odaberemo asimptotsku distribucijsku amplitudu u  $\mu_F^2 \rightarrow \infty$  koju smo već spominjali u odjeljku 3 (jednadžba (3.20) i (3.19)) i ona glasi

$$\Phi_{as}(x, \mu_F^2 \rightarrow \infty) = \frac{\sqrt{3}}{2} f_\pi x_1 x_2. \quad (4.28)$$

Kada se takva distribucijska amplituda uvrsti u jednadžbu (4.28) dobije se posebno jednostavan izraz:

$$F(Q^2) = \frac{16\pi\alpha_s}{Q^2} f_\pi^2. \quad (4.29)$$

Pogledajmo sada kako izgledaju funkcije strukture kada se u jednadžbu (4.27) uvrste netrivialne distribucijske amplitude na konačnim skalama. U odjeljku 3 spominjali smo 4 različite distribucijske amplitude - CZ distribucijsku amplitudu (3.21), amplitudu dobivenu QCD-em na rešeci (3.22), ona dobivena sumacijskim pravilima (3.23) i ona dobivena disperzijskim relacijama (3.24). Sada samo treba uvrstiti te amplitude u jednadžbu (4.27) i numerički prointegrirati. Međutim, stvar i nije baš tako jednostavna. Iz izraza (4.27) se može vidjeti da konačan rezultat ovisi i o faktoriizacijskoj skali  $\mu_F$  i, što je još bitnije, o renormalizacijskoj skali  $\mu_R$  (o renormalizacijskoj skali ovisi konstanta vezanja  $\alpha_s(\mu_R)$  što smo dosad prešutno podrazumijevali).

U teoriji, konačan rezultat naravno ne bi trebao ovisiti niti o jednoj od te dvije skale jer to nisu fizikalni parametri nego smo ih "umjetno" uveli samo kako bi se riješili kolinearnih i UV divergencija. To znači da kad bi uzeli u obzir sve redove računa smetnje naša fizikalna veličina ne bi ovisila o tim skalama. Dakako, nemoguće je izračunati cijelu sumu svih korekcija (ne samo zbog praktične nemogućnosti računanja viših redova nego i zbog toga što suma korekcija počinje divergirati u jednom trenu) pa se trebamo zadržati na nekom konačnom broju korekcija i zato nužno preostaje nekakva ovisnost o skalama  $\mu_F$  i  $\mu_R$ . Naše nepoznavanje točne vrijednosti tih skala će nužno na kraju voditi na neodređenost rezultata. Što više članova u perturbativnom razvoju uzmemo to će nam na kraju rješenje biti stabilnije u smislu da će sve manje ovisiti o tim skalama. U našem računu smo se zadržali na vodećem redu



te imamo problem da rješenje jako ovisi o obe skale (tj. ovisi o njima najviše što je moguće). Vidimo da u konačnici funkcija strukture monotono ovisi o obe skale i njihovim mijenjanjem možemo postići da nam rješenje poprimi praktički bilo koju vrijednost. Na primjer, na slici 4.4 je prikazano kako funkcija strukture izračunata s CZ distribucijskom amplitudom varira ako se uvrste različite renormalizacijske skale.

Postavlja se pitanje koju vrijednost skala  $\mu_F$  i  $\mu_R$  uzeti, no ne postoji jedinstven odgovor na to. Intuitivno rješenje koje nam je ujedno i najjednostavnije za računanje je uzeti jedinu fizikalnu skalu koju imamo i reći da vrijedi  $\mu_F = \mu_R = Q$ . Međutim, fizikalna slika sugerira drugačije - kako se prijenos impulsa  $Q^2$  raspodijeli među kvarkovima, prave virtualnosti propagatora su niže od  $Q^2$  pa bi stoga trebalo razmotriti nižu faktorizacijsku i renormalizacijsku skalu. Što se tiče faktorizacijske skale, pokaže se da je u našem slučaju  $\mu_F^2 = Q^2$  ipak dosta dobar izbor [24]. Sa druge strane, postoje razne preskripcije za određivanje renormalizacijske skale. Jedna od njih je tzv. BLM skala obrađena u dodatku C. BLM preskripcija sugerira da bi renormalizacijska skala trebala biti jednaka (jednadžba (C.10))

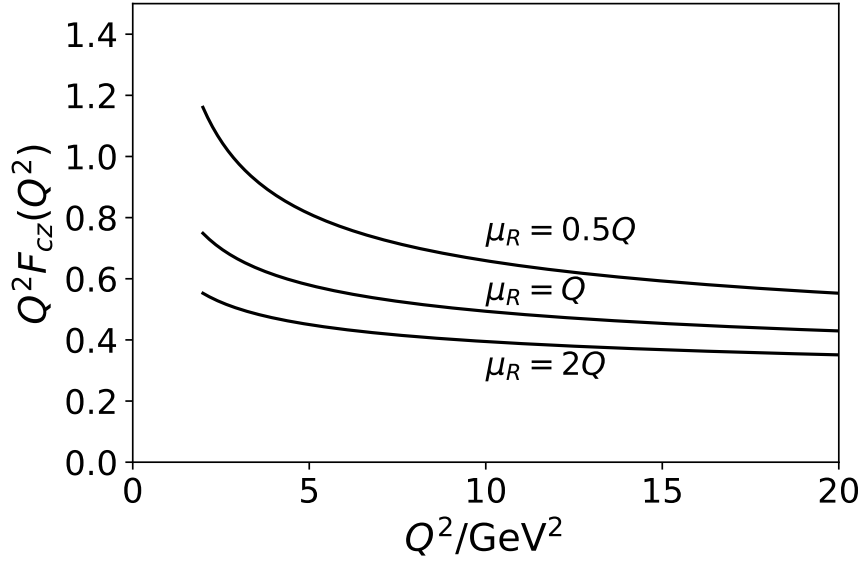
$$\mu_R^2 = e^{-5/3}(1-x)(1-y)Q^2. \quad (4.30)$$

Međutim, postoji problem s BLM skalom. Za primjer uzmimo najgrublju aproksimaciju  $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 1/2$  i ona nam daje skalu reda

$$\mu_R^2 \approx \frac{Q^2}{20}. \quad (4.31)$$

Ako uzmemo u obzir da su eksperimentalno dostupne energije  $Q^2 < 10 \text{ GeV}^2$  onda vidimo da su BLM skale jako male. Toliko male da nema smisla računati kliznu konstantu vezanja na njima jer nam klizna konstanta vezanja na tim skalama nije poznata. Iz tog razloga je BLM skala u ovom slučaju neupotrebljiva. Rješenje je ili gledati funkcije strukture na višim energijama (što je prilično očito) ili je moguće koristiti drugačiju renormalizacijsku shemu koja će nam dati drugačiju BLM skalu. U svakom slučaju, u nastavku će se ipak koristiti najjednostavniji izbor  $\mu_R^2 = Q^2$  da se stekne dojam o redu veličine s obzirom da ionako ne očekujemo vrlo precizne rezultate.

U nastavku ćemo usporediti naše izračunate elektromagnetske funkcije strukture s eksperimentalnim podacima. Dakle iz formule (4.27) je izračunato pet različitih

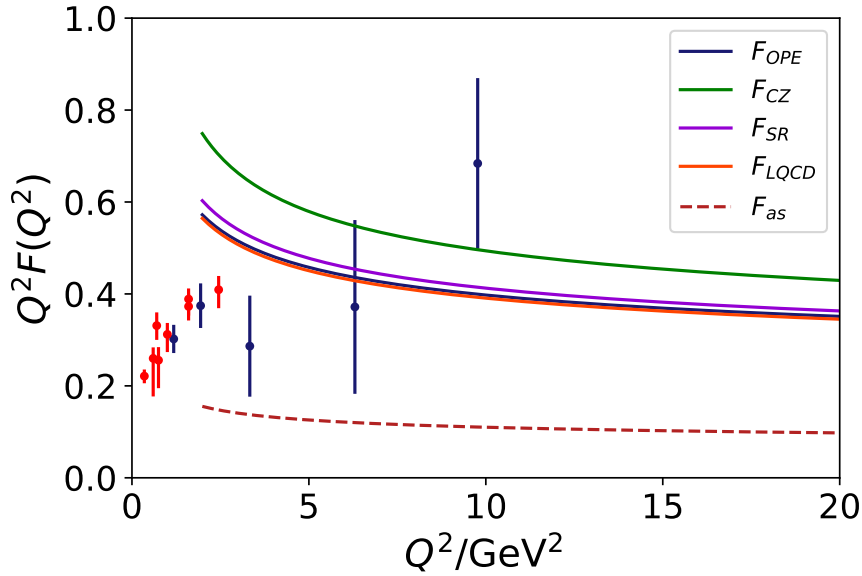


**Slika 4.4:** Funkcija strukture piona izračunata pomoću CZ distribucijske amplitude u ovisnosti o prijenosu impulsa za tri različita izbora renormalizacijske skale - linija na vrhu odgovara skali  $\mu_R = 0.5Q$ , linija u sredini  $\mu_R = Q$ , a na dnu je  $\mu_R = 2Q$ .

funkcija strukture u ovisnosti o prijenosu impulsa  $Q^2$  koristeći različite distribucijske amplitude - asimptotsku, CZ, dobivenu QCD-jem na rešeci, sumacijskim pravilima te dobivenu OPE-om. Kao što je već navedeno, korišten je najjednostavniji izbor faktorizacijske i renormaizacijske skale  $\mu_F = \mu_R = Q$ . Dobivene funkcije prikazane su na slici 4.5. Na toj slici su također prikazane i eksperimentalne vrijednosti funkcija strukture dobivene u Jefferson Laboratory-u [25] te na Cornellu [26].

Vidimo da dvije slične distribucijske amplitude  $\phi_{sum}$  i  $\phi_{ope}$  daju slične funkcije strukture i da poprimaju niže vrijednosti u odnosu na funkciju strukture dobivenu s  $\phi_{cz}$  za koju smo spomenuli da nije najtočnija. Također se vidi da se sve funkcije strukture jako sporo približavaju asimptotskoj zbog logaritamske ovisnosti o skali, tj. energiji što je i očekivano.

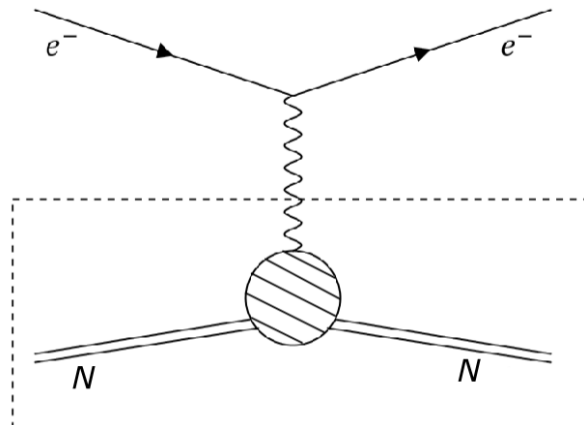
Uspoređivanjem s eksperimentalnim podacima vidimo da ih dobivena rješenja jako slabo opisuju. Prva stvar koju treba primjetiti je da su eksperimentalni podaci dostupni samo na nižim energijama, a i oni na višim ( $Q^2 > 5 \text{ GeV}^2$ ) su upitne točnosti. Na tim energijama nije opravdano primjenjivati perturbativni QCD bez uvođenja nekih dodatnih neperturbativnih efekata, a kamoli zadržati se samo na vodećem redu kao što smo se mi zadržali. Također, s obzirom da su eksperimentalni podaci dostupni na ovako malim energijama, teško da bi ih bolje opisali uvođenjem viših korekcija u perturbativnom računu.



**Slika 4.5:** Elektromagnetske funkcije strukture u ovisnosti o prijenosu impulsa za 5 različitih distribucijskih amplituda te njihove eksperimentalne vrijednosti - plavom su prikazane vrijednosti dobivene na Sveučilištu Cornell [26], a crvenom vrijednosti dobivene u Jefferson Laboratoriju [25].

## 5 Račun funkcije strukture nukleona

Račun funkcije strukture nukleona je analogan računu funkcije strukture piona. Sada promatramo ekskluzivni proces  $e^- N \rightarrow e^- N$  gdje  $N$  označava nukleon, tj. proton ili neutron. Taj proces prikazan je na slici 5.1. Ako aproksimiramo da su mase protona i neutrona jednake  $m_p \approx m_n$  (s obzirom da se razlikuju za manje od 1% to je dosta dobra aproksimacija, pogotovo na visokim energijama), oni će biti povezani izospinskom simetrijom te će svi računi biti potpuno isti i za proton i za neutron.



**Slika 5.1:** Proces  $e^- N \rightarrow e^- N$  od kojeg nam je za određivanje funkcije strukture bitan samo donji dio

Potpuno identično kao i kod piona (jednadžba (4.1)), amplituda raspršenja se može faktorizirati na elektronsku elektromagnetnu struju, fotonski propagator i nukleonsku elektromagnetnu struju:

$$\mathcal{M}(e^- N \rightarrow e^- N) = \frac{-ie}{q^2} \bar{u}_e(k_2) \gamma^\mu u_e(k_1) \langle N(P') | J_\mu(0) | N(P) \rangle. \quad (5.1)$$

Od tog izraza čega nas zanima samo dio  $\langle N(P') | J_\mu(0) | N(P) \rangle$  jer ćemo iz njega odrediti funkciju strukture, kao što smo napravili i za pion. Već smo u poglavlju 2.2 rekli da je općeniti interakcijski vrh dan izrazom

$$\begin{aligned} \langle N(P') | J_\mu(0) | N(P) \rangle &= -ie \bar{N}(P') \Gamma^\mu N(P) \\ &= -ie \bar{N}(P') \left( \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \right) N(P), \end{aligned} \quad (5.2)$$

gdje je  $N$  nukleonski spinor.

Može se argumentirati [27] da Diracova i Paulijeva funkcija strukture na visokim energijama opadaju kao potencije

$$\begin{aligned} F_1 &\sim \frac{1}{q^4} \\ F_2 &\sim \frac{1}{q^6} \end{aligned} \quad (5.3)$$

i vidimo da kako Paulijev član ima dodatan  $1/q^2$  bit će potisnut naspram Diracovog člana. Zato ćemo nadalje Paulijev član zanemarivati i također možemo koristiti aproksimaciju za magnetsku funkciju strukture

$$G_E(q^2) \approx G_M(q^2) \approx F_1(q^2). \quad (5.4)$$

Sada možemo krenuti s računom matričnog elementa  $\langle N(P') | J_\mu(0) | N(P) \rangle$ . Opet raspišemo struju  $J_\mu$  po definiciji (kao i u jednadžbi (4.3))

$$J_\mu(0) = \text{T} \left\{ \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{int}} \right) \exp \left( i \int d^4y \mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int}} \right) (-ie_q) \bar{q}(0) \gamma_\mu q(0) \right\}, \quad (5.5)$$

gdje  $q$  može biti up ili down kvark, ovisno na koji se od tri kvarka veže virtualni foton. Opet od razvoja eksponencijale  $\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int}}$  uzimamo samo jedinicu jer nas QED korekcije ne zanimaju. Kao i u slučaju piona, nulti red razvoja eksponencijale  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{int}}$  (tj. samo

jedinica) ne doprinosi jer se vanjska stanja kolinearnih kvarkova kontrahiraju jedna s drugim i daju delta funkciju. To odgovara fizikalnoj slici da se impuls virtualnog fotona treba raspodjeliti na sva tri kvarka jer se inače hadron raspadne. Dakle, preostat će oni redovi u razvoju koji će rezultirati s dva gluonska propagatora koji spajaju sve tri kvarkovske linije. Sada radi jednostavnosti promatramo samo proton (za neutron je račun potpuno analogan). Ako je ukupan red razvoja po kvarkovima neparan (npr. prvi red po u-kvarku i nulti red po d-kvarku, ili drugi red po u-kvarku i prvi red po d-kvarku...) onda on ne doprinosi jer ostane jedno polje  $A^\mu$  koje se nema s čime pokontrahirati. Prvi red po u-kvarku i prvi red u d-kvarku otpada jer nam daje samo jedan gluonski propagator (isto tako i drugi red po u-kvarku i nulti red po d-kvarku ne doprinosi). Dakle najniži red koji doprinosi uključuje tri slučaja; treći red po u-kvarku i prvi po d-kvarku, drugi red po oba kvarka te prvi red po oba kvarka i prvi red po gluonskom dijelu lagranžijana.

U svakom slučaju, iz cijelog izraza izvlačimo tri kvarkovska fermionska polja (dva polja u-kvarka i jedno d-kvarka) iza svega i tri konjugirana polja ispred svega kako bi se kontrahirali s izlaznim/ulaznim stanjima. Imamo

$$\langle N(P') | J_\mu(0) | N(P) \rangle = \langle N(P') | \bar{u}_\alpha^i \bar{u}_\beta^j \bar{d}_\gamma^k H_{ijklmn}^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} u_\delta^l u_\epsilon^m d_\zeta^n | N(P) \rangle, \quad (5.6)$$

gdje smo izostavili integrale po koordinatama radi jednostavnosti zapisa. Oni na kraju služe tome da u svakom vrhu budu očuvani impuls i energija, pa ih od sada "pamtimo" kao i razne eksponencijalne funkcije koje imaju istu svrhu. U faktoru  $H_{ijklmn}^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  su sadržane sve kombinacije kontrakcija koje ostanu nakon primjene Wickovog teorema na vremenski uređen produkt (tj. vrhove i propagatore). Između faktora  $H$  i fermionskih polja ubacujemo potpun skup stanja te se zadržavamo samo na osnovnom stanju jer pretpostavljamo da nam vakuumsko stanje daje najveći doprinos;

$$\langle N(P) | J_\mu(0) | N(P') \rangle \approx \langle N(P') | \bar{u}_\alpha^i \bar{u}_\beta^j \bar{d}_\gamma^k | 0 \rangle \langle 0 | H_{ijklmn}^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} | 0 \rangle \langle 0 | u_\delta^l u_\epsilon^m d_\zeta^n | N(P) \rangle. \quad (5.7)$$

Član  $\langle 0 | H_{ijklmn}^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} | 0 \rangle$  možemo reprezentirati preko Feynmanovih dijagrama. Sve skupa postoji 96 dijagrama koji doprinose našem računu. No prije nego krenemo na

računanje dijagrama promotrimo prvo hadronski matrični element

$$\langle 0 | u_\delta^l u_\epsilon^m d_\zeta^n | N(P) \rangle \quad (5.8)$$

jer će se pokazati da zbog raznih simetrija hadronskog matričnog elementa će biti dovoljno izračunati samo 21 dijagram. Dakle, analogno pionskom hadronskom matričnom elementu krećemo od relacije

$$\begin{aligned} |N_p^\dagger(P)\rangle = \int [dx] \left\{ \left( \frac{1}{2}(V(x) - A(x)) \right) |u^\dagger(x_1)u^\dagger(x_2)d^\dagger(x_3)\rangle + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{2}(V(x) + A(x)) \right) |u^\dagger(x_1)u^\dagger(x_2)d^\dagger(x_3)\rangle - T(x) |u^\dagger(x_1)u^\dagger(x_2)d^\dagger(x_3)\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

gdje su  $V$ ,  $A$  i  $T$  tri distribucijske amplitude koje predstavljaju raspodjelu impulsa među konstituentima. Sada slično kao što smo pokazali da za pionski hadronski matrični element (4.7) vrijedi relacija (4.16) može se pokazati da za nukleonski (tj. protonski u ovom konkretnom slučaju) hadronski matrični element vrijedi [21]

$$\begin{aligned} \langle 0 | u_\delta^l(z_1)u_\epsilon^m(z_2)d_\zeta^n(z_3) | N(P) \rangle = \frac{\epsilon^{lmn} f_N}{6} \frac{f_N}{4} \int [dx] e^{-ix_1z_1P - ix_2z_2P - ix_3z_3P} \cdot \\ \cdot ((\not{P}C)_{\delta\epsilon}(\gamma_5 N)_\zeta V(x) + (\not{P}\gamma_5 C)_{\delta\epsilon} N_\zeta A(x) - \\ - (\sigma_{\mu\nu} P^\nu C)_{\delta\epsilon}(\gamma^\mu \gamma_5 N)_\zeta T(x)), \end{aligned} \quad (5.10)$$

gdje je  $C$  operator nabojne konjugacije u bispinornom prostoru, a  $N$  je nukleonski (protonski) spinor. Također imamo ispred svega jednu eksponencijalnu funkciju za koju je već spomenuto da na kraju zajedno s ostalim integralima po koordinatnom i impulsnom prostoru u izrazu za amplitudu doprinosi samo očuvanju impulsa pa ju nadalje nećemo pisati. Drugi hadronski matrični element  $\langle N(P') | \bar{u}_\alpha^i \bar{u}_\beta^j \bar{d}_\gamma^k | 0 \rangle$  se lako može dobiti iz (5.10) ubacivanjem  $\gamma_0$  matrica, kompleksnim konjugiranjem i transponiranjem. Dobije se sličan izraz;

$$\begin{aligned} \langle N(P') | \bar{u}_\alpha^i \bar{u}_\beta^j \bar{d}_\gamma^k | 0 \rangle = \frac{\epsilon^{ijk} f_N}{6} \frac{f_N}{4} \int [dy] (-V^*(y)(C\not{P}')_{\alpha\beta}(\bar{N}\gamma_5)_\gamma + \\ + A^*(y)(C\gamma_5\not{P}')_{\alpha\beta}\bar{N}_\gamma - T^*(y)(CP'^\nu\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}(\bar{N}\gamma_5\gamma^\mu)_\gamma). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Vidimo da u jednadžbama (5.9) i (5.10) imamo tri različite distribucijske amplitude -  $V$ ,  $A$  i  $T$ , dok smo u odjeljku 3.2 spominjali samo jednu -  $\phi$ . Stvar je u tome da

distribucijske amplitude  $V$ ,  $A$  i  $T$ . Uočimo prvo da nam nukleonsko stanje treba biti simetrično na zamjenu dva u-kvarka i zato treba vrijediti

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3) &= -A(x_2, x_1, x_3), \\ V(x_1, x_2, x_3) &= V(x_2, x_1, x_3), \\ T(x_1, x_2, x_3) &= T(x_2, x_1, x_3). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Također, iz zahtjeva da nam ukupan izospin treba biti  $1/2$  dobijemo relaciju (detaљno objašnjeno u dodatku B)

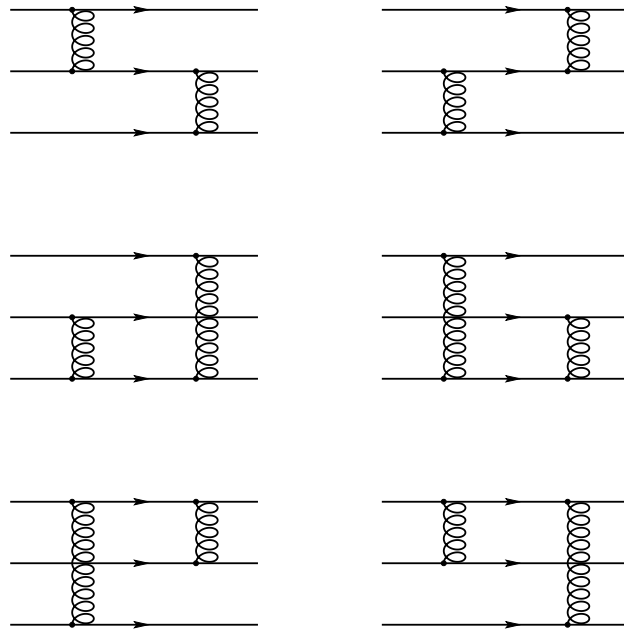
$$2T(x_1, x_2, x_3) = (V - A)(x_1, x_3, x_2) + (V - A)(x_2, x_3, x_1) \tag{5.13}$$

i na kraju onda vidimo da zaista imamo samo jednu nezavisnu distribucijsku amplitudu. Ako na kraju definiramo

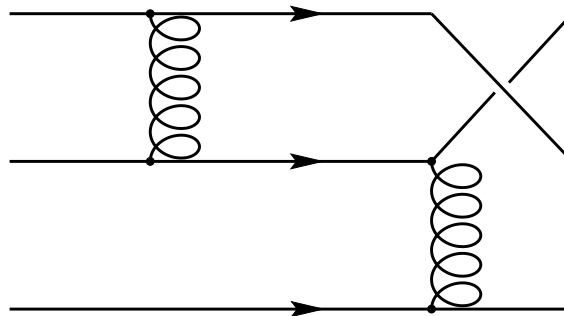
$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (V - A)(x_1, x_2, x_3) \tag{5.14}$$

može se pokazati da takva definicija odgovara definiciji iz odjeljka 3.2 i stoga znamo njen oblik (3.32).

Sada kada smo naveli kako izgleda hadronski matrični element i veze između distribucijskih amplituda, ostaje još samo izračunati tvrdi dio procesa  $\langle 0 | H_{ijklmn}^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} | 0 \rangle$  putem Feynmanovih dijagrama. Kao što smo već spomenuli, tražimo dijagrame kojima su sve tri kvarkovske linije povezane putem dva gluonska propagatora. Na slici 5.2 nalaze se 6 osnovnih Feynmanovih dijagrama koji prikazuju sve moguće načine spajanja kvarkovskih linija gluonskim propagatorima (osim onih što uključuju trogluonski vrh) i za svaki od tih dijagrama postoji još jedan kojemu su dvije izlazne kvarkovske linije zamijenjene (primjer na slici 5.3). Dakle postoji sve skupa 12 osnovnih dijagrama. Na svakom od 12 osnovnih dijagrama postoji još 7 načina na koji se može spojiti fotonski vrh (slika 5.4). Osim nabrojanih dijagrama postoji još 12 dijagrama koji uključuju jedan trogluonski vrh te su oni prikazani na slici 5.5 (tj. samo je polovica prikazana, druga polovica se dobije zamjenom izlaznih kvarkovskih linija). Na kraju vidimo da postoji sve skupa 96 mogućih dijagrama koji doprinose procesu. Može se pokazati da od tih 96 dijagrama je dovoljno izračunati samo njih 21, što zbog simetrija, a što zbog toga što za neke odmah možemo vidjeti da su 0.



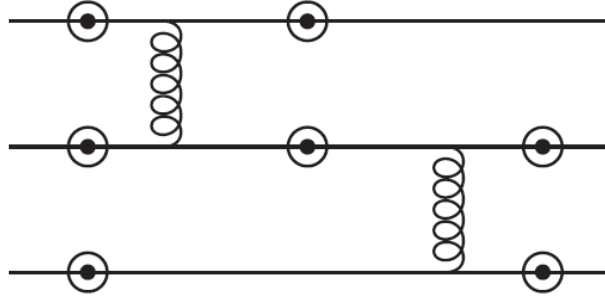
**Slika 5.2:** Šest osnovnih Feynmanovih dijagrama.



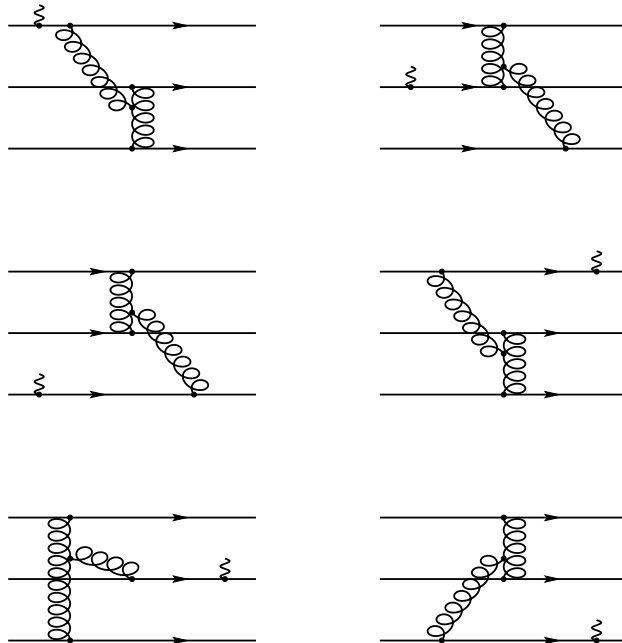
**Slika 5.3:** Primjer jednog od dijagrama sa slike 5.2 kojem su izlazne kvarkovske linije zamijenjene.

Pokažimo prvo da su svi dijagrami koji sadrže trogluonski vrh jednaki 0. Oni će iščezavati radi faktora boje. Vidimo da ćemo u svakom od 12 dijagrama prikazanih





**Slika 5.4:** Moguća spajanja fotonskog vrha na jedan od osnovnih dijagrama.



**Slika 5.5:** Na slici je prikazana polovica svih dijagrama koji sadržavaju trogluonski vrh (drugoj polovici su samo zamijenjene izlazne linije u kvarkova).

na slici 5.5 imati idući faktor boje (uz korištenje bojnih indeksa iz jednačbe (5.7)):

$$T_{il}^a T_{jm}^b T_{kn}^c f^{abc}, \quad (5.15)$$

gdje matrice  $T$  potječu od gluonskih vrhova na kvarkovskim linijama, a strukturna konstanta  $f^{abc}$  od trogluonskog vrha. Zajedno s Levi-Civita simbolima iz hadronskih

matričnih elemenata (5.10) i (5.11) ukupan faktor boje glasi

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} T_{il}^a T_{jm}^b T_{kn}^c f^{abc}. \quad (5.16)$$

Gornja struktura (koja je ista za svih 12 dijagrama) iznosi točno 0. To se vidi ako uzmemo u obzir da su svi indeksi "slijepi" indeksi pa možemo napraviti zamjene  $i \leftrightarrow j$ ,  $l \leftrightarrow m$  i  $a \leftrightarrow b$  pa potom koristimo činjenicu da su objekti  $\epsilon^{ijk}$  i  $f^{abc}$  potpuno antisimetrični;

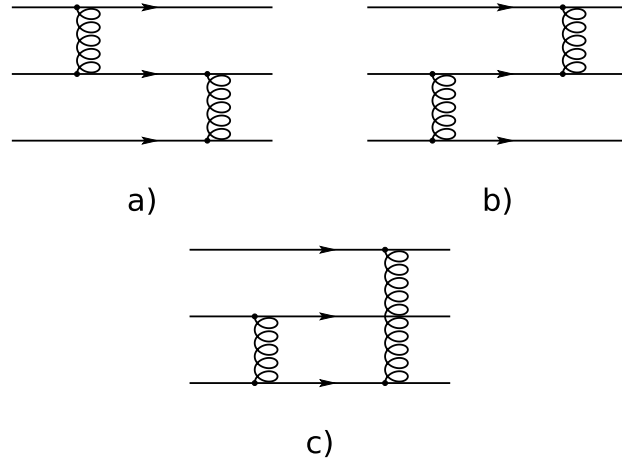
$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} T_{il}^a T_{jm}^b T_{kn}^c f^{abc} &= \epsilon^{jik} \epsilon^{mln} T_{jm}^b T_{il}^a T_{kn}^c f^{bac} \\ &= (-\epsilon^{ijk})(-\epsilon^{lmn}) T_{il}^a T_{jm}^b T_{kn}^c (-f^{abc}) \\ &= -\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} T_{il}^a T_{jm}^b T_{kn}^c f^{abc} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Preostalih 84 dijagrama može se svesti na 21 preko simetrija povezanih s zamjenama u kvarkova. Stvar je u tome da prilikom računanja hadronskog matričnog elementa [21] su već uračunate zamjene dva izlazna kvarka i također su već uračunate zamjene dvije cijele linije u-kvarka. Tj. u hadronskom matričnom elementu je već uračunato da za svaki dijagram sa slike 5.6 postoje još tri dijagrama koja se mogu dobiti ili zamjenom dva izlazna u-kvarka ili ukupnim zamjenama cijelih kvarkovskih linija. Zato prilikom računa tvrdog dijela amplitude  $\langle 0 | H_{ijklmn}^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} | 0 \rangle$  treba uzimati u obzir samo tri dijagrama sa slike 5.6 i sva moguća umetanja fotonskog vrha, što daje 21 dijagram.

Sada možemo zapravo kreniti računati doprinose tvrdom dijelu amplitude putem Feynmanovih dijagrama no prvo ćemo navesti neka općenita pojednostavljena u računanju koja se odnose na bojnu i Diracovu strukturu. Za primjer ćemo uzeti dijagram na slici 5.7 da bi nam bilo lakše pratiti. Krenimo od faktora boje kojeg ćemo označavati s  $CF$ . Na dijagramu 5.7 (a i svim ostalim) imamo četiri gluonska vrha od kojih svaki pridonosi jednom  $T$  matricom. Kada se uzmu u obzir svi kroneckerovi simboli koji dolaze od propagatora imamo

$$CF = T_{il}^a (T^a T^b)_{jm} T_{kn}^b \quad (5.18)$$

i kada se uzmu u obzir još i Levi-Civita simboli iz hadronskih matričnih elemenata



**Slika 5.6:** Tri osnovna dijagrama koja je zapravo potrebno računati nakon uzimanja u obzir uračunate simetrije u hadronskom matricnom elementu.

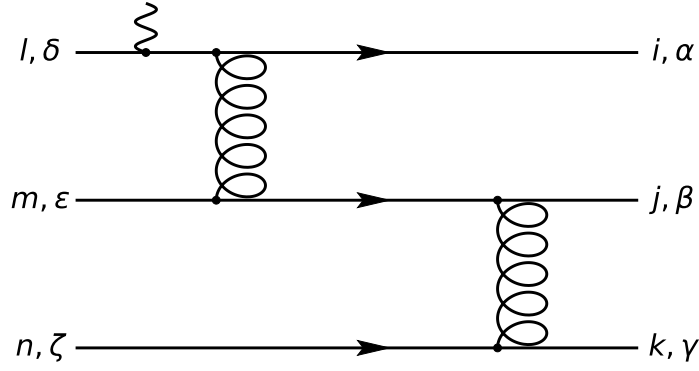
slijedi da je ukupni faktor boje ( $CF_{uk}$ ) jednak

$$CF_{uk} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} \cdot CF = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} T_{il}^a (T^a T^b)_{jm} T_{kn}^b. \quad (5.19)$$

Vidimo da se faktor boje svih ostalih dijagrama razlikuje samo do na zamjenu indekasa. Kako su to slijepi indeksi, u  $CF$  ih možemo zamjeniti tako da odgovaraju onima u (5.18). Time smo zamjenili i indekse u Levi-Civita simbolima u (5.19). Potom samo permutiramo indekse u Levi-Civita simbolima da bi dobili izraz koji smo već dobili specifično za dijagram na slici 5.7. Teoretski, postoji mogućnost da je permutacija neparna pa da dobijemo još jedan dodatan predznak, no može se pokazati da ako je na jednom Levi-Civita simbolu permutacija neparna onda je i na drugom, pa nema promjene ukupnog predznaka. Zaključak je da jednadžba (5.19) ne vrijedi samo za specifičan dijagram na slici 5.7, već i za sve ostale. Za (5.19) se može pokazati da iznosi [28]

$$CS_{uk} = \frac{1}{4}(1 - n_c)(2 - n_c)(n_c + 1)^2 \left( n_c - \frac{n_c^2 - 1}{n_c} \right) = \frac{8}{3}. \quad (5.20)$$

Promotrimo sada Diracovu strukturu. Radi jednostavnosti zapisa označimo kombinaciju gama matrica koje potječu od prve (najgornje) linije, što od vrhova, a što od fermionskih propagatora, s  $\Gamma_{\alpha\delta}^1$ , gama matrice koje potječu od druge linije s



**Slika 5.7:** Feynmanov dijagram na primjeru kojeg pokazujemo račun.

$\Gamma_{\beta\epsilon}^2$ , a od treće linije  $\Gamma_{\gamma\zeta}^3$ . Tako se Diracova struktura tvrdog dijela može zapisati kao  $H_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} = \Gamma_{\alpha\delta}^1 \Gamma_{\beta\epsilon}^2 \Gamma_{\gamma\zeta}^3$ . Ukupan matrični element (5.7) će imati devet članova (jer se množe hadronski matrični elementi, a svaki ima tri člana). Označimo s  $\mathcal{A}$  distribucijsku amplitudu  $A$  skupa s Diracovom strukturom koja u hadronskom matričnom elementu stoji uz nju, s  $\mathcal{V}$  označimo  $V$  i ono što stoji uz njega te ono što stoji uz  $T$  s  $\mathcal{T}$  ( $\mathcal{A} = (\not{P}\gamma_5 C)_{\delta\epsilon} N_{\zeta} A(x)$ , itd.).

Pokažimo kako izgleda faktor  $\mathcal{A}^*(y)H\mathcal{A}(x)$  u općenitom slučaju. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\alpha\beta\gamma}^*(y)H_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}\mathcal{A}_{\delta\epsilon\zeta}(x) &= A^*(y)(C\gamma_5\not{P}')_{\alpha\beta}\bar{N}_{\gamma}\Gamma_{\alpha\delta}^1\Gamma_{\beta\epsilon}^2\Gamma_{\gamma\zeta}^3(\not{P}\gamma_5 C)_{\delta\epsilon}N_{\zeta}A(x) \\
&= A^*(y)A(x)\cdot\bar{N}(P')\Gamma^3N(P)\left(-\Gamma_{\alpha\delta}^1(\not{P}\gamma_5 C)_{\delta\epsilon}((\Gamma^2)^T)_{\epsilon\beta}(C\gamma_5\not{P}')_{\alpha\beta}\right) \\
&= -A^*(y)A(x)\cdot\bar{N}(P')\Gamma^3N(P)\text{Tr}\left(\Gamma^1\not{P}\gamma_5 C(\Gamma^2)^T C\gamma_5\not{P}'\right) \\
&= -A^*(y)A(x)\cdot\bar{N}(P')\Gamma^3N(P)\text{Tr}\left(\Gamma^1\not{P}\bar{\Gamma}^2\not{P}'\right)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

što se lako pokaže ako se koriste iduće relacije

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\beta\epsilon}^2 &= (\Gamma^2)_{\epsilon\beta}^T, \\
(C\gamma_5\not{P}')^T &= (C\gamma_5\not{P}'), \\
\gamma_5 C(\Gamma^2)^T C\gamma_5 &= \bar{\Gamma}^2,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

gdje smo koristili oznaku  $\bar{\Gamma}^2$  što je zapravo matrica  $\Gamma^2$  samo s obrnutim redoslijedom gama matrica (npr. ako je  $\Gamma^2 = \gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}$  onda je  $\bar{\Gamma}^2 = \gamma_{\rho}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}$ ). Također smo koristili činjenicu da je broj gama matrica u  $\Gamma^i$  uvijek neparan. Slično se pokaže za sve ostale

kombinacije:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^*(y)H\mathcal{V}(x) &= -V^*(y)V(x) \cdot \bar{N}(P')\Gamma^3 N(P) \text{Tr} \left( \Gamma^1 \not{P} \bar{\Gamma}^2 \not{P}' \right), \\
\mathcal{A}^*(y)H\mathcal{V}(x) &= -A^*(y)V(x) \cdot \bar{N}(P')(\Gamma^3 \gamma_5) N(P) \text{Tr} \left( \Gamma^1 \not{P} \gamma_5 \bar{\Gamma}^2 \not{P}' \right), \\
\mathcal{T}^*(y)H\mathcal{T}(x) &= T^*(y)T(x) \cdot P^\mu P^\nu \bar{N}(P')(\gamma^\rho \Gamma^1 \gamma^\eta) N(P) \text{Tr} \left( \Gamma^3 \sigma_{\eta\mu} \bar{\Gamma}^2 \sigma_{\rho\nu} \right)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

te su miješani članovi  $\mathcal{T}$  s  $\mathcal{A}$  ili  $\mathcal{V}$  jednaki 0. Naime, pokaže se da se u tim slučajevima pod tragom uvijek nađe neparan broj gama matrica i jedna  $\gamma_5$  matrica, a takav trag je uvijek 0.

Kada se ti svi dijagrami izračunaju (npr. pomoću Mathematica paketa FeynCalc) na kraju se dobije rezultat

$$Q^4 F(Q^2) = \frac{(4\pi\alpha_S)^2}{54} |f_N|^2 \int [dx] \int [dy] \left( \sum_{i=1}^7 (e_i T_i(x, y) + e_i \dot{T}_i(x, y)) + \sum_{i=8}^{14} e_i T_i(x, y) \right), \tag{5.24}$$

gdje je s  $e_i$  označen naboj kvarka na koji se veže foton u pripadnom dijagramu. Konstante koje ne ovise o udjelima impulsa  $x$  i  $y$  smo izvukli ispred integrala, a ono što ovisi o njima smo stavili u funkcije  $T_i$ . S  $T_i$  za  $i = 1 - 7$  su označeni doprinosi koji potječu od dijagrama na slici 5.6a (umetanjem fotonskog vrha na 7 mjesta), s  $\dot{T}_i$  su označeni dijagrami koji potječu od dijagrama na slici 5.6b, a s  $T_i$  za  $i = 8 - 14$  su označeni doprinosi koji potječu od dijagrama na slici 5.6c. Doprinosi  $\dot{T}_i$  su označeni posebno jer se ispostavlja da su oni jednaki doprinosima  $T_i$  pa se sve zajedno konačan rezultat može pisati kao

$$Q^4 F(Q^2) = \frac{(4\pi\alpha_S)^2}{54} |f_N|^2 \int [dx] \int [dy] \left( 2 \sum_{i=1}^7 e_i T_i(x, y) + \sum_{i=8}^{14} e_i T_i(x, y) \right). \tag{5.25}$$

Stoga imamo samo 14 različitih funkcija  $T_i$  te su one prikazane u tablicama 5.1 i 5.2 kao i dijagrami od kojih su potekle. Te funkcije su izražene preko distribucijskih amplituda  $T(x)$  i  $\phi(x)$ , međutim vezu između njih znamo i već smo je naveli u jednadžbi (5.13). Dakle sada nam samo ostaje pitanje što uzeti za distribucijsku amplitudu  $\phi(x)$ .

Krenimo od najjednostavnijeg slučaja, a to je asimptotska distribucijska amplituda (3.37)

$$\phi_{as}(x) = 120x_1x_2x_3, \tag{5.26}$$

| $i$ | Dijagram | $T_i(x, y)$  |
|-----|----------|--|
| 1   |          | $\frac{\phi(x)\phi(y)+4T(x)T(y)}{(1-x_1)^2(1-y_1)^2x_3y_3}$                                  |
| 2   |          | 0  |
| 3   |          | $\frac{-4T(x)T(y)}{(1-x_2)(1-y_1)x_1x_3y_1y_3}$  |
| 4   |          | $\frac{\phi(x)\phi(y)}{(1-x_3)(1-y_1)x_1x_3y_1y_3}$  |
| 5   |          | $\frac{-\phi(x)\phi(y)}{(1-x_3)(1-y_1)x_2x_3y_2y_3}$   |
| 6   |          | 0  |
| 7   |          | $\left(\frac{1}{x_1y_1} + \frac{1}{x_2y_2}\right) \frac{\phi(x)\phi(y)}{(1-x_3)^2(1-y_3)^2}$ |

**Tablica 5.1:** Prva polovica doprinosećih dijagrama te njihovi doprinosi u jednađbi (5.25).

| $i$ | Dijagram | $T_i(x, y)$   |
|-----|----------|---|
| 8   |          | 0   |
| 9   |          | $\frac{\phi(x)\phi(y)+4T(x)T(y)}{(1-x_1)^2(1-y_1)^2x_2y_2}$ |
| 10  |          | $\frac{\phi(x)\phi(y)+4T(x)T(y)}{(1-x_1)^2(1-y_1)^2x_2y_2}$ |
| 11  |          | 0   |
| 12  |          | $\frac{-\phi(x)\phi(y)}{(1-x_3)(1-y_1)x_1x_2y_1y_2}$        |
| 13  |          | $\frac{4T(x)T(y)}{(1-x_1)(1-y_2)x_1x_2y_1y_2}$              |
| 14  |          | $\frac{-\phi(x)\phi(y)}{(1-x_1)(1-y_3)x_1x_2y_1y_2}$        |

**Tablica 5.2:** Druga polovica doprinosećih dijagrama te njihovi doprinosi u jednađbi (5.25).

koja onda povlači

$$\begin{aligned} T(x) &= V(x) = \phi_{as}(x), \\ A(x) &= 0. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Kada se uvrsti asimptotska distribucijska amplituda u jednadžbu za funkciju strukture (5.25) dobiveni izraz treba samo prointegrirati. Izrazi koji se dobivaju pod integralom nisu komplicirani i moguće ih je integrirati i analitički i numerički. Za numeričku integraciju je prvo potrebno riješiti se delta funkcija iz  $[dx]$  i  $[dy]$ . U tu svrhu izaberemo jedan udio impulsa kojeg ćemo prikazati preko druga dva, npr.  $x_3 = 1 - x_2 - x_1$ , a granice integracije promijenimo na način

$$\begin{aligned} \int [dx] &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3) f(x_1, x_2, x_3) \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 f(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Kada se to prointegrira dobije se jednostavan rezultat za asimptotske funkcije strukture:

$$\begin{aligned} \text{Neutron: } F_1^n(Q^2) &= \frac{100}{3} \frac{(4\pi\alpha_s(\mu_R^2))^2}{Q^4} |f_N(\mu_F^2)|^2, \\ \text{Proton: } F_1^p(Q^2) &= 0, \end{aligned} \tag{5.29}$$

gdje smo se podsjetili da konstanta vezanja  $\alpha_s$  ovisi o renormalizacijskoj skali  $\mu_R$ , a faktor  $f_N$  ovisi o faktorizacijskoj skali  $\mu_F$ . Ako se uzme da je distribucijska amplituda  $\phi = \phi_{as}$  na nekoj konačnoj skali onda ona neće ovisiti o faktorizacijskoj skali (isto kao i kod piona) već će sva ovisnost o  $\mu_F$  biti sadržana u faktoru  $f_N$ . Uglavnom, sada se ponovo postavlja pitanje koje skale točno uzeti.

Postoji argument [21] da faktorizacijska i renormalizacijska skala iznose oko 5-10% ukupnog iznosa prijenosa impulsa  $Q^2$  jer se ukupan impuls rasporedi među konstituentima pa su virtualnosti propagatora dosta manje od njega. Naravno možemo i ovdje primjeniti postupak određivanja BLM skale kao i kod piona. Međutim, ovdje ćemo ipak samo uzeti najjednostavniji izbor, a to je  $\mu_R^2 = \mu_F^2 = Q^2$  jer na eksperimentalno dostupnim energijama 10% od  $Q^2$  znači skale manje od 1 GeV<sup>2</sup>, a na tim skalama je  $\alpha_s(\mu_R^2)$  jako velik.

Promotrimo sada još funkcije strukture ako uzmemo drugu, složeniju distribucijsku amplitudu dobivenu QCD-em na rešeci (3.38). Koeficijenti zadani u (3.38) se evoluiraju do tražene skale  $\mu_F^2 = Q^2$ , te se dobivena distribucijska amplituda uvrsti u iz-



raz za funkciju strukture (5.25). Za slučaj kada se pri razvoju distribucijske amplitude po Appelovim polinomima zadržimo na prvih 5 članova postoji analitičko rješenje integrala u izrazu 5.25 [29] (numerička integracija nije provedena jer četverostruki integrali zahtijevaju veliku komputacijsku snagu koja nije bila dostupna).

Za ovu distribucijsku amplitudu je bitno znati koju skalu uzeti jer ona za razliku od asimptotske ima netrivialnu ovisnost o skali pa, kao što je već spomenuto, uzimamo najjednostavniji izbor  $\mu_F^2 = \mu_R^2 = Q^2$ . Funkcije strukture dobivene tom distribucijskom amplitudom su prikazane na slikama 5.8, 5.9 i 5.10.

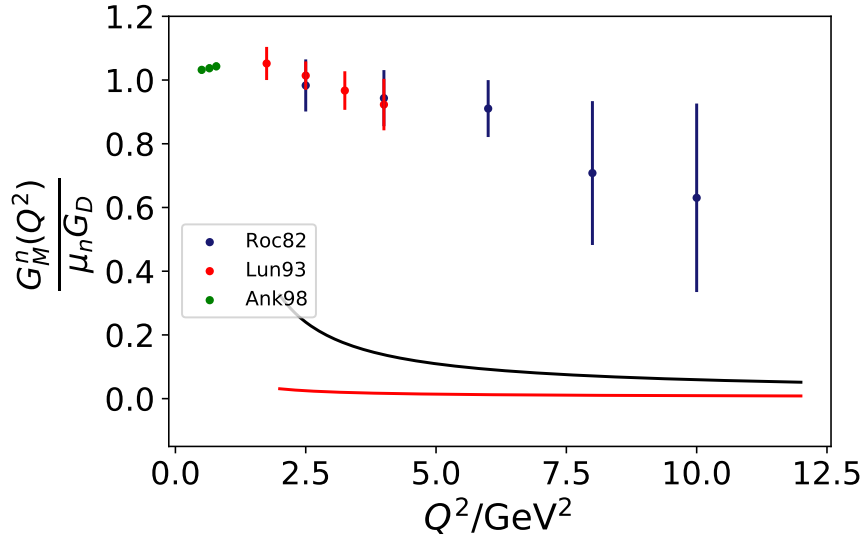
Kao što je već spomenuto u odjeljku 2.2 u eksperimentima se obično ne mjere Pauli-Diracove funkcije strukture koje smo upravo izračunali, već Sachsove funkcije strukture  $G_M$  i  $G_E$ . Relacija između tih različito definiranih funkcija strukture je jednostavna (2.25), pogotovo u našem slučaju visokih energija gdje smo argumentirali da vrijedi

$$G_M \approx G_E \approx F_1. \quad (5.30)$$

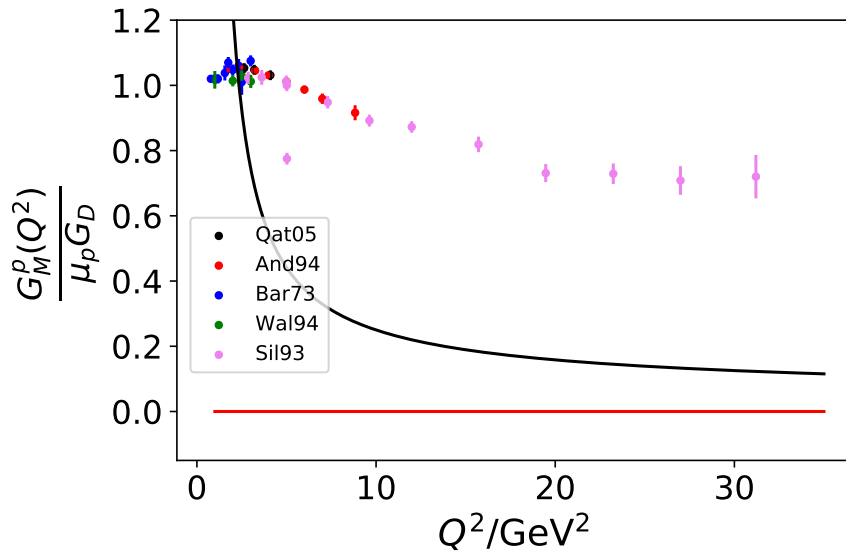
Na slikama 5.8, 5.9 i 5.10 su prikazane izračunate funkcije strukture za proton i neutron. Također su prikazani eksperimentalni rezultati dobiveni Rosebluthovom metodom. Rezultati za električnu funkciju strukture neutrona nisu prikazani s obzirom na to da postoje mjerenja samo na energijama manjim od 1-2 GeV, a na tako niskim energijama smo sigurni da nema baš smisla uspoređivati rezultate dobivene perturbativnim QCD-em s eksperimentom. Treba još napomenuti da su na slikama zapravo prikazane veličine  $G_M/\mu G_D$  te  $G_E/G_D$ .  $G_D$  nije ništa drugo nego empirijska dipolna funkcija strukture koja služi samo radi normalizacije i iznosi  $G_D = (1 + Q^2/0.71)^{-2}$ . Veličina  $\mu$  je magnetski moment neutrona  $\mu_n = -1.913$  odnosno magnetski moment protona  $\mu_p = 2.79$ .

Sa slika 5.8, 5.9 i 5.10 vidimo da postoji neslaganje između teorijskih rezultata i eksperimenta. Iako je opravdanost upotrebe perturbativnog QCD-a na dostupnim energijama upitna, postoji par stvari koje možemo napraviti da bi poboljšali rezultat.

Prvo, možemo koristiti drugačiju faktorizacijsku i renormalizacijsku skalu. Već je spomenuto da bi zapravo te dvije skale trebale biti i do 10 puta niže od korištenog  $\mu_R^2 = \mu_F^2 = Q^2$ , a točniji iznos bi se mogao dobiti BLM postupkom. Snižavanje tih dviju skala bi pomaklo teorijske funkcije strukture gore, prema eksperimentalnim vrijednostima.



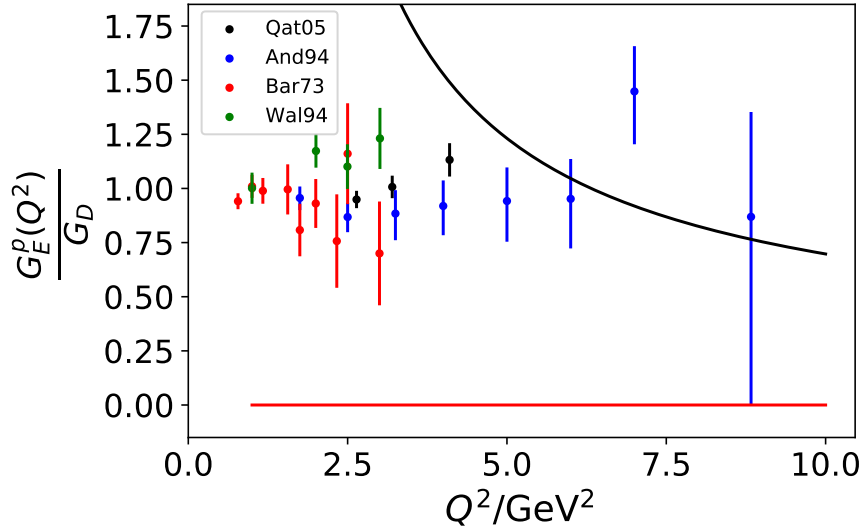
**Slika 5.8:** Magnetska Sachsova funkcija strukture neutrona  $G_M^n$ . Teorijski rezultati su naznačeni punim crtama (crvena -  $G_M^n$  dobiven asimptotskom distribucijskom amplitudom, crna -  $G_M^n$  dobiven distribucijskom amplitudom 3.38), a eksperimentalni rezultati su naznačeni točkama (Roc82 - [30], Lun93 - [31], And98 - [32]).



**Slika 5.9:** Magnetska Sachsova funkcija strukture protona  $G_M^p$ . Teorijski rezultati su naznačeni punim crtama (crvena -  $G_M^p$  dobiven asimptotskom distribucijskom amplitudom, crna -  $G_M^p$  dobiven distribucijskom amplitudom 3.38), a eksperimentalni rezultati su naznačeni točkama (Qat05 - [33], And94 - [34], Bar73 - [35], Wal94 - [36], Sil93 - [37]).

Druga stvar je da možemo koristiti novije i preciznije distribucijske amplitude izračunate sumacijskim pravilima ili QCD-em na rešeci. Ovdje je korištena distribucijska amplituda zadana u (3.38) čisto u svrhu primjera, no postoje i novija istraživanja na tu temu (npr. u [38] su navedene neke novije distribucijske amplitude).

Zadnja stvar koja bi se mogla napraviti, koja je i najočitija, je jednostavno uzeti u



**Slika 5.10:** Električna Sachsova funkcija strukture protona  $G_E^p$ . Teorijski rezultati su naznačeni punim crtama (crvena -  $G_E^p$  dobiven asimptotskom distribucijskom amplitudom, crna -  $G_E^p$  dobiven distribucijskom amplitudom 3.38), a eksperimentalni rezultati su naznačeni točkama (Qat05 - [33], And94 - [34], Bar73 - [35], Wal94 - [36]).

obzir više redove računa smetnje.

Nakon što poduzmemo sve navedene korake svejedno ne očekujemo velika poklapanja jer su dostupne energije još uvijek premale. Ono što očekujemo je da će dobiveni rezultati barem malo bolje opisivati podatke te onda iz veličine odstupanja procijeniti skalu na kojoj nastupa perturbativni režim i na kojoj bi moglo doći do poklapanja.

## 6 Zaključak

U diplomskom radu su opisane osnovne ideje i metode računanja elektromagnetskih funkcija strukture u perturbativnom QCD-u. Konkretno, izračunate su funkcije strukture za pione i nukleone u vodećem redu računa smetnje nakon primjene faktorizacije (odvajanja perturbativnog i neperturbativnog dijela amplitude raspršenja). U odjeljku 2 objašnjeni su temeljni principi faktorizacije te je uveden pojam distribucijskih amplituda. U odjeljcima 4 i 5 proveden je konkretan račun funkcija strukture piona, odnosno nukleona. Provedena je faktorizacija - neperturbativni doprinosi su odvojeni u distribucijske amplitude, a perturbativni dio je određen u vodećem redu računa smetnje i na kraju je diskutiran odabir faktorizacijske i renormalizacijske skale. Korišteno je više distribucijskih amplituda dobivenih različitim neperturbativnim metodama te su rezultati uspoređeni. Također su svi rezultati uspoređeni s eksperimentalnim podacima. Na kraju se vidi da dobiveni teorijski rezultati ne opisuju dobro eksperimentalne podatke. Takav ishod je i očekivan iz više razloga. Prvi i najbitniji je to što su eksperimentalni podaci dostupni uglavnom na nižim energijama na kojima je upitna uporaba faktorizacije. Drugi razlog je to što je konstanta jakog vezanja na dostupnim energijama je još uvijek dosta velika i stoga se nije dovoljno zadržati samo na vodećem redu računa smetnje. Treći razlog je velika ovisnost rezultata o renormalizacijskoj i faktorizacijskoj skali u nižim redovima računa smetnje, a u radu su uzete samo grube aproksimacije za te skale. Preciznije određivanje spomenutih skala izlazi iz okvira ovog diplomskog rada.

Kako bi kvalitetno mogli usporediti teorijska predviđanja i eksperimentalne podatke potrebni su eksperimentalni podaci na višim energijama od trenutno dostupnih. Znamo da formalizam promatran u radu sigurno vrijedi na dovoljno visokim energijama. Sada je s jedne strane potrebno pronaći skalu na kojoj formalizam počinje vrijediti, a s druge strane se postavlja pitanje koji su daljnji koraci u određivanju funkcija strukture unutar promatranog formalizma.

Što se tiče unaprijeđivanja računa, možemo bolje odrediti faktorizacijsku i renormalizacijsku skalu, potom možemo koristiti novije i preciznije određene distribucijske amplitude te još zadnja stvar je jednostavno uzeti u obzir više redove računa smetnje. Nakon tih koraka možemo usporediti dobivene rezultate s eksperimentalnim podacima za Sachsovu magnetnu funkciju strukture protona  $G_M^p$  (veličina koju imamo na

najvećoj skali) i iz (ne)slaganja mogli bi procijeniti skalnu na kojoj bi mogao nastupiti perturbativni režim. Na prvi pogled možemo vidjeti da eksperimentalni rezultati za  $G_M^p$  prate sličan oblik kao dobivena funkcija strukture, samo pomaknut sve skupa prema višim vrijednostima pa nam to daje blagu indikaciju da energije na kojima nastupa perturbativni režim nisu tako daleko od trenutno dostupnih.

Sve u svemu, u ovom radu je dan tek uvod u račune funkcija strukture pomoću perturbativnog QCD-a. Sa jedne strane može se nastaviti u smjeru perturbativnog računa i nadati se da će u bliskoj budućnosti biti dostupni eksperimentalni podaci u perturbativnom režimu i da ćemo ih tada zapravo moći opisati metodama predstavljenim u diplomskom radu. Sa druge strane, čak i ako ne mislimo upotrebljavati perturbativni QCD, predstavljene ideje čine bazu za račune u režimu srednjih energija u kojima se uključuju neperturbativni doprinosi putem sumacijskih pravila.

# Dodaci

## Dodatak A Gegenbauerovi polinomi

Općeniti Gegenbauerov polinom  $C_n^{(\alpha)}(z)$  se definira kao partikularno rješenje diferencijalne jednačine

$$(1 - z^2)y'' - (2\alpha + 1)xy' + n(n + 2\alpha)y = 0, \quad (\text{A.1})$$

a mogu se definirati i pomoću funkcije izvodnice

$$\frac{1}{(1 - 2zt + t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(z)t^n \quad (\text{A.2})$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} 0 &\leq |z| < 1 \\ |t| &\leq 1 \\ \alpha &> 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Gegenbauerovi polinomi zadovoljavaju iduću rekurzivsku relaciju:

$$\begin{aligned} C_0^{(\alpha)}(z) &= 1 \\ C_1^{(\alpha)}(z) &= 2\alpha z \\ C_{n+1}^{(\alpha)}(z) &= \frac{1}{n+1} \left( 2z(n+\alpha)C_n^{(\alpha)}(z) - (n-1+2\alpha)C_{n-1}^{(\alpha)}(z) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ako imamo fiksni  $\alpha$ , polinomi su ortogonalni na intervalu  $[-1,1]$  s obzirom na težinsku funkciju

$$w(z) = (1 - z^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \quad (\text{A.5})$$

i normalizirani su s

$$\int_{-1}^1 C_n^{(\alpha)}(z)C_m^{(\alpha)}(z)(1 - z^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} dz = \delta_{nm} \frac{\pi 2^{1-2\alpha} \Gamma(n + 2\alpha)}{n!(n + \alpha) |\Gamma(\alpha)|^2}. \quad (\text{A.6})$$

Nadalje ćemo promatrati svojstva Gegenbauerovih polinoma u slučaju  $\alpha = 3/2$  s obzirom da se oni pojavljuju u razvoju pionske distribucijske amplitude i samo nas oni zanimaju u ovom radu. Ako uvrstimo  $\alpha = 3/2$  onda relacija ortogonalnosti

postaje

$$\int_{-1}^1 C_n^{(3/2)}(z)C_m^{(3/2)}(z)(1-z^2)dz = \delta_{nm} \frac{2(n+2)(n+1)}{(2n+3)} \quad (\text{A.7})$$

i kada napravimo zamjenu varijable  $z \rightarrow 2x - 1$  da bi imali istu stvar kao kod distribucijskih amplituda imamo

$$\int_0^1 x(1-x)C_n^{(3/2)}(2x-1)C_m^{(3/2)}(2x-1)dx = \delta_{nm} \frac{(n+2)(n+1)}{4(2n+3)} \quad (\text{A.8})$$

## Dodatak B Izospinska simetrija nukleonske valne funkcije

U ovom dodatku ćemo objasniti odakle točno dolaze relacije među nukleonskim distribucijskim amplitudama  $V$ ,  $A$  i  $T$  iz jednadžbe (5.10). Račun ćemo provesti na primjeru protona, no sve je apsolutno analogno i za neutron. Krenimo od definicije protonskog stanja (5.9):

$$\begin{aligned} |N_p^\uparrow(P)\rangle = \int [dx] \left\{ \left( \frac{1}{2}(V(x) - A(x)) \right) |u^\uparrow(x_1)u^\downarrow(x_2)d^\uparrow(x_3)\rangle + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{2}(V(x) + A(x)) \right) |u^\downarrow(x_1)u^\uparrow(x_2)d^\uparrow(x_3)\rangle - T(x) |u^\uparrow(x_1)u^\uparrow(x_2)d^\downarrow(x_3)\rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

i radi jednostavnosti zapisa preimenujmo distribucijske amplitude

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{1}{2}(V(x) - A(x)), \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{2}(V(x) + A(x)), \\ \phi_3(x) &= -T(x). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Koristimo uobičajne relacije za izospin ( $T$  je od sada izospinski operator, a ne distribucijska amplituda):

$$\begin{aligned} T^2 |t, t_3\rangle &= (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) |t, t_3\rangle = t(t+1) |t, t_3\rangle, \\ T_3 |t, t_3\rangle &= t_3 |t, t_3\rangle, \\ T_+ |t, t_3\rangle &= \sqrt{(t(t+1) - t_3(t_3+1))} |t, t_3+1\rangle, \\ T_- |t, t_3\rangle &= \sqrt{(t(t+1) + t_3(t_3+1))} |t, t_3-1\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

gdje je

$$\begin{aligned} T_{\pm} &= T_1 \pm iT_2, \\ T^2 &= \frac{1}{2}(T_+T_- + T_-T_+) + T_3^2. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Također koristimo činjenicu da je proton čestica izospina  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ , u kvark također, a d kvark je  $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ . Za kompozitnu česticu (kao što je nukleon) vrijedi

$$\vec{T} |q_i, q_j, q_l\rangle = |\vec{T} q_i, q_j, q_l\rangle + |q_i, \vec{T} q_j, q_l\rangle + |q_i, q_j, \vec{T} q_l\rangle. \quad (\text{B.5})$$

Sada jednostavno promatramo djelovanje operatora  $T^2$  na protonsko stanje. Sa jedne strane imamo

$$T^2 |N_p^\uparrow\rangle = \frac{3}{4} |N_p^\uparrow(P)\rangle \rightarrow \left(T^2 - \frac{3}{4}\right) |N_p^\uparrow\rangle = 0, \quad (\text{B.6})$$

a sa druge strane koristimo izraz (B.1) kombiniran s (B.4):

$$\begin{aligned} T^2 |N_p^\uparrow\rangle &= \int [dx] \left(\frac{1}{2}(T_+T_- + T_-T_+) + T_3^2\right) \left\{ \phi_1(x) |u^\uparrow(x_1)u^\downarrow(x_2)d^\uparrow(x_3)\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \phi_2(x) |u^\downarrow(x_1)u^\uparrow(x_2)d^\uparrow(x_3)\rangle + \phi_3(x) |u^\uparrow(x_1)u^\uparrow(x_2)d^\downarrow(x_3)\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Sada promotrimo djelovanje operatora  $T^2$  na svaku od tri moguće kombinacije kvar-kova. Koristimo (B.5) te gledamo djelovanje  $T^2$  na  $|u^\uparrow(x_1)u^\downarrow(x_2)d^\uparrow(x_3)\rangle$  (i koristimo kraticu  $u(x_i) \rightarrow u_i$ ):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}(T_+T_- + T_-T_+) + T_3^2\right) |u_1^\uparrow u_2^\downarrow d_3^\uparrow\rangle = \\ &= \frac{1}{2}T_+ \left(|d_1^\uparrow u_2^\downarrow d_3^\uparrow\rangle + |u_1^\uparrow d_2^\downarrow d_3^\uparrow\rangle + 0\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}T_- \left(0 + 0 + |u_1^\uparrow u_2^\downarrow u_3^\uparrow\rangle\right) + T_3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) |u_1^\uparrow u_2^\downarrow d_3^\uparrow\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(|u_1^\uparrow u_2^\downarrow d_3^\uparrow\rangle + |d_1^\uparrow u_2^\downarrow u_3^\uparrow\rangle + |u_1^\uparrow u_2^\downarrow d_3^\uparrow\rangle + |u_1^\uparrow d_2^\downarrow u_3^\uparrow\rangle\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(|d_1^\uparrow u_2^\downarrow u_3^\uparrow\rangle + |u_1^\uparrow d_2^\downarrow u_3^\uparrow\rangle + |u_1^\uparrow u_2^\downarrow d_3^\uparrow\rangle\right) + \frac{1}{4} |u_1^\uparrow u_2^\downarrow d_3^\uparrow\rangle \\ &= |d_1^\uparrow u_2^\downarrow u_3^\uparrow\rangle + |u_1^\uparrow d_2^\downarrow u_3^\uparrow\rangle + \frac{7}{4} |u_1^\uparrow u_2^\downarrow d_3^\uparrow\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

pa na kraju imamo

$$\left(T^2 - \frac{3}{4}\right) |u_1^\uparrow u_2^\downarrow d_3^\uparrow\rangle = |d_1^\uparrow u_2^\downarrow u_3^\uparrow\rangle + |u_1^\uparrow d_2^\downarrow u_3^\uparrow\rangle + |u_1^\uparrow u_2^\downarrow d_3^\uparrow\rangle. \quad (\text{B.9})$$



Analogno ovome iz druga dva člana se dobije

$$\begin{aligned} \left(T^2 - \frac{3}{4}\right) |u_1^\downarrow u_2^\uparrow d_3^\uparrow\rangle &= |u_1^\downarrow u_2^\uparrow d_3^\uparrow\rangle + |u_1^\downarrow d_2^\uparrow u_3^\uparrow\rangle + |d_1^\downarrow u_2^\uparrow u_3^\uparrow\rangle \\ \left(T^2 - \frac{3}{4}\right) |u_1^\uparrow u_2^\uparrow d_3^\downarrow\rangle &= |u_1^\uparrow u_2^\uparrow d_3^\downarrow\rangle + |u_1^\uparrow d_2^\uparrow u_3^\downarrow\rangle + |d_1^\uparrow u_2^\uparrow u_3^\downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Prije nego krenemo sve uvrštavati u jednadžbu (B.7) pokažimo što se događa s  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  i  $\phi_3$  prilikom zamjene u kvarkova. Koristimo činjenicu da su  $x_i$  slijepo varijable po kojima se integrira pa ih možemo zamjenjivati (ako smo konzistentni u tome) te imamo:

$$\begin{aligned} \phi_1(123) |u^\uparrow(x_1)u^\downarrow(x_2)d^\uparrow(x_3)\rangle &= \phi_1(123) |u^\downarrow(x_2)u^\uparrow(x_1)d^\uparrow(x_3)\rangle \\ &\quad (x_2 \leftrightarrow x_1) \\ &= \phi_1(213) |u^\downarrow(x_1)u^\uparrow(x_2)d^\uparrow(x_2)\rangle \\ (\text{po definiciji}) &= \phi_2(123) |u^\downarrow(x_1)u^\uparrow(x_2)d^\uparrow(x_2)\rangle \\ &\Rightarrow \phi_1(213) = \phi_2(123), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

gdje smo koristili oznake  $\phi_i(x_1, x_2, x_3) \equiv \phi_i(123)$ . Analogno imamo

$$\phi_3(123) |u^\uparrow(x_1)u^\uparrow(x_2)d^\downarrow(x_3)\rangle = \phi_3(213) |u^\uparrow(x_1)u^\uparrow(x_2)d^\downarrow(x_3)\rangle \quad (\text{B.12})$$

te kada se uvrste natrag  $A$ ,  $V$  i  $T$  smo ovime u biti dokazali relacije (5.12). Sada se možemo vratiti uvrštavanju izraza (B.9) i (B.10) u (B.7). Ako u prvome članu zamjenimo  $2 \leftrightarrow 3$ , a u drugom  $1 \leftrightarrow 3$  i sve uvrstimo u (B.7) imamo

$$\begin{aligned} \left(T^2 - \frac{3}{4}\right) |N_p^\uparrow\rangle &= \int [dx] (\phi_1(132) + \phi_2(321) + \phi_3(123)) \cdot \\ &\quad \cdot \left( |u_1^\uparrow u_2^\uparrow d_3^\downarrow\rangle + |u_1^\uparrow d_2^\uparrow u_3^\downarrow\rangle + |d_1^\uparrow u_2^\uparrow u_3^\downarrow\rangle \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

što je moguće samo ako

$$\phi_1(132) + \phi_2(321) + \phi_3(123) = 0. \quad (\text{B.14})$$

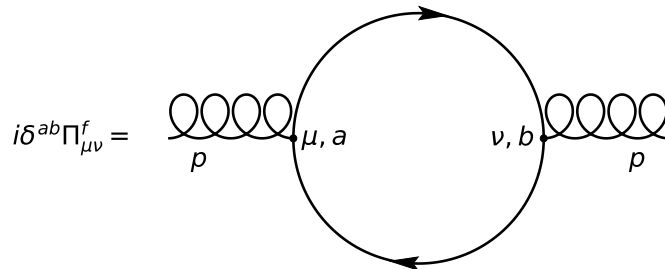
Ako u gornju jednadžbu uvrstimo  $\phi_2(321) = \phi_1(231)$  te da su  $\phi_1 = \frac{1}{2}(V + A)$ ,  $\phi_3 = -T$  imamo točno jednadžbu (5.13) što smo htjeli pokazati.

## Dodatak C BLM skala

Brodsky-Lepage-Mackenzie (BLM) skala prvi put je predložena u radu [39]. U principu, određivanje BLM skale znači odrediti renormalizacijsku skalu  $\mu_R^2$  takvu da doprinosi vakuumske polarizacije uz QCD  $\beta$ -funkciju iščeznu. Drugim riječima, radimo resumaciju efekata vakuumske polarizacije od QCD  $\beta$ -funkcije u konstantu vezanja  $\alpha_s$ .

Znamo da doprinosi koji uključuju  $\beta$ -funkciju dolaze od vakuumske polarizacije gluona. Stoga nam je cilj izračunati vakuumsku polarizaciju gluona do nekog reda računa smetnje (barem jedan red više nego onaj do kojeg računamo promatrani proces) i izjednačiti taj doprinos s 0. Tj. želimo uzeti  $Q^2$  tako da izraz što stoji uz  $\beta$  u perturbativnom razvoju bude jednak nuli. Međutim, čak ne trebamo ni izračunati cijelu vakuumsku polarizaciju gluona - potrebno je izračunati samo član proporcionalan broju okusa  $n_f$  jer znamo da član koji stoji uz  $n_f$  nužno stoji i uz cijeli  $\beta$ .

Fizikalna interpretacija renormalizacijske skale određene BLM postupkom je da ona odražava srednje virtualnosti gluonskih propagatora. Važna prednost te metode je ta što smo njome uklonili članove proporcionalne  $(\beta\alpha_s/\pi)^n$  iz perturbativnog razvoja, tj. resumirali smo ih u konstantu vezanja. Ti članovi su u pravilu dosta veliki pa perturbativni red slabo konvergira zbog njih, a ovim postupkom pokušavamo zaobići taj problem.



**Slika C.1:** Dijagram vakuumske polarizacije gluona koji daje doprinos proporcionalan broju fermionskih okusa  $n_f$  u prvom redu računa smetnje.

U našim računima funkcija strukture smo se zadržali na vodećem redu računa smetnje pa stoga za odrediti BLM skalu nam treba najmanje prvi red računa smetnje vakuumske polarizacije gluona te ćemo se i zadržati na prvom. Dakle treba izračunati

član koji stoji uz  $n_f$  u prvom redu računa smetnje, a takav član dolazi od dijagrama na slici C.1. Taj doprinos je dobro poznat u literaturi. Ovdje ćemo koristiti rezultat iz [40] gdje je korištena dimenzionalna regularizacija da bi se dobio rezultat

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^f(p) &= (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) \Pi^f(p^2), \\ \Pi^f &= \frac{4g^2 \mu^{2\epsilon} \Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \sum_f \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{(m_f^2 - p^2 x(1-x))^\epsilon},\end{aligned}\tag{C.1}$$

gdje je  $D$  dimenzija u dimenzionalnoj regularizaciji ( $D = 4 - 2\epsilon$ ),  $g$  konstanta vezanja, a  $\mu$  je dimenzionalni parametar. Također, imamo sumu po okusima  $f$ , a  $m_f$  su mase fermiona za koje ćemo nadalje uzimati da su 0. Prva jednakost u jednadžbi (C.1) vrijedi radi Wardovog identiteta.

Izraz (C.1) razvijamo po parametru  $\epsilon$  oko 0 i pri tome koristimo razvoje

$$\begin{aligned}\Gamma(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E, \\ \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2}\right)^\epsilon &= 1 + \epsilon \ln \frac{4\pi\mu^2}{-p^2}, \\ (x(1-x))^{-\epsilon} &= 1 - \epsilon \ln(x(1-x)),\end{aligned}\tag{C.2}$$

gdje je  $\gamma_E = 0.57721$  Eulerova konstanta. Kada se članovi reda  $O(\epsilon)$  odbace (jer idu u 0 u limesu  $\epsilon \rightarrow 0$ ) ostaje

$$\begin{aligned}\Pi^f(p^2) &= \frac{4g^2}{(4\pi)^2} n_f \left( \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln \frac{\mu^2}{-p^2} + \ln 4\pi \right) \int_0^1 dx x(1-x) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 dx x(1-x) \ln(x(1-x)) \right).\end{aligned}\tag{C.3}$$

Koristeći rješenja integrala

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx x(1-x) &= \frac{1}{6}, \\ \int_0^1 dx x(1-x) \ln(x(1-x)) &= -\frac{5}{18}\end{aligned}\tag{C.4}$$

te relaciju  $\alpha_s = g^2/4\pi$  dobije se

$$\Pi^f(p^2) = \frac{2n_f}{3} \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E - \ln \frac{-p^2}{\mu^2} + \ln 4\pi + \frac{5}{3} \right).\tag{C.5}$$

Ako je izraz (C.5) doprinos dijagrama C.1, onda je ukupna vakuumska polari-

zacija gluona taj isti izraz, samo proporcionalno  $\beta$ -funkciji na jednoj petlji ( $\beta_0 = 11/3n_c - 2/3n_f$ ):

$$\Pi(p^2) = -\beta_0 \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E - \ln \frac{-p^2}{\mu^2} + \ln 4\pi + \frac{5}{3} \right). \quad (\text{C.6})$$

Vidimo da u fizikalnom limesu  $\epsilon \rightarrow 0$  imamo divergenciju, što nije neočekivano. Kao što je već spomenuto u 2.1.2 ta pojava se zove UV divergencija i pojavljuje se pri računanju integrala po petljama u višim redovima računa smetnje. Pri računanju ostalih doprinosa u prvom redu računa smetnje pojavljivat će se još UV divergencija, no pokaže se da je poznavanje vakuumske polarizacije gluonskog propagatora dovoljno da se renormalira konstanta vezanja  $\alpha_s$  i time uklone sve UV divergencije. U gornjem računu je korištena konstanta vezanja iz lagranžijana, tzv. gola konstanta vezanja i kao što je također spomenuto u odjeljku 2.1.2 ta konstanta ne predstavlja fizikalnu veličinu. Zbog tog razloga imamo slobodu pri njenom odabiru te ju stoga možemo odabrati točno tako da se UV divergencije pokrate. Za takvu konstantu vezanja koja uklanja divergencije kažemo da je fizikalna.

Postoji beskonačno mnogo načina za definirati  $\alpha_s(Q^2)$  takav da ukloni divergencije i način na koji ga odabiremo zove se renormalizacijska shema. U ovom slučaju koristimo tzv. shemu modificirane minimalne subtrakcije (eng. *modified minimal subtraction scheme* -  $\overline{MS}$ ). Detalji o primjeni  $\overline{MS}$  sheme u funkcijama strukture piona nalaze se npr. u [41], ili [24]. Ukratko, rezultat primjene  $\overline{MS}$  renormalizacijske sheme jest da zamijenimo голу konstantu vezanja  $\alpha_s$  s kliznom konstantom vezanja (izraz 2.12)  $\alpha_s \rightarrow \alpha_s(\mu^2)$  te da se time efektivno ukloni komad  $1/\epsilon - \gamma_E + \ln 4\pi$  i zamijeni se  $\ln(-p^2/\mu^2) \rightarrow \ln(-p^2/\mu_R^2)$ .

Na kraju, nakon renormalizacije u  $\overline{MS}$  shemi ostane izraz

$$\Pi(p^2) = -\beta_0 \frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{4\pi} \left( -\ln \frac{-p^2}{\mu_R^2} + \frac{5}{3} \right). \quad (\text{C.7})$$

Sigurni smo da je ovo jedini izraz u prvom redu računa smetnje proporcionalan  $\beta_0$  (+neki predfaktor) i stoga za odrediti BLM skalu nam ostaje samo izjednačiti ga s 0. U našem slučaju impuls gluonskog propagatora  $p$  je povezan s prijenosom impulsa  $Q$  relacijom

$$-p^2 = (1-x)(1-y)Q^2 \quad (\text{C.8})$$

i kada se to uzme u obzir imamo

$$-\ln(1-x) - \ln(1-y) - \ln \frac{Q^2}{\mu_R^2} + \frac{5}{3} = 0, \quad (\text{C.9})$$

što vodi konačno na BLM skalu

$$\mu_{BLM}^2 = e^{-5/3}(1-x)(1-y)Q^2. \quad (\text{C.10})$$

## Literatura

- [1] Thomson, J. J. Cathode rays (Friday evening meeting of the Royal Institutions, 30.4.1897), *The Electrician*, 39, str. 104.
- [2] Rutherford, E. The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom, *Philosophical Magazine*, ser. 6, Vol. 21 (1911), str. 669-688.
- [3] Rutherford, E. Collision of  $\alpha$  particles with light atoms. IV. An anomalous effect in nitrogen, *Philosophical Magazine*, ser. 6, Vol. 37 (1919), str. 581-587.
- [4] Chadwick J. The existence of a neutron, *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 136 (1932), str. 692-708.
- [5] Frisch, O.; Stern, O. Über die magnetische Ablenkung von Wasserstoffmolekülen und das magnetische Moment des Protons I. *Zeitschrift für Physik*, Vol. 85 (1933), str. 4-16.
- [6] Hofstadter, R.; Fechter, H.; McIntyre, J. Scattering of high energy electrons and the method of nuclear recoil, *Phys.Rev.* Vol. 91 (1953), str. 422-423.
- [7] Yukawa, H. On the interaction of the elementary particles I., *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*, Vol. 17 (1935), str. 48-57.
- [8] Lattes C. M. G., Occhialini G. P. S. and Powell C. F., Observations on the tracks of slow mesons in photographic emulsions, *Nature*, Vol. 160 (1947), str. 453–456.
- [9] Bjorklund, R.; Crandall, W. E.; Moyer, B.J.; York, H. F. High energy photons from proton-nucleon collisions, *Phys. Rev.*, Vol. 77 (1950), str. 213-218.
- [10] Peskin, M. E.; Schroeder, D. V. *An introduction to quantum field theory*. Westview Press, 1995.
- [11] Weinberg, S *The quantum theory of fields*. 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [12] Rosenbluth, M. High energy elastic scattering of electrons on protons, *Phys. Rev.*, Vol. 79 (1950), str. 615-619.

- [13] Akhiezer, A.; Rekalov, M. Polarization effects in the scattering of leptons by hadrons, *Sov. J. Part. Nucl.*, Vol. 4 (1974), str. 277.
- [14] Efremov, A.; Radyushkin, A. Factorization and asymptotical behavior of pion form factor in QCD, *Phys. Lett.*, Vol. 94B (1980) 245-250.
- [15] Lepage, G. P.; Brodsky, S. J. Exclusive processes in perturbative quantum chromodynamics, *Phys. Rev. D*, Vol. 22 (1980), str. 2157-2198.
- [16] Field, R. D. Applications of perturbative QCD (Frontiers in physics). Addison-Wesley, 1989.
- [17] Chernyak, V. L.; Zhitnitsky, A. R. Asymptotic behavior of exclusive processes in QCD, *Phys. Rept.* Vol. 112 (1984), str. 173-318.
- [18] Bali, G. S.; Braun, V. M.; Bürger, S.; Göckeler, M.; Gruber, M.; Hutzler, F.; Korcyl, P.; Schäfer, A.; Sternbeck, A.; Wein P. Light-cone distribution amplitudes of pseudoscalar mesons from lattice QCD, *J. High Energ. Phys.*, Vol. 8 (2019), str. 65-90.
- [19] Zhong, T.; Zhu, Z.; Fu, H.; Wu, X.; Huang, T. Improved light-cone harmonic oscillator model for the pionic leading-twist distribution amplitude, *Phys. Rev. D*, Vol. 104 (2021), str. 16021-16036.
- [20] Li, H. Dispersive derivation of the pion distribution amplitude, *arXiv* (2022), <https://arxiv.org/abs/2205.06746>
- [21] Chernyak, V.; Zhitnitsky, I. Nucleon wave function and nucleon form factors in QCD, *Nucl. Phys. B*, Vol. 246 (1984) str. 52-74.
- [22] Braun, V. M.; Göckeler, M.; Horsley, R.; Kaltenbrunner, T.; Nakamura, Y.; Pleiter, D.; Rakow, P. E. L.; Schäfer, A.; Schierholz, G.; Stüben, H.; Warkentin, N.; Zanotti, J. M. Nucleon distribution amplitudes and proton decay matrix elements on the lattice, *Phys. Rev. D*, Vol. 79 (2009), str. 34504-34525.
- [23] Gari, M.; Stefanis, N. G. Quark distribution amplitudes for the nucleon from perturbative QCD and QCD sum rules, *Phys. Rev. D*, Vol. 35 (1987), str. 1074-1077.

- [24] Passek, K. Primjena perturbativne kvantne kromodinamike na određivanje funkcije strukture piona. Doktorski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2001.
- [25] Huber, G. et al. (Jefferson Lab Collaboration) Charged pion form factor between  $Q^2=0.60$  and  $2.45 \text{ GeV}^2$ . II. Determination of, and results for, the pion form factor, Phys. Rev. C, Vol. 78 (2008), str. 45203-45220.
- [26] Bebek, C. J. et al. Electroproduction of single pions at low  $\epsilon$  and a measurement of the pion form factor up to  $Q^2 = 10\text{GeV}^2$ , Phys. Rev. D, Vol. 17 (1978), str. 1693-1705.
- [27] Brodsky, S. J.; Farrar, G. R. Scaling laws at large transverse momentum, Phys. Rev. Lett., Vol. 31 (1973), str. 1153-1156.
- [28] Knödlseher, M. Nucleon electromagnetic form factors in perturbative QCD. Doktorski rad. Regensburg : Fakultät für Physik - Institut für theoretische Physik - Universität Regensburg
- [29] Stefanis, N. G.; Quark content of the nucleon in QCD: Perturbative and nonperturbative aspects, Phys. Rev. D, Vol. 40 (1989), str. 2305-2324.
- [30] Rock, S. et al. Measurement of elastic electron-neutron cross sections up to  $Q^2 = 10(\text{GeV}/c)^2$ , Phys. Rev. Lett., Vol. 49 (1982), str. 1140-1143.
- [31] Lung, A. et al. Measurements of the electric and magnetic form factor of the neutron from  $Q^2 = 1.75$  to  $4.00(\text{GeV}/c)^2$ , Phys. Rev. Lett., Vol. 70 (1993), str. 718-721.
- [32] Anklin, H. et al. Precise measurements of the neutron magnetic form factor, Phys. Lett. B, Vol. 428 (1998), str. 248-253.
- [33] Qattan, I. A. et al. Precision Rosenbluth measurement of the proton elastic form factors, Phys. Rev. Lett., Vol. 94 (2005), str. 142301-142305.
- [34] Andivahis, L. et al. Measurements of the electric and magnetic form factors of the proton from  $Q^2 = 1.75$  to  $8.83(\text{GeV}/c)^2$ , Phys. Rev. D, Vol. 50 (1994), str. 5491-5517.



- [35] Bartel, W. et al. Measurement of proton and neutron electromagnetic form factors at squared four-momentum transfers up to  $3(\text{GeV}/c)^2$ , Nucl. Phys. B, Vol. 58 (1973), str. 429-475.
- [36] Walker, R. C. et al. Measurements of the proton elastic form factors for  $1 \leq Q^2 \leq 3 (\text{GeV}/c)^2$  at SLAC, Phys. Rev. D, Vol. 49 (1994), str. 5671-5690.
- [37] Sill, A. F. et al. Measurements of elastic electron-proton scattering at large momentum transfer, Phys. Rev. D, Vol. 48 (1993), str. 29-55.
- [38] Lenz, A.; Gökeler, M.; Kaltenbrunner, T.; Warkentin, N. Nucleon distribution amplitudes and their application to nucleon form factors and the  $N \rightarrow \Delta$  transition at intermediate values of  $Q^2$ , Phys. Rev. D, Vol. 79 (2009), str. 93007-93035.
- [39] Brodsky, S. J.; Lepage, G. P.; Mackenzie, P. B. On the elimination of scale ambiguities in perturbative quantum chromodynamics, Phys. Rev. D, Vol. 28 (1983), str. 228-235.
- [40] Ioffe, B. L.; Fadin, V. S.; Lipatov, L. N. Quantum Chromodynamics: perturbative and nonperturbative aspects. Cambridge University Press, 2010.
- [41] Field, R. D.; Otto, S.; Gupta, R.; Chang, L. Beyond leading order QCD perturbative corrections to the pion form factor, Nucl. Phys. B, Vol. 186 (1981), str. 429-474.