

Kalibracija period-luminozitet relacija promjenjivih zvijezda tipa Mira

Đukić, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:068517>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Ivan Đukić

KALIBRACIJA PERIOD-LUMINOZITET RELACIJA
PROMJENJIVIH ZVIJEZDA TIPA MIRA

Diplomski rad

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Ivan Đukić

Diplomski rad

**Kalibracija period-luminozitet relacija
promjenjivih zvijezda tipa Mira**

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Lovro Palaversa

Suvoditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Krešimir Pavlovski

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2022.

Zahvaljujem se svojoj obitelji, posebno roditeljima, na bezuvjetnoj podršci tijekom obrazovanja. Želim se zahvaliti mentoru na uloženom vremenu, strpljenju i pomoći, koji je učinio ovaj rad mogućim.

Sažetak

Ovisnost perioda promjene sjaja i luminoziteta periodički pulsirajućih promjenjivih zvijezda poznata je više od stoljeća. U međuvremenu su period-luminozitet (PL) relacije postale standardni izbor u određivanju galaktičkih i izvangalaktičkih udaljenosti kada određivanje istih nije dostupno izravnim metodama, poput određivanja udaljenosti metodom trigonometrijske paralakse. Glavni cilj ovog rada je odrediti PL relacije promjenjivih zvijezda tipa Mira iz naše galaksije, Mliječnog puta. U početnom dijelu rada izlažem kratki povijesni pregled PL relacija, njihovu teorijsku pozadinu i opisujem prednosti (u kontekstu PL relacija) promjenjivih zvijezda tipa Mira u odnosu na ostale promjenjive zvijezde. Zatim iznosim podatke i metode kojima sam se koristio. Istraživanje je bilo temeljeno na podacima iz ASAS-SN kataloga, uz infracrvene magnitudo (J , H i K_S) iz 2MASS kataloga te paralakse, periode i magnitudo (G , G_{BP} i G_{RP}) iz Gaia DR3 kataloga.

Metoda preciznih paralaksi predstavlja osnovu ovog rada. Ona se oslanja na korištenje samo najkvalitetnijih podataka iz dostupnih kataloga. Odredio sam tri različite PL relacije, temeljene na magnitudi iz bliskog infracrvenog područja (K_S) te Wesenheit indeksima W_{JK} i W_G , a konačni rezultati provjereni su usporedbom s vrijednostima iz literature. Nadalje, zbog već poznate ovisnosti PL relacija o kemijskom sastavu zvijezda, ispitao sam istu i na galaktičkim mirama. Rezultati ukazuju kako galaktičke mire odabrane ovom metodom prate iste PL relacije kao i mire iz Velikog Magellanovog oblaka, a unutar W_G - $\log(P)$ ravnine dolazi do izraženijeg razdvajanja mira bogatih kisikom (O-mire) i mira bogatih ugljikom (C-mire).

U zaključku rada diskutiram nedostatke provedene metode. Odbacivanje nepozitivnih paralaksi, filtriranje podataka prema relativnoj pogrešci paralakse i korištenjem veličina koje nelinearno ovise o paralaksi uvrštava predrasude u konačni uzorak. Kao nastavak na rezultate ovoga rada predlažem korištenje metode temeljene na astrometrijskom luminozitetu, koja bi trebala izbjeći sve spomenute nedostatke.

Ključne riječi: PL relacije, Mira, ABL, ASAS-SN, paralaksa, C-mire, O-mire, promjenjive zvijezde, Gaia

Calibration of period-luminosity relations of Mira-type variable stars

Abstract

The relation between period and stellar luminosity of periodic variable stars has been known for over a century. Meanwhile, period-luminosity (PL) relations have become a standard tool for calculating galactic and extragalactic distances. The main goal of this thesis is to determine PL relations of galactic Mira-type variable stars. In the first half of the article, I have described a brief history of PL relations, theoretical background, and advantages of mira variables, as distance estimators, over other types of long-period variables. Then, I discuss the used data and methods. Research is based on data from the ASAS-SN catalog, supplemented with 2MASS near-infrared magnitudes (J , H , K_S) and parallaxes, periods, and magnitudes (G , G_{BP} , G_{RP}) from the Gaia DR3 archive.

The method of precise parallaxes is the foundation of this work. It is based on parallax-over-error filtering and other selection rules. I have determined three different PL relations, the first is based on near-infrared magnitude K_S , and the other two on Wesenheit functions W_{JK} and W_G . I have compared the final results with already determined PL relations for LMC miras. The conclusion is that galactic Mira-type variables selected by this method follow similar PL relations as their LMC counterparts.

Moreover, it is known how stars with different chemical compositions follow different PL relations. Hence, the chemical dependence of PL relations is also investigated. Results show more pronounced separation of O-rich and C-rich mira variables in W_G - $\log(P)$ plane.

Finally, I have discussed shortcomings of used method, such as removing non-positive parallaxes and filtering data based on parallax-over-error. Also, I have suggested the astrometry-based luminosity method for future improvements.

Keywords: PL relations, Mira, ABL, ASAS-SN, parallax, C-rich, O-rich, variable stars, Gaia

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Period-luminozitet relacije	4
2.1	Osnovni pojmovi	4
2.2	Hertzsprung–Russellov dijagram	8
2.3	Teorija promjenjivih zvijezda	11
2.3.1	Period-gustoća relacija	11
2.3.2	Modovi titranja promjenjivih zvijezda	13
2.3.3	Mehanizmi titranja promjenjivih zvijezda	14
2.4	Promjenjive zvijezde dugih perioda	16
2.5	Što su period-luminozitet relacije?	19
2.6	Wesenheit indeks	20
3	Podaci	23
3.1	Arhive podataka	23
4	Metoda preciznih paralaksi	25
4.1	Priprema podataka	25
4.2	Fazne krivulje	27
4.3	Zastupljenost ugljika i kisika u zvijezdama	30
4.4	Rezultati	32
5	Diskusija i zaključak	35
	Dodaci	39
A	Analiza uzorka	39
B	Python program	41
	Literatura	47

1 Uvod

Određivanje udaljenosti nebeskih tijela jedan je od osnovnih problema astrofizike i astronomije. S obzirom na to da su čak i nama najbliži planeti izuzetno daleko, mjerenje udaljenosti objekata od interesa nije trivijalan zadatak. Postoji mnogo metoda mjerenja udaljenosti, a koja od njih će se koristiti ovisi, između ostalog, o udaljenosti i vrsti promatranog objekta. Skup metoda za određivanje udaljenosti u svemiru je poznat pod nazivom "kozmička ljestvica udaljenosti". Naime, ne postoji univerzalna metoda primjenjiva na sve vrste astrofizičkih objekata na svim udaljenostima. Na primjer, udaljenost najbližih zvijezda (do udaljenosti od nekoliko kiloparseka) može se odrediti mjerenjem paralakse zvijezda. Na nešto većim udaljenostima unutar i izvan naše galaksije koriste se takozvane standardne svijeće. Riječ je o objektima kojima možemo uz određene pretpostavke odrediti luminozitet, a ako uz to možemo izmjeriti i tok zračenja, može se odrediti i udaljenost. Na još većim skalama koriste se metode temeljene na Tully-Fisher i Faber-Jackson relacijama, supernovama tipa Ia (koje su slične standardnim svijećama), i mnoge druge. U ovom radu bavit ću se određivanjem period-luminozitet (PL) relacija promjenjivih zvijezda tipa Mira, koje pripadaju kategoriji standardnih svijeća na kozmičkoj ljestvici udaljenosti.

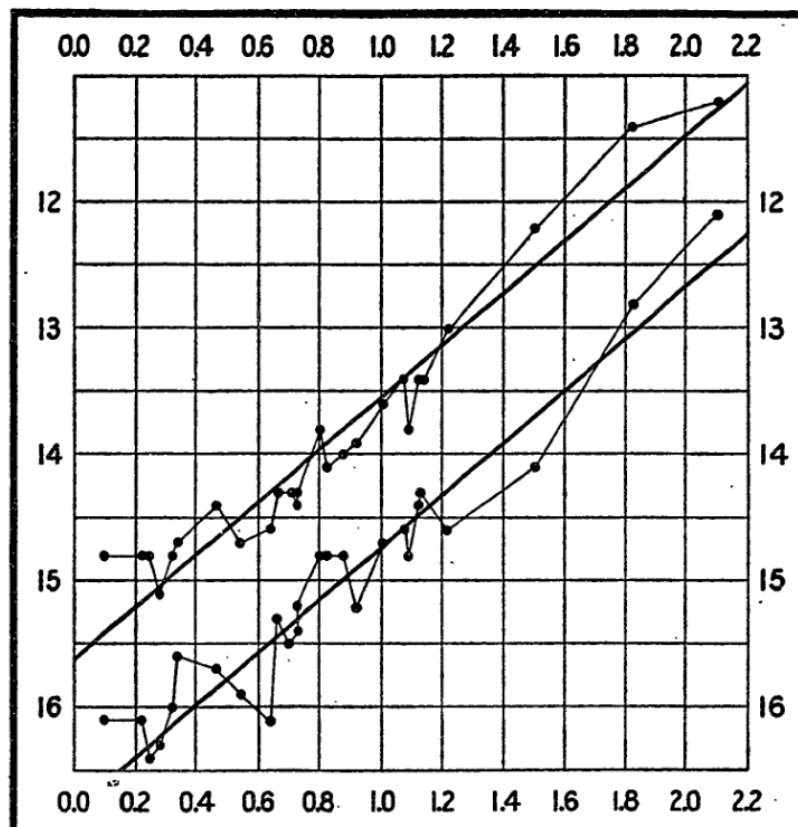
Godina 1908. je od povijesnog značaja. Tada je Henrietta Swan Leavitt primijetila kako je duljina perioda klasičnih cefeida iz Malog Magellanovog oblaka proporcionalna njihovom luminozitetu, a 1912. objavila znanstveni članak na istu temu [1]. To je bila prva PL relacija, a danas je poznata i kao Leavittin zakon (slika 1.1). O značaju te PL relacije govori nam činjenica kako je istu upotrijebio Edwin Hubble 1924. godine te tako odredio udaljenost do galaksije Andromeda, što je u konačnici dovelo do zaključka kako je Mliječni put samo jedna od mnogobrojnih galaksija u svemiru.

Cefeide nisu jedine promjenjive zvijezde, stoga je ubrzo započelo istraživanje PL relacija ostalih vrsta periodičkih zvijezda, kao na primjer periodički promjenjivih zvijezda tipa Mira (mire)¹. Štoviše, o Ceti (Mira) je prva opažena promjenjiva zvijezda koja nije bila posljedica supernove.² Zbog velikih amplituda mire je lako prepoznati vizualnim opažanjima, pa su sve do početka 20. stoljeća dominirale katalozima

¹Puni naziv je promjenjive zvijezde tipa Mira. Dobile su ime po prvoj takvoj opaženoj zvijezdi Omikron (*o*) Ceti. U ovom tekstu naizmjenično ću koristiti skraćenicu "mire" i puni naziv. Iz konteksta će biti jasno misli li se na zvijezdu Omikron Ceti ili na tip promjenjivih zvijezda.

²Ovo je prvi primijetio David Fabricius davne 1596. godine.

promjenjivih zvijezda. Povijest PL relacija mira započinje 1928. godine kada je Gerasimovič [2] primijetio kako promjenjive zvijezde dugih perioda, gdje pripadaju i mire, imaju veću srednju apsolutnu magnitudu u vidljivom dijelu spektra što im je period promjene sjaja dulji. U prvoj polovini 20. stoljeća ovaj rezultat potvrđen je dodatnim istraživanjima. Glass & Lloyd Evans [3] su 1981. godine odredili postojanje PL relacije mira u bliskom infracrvenom dijelu spektra. Njihov uzorak činilo je svega 11 mira iz Velikog Magellanovog oblaka. Daljnji razvoj tehnika promatranja i katalogiziranja neba omogućio je veliko povećanje prikupljene količine podataka, te tako postavio temelje dodatnog istraživanja PL relacija raznih tipova zvijezda. Ubrzo je Wood [4, 5] otkrio pet različitih PL relacija (takozvanih "sekvenci") divovskih zvijezda niskih efektivnih temperatura (takozvanih crvenih divova), koje je označio slovima A-E, za koje je pretpostavio da odgovaraju modu osciliranja (slovom C označio je odgovarajuću relaciju za mire). Kvalitetan i sažet povijesni pregled PL relacija mira može se pronaći u uvodnom dijelu članka [6].



Slika 1.1: Prva, i od velikog povijesnog značajna, PL relacija klasičnih cefeida. Preuzeto iz [1]. Na x-osi nalazi se logaritam perioda, a na y-osi opažena magnituda. Bitno je uočiti linearnu ovisnost ovih veličina.

Većina članaka u zadnjih četrdesetak godina (npr. [7–9]) koji su proučavali pro-

mjenjive zvijezde dugih perioda analizira PL relacije zvijezda unutar Magellanovih oblaka. Razlog tome je što je debljina Magellanovih oblaka (duž doglednice) puno manja od udaljenosti Magellanovih oblaka, pa se može pretpostaviti da su zvijezde pojedinog magellanovog oblaka na istim udaljenostima od Sunca.³ S druge strane, za zvijezde unutar naše galaksije potrebno je precizno poznavanje udaljenosti, stoga je galaktičke PL relacije teže proučavati zbog relativno velikih grešaka kod određivanja udaljenosti, tj. paralakse. Zahvaljujući podacima s Gaia svemirske letjelice koji uključuju do sada najpreciznije objavljene paralakse za oko 1.5 milijardi galaktičkih zvijezda, glavni cilj ovog rada je iskoristiti te podatke i odrediti PL relacije mira unutar Mliječnog puta.

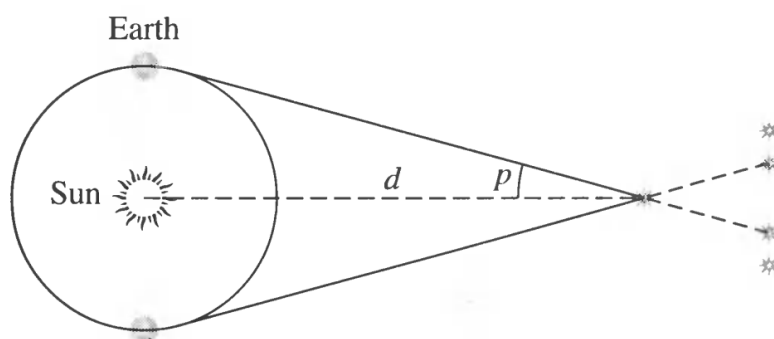
³Detaljnije objašnjeno u potpoglavlju 2.5.

2 Period-luminozitet relacije

Cilj ovog poglavlja je objasniti fizikalnu pozadinu PL relacija mira. Prvo definiram osnovne pojmove te na njihovim temeljima gradim složenije. Na taj način opisat ću relativno detaljnu teorijsku pozadinu osnovnih astrofizičkih pojmova i specifičnosti mira u odnosu na ostale zvijezde. Također, dotaknut ću se problema ekstinkcije i na koji način se isti može umanjiti.

2.1 Osnovni pojmovi

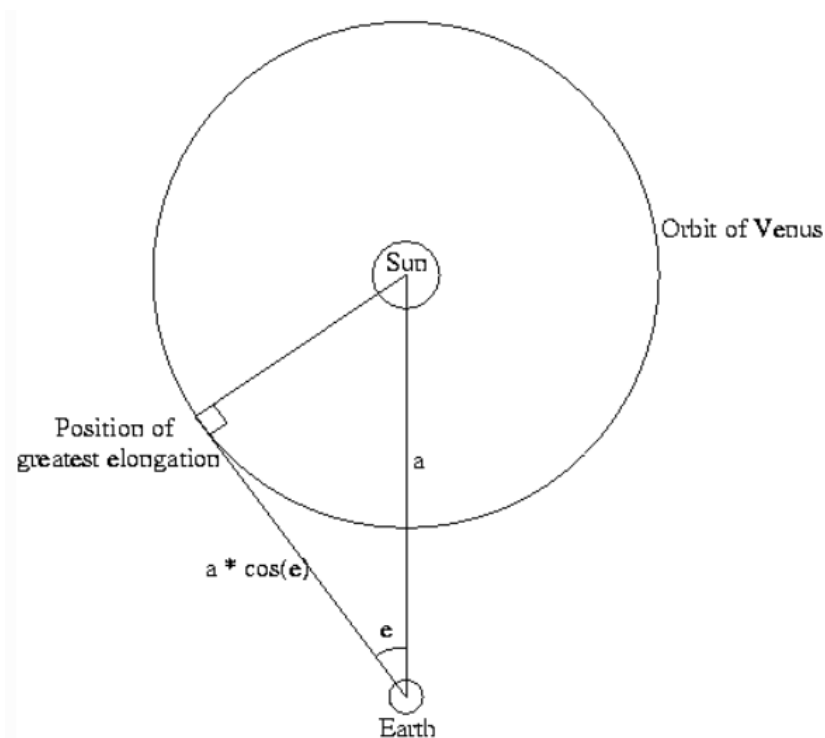
Određivanje udaljenosti nebeskih tijela jedno je od temeljnih pitanja astrofizike. Izvan Sunčevog sustava, uz iznimku metode trigonometrijske *paralakse*, metode određivanja ove veličine uključuju fizikalne pretpostavke o objektu koji promatramo. Paralaksa je posljedica prividnog pomaka promatranog objekta u odnosu na udaljenu pozadinu, tj. promjene položaja promatrača u odnosu na objekt. U konkretnom slučaju, kada mjerimo paralakse zvijezda, do prividnog pomaka dolazi zbog revolucije Zemlje oko Sunca.



Slika 2.1: Shematski prikaz paralakse. Slovom d označena je udaljenost od Sunca do promatrane zvijezde, a slovom p paralaksa. S obzirom da znamo udaljenost Zemlja-Sunce, a kut p mjerimo, jednostavnom trigonometrijom možemo izračunati d . Slika je preuzeta iz [10].

Na slici 2.1 nalazi se shematski prikaz paralakse. Slovima d i p označene su udaljenost od Sunca do promatrane zvijezde i paralaksa. Udaljenost Sunce-Zemlja možemo precizno odrediti pomoću radara i unutrašnjih planeta (Merkur, Venera). Prvo, koristeći radar koji emitira radiovalove do planeta odredimo udaljenost između Zemlje i, primjerice, Venere. Preciznije, mjerenjem vremena od emitiranja do registriranja reflektiranih radiovalova te poznavanjem njihovih brzina izračunamo udaljenost

Zemlja-Venera. Mjerenje ove udaljenosti radimo u trenutku najveće elongacije⁴. Tada



Slika 2.2: Shematski prikaz određivanja udaljenosti između Sunca i Zemlje. Slovom e označena je elongacija. Slika je preuzeta iz [11].

je u prvoj aproksimaciji⁵ udaljenost Zemlja-Venera tangenta na putanju Venere, a trokut Zemlja-Sunce-Venera je pravokutan (vidi sliku 2.2). Elongaciju e možemo mjeriti, i u slučaju Venere iznosi oko 46 stupnjeva, a udaljenost do planeta, nazovimo ju b , već smo odredili pomoću radara. Tada iz sljedeće jednadžbe odredimo udaljenost a :

$$b = a \cdot \cos(e) \quad (2.1)$$

Udaljenost Sunce-Zemlja iznosi oko $1.5 \cdot 10^{11}$ m i naziva se *astronomskom jedinicom* (1 AU). S obzirom na to da putanje planeta nisu savršene kružnice, jedna astronomska jedinici predstavlja prosječnu udaljenost između Sunca i Zemlje.

Jednom kada poznajemo udaljenost Sunce-Zemlja, a paralaksu p smo izmjerili, upotrebom jednostavne trigonometrije možemo izračunati udaljenost d :

$$d = \frac{1 \text{ AU}}{\tan(p)} \simeq \frac{1}{p} \text{ AU} \quad (2.2)$$

U jednadžbi 2.2 druga jednakost slijedi zbog aproksimacije malih kutova. Ista je

⁴Elongacija je kut između Sunca i planeta kako se vidi sa Zemlje.

⁵Pretpostavljamo kako su putanje planeta savršene kružnice koje leže u istoj ravnini.

opravdana jer su čak i nama najbliže zvijezde dovoljno udaljenje, stoga su im pripadne paralakse male.⁶ Prirodno je koristiti parsek (pc) kao jedinicu udaljenosti nebeskih tijela. Radi se o veličini definiranoj tako da je 1 parsek udaljenost sa koje se udaljenost od 1 AU vidi pod kutom od 1'', te iznosi oko 3.26 svjetlosnih godina. Tada izraz 2.2 postaje:

$$d = \frac{1}{p''} \text{ pc} \quad (2.3)$$

U jednadžbi 2.3 sa p'' označena je paralaksa izražena u lučnim sekundama.

Druga bitna veličina je *opažena magnituda* m . Suvremeni instrumenti određuju tok zračenja F , odnosno količinu energije koja sa zvijezde pada na jediničnu površinu u jedinici vremena iz broja detektiranih fotona⁷. unutar nekog pojasa valnih duljina određenih propusnošću filtra i atmosfere. Opažena magnituda se definira kao:

$$m = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F}{F_0} \right) \quad (2.4)$$

U prethodnoj jednadžbi F_0 je referentni tok zračenja za dani fotometrijski filter, a m magnituda. Stoga možemo reći kako je opažena magnituda mjera koliko je pojedina zvijezda sjajnija ili tamnija u određenome fotometrijskom filteru od referentne zvijezde. Također, bitno je istaknuti kako sjajnije zvijezde imaju manje vrijednosti magnituda.⁸

Opaženi tok zračenja F ovisi o količini izračene energije⁹, ali je također i funkcija udaljenosti. Kao posljedica izraza 2.4 slijedi da je i opažena magnituda m također ovisna o udaljenosti zvijezde. *Apsolutna magnituda* M ne ovisi o udaljenosti i definirana je kao:

$$M = m - 5 (\log_{10} (d_{pc}) - 1) \quad (2.5)$$

Ovako definirana apsolutna magnituda predstavlja sjaj zvijezde na referentnoj udaljenosti od 10 parseka. Ako iskoristimo izraz 2.3, prethodna jednadžba postaje:

$$M = m + 5 (\log_{10} (p'') + 1) \quad (2.6)$$

Uz tok zračenja usko je vezana i fizikalna veličina *luminozitet* L . Ona predstavlja

⁶Za sve zvijezde vrijedi $p < 1''$

⁷ $F_\nu = h\nu \times N_\nu$, gdje je $h\nu$ energija fotona valne duljine ν , a N_ν tok fotona ($s^{-1}m^2Hz^{-1}$)

⁸Ovo je povijesni kuriozitet i posljedica minusa u izrazu 2.4

⁹Ovisi i o ekstinkciji zračenja duž dogleđnice. Detaljnije o tome u potpoglavlju 2.6.

ukupno izračenu energiju nebeskog tijela po jedinici vremena. Kako je jedina razlika između toka zračenja i luminoziteta jedinica površine, posljednju veličinu dobijemo integriranjem prethodne po sferi čiji radijus r odgovara udaljenosti između Zemlje i tijela:

$$L = 4\pi r^2 \cdot F \quad (2.7)$$

Odnos između toka zračenja F i luminoziteta L analogan je odnosu opažene i apsolutne magnitude, prva ovisi o udaljenosti između objekta i promatrača dok je druga svojstvena isključivo zvijezdi.

Zvijezde su izrazito složeni objekti, stoga je izuzetno teško precizno opisati mehanizme koji se odvijaju unutar njih. Ipak postoje veličine koje možemo opažati ili odrediti, npr. poput *efektivne temperature*, koje nam mogu dati procjenu o kakvim procesima se radi. Efektivna temperatura zvijezde je temperatura koju bi imalo crno tijelo¹⁰ kada bi zračilo istu količinu ukupne energije kao promatrana zvijezda. Kako vidimo iz definicije efektivne temperature, ako želimo zvijezdi pridružiti istu, moramo prihvatiti aproksimaciju crnog tijela. Sada jednostavnom upotrebom Stefan-Boltzmannovog zakona i definicije luminoziteta (izraz 2.7) dobivamo definicijsku relaciju efektivne temperature T_{eff} :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (2.8)$$

U prethodnoj jednadžbi R je radijus zvijezde, a σ je Stefan-Boltzmannova konstanta.

Zvijezde je moguće klasificirati i prema njihovim spektrima i tada se govori o *spektralnoj klasifikaciji*. Riječ je o podjeli zvijezda prema karakteristikama spektra. Postojanje spektralnih linija ukazuje na postojanje kemijskih elemenata i molekula. Izgled spektra u prvom redu je posljedica temperature, gravitacijskog ubrzanja na površini zvijezde i zastupljenosti kemijskih elementa. Danas je najzastupljeniji Morgan–Keenan klasifikacijski sustav. Radi se o podjeli zvijezda u razrede O, B, A, F, G, K i M. Iako je primarna motivacija ove podjele bilo razlikovanje zvijezda prema njihovim spektralnim karakteristikama, pokazuje se kako ovaj redoslijed odgovara temperaturama zvijezda, gdje su O najtoplije, a M najhladnije zvijezde. Svaki razred može se dodatno podijeliti korištenjem arapskih brojeva 0-9. Tako će razred A9

¹⁰Crno tijelo je idealizirano tijelo koje apsorbira svo upadno zračenje, a u termodinamičkoj ravnoteži apsorbira i emitira istu količinu zračenja.

predstavljati toplije zvijezde od razreda A5. Nadalje, Morgan-Keenan sustav je dvo-dimenzionalan, odnosno postoji dodatna podjela na klase po luminozitetu koje se označavaju rimskim brojevima I-VII. Ova podjela se temelji na širini određenih ap-sorpcijskih linija u spektru zvijezde. Tako na primjer klase I i II predstavljaju super-divove i divove, dok klasa V odgovara zvijezdama glavnog niza. Na primjer, potpuna klasifikacija Sunca u Morgan-Keenan sustavu je G2V.

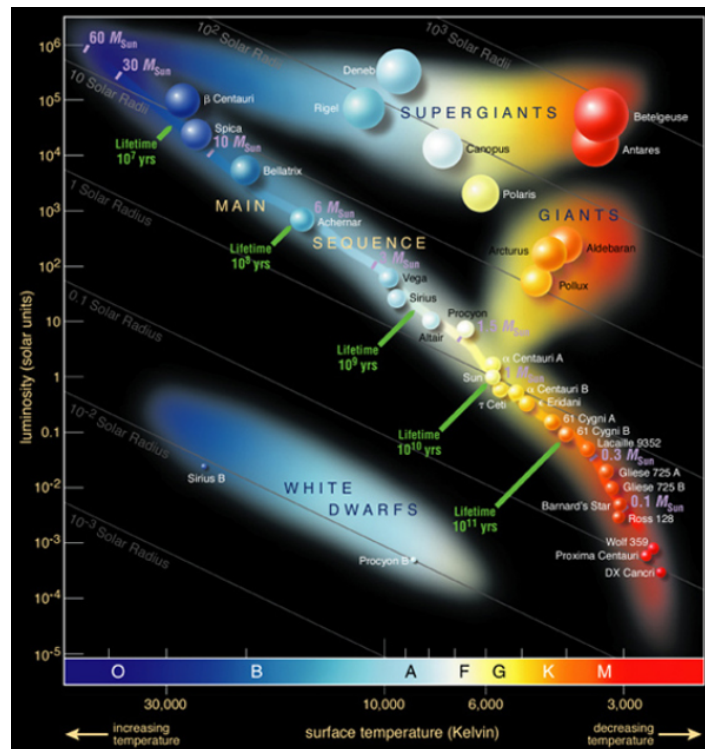
2.2 *Hertzsprung–Russellov dijagram*

Dijagram na čijoj x-osi se nalazi efektivna temperatura zvijezde, a na y-osi luminozi-tet naziva se *Hertzsprung–Russellovim* (H-R) dijagramom. Dijagram je prvi izradio Ej-nar Hertzsprung 1911. godine, a dvije godine kasnije neovisno o prethodnom otkriću isto je učinio i Henry Norris Russell. Shematski prikaz dijagrama možemo vidjeti na slici 2.3. Sa slike su odmah uočljive osnovne strukture dijagrama:

- *Glavni niz* dominira H-R dijagramom i proteže se od lijevog gornjeg kuta, gdje se nalaze plavi divovi, do desnog donjeg kuta koji je zastupljen crvenim pa-tuljcima. Zvijezda najdulje provodi na glavnom nizu, kada u jezgri sagorijeva vodik u heliji.
- *Divovi i superdivovi* zauzimaju gornji dio dijagrama, iznad glavnog niza. Ka-rakteriziraju ih veliki radijusi i luminoziteti, te su nešto hladnije zvijezde u usporedbi sa (plavim) divovima glavnog niza. Stoga su uglavnom žute ili cr-vene boje. Zvijezde koje pripadaju ovim područjima dijagrama su u podmakloj evolucijskoj fazi. Područje divova možemo dodatno podijeliti na granu crvenih divova i granu asimptotskih divova. Možemo istaknuti posljednju zbog toga što se u toj evolucijskoj fazi nalaze promjenjive zvijezde tipa Mira. Za zvijezde koje se nalaze na grani asimptotskih divova karakterizira ih jezgra bogata ugljikom i kisikom te gorenje helija i vodika u ljuskama.
- *Bijeli patuljci* su posljednja faza evolucije zvijezda početnih masa do oko 8 Sunčevih masa. Bijeli patuljci dominiraju donjim dijelom dijagrama, a ističu se visokim temperaturama te malim luminozitetima i radijusima.

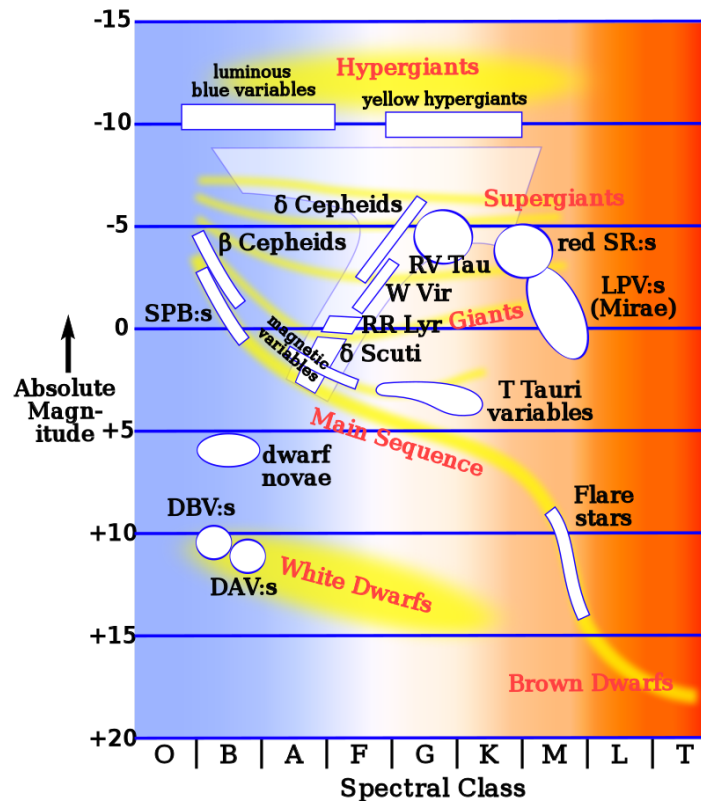
Treba napomenuti kako se koriste i alternativne verzije H-R dijagrama sa bojom zvijezde na apcisi i apsolutnom magnitudom na ordinati. Osim što se koriste za

određivanje evolucijske faze pojedinačne zvijezde, H-R dijagrami koriste se i prilikom određivanja udaljenosti zvjezdanih skupova i galaksija.



Slika 2.3: Prikaz H-R dijagrama gdje su istaknute glavne strukture poput glavnog niza, crvenih divova, superdivova i bijelih patuljaka. Na apcisi se nalazi efektivna temperatura, dok logaritamska skala na ordinati prikazuje luminozitet izražen u jedinicama Sunčevog luminoziteta. Slika je preuzeta sa [12]

Na slici 2.4 nalazi se shematski prikaz H-R dijagrama sa istaknutim područjima promjenjivih tipova zvijezda. Apsolutna magnituda se smanjuje (sjaj raste) prema gore, a efektivna temperatura raste ulijevo. Kako smo već istaknuli, glavnom nizu pripadaju zvijezde koje u svojoj jezgri sagorijevaju vodik kao glavni izvor energije. Tu zvijezde provode najdulji dio svog života, a nakon što završi gorenje vodika silaze s glavnog niza i ulaze u završnu fazu svog životnog ciklusa. Kojim putem, unutar H-R dijagrama, će zvijezda krenuti nakon glavnog niza ovisi o njezinoj masi. Istaknut ćemo zvijezde između 0.5 i 8 Sunčevih masa. Nakon što je zvijezda iscrpila gotovo sav vodik u jezgri, nuklearne reakcije se privremeno zaustavljaju. Ipak, vodik u vanjskim slojevima jezgre nije iscrpljen zbog nešto sporijih reakcija nego unutar jezgre, stoga kažemo kako se gorenje vodika nastavlja u ljusci oko jezgre. S obzirom da u jezgri nema gorenja vodika nema ni produkcije fotona, odnosno fotonskog tlaka koji je usmjeren prema vanjskim dijelovima zvijezde. Stoga dolazi do sažimanja jezgre koje prati i sažimanje vodikove ljuske. Posljedično dolazi do povećanja temperature



Slika 2.4: Shematski prikaz H-R dijagrama sa označenim područjima promjenjivih tipova zvijezda. Nama od interesa je područje zvijezda tipa Mira koje zadovoljava $-3 \lesssim M \lesssim 2$ čije zvijezde su pretežno klasificirane unutar spektralnog razreda M. Zbog toga se ove zvijezde često nazivaju M divovima. Slika preuzeta je sa [13].

u vodikovoj ljusci, odnosno do porasta gorenja vodika. Povećan udio fotona, nastao u vodikovoj ljusci tijekom njezinog sažimanja, uzrokuje širenje vanjskih dijelova zvijezde i povećanje sjaja. Stoga možemo reći kako zbog nestanka "goriva" unutar jezgre ista se sažima, a površina zvijezde se širi. Kolaps jezgre se odvija sve dok temperatura jezgre ne poraste dovoljno za početak gorenja helija. Taj događaj se naziva helijevim bljeskom, a zvijezda potom dolazi na horizontalnu granu. Nakon što zvijezda potroši sav heliji, započinje analogan proces sažimanja jezgre, ali sada sa ugljikom i kisikom u jezgri, a helijem i vodikom u ljuskama. Ovu fazu evolucije nazivamo granom asimptotskih divova. Treba napomenuti kako se promjene sjaja, koje su posljedica promjene nuklearnih reakcija u jezgri, odvijaju na velikim vremenskim skalama. Zvijezda je na grani crvenih divova oko 10^9 godina, dok grana asimptotskih divova traje oko 10^5 godina.

2.3 Teorija promjenjivih zvijezda

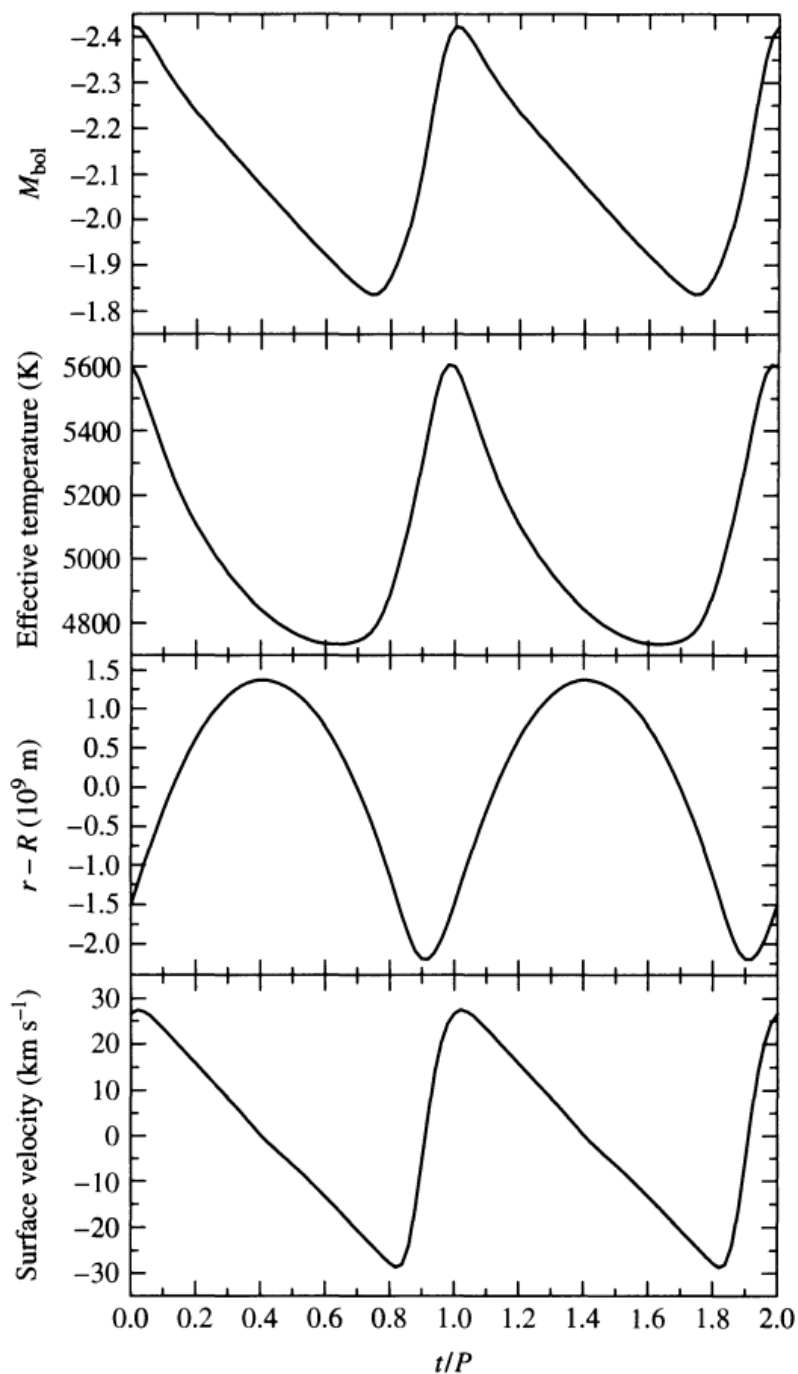
Promjena sjaja zvijezde opisana u potpoglavlju 2.2 posljedica je privremenog prekida nuklearnih reakcija u jezgri i nastavka proizvodnje fotona u ljusci. Kroz ove evolucijske procese prolaze sve zvijezde i isti se odvijaju na vremenskim skalama između stotinu tisuća i milijardu godina. Spomenute promjene sjaja se odvijaju na dugim skalama i nisu one koje mjerimo kada govorimo o promjenjivim zvijezdama, te koristimo u PL relacijama. Ovo je očito iz činjenice kako zvijezde cefeide imaju periode nekoliko desetaka dana, dok promjenjive zvijezde tipa Mira osciliraju periodima nekoliko mjeseci ili godina.

Osim sjaja i radijusa zvijezda tijekom pulsiranja također mijenja temperaturu, a očito dolazi i do promjena radijalne brzine (tj. brzine kojom se zvijezda širi). Na slici 2.5 nalazi se prikaz ovisnosti spomenutih veličina u vremenu za δ Cefeja, prototip cefeida. Iako je kod mira (a posebno kod ostalih podvrsta promjenjivih crvenih divova) situacija kompliciranija, slični mehanizmi su vjerojatno odgovorni i za radijalne oscilacije promjenjivih zvijezda tipa Mira. Magnituda, efektivna temperatura i površinska brzina su u fazi, dok je radijus pomaknut za π . Amplituda kod cefeida iznosi oko pola magnitude, što je popraćeno sa promjenom temperature od skoro 1000 K. Iako je promjena radijusa veća od promjera Sunca, radi se o relativnoj promjeni 5 – 10% veličine δ Cefeja. Kod mira promjene sjaja mogu iznositi nekoliko magnituda a posljedica su promjene temperature, tj. pomaka maksimuma zračenja među filtrima kroz koje se opaža. Ovisnost temperature i magnitude je očekivana s obzirom da viša temperatura znači više nuklearnih reakcija, dok ću pomak u fazi radijusa zvijezde objasniti u nastavku potpoglavlja.

2.3.1 Period-gustoća relacija

Oscilacije promjenjivih zvijezda posljedica su akustičnih valova u unutrašnjosti, stoga period titranja možemo izračunati kao vrijeme potrebno valu da prijeđe put od središta zvijezde do površine, i natrag. Brzina zvuka v dana je sljedećim izrazom:

$$v(r) = \sqrt{\frac{K(r)}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P(r)}{\rho}} \quad (2.9)$$



Slika 2.5: Promjena magnitude, efektivne temperature, radijusa i površinske brzine δ Cefeja u vremenu. Treba primijetiti kako je radijus zvijezde pomaknut u fazi u odnosu na ostale veličine. Graf je preuzet iz [10]

U jednadžbi 2.9 K je modul stlačivosti (za idealne plinove vrijedi $K = \gamma P$, gdje je $\gamma = C_P/C_V$ adijabatski koeficijent), $P(r)$ tlak na udaljenosti r od središta zvijezde, a ρ gustoća plazme. Ovisnost tlaka o r možemo dobiti iz jednadžbe hidrostatičke

ravnoteže, uz pretpostavku konstantne gustoće¹¹:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r \quad (2.10)$$

U prethodnoj jednadžbi G je gravitacijska konstanta, a M_r masa plazme unutar sfere radijusa r . Ovisnosti tlaka o udaljenost r možemo dobiti integriranjem jednadžbe 2.10, uz rubni uvjet $P(R) = 0$, gdje je R radijus zvijezde:

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2(R^2 - r^2) \quad (2.11)$$

Konačno, period Π dobijemo integriranjem infinitezimalnih vremenskih intervala dr/v od središta do površine zvijezde, i natrag:

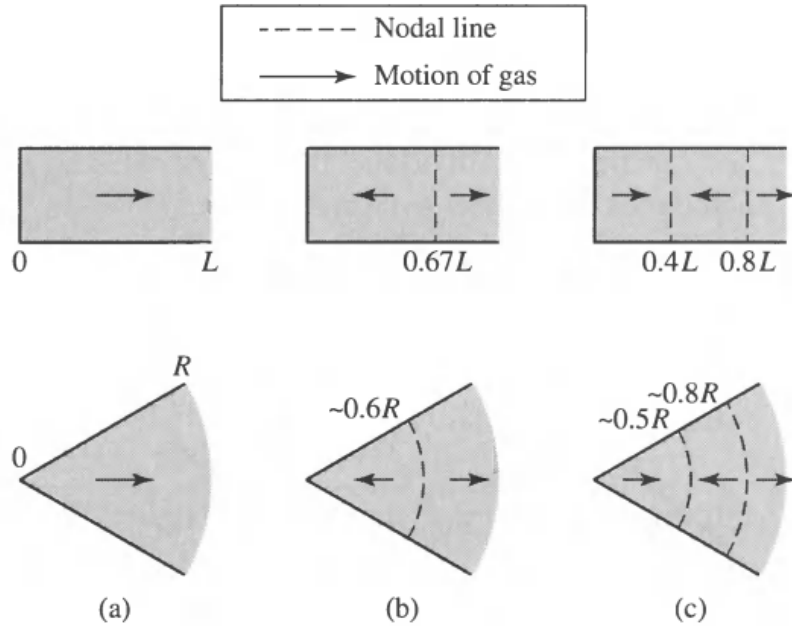
$$\Pi = 2 \int_0^R \frac{dr}{v} = 2 \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{3}\gamma\pi G\rho(R^2 - r^2)}} \approx \sqrt{\frac{3\pi}{2\gamma G\rho}} \quad (2.12)$$

Jednadžba 2.12 naziva se *period-gustoća relacija*. Vidimo kako je period obrnuto proporcionalan korijenu srednje gustoće zvijezde, što nam objašnjava zašto se periodi smanjuju što se zvijezda nalazi niže na vrpci nestabilnosti (eng. *Instability strip*). Iako izvedena uz grube aproksimacije, jednadžba daje dobre periode za tipične cefeide (≈ 10 dana).

2.3.2 Modovi titranja promjenjivih zvijezda

Promjena sjaja zvijezde praćena je promjenom njezinog radijusa. Naivno bismo mogli pomisliti kako sve zvijezde pulsiraju radijalno i sferosimetrično, ali to nije istina. Različita geometrijska ostvarenja pulsiranja zvijezde nazivamo *modovima*. Preciznije, pojedini mod titranja zvijezde poprima oblik kugline funkcije $Y_l^m(\theta, \phi)$. To znači da samo zvijezde koje titraju u modu $l = 0$ ostvaruju radijalne i sferosimetrične titraje. Tada ostali modovi poprimaju oblik kuglinih funkcija za $l = 1, 2, \dots$, i nazivamo ih ne-radijalnim modovima. Promjenjive zvijezde tipa Mira pulsiraju u osnovnom radijalnom modu i shematski prikaz nalazi se na slici 2.6. Osnovni mod nema čvorove, osim u samom središtu zvijezde. Stoga akustički valovi promjenjivih zvijezda tipa Mira imaju najveće amplitude na površini.

¹¹Ova pretpostavka nije realna, no tražimo rezultat koji je gruba procjena, stoga je ista opravdana.



Slika 2.6: Prikaz radijalnih modova promjenjivih zvijezda. Slika a), b) i c) prikazuju osnovni, prvi viši, odnosno drugi viši mod. Isprekidane linije označavaju čvorove, odnosno područja na kojima je amplituda nula, a strelice pokazuje smjer kretanja plazme. Gornji red prikazuje analogne realizacije modova za cijev otvorenu na jednoj strani. Slika je preuzeta iz [10].

2.3.3 Mehanizmi titranja promjenjivih zvijezda

Kako nastaje akustični val, odnosno koji fizikalni procesi uzrokuju pulsiranje zvijezda? Jedan od prvih odgovora bio je ϵ -mehanizam. Činilo se očitim kako promjena u proizvodnji energije unutar jezgre zvijezde može uzrokovati opažene oscilacije, ali ubrzo se pokazalo kako to nije dovoljno [10]. Zatim je Eddington predložio novo rješenje, takozvani *Eddingtonov ventil*. Ako bi određenim slojevima zvijezde porastao opacitet¹² tijekom kompresije, te tako uspjeli zadržati fotone (energiju), ista bi se mogla osloboditi kada se tim slojevima (zbog tlaka) smanji opacitet, što bi konačno uzrokovalo širenje vanjskih slojeva. Pretpostavka kako se određenim slojevima treba povećati opacitet tijekom sažimanja predstavljala je problem za mehanizam Eddingtonovog ventila. Kramerov zakon za opacitet κ govori nam kako je isti proporcionalna kao $\kappa \propto \rho/T^{3.5}$. Tijekom sažimanja slojeva povećati će se temperatura i gustoća, ali opacitet ima jaču ovisnost o temperaturi, što znači kako opacitet slojeva pada njihovim sažimanjem, a to je suprotno od potrebnoga za opis mehanizma Eddingtonovog

¹²U astrofizici standardno se koristi opacitet κ kao svojstvo slojeva zvijezde da ne propuštaju fotone. Ako pretpostavimo da je I_0 početni intenzitet svjetlosti, nakon puta x intenzitet postaje: $I(x) = I_0 e^{-\kappa \rho x}$, gdje je ρ gustoća materije.

ventila. Ovakvo ponašanje opaciteta je glavni razlog zašto su promjenjive zvijezde rijetke, svega jedna u svakih 10^5 zvijezda [10].

Očito su potrebni posebni uvjeti kako bi se postiglo unutarnje stanje zvijezde koja može pulsirati. Ubrzo su znanstvenici otkrili postojanje *zone parcijalne ionizacije*, koja omogućava postizanje prije spomenutih uvjeta. Radi se o slojevima koji imaju djelomično ioniziranu plazmu, što omogućava da se dio energije prilikom kompresije potroši na ionizaciju neioniziranih atoma, a ne na podizanje temperature. S druge strane, tijekom širenja slojeva dio energije biti će emitiran natrag zbog reionizacije atoma. Konačni efekt je manja ovisnost temperature slojeva o volumenu, što prema Kramerovom zakonu znači slabiju ovisnost opaciteta o temperaturi, dok je ovisnost o gustoći plazme ostala ista. Tako su stvoreni uvjeti za zadržavanje fotona u zonama parcijalne ionizacije, odnosno sažimanjem plazme opacitet će rasti. Ovaj proces naziva se κ -mehanizmom, a dodatno je pojačan još jednim mehanizmom. S obzirom da se zone parcijalne ionizacije manje zagrijavaju (upravo opisanim mehanizmom) od susjednih slojeva, toplina će prelaziti sa susjednih (toplijih) slojeva na (hladnije) slojeve parcijalne ionizacije. Posljedica je još više zarobljene energije u slojevima parcijalne ionizacije. Ovaj mehanizam naziva se γ -mehanizmom.

U većini zvijezda postoje dva glavna područja parcijalne ionizacije. Prvo se sastoji od ioniziranog vodika H II i jednom ioniziranog helije He II. Ova zona naziva se *zonom parcijalno ioniziranog vodika* i nalazi se u slojevima temperature oko $1.5 \cdot 10^4$ K. Druga zona sadrži samo dvostruko ionizirani heliji He III, te se stoga naziva *He II parcijalno ionizirana zona* i karakteristična je na temperaturama $4 \cdot 10^4$. Modeli pokazuju kako je He II parcijalno ionizirana zona, koja se nalazi u dubljim slojevima, nužna za oscilacije promjenjivih zvijezda sa vrpce nestabilnosti [10]. S druge strane, zona parcijalno ioniziranog vodika nalazi se na manjim dubinama. Obzirom da zvijezda mijenja temperaturu tijekom širenja i sažimanja, dubina ove zone odgovarajuće će se mijenjati. Kada je zvijezda najmanja, unutarnji slojevi parcijalno ioniziranog vodika zadržavaju najviše zračenja¹³ koje će pogurati zonu prema površini i uzrokovati oslobađanje fotona. Ovo je glavni razlog zašto radijus δ Cefeja sa slike 2.5 pokazuje pomak u fazi u odnosu na ostale veličine. Treba napomenuti da ovi mehanizmi dobro opisuju oscilacije promjenjivih zvijezda sa vrpce nestabilnosti. Točni mehanizmi

¹³Prisjetimo se da u zonama parcijalne ionizacije sažimanjem raste opacitet.

promjenjivih zvijezda tipa Mira¹⁴ još uvijek nisu poznati u detalje, ali smatra se kako je temeljni mehanizam također κ -mehanizam [10].

Stoga oscilacije promjenjivih zvijezda možemo shematski opisati u nekoliko koraka:

1. Određeni slojevi (zone parcijalne ionizacije) zvijezde imaju veći opacitet, stoga bolje zadržavaju zračenje. U jednom trenutku tlak zračenja nadvlada gravitaciju i zvijezda se počinje širiti.
2. Tijekom širenja smanjuje se gravitacijsko privlačenje i tlak zračenja u vanjskim dijelovima zvijezde. Ipak, ovaj efekt je izraženiji za tlak.
3. U jednom trenutku tlak zračenja i gravitacijsko privlačenje se izjednače. Vanjski slojevi ipak se nastavljaju gibati prema van po inerciji. S obzirom da tlak zračenja brže opada od gravitacijskog privlačenja, vanjski slojevi usporavaju svoje gibanje i u jednom trenutku staju.
4. Kada su vanjski slojevi dosegli svoju maksimalnu udaljenost od središta, gravitacijsko privlačenje prema unutra jače je od tlaka zračenja prema van te počinje sažimanje zvijezde.
5. Sada se događa analogan proces, ali u obratnom smjeru.
6. Proces počinje ispočetka kada radijus zvijezda dosegne svoj minimum.

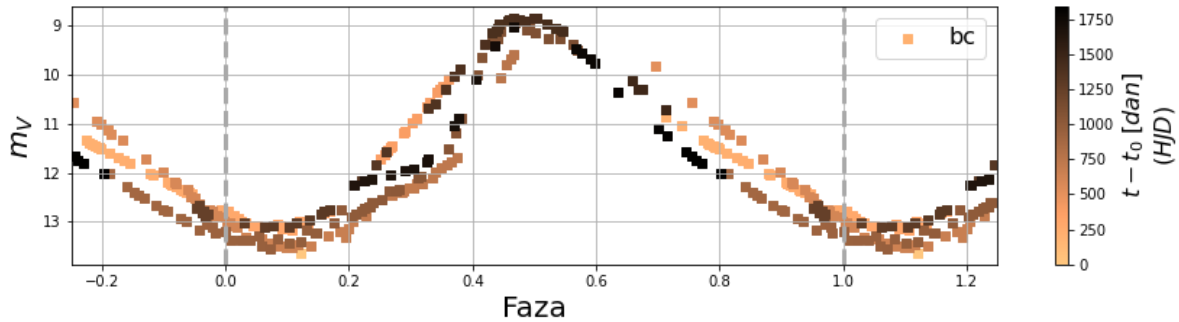
2.4 Promjenjive zvijezde dugih perioda

Promjenjive zvijezde su zvijezde čiji se sjaj mijenja u vremenu. Dije se prema uzroku promjene na intrinzične i ekstrinzične promjenjive zvijezde. Kod *intrinzičnih* promjenjivih zvijezda promjena sjaja je posljedica promjene fizikalnih svojstava same zvijezde. S druge strane, *ekstrinzične* promjenjive zvijezde promjenu opažene magnitude duguju vanjskim utjecajima, na primjer kao što je to slučaj kod dvojnih zvijezda koje orbitiraju jedna oko druge.

Krivulje sjaja su osnovni alat proučavanja promjenjivih zvijezda. To su krivulje promjene toka zračenja, ili opažene magnitude, u vremenu. Ispitivanjem ovih krivulja možemo odrediti radi li se o periodičnoj, kavaziperiodičnoj ili stohastičkoj pro-

¹⁴Mire nisu dio vrpce nestabilnosti.

mjeni sjaja. Ako su promjene sjaja periodičke, period se može odrediti računalnim metodama.



Slika 2.7: Primjer fazne krivulje promjenjive zvijezde tipa Mira opažene pregledom neba ASAS-SN. Na x-osi nalazi se faza, a na y-osi opažena magnituda u V filtru. Skala u boji predstavlja vrijeme mjerenja magnituda u odnosu na početno mjerenje izraženo u heliocentričkim Julijanskim danima (HJD). Kvadratom 'bc' je označena jedna od osam kamera ASAS-SN pregleda neba.

Kod periodičkih objekata s određenim periodima najčešće se koriste *fazne krivulje* kod kojih je vremenska ovisnost sjaja pretvorena u ovisnost sjaja o fazi, čime se dobije kompaktniji i pregledniji prikaz promjena sjaja. S obzirom da se mnoge podvrste promjenjivih zvijezda međusobno razlikuju po izgledu faznih krivulja, iste se mogu koristiti za klasifikaciju (novootkrivenih) zvijezda. Na slici 2.7 nalazi se primjer fazne krivulje promjenjive zvijezde tipa Mira iz ASAS-SN kataloga [14] (eng. *All Sky Automated Survey for SuperNovae*). Skala u boji predstavlja vrijeme mjerenja sjaja u odnosu na početno mjerenje izraženo u heliocentričkim Julijanskim danima (HJD)¹⁵

Od velikog broja vrsta promjenjivih zvijezda nas zanimaju mire. Nažalost, u znanstvenoj literaturi ne postoji općeprihvaćena podjela promjenjivih zvijezda, a često se naizmjenično koriste termini promjenjivih zvijezda dugih perioda i mira što može dovesti do zabune jer je pojam promjenjivih zvijezda dugih perioda općenitiji i obuhvaća i druge podvrste promjenjivih zvijezda (npr. multiperiodičke crvene divove s malim amplitudama oscilacija i sl.). Također na grani crvenih divova postoji gotovo kontinuiran prijelaz iz jednog tipa promjenjivih zvijezda u drugi, barem kad se gledaju periodi i amplitude oscilacija (makar fizikalni mehanizmi koji vode do promjena sjaja ne moraju biti jednaki kod raznih tipova) što dodatno otežava podjelu na tipove. Ja ću koristiti sljedeću nomenklaturu (motiviranu iz člankom [15]). Pod

¹⁵HJD je Julijanski datum popravljen za razliku između vremena potrebnog svjetlosti da prijeđe put od objekta do opažača i od objekta do Sunca. Na taj način opažanja postaju neovisna o položaju objekta na nebu, vremenu opažanja i dijelu dana.

pojmom promjenjivih zvijezda dugih perioda podrazumijevat ću intrinzično promjenjive hladne divove i superdivove čiji periodi (ako postoji periodičnost) poprimaju vrijednosti od nekoliko dana pa sve do preko tisuću dana.¹⁶ Dijele se na:

- *Promjenjive zvijezde koje stohastički mijenjaju svoj sjaj*: kako se može zaključiti iz njihova imena ovdje se radi o zvijezdama koje nemaju periodičku promjenu sjaja.
- *OSARG* (eng. *OGLE small amplitude red giants*): ovo su crveni divovi perioda $10 < P < 100$ dana te malih amplituda u *I* filtru $0.005 < A < 0.13$ mag [16].
- *Kvaziperiodične promjenjive zvijezde*: promjenjive zvijezde perioda od 20 pa do više od 2000 dana. Amplitude su im dosta veće od OSARG zvijezda, odnosno do 2 magnitude u *V* filtru. Ovaj tip zvijezda posjeduje periodičnost u faznim krivuljama, ali također posjeduju i određene nepravilnosti. Na primjer, iako se zvijezdi može pridijeliti period promjene sjaja, fazna krivulja malo se promijeni nakon svakog perioda. Također, smatra se kako kvaziperiodične promjenjive zvijezde titraju u osnovnom i višim modovima. Jedna od najpoznatijih zvijezda ovog tipa je zvijezda Betelgez u zvježđu Orion.
- *Promjenjive zvijezde tipa Mira*: zvijezde koje se nalaze na grani asimptotskih crvenih divova sa periodima promjene sjaja $80 \lesssim P \lesssim 1000$ dana te velikim amplitudama u *V* filtru (većim od 2.5 mag). Za razliku od kvaziperiodičnih promjenjivih zvijezda, mire pulsiraju samo u osnovnom modu¹⁷ te pokazuju više pravilnosti unutar faznih krivulja. Evolucijska faza tijekom koje se zvijezda klasificira kao mira je relativno kratka ($\approx 2 \cdot 10^5$ godina [18]), a zvijezda tijekom te faze odbaci velike količine materije ($10^{-6} - 10^{-5}$ Sunčevih masa godišnje [18]). Velike amplitude, titranje samo u osnovnom modu i pravilnost faznih krivulja čini mire preferiranim izborom u odnosu na kvaziperiodične zvijezde prilikom određivanja PL relacija i udaljenosti.

¹⁶U literaturi na engleskom jeziku koristi se skraćenica *LPV* (eng. *Long-period variables*)

¹⁷Ovo je još uvijek stvar znanstvene rasprave, ali postoje snažne indikacije kako bi ovo moglo biti točno [17]

2.5 Što su period-luminozitet relacije?

Fizikalni procesi opisani u potpoglavlju 2.3.3 glavni su uzrok oscilacija promjenjivih zvijezda sa vrpce nestabilnosti i (vjerojatno) mira. Osim što se koriste za izučavanje unutrašnjosti zvijezda, zahvaljujući periodičnim promjenama sjaja i pripadajućim faznim krivuljama može se lakše prepoznati neke od standardnih svijeća. Veza između perioda pulsacije i luminoziteta naziva se period-luminozitet (PL) relacijom. Jedan primjer takve relacije, za cefeide, vidjeli smo na slici 1.1. Kako bi se dobio linearni oblik relacije, x-os pretvaramo u logaritamsku skalu sa bazom 10. Tada općenita PL relacija ima sljedeći matematički oblik:

$$M = \alpha \log(P) + \beta \quad (2.13)$$

U prethodnoj jednadžbi P je period promjene sjaja, a M apsolutna magnituda definirana izrazom 2.6. Koeficijenti α i β predstavljaju nagib pravca odnosno odsječak na y-osi. Motivirani fizikalnom pozadinom PL relacija, želimo pronaći što je moguće korisniju i robustniju standardnu svijeću. Također, želimo napraviti i neovisnu provjeru ostalih metoda određivanja udaljenost.

Za određivanje PL relacije potrebno je poznavanje perioda i luminoziteta promjenjivih zvijezda. Periode možemo odrediti relativno lako za monoperioidične zvijezde velikih amplituda, što su upravo karakteristike mira. Određivanje luminoziteta predstavlja najveći problem, jer zahtjeva poznavanje udaljenosti. Precizne udaljenosti poznate su samo za nama najbliže zvijezde, tj. u relativno malom volumenu s obzirom na veličinu Mliječnog puta. Tom problemu možemo doskočiti tako što promatramo zvijezde u obližnjim (satelitskim) galaksijama Mliječnog puta ili npr. kuglastim skupovima. S obzirom da su njihove udaljenosti velike u odnosu na njihovu prostornu dimenziju, možemo odrediti nagib PL relacija određenog tipa promjenjivih zvijezda. Nažalost, u tom slučaju ne možemo kalibrirati PL relaciju jer ne znamo koliki je β , odnosno odsječak na y-osi, dok se ne poslužimo nekom drugom metodom za određivanje udaljenosti do tog skupa/galaksije u kojem se promatrane promjenjive zvijezde nalaze. U novije vrijeme, paralakse dostupne zahvaljujući mjerenjima koje provodi svemirska letjelica *Gaia*, kalibraciju PL relacija možemo napraviti i pomoću galaktičkih zvijezda, te istu usporediti s ranije dobivenim rezultatima.

2.6 Wesenheit indeks

Osim mjerenja udaljenosti, veliki problem prilikom određivanja PL relacija predstavlja apsorpcija i raspršenje elektromagnetskog zračenja (ekstinkcija). Ona je posljedica *Rayleighovog raspršenja* i apsorpcije fotona na međuzvezdanoj tvari koja se nalazi duž doglednice. Rayleighovo raspršenje je elastično raspršenje fotona na česticama čija je veličina puno manja od valne duljine zračenja. Intenzitet raspršene svjetlosti I jako ovisi o njezinoj valnoj duljini λ :

$$I \propto \frac{1}{\lambda^4} \quad (2.14)$$

Iz prethodne jednadžbe vidimo kako je raspršenje daleko veće za fotone manjih valnih duljina, poput plave svjetlosti. Zbog toga objekt kojeg opažamo čini se crvenijim nego što uistinu jest. S obzirom na to da opažena magnituda ne ovisi samo o udaljenosti objekta nego i o količini ekstinkcije, vezu između opažene i apsolutne magnitude možemo napisati kao:

$$m_\lambda = M_\lambda + 5 \log_{10}(d) - 5 + A_\lambda \quad (2.15)$$

U jednadžbi 2.15, $A_\lambda > 0$ predstavlja popravku opažene magnitude zbog ekstinkcije zračenja, odnosno količinu ekstinkcije na valnoj duljini λ .

S obzirom na to da opažanja zvijezda možemo vršiti u određenim fotometrijskim filtrima, *boju zvijezde* možemo definirati kao razliku opaženih magnituda u dva različita filtra. Najčešće se koriste B i V filtri, stoga boju definiramo kao:

$$B - V = m_B - m_V \quad (2.16)$$

U prethodnoj jednadžbi opažene magnitude definirane su jednadžbom 2.15. Kako svjetlije zvijezde imaju manje magnitude slijedi da negativna $B - V$ boja predstavlja plavije objekte, a pozitivna crvenije. Često se koristi i takozvani *višak boje* (eng. *Color excess*) $E_{(B-V)}$ koji se definira kao razlika između opažene boje i intrinzične boje promatranog objekta. Posljednja se definira kao boja koju bi opazili kada ne bi postojala ekstinkcija, odnosno radi se o boji definiranoj preko opaženih magnituda u

kojima je član A_λ nula. Tada imamo:

$$E_{(B-V)} = (B - V)_{opaženo} - (B - V)_{intrinzično} = A_B - A_V \quad (2.17)$$

U gornjoj jednadžbi druga jednakost slijedi uvrštavanjem jednadžbi 2.15 i 2.16, gdje za intrinzičnu boju vrijedi $A_\lambda = 0$. Iz jednadžbe 2.17 vidimo kako je promjena boje posljedica različite ekstinkcije na različitim valnim duljinama, odnosno Rayleighovog raspršenja (jednadžba 2.14).

Efekt ekstinkcije ipak se može izbjeći upotrebom formulacije koja ne ovisi o raspršenju i apsorpciji, takozvanim Wesenheit indeksom. Radi se o linearnoj kombinaciji magnitude i boje na sljedeći način [19]:

$$W = V_{opaženo} - R \cdot (B - V)_{opaženo} \quad (2.18)$$

U prethodnoj jednadžbi $R = A_V/E_{(B-V)}$ je omjer ukupne i selektivne apsorpcije¹⁸. Wesenheit indeks može se definirati i pomoću drugih filtara.

Relativno je lako dokazati da je W neovisan o ekstinkciji koristeći jednadžbe 2.17 i 2.18:

$$\begin{aligned} W &= V_{opaženo} - R \cdot (B - V)_{opaženo} \\ &= V_{intrinzično} + A_V - R \cdot E_{(B-V)} - R \cdot (B - V)_{intrinzično} \\ &= V_{intrinzično} + A_V - A_V - R \cdot (B - V)_{intrinzično} \\ &= V_{intrinzično} - R \cdot (B - V)_{intrinzično} \end{aligned}$$

Vidimo kako je definicija W identična za opažene i intrinzične vrijednosti, dakle Wesenheit funkcija ne ovisi o ekstinkciji.

U ovom radu koristit ću Wesenheit indekse W_{JK} [8] i W_G [9] definirane za Veliki Magellanov oblak i pretpostaviti ću da karakteristike međuzvjezdane tvari ne ovise o

¹⁸Ova veličina ovisi o količini međuzvjezdane tvari duž dogleđnice, stoga je funkcija nebeskih koordinata.

položaju objekta kojeg proučavamo:

$$W_{JK} = K_S - 0.686 \cdot (J - K_S) \quad (2.19)$$

$$W_G = G_{RP} - 1.3 \cdot (G_{BP} - G_{RP}) \quad (2.20)$$

Ovdje su K_S , J , G_{BP} i G_{RP} opažene magnitude iz 2MASS i Gaia arhive.¹⁹ S obzirom da se u slučaju mira radi o zvijezdama čiji je maksimum zračenja u crvenom ili bliskom infracrvenom dijelu spektra (pa ne očekujemo tako jake efekte vezane uz Rayleighovo raspršenje kao npr. za jako vruće zvijezde), te s obzirom da ne postoje tako velike razlike u gustoći i sastavu tvari za zvijezde koje proučavamo opravdano je koristiti Wesenheit indekse definirane jednadžbama 2.19 i 2.20.

¹⁹U sljedećem poglavlju detaljnije su objašnjene spomenute opažene magnitude i arhive.

3 Podaci

Ovo kratko poglavlje posvećeno je diskusiji o podacima koje koristim kako bih odredio PL relacije mira. U nastavku ću opisati tehničke osobine pojedinih pregleda neba i svemirske letjelice Gaia. Treba napomenuti kako sam istaknuo sam one fizikalne veličine iz arhiva koje su relevantne za ovaj rad.

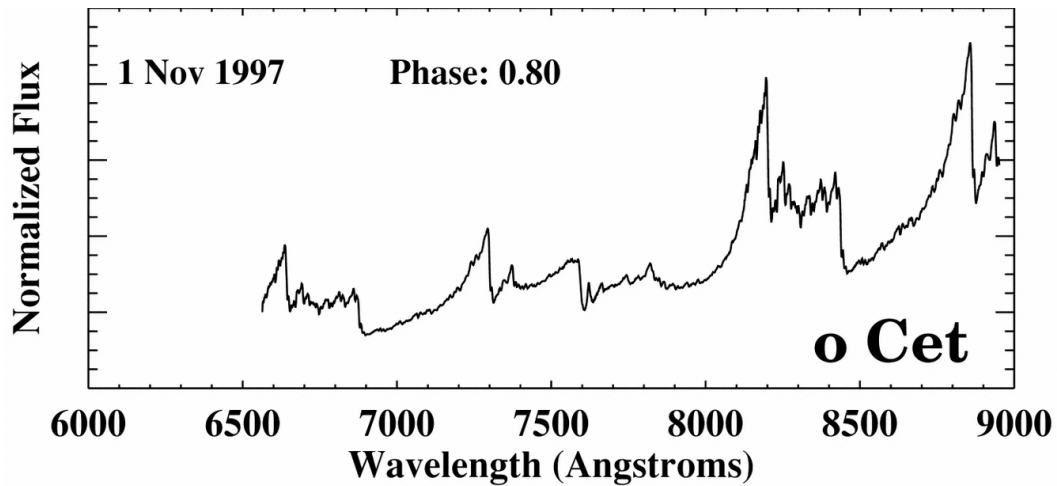
3.1 Arhive podataka

Fazne krivulje mira prikupljenje su iz ASAS-SN arhive²⁰ [14, 20]. Riječ je o pregledu neba sastavljenom od 24 kamere raspoređene na četiri različite lokacije: Havaje, Čile, Južnu Afriku i Teksas. Tehničke mogućnosti ASAS-SN teleskopa su takve da svaka 2-3 dana uspiju snimiti cijelo nebo vidljivo s pojedine lokacije. Osnovna zadaća im je potraga za supernovama, ali ovi teleskopi prikupili su podatke i o određenom broju promjenjivih zvijezda. Između 2014. i 2018. godine ASAS-SN je odredio oko 61.5 milijuna faznih krivulja unutar V filtra. Od toga je oko 426 000 klasificirano kao promjenjive zvijezde. Bitna tehnička osobina je osjetljivost mjernih instrumenata na opažene magnitude unutar V filtra, od 10 do 17 mag. Ovim intervalom određeni su najsjajniji i najtamniji objekti koji se nalaze unutar ASAS-SN arhive podataka. Osim faznih krivulja, iz ASAS-SN arhive koristit ću informacije o periodima promjene sjaja te klasifikaciju promjenjivih zvijezda. Unutar ove arhive 10329 zvijezda je klasificirano kao promjenjive zvijezde tipa Mira, što je osnovni skup podataka za naše razmatranje.

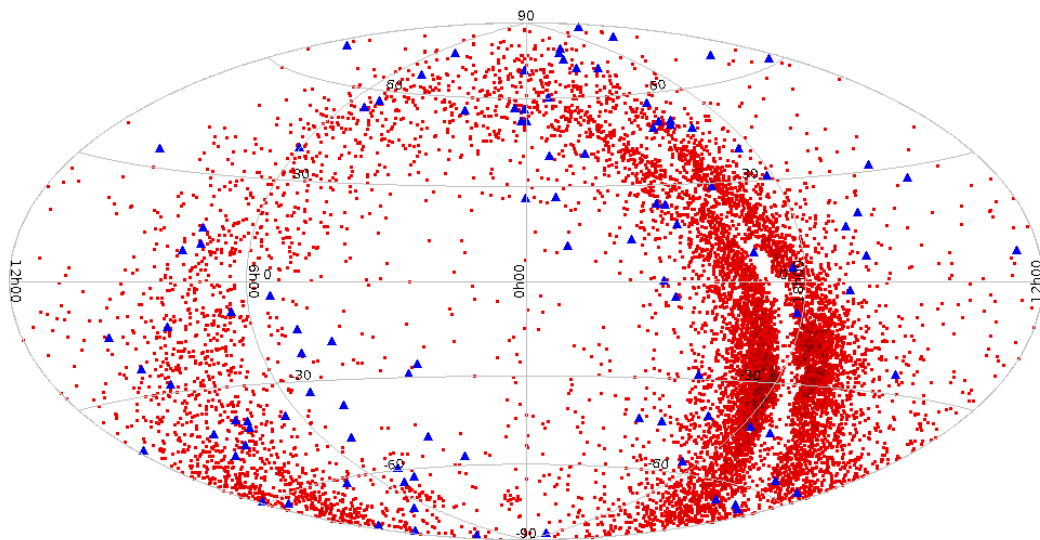
Mire emitiraju najveću količinu zračenja u crvenom i bliskom infracrvenom dijelu elektromagnetskog spektra (primjer na slici 3.1). Pregled neba 2MASS [22] (eng. *The Two Micron All Sky Survey*) dobro pokriva valne duljine upravo iz tog dijela spektra. Ovo je pregled neba koji pokriva 99.998% nebeske sfere u tri različita filtra: J , H i K_S . Radi se o fotometrijskim filtrima na $1.25 \mu m$, $1.65 \mu m$ odnosno $2.16 \mu m$. Sastoji se od dva teleskopa promjera 1.3 metra smještena u Arizoni i Čileu. Iako je 2MASS bio u pogonu do 2001. godine, njegovi podaci koriste se vrlo intenzivno i danas, čemu ide u prilog činjenica da njegova arhiva broji 471 milijun točkastih izvora. Tehnički detalji korištene instrumentacije i 2MASS arhive mogu se pronaći u [22].

Sve prije navedene arhive podataka su rezultat višegodišnjih pregleda neba tele-

²⁰Riječi "arhiva" i "katalog" često se koriste naizmjenično.



Slika 3.1: Primjer spektra zvijezde o Ceti, u rasponu 600-900 nm. Možemo primijetiti kako zvijezda više zrači u području većih valnih duljina. Spektar je preuzet iz [21].



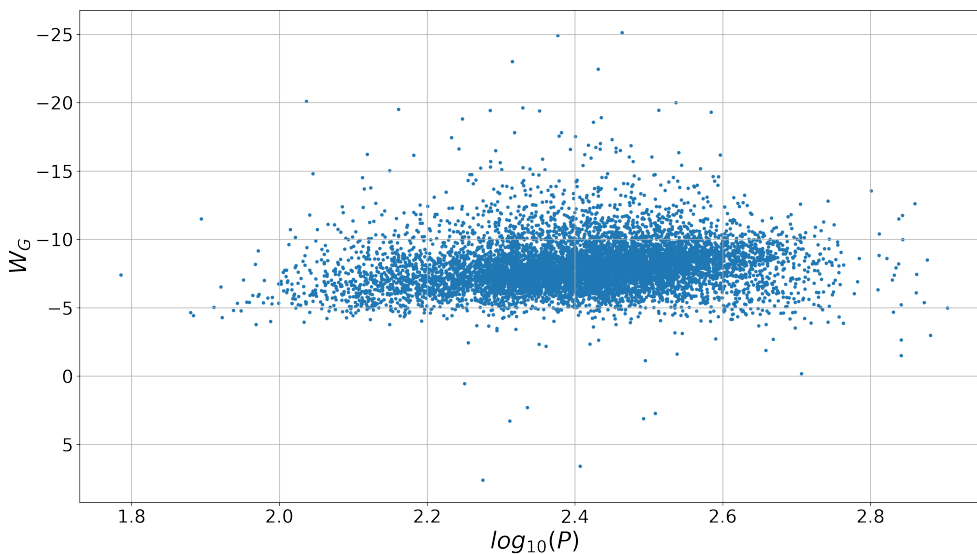
Slika 3.2: Slika prikazuje raspodjelu zvijezda iz ASAS-SN kataloga koje su klasificirane kao mire, u ekvatorijalnim koordinatama. Svaka crvena točka predstavlja jednu zvijezdu, a plavi trokuti pokazuju samo one mire koje imaju relativnu pogrešku paralakse manju od 5%. Vodoravno položene linije predstavljaju rektascenziju izraženu u satima, a horizontalne deklinaciju u stupnjevima. Obje koordinate izražene su u J2000.0 epohi.

skopa smještenih na Zemlji. Za razliku od njih, teleskop Gaia je svemirska letjelica smješten u Lagrangeovoj točki L2 sa glavnim ciljem mjerenja paralaksi, vlastitih gibanja i sjaja zvijezda. Gaia je aktivna od 2013. godine, a najnoviji katalog podataka je Gaia DR3 (eng. *Data Release 3*) [23]. Fotometrijska opažanja vrše se kroz širokopojasni G filter (330 - 1050 nm), plavi spektrofotometar G_{BP} (330 - 680 nm) i crveni spektrofotometar G_{RP} (640 - 1050 nm). Osim Gaia DR3 podataka koristim periode promjenjivih zvijezda iz Gaia DR2 (eng. *Data Release 2*) kataloga [24].

4 Metoda preciznih paralaksi

4.1 Priprema podataka

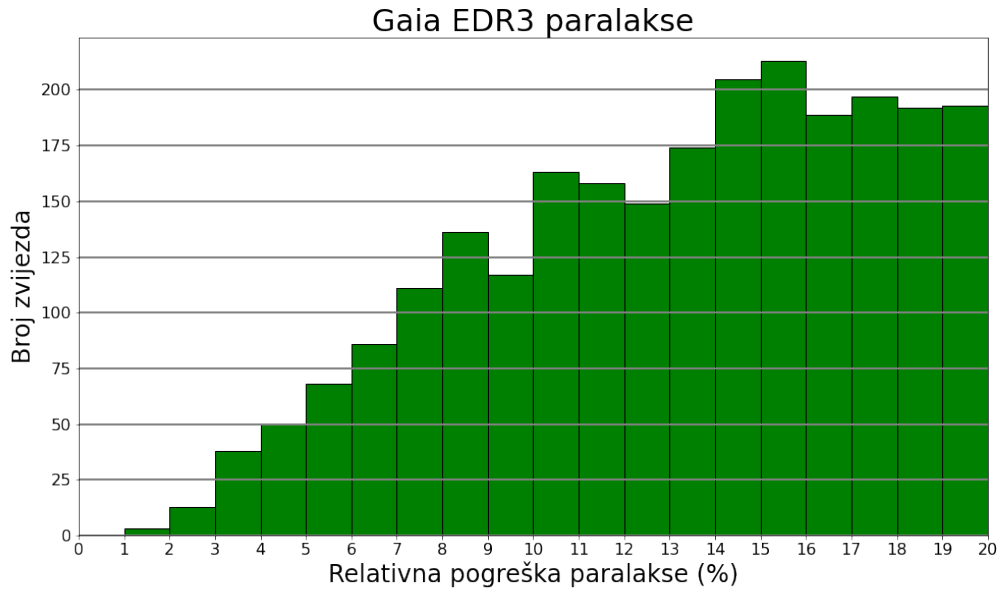
Polazni skup podataka su sve zvijezde iz ASAS-SN arhive klasificirane kao promjenjive zvijezde tipa Mira (10329). S obzirom na to da su nam potrebne apsolutne magnitudi, odnosno apsolutni Wesenheit indeksi, nužno je poznavati udaljenosti zvijezda. ASAS-SN katalog ne sadrži spomenutu veličinu, stoga svaku zvijezdu potrebno je unakrsno povezati s paralaksama iz Gaia DR3 arhive. Na sreću, ASAS-SN arhiva sadrži za svaku miru pripadni identifikacijski broj iz Gaia DR3 kataloga, stoga je postupak prikupljanja paralaksi olakšan. Na slici 3.2 nalazi se koordinatni prikaz raspodjele položaja zvijezda iz spomenutog uzorka, u ekvatorijalnim koordinatama. Promatrajući sliku možemo zaključiti kako se glavnina zvijezda nalazi u galaktičkom disku. Svaka zvijezda je predstavljena jednom crvenom točkom, a plavim trokutima označene su zvijezde čije relativne pogreške paralakse su manje od 5%.



Slika 4.1: Graf prikazuje PL relaciju mira iz ASAS-SN kataloga sa Wesenheit indeksom W_G definiranim izrazom 2.20. Uzorak se sastoji od 8970 zvijezda jer su iz početnog skupa izbačene zvijezde bez vrijednosti za paralaksu, srednju magnitudu u G filtru, boju i period te sve zvijezde sa nepozitivnim paralaksama.

Na slici 4.1 prikazana je ovisnost W_G magnitude o logaritmu perioda za podskup početnog uzorka iz kojeg su odbačene sve zvijezde koje nisu imale vrijednosti paralakse, srednje magnitude u G filtru, $BP - RP$ boju, period promjene sjaja i pozitivnu

paralaksu u kombinaciji Gaia i ASAS-SN kataloga. Takav uzorak ima 8970 zvijezda za razliku od početnih 10329. Možemo primijetiti kako je rasap točaka duž y-osi oko 2 mag za Wesenheit indeks definiran izrazom 2.20. Stoga je početni skup podataka potrebno pročititi.



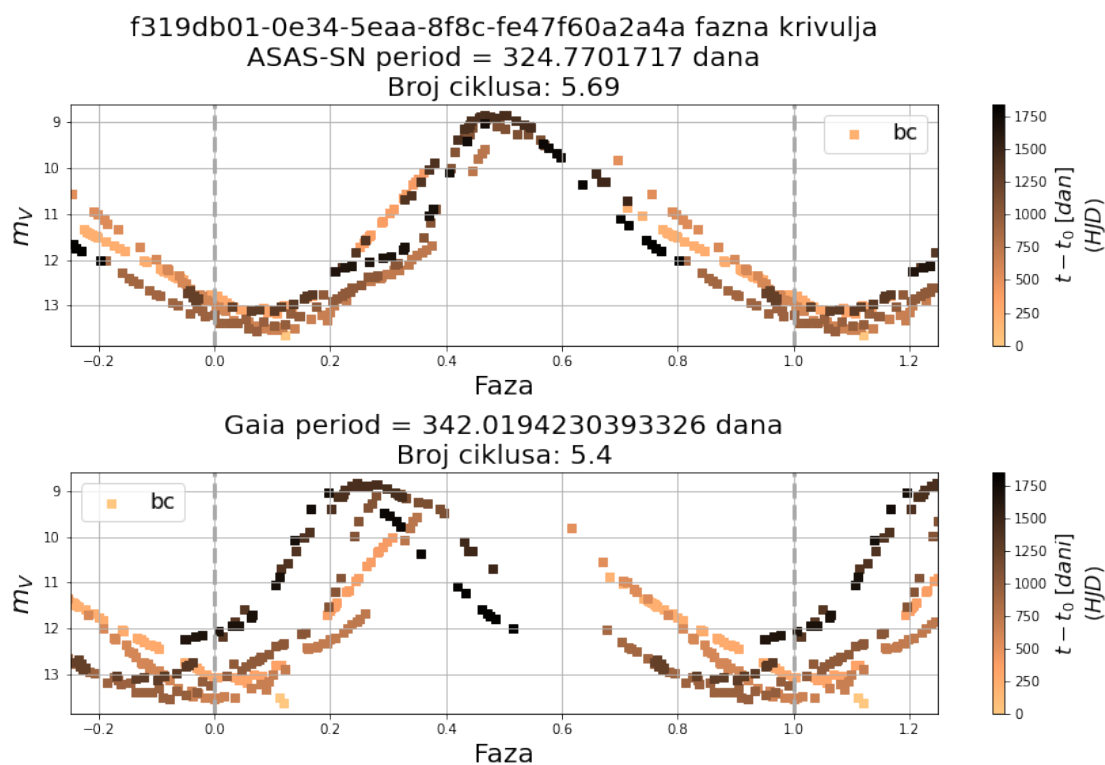
Slika 4.2: Ovaj histogram prikazuje broj zvijezda ovisno o relativnoj pogreški paralakse. Na x-osi prikazana ja skala do 20% u koracima od 1%.

Kako se na y-osi nalaze apsolutne magnitude, koje su funkcija udaljenosti, veliki rasap uzorka sa slike 4.1 može se smanjiti pročišćavanjem zvijezda po relativnoj pogreški paralakse. Slika 4.2 prikazuje histogram broja zvijezda u ovisnosti o relativnoj pogreški paralakse. Primijetimo kako mali broj zvijezda ima jako precizne paralakse ($\sigma_{\varpi}/\varpi \leq 0.02$). Nažalost, ovakav uzorak je suviše malen²¹. Naš izbor gornje granice relativne pogreške paralakse temelji se na sljedećem: želimo zvijezde sa što većom preciznošću paralakse, ali ne želimo jako mali uzorak. Stoga uzimamo granicu relativne pogreške paralakse od 5%. U početnom uzorku mira iz ASAS-SN kataloga nalazi se 104 zvijezde (plavi trokuti na slici 3.2) koje zadovoljavaju ovaj uvjet ($\sigma_{\varpi}/\varpi \leq 0.05$). Ovaj uzorak predstavlja svega oko 1% početnog, a detaljna analiza nalazi se u dodatku A.

²¹Riječ je o samo 3 zvijezde.

4.2 Fazne krivulje

Osim filtriranja po relativnoj pogrešci paralakse, moramo provjeriti zadovoljava li skup iz kojeg se određuju PL relacije i druge kriterije. Stoga u trenutnom poglavlju opisujem metode kojima dodatno nastojim poboljšati preciznost podataka i/ili doći do novih uvida u strukture PL relacija mira.



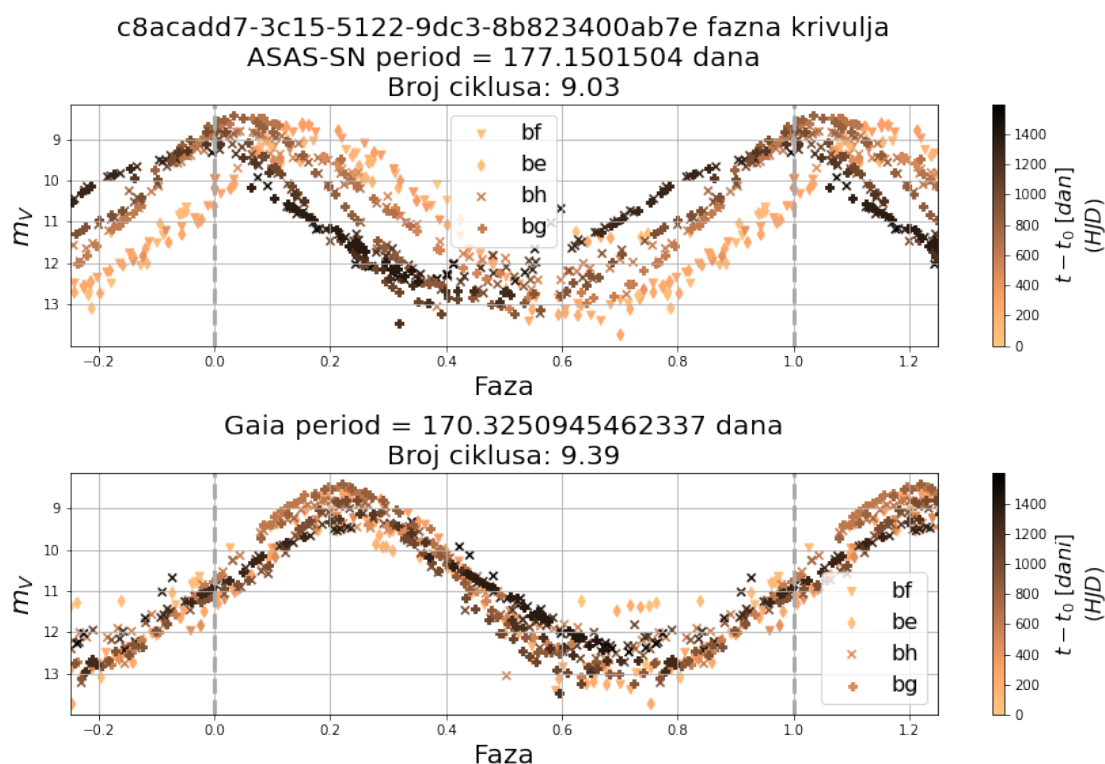
Slika 4.3: Ovo su dvije fazne krivulje mire iz ASAS-SN kataloga. Gornji graf prikazuje pripadnu faznu krivulju koristeći period promjene sjaja iz ASAS-SN kataloga, dok donji prikazuje isto, ali koristeći period iz Gaia DR2 kataloga. Boja predstavlja vrijeme pojedinog mjerenja u odnosu na prvo mjerenje sjaja iste zvijezde. Ovo je primjer zvijezde čiji period je točnije određen u ASAS-SN katalogu, što se može uočiti iz izgleda fazne krivulje. Također je vidljivo i da svaki ciklus pulsacije ne rezultira jednakom faznom krivuljom.

U potpoglavlju 2.4 definiran je pojam krivulja sjaja i njima pripadnih faznih krivulja. Transformacija iz vremenske ovisnosti (t) na x-osi u odgovarajuću faznu (ϕ) promjenjive zvijezde perioda P računa se pomoću sljedeće relacije:

$$\phi = \frac{t}{P} - \left\lfloor \frac{t}{P} \right\rfloor \quad (4.1)$$

U prethodnoj jednadžbi $[x]$ predstavlja pod funkciju, odnosno funkciju koja računa najveći cijeli broj koji je jednak ili manji od x . Primjeri faznih krivulja nalaze se na

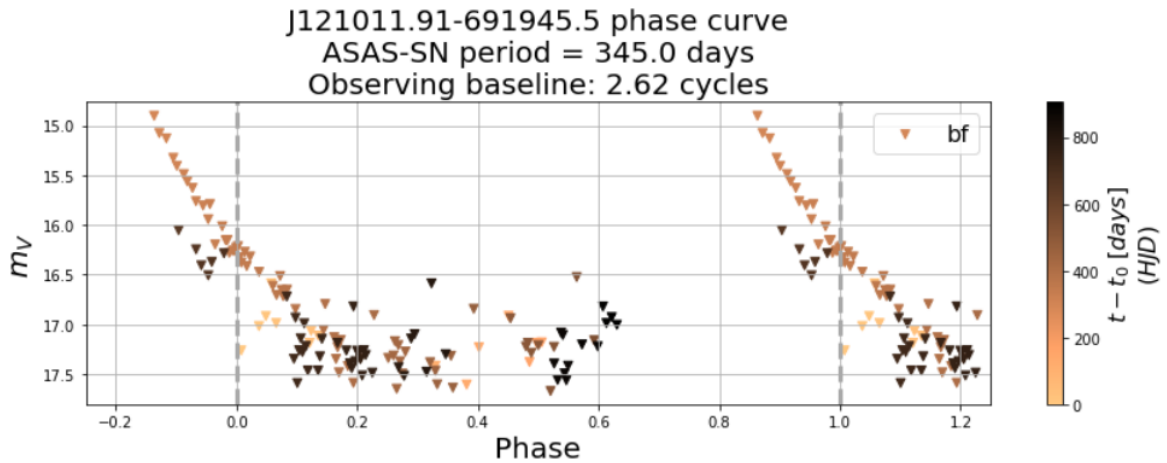
slikama 2.7, 4.3, 4.4 i 4.6.



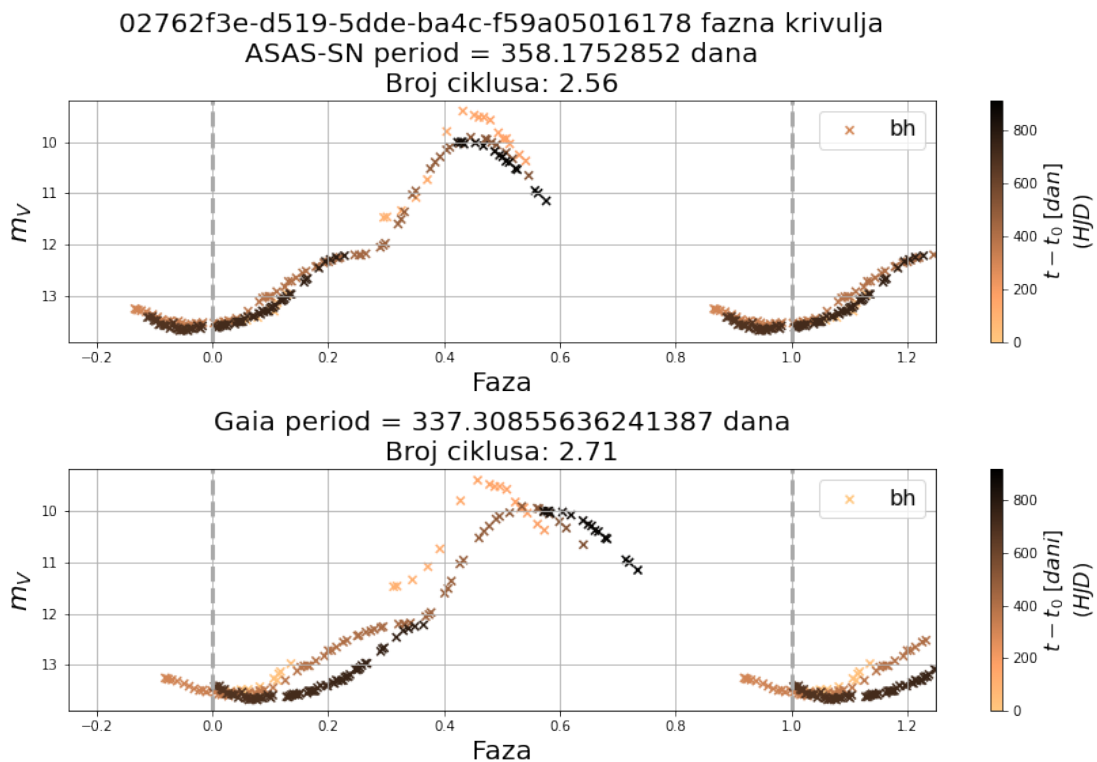
Slika 4.4: Slika prikazuje isto što i 4.3, ali za drugu promjenjivu zvijezdu iz ASAS-SN kataloga. Ovo je primjer zvijezde čija fazna krivulja bolje zadovoljava kriterije mira za period promjene sjaj iz Gaia DR2 arhive.

Za sve preostale 104 mire preuzeo sam njihove pripadne krivulje sjaja iz ASAS-SN kataloga promjenjivih zvijezda. Samostalno sam napisao Python računalni kod (Dodatak B) koji upotrebom jednadžbe 4.1 pretvara pripadnu vremensku ovisnost u faznu i ispisuje dvije fazne krivulje, jednu sa periodom promjene sjaja iz ASAS-SN kataloga, a drugu sa periodom iz Gaia DR2 kataloga. Na slici 4.3 nalazi se jedan primjer ispisa spomenutog računalnog koda. Bojom je označena vremenska ovisnost pojedinog mjerenja u odnosu na prvo mjerenje sjaja iste zvijezde. Simbolima *ba-bd* i *be-bh* označene su po jedna od četiri kamere sa teleskopa na Havajima odnosno Čileu. Kod tamnijih zvijezda primjećuju se instrumentalni efekti koji su posljedica granične magnitude sustava (tj. konačne osjetljivosti). Preciznije, opažanja tamnija od $V \approx 17$ mag jako su odstupala od periodičnog ponašanja. Stoga sam te točke izbacio iz razmatranja. Na slici 4.5 nalazi se primjer takve fazne krivulje.

Za sve zvijezde ispitao sam njihove fazne krivulje. Morale su zadovoljavati potrebne kriterije: amplituda u V filtru veća od 2.5 mag, periodi duži od 100 dana te sinusoidalni oblik krivulje (iz kojeg možemo postulirati kako zvijezda titra u osnov-



Slika 4.5: Primjer fazne krivulje tamnije zvijezde. Možemo primijetiti instrumentalne efekte za sve točke tamnije od $V \approx 17$ mag.



Slika 4.6: Primjer fazne krivulje sa nedostatkom mjerenja. Iako je broj ciklusa veći od dva, mjerenja nikada nisu pokrila cijelu krivulju sjaja. To je posljedica vrijednosti perioda koja je približno jednaka revoluciji Zemlje oko Sunca, pa se u svakom novom ciklusu fazna krivulja dopuni relativno malim brojem točaka.

nom modu). Ako je zvijezda zadovoljila sve spomenute kriterije, usporedio sam za koji period (ASAS-SN ili Gaia DR2) su isti bolje ispunjeni, i taj period odabrao kao relevantni za tu zvijezdu. Na slici 4.3 i 4.4 nalaze se primjeri zvijezda čije fazne krivulje bolje zadovoljavaju potrebne kriterije sa periodom promjene sjaja iz ASAS-SN odnosno Gaia DR2 kataloga.

Postoje fazne krivulje koje pokazuju nedostatak mjerenja u određenim dijelovima krivulje, iako je broj ciklusa relativno velik.²² Zadržane su one krivulje kojima je nedostajalo manje od 25% faze. Takve krivulje imale su periode približno jednake revoluciji Zemlje oko Sunca (≈ 365 dana). Stoga je uvijek u istom dijelu krivulje Sunce onemogućilo bilo kakvo mjerenje sjaja objekta. Jedan takav primjer nalazi se na slici 4.6.

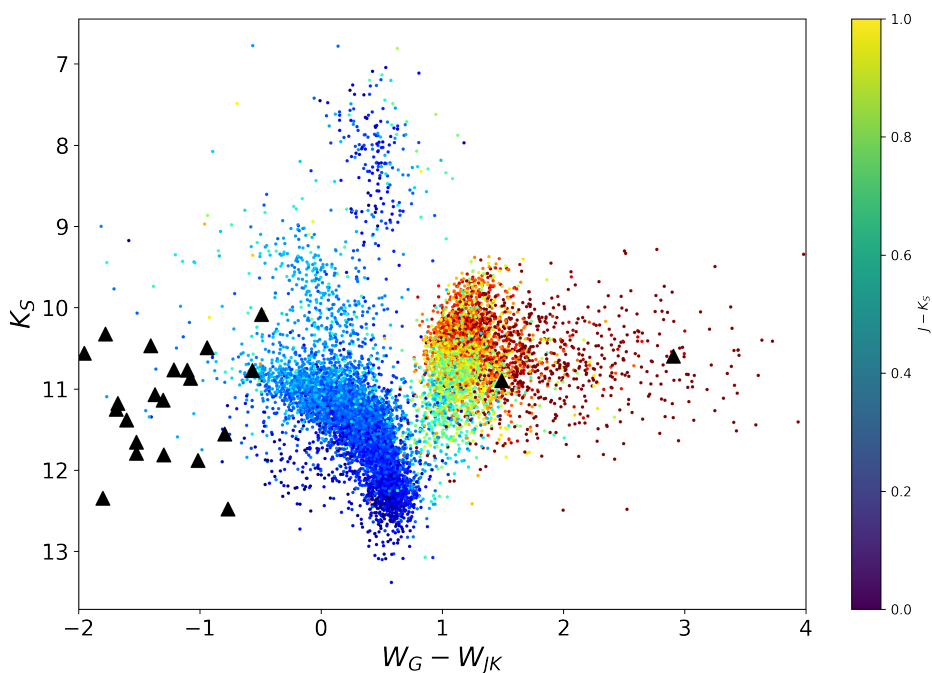
Konačni uzorak zvijezda, nakon ispitivanja njihovih faznih krivulja, i filtriranja po relativnoj pogrešci perioda ($< 10\%$), sastoji se od 23 zvijezde. Iako se radi o malom uzorku, sve relevantne veličine su dobro određene, a karakteristike zvijezda, kao promjenjivih zvijezda tipa Mira, dobro su definirane.

4.3 Zastupljenost ugljika i kisika u zvijezdama

Zvijezde između 0.5 i 8 Sunčevih masa doći će u fazu asimptotskih crvenih divova. Jednom kada se nalaze u spomenutoj evolucijskoj fazi, moguće ih je podijeliti prema kemijskom sastavu na zvijezde bogate kisikom (O-bogate) i zvijezde bogate ugljikom (C-bogate). Ova podjela određuje se na temelju zastupljenosti elemenata u zvijezdanoj atmosferi. Većina zvijezda tijekom ove faze su O-bogate. Ipak će masivnije od ovih zvijezda izmiješati produkte nuklearnih reakcija u dubini zvijezde sa vanjskim slojevima i na taj način povećati, između ostalog, udio ugljika na površini. Ovim procesom zvijezda prelazi iz O-bogate u C-bogatu. U kontekstu PL relacija, želimo napraviti spomenutu podjelu jer je poznato kako C-bogate i O-bogate zvijezde prate različite PL relacije. Stoga na skupu od 23 zvijezde radim istu podjelu kako bih odredio potencijalno postojanje dodatnih struktura. Pri tome koristim metodu iz članka [25], temeljenu na fotometriji iz Gaia i 2MASS kataloga. Metoda uz pomoć grafa ovisnosti K_S magnitude ($2.16 \mu m$) o razlici Wesenheit indeksa $W_G - W_{JK}$ (izrazi 2.20 i 2.19) klasificira zvijezdu sa asimptotske grane crvenih divova kao O- ili C-bogatu. Prvo reproduciram njihove rezultate. Iz Gaia DR2 arhive uzimam zvijezde klasificirane kao mire/kvaziperiodičke promjenjive zvijezde²³ koje se nalaze unutar Velikog Magellanovog oblaka. Pri tome koristim iste uvjete na zvijezde kao i u članku [25], koji će osigurati da su izabrane zvijezde samo iz Velikog Magellanovog

²²Broj ciklusa je ukupno vrijeme promatranja zvijezde podijeljeno sa njezinim periodom.

²³U Gaia DR2 arhivi ne postoji detaljna podjela između promjenjivih zvijezda tipa Mira i kvaziperiodičkih promjenjivih zvijezda. Oba tipa promjenjivih zvijezdi udružena su u istu grupu.



Slika 4.7: Na x-osi grafa nalazi se razlika Wesenheit magnituda $W_G - W_{JK}$, a na y-osi magnituda u K_S filtru. Boja predstavlja razliku magnituda $J - K_S$. Možemo uočiti očitu podjelu zvijezda na plavi skup lijevo od $W_G - W_{JK} \approx 1$ i zeleno-crveni skup desno od iste linije. Skupovi odgovaraju C-bogatim odnosno O-bogatim zvijezdama. Graf je reproduciran iz članka [25]. Crnim trokutima prikazane su pozicije unutar grafa našeg uzorka od 23 zvijezde. Vidimo očitu podjelu uzorka na 21 O-bogatu zvijezdu i 2 C-bogate.

oblaka:

- rektascenzija: između 50 i 105 stupnjeva
- deklinacija: između -77 i -61 stupanj
- vlastito gibanje u smjeru rektascenzije: između 1.2 i 2.5 lučnih milisekundi godišnje
- vlastito gibanje u smjeru deklinacije: između -0.8 i 1.5 lučnih milisekundi godišnje
- paralaksa: manja od 0.5 lučne milisekunde

Konačni graf nalazi se na slici 4.7. Boja na grafu predstavlja razliku magnituda $J - K_S$. Na grafu su uočljive dvije skupine zvijezda, plavi skup lijevo i crveno-zeleni

desno od $W_G - W_{JK} \approx 1$. Prvi skup odgovara O-bogatim zvijezdama, dok posljednji odgovara C-bogatim zvijezdama. Ako isti postupak ponovim za uzorak od 23 zvijezde, dobivam raspodjelu prikazanu crnim trokutima na istom grafu (slika 4.7). Očita je podjela na 21 O-bogatu i 2 C-bogate zvijezde. Bitno je napomenuti kako se na y-osi nalazi opažena K_S magnituda. S obzirom na to da su u članku [25] koristili zvijezde iz Velikog Magellanovog oblaka, a ja sam računao apsolutne magnitude galaktičkih mira, potrebno je na uzorak dodati modul udaljenosti Velikog Magellanovog oblaka $\mu = 18.45$ ([26]).

4.4 Rezultati

Uzorak mira preostao nakon primjene kriterija na preciznost paralakse i dobre karakteristike faznih krivulja sadrži relativno mali broj zvijezda (23). Bez obzira na to, moguće je provesti statističku analizu koristeći te podatke. Pri tome koristim općenit oblik PL relacije zadan izrazom 2.13 i `polyfit`²⁴ metodu iz `numpy`²⁵ paketa za Python. Radi usporedivosti s rezultatima iz [8] u tablicama sam koeficijente u K_S - $\log(P)$ i W_{JK} - $\log(P)$ ravninama napisao u obliku $\alpha(\log(P) - 2)$. Rezultati analize nalaze se na slici 4.8.

	Naši rezultati		Soszyński (2007.)	
	α	β	α	$\beta - \mu$
K_S	-3.9 ± 0.5	-5.7 ± 0.2	-4.17 ± 0.08	-5.86 ± 0.04
W_{JK}	-4.1 ± 0.5	-6.6 ± 0.2	-4.34 ± 0.09	-6.61 ± 0.04
W_G	-3.8 ± 0.8	-0.5 ± 2	-	-

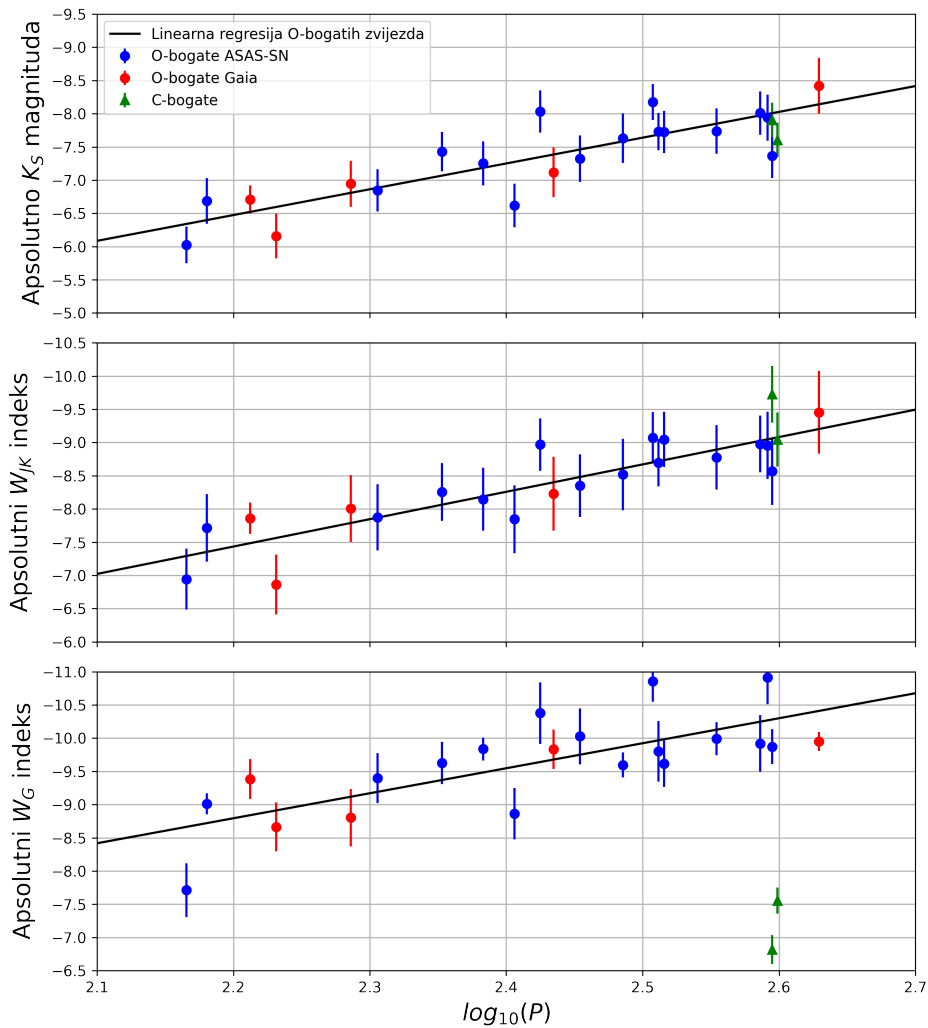
Tablica 4.1: Tablica koeficijenata pravaca linearne regresije O-bogatih mira unutar PL relacija. Rezultate smo usporedili sa koeficijentima iz [8]. S obzirom kako su njihove relacije određene za mire iz Velikog Magellanovog oblaka, od koeficijenta β oduzeli smo modul udaljenosti $\mu = 18.45$. S obzirom na to da nisu odredili PL relaciju sa W_G indeksom, te informacije nema u tablici. Bitno je napomenuti da je koeficijent α u K_S - $\log(P)$ i W_{JK} - $\log(P)$ ravninama zapravo zadan sa $\alpha(\log(P) - 2)$. Ovo sam napravio kako bih mogao usporediti rezultate sa onima iz [8].

Odredio sam tri PL relacije sa sljedećim veličinama na y-osi: K_S magnituda, Weissenheit indeks W_{JK} i W_G . Bitno je napomenuti kako je statistička analiza provedena samo na O-bogatim zvijezdama jer je uzorak C-bogatih suviše malen, stoga nije moguće donijeti pouzdane statističke zaključke. Na grafu 4.8 može se primijetiti kako unutar K_S - $\log(P)$ i W_{JK} - $\log(P)$ ravnina C-bogate i O-bogate zvijezde dijele

²⁴<https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.polyfit.html>

²⁵<https://numpy.org/>

iste PL relacije, dok je u W_G - $\log(P)$ ravnini došlo do njihovog odvajanja. Opet treba napomenuti kako je uzorak od 2 C-bogate zvijezde suviše malen pa se ovo ne može tvrditi sa velikom statističkom vjerojatnošću, ali ovaj uzorka pokazuje indicaciju koju bi trebalo dodatno ispitati.



Slika 4.8: Slika prikazuje tri PL relacije sa sljedećim veličinama na y-osi: K_S magnituda, Wesenheit indeks W_{JK} i W_G . Statistička analiza provedena je samo za O-bogate zvijezde zbog jako malog broja C-bogatih (2). Plave i crvene točke prikazuju O-bogate zvijezde sa ASAS-SN odnosno Gaia DR2 periodom, a zeleni trokuti prikazuju C-bogate zvijezde.

Konačni rezultati koeficijenata α i β iz izraza 2.13, nalaze se u tablici 4.1. Ti rezultati uspoređeni su sa koeficijentima iz [8], gdje su odredili iste za mire unutar

Velikog Magellanovog oblaka. S obzirom na to da su njihovi uzorci puno veći od našeg, njihove neodređenosti konačnih rezultata su puno manje. Ipak naša rješenja su konzistentna sa njihovima.

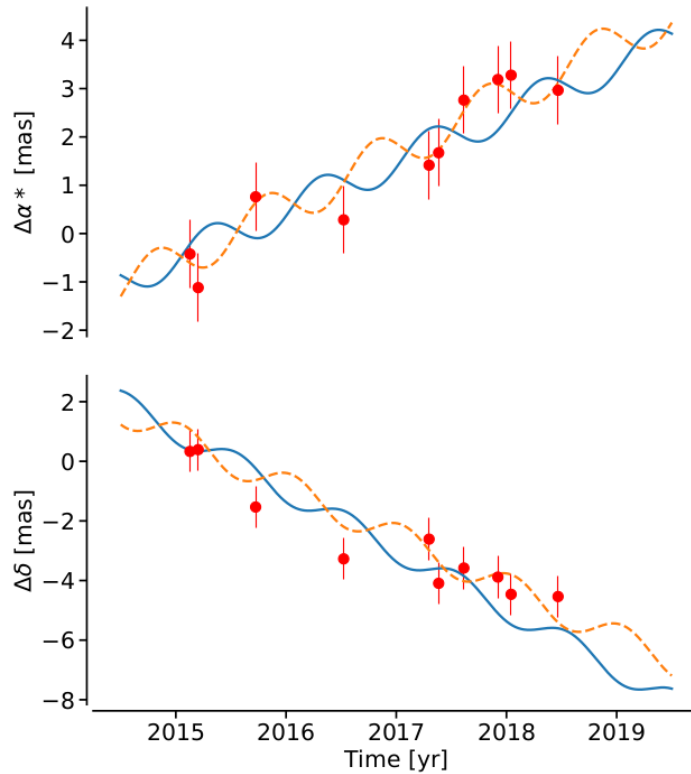
5 Diskusija i zaključak

Glavni cilj bio mi je odrediti PL relacije galaktičkih promjenjivih zvijezda tipa Mira. Osnovni skup podataka bile su mire iz ASAS-SN kataloga kojima sam nametnuo jaka selekcijska pravila. Izbacio sam sve zvijezde koje su imale relativnu pogrešku paralakse veću od 5 % i nepozitivne paralakse. Preostalim zvijezdama ispitao sam fazne krivulje i zadržao samo one koje su zadovoljavale svojstva promjenjivih zvijezda tipa Mira. Prilikom analize faznih krivulja svaku sam ispitao koristeći dva različita perioda, iz ASAS-SN i Gaia DR2 kataloga. Kao posljednje selekcijsko pravilo nametnuo sam relativnu pogrešku perioda manju od 10 %. Takav uzorak sadrži svega 23 zvijezde. Račun pogreške za tri različite magnitude (K_S , W_{JK} i W_G) rezultirao je PL relacijama koje su konzistentne sa relacijama mira u Velikom Magellanovom oblaku (tablica 4.1). Nažalost, ovakva metoda ima i nedostatke, poput uvođenja različitih pristranosti (eng. *bias*) i zadržavanja samo sjajnih zvijezda. U narednim odlomcima objasniti ću detaljnije spomenute nedostatke.

Prvi problem ove metode nalazi se u odbacivanju svih nepozitivnih paralaksi. Promatranjem relacije $1/\varpi$ za udaljenost zvijezde, odbacivanje svih nepozitivnih paralaksi može se činiti opravdanim, jer se na prvi pogled može pomisliti da se radi o nefizikalnim vrijednostima. No, negativne vrijednosti paralakse očekivana su posljedica mjerenja paralakse uz prisustvo pogrešaka. Naime, u slučajevima kada je pogreška paralakse usporediva sa vrijednošću paralakse, sasvim je moguće da procijenjena vrijednost paralakse iščezava ili postane negativna. Na slici 5.1 nalazi se prikaz promjene deklinacije i rektascenzije u vremenu. Pune linije predstavljaju stvarno kretanje ovih veličina, dok su isprekidane linije dobivene pomoću modela iz izmjerenih točaka. Vidimo kako je moguće da model, zbog velikih pogrešaka, iznjedri kretanje koje je suprotnog smjera²⁶ od stvarnog kretanja. To je upravo interpretacija negativnih paralaksi. Stoga negativne paralakse u Gaia arhivi nisu nefizikalne vrijednosti već su posljedice pogreški mjerenja, i kao takve trebaju biti sastavni dio analize. Odbacivanjem svih nepozitivnih vrijednosti odbacujemo vrijedne informacije.

Nadalje, računanje udaljenosti kao inverzne vrijednosti paralakse (izraz 2.3) stvara nove probleme. Ako pretpostavimo da je gustoća vjerojatnosti paralakse zadana Gaussovom raspodjelom centriranom na pravoj vrijednosti paralakse ϖ_{prava} , zbog

²⁶Možemo reći da su krivulje pomaknute i fazi za π .

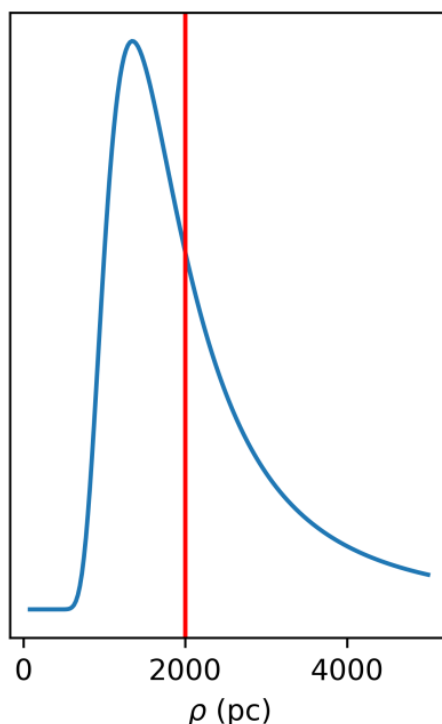


Slika 5.1: Slika prikazuje promjenu deklinacije (donji graf) i rektascenzije (gornji graf) u vremenu. Pune linije predstavljaju stvarnu promjenu ovih veličina, a isprekidane linije vrijednosti dobivene pomoću modela iz izmjerenih točaka. Slika preuzeta iz [27].

nelinearne ovisnosti između udaljenosti i paralakse (izraz 2.3) simetrična svojstva neće se prenijeti na udaljenost. Ovaj efekt će biti izraženiji za zvijezde s većom relativnom pogreškom paralakse, i ilustriran je na slici 5.2. Iako je maksimum raspodjele pomaknut prema manjim vrijednostima, zbog dugačkog "repa" raspodjele prema velikim vrijednostima, udaljenosti objekata biti će, općenito govoreći, precijenjene. Statističkim rječnikom rečeno, očekivana vrijednost paralakse jednaka je njezinoj pravoj vrijednosti ϖ_{prava} ²⁷, stoga kažemo da je paralaksa nepristrana veličina. Za sve veličine koje ne ovise linearno o paralaksi to nije točno. Na primjer, razlika između očekivane i prave vrijednosti udaljenosti drastično raste sa pogreškom paralakse ([28]).

Posljednji problem ovakve metode je filtriranje podataka na temelju relativne pogreške paralakse. Često je izbor granice proizvoljan i nije utemeljen na statističkoj analizi, te se ovakvim filtriranjem uvode dodatne predrasude u konačne veličine. Na primjer, zadržavanjem samo zvijezda sa relativnom pogreškom paralakse manjom od

²⁷Ovo vrijedi uz pretpostavku da je gustoća vjerojatnosti opisana Gaussovom raspodjelom.



Slika 5.2: Slika prikazuje gustoću vjerojatnosti udaljenosti promatranog objekta. Crvena linije predstavlja pravu udaljenost, za koju vrijedi $r = 1/\varpi_{prava}$. Bitno je uočiti nesimetričnu raspodjelu i dugačak "rep" raspodjele za velike udaljenosti. Slika preuzeta iz [27].

određene vrijednosti, favorizirati će se bliže i sjajnije zvijezde, jer se njima preciznije mogu odrediti paralakse. Naravno, ovo će imati za posljedicu prijenosa pristranosti na sve veličine koje se izvede iz paralakse (udaljenosti, apsolutne magnitude...).

Iz dosada navedenih problema metode preciznih paralaksi vidljivo je kako je u konačni uzorak uvršteno mnogo predrasuda, te kao takav vrlo vjerojatno nije reprezentativan uzorak početnoga uzorka. Stoga sljedeći korak u računu bio bi korištenje metode koja bi ostala u prostoru paralaksi maksimalno moguće, za razliku od prostora udaljenosti. Primjer takve metode je metoda temeljena na astrometrijskom luminozitetu (eng. *Astrometry based luminosity*) [29–31]. Umjesto apsolutnih magnituda koristi se astrometrijski luminozitet:

$$a = 10^{0.2M} = \varpi \cdot 10^{0.2m+1} = \varpi[\text{mas}] \cdot 10^{0.2m-2} \quad (5.1)$$

U jednadžbi 5.1 vidimo kako ova veličina linearno ovisi o paralaksi, stoga neće se javljati problemi nesimetričnih raspodjela. Također, u metodi astrometrijskog luminoziteta možemo koristiti i negativne vrijednosti paralakse.

Analizom provedenom u ovom diplomskom radu pokazano je kako se uobičajenom

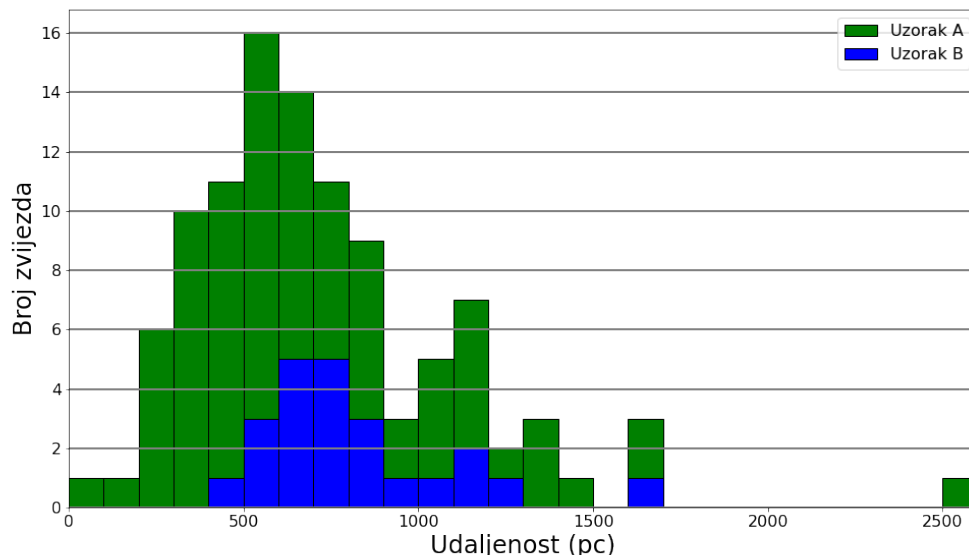
metodom određivanja PL relacija galaktičkih mira, za koju je jasno da ima nedostataka, mogu dobiti rezultati koji su u skladu s vrijednostima iz literature. Kao sljedeći korak u određivanju PL relacije predlažem korištenje metode koja uzima u obzir nedostatke navedene u zaključku. Jedna od takvih metoda je i spomenuta metoda astrometrijskog luminoziteta. Također treba uzeti u obzir da je u radu pretpostavljeno da su svojstva međuzvezdane tvari jednaka u svim smjerovima, što ne mora biti slučaj. U analizi je pretpostavljeno i da tablične vrijednosti sjaja u 2MASS katalogu predstavljaju dovoljno dobru aproksimaciju srednje magnitude. S obzirom na velike amplitude mira, precizniji rezultati bi se dobili modeliranjem krivulja sjaja, čime bi se mogao odrediti sjaj svake od zvijezda u točno određenoj fazi oscilacije.

Dodaci

Dodatak A Analiza uzorka

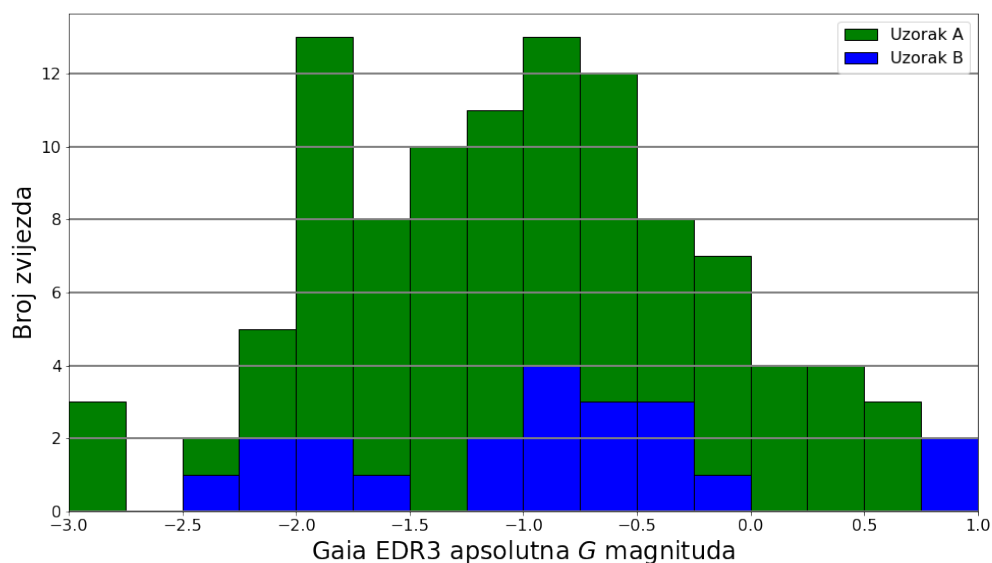
Ovaj dodatak sadrži analizu uzorka promjenjivih zvijezda tipa Mira iz ASAS-SN kataloga čije su relativne pogreške paralakse manje od 5%, a sastoji se od 104 zvijezde (uzorak A). Usporedno izlažem i analizu uzorka od 23 zvijezde (uzorak B) koji je proizašao iz uzorka A ispitivanjem odgovarajućih faznih krivulja²⁸.

U nastavku teksta nalaze se histogrami A.1, A.2 i A.3. Uzorak A reprezentiran je zelenom bojom, a uzorak B plavom. Promatrajući grafove možemo zaključiti kako je uzorak B reprezentativan uzorak uzorka A, odnosno analizom faznih krivulja nije došlo do preferiranog izbora zvijezda na temelju njihovih udaljenosti, apsolutnih G magnituda, ili boja. Nažalost uzorak A vrlo vjerojatno nije reprezentativan uzorak svih mira što je detaljnije raspravljeno u poglavlju 5. S obzirom na udaljenosti, možemo zaključiti kako se sve zvijezde nalaze unutar Mliječnog puta, a promatrajući prostornu raspodjelu (slika 3.2), vidimo kako se dio zvijezda nalazi unutar, a dio izvan galaktičkog diska.

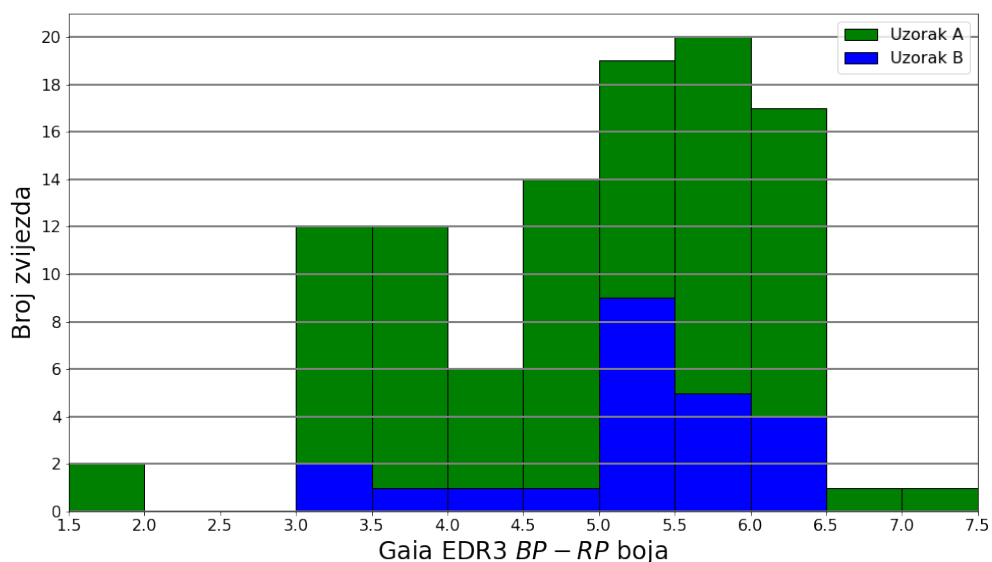


Slika A.1: Histogram prikazuje raspodjelu zvijezda po udaljenostima u koracima od 100 pc. Uzorak A i uzorak B označeni su zelenom odnosno plavom bojom. Najveći dio zvijezda nalazi se na udaljenostima između 300 i 1200 pc.

²⁸Zadržane su zvijezde čije su fazne krivulje zadovoljavale karakteristike mira.



Slika A.2: Histogram prikazuje raspodjelu zvijezda po apsolutnim G magnitudama iz Gaia DR3 kataloga, u koracima od 0.5 mag. Većina zvijezda ima negativne magnituda, odnosno uzorak čine relativno sjajne zvijezde. Ovo je očekivano s obzirom na to da je postavljen strogi uvjet na paralakse, odnosno Gaia je u mogućnosti odrediti precizne paralakse susjednih i/ili jako sjajnih zvijezda.



Slika A.3: Histogram prikazuje raspodjelu zvijezda po Gaia $BP-RP$ boji, u koracima od 0.5 mag. Boja je definirana preko Gaia magnituda: plava G_{BP} (330 - 680 nm) i crvena G_{RP} (640 - 1050 nm). Zvijezde uglavnom posjeduju boje između 3 i 6.5 magnituda, odnosno relativno su crvene. Ovakve boje su očekivane jer se radi o zvijezdama sa asimptotske grane crvenih divova.

Dodatak B Python program

Ovaj dodatak sadrži računalni kod napisan u programskom jeziku Python. Svrha programa je ispis faznih krivulja za dva različita perioda (ASAS-SN i Gaia DR2), za svaku zvijezdu. Također, program sadrži opciju za klasifikaciju zvijezde temeljenu na izgledu fazne krivulje, a za to zahtjeva unos korisnika na zahtjev programa.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import pandas as pd
4 import requests
5 import os
6 from datetime import datetime
7 pd.set_option('display.max_columns', None)
8
9 sep = '/'
10 table_name = 'asassn_miras_join_gedr3_filt_poerr20.csv'
11 survey = 'asassn'
12 star_type = 'mira'
13 id_col_name = 'id'
14
15 print()
16 print('INFO:')
17 print(' Table name: {}'.format(table_name))
18 print(' Survey: {}'.format(survey))
19 print(' Star type: {}'.format(star_type))
20 print()
21 print ('CLASSES:')
22 print(' 1 - super')
23 print(' 2 - ok')
24 print(' 3 - no')
25 print(' 4 - maybe')
26 print()
27 print('INDICES:')
28 print(' a - asas-sn')
29 print(' g - gaia')
30 print()
31 print('If you want to exit program enter \'exit\'.')
32 print()
33 print('NOTE: If a star is accidentally misclassified')
```



```

34     +' then manual edit is needed.')
```

```

35 print('    To do so exit program and delete line, in record.csv,'
36     +' with misclassified star id.')
```

```

37 print()
38 #Taking the absolute path of the current working directory
39 # and its parental directory
40 absolutepath = os.path.abspath("")
41 parentDirectory = os.path.dirname(absolutepath)
42 dataDirectory = parentDirectory + sep + 'data'
43 # Reading data where period info is stored
44 table = pd.read_csv(dataDirectory + sep + table_name)
45 #Defining camera dictionary so that each camera can have
46 # its marker in the scatter function.
47 camera_dict = {'ba': '.', 'bb': '^', 'bc': 's', 'bd': '+',
48               'be': 'd', 'bf': 'v', 'bg': 'P', 'bh': 'x'}
49 #####
50 def phase_curve(star_id):
51     #Reading lightcurve file
52     star = pd.read_csv(dataDirectory + sep + 'phase_curves'
53                       + sep + 'asassn_{}.csv'.format(star_id))
54     #Sorting hjd column, just to be sure
55     star.sort_values(by=['hjd'], inplace= True)
56     #Filtering out stars with mag_err = 99.99
57     filt99 = (star['mag_err'] != 99.99)
58     star = star[filt99]
59     #Keeping just light curve points in V-filter
60     filtV = (star['filter'] == 'V')
61     star = star[filtV]
62     # After sorting hjd values we have to reset indexes
63     star.reset_index(drop= True, inplace = True)
64     #Calculating observation initial and final moment
65     obs_min = star['hjd'][0]
66     obs_max = star['hjd'][-1:]
67     #Cameras that were used for observation of specific star
68     cameras = star['camera'].unique()
69     ##### Ploting phase curve with ASAS-SN period #####
70     #Getting ASAS-SN period and converting to float
71     filt = (table['id'] == star_id)
72     period_asassn = float(table[filt]['period'])
73     #Calculating phase
```

```

74     star['phase_asassn'] = star['hjd']/period_asassn\
75                             - np.floor(star['hjd']/period_asassn)
76     #Data for extending curve to the left
77     filt_l = (star['phase_asassn'] > 0.75)
78     star_l = star.loc[filt_l].copy()
79     star_l['phase_asassn'] = star_l['phase_asassn'] - 1
80     #Data for extending curve to the right
81     filt_r = (star['phase_asassn'] < 0.25)
82     star_r = star[filt_r].copy()
83     star_r['phase_asassn'] = star_r['phase_asassn'] + 1
84     #Concatenation of three tables so that we can get phase
85     # curves from -0.25 to 1.25
86     star_c = pd.concat([star_l, star, star_r])
87     star_c.reset_index(drop= True, inplace = True)
88     #Calculating observation time in star period unit
89     obs_time = (obs_max - obs_min) / period_asassn
90     obs_time = round( float(obs_time), 2 )
91     #Plotting phase curve
92     fig, ax = plt.subplots(2, figsize=[12,8])
93     ax[0].set_xlim([-0.25,1.25])
94     ax[0].set_title(star_id + ' phase curve\n'
95                     + 'ASAS-SN period = {} days\n'.format(period_asassn)
96                     + 'Observing baseline: {} cycles'.format(obs_time),
97                     fontsize = 20)
98     ax[0].axvline(0, linestyle = '--', color = 'darkgrey',
99                  linewidth = 3)
100    ax[0].axvline(1, linestyle = '--', color = 'darkgrey',
101                 linewidth = 3)
102    ax[0].set_xlabel('Phase', fontsize = 20)
103    ax[0].set_ylabel('$m_{\}$'.format(star['filter'][0]),
104                    fontsize = 20)
105    ax[0].grid()
106    ax[0].invert_yaxis()
107    ##One iteration for each camera type
108    for camera in cameras:
109        filt_cam = (star_c['camera'] == camera)
110        data = star_c[filt_cam]
111        sc = ax[0].scatter(data['phase_asassn'],
112                           data['mag'], c = data['hjd'] - obs_min,
113                           cmap = 'copper_r', vmin = 0,

```

```

114         vmax = obs_max - obs_min,
115         marker = camera_dict[camera], label = camera)
116 ax[0].legend(fontsize = 16)
117 cb = fig.colorbar(sc, ax=ax[0])
118 cb.set_label(label = '$t-t_0$; [days]$\\n$' + '$(HJD)$',
119             fontsize = 16)
120 ##### Plotting phase curve with GaiaDR2 period #####
121 try:
122     period_gaia = (float(1 / table[filt]['frequency']))
123 except:
124     print('Gaia period calculation problem!!!')
125     return 0
126 #Calculating phase
127 star['phase_gaiadr2']=star['hjd']/period_gaia\
128                 -np.floor(star['hjd']/period_gaia)
129 #Calculating the difference between phases so that all curves
130 # have the same zero-point
131 delta_phase_gaia = star['phase_gaiadr2'][0]
132                 -star['phase_asassn'][0]
133 star['phase_gaiadr2'] = star['phase_gaiadr2']
134                 -delta_phase_gaia
135 #Data for extending curve to the left
136 filt_l = (star['phase_gaiadr2'] > 0.75)
137 star_l = star.loc[filt_l].copy()
138 star_l['phase_gaiadr2'] = star_l['phase_gaiadr2'] - 1
139 #Data for extending curve to the right
140 filt_r = (star['phase_gaiadr2'] < 0.25)
141 star_r = star[filt_r].copy()
142 star_r['phase_gaiadr2'] = star_r['phase_gaiadr2'] + 1
143 #Concatenation of three tables so that we can get
144 # phase curves from -0.25 to 1.25
145 star_c = pd.concat([star_l, star, star_r])
146 star_c.reset_index(drop=True, inplace=True)
147 #Calculating observation time in star period unit
148 obs_time = (obs_max - obs_min) / period_gaia
149 obs_time = round(float(obs_time), 2)
150 #Plotting
151 ax[1].set_xlim([-0.25,1.25])
152 ax[1].set_title('Gaia period = {} days\\n'.format(period_gaia)
153                 + 'Observing baseline: {} cycles'.format(obs_time),

```

```

154         fontsize = 20)
155     ax[1].axvline(0, linestyle = '--', color = 'darkgrey',
156                 linewidth = 3)
157     ax[1].axvline(1, linestyle = '--', color = 'darkgrey',
158                 linewidth = 3)
159     ax[1].set_xlabel('Phase', fontsize = 20)
160     ax[1].set_ylabel('$m_{\{}}$.format(star['filter'][0]),
161                 fontsize = 20)
162     ax[1].grid()
163     ax[1].invert_yaxis()
164     ##One iteration for each camera type
165     for camera in cameras:
166         filt_cam = (star_c['camera'] == camera)
167         data = star_c[filt_cam]
168         sc = ax[1].scatter(data['phase_gaiadr2'],
169                           data['mag'], c = data['hjd'] - obs_min,
170                           cmap = 'copper_r', vmin = 0,
171                           vmax = obs_max - obs_min,
172                           marker = camera_dict[camera], label = camera)
173     ax[1].legend(fontsize = 16)
174     cb = plt.colorbar(sc, ax=ax[1])
175     cb.set_label(label = '$t-t_0\; [days]$\n' + '$(HJD)$',
176                 fontsize = 16)
177     #####
178     record_table = pd.read_csv(dataDirectory + sep + 'phase_curves'
179                               + sep + 'record.csv')
180     ids = [ID for ID in list(table[id_col_name]) if ID not in\
181            list(record_table['id'])]
182     for ID in ids:
183         try:
184             phase_curve(ID)
185             plt.tight_layout()
186             plt.show()
187         except:
188             print('!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!')
189             print('There is problem with {} phase curve.'.format(ID)
190                   + ' Problem is ignored!!!')
191             print('!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!')
192             continue
193     expected_input = ['1a', '1g', '2a', '2g', '3', '4', 'exit']

```

```

194 #Taking input from the user
195 inpt = input('Enter class: ')
196 #Making sure that input is correct
197 while inpt not in expected_input:
198     inpt = input('Unrecognized input. Please try again: ')
199 #If inupt is 'exit' program is closed
200 if inpt == 'exit':
201     break
202 plt.close()
203 # Recording classified star IDs, input time, class, survey
204 # and star type
205 now = datetime.now()
206 current_time = now.strftime("%Y-%m-%d %H:%M:%S")
207 record = open(dataDirectory + sep + 'phase_curves'
208               + sep + 'record.csv', 'a')
209 record.write(survey + ',' + star_type + ',' + ID + ','
210            + inpt + ',' + current_time + '\n')
211 record.close()

```

Literatura

- [1] H. S. Leavitt and E. C. Pickering, “Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud.,” *Harvard College Observatory Circular*, vol. 173, pp. 1–3, Mar. 1912.
- [2] B. P. Gerasimovic, “The Absolute Magnitudes of Long Period Variable Stars,” *Proceedings of the National Academy of Science*, vol. 14, pp. 963–968, Dec. 1928.
- [3] I. S. Glass and T. L. Evans, “A period-luminosity relation for Mira variables in the Large Magellanic Cloud,” *Nature*, vol. 291, pp. 303–304, June 1981.
- [4] P. R. Wood, C. Alcock, et al., “MACHO observations of LMC red giants: Mira and semi-regular pulsators, and contact and semi-detached binaries,” in *Asymptotic Giant Branch Stars*, vol. 191, p. 151, Jan. 1999.
- [5] P. R. Wood, “Variable Red Giants in the LMC: Pulsating Stars and Binaries?,” *Publications of the Astronomical Society of Australia*, vol. 17, pp. 18–21, Apr. 2000.
- [6] P. Iwanek, I. Soszyński, et al., “Mid-infrared Period-Luminosity Relations for Miras in the Large Magellanic Cloud,” *The Astrophysical Journal*, vol. 919, p. 99, Oct. 2021.
- [7] I. Soszyński, A. Udalski, et al., “The Optical Gravitational Lensing Experiment. Miras and Semiregular Variables in the Large Magellanic Cloud,” *Acta Astronomica*, vol. 55, pp. 331–348, Dec. 2005.
- [8] I. Soszyński, W. A. Dziembowski, et al., “The Optical Gravitational Lensing Experiment. Period–Luminosity Relations of Variable Red Giant Stars,” *Acta Astronomica*, vol. 57, pp. 201–225, Sept. 2007.
- [9] M. Trabucchi, N. Mowlavi, et al., “Semi-regular red giants as distance indicators. I. The period-luminosity relations of semi-regular variables revisited,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 656, p. A66, Dec. 2021.
- [10] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*. Cambridge University Press, 2017.

- [11] “How do you measure the distance between earth and the sun?.” <http://curious.astro.cornell.edu/about-us/41-our-solar-system/the-earth/orbit/87-how-do-you-measure-the-distance-between-earth-and-the-sun-intermediate>. Accessed: 2022-07-16.
- [12] “The hertzsprung-russell diagram.” <https://www.cosmos.esa.int/web/cesar/the-hertzsprung-russell-diagram>. Accessed: 2022-07-17.
- [13] “Pulsating variable stars and the hertzsprung-russell diagram.” https://chandra.harvard.edu/graphics/edu/earth_scientist_stars.pdf. Accessed: 2022-04-29.
- [14] B. J. Shappee, J. L. Prieto, et. al, “The Man behind the Curtain: X-Rays Drive the UV through NIR Variability in the 2013 Active Galactic Nucleus Outburst in NGC 2617,” *The Astrophysical Journal*, vol. 788, p. 48, June 2014.
- [15] I. Soszyński, P. R. Wood, et al., “Pulsation Modes of Long-period Variables in the Period-Luminosity Plane,” *The Astronomical Journal*, vol. 779, p. 167, Dec. 2013.
- [16] I. Soszyński, A. Udlaski, et al., “The Optical Gravitational Lensing Experiment. Small Amplitude Variable Red Giants in the Magellanic Clouds,” *Acta Astronomica*, vol. 54, pp. 129–152, June 2004.
- [17] P. R. Wood and K. M. Sebo, “On the pulsation mode of Mira variables: evidence from the Large Magellanic Cloud,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 282, pp. 958–964, Oct. 1996.
- [18] P. A. Whitelock, F. van Leeuwen, et al., “The Luminosities and Diameters of Mira Variables from HIPPARCOS Parallaxes,” in *Hipparcos - Venice '97*, vol. 402 of *ESA Special Publication*, pp. 213–218, Aug. 1997.
- [19] B. F. Madore, “The period-luminosity relation. IV. Intrinsic relations and reddening for the Large Magellanic Cloud Cepheids.,” *The Astrophysical Journal*, vol. 253, pp. 575–579, Feb. 1982.

- [20] T. Jayasinghe, C. S. Kochanek, et al., “The ASAS-SN catalogue of variable stars IX: The spectroscopic properties of Galactic variable stars,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 503, pp. 200–235, May 2021.
- [21] M. W. Castelaz, D. G. Luttermoser, et al., “Phase-dependent Spectroscopy of Mira Variable Stars,” *The Astronomical Journal*, vol. 120, pp. 2627–2637, Nov. 2000.
- [22] M.F. Skrutskie, R. M. Cutri, et al., “The Two Micron All Sky Survey (2MASS),” *The Astronomical Journal*, vol. 131, pp. 1163–1183, Feb. 2006.
- [23] Gaia Collaboration, A. Vallenari, et al., “Gaia Data Release 3: Summary of the content and survey properties,” *arXiv e-prints*, p. arXiv:2208.00211, July 2022.
- [24] Gaia Collaboration, A. E. A. Brown, et al., “Gaia Data Release 2. Summary of the contents and survey properties,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 616, p. A1, Aug. 2018.
- [25] T. Lebzelter, N. Mowlavi, et al., “A new method to identify subclasses among AGB stars using Gaia and 2MASS photometry,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 616, p. L13, Aug. 2018.
- [26] G. Pietrzyński, D. Graczyk, et al., “An eclipsing-binary distance to the Large Magellanic Cloud accurate to two per cent,” *Nature*, vol. 495, pp. 76–79, Mar. 2013.
- [27] X. Luri, A. G. A. Brown, et al., “Gaia Data Release 2. Using Gaia parallaxes,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 616, p. A9, Aug. 2018.
- [28] J. Smith, Haywood and H. Eichhorn, “On the estimation of distances from trigonometric parallaxes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 281, pp. 211–218, July 1996.
- [29] M. W. Feast and R. M. Catchpole, “The Cepheid period-luminosity zero-point from HIPPARCOS trigonometrical parallaxes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 286, pp. L1–L5, Mar. 1997.

- [30] F. van Leeuwen, M. W. Feast, et al., “First results from HIPPARCOS trigonometrical parallaxes of Mira-type variables,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 287, pp. 955–960, June 1997.
- [31] F. Arenou, X. Luri, “Distances and absolute magnitudes from trigonometric parallaxes,” in *Harmonizing Cosmic Distance Scales in a Post-HIPPARCOS Era*, vol. 167 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pp. 13–32, Jan. 1999.