Girolamo Cardano

Arač, Iva

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Arač

GIROLAMO CARDANO

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Quinquies exscriptus, maneat tot millibus annis.

Girolamo Cardano

Sadržaj

Uvod

Renesansa, ili u slobodnom prijedvodu „ponovno rođenje”, je razdoblje u zapadno-europskoj kulturi od 14. (ili 15. , ovisno o autoru) do 16. stoljeća. Ne postoji točno određena granica kada prestaje srednji vijek i kada počinje renesansa. Započela je u Italiji kao posljedica križarskih ratova, a utjecaj je imala i ekonomska i intelektualna situacija, te se vrlo brzo proširila po čitavoj zapadnoj Europi. U renesansi je uslijed raznih političkih, vjerskih i tehnoloških razloga došlo do razvoja obrazovanja, znanosti i umjetnosti. Johannes Gutenberg izumom tiskarskog stroja u 15. stoljeću doprinjeo je razvoju niza postignuća i otkrića. Tiskanjem starih rukopisa u više primjeraka postizala se niža cijena knjiga te su se počele pojavljivati prve knjižnice, a ujedno su i knjige postale dostupnije što je olakšalo razvoj obrazovanja i znanosti [17, 10].

U renesansi je došlo i do velikih promjena u graditeljstvu, kiparstvu, slikarstvu, književnosti i glazbi. Renesansni umjetnici su često istovremeno bili slikari, kipari, pjesnici, arhitekti i znanstvenici, a svoje uzore su pronalazili u antičkim umjetničkim djelima. Tijekom renesanse, uz ostale znanosti razvila se i matematika. Otkrićem tiskarskog stroja, tiskane su mnoge knjige, među ostalim i sve više matematičkih tekstova na raznim narodnim jezicima, a ne više samo na latinskom. Prva značajna matematička knjiga ovog razdoblja bila je *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*, ili kraće *Summa*, koju je napisao talijanski matematičar fra Luca Pacioli (1445.–1517.), a izdana je 1494. godine. U knjizi je bio sadržan pregled matematike tog vremena, a Pacioli ju je napisao temeljem rukopisa mnogih matematičara. Razvoj matematike u renesansi očituje se u razvoju matematičke notacije, razvoju algebre, razvoju zakona perspektive, razvoju primijenjene matematike u astronomiji i fizici te u otkriću logaritama [5].

Iako se u sjevernijim krajevima u 15. stoljeću počinju koristiti znakovi $+$ i $-$ za zbrajanje i oduzimanje, talijanski matematičari 15. stoljeća, pa tako i Cardano, su koristili početna slova p za „plus" odnosno m za „minus". Spomenimo ovdje i ostalu notaciju koju je koristio Cardano: Za drugi korijen koristio je tad uobičajeni R s prekriženom „nogicom", za nepoznanicu koristio je $co.$ ($cosa$), za drugu nepoznanicu koristio je riječ *qua*(*quantitas*), za potencije nepoznanice je koristio redom oznake $co.$ ($cosa$), $ce.$ ($censo$), $cu.$ ($cubo$), $ce.ce.$ (*censo de censo*), za znak jednakosti koristio je *aequal.* (*aequale*) ili *aeq* (*aequatur*), ... Kroz svoja djela mijenjao je i neke od notacija pa je u *Ars Magni* (1545.) koristio $pos.$ (*positionibus*) za kvadrat nepoznanice x. Cardanov zapis $(R).13.p.R.9.$ zapisan današnjom modernom notacijom izgledao bi $\sqrt{13 + \sqrt{9}}$, dok bi $1.quad.p.2.pos.aeq.48.$ i $7.pos.p.3.qua.aequal.122.$ bili redom zapisi jednadžbi $x^2 + 2x = 48$ i $7x + 3y = 122$ [8]. Budući da je matematička notacija u doba renesanse bila nedovoljno razvijena te se mijenjala, u ovom radu će se dalje Cardanovi rezultati prenositi modernom notacijom.

Od posebnog interesa za naš rad je razvoj algebre u (talijanskoj) renesansi. Algebru su kao matematičku disciplinu koja se bavi jednadžbama utemeljili Arapi, preciznije Al-Hvarizmi (oko 780.–850.). On je djelovao u Kući mudrosti, bagdadskom znanstvenom centru koji je sadržavao akademiju i knjižnicu, te je napisao dva bitna djela koja su bila važna za razvoj matematike. U jednom od njih, poznatom pod nazivom „Algebra"[1] kao prvi u povijesti opisao je (linearne i kvadratne) jednadžbe i njihovo rješavanje, te se uzima da je tim djelom al-Hvarizmi utemeljio algebru. Današnje linearne i kvadratne jednadžbe podijelio je na šest tipova zato što su se u ono vrijeme razmatrala samo pozitivna rješenja jednadžbi, a u obliku sređenom za konačno rješavanje zahtijevalo se da su svi koeficijenti također

[1] Iz dijela izvornog arapskog naziva te knjige, arapske riječi *al-džabr*, izveden je naziv discipline algebre.

pozitivni. Al-Hvarizmi je pod utjecajem antičkih i grčkih matematičara rješenja jednadžbi interpetirao geometrijski kao duljine. Kvadratne jednadžbe je rješavao svođenjem na potpuni kvadrat, a njegovi postupci ekvivalentni su specijalnim slučajevima moderne formule za rješenje kvadratne jednadžbe. Za jedan tip jednadžbe, točnije $ax^2 + c = bx$, uočio je da kvadratne jednadžbe mogu imati dva rješenja. Razvoju algebre pridonio je i Al-Karadži (oko 953.–1029.) definiranjem monoma i pravila množenja istih te opisivanjem zbrajanja, oduzimanja i množenja polinoma u svom djelu *Al-Fakhri*. U svojim objašnjenjima i dokazima nije koristio geometriju i time algebru oslobodio od nje. Za našu temu posebno važno je spomenuti i Omara Khayyama (1048.–1131.), koji je u svojem djelu o algebri proširio Al-Hvarizmijevu klasifikaciju i na kubne jednadžbe. U Khayyamovoj klasifikaciji postoji 19 tipova kubnih jednadžbi, od kojih 4 imaju slobodni član jednak nuli pa se supstitucijom mogu svesti na kvadratne jednadžbe. Ostalih 14 tipova rješavao je presjecima konika. Uočio je da kubne jednadžbe mogu imati više od jednog rješenja što je potkrijepio primjerom [5, 14].

U isto doba u Europi, znanost i obrazovanje bili su na vrlo niskom nivou i rezervirani samo za rijetke mladiće, u pravilu iz bogatih obitelji. Do pomaka dolazi tijekom 11. i 12. stoljeća, kada se počinju prevoditi razni matematički tekstovi s arapskog (i hebrejskog) jezika na latinski jezik. Time arapska algebra postaje poznata u Europi. Istovremeno je skolastika utjecala na osnivanje prvih sveučilišta u kojima se poticalo podučavanje matematike. U to vrijeme je djelovao i veliki matematičar Leonardo iz Pise (poznat kao Fibonacci, oko 1170.–1240.), koji djelom *Liber Abaci* („Knjiga o računanju”) prvi u Europi popularizirao indoarapski dekadski pozicijski sustav kao praktičniji od tada uobičajenog rimskog, ali dao i mnoge primjere jednadžbi. On je od djetinjstva imao priliku vidjeti matematičke spise Euklida, Pitagorejaca, Arapa i Indijaca zahvaljujući ocu trgovcu i cariniku koji je zbog posla putovao po Sredozemlju. Poznato je i da je Fibonacci na natjecanju kojeg je 1225. organizirao car Svetog rimskog carstva Friedrich II. uspješno aproksimativno riješio jednu kubnu jednadžbu, koju je izvorno zadao Omar Khayyam, i to nakon što je prvo dokazao da ta jednadžba nema rješenja ni u racionalnim brojevima ni u euklidskim iracionalnostima.[2]

Početkom renesanse u Italiji ta znanja bila su opće poznata među matematičarima. Štoviše, Pacioli u svojoj *Summi* (1494.) opisuje i rješavanje jednadžbi stupnja 4 koje se mogu supstitucijom svesti na kvadratne. Početkom 16. stoljeća među talijanskim matematičarima bilo je također opće poznato da se svaka kubna jednadžba supstitucijom može svesti na kubnu jednadžbu bez kvadratnog člana (tzv. reduciranu kubnu jednadžbu). U suvremenoj notaciji radi se o sljedećem: Ako u $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ uvedemo supstituciju $x = y+k$, dobivamo $y^3+(3k+a)y^2+(3k^2+2ak+b)y+(k^3+ak^2+bk+c) = 0$. Vidimo da uz $k = -\frac{a}{3}$ preostaje kubna jednadžba bez kvadratnog člana $y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$. Budući da su se zbog izbjegavanja korištenja negativnih brojeva jednadžbe i dalje klasificirale u arapskoj tradiciji, to znači da su talijanski matematičari početkom 16. stoljeća znali da je za nalaženje rješenja u radikalima[3] kubnih jednadžbi dovoljno otkriti rješenja jednadžbi tipova $x^3 = px + q$, $x^3 + px = q$ i $x^3 + q = px$ s pozitivnim p i q. Pritom se zbog još iz antike naslijeđenog principa homogenosti (mogu se zbrajati i izjednačavati samo istovrsne veličine, dakle duljine s duljinama, površine s površinama, volumeni s volumenima) podrazumijevalo da ako nepoznanica ima dimenziju duljine, koeficijent p ima dimenziju površine (dakle je oblika $p = a^2$), a q dimenziju volumena (dakle je $q = b^3$).

Prvi koji je znao riješiti neki od tih tipova reducirane kubne jednadžbe bio je Scipione del Ferro (1465.–1526.), koji je oko 1515. godine našao metodu za rješavanje jednadžbi oblika $x^3 + px = q$. Svoja otkrića je čuvao tajnima kako bi mogao zaraditi na njima. Metodu nije otkrivao nikome sve do pred svoju smrt, kada je odlučio metodu podijeliti

---

[2] Euklidske iracionalnosti su brojevi koji se mogu zapisati u obliku $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ za a i b racionalne brojeve.

[3] Rješenje u radikalima je rješenje dobiveno korištenjem konačno mnogo osnovnih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje) i korjenovanja.

sa svojim studentom Antoniom Maria del Fioreom, a del Ferrove bilješke naslijedio je njegov zet Hannibal Nave. Nakon del Ferrove smrti proširila se vijest da je otkrivena metoda za rješavanje prvog tipa kubnih jednadžbi te je za to čuo i Niccolò Fontana, poznat pod nadimkom Tartaglia (oko 1500.–1557.), samouki matematičar koji je istraživao kubne jednadžbe i njihova rješenja. On je 1535. godine objavio da je otkrio metodu za rješavanje kubne jednadžbe tipa $x^3 + px^2 = q^3$. Del Fiore je smatrajući da samo on zna riješiti del Ferrov tip jednadžbe izazvao Tartagliu na dvoboj u kojem su jedan drugome zadali 30 zadataka sa zadanim vremenom rješavanja. Tartaglia je pretpostavio da će mu del Fiore zadati jednadžbe oblika $x^3 + px = q$ te je razvio vlastitu metodu. Na dvoboju je tako znao riješiti sve del Fioreove zadatke, ali del Fiore nije znao riješiti sve Tartagliaine zadatke te je Tartaglia pobijedio i stekao slavu. Za događaje između del Fiorea i Tartaglije čuo je i Girolamo Cardano, čiji je život i doprinos tema ovog rada. On je silno želio otkriti metode rješavanja kubnih jednadžbi te se tako upleo u povijest algebre [5].

Poglavlje 1

Biografija Girolama Cardana

Girolamo (ili Gerolamo) Cardano (slika 1.1) jedan je od najznačajnijih renesansnih matematičara. Po zanimanju je bio liječnik, no gajio je veliki interes prema matematici i astrologiji. Cardano je bio tipična renesansna osoba raznolikih interesa i burnog života [13]. Najpoznatiji je po svom djelu *Ars Magna* (1545.), koje se bavi algebrom, točnije metodama rješavanja jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja [14].

Slika 1.1: Girolamo Cardano

Preuzeto s: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Girolamo_Cardano.jpg`
Autor: Yazhang
Licenca: https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0

Girolamo Cardano rođen je 24. rujna 1501. godine. Njegov otac Fazio bio je odvjetnik u Milanu, a u slobodno vrijeme istraživao je matematiku i medicinu. Faziov rad zamijetio je i Leonardo da Vinci, koji se konzultirao s njime u vezi problema perspektive u geometriji [13, 15]. Cardanova majka Chiara Michena bila je nižeg društvenog statusa te je imala troje djece iz prijašnjeg braka sa suprugom koji je preminuo. Fazio i Chiara upoznali su se u Faziovim pedesetim godinama i Chiara je ubrzo ostala trudna. Svoju trudnoću pokušala je prekinuti nekoliko puta, ali bezuspješno. U to vrijeme izbila je kuga te su se Fazio i Chiara smjestili u Paviji gdje je Cardano rođen, a njena djeca koja su ostala u Milanu oboljela su i preminula od kuge. Fazio i Chiara povremeno su živjeli zajedno zbog teških uvjeta u kojima Fazio nije mogao uzdržavati obitelj, a nekoliko godina kasnije su se vjenčali [14].

Cardanovo djetinjstvo nije bilo nimalo lako jer su ga njegovi roditelji fizički kažnjavali i za najmanji neposluh, a često je bio i bolestan. Njegov otac Fazio učio ga je čitati te uz to matematiku i pravo pa mu je Cardano kasnije pomagao u poslu sve dok mu nije postalo prenaporno [13]. Od matematike ga je kod kuće podučavao aritmetiku i prvih šest knjiga Euklidovih *Elemenata* [3]. Očevo podučavanje navelo je Cardana da se akademski obrazuje [14].

U tinejdžerskim danima postao je svjestan da želi ostati zapamćen. Razlog tome bila je smrt njegova bliska prijatelja i rođaka Niccola Cardana, koji je iznenada preminuo iako je bio mlad. Niccolo nije imao nasljednika pa se njegovo ime brzo nakon smrti prestalo spominjati i brzo je palo u zaborav. Kako se tako što ne bi dogodilo njemu, Girolamo se odlučio potruditi i postati liječnik [13, 15]. Njegov otac se nije htio složiti sa njegovim željama, već je želio da postane odvjetnik poput njega. Cardanu se to nije svidjelo jer su njegovi roditelji bili siromašni i nisu mu mogli priuštiti mnogo toga. Sebe je smatrao ambicioznim i prilagodljivim te je od medicine očekivao puno više koristi nego od odvjetništva [13].

Zbog Faziove želje da Cardano studira pravo i odbijanja Cardanove želje za studiranjem medicine, u njihovoj je obitelji došlo do velikih svađa [14]. Njegova majka Chiara podržavala ga je u njegovim željama potaknuta svojim majčinskim osjećajima zbog gubitka preostalo troje djece. Ona je preklinjala Fazia da pristane na Cardanove želje sve do gubitka svijesti pri čemu je pala i ozlijedila glavu. Nakon te nesretne situacije, Fazio je nevoljko pristao na studij medicine, a Cardano je postao odan majci [15]. S osamnaest godina Cardano je upisao Sveučilište u Paviji gdje je pohađao kvadrivij[1] [3]. Godinu dana kasnije prebačen je na Sveučilište u Padovi zbog građanskih sukoba između Francuske i Španjolske [13]. Bio je odličan i vrijedan student pa je u Padovi počeo dobivati svoje prve nagrade kao priznanja za svoja postignuća. Bio je jedan od najboljih studenata što ga je dovelo do počasne ponude da 1525. godine postane studentski rektor Sveučilišta u Padovi. Prihvatio je ponudu te vodio debate s kojima se nerijetko hvalio kako je pobijedio svoje protivnike [13, 15].

Tijekom studija 1526. godine Cardanu je umro otac. Fazio mu je u nasljedstvo ostavio kuću i nešto novaca, što nije bilo dovoljno da nastavi živjeti normalnim životom. Kako bi popravio svoju financijsku situaciju počeo se baviti kockanjem. Metode kojima je zarađivao za život bile su kartaške igre, kocka i šah. Njegove razvijene matematičke sposobnosti dovele su ga do toga da razumije osnovna pravila vjerojatnosti, a ona su mu koristila da stekne prednost pred ostalim igračima te je uglavnom pobjeđivao protivnike [14].

Nakon završetka studija vratio se u Milano gdje se odlučio baviti svojom strukom. Prijavio se na Medicinski fakultet kako bi dobio licencu, no ubrzo je odbijen jer je bio vanbračno dijete, što je bilo protivno statutima Sveučilišta [15]. Pokušao je još nekoliko puta, no svaki puta je bio odbijen pa se odlučio skrasiti na nekom mjestu i liječiti ljude. Mjesto gdje se naselio 1526. godine bilo je maleno selo Sacco blizu Padove [13].

U Saccu se Cardano zaljubio u Luciu Bandarini, lokalnu petnaestogodišnju djevojku [1]. Ubrzo, 1531. godine, su se i vjenčali te postali roditelji. Imali su troje djece, sinove

[1] Zbirni naziv za aritmetiku, geometriju, astronomiju i glazbu koje su tvorile drugi, viši dio matematičkog nastavnog programa srednjovjekovnih škola.

Giambatistu (1534.) i Alda (1543.) te kćer Chiaru (1537.) [12]. Najstariji sin Giambatista rođen je u Gallarateu blizu Milana, odakle su preselili u Milano u sklonište za siromašne jer nisu imali dovoljno dobre uvjete kako bi samostalno živjeli [15]. Razlog tome bila je Cardanova ovisnost o kockanju pa je u jednom trenu izgubio veliku količinu novca i bio primoran prodati sav ženin nakit, pa čak i namještaj [14].

U Milanu je zahvaljujući znancima svog oca Cardano dobio posao javnog predavača u zakladi Piatti, a njegova javna predavanja o matematici, geografiji i arhitekturi privlačila su veliki broj ljudi i stvorili mu temelje za kasnije. Osim prihoda od javnih predavanja, Cardano je financijsko pitanje rješavao i ilegalnim liječenjem ljudi, u čemu je bio izrazito uspješan pa su njegove savjete često tražili i liječnici iz Milana [13]. Poučen iskustvom, napisao je i 1536. godine izdao knjigu *De Malo Recentiorum Medicorum Medendi Usu Libellus (O lošim praksama u uobičajenoj medicini)* posvećenu prijatelju Filippu Archintu, a u kojoj je pisao o liječnicima kao osobama kojima je stalo više do materijalnih vrijednosti nego do učenja, napredovanja i iskustva te je njome zainteresirao javnost [15].

Uz javna predavanja i tajno liječenje, bavio se i kockanjem koje mu je donosilo najveći udio prihoda. Tu naviku naslijedio je još iz studentskih dana. Bio je upoznat sa svim trikovima, kako zakonitim tako i nezakonitim, za koje je tvrdio da ih nije koristio. Ključ njegova uspjeha bili su sreća i znanje nekih zakona vjerojatnosti [13].

Tek treća Cardanova prijava za liječničku licencu prihvaćena je 1539. godine, zahvaljujući istaknutom čovjeku iz Milana čijem je djetetu Cardano spasio život [13]. Nakon toga je promijenjena klauzula o legitimnom rođenju tako da punopravni članovi sveučilišta mogu biti i osobe rođene u izvanbračnoj vezi. Tako je Cardano 1543. godine postao punopravan član Sveučilišta u Paviji, odnosno profesor medicine, te je kasnije izabran i za rektora čime je postao jedan od istaknutijih liječnika u Milanu, ali i u Europi [15].

Iste 1539. godine Cardano je planirao dvije matematičke knjige *Libellus Qui Dicitur Computus Minor* i *Practica Arithmetice et Mensurandi Singularis* koje su nagoviještale da će doći do skoka u razvoju matematike. Izdanje tih knjiga došlo je do ruku njemačkog tiskara Johannesa Petreiusa, koji se obratio Cardanu sa željom da objavi sva njegova djela koja je dotad napisao te je tako Cardano stekao slavu i ugled [15].

U to vrijeme su se često organizirali dvoboji u kojima su se matematičari međusobno natjecali te je pobjednik osvojio veliku količinu novca. Godine 1535. je Niccolò Fontana Tartaglia (slika 1.2), kako smo opisali u uvodnom poglavlju, na takvom dvoboju pobijedio Antonija Mariu del Fiorea. Metoda kojom je na tom natjecanju riješio jedan slučaj reducirane kubne jednadžbe je i nakon natjecanja ostala nepoznata javnosti. Za taj dvoboj čuo je i Cardano, koji je smatrao da bi upravo otkriće takve metode donijelo slavu njegovom djelu o aritmetici pa se odlučio javiti Tartagliji. Neko vrijeme su razmjenjivali su pisma, sve dok nije nagovorio Tartagliju da dođe u Milano, obećavši mu da će ga upoznati sa svojim sponzorom Alfonsom d'Avalosom, markizom od Vasta, kojemu je Cardano ranije dao primjerak Tartagliaine knjige *La Nouva Scientia*. Time je Tartagliu, samoukog matematičara iz siromašnih okolnosti, stavio u neugodnu situaciju u kojoj nije mogao odbiti ponudu da dođe u Milano i osobno se upozna s markizom i predstavi mu svoje izume o kojima je pisao u knjizi. Ta prilika mu je mogla donijeti ponudu za bolje plaćeni posao. Tartaglia je u Milano stigao u trenutku kada je markiz bio poslovno odsutan te je Cardano iskoristio priliku i ponudio mu smještaj u svojoj kući. Tijekom boravka u Milanu, Tartaglia je popustio i uz Cardanov nagovor otkrio mu metodu u obliku pjesme pod uvjetom da je ne objavi prije njega samog [14]. Stih je, u slobodnom prijevodu, glasio ovako:

Kad su kub i stvari skupa
Jednaki nekom broju
Nađi druga dva broja
Koji se za taj razlikuju
Tad ćeš to zadržati kao naviku

Da im je produkt uvijek jednak
Točno kubu trećine od stvari
Ostatak tad kao opće pravilo
Od njihovih oduzetih kubnih korijena
Bit će jednak tvojoj osnovnoj stvari.

Pritom se pod stvari, talijanski *cosa*, misli na tada uobičajeni izraz za nepoznanicu u jednadžbi [6]. Suvremeni zapis ove metode dat ćemo kasnije. Cardano je, bar na neko vrijeme, održao obećanje te metodu nije objavio u djelu o aritmetici.

Godinu dana kasnije, 1540., Cardanov student Lodovico Ferrari (1522.–1565.) s kojim je podijelio tajnu o metodi rješavanja tipa reducirane kubne jednadžbe, otkrio je metodu za rješavanje jednadžbi četvrtog stupnja. Obojica su smatrali da je to veliko otkriće te je Cardano zaključio da bi trebalo sve metode rješavanja jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja objediniti i izdati knjigu. Prošlo je otprilike pet godina nakon što je od Tartaglije dobio metodu za rješavanje jednog tipa reducirane kubne jednadžbe i u međuvremenu je otkrio metode za rješavanje i ostalih tipova te je 1545. godine Cardano odlučio izdati knjigu pod nazivom *Ars Magna* u kojoj je prikazao objedinjene metode. Sadržaj *Ars Magne* detaljnije ćemo opisati u odjeljku 2.1. Prije toga, točnije 1543. godine, Cardano je s Ferrarijem odlučio otputovati u Bolognu kod Hanibala Navea, del Ferrovog zeta, kako bi se uvjerio u istinitost tračeva da Tartaglia nije prvi koji je otkrio točnu metodu za rješavanje reducirane kubne jednadžbe tipa $x^3 + px = q$, već da je metoda izvorno bila del Ferrova. Svi su hvalili Cardana jer je djelo bilo vrlo korisno svim matematičarima tog vremena. U njemu je među ostalim prikazao i Tartaglijinu metodu uz napomenu da mu je Tartaglia otkrio metodu koju je naslijedio od del Ferra. To se nije svidjelo samom Tartagliji, koji je izrazio veliko nezadovoljstvo te izdao knjigu *Quesiti, et Inventioni Diverse* 1546. godine u kojoj i on prikazuje metodu rješavanja reduciranih kubnih jednadžbi, ali i prepisku s Cardanom kako bi ukazao narodu da ga je Cardano prevario. Kako bi obranio Cardanovu čast, Ferrari je

1547. odlučio poslati pismo Tartagliji, no Tartaglija se nije htio olako predati i izgubiti čast. Tražio je da sam Cardano osobno odgovara nje njegova pisma misleći da mu postavljaju zamku. Tartaglia u pismima ističe Cardanovu sramotu, dok Ferrari tvrdi kako je Tartaglia pogrešno prikazao matematičke tvrdnje u svojoj knjizi. Njihovo dopisivanje završilo je matematičkim dvobojem u kojem se Tartaglia suprotstavio obojici, i Cardanu i Ferrariju. Međutim, Cardano je nestao iz Milana pod krinkom da je zauzet, pa je u dvoboju sudjelovao samo Ferrari koji je pobijedio Tartagliu [13, 15]. Jedini zapisi o ovim događajima pronađeni su u Tartaglijinom djelu u kojem je opisivao kako je tekao dvoboj kojeg su pratili visoki časnici, plemići i ugledni građani, a sudac je bio guverner Milana, Don Ferrante di Gonzaga. U rješenjima zadatka koje im je zadao, Tartaglia je našao grešku u zadatku iz Ptolemejeve *Geometrije* i kada je htio nastaviti dalje govoriti o ostalim zadacima, naglo je bio prekinut od strane Ferrarija koji mu je uzvratio govorom o njegovim greškama. Sve to je eskaliralo, a prisutna publika bila je na Ferrarijevoj strani. Međutim, ne možemo sa sigurnošću reći da se dvoboj odvijao baš tako jer je malo vjerojatno da bi bilo dopušteno takvo odvijanje dvoboja pred uglednom publikom. Iako nije spomenuo tko je pobijedio, iz njihovog života nakon dvoboja možemo zaključiti da je pobijedio Ferrari jer je nakon toga dobio brojne ponude, a Tartaglia se vratio svom skromnom položaju učitelja matematike u Veneciji [15].

U međuvremenu, točnije 1546. godine, umrla je Cardanova supruga Lucia [15]. Cardano je pak bio zaokupljen svojim poslovima oko knjiga kako bi postao što slavniji jer je ipak bio rektor Sveučilišta. Dobivao je razne poslovne ponude, no nije želio napustiti Italiju [14]. Bio je samohrani otac troje djece u dobi od dvanaest, deset i tri godine i morao se brinuti za njih, nije ih mogao ostaviti same. Prolazeći kroz to životno razdoblje, napisao je knjigu o obrazovanju djece u kratkom vremenu. Tekst je napisao na temelju teorije iz znanstvenih istraživanja i onoga što je čuo od svojih pacijenata, a praksu je zanemario. Iako mu nije bilo lako, trudio se oko svojih potomaka te im je želio pružiti sve najbolje.

Slika 1.2: Niccolò Tartaglia

Preuzeto s:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Niccol%C3%B2_Tartaglia_Quesiti-_et_inventioni_diverse.jpg
Autor: Gandvik
Licenca: https://creativecommons.org/licenses/by/3.0

Miljenik mu je bio najstariji Giambatista, kojem je prenio svoju ljubav prema medicini te mu omogućio da upiše Sveučilište u Paviji i bavi se njome [15].

Tijekom tog razdoblja bavio se raznoraznim temama te je 1550. godine izdao djelo pod nazivom *De Subtilitate*, koje je sadržavalo pregled svih znanja 16. stoljeća prikazana kroz dvadeset i jednu knjigu pa su ga mnogi smatrali enciklopedijom [17]. U tom djelu je pisao i o vjeri na način da je u jednom trenu pisao protiv crkve, a u drugom da treba slijediti stavove svojih predaka. Osim toga, opisivao je i razlike između kršćana, židova, muslimana i pogana. Ljudi onog vremena sumnjali su da je Cardano ateist, a on im svojim djelima nije dao mogućnost da potvrde jesu li njihove sumnje istinite ili lažne [15].

Slava mu je donijela mnogo poslovnih ponuda pa su mnoge imućne obitelji u Europi željele da ih liječi. Kako bi zaradio novac da može priuštiti djeci što im je potrebno, prihvatio je ponudu škotskog nadbiskupa Johna Hamiltona te je 1552. godine otputovao u Edinburgh gdje je liječio Johnovog brata Jamesa, koji je patio od jakih napadaja astme, ali i drugih bolesti. Put do Edinburgha i nazad je iskoristio kako bi posjetio što više većih gradova u Francuskoj, Njemačkoj i Švicarskoj, u kojima se susretao sa istaknutim doktorima i znanstvenicima. Stigavši u Škotsku, Jamesa je liječio uobičajenim lijekovima i napitcima, davao savjete što bi trebao raditi i kako se hraniti te ga je postupno promatrao i istraživao njegove simptome. Nakon nekoliko tjedana i dalje je imao sve simptome, koji su se najčešće pojačavali noću kada je imao napadaje. Cardano je pretpostavio da se radi o alergiji te predložio da James perje na kojemu spava zamijeni svilom, a na jastuke izrađene od kože stavi posteljinu čime se brzo popravilo njegovo zdravstveno stanje [13]. Nakon toga se Cardano vratio u Milan, a škotski biskup mu je platio 1800 zlatnih kruna za pomoć i dao zlatni privjesak kao poklon [15].

Pri povratku iz Škotske zaustavio se u Engleskoj kako bi se susreo sa engleskim kraljem Edwardom VI., koji je bio bolestan. Kralj ga je molio da mu izradi horoskop jer je u ono vrijeme bilo uobičajeno da matematičari i astrolozi izrađuju horoskope [15]. Cardano mu je izradio horoskop u kojem mu je predvidio da će živjeti dugo te da će ponekad oboljeti od nekih bezopasnih bolesti. Ipak, horoskop se nije obistinio te je kralj umro netom nakon što se Cardano vratio u Milano [13]. Cardanu je to donijelo nevolje te je postao laka meta za klevete ljudi. Druga nevolja koja je tijekom povratka zadesila Cardana bila je od strane Jeana Borrela[2], koji se suprotstavio Cardanu pod vodstvom svog učitelja Oroncea Finea, koji je bio skeptičan prema njegovom radu i djelima. Nije ga napao javno, već mu se suprotstavio napisavši knjigu o aritmetici koja je bila slična Cardanovoj i u kojoj ga je u nekim dijelovima vrijeđao. Međutim, Cardano ga nije doživljavao kao prijetnju te ga je ignorirao [15].

Još jedna slična nevolja zadesila je Cardana nekoliko godina kasnije od strane Juliusa Caesara Scaligera.[3] Scaliger je izdao djelo u kojem je kritizirao Cardanov *De Subtilitate*

---

[2]Jean Borrel (1492.–1572.) - francuski matematičar

[3]Julius Caesar Scaliger (1484.–1558.) - talijanski liječnik, većinu svog života proveo u Francuskoj gdje je liječio ljude i pisao djela o znanosti i filozofiji

jer je čitajući ga naišao na brojne greške. Cardano se nije obazirao na njegove kritike već je odlučio mjesecima šutjeti. Scaliger je pomislio da je Cardano umro zbog njega, te kako bi zaštitio sebe i svoj ugled, napisao hvalospjev o Cardanu u kojem je sebe okrivio za njegovu smrt te ga opisao kao velikog čovjeka kakav se više neće roditi. Cardano se odlučio oglasiti nakon tog hvalospjeva sa komentarom kako su njegove kritike bile nepotrebne [15].

Nakon povratka u Italiju Cardano je radio kao uspješan profesor medicine od 1553. godine u Paviji sve do 1557. godine kada je umirovljen. Njegov mir i spokoj prekinut je dan nakon umirovljenja [15]. Naime, te noći kad je umirovljen njegovu kuću zadesio je potres. Praznovjeran Cardano je taj potres smatrao lošim znakom za budućnost. Sljedeće jutro je saznao da njegov najstariji sin Giambatista, u kojeg je imao najviše povjerenja, planira vjenčanje sa Brandoniom Seroni. Vijest mu se nije svidjela jer je Brandonia bila iz neugledne i siromašne obitelji, a poznanici su je smatrali uličarkom. Živjela je sa ocem rasipnikom, majkom i tri sestre. Cardano im nije dopustio da nakon vjenčanja žive u njegovoj kući jer je tvrdio da se Brandonia udala iz koristi pa su živjeli kod njezine obitelji, a on je Giambatisti poštom povremeno slao novac, savjete i pokušavao ga oraspoložiti [13, 14]. Cardanove zle slutnje su se obistinile i Giambatistu su iskorištavali i Brandonia i njena obitelj, a ona je bila i nevjerna. U kratkom vremenu postali su roditelji troje djece. Nakon rođenja trećeg djeteta, Fazija, svađe između Giambatiste i Brandonie su postale sve češće, a Brandonia ga je ismijavala govoreći mu kako ni jedno od djece nije njegovo [15]. Giambatisti je bilo dosta uvreda i više nije mogao podnositi svađe. To ga je dovelo do ludila u kojem je od sluge naručio da ispeku kolač u kojem je bio umiješan arsen. Njime je otrovao Brandoniu, njenu obitelj i sebe. Ipak, Brandonia je bila slabijeg zdravlja te je ubrzo umrla [13]. Giambatista i sluga uhićeni su odmah nakon njene smrti [15]. Cardano je bio velika podrška Giambatisti, angažirao najbolje odvjetnike, svjedoke koji su svjedočili u njihovu korist, platio sve troškove, iako ni jednom nije posjetio Giambatistu u zatvoru. Na kraju je Giambatista priznao krivnju te je osuđen na smrt, mučen je i nakon toga mu je 1560.

godine odrubljena glava [13].

Cardano se nije mogao oporaviti od smrti svog miljenika Gimabatiste koja mu je promijenila život iz temelja. Kamo god bi došao, sve bi ga u Milanu podsjećalo na njega. Nije mogao podnijeti da mu je sin ubojica [15]. Ljudi ga više nisu voljeli, njegova reputacija je bila uništena [14]. Cardano se odlučio povući od javnosti i preseliti se u Paviju. Sa sobom je poveo i unuka Fazia kako bi ga spasio od siromaštva. Maleni Fazio je bio njegova jedina utjeha i nada jer njegova kći Chiara nije mogla imati djece, a sin Aldo bio je nesposoban i ovisan o kockanju. U Paviji su proveli svega dvije godine dok se Cardano nije odlučio vratiti u Bolognu [13].

Nakon što su se vratili u Bolognu 1562. godine, Cardano je predavao u najstarijoj medicinskoj školi u Europi. Kod njega je doselio i najmlađi sin Aldo, koji je naslijedio očevu opsjednutost kockanjem. Cardano nije podnosio Aldovo ponašanje, jer je Aldo provodio dane kockajući i pijući u lošem društvu [13, 15]. Vrhunac se dogodio 1569. godine kada je Aldo prokockao sve što je imao i našao se u situaciji da mora ukrasti novac kako bi platio svoje dugove. Tada je provalio u očevu kuću i ukrao mu veliku količinu novca i nakita. Cardano je o svemu obavijestio policiju te kada se saznalo tko je lopov, Aldo je protjeran iz Bologne [14].

Nakon Aldova uhićenja, Cardano je nastavio mirnijim životom. Bavio se pisanjem i izdavanjem knjiga. Svoj mir prekida 1570. godine izradom horoskopa Isusa Krista kojeg je objavio u knjizi u čast rimskom caru-bogu Neronu. Brzo nakon toga je uhićen zbog nevjerništva iako se nije znalo je li to pravi razlog [13]. S obzirom na to da Cardano nije njegovao neprijateljski odnos prema Crkvi i pokajao se pred sudom, dobio je kaznu u trajanju od nekoliko mjeseci tijekom koje se za njega brinuo njegov prijatelj Rodolfo Silvestri. Istražni sud proveo je presudu u tajnosti te oslobodio Cardana uz uvjet zabrane svih javnih predavanja i izdavanja vlastitih djela i brisanje sa liste Sveučilišta [15].

Po izlasku iz zatvora, Cardano je uz Silvestrijevu potporu otišao u Rim. Tamo je posjetio svog rođaka Gasparea Cardana, koji je bio u dobrim odnosima s papom Piom V. i kardinalima [15]. Oni su mu pomogli ublažiti kaznu koju je dobio po izlasku iz zatvora te je uz njihovu pomoć dobio poziv da postane član Medicinskog fakulteta, a sam papa mu je dodijelio i mirovinu [14].

Iako mu je ostala zabrana izdavanja vlastitih djela, u starijim danima se bavio pisanjem autobigrafije *De Propria Vita*. Ona je objavljena posthumno u nekoliko europskih država te je prevedena na razne jezike [14]. U djelu je pisao o sebi kao osobi koja je pobožna, vjerna, skromna, željna znanja i učenja, zainteresirana u otkrića, lukava, marljiva, ali i mrzovoljna, tužna, opsesivna, lažljiva, neodlučna, svadljiva, prezire religiju. Iz njegovog opisa možemo zaključiti kako je bio neodlučan i kako se njegov karakter mijenjao u skladu s njegovim raspoloženjem. Zbog njegove negativne energije ponekad su i njegovi studenti osjećali odbojnost prema njemu. Priznao je kako nikad nije imao veliki krug ljudi oko sebe, već malen u koji je pustio one koji su bili iskreni i dobri te nisu gledali da izvuku samo korist. Smatrao je da ljudi koji nemaju prirodno urođene talente pate manje od onih koji imaju talente jer se oni ne suočavaju sa čestim kritiziranjem i iskorištavanjem ljudi oko sebe. Kako bi opravdao svoje postupke, napisao je cijelo poglavlje o vjeri i svojim vjerskim uvjerenjima gdje se opravdava kako se uvijek držao vjerskih načela te da voli Boga. Ipak, priznaje da je bilo trenutaka u kojima je njegova vjera bila „poljuljana", no uvijek je presudilo ono dobro. Osim o tome, pisao je i o događajima iz svog života. Neizostavan je događaj koji se dogodio u njegovim sedamdesetim godinama, točnije njegovo uhićenje. Tog dana kada je uhićen kao svoj pečat izabrao je lastavicu koja leti jer se osjećao poput nje. Kroz svoj život je baš kao i lastavica mijenjao svoja prebivališta jer mu je život na jednom mjestu predstavljao kavez u kojem ne bi mogao živjeti, izbjegavao je društvo siromašnih, a u društvu bogatih se osjećao usamljeno. S druge strane, volio je svoju obitelj, borio se i kada mu je bilo teško, vraćao se na stara mjesta gdje mu je bilo lijepo [15].

Cardano je u svom horoskopu predvidio i datum svoje smrti, 20. rujna 1576. godine.

Kako bi zadržao reputaciju točnih predviđanja, tog datuma izvršio je samoubojstvo [14] te je kremiran u Milanu. Svoju imovinu ostavio je unuku Faziu, a mirovinu koju je primao sinu Aldu. Njegovi rukopisi pripali su Silvestriju. Neki od njih su izgubljeni, a neki objavljeni posthumno. Iz jednog od takvih rukopisa posthumno je izdano djelo *Liber de Ludo Aleae*, u kojemu je jasno vidljivo da je Cardano već u 16. stoljeću prvi razumio pravila vjerojatnosti, o čemu ćemo više u odjeljku 2.2 [15].

Poglavlje 2

Cardanova matematička djela

Cardano se za svog života trudio ostaviti što više pisanih tragova kako bi se njegovo ime pamtilo generacijama pa je tako za sobom osim izdanih djela ostavio i velik broj rukopisa [14]. Napisao je 21 djelo o matematici, a objavio ih je 8 [13] od čega smo uspjeli naći nazive i godine izdanja 5 od njih:

1. *Libellus Qui Dicitur Computus Minor* (Knjiga zvana malim računom, 1539.);
2. *Practica Arithmetica et Mensurandi Singularis* (Praksa aritmetike i jednostavnog mjeriteljstva, 1539.);
3. *Ars Magna* (Veliko umijeće, 1545.);
4. *Opus novum de proportionibus numerorum, motuum, ponderum, sonorum, aliarumque rerum mensurandarum* (Novo djelo o omjerima brojeva, kretanja, težina, zvukova i drugih izmjerivih stvari, 1570.);
5. *Liber de Ludo Aleae* (Knjiga o kockanju, 1663.).

Mi ćemo u ovom radu detaljnije opisati sadržaje dva glavna Cardanova matematička teksta, *Ars Magna* i *Liber de Ludo Aleae*.

2.1 *Ars Magna*

Nekoliko stoljeća prije nego se Cardano počeo baviti problemom rješivosti jednadžbi 3. i 4. stupnja u radikalima, istim problemom bavili su se, kako smo već rekli, i Arapi te u Cardanovo doba Scipione del Ferro i Niccolò Tartaglia. Kako smo u uvodu rekli, početkom 16. stoljeća među talijanskim matematičarima bilo je opće poznato da se linearnom supstitucijom sve kubne jednadžbe mogu svesti na oblik bez kvadratnog člana, te su iz Khayyamove klasifikacije preostala tri tipa za koja se tražilo rješenje u radikalima. Jedan od njih prvi je riješio Scipione del Ferro, a zatim prigodom natjecanja s del Fiorom i Niccolò Tartaglia. Opisali smo i kako ga je Cardano nagovorio da mu u povjerenju otkrije svoju metodu.

2.1.1 O djelu *Ars Magna*

Djelo *Ars Magna* izdano je 1545. godine te se smatra najvažnijim Cardanovom djelom jer opisuje algebarska rješenja za sve jednadžbe stupnja manjeg ili jednakog 4. Sastoji se od 40 poglavlja u kojima je riješen velik broj zadataka. Zbog u to vrijeme nedovoljno razvijene simbolike, Cardano je metode rješavanja uglavnom opisivao i objašnjavao riječima, koristeći se jednostavnom algebrom kako bi ga čim više ljudi razumjelo. U vrijeme kada je izdano ovo je djelo predstavljalo velik napredak u polju matematike zbog prvih objavljenih metoda rješavanja jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja u radikalima. Iako je autor djela, Cardano spominje da je metodu za rješavanje jednog tipa jednadžbi trećeg stupnja preuzeo od del Ferra i metodu za rješavanje jednadžbi četvrtog stupnja od Ferrarija. Osim metoda rješavanja, promatrao je i svojstva jednadžbi, a uvodi i nešto novo: u ovom se djelu prvi put pojavljuju kompleksni brojevi, točnije drugi korijeni negativnih brojeva. Oni se u njegovim jednadžbama pojavljuju kao nužne posljedice formula. Cardano ih ne odbacuje već ih prihvaća kao međukorak te daje primjere u kojima se pojavljuju. Prilikom objašnjenja metode rješavanja svakog od tipova jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja, Cardano se oslanja na geometrijski pristup, što dodatno komplicira notaciju i objašnjenja [5, 9].

Ars Magna počinje s jednostavnim primjerima kvadratnih jednadžbi, pri čemu, među ostalim, raspravlja i o broju rješenja, o pravilima rješavanja, zatim prikazuje jednadžbe viših stupnjeva koje se mogu rješavati pomoću kvadratnih jednadžbi. Osim kvadratnih jednadžbi spominje i linearne i nelinearne diofantske jednadžbe, interpretira njihova rješenja geometrijski, daje pravila te primjere. Nakon toga prelazi na jednadžbe trećeg stupnja te svakom tipu jednadžbe posvećuje posebno poglavlje koje započinje izvodom odnosno geometrijskom interpretacijom kroz koju objašnjava i dokazuje metodu pa prelazi na pravilo i zatim na primjere čiji se broj razlikuje po poglavljima. Osim o jednadžbama, piše i o pravilima koja vrijede kod određenih jednadžbi, a pomoću kojih dolazi do rješenja. Često, umjesto jednadžbi, prvo zadaje problem kojeg rješava postavljanjem jednadžbe i rješavanjem iste [9].

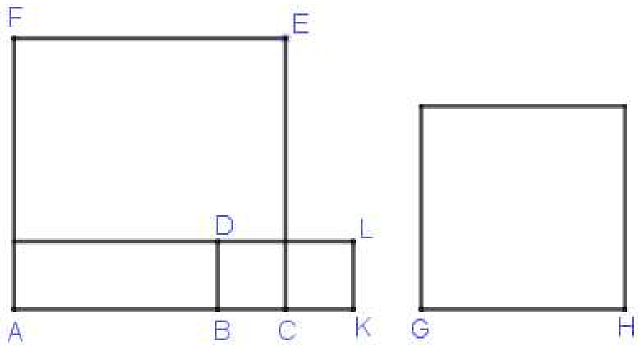
U sljedeća dva odjeljka kroz primjere ćemo ilustrirati dio onoga što nam je Cardano ostavio u nasljedstvo. Zbog nedovoljno razvijene matematičke notacije Cardano je riječima opisivao postupke rješavanja, a u primjerima će biti prikazana rješenja pomoću suvremene matematičke notacije.

2.1.2 Rješenja kubnih jednadžbi

O rješenjima kubnih jednadžbi Cardano je pisao kroz nekoliko poglavlja u *Ars Magni*. Na početku XI. poglavlja naslova „O kubu i prvoj potenciji jednakim broju”[1] navodi: „Scipione del Ferro iz Bologne prije gotovo trideset godina otkrio je ovo pravilo i predao ga Antonija Maria del Fioru iz Venecije, čije natjecanje s Niccolòm Tartagliom iz Brescije je Niccolu dalo priliku da ga i on otkrije. On [Tartaglia] mi ga je dao kao odgovor na moje zamolbe, iako je za sebe zadržao njegov izvod. Oboružan tom pomoći, pronašao sam njegov izvod u [raznim] oblicima. To je bilo vrlo teško. Moja verzija je kako slijedi.”.

[1]Dakle, ovo poglavlje posvećeno je tipu jednadžbe $x^3 + px = q$.

Cardano u ovom poglavlju otkriva metodu rješavanja jednadžbe tipa $x^3 + px = q$, koju je prilagodio i dodao svoje zaključke. Cardanov izvod, odnosno dokaz, pravila je geometrijski, na konkretnom primjeru jednadžbe $x^3 + 6x = 20$, no taj se izvod lako poopći te ćemo ga mi opisati za proizvoljne pozitivne p i q. Na slici 2.1 neka je razlika volumena kocki s bridovima duljina $|AC|$ i $|CK|$ jednaka q (dakle, $|AC|^3 - |CK|^3 = q$) i umnožak duljina tih bridova neka je $\frac{p}{3}$ (dakle, $|AC| \cdot |CK| = \frac{p}{3}$). Ako na bridu $\overline{AC}$ označimo točku B tako da je $|BC| = |CK|$, dužinu $\overline{AC}$ smo podijelili na dva dijela $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, a kocka je podijeljena na osam dijelova. Cardano tvrdi, pa pokazuje, da ako je $|GH| = |AB|$, onda je $|GH|$ traženo rješenje.



Slika 2.1: Prikaz geometrijske interpretacije

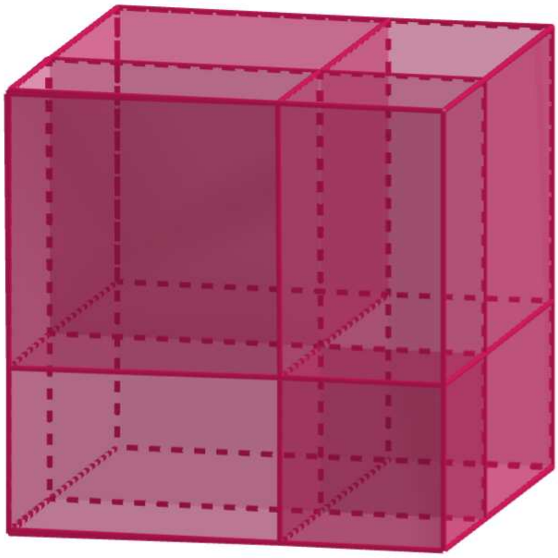
Radi lakšeg zapisa i praćenja dokaza, označimo $u = |AC|$, $v = |CK| = |BC|$ i $x = |AB| = |GH| = u - v$. Prema pretpostavkama je

$$u^3 - v^3 = q,$$

$$uv = \frac{p}{3}.$$

Točkom B je, kako smo rekli, kocka brida u podijeljena na osam dijelova (vidi sliku 2.2):

$$u^3 = v^3 + (u - v)^3 + 3(u - v)^2 v + 3v^2(u - v).$$



Slika 2.2: Geometrijsko svođenje na potpun kub

Budući da je $u^3 - v^3 = q$ i $u - v = x$, slijedi

$$q = x^3 + 3x^2v + 3v^2x = x^3 + x \cdot 3(x+v)v = x^3 + x \cdot 3uv.$$

Naposlijetku iz pretpostavke da je $uv = \frac{p}{3}$ slijedi

$$q = x^3 + px,$$

odnosno navedena konstrukcija stvarno daje rješenje reducirane jednadžbe prvog tipa.

Nakon izvoda Cardano je pravilo zapisao riječima: „Kubiraj trećinu koeficijenta uz nepoznanicu, dodaj ga kvadratu polovine konstante iz jednadžbe; uzmi drugi korijen iz svega. Udvostruči to, i jednom od to dvoje dodaj polovinu broja kojeg si već kvadrirao i od drugog oduzmi polovinu istog. Tada oduzmi treći korijen apotoma[2] od trećeg korijena binoma[3], ono što dobiješ je vrijednost nepoznanice." [9, 16].

[2]brojevni izraz koji se sastoji od razlike dvaju brojeva, najčešće cijelog broja i korijena
[3]brojevni izraz koji se sastoji od zbroja dva broja, najčešće cijelog broja i korijena

Uz današnju simboliku, pravilo zapisujemo ovako: „Ako je dana jednadžba oblika $x^3 + px = q$, onda je

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{ [9].}$$

No, iz izvoda vidimo da je jednostavnije zapamtiti da rješenje x dobivamo rješavanjem sustava

$$u^3 - v^3 = q,\ 3uv = p,$$

odnosno

$$u^3 - v^3 = q,$$
$$27u^3v^3 = p^3,$$

koji se supstitucijom v^3 iz druge u prvu jednadžbu pa supstitucijom $t = u^3$ svodi na kvadratnu jednadžbu. Primijenimo sada ono što smo prikazali.

Primjer 1. *Riješimo jednadžbu* $x^3 + 6x = 20$ *[9].*

Znamo da vrijedi

$$u^3 - v^3 = q = 20,$$
$$u^3v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 8.$$

Iz druge jednadžbe je $v^3 = \frac{8}{u^3}$ *pa supstitucija u prvu jednadžbu daje* $u^6 - 20u^3 - 8 = 0$. *Dobivamo*[4]

$$u^3 = 10 + \sqrt{108}.$$

Stoga je

$$v^3 = \sqrt{108} - 10,$$

iz čega slijedi

$$x = u - v = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.^5$$

[4]Od dva rješenja kvadratne jednadžbe, ono s + uzimamo za u.

[5]Ovo rješenje je zapravo jednako 2. No, to Cardano ne pokazuje, već rješenje ostavlja u ovom obliku.

Kao što smo rekli, Cardano je ovu del Ferro-Tartaglinu metodu doradio i dobio rješenja i ostalih dvaju tipova reducirane kubne jednadžbe. Za tip $x^3 = px + q$ supstitucija je $x = u + v$, odnosno kocka brida u nadopunjava se do kocke brida $u + v$. U suvremenoj notaciji imamo:

$$(u + v)^3 = p(u + v) + q,$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = p(u + v) + q,$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) - p(u + v) = q,$$

$$u^3 + v^3 + (3uv - p)(u + v) = q.$$

Dakle, ako zahtijevamo $uv = \frac{p}{3}$, preostaje da je $u^3 + v^3 = q$, odnosno rješavanje kubne jednadžbe $x^3 = px + q$ sveli smo na rješavanje sustava $u^3v^3 = \frac{p^3}{27}$ i $u^3 + v^3 = q$. I taj se sustav supstitucijama $v^3 = \frac{p^3}{27u^3}$, $u^3 = t$ svodi na kvadratnu jednadžbu. Drugim riječima, ako smo bridove kocki u i v odabrali tako da je zbroj volumena kocki jednak q, a umnožak duljina bridova jednak trećini koeficijenta uz nepoznanicu, onda je nepoznanica jednaka zbroju tih bridova. Suvremenom formulom zapisano:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Primijenimo sada ono što smo opisali na rješavanje jedne konkretne jednadžbe ovog tipa koja se nalazi u *Ars Magna*.

Primjer 2. *Riješimo jednadžbu* $x^3 = 15x + 4$[6] *[5]. Zahtijevamo da vrijedi*

$$u^3 + v^3 = b = 4,$$

$$u^3v^3 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \left(\frac{15}{3}\right)^2 = 5^3 = 125.$$

[6] U ovom Cardanovom primjeru se prvi put u povijesti pojavljuju kompleksni brojevi.

Tražimo $x = u + v$ rješavajući kvadratnu jednadžbu $u^6 - 4u^3 + 125 = 0$.
Cardano ju rješava svođenjem na potpuni kvadrat:

$$u^6 - 4u^3 + 4 - 4 + 125 = 0,$$

$$(u^3 - 2)^2 + 121 = 0,$$

$$(u^3 - 2)^2 = -121,$$

$$u^3 - 2 = \pm\sqrt{-121},$$

$$u^3 = 2 + \sqrt{-121}.$$

Dakle,

$$u = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

pa je

$$v = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

iz čega slijedi

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cardano je ovdje zaključio da je $x = 4$, jer je uvrštavanjem u jednadžbu očito da je 4 njezino rješenje, no da je dobiveno rješenje stvarno 4 kasnije je dokazao Rafael Bombelli (1526.–1572.), koji je prvi u povijesti prihvatio kompleksne brojeve i opisao pravila računa s njima.

Rješenje trećeg tipa reducirane kubne jednadžbe, tj. tipa $x^3 + q = px$ Cardano je odredio koristeći se reduciranom kubnom jednadžbom tipa $x^3 = px + q$ na sljedeći način. Suma rješenja jednadžbe $x^3 + q = px$ jednaka je rješenju jednadžbe $y^3 = py + q$. Cardano je prvo na već opisan način odredio rješenje jednadžbe $y^3 = py + q$. Zatim je, koristeći se rješenjem te jednadžbe odredio x_1 i x_2. Suvremenom notacijom zapisano:
Ako je $x^3 + q = px$, i $y^3 = py + q$, tada je rješenje prve jednadžbe

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{p - 3\left(\frac{y}{2}\right)^2}.$$

Primijenimo to sada u rješavanju jedne konkretne jednadžbe takvog tipa koja se nalazi u *Ars Magna*.

Primjer 3. *Riješimo jednadžbu* $x^3 + 3 = 8x$ *[9]. Prvo moramo odrediti rješenje jednadžbe*

$$y^3 = 8y + 3.$$

Rješenje ove jednadžbe je $y = 3$. *Sada pomoću njega odredimo rješenje polazne jednadžbe. Znamo da je*

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{8 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2},$$

pa dobivamo rješenja

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2},$$
$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Danas, kad smo navikli koristiti negativne brojeve, sve tri metode rješavanja lako objedinimo u jednu. Neka je dana reducirana kubna jednadžba

$$x^3 + bx + c = 0,$$

gdje su b i c bilo kakvi realni brojevi. Supstituiramo $x = u + v$ i dobijemo

$$(u + v)^3 + b(u + v) + c = 0,$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + b(u + v) + c = 0,$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + b)(u + v) + c = 0.$$

Dodamo li uvjet

$$3uv + b = 0,$$

od jednadžbe preostaje

$$u^3 + v^3 + c = 0.$$

Vidimo da smo dobili sustav

$$u^3 + v^3 = -c,$$
$$u^3 v^3 = -\frac{b^3}{27},$$

koji se supstitucijom $v^3 = -\frac{b^3}{27u^3}$ svodi na kvadratnu jednadžbu za u^3:

$$u^3 - \frac{b^3}{27u^3} = -c,$$
$$u^6 + cu^3 - \frac{b^3}{27} = 0,$$
$$u^3 = -\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{b^3}{27}},$$
$$v^3 = -\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{b^3}{27}}.$$

Konačno je

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{b^3}{27}}}.$$

Osim metoda rješavanja reduciranih kubnih jednadžbi, Cardano opisuje i metode kojima rješava kubne jednadžbe koje sadrže i kvadratni član. U sljedećem primjeru ćemo vidjeti kako je rješavao kubnu jednadžbu oblika $x^3 + ax^2 = c$. Takve jednadžbe, naravno, svodi na reducirani tip jednadžbe pa pomoću njezina rješenja dolazi do rješenja polazne jednadžbe. Za jednadžbu oblika $x^3 + ax^2 = c$ uočio je da vrijedi:

1. ako je $2\left(\frac{a}{3}\right)^3 > c$, onda $y^3 + \left[2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - c\right] = 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 y$,
2. ako je $2\left(\frac{a}{3}\right)^3 < c$, onda $y^3 = \left[c - 2\left(\frac{a}{3}\right)^3\right] + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 y$,
3. ako je $2\left(\frac{a}{3}\right)^3 = c$, onda $y^3 = 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 y$.

Dokažimo to. Neka je kubna jednadžba oblika $x^3 + ax^2 = c$, pri čemu su a i c pozitivni brojevi. Jednadžbu svedemo na reducirani tip kubne jednadžbe koristeći se supstitucijom

$x = y - \frac{a}{3}$. Dobivamo sljedeće:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 = c,$$

$$y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}a^2y - \frac{a^3}{27} + ay^2 + 2 \cdot \frac{a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} = c,$$

$$y^3 + \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{2a^2}{3}\right)y + \left(\frac{a^3}{9} - \frac{a^3}{27}\right) = c,$$

$$y^3 - \frac{1}{3}a^2y + \left(2 \cdot \frac{a^3}{27} - c\right) = 0,$$

$$y^3 + \left(2 \cdot \frac{a^3}{27} - c\right) = \frac{1}{3}a^2y.$$

Ovisno o tome je li izraz $2 \cdot \frac{a^3}{27} - b$ pozitivan, negativan ili jednak nuli, dobivamo tri navedena slučaja jer je Cardano promatrao samo jednadžbe sa pozitivnim koeficijentima.

Primjer 4. *Riješimo jednadžbu $x^3 + 6x^2 = 100$ [9]. Zadana jednadžba odgovara drugom od navedenih slučajeva jer je*

$$2 \cdot \left(\frac{6}{3}\right)^3 < 100 \,.$$

Stoga dobivamo reduciranu jednadžbu

$$y^3 = \left[100 - 2\left(\frac{6}{3}\right)^3\right] + 3\left(\frac{6}{3}\right)^2 y \,,$$

$$y^3 = 84 + 12y \,.$$

Prema već opisanom je rješenje jednadžbe $y^3 = 84 + 12y$ dano kao

$$y = \sqrt[3]{\frac{84}{2} + \sqrt{\left(\frac{84}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{84}{2} - \sqrt{\left(\frac{84}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{3}\right)^3}} \,,$$

$$y = \sqrt[3]{42 + \sqrt{(42)^2 - (4)^3}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{(42)^2 - (4)^3}} \,,$$

$$y = \sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}} \,.$$

Sada se vratimo na početnu jednadžbu. Njezino rješenje ćemo dobiti tako da od prethodno dobivenog rješenja oduzmemo trećinu koeficijenta uz x^2*, a to je* $\frac{6}{3} = 2$.

$$x = \sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}} - 2 .$$

Cardano je prikazao i metode rješavanja općih kubnih jednadžbi ($x^3 = ax^2 + bx + c$, $x^3 + ax^2 = bx + c$, $x^3 + bx = ax^2 + c$, $x^3 + ax^2 + bx = c$ s pozitivnim a, b i c). Navest ćemo dva od njegovih primjera. Pritom, kako je već rečeno, prvi korak je supstitucija kojom se eliminira kvadratni član, a kao i maločas, zbog nekorištenja negativnih brojeva Cardano razlikuje po tri slučaja, koje bismo izveli analogno kao gore.
Za slučaj jednadžbe $x^3 + ax^2 + bx = c$, s pozitivnim a, b i c, slučajevi su:

1. ako je $\frac{a^2}{3} = b$, onda $y^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + c$;
2. ako je $\frac{a^2}{3} < b$, onda $y^2 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y = \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\frac{a}{3} + \left(\frac{a}{3}\right)^3 + c$;
3. ako je $\frac{a^2}{3} > b$ i
   a) ako $\left(\frac{a}{3}\right)^3 + c = \left(\frac{a^2}{3} - b\right)\frac{a}{3}$, onda $y^3 = \left(\frac{a^2}{3} - b\right)y$;
   b) ako $\left(\frac{a}{3}\right)^3 + c > \left(\frac{a^2}{3} - b\right)\frac{a}{3}$, onda $y^3 = \left(\frac{a^2}{3} - b\right)y + \left(\frac{a}{3}\right)^3 + c - \left(\frac{a^2}{3} - b\right)\frac{a}{3}$;
   c) ako $\left(\frac{a}{3}\right)^3 + c < \left(\frac{a^2}{3} - b\right)\frac{a}{3}$, onda $y^3 + \left(\frac{a^2}{3} - b\right)\frac{a}{3} - \left[\left(\frac{a}{3}\right)^3 + c\right] = \left(\frac{a^2}{3} - b\right)y$.

U svim slučajevima je $x = y - \frac{a}{3}$.

Primjer 5. *Riješimo jednadžbu* $x^3 + 6x^2 + 12x = 22$ *[9]. Vrijedi*

$$\frac{a^2}{3} = \frac{6^2}{3} = \frac{36}{3} = 12 = b ,$$

dakle radi se o prvom od gore navedenih slučajeva pa dobivamo

$$y^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^3 + 22 ,$$

$$y^3 = 8 + 22\,,$$

$$y^3 = 30\,,$$

$$y = \sqrt[3]{30}\,.$$

Preostaje nam još odrediti rješenje početne jednadžbe:

$$x = y - \frac{a}{3} = \sqrt[3]{30} - \frac{6}{3} = \sqrt[3]{30} - 2\,.$$

U sljedećem primjeru ćemo riješiti kubnu jednadžbu tipa $x^3 + bx = ax^2 + c$ za koju se pri redukciji dobiju sljedeći slučajevi:

1. ako je $\frac{a^2}{3} = b$ i ako

   a) $\left(\frac{a}{3}\right)^3 < c$, onda $x = \frac{a}{3} + \sqrt[3]{c - \left(\frac{a}{3}\right)^3}$;

   b) $\left(\frac{a}{3}\right)^3 > c$, onda $x = \frac{a}{3} - \sqrt[3]{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - c}$;

2. ako je $\frac{a^2}{3} < b$, onda $y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y = c$ i tada, ako

   a) $c = \left[\left(b - \frac{a^2}{3}\right)\frac{a}{3} + \left(\frac{a}{3}\right)^3\right]$, onda $x = \frac{a}{3}$;

   b) $c < \left[\left(b - \frac{a^2}{3}\right)\frac{a}{3} + \left(\frac{a}{3}\right)^3\right]$, onda $x = \frac{a}{3} - y$;

   c) $c > \left[\left(b - \frac{a^2}{3}\right)\frac{a}{3} + \left(\frac{a}{3}\right)^3\right]$, onda $x = \frac{a}{3} + y$;

3. ako je $\frac{a^2}{3} > b$ i ako

   a) $\left(\frac{a^2}{3} - b\right)\frac{a}{3} + c = \left(\frac{a}{3}\right)^3$, onda $y^3 = \left(\frac{a^2}{3} - b\right)y$;

   b) $\left(\frac{a^2}{3} - b\right)\frac{a}{3} + c > \left(\frac{a}{3}\right)^3$, onda $y^3 = \left(\frac{a^2}{3} - b\right)y + \left[\left(\frac{a^2}{3} - b\right)\frac{a}{3} + c\right] - \left(\frac{a}{3}\right)^3$;

   c) $\left(\frac{a^2}{3} - b\right)\frac{a}{3} + c < \left(\frac{a}{3}\right)^3$, onda $y^3 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left[\left(\frac{a^2}{3} - b\right)\frac{a}{3} + c\right] = \left(\frac{a^2}{3} - b\right)y$;

   i $x = y + \frac{a}{3}$.

Primjer 6. *Neka je $x^3 + 21x = 9x^2 + 5$. Odredimo rješenje te jednadžbe[9]. Vrijedi*

$$\frac{a^2}{3} > b ,$$

jer

$$\frac{9^2}{3} = \frac{81}{3} = 27 > 21$$

pa imamo treći od gore navedenih slučajeva. Nadalje:

$$\left(\frac{9^2}{3} - 21\right)\frac{9}{3} + 5 < \left(\frac{9}{3}\right)^3 ,$$

$$(27 - 21)3 + 5 < 27 ,$$

$$6 \cdot 3 + 5 < 27 ,$$

$$23 < 27 ,$$

dakle se radi o slučaju 3.c), iz čega slijedi da je reducirana kubna jednadžba oblika

$$y^3 + \left(\frac{9}{3}\right)^3 - \left[\left(\frac{9^2}{3} - 21\right)\frac{9}{3} + 5\right] = \left(\frac{9^2}{3} - 21\right)y ,$$

$$y^3 + 27 - (6 \cdot 3 + 5) = (27 - 21)\,y ,$$

$$y^3 + 4 = 6y .$$

Dakle, preostaje nam još riješiti jednadžbu $y^3 + 4 = 6y$. Rješenja te jednadžbe su $y_1 = 2, y_2 = \sqrt{3} - 1$ i $y_3 = -\left(\sqrt{3} + 1\right)$[7]. Iz tih rješenja dobivamo rješenja početne jednadžbe $\left(x = y + \frac{a}{3}\right)$:

$$x_1 = 2 + \frac{9}{3} = 2 + 3 = 5 ,$$

$$x_2 = \sqrt{3} - 1 + \frac{9}{3} = \sqrt{3} - 1 + 3 = 2 + \sqrt{3} ,$$

$$x_3 = -\left(\sqrt{3} + 1\right) + \frac{9}{3} = -\left(\sqrt{3} + 1\right) + 3 = 2 - \sqrt{3} .$$

[7] Treće rješenje je Cardano izračunao pogrešno.

Iz prethodnog primjera možemo vidjeti da je Cardano uočio da kubne jednadžbe mogu imati tri (realna) rješenja. Zbog nerazvijenosti matematičke simbolike te zbog nepoznavanja osnovnog teorema algebre, nije mogao opisati modernim stilom kada imamo koji broj rješenja. Posebno, on nije znao da svaka kubna jednadžba (s realnim koeficijentima) sigurno ima bar jedno realno rješenje.

Danas možemo Cardanove metode objedniti u jednu te pomoću diskriminante kubne jednadžbe odrediti koliko rješenja ima, što ćemo učiniti u nastavku. Neka je $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c, \in \mathbb{R}$ normirana kubna jednadžba. Da bismo dobili reduciranu kubnu jednadžbu uvedimo supstituciju $x = y - \frac{a}{3}$. Imamo redom:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0,$$

$$y^3 + \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{2a^2}{3} + b\right)y + \left(-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0,$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0.$$

Odnosno, ako označimo $p = b - \frac{a^2}{3}$ i $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$, dobili smo reduciranu kubnu jednadžbu $y^3 + py + q = 0$. Na isti način kao na str. 29 dobivamo da je

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

odnosno

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Budući da je po početnoj supstituciji $x = y - \frac{a}{3}$, te uvrštavanjem $p = b - \frac{a}{33}$ i $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$ dobili bismo konačnu formulu za rješenje opće kubne jednadžbe, koju zbog njene nepreglednosti ovdje nećemo zapisati.

Prema osnovnom teoremu algebre znamo da kubna jednadžba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ ima tri kompleksna rješenja x_1, x_2 i x_3, odnosno

$$x^3+ax^2+bx+c = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3.$$

Budući da su a, b i c realni vidimo da ako nisu x_1, x_2 i x_3 sva tri realni, onda su dva od njih kompleksno konjugirana. Specijalno, svaka kubna jednadžba ima bar jedno realno rješenje (i ako ima višestruko rješenje, ono i eventualno drugo rješenje su realni brojevi). Nadalje, možemo definirati diskriminantu kubne jednadžbe kao $D = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$. Vidimo da vrijedi: $D = 0$ ako i samo ako postoji višestruko rješenje; $D > 0$ ako i samo ako su sva tri rješenja različita i realna; $D < 0$ ako i samo ako imamo jedan par kompleksno konjugiranih rješenja. Ako iskoristimo da se iz gornjeg vide Vietine formule ($a = -(x_1 + x_2 + x_3)$, $b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $c = -x_1x_2x_3$) dobivamo uobičajeni oblik diskriminante kubne jednadžbe: $D = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc$ [4].

Primjer 7. *Neka je* $x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$*. Odredimo broj rješenja te jednadžbe pomoću diskriminante. Imamo:*

$$D = -4 \cdot 1^3 \cdot 5 + 1^2 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2)^3 + 18 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-3) - 27 \cdot (-3)^2,$$

odnosno

$$D = 43 > 0,$$

pa prema prethodnoj tvrdnji zaključujemo da kubna jednadžba $x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ *ima jedno realno i dva kompleksno konjugirana rješenja.*

2.1.3 Rješenja jednadžbi četvrtog stupnja

U *Ars Magni*, Cardano otkriva svoje metode za rješavanje određenih jednadžbi četvrtog stupnja koje ne sadrže koeficijente trećeg stupnja (tzv. reducirane jednadžbe 4. stupnja).

On te jednadžbe transformira ili ih svodi na kvadrat zbroja. Tek pri kraju djela otkriva i Ferrarijevu metodu za rješavanje svih tipova jednadžbi četvrtog stupnja. Cardano nabraja koji su svi mogući tipovi jednadžbi četvrtog stupnja, a zatim daje primjere od kojih ćemo nekoliko prikazati u nastavku [9]. Pritom ćemo, jednostavnosti radi, umjesto u Cardanovom stilu (po slučajevima, uz uvjet pozitivnosti koeficijenata) sad prvo na moderan način opisati opću metodu za rješavanje reduciranih jednadžbi 4. stupnja s koeficijentima proizvoljnog predznaka, tj. za rješavanje jednadžbi 4. stupnja bez kubnog člana:

1. Neka je $x^4 + bx^2 + cx + d = 0$. Prvo jednadžbu transformiramo tako da jednu stranu jednadžbe svedemo na potpuni kvadrat:

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0 \quad / + bx^2 - cx + b^2 - d,$$

$$x^4 + 2bx^2 + b^2 = bx^2 - cx + b^2 - d,$$

$$(x^2 + b)^2 = bx^2 - cx + b^2 - d.$$

2. Sada uvedemo dodatnu nepoznanicu t pribrajanjem izraza $2t(x^2+b)+t^2$ pa dobijemo:

$$(x^2 + b + t)^2 = bx^2 - cx + b^2 - d + 2t(x^2 + b) + t^2,$$

$$(x^2 + b + t)^2 = (b + 2t)x^2 - cx + (b^2 - d + 2bt + t^2).$$

3. Želimo i desnu stranu jednakosti svesti na potpuni kvadrat, što znači da diskriminanta kvadratnog polinoma na desnoj strani jednakosti mora biti nula. Dakle, moramo odabrati t takav da je:

$$(-c)^2 - 4(b + 2t)(b^2 - d + 2bt + t^2) = 0,$$

$$c^2 - 4(b^3 - bd + 2b^2t + bt^2 + 2tb^2 - 2td + 4t^2b + 2t^3) = 0,$$

$$c^2 - 4b^3 + 4bd - 8b^2t - 4bt^2 - 8tb^2 + 8td - 16t^2b - 8t^3 = 0,$$

$$-8t^3 + (-4b - 16b)t^2 + (-8b^2 - 8b^2 + 8d)t + (c^2 - 4b^3 + 4bd) = 0,$$

$$-8t^3 - 20bt^2 + (-16b^2 + 8d)t + (c^2 - 4b^3 + 4bd) = 0.$$

Time smo dobili kubnu jednadžbu za t, čije rješenje znamo odrediti pomoću prethodnih metoda, ali budući da nam je dovoljan jedan takav t, ponekad ga možemo naći pogađanjem.

4. Kada odredimo t, uvrstimo u jednadžbu

$$(x^2 + b + t)^2 = (b + 2t)x^2 - cx + (b^2 - d + 2bt + t^2),$$

čime dobivamo kvadratnu jednadžbu čije rješenje znamo odrediti [5].

Primjer 8. *Neka je* $x^4 = 5x^2 + 10x + 5$. *Odredimo rješenje te jednadžbe [9]. Prvo svedemo lijevu stranu jednadžbe na potpuni kvadrat:*

$$x^4 - 2 \cdot 5x^2 + 5^2 = -5x^2 + 10x + 5^2 + 5,$$

$$\left(x^2 - 5\right)^2 = -5x^2 + 10x + 30.$$

Zatim uvedemo dodatnu nepoznanicu t:

$$\left(x^2 - 5 + t\right)^2 = -5x^2 + 10x + 30 + 2t(x^2 - 5) + t^2,$$

$$\left(x^2 - 5 + t\right)^2 = (-5 + 2t)x^2 + 10x + (30 - 10t + t^2).$$

Kako bi i desnu stranu jednakosti sveli na potpuni kvadrat, diskriminantu kvadratne jednadžbe na desnoj strani jednakosti izjednačimo s nulom:

$$10^2 - 4 \cdot (-5 + 2t)(30 - 10t + t^2) = 0,$$

$$100 - 4 \cdot (-150 + 50t - 5t^2 + 60t - 20t^2 + 2t^3) = 0,$$

$$-8t^3 + 100t^2 - 440t + 700 = 0,$$

$$-2t^3 + 25t^2 - 110t + 175 = 0.$$

Rješenje t dobivene jednadžbe možemo odrediti pogađanjem ili je riješiti, no očito je da je jedno od rješenja $t = 5$. *Dobiveno rješenje t uvrstimo u jednadžbu* $\left(x^2 - 5 + t\right)^2 = (-5 + 2t)x^2 + 10x + (30 - 10t + t^2)$ *iz čega slijedi*

$$\left(x^2 - 5 + 5\right)^2 = (-5 + 2 \cdot 5)x^2 + 10x + (30 - 10 \cdot 5 + 5^2),$$

$$x^2 = 5x^2 + 10x + 5,$$

$$x^2 = \left(\sqrt{5}x + \sqrt{5}\right)^2,$$

$$x = \pm\left(\sqrt{5}x + \sqrt{5}\right).$$

Dakle,

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{4},$$

$$x_2 = -\frac{5 + \sqrt{5}}{4}.$$

Ferrarijeva metoda za opću jednadžbu 4. stupnja je sljedeća (opet sažeta u jednu uz dozvolu proizvoljnog predznaka koeficijenata):

1. Neka je $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ opća (normirana) jednadžba četvrtog stupnja. Zapišimo je u obliku

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$$

te joj zatim dodamo na obje strane $\left(\frac{ax}{2}\right)^2$, iz čega dobivamo

$$x^4 + ax^3 + \frac{a^2x^2}{4} = -bx^2 - cx - d + \frac{a^2x^2}{4},$$

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d.$$

2. Sada uvedemo dodatnu nepoznanicu t pribrajanjem

$$2t\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+\frac{t^2}{4}$$

pa vrijedi

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d+2t\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+\frac{t^2}{4}\,,$$

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+2t\right)x^2+(at-c)x-d+\frac{t^2}{4}.$$

3. Analogno kao gore, biramo t takav da desnu stranu jednakosti možemo svesti na potpuni kvadrat, to jest diskriminanta joj mora biti jednaka nuli:

$$(at-c)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+2t\right)\left(-d+\frac{t^2}{4}\right)=0\,,$$

odakle dobivamo jednadžbu trećeg stupnja

$$t^3-bt^2+(ac-4d)t+(4bd-a^2d-c^2)=0.$$

4. Jedno rješenje t posljednje jednadžbe uvrštavamo u jednadžbu

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d$$

pa vrijedi

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d+2t\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+\frac{t^2}{4}\,,$$

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+2t\right)x^2+(at-c)x-d+\frac{t^2}{4}\,,$$

iz koje korjenovanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu čije rješenje dalje znamo odrediti [5].

Primjer 9. *Riješimo jednadžbu* $x^4 + 34x^2 + 12x = 12x^3 + 36$ *[9]. Imamo redom:*

$$x^4 - 12x^3 = -34x^2 - 12x + 36,$$

$$(x^2 - 6x)^2 = -34x^2 - 12x + 36 + 36x^2,$$

$$(x^2 - 6x)^2 = 2x^2 - 12x + 36.$$

Zatim uvedemo dodatnu nepoznanicu t:

$$\left(x^2 - 6x + \frac{t}{2}\right)^2 = 2x^2 - 12x + 36 + 2t(x^2 - 6x) + \frac{t^2}{4},$$

$$\left(x^2 - 6x + \frac{t}{2}\right)^2 = (2 + 2t)x^2 + (-12 - 12t)x + 36 + \frac{t^2}{4}.$$

Kako bi i desnu stranu jednakosti sveli na potpuni kvadrat, diskriminantu kvadratnog izraza na desnoj strani jednakosti izjednačimo s nulom:

$$(-12 - 12t)^2 - 4\,(2 + 2t)\left(36 + \frac{t^2}{4}\right) = 0,$$

$$(12 + 12t)^2 - (2 + 2t)(144 + t^2) = 0,$$

$$-2t^3 + 142t^2 - 144 = 0.$$

Pogađanjem možemo odrediti da je jedno od rješenja dobivene kubne jednadžbe $t = -1$ *pa taj* t *uvrstimo u jednadžbu* $\left(x^2 - 6x + \frac{t}{2}\right)^2 = (2 + 2t)x^2 + (-12 - 12t)x + 36 + \frac{t^2}{4}$*. Dobivamo jednadžbu čija rješenja su ujedno rješenja i početne jednadžbe:*

$$\left(x^2 - 6x - \frac{1}{2}\right)^2 = (2 - 2)x^2 + (-12 + 12)x + 36 + \frac{1}{4},$$

$$\left(x^2 - 6x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{145}{4},$$

$$x^2 - 6x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{145}}{2}.$$

Rješenja jednadžbe $x^2 - 6x - \frac{\sqrt{145}+1}{2} = 0$ *su*

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{152 + 8\sqrt{145}}}{4},$$

a rješenja jednadžbe $x^2 - 6x + \frac{\sqrt{145}-1}{2} = 0$ *su*

$$x_{3,4} = \frac{12 \pm \sqrt{152 - 8\sqrt{145}}}{4}.$$

2.2 Liber de Ludo Aleae

2.2.1 Cardano i kockanje

Rekli smo da se Cardano još u studentskim danima okušao u igrama na sreću kako bi zaradio dodatan novac. U ono vrijeme, igre na sreću su obuhvaćale šah, stolne igre i kockanje, a kasnije tijekom 15. stoljeća pridodane su i kartaške igre. Nije potpuno poznato kako su u ono vrijeme ljudi igrali takve igre, no zna se kako su bile vrlo popularne, a Cardano u njima bio pravi stručnjak. Pisci onog vremena u svojim su djelima pisali koje su igre igrali pa možemo naći popise popularnih igara tog razdoblja, a najpopularnija je bila šahovska igra „Rabelais". I sam Cardano je u svojoj knjizi o igrama na sreću napravio popis svih igara koje je znao i o kojima je čuo od drugih ljudi. Cardanova omiljena igra bio je šah, u svojoj autobiografiji je zapisao da se u doba studija totalno zadubio u igranje šaha te zbog njega dvije godine nije pohađao ni praksu ni predavanja. Tek kada su ljudi odustali od igranja protiv njega zbog nemogućnosti da ga pobijede, shvatio je da treba prestati sa igrom te se posvetiti studiju.

Za igre s kockama su u to doba tvrdili da su đavolji izum. Cardano je igrao kockarske igre koje su bile izum Arapa u vrijeme križarskih ratova, a smatrali su ih opasnima jer je njihov prijevod sa arapskog značio „umrijeti". Igra koju je Cardano često spominjao bila je *fritillus* za koju se dugo vremena nije moglo otkriti koja je. Međutim, kasnije su kroz zapise shvatili da se radi o igri grčkog podrijetla, u kojoj su se kocke bacale iz čaše u kojoj bi se protresle. Cardano je naveo popis sa velikim brojem različitih verzija te igre, a verzije su se uglavnom razlikovale samo u pravilima ili pak u početnoj ili završnoj poziciji figura. Današnji naziv za tu igru jest *backgammon* ili *tavla*.

Igre srednjeg vijeka koje su bile igrane na stolu najčešće su se igrale sa tri igraće kocke, no u vrijeme renesanse se počinju igrati sa dvije igraće kocke te takve igre postaju sve popularnije, a one s tri igraće kocke polako nestaju. Kod takvih vrsta igara, Cardano je proučavao frekvencije pojavljivanja određenih ishoda prilikom bacanja dvije i tri igraće kocke.

Cardano je bio zadivljen kartaškim igrama jednako kao i šahom, stolnim igrama i igraćim kockama. Kartaške igre su bile relativno nova pojava u svijetu kad ih je počeo proučavati kao rektor Sveučilišta u Padovi. Iako su bile novina, već su postojale mnoge inačice kartaških igara koje su se igrale diljem Europe. Pretpostavlja se da je najstarija kartaška igra *Trappola*, a iz tog doba jedini zapisi koji o njoj postoje su Cardanovi. Iz njegovih djela saznajemo da mu je omiljena kartaška igra bila *primero* te ju je upravo on popularizirao diljem Europe tijekom 16. stoljeća. Njome se najviše bavio jer je mogao računati kolike su šanse za pobjedu. *Primero* je igra slična modernom pokeru. Imao je drugačije uloge, najjača ruka sastojala se od četiri karte, ali duh igre bio je isti. Bila je to popularna igra u cijeloj Europi s pretpostavkom da se razvila u Italiji gdje je njena popularnost trajala otprilike pet stoljeća, a i talijanski pjesnik Francesco Berni (1497.–1535.) napisao je pjesmu hvalospjeva u njenu čast. U Engleskoj je izgubila popularnost jer nisu imali jasne upute o pravilima igre na engleskom jeziku, dok je u Francuskoj dostigla svoj vrhunac popularnosti tijekom 17. stoljeća, kada se igrala gotovo svagdje, sve dok nije zastarjela i bila zamijenjena drugim igrama. Cardano je zapisao talijanska pravila igre. Pravila su bila rijetkost u Europi jer su se razlikovala od države do države, od grada do grada te se mijenjala kroz vrijeme. Prema Cardanovim pravilima *primero* je bila kartaška igra koja se igrala sa špilom od 40 karata, u kojem nedostaju osmice, devetke i desetke. Cilj je bio u ruci skupiti četiri karte u istoj boji (ili u nekim verzijama četiri karte iste jačine). Određene karte su donosile određene bodove te se na temelju toga određivao poredak natjecatelja čiji se broj smanjivao kroz krugove natjecanja. Onaj tko je ostao zadnji mogao je ponuditi dogovor kako bi spasio neke od svojih uloga na način da uloženi iznos podijeli u omjerima koji bi odgovarali šansama dvaju protivnika. Proučavajući vjerojatnosti, Cardano je otkrio da uobičajene podjele obično favoriziraju osobe koje imaju male šanse za pobjedu. Natjecatelji su se obično borili do kraja bez šanse te su jedni igru i natjecatelje uspoređivali sa ratom i ratnicima koji bježe od vatre i traže sigurno mjesto od kuda će se moći braniti, a drugi s nepredvidivom političkom situacijom u Italiji. Naime, u Italiji su dominirale dvije jake sile koje su htjele doći na vlast — Francuska i Španjolska, te su bile razne intrige koje su opjevane u djelima [15].

U Cardanovo doba, ishod igara na sreću je još uvijek bio smatran rezultatom volje neke „vanjske" sile (Boga, duhova, vraga, ...). Sudionici igara na sreću imali su praznovjerna uvjerenja te su često prilikom igre kucali u drvo, sjedali na mjesta koja su im donosila sreću, nosili amajlije i novčiće za sreću. Cardano je analizirajući ih zaključio da to nije tako, već da sreća ovisi (i) o drugim faktorima. Prije njega, nitko nije pokušao promatrati pravilnosti i racionalizirati šanse za uspjeh.

Cardanova knjiga o kockanju *Liber de Ludo Aleae* izdana je posthumno 1663. godine, nakon što je spašena s hrpe njegovih rukopisa. U *Autobiografiji* je spominjao knjige o kockanju te kako se tijekom razdoblja rektorstva u Padovi bavio i igrama na sreću [15]. Svoj rad o igrama na sreću nije naveo pod matematičkim djelima u svojoj autobiografiji te nije naveo o kojim se pitanjima radi u radu, vjerojatno zbog različitih mišljenja stanovništva talijanske renesanse o kockanju [3]. Tijekom tog razdoblja je prvo skupljao razne informacije o igrama, a zatim ih proširio i napisao četiri knjige. Prva od njih bila je knjiga sa stotinjak stranica o šahu, druga od dvadesetak bila je općenito o igrama na sreću, treća o igrama na sreću u kojima su važni i lukavost i sreća te četvrta o igrama na sreću u kojima je potrebna i sreća i znanje. Te knjige, osim prve o šahu koju je Cardano vjerojatno spalio, spojene su i uključene u *Liber de Ludo Aleae*. Izdana verzija tog djela je zapravo dopunjeno originalno djelo koje je Cardano započeo pisati još u svojim studentskim danima [15].

Glavna tema ovog djela je pravda koja je bila Cardanova motivacija da se počne baviti računanjem vjerojatnosti. Njegovo temeljno načelo kockanja temeljilo se na pravdi te na jednakosti koja je podrazumijevalo jednake šanse za sve igrače u igrama na sreću. Ideju za načelo Cardano je preuzeo iz Aristotelove *Etike*, kod igara na sreću to načelo uključivalo je dvije osobe koje su pravedne i dva udjela koja su u istom omjeru. Osim kod pravednosti, na Aristotela se pozivao i prilikom definiranja temeljnog principa kockanja. Jedna od tema su i znanje, vještina ili znanost koji su odgovori na Aristotelove prigovore kockanju. Ovim djelom, Cardano je čitateljima koji imaju volje za znanjem prenio svoje znanje o igrama s kojim će i oni sami dobiti vještine za igranje [3].

U drugim djelima je Cardano također spominjao kockarski život, koji ima svojih zadovoljstava i poroka, prednosti i mana te upozoravao da takav život može dovesti čovjeka do bankrota. On je svoje brige, probleme i bolest ublažavao kockanjem, ali je isto tako smatrao da kockanje nije za čovjeka zdravog razuma osim u situacijama kada bi trebao olakšati brige koje teško podnosi. Pisao je kako prijatelji ne bi trebali zajedno kockati jer koliko god kockanje izazivalo osjećaj zadovoljstva, toliko je bilo podlo i prljavo. Čak je dao Ciceronove primjere vladara koji su na sudačke pozicije stavljali igrače koji su osvojili njihovu bliskost i simpatiju te tako na manje rizičan način došli do novca. Spominjao je i liječnike i odvjetnike koji su zbog kockanja dolazili u nepovoljni položaj te bivali prozvani kockarima ako pobijede ili lošima u svom poslu ako izgube. Njegova djela puna su dobrih savjeta koje dijeli drugima, ali ih sam nije koristio. U kasnijim godinama života je požalio, jer je tek tada shvatio koliko je imovine izgubio te koliko je naštetio svojoj djeci koju je uveo u taj svijet ugošćujući kockare u vlastitom domu [15].

Liber de Ludo Aleae je priručnik o kockanju koji sadrži savjete i upozorenja za one koji imaju manje iskustva u kockanju od autora. U knjizi autor upoznaje čitatelje s činjenicom da postoje lažne kockice te označene karte, ali i sa sumnjivim praksama kockara. Cardano piše o tome kako igranje igara može imati koristi kod ljudi koji su bolesni ili su u zatvoru i osuđeni na smrt. Također, stalno ponavlja kako ulozi u igri trebaju biti maleni jer ukoliko ulozi budu veći prestaje opuštanje i počinje mučenje. Jednom prilikom je izjavio: „Najveći uspjeh u kockanju postiže se ako se uopće ne igra." [15]. Cardano spominje da je kockanje dobar način za steći prijatelje i da je sam, kroz kockanje, bio predstavljan mnogim plemićima u Milanu. Kao iskusan kockar, Cardano je opisivao kako omesti protivnika i na taj način pobijediti uz upozorenje da postoji mogućnost da netko od promatrača bude na strani protivnika te se pobuni i krene u protunapad.

Svi kockari renesansnog vremena bili su ozloglašeni kao praznovjerni pa tako i sam Cardano. Bio je opsjednut okultnim idejama već u mlađim danima. Znao je diskutirati o sreći u kockanju i u svojim diskusijama je spominjao astrologe za koje je smatrao da bi nekad mogli biti od pomoći te proricanje budućnosti, no oko te teme je bio skeptičan. Da su okultne misli bile sastavan dio njegova života očituje se i u djelu *Liber de Ludo Aleae* u kojem kroz gotovo pola knjige prikazuje znakove okultnog. U praznovjerne običaje tadašnjih kockara spadalo je, primjerice, da su smatrali da kocku treba baciti snažno jer kada bi je bacili bojažljivo rijetko bi pobijedili. Cardano se nije slagao s takvim razmišljanjem. Analizirao je pitanje sreće te je došao do dva principa od kojih u jednom sreća ovisi o zakonima i planovima, a u drugom o vremenu. Na kraju je zaključio da ono što nekome donese sreću, drugoga će razočarati [15].

O ovom djelu se raspravljalo u raznim pisanim djelima. Tako je 1854. godine Henry Morley u svom djelu o Cardanovu životu pisao i o *Liber de Ludo Aleae* te naveo da je ono vrlo karakteristično za njegovu osobnost. O Cardanu kaže da je pisao o onome što ga je zabavljalo ne brinući se o ugledu ili da će morati opravdati ljubav prema kockanju. I on ponavlja da je Cardano pisao da je bolje igrati s malim ulozima ili ako netko voli igrati sa velikim ulozima, neka tada igra sa protivnikom koji ima manje iskustva i manje sreće [15].

2.2.2 Sadržaj *Liber de Ludo Aleae*

Liber de Ludo Aleae (Knjiga o igrama na sreću) je, kako smo rekli, izdana posthumno 1663. godine. Inspiriran strašću za kockom, šahom i kartama postavio je temelje teorije vjerojatnosti gotovo sto godina ranije nego su to napravili Pascal i Fermat kojima se pripisuje utemeljenje teorije vjerojatnosti 1654., u doba kad Cardanova (i Galileova) razmatranja o vjerojatnosti nisu bila poznata. U knjizi Cardano osim teorije piše i o praksi pa tako u nekim dijelovima čak daje i savjete kako varati. Ti savjeti vjerojatno dolaze iz njegova vlastita iskustva koje ga je često koštalo novaca i ugleda, ali mu je donijelo i slavu u povijesti matematike. *Liber de Ludo Aleae* je knjižica koja je izvorno imala samo 15 strana. Podijeljena je na 32 kratka poglavlja te se zapravo može koristiti kao priručnik u igrama na sreću [3, 11]. Prevedena je na engleski 1953. godine u [15] (taj prijevod ima 55 strana) te je izazvala velik interes ljudi koji su se bavili poviješću vjerojatnosti. Proučavajući knjigu, dolazili su do brojnih pitanja, vodile su se diskusije, a na kraju su doneseni zaključci da se zaista radi o djelu nastalom u vrijeme renesanse zbog njegove strukture, ali i otkrića koja nisu povezana s onima u pismima koja su razmjenjivali Pascal i Fermat već se pretpostavljalo da su nastala na temelju srednjovjekovne pjesme *De Vetula* (1250.). Jedan od razloga zašto se to smatra jest Cardanov opis bacanja tri kocke koji je sažet, ali vrlo sličan pjesmi [3].

U prvom poglavlju *O vrstama igara* Cardano kratko opisuje vrste i osobine igara na sreću. Posebno spominje kartašku igru *primero*, za koju kaže da njen naziv potiče od činjenice da drži primarno mjesto među igrama na sreću te da se sastoji od četiri primarne asocijacije koliko je i primarnih „elemenata” od kojih se svijet sastoji (zemlja, vatra, zrak, voda) [15]. U drugom poglavlju *O uvjetima igre* pisao je o razlozima za i protiv igranja igara na sreću. Među ostalim navodi da se treba obratiti pažnja na stanje igrača i njegova protivnika te na uvjete pod kojima se igra (iznos uloženog novca, mjesto igre, koja je prilika). Istaknuo je i važnost da se u igru ne uključuju neumjereni novčani iznosi, jer inače nitko ne bi igrao. Navodi i razne situacije u kojima jest ili nije prihvatljivo igranje igara na sreću. Time zapravo predstavlja suprotstavljena stajališta, metodu koja je bila popularna među renesansnim humanistima, a temelji se na ciceronskim metodama i načelima [3, 15].

U trećem poglavlju *Tko bi trebao igrati i kada* pisao je o tome kako je teže kockati uglednim, poznatim, mudrim ljudima nego dječacima, mladićima, vojnicima jer je veća sramota kad izgube. Kockajući možemo pobijediti ili izgubiti. Ako pobijedimo, možemo potrošiti novac koji smo osvojili. A ako izgubimo, postajemo siromašni, pljačkaši ili nas osuđuju. Cardano je dao savjet da treba odabrati protivnika odgovarajućeg položaja, da ne treba igrati često, da ulozi trebaju biti maleni, da treba odabrati prikladno mjesto kao što je vlastiti dom ili dom prijatelja te u prikladnim prilikama kao što je blagdanski objed. S druge strane, daje savjet da velikim ulozima možemo dobiti sliku kakav je naš protivnik. Iako njegove tvrdnje danas djeluju zbunjujuće, u vrijeme renesanse je to bio standardni oblik argumentacije [3]. Smatrao je da odvjetnici, doktori i ljudi sličnih zanimanja ne bi trebali kockati jer na taj način mogu biti proglašeni kockarima i mogu izgubiti svoj ugled [15].

U četvrtom poglavlju *Koristi i gubitci kod igranja* navodi da su među koristima igranja igara na sreću relaksacija i stjecanje prijateljstava, dok pod gubitke stavlja rušenje ugleda, gubljenje vremena, stjecanje loših navika, gubitak kontrole nad umom što rezultira gubitkom velike količine novca. Osim toga, napomenuo je kako je igra zapravo veoma dobar test čovjekova strpljenja te da u igri upoznajemo čovjekov karakter [3]. U petom poglavlju *Zašto sam se bavio kockanjem* pisao je o dva razloga zbog kojih se počeo baviti kockanjem. Prvi razlog su korisna svojstva kockanja, a drugi razlog je taj da je iz poroka htio izvući korist, što je bio običaj filozofa u to vrijeme [15]. Šesto poglavlje *Temeljni princip kockanja* započinje temeljnim principom:„Najosnovniji princip od svih u kockanju su jednostavno jednaki uvjeti...". Dalje piše i o kibicerima i njihovom utjecaju na igru (primjerice, kroz ometanje ili informiranje protivnika). U ovom poglavlju prvi put spominje i varanje [3, 15].

U sedmom poglavlju *Viseća kutija s kockama i nepoštene kocke* upozorava na nepoštene prakse u kockanju i osuđuje ih, a u osmom poglavlju *Uvjeti pod kojima treba igrati* pisao je o tome kako nije u redu posvetiti se kockanju samo kako bi osvojili neki novac. Smatrao je da bi trebali igrati za male uloge da ne bismo bili prozvani rasipnicima i da ne bismo izgubili ugled. Ako ipak želimo riskirati i ulagati velike iznose novca, neka biramo protivnike koji nisu niti iskusniji niti imaju više sreće od nas samih [3, 15].

Kao što vidimo, u prvih osam poglavlja Cardano samo izlaže svoje filozofske i ine razloge za i protiv igranja i daje opće upute igračima, no matematičkog sadržaja tu nema. Matematička diskusija vjerojatnosti započinje s devetim poglavljem *O bacanju jedne kocke*. Tu je opisao osnovne vrste kockica: uobičajenu sa šest strana te *talus* s četiri strane. Tu s jedne strane navodi da bi kod kockice sa šest strana u jednom krugu od šest bacanja svaka strana trebala pasti po jednom (dakle, opisuje vjerojatnosni prostor, ali uz jednu vrlo upitnu tvrdnju), no zatim ističe i da se u praksi u šest bacanja neće pojaviti svi ishodi. Također, argumentira (naravno, netočno) da je vjerojatnost da se neka strana pojavi u tri bacanja jednaka $\frac{1}{2}$ [15]. U desetom poglavlju *Zašto je Aristotel osudio kockanje* razmatra u kojim je slučajevima kockanje i dobitak iz istog prihvatljiv ili nije, a spominje i da je Aristotel kockare stavio u istu kategoriju s razbojnicima i lopovima jer stječu nepoštenu korist [3, 15].

Jedanaesto poglavlje *O bacanju dvije kocke* prvo je matematički ozbiljnije poglavlje u knjizi. Cardano ovdje razmatra vjerojatnosti vezane za bacanje dviju kocaka. Zaključio je da postoji ukupno 36 ishoda bacanja para kocaka, a od toga ima 6 mogućnosti da brojevi na obje kocke budu isti, a 30 mogućnosti s različitim brojevima na kockama. Neki od Cardanovih navoda u ovom poglavlju su korektni, a neki nisu. Primjerice, korektno navodi da se rezultat od jedne jedinice i jedne dvojke može dobiti na dva načina. No, krivo zaključuje da će par jedinica pasti jednom u 18 puta. Naime, Cardano ovdje (kao što se moglo uočiti već u devetom poglavlju) koristi sljedeće nepravilno razmišljanje: Ako je p vjerojatnost nekog ishoda pokusa, onda će se u n ponavljanja tog pokusa promatrani ishod desiti pn puta (poistovjećuje očekivanje sa sigurnošću), pa je za „jednakost" (misli na vjerojatnost od bar $\frac{1}{2}$) potrebno bar $\frac{1}{2}np$ ponavljanja. Budući da je vjerojatnost para jedinica $\frac{1}{36}$ (točno), Cardano tvrdi da se za „jednakost" (da bude bar jednako vjerojatno da padnu nego da ne padnu) par kocaka treba baciti 18 puta (netočno) [3, 15].

U 12. poglavlju *O bacanju tri kocke* proširio je navedena razmišljanja na slučaj bacanja triju kocki. Cardano pravilno dobiva da postoji 30 načina da se bacanjem triju kocaka dobije jedan par i treća kocka drugačije vrijednosti. To argumentira onime što danas nazivamo kombinatornim principom produkta: Imamo 6 mogućih vrijednosti za broj koji se pojavljuje u paru, a 5 mogućih vrijednosti za iznos na trećoj kocki, pa je stoga broj mogućnosti što se iznosa tiče $6 \cdot 5 = 30$. No, svaki takav se može pojaviti na tri načina, dakle imamo 90 mogućih ishoda s dvije iste i trećom drugačijom vrijednosti. Budući da imamo 6 mogućih ishoda sa sva tri broja ista te (uz sličan argument upravo opisanom) 120 mogućih ishoda sa sva tri broja različita, slijedi da imamo ukupno 216 mogućih ishoda bacanja triju kocaka. No, tu opet primjenjuje krivo razmišljanje spomenuto u opisu devetog poglavlja pa tvrdi da je za „jednakost" (smislenost klađenja na konkretni rezultat s omjerom 1:1) potrebno 108 bacanja [3, 15].

U 13. poglavlju *O zbroju brojeva do šest i više za dvije i tri kocke* određuje sve mogućnosti dobivanja određenog zbroja bacanjem dviju kocki. Zbroj rezultata na dvije ili tri kocke gleda se u igri *sors*, dok igra *fritillus* (kako smo već rekli, srodna *backgammonu*) ima kompliciraniji sustav bodovanja, ali opet temeljen na razmatranju pojedinih rezultata bacanja triju kocki. Cardano u ovom poglavlju opet nepravilno razmatra „jednakosti" na temelju pravilno određenih vjerojatnosti [3, 11, 15].

U 14. poglavlju *O kombiniranim bodovima* Cardano je računajući na koliko načina možemo doći do raznih povoljnih rezultata u kockarskim igrama s dvije ili tri kocke, stavljajući brojeve povoljnih načina u omjere sa ukupnim brojevima načina, došao do zaključka kojeg su neki smatrali prvom klasičnom definicijom vjerojatnosti[8]. Naime, potkraj ovog poglavlja Cardano je zapisao: „Naime, postoji jedno opće pravilo koje kaže da bi morali uzeti u obzir cijeli krug [9] i broj rezultata bacanja koji predstavlja na koliko načina se može pojaviti povoljni ishod te moramo usporediti taj broj s ostatkom kruga te bi se prema tom omjeru trebali postavljati ulozi u igri kako bi se borili pod jednakim uvjetima.”. Osim klasične definicije vjerojatnosti, u ovom poglavlju se dotakao i pitanja ponavljanja nezavisnosti[10]. Cardano računa vjerojatnost dobivanja bar jedne jedinice („asa”) u jednom bacanju triju kocaka. Prvo (točno) zaključuje da za to ima 91 povoljnih i 125 nepovoljnih mogućnosti, tj. omjer šansi pri klađenju na „bar jedan as u bacanju tri kocke” je $91 : 125$. Zatim je krivo izračunao omjer šansi za „bar jedan as u dva bacanja tri kocke”, kojeg je računao kvadriranjem tog omjera (umjesto odgovarajućih vjerojatnosti $\frac{91}{216}$ i $\frac{125}{216}$, no u ideji kvadriranja naziremo ideju nezavisnosti dvaju uzastopnih bacanja dviju kocki) [3, 11, 15].

Cardano je tu svoju grešku uočio te u 15. poglavlju *O greški koja je napravljena u vezi s tim* piše o njoj te svoje prvo razmatranje čak naziva apsurdnim. U ovom poglavlju zaključuje da se kod nezavisnih ponavljanja istog pokusa ne množe omjeri šansi već vjerojatnosti. Specijalni slučajevi koje razmatra odgovaraju formuli koja se ponekad naziva Cardanovom, a to je da ako je omjer šansi za dobitak i gubitak u jednom izvođenju pokusa $m : (N - m)$ (gdje je N broj svih mogućih ishoda, a m broj povoljnih), onda je taj omjer za

[8]Suvremena klasična, „školska” definicija vjerojatnosti glasi: Neka je Ω konačni prostor elementarnih događaja i neka su svi elementarni događaju jednako mogući. Neka je $A \subset \Omega$ događaj. Omjer broja elementarnih događaja povoljnih za A i ukupnog broja elementarnih događaja zovemo vjerojatnost događaja A.

[9]Cardano „krugom” naziva kardinalni broj prostora elementarnih događaja, to jest skupa svih mogućih ishoda prilikom izvođenja eksperimenta.

[10]Dva slučajna događaja su nezavisna ako je vjerojatnost da se oba dogode jednaka umnošku vjerojatnosti da se pojedini od njih dogodi.

n nezavisnih izvođenja tog pokusa $m^n : (N^n - m^n)$, što je ekvivalentno vjerojatnosti uspjeha $\frac{m^n}{N^n}$. Navedimo jedan konkretan primjer iz 15. poglavlja [3, 11, 15].

Primjer 10. *Neka je u igri bacanja jedne kocke za igrača povoljan rezultat* 1 *ili* 2*. Koji su omjeri šansi, tj. pravedni omjeri uloga, ako se igrač kladi na po jedno dobivanje jedinice ili dvojke u jednom, dva ili tri bacanja?*

Vjerojatnost dobitka u jednom bacanju je $\frac{1}{3}$*, dakle je omjer šansi za jedno bacanje* $1 : 2$.

Vjerojatnost dobitka u dva bacanja (dakle, da u oba bacanja padne jedinica ili dvojka) je $\frac{1}{9}$*, dakle je omjer šansi za dva bacanja* $1 : 8$.

Vjerojatnost dobitka u dva bacanja (dakle, da u oba bacanja padne jedinica ili dvojka) je $\frac{1}{27}$*, dakle je omjer šansi za dva bacanja* $1 : 26$.

U 16. poglavlju *O kartaškim igrama* Cardano detaljno opisuje kartašku igru *primero*, a u 17. poglavlju *O prijevarama u igrama takve vrste* upozorava na koje sve načine kartaši varaju, posebice opisujući prijevare koje koriste spretnost ruku ili u kojima sudjeluju kibiceri [3, 15]. U 18. poglavlju *Uobičajena pravila u primeru* pisao je o pravilima u *primeru* koja se dogovaraju kao što su zabrana izvlačenja karata iz odbačenih, mijenjanje karate jednom u toku igre [15]. U 19. poglavlju *O raznolikosti zbrojeva ili brojeva u primeru* ponovno se vraća na matematiku (vjerojatnost). Tu je pisao o maksimalnom i minimalnom broju bodova koji se mogu osvojiti u *primeru* i na koje načine postižemo određeni broj bodova. Ovdje se radi o zanimljivoj, vrlo elementarnoj kombinatornoj analizi mogućnosti s puno konkretnih brojeva, ali zbog kompliciranosti pravila *primera* i matematičke jednostavnosti sadržaja izostavljamo detaljniji opis te analize [15].

U 20. poglavlju *O sreći u igri* pisao je o velikoj ulozi sreće u igrama, ali i u poslu. U ovom se poglavlju vidi da i kod njega još uvijek postoji uvjerenje o rezultatima igre na sreću kao posljedicama neke vanjske (nadnaravne) sile, a ne samo čiste slučajnosti: „Čini se da u tim stvarima sreća igra veliku ulogu, tako da se neki susreću s neočekivanim uspjehom dok drugi ne uspijevaju u onome što su mogli očekivati [...] Ako bi itko bacio s rezultatom koji naginje više u jednom smjeru nego što bi trebao i manje u drugom, ili inače ako je uvijek jednako onome što bi trebalo biti, onda će u slučaju poštene igre postojati razlog i temelj toga, a to nije igra sreće; a ako imamo različite rezultate pri svakom ulogu, onda je neki drugi faktor prisutan u većoj ili manjoj mjeri; tu se ne može naći racionalno poznavanje sreće, iako se nužno radi o sreći.” [3].

U 21. poglavlju *O plašljivosti u bacanju* pisao je kako igrači koji kocku stidljivo i plašljivo bacaju bivaju poraženi te da ako želimo pobijediti, kocku trebamo držati čvrsto i hrabro. U 22. poglavlju *O dvostrukoj podjeli igara* pisao je o tome kako postoje razne podjele igara s obzirom na njihova svojstva. Stoga su neke igre otvorene, neke zatvorene, kod nekih pobjeda ovisi samo o slučajnosti dok kod nekih ovisi i o umijeću igranja, kod nekih je potrebna sreća a kod nekih znanje i slično [15]. U 23. poglavlju *O kartaškim igrama u kojima postoji mogućnost za uvježbanost* pisao je o važnosti pamćenja prilikom spremanja, pokrivanja i odbacivanja karata. Pri tome spominje kartašku igru *trapolla* na čijem primjeru objašnjava korištenje karata te bodovanje [2]. U 24. poglavlju *O razlici između igranja s kartama i igranja s kockom* pisao je o tome kako su igre s kockama nepredvidive i rezultati su čista slučajnost dok igre s kartama ovise o kartama koje igrači trenutno imaju u rukama, a te karte često možemo i prepoznati po poleđini radi označavanja. Smatrao je da je za mudre ljude prikladnije igrati igre s kartama jer će tako razvijati svoje sposobnosti. U 25. poglavlju *O kartaškim igrama* pisao je o vrstama kartaških igara, kako zahtijevaju pažnju i vještinu te kako se one razlikuju po složenosti, ali i po razlikama koje se javljaju kod svake igre (npr. izvlačenje karata, broj karata). U 26. poglavlju *Igraju li dobro oni koji podučavaju* pisao je kako je čovjek i učen i uspješan u stvarima koje daju vremena za razmišljanje. Ukoliko nemamo vremena za razmišljanje koliko god bili učeni, može doći do toga da znanje ne primjenjujemo uspješno. Sposobnost primjenjivanja znanja ovisi i o samom znanju, ali i o praksi u kojoj su važna tri elementa — fizička priroda, oštroumnost i brzina [15].

U 27. poglavlju *Postoji li neki element osim vještine kojim možemo uvježbati vještine* Cardano kaže kako praksa da je iskustvo, znanje i metode te da je važno imati dovoljno vremena za razmišljanje. Spominje kamenje za koje ljudi smatraju da povećava vještinu i hrabrost onih koji ga nose. Piše kako je sve promjenjivo, od ljudi, njihovih godina pa sve do vremena koje se stalno mijenja te da neke stvari mogu, ali i ne moraju biti u skladu s planovima čovjeka jer sreća je dvojaka. Najvažnije je prosuđivanje i predviđanje jer pruža savjete koje možemo iskoristiti u budućnosti. U 28. poglavlju *O dugoročnim planovima, prosudbi i postupku* na primjeru igre *backgammon* prikazuje kako je u nekim igrama potrebno unaprijed planirati te prosuditi koji bi nas postupak trebao odvesti do pobjede i biti ustrajan u tome. U 29. poglavlju *O karakteru igrača* opisuje kakvi sve igrači postoje, od onih koji toliko provociraju protivnike da ih naljute do onih koji zbijaju šale sa protivnicima pa sve do onih tihih koji ne progovore ni riječi [15].

U 30. poglavlju *O igrama na sreću* pisao je o razvoju igara na sreću koje su se u početku nazivale skupnim imenom *aleae*, a igrale su se standardnom kockom sa šest jednakih strana ili *talusom* o kojima više piše u 31. poglavlju *O igri s klinovima*. U tom poglavlju opisuje *talus* kao kocku koja je imala šest strana od kojih su dvije bile toliko male da je izgledalo kao da ima samo četiri strane (tj. četiri broja (1, 3, 4, 6)) te uspoređuje ishode bacanja četiri *tali* za redom sa bacanjima standardnih kocaka. Prebrojavanjem dolazi do zaključaka da postoji ukupno 4 mogućnosti da brojevi na kockama budu isti i 24 mogućnosti da svi brojevi na kockama budu različiti, a ukupno postoji 256 ishoda četiri bacanja kocke. No, Cardano ovdje nije uočio da iz tih prebrajanja ne možemo direktno dobiti vjerojatnosti, jer se kad bacanja *tali* ponekad mogu pojaviti i one dvije male strane. U 32. poglavlju *Zaključak rada* Cardano se ponovno poziva na Aristotelovu *Etiku* i definira aritmetičku sredinu (srednju vrijednost, prosjek). Za standardnu kocku sa šest jednakih strana aritmetičku sredinu računa na uobičajen način. No, za bacanja četiri *talusa* ili tri obične kocke, Cardano koristi Aristotelov prosjek kao prosjek najveće i najmanje vrijednosti. Cardanova *Liber de Ludo* *aleae* završava ovim riječima: „Uz ove užitke dozvoljeno je opustiti um igrom, u nemirima duha, ili kad su nam poslovi laki, ili u velikoj napetosti, ili kao sredstvo za razbibrigu. Pouzdan svjedok je Ciceron, kad kaže (*De Oratore*, 2): „Ljudi koji su navikli na naporan svakodnevni rad, ako zbog vremenskih prilika ne mogu raditi, neka se upute igrati loptom, ili talusima ili kockama, a mogu i za svoj odmor smisliti neku novu igru".". [3, 15].

U djelu *Liber de Ludo Aleae* nalaze se brojni rezultati koji su međusobno kontradiktorni i sama struktura djela nije najbolje organizirana, ali analize i stavovi koje Cardano iznosi pružaju nam znanje o različitim aspektima igara na sreću. Na početku daje primjere koji navode čitatelje na pitanje pravde u kockanju, a kasnije se vraća antičkim tekstovima koje koristi u primjerima kako bi pokazao da je čovječanstvo oduvijek tražilo pravdu u igrama na sreću. Također, u početku pretpostavlja jednake uloge i jednake šanse da bi pravda bila zadovoljena, a kasnije generalizira probleme kockanja izvan jednakih uloga koristeći se Aristotelovim konceptom pravde. Veći dio djela filozofskog je tipa, a matematički sadržaji su sadržani u samo nekim poglavljima, ono nam daje teorijski koncept poštene kocke. Zanimljivo je spomenuti da je osim Cardana još jedan veliki renesansni znanstvenik, Galileo Galilei (1564.–1642.) bio prvak racionalnog pristupa slučajnosti, analizirajući vjerojatnosti pri bacanju triju kocaka. Ipak, tradicija utemeljenja teorije vjerojatnosti ne pripisuje Cardanu i Galileu (koji jesu vremenski prvi koji su racionalno pristupili toj tematici), nego Fermatu i Pascalu, koji su svojim dopisivanjem 1654. riješili dva konkretna problema, a usput razvili i širu teoriju. Razlog zašto se utemeljenje teorije vjerojatnosti pripisuje Fermatu i Pascalu ipak je prvenstveno u tome što 1654. još niti Cardanovi niti Galileovi tekstovi nisu bili objavljeni te su bili nepoznati [3, 7, 11].

Poglavlje 3

Zaključak

Talijan Girolamo Cardano jedan je od najpoznatijih i najkontroverznijih matematičara renesanse. Iz njegove biografije možemo lako zaključiti da je bio živopisna ličnost. Svojim djelom doprinijeo je razvoju matematike, posebno algebre, otkrivanjem metoda za rješavanje jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja. Iako je u tom pristupu još opterećen tradicijom razlikovanja tipova jednadžbi uslijed zahtjeva da rješenje i koeficijenti budu pozitivni, njegove se metode mogu objediniti u suvremenom pristupu te je Cardano prvi koji je objavio rješenja u radikalima za jednadžbe trećeg i četvrtog stupnja. Pritom se u jednom slučaju kod njega prvi put u povijesti pojavljuju kompleksni brojevi, točnije drugi korijeni negativnih brojeva, koje je kao prvi matematičar prihvatio (doduše, ne kao smislene same za sebe, ali kao međukorak u rješavanju jednadžbe). Nekoliko desetljeća nakon prve uporabe kompleksnih brojeva Rafael Bombelli napisao je djelo naziva *Algebra* u kojem je dao potpun prikaz tada poznate algebre. Tu je među ostalim uključio i prvu detaljnu diskusiju kompleksnih brojeva prihvaćajući ih na taj način kao smislene, a također je opravdao Cardanovo rješenje u kojem su se prvi put pojavili. Dok je Cardano (a i Bombelli) još bio opterećen nedostatkom sustavne matematičke notacije, Cardanovi rezultati počinju se prikazivati na suvremeni način nakon što je u prvoj polovici 17. stoljeća René Descartes uveo modernu algebarsku simboliku. Naravno, da bi se upotpunio uvid o broju i prirodi rješenja algebarskih jednadžbi bio je potreban dokaz osnovnog teorema algebre (Carl Friedrich Gauß i Jean-Robert Argand početkom 19. stoljeća). Također, nakon *Ars Magne*, ostalo je otvoreno pitanje rješivosti jednadžbi viših stupnjeva u radikalima. Dokaz da opća jednadžba stupnja 5 ili većeg nije rješiva u radikalima (Niels Henrik Abel, Évariste Galois, početkom 19. stoljeća) pokrenuo je razvoj apstrakne algebre, točnije teorije grupa.

Osim doprinosa u algebri, Cardano je dao i osnovne ideje kombinatorne vjerojatnosti u svom djelu *Liber de Ludo Aleae* definiranjem vjerojatnosti događaja, baveći se ponavljanjem nezavisnih pokusa i baveći se pravednim ulozima. Zbog nedostatka matematičke notacije i zbog razine obrazovanja stanovništva njegovi su tekstovi bili nerazumljivi većini njegovih suvremenika, no s vremenom je sve više uočavana važnost i veličina njegova doprinosa. Primjerice, tek početkom 18. stoljeća, kada je francuski matematičar Remond de Montmort (1678.–1719.) napisao jedno od prvih djela temeljenih na vjerojatnosti u kojem je u uvodu spomenuo Cardana i njegov *Liber de Ludo Aleae* kao djelo puno znanja i moralnih savjeta. Tijekom 18. stoljeća, Isaac Todhunter i Moritz Cantor pokušali su utvrditi opseg Cardanovih otkrića u polju vjerojatnosti te su došli do zaključka da je Cardano imao veliko znanje, ali da je djelo nerazumljivo kao cjelina zbog nedostatka simbolike, loše koncepcije i nejasnih postupaka. Ipak, utemeljiteljima teorije vjerojatnosti se smatraju Pierre de Fermat i Blaise Pascal jer su se 1654. godine dopisivali vezano uz kockarske probleme koje je postavio pariški kockar Antoine Gombaud, a jedan od njih (problem kocaka) blizak je pitanjima koje je razmatrao Cardano jer se tiče razmatranja vjerojatnosti dobivanja određenog rezultata pri bacanju para kocaka određen broj puta. Njih dvojica su kroz pisma pokušali riješiti dane probleme, a kao posljedica rješenja je otkriće binomne raspodjele. Oni svoju prepisku nisu pretvorili u djelo, pa je zapravo Christiaan Hyugens (1629.–1695.) prvi koji je objavio knjigu o vjerojatnosti pod nazivom *De rationciniis in ludo aleae* (1656.) u kojoj je proširio de Fermatove i Pascalove rezultate te dodao nešto novo – očekivanje.

Nakon njih, svoj doprinos teoriji vjerojatnosti daje i Jacob Bernoulli (1655.–1705.). Njegovo posthumno objavljeno djelo *Ars Conjectandi* (1713.) smatra se prvim bitnim tekstom o vjerojatnosti kojim je teorija vjerojatnosti postala matematička disciplina [7].

Bibliografija

[1] W. S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, Springer Science Buisness Media, 1994.

[2] M. D. ap Gwystl, *Introduction to Period Card Games*, dostupno na `https://www.greydragon.org/library/periodcardgames.html` (lipanj 2022.).

[3] D. Bellhouse, *Decoding Cardano's Liber de Ludo Aleae*, Historia Mathematica 32 (2005.), 180–202.

[4] BRILLIANT, *Cubic Discriminant*, dostupno na `https://brilliant.org/wiki/cubic-discriminant/` (kolovoz 2022.).

[5] F. M. Brückler, *Povijest matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2009.

[6] ______, *Matematički dvoboji*, Školska knjiga, Zagreb, 2011.

[7] ______, *Povijest matematike*, dostupno na `https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/povmat_a` (kolovoz 2022.).

[8] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Dover Publ., New York, 1993.

[9] G. Cardano, *The Rules of Algebra (Ars Magna)*, Dover Publ., New York, 1968.

[10] Enciklopedija, *Renesansa*, dostupno na `https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=52451` (studeni 2021.).

[11] P. Gorroochurn, *Some Laws and Problems of Classical Probability and How Cardano Anticipated Them*, Chance 25.4 (2012.), 13–20.

[12] A. Maggi, *Satan's Rhetoric: a Study of Renaissance demonology*, The University of Chicago, 2001.

[13] J. Muir, *Of Man and Numbers*, Dover Publ., New York, 1996.

[14] The MacTutor History of Mathematics Archive, dostupno na `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/` (srpanj 2021.).

[15] O. Ore, *Cardano - the Gambling Scholar*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1953.

[16] D. J. Struik (ur.), *A Source Book in Mathematics* 1200 – 1800, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1986.

[17] Wikipedia, *Renesansa*, dostupno na `https://hr.wikipedia.org/wiki/Renesansa` (studeni 2021.).

Sažetak

U ovom diplomskom radu opisani su život i djelo talijanskog renesansnog matematičara Girolama Cardana, koji je pridonio razvoju algebre i među prvima se bavio pitanjima vjerojatnosti. U prvom poglavlju opisan je njegov buran život koji je pun raznih kontroverzi. U drugom poglavlju dan je detaljan prikaz dva glavna Cardanova djela: *Ars Magna* o algebri i *Liber de Ludo Aleae* o igrama na sreću i vjerojatnosti. U *Ars Magni* Cardano je opisao rješavanje jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja, a tu se i po prvi put u povijesti pojavljuju kompleksni brojevi. U *Liber de Ludo Aleae* pak nalazimo povijesno prve racionalne ideje o (kombinatornoj) vjerojatnosti.

Summary

This thesis describes the life and works of the Italian Renaissance mathematician Girolamo Cardano, who made important contributions to the development of algebra and was among the first mathematicians to study the topic of probability. The first chapter describes Cardano's controversial and adventurous life. In the second chapter we give a detailed description of his two major works, *Ars Magna* about algebra and *Liber de Ludo Aleae* about games of chance and probability. In *Ars Magna* Cardano provides a full solution of cubic and quartic equations, and in this book complex numbers appear for the first time in history. *Liber de Ludo Aleae* contains the first rational ideas about (combinatorial) probability.

Životopis

Rođena sam 22. studenog 1994. godine u Koprivnici. Svoje osnovnoškolsko obrazovanje stekla sam u Osnovnoj školi „Antun Nemčić Gostovinski", nakon čega sam 2009. godine upisala Srednju školu Koprivnica, smjer: ekonomist. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja prepoznala sam svoje zanimanje za matematiku. Svoje obrazovanje nastavila sam 2013. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, gdje sam upisala preddiplomski studij Matematike, smjer: nastavnički. Po završetku preddiplomskog studija 2018. godine, upisala sam diplomski studij Matematike, smjer: nastavnički na istom fakultetu.