Koncept površine u nastavi matematike

Barnaki, Sanela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Sanela Barnaki

KONCEPT POVRŠINE U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
dr. sc. Renata Vlahović Kruc

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji i prijateljima.

Sadržaj

Uvod

Površina je veličina dijela ravne plohe koju zauzima neki lik. Učenici pojam površine otkrivaju u četvrtom razredu osnovne škole. Tijekom školovanja učenici otkrivaju brojne formule za računanje površine likova u ravnini, od najjednostavnijih poput formule za površinu pravokutnika i kvadrata do formula u kojima se koristi trigonometrija.

Cilj rada je dati vertikalni pregled otkrivanja formula za računanje površine likova u osnovnoj i srednjoj školi te osmisliti aktivnosti pomoću kojih će učenici otkriti navedene formule.

U prvom poglavlju predstavljen je koncept mjerenja u nastavi matematike. U drugom poglavlju nalazi se vertikalni pregled otkrivanja formula za računanje površina likova. Treće poglavlje posvećeno je aktivnostima otkrivanja formula za površinu likova koje se uče tijekom osnovne i srednje škole, a u svima učenici sami otkrivaju formulu uz pomoć nastavnog listića, programa dinamične geometrije ili uputa nastavnika. Nakon aktivnosti otkrivanja, u četvrtom poglavlju navedeni su dokazi tri formule: formule za površinu pravokutnika ($P = ab$), Heronovu formulu te formule za površinu četverokuta ($P = \frac{1}{2}ef \sin\varphi$). U zadnjem poglavlju analizirani su zadaci iz nastavne jedinice *Površina pravokutnika i kvadrata* koji se pojavljuju u udžbenicima odobrenima od strane Ministarstva znanosti i obrazovanja, ali i zadaci koji se pojavljuju na ispitima državne mature iz matematike te na PISA i TIMMS istraživanjima. Na samom kraju uspoređeni su zadaci iz svih navedenih izvora.

Poglavlje 1

Koncept mjerenja u nastavi matematike

Čovjek se u svakodnevnom životu stalno susreće s konceptom mjerenja, od mjerenja količine voća i povrća u trgovini, mjerenja sastojaka za pripremu obroka, mjerenja površine stana do planiranja susreta i računanja koliko ranije treba krenuti da stigne na vrijeme. Odraslom čovjeku to se čini prirodno, ali učenici tijekom školovanja često imaju velikih problema s razumijevanjem tog koncepta. Najveće im probleme stvaraju mjerne jedinice koje si ne mogu predočiti te imaju problema s uspoređivanjem i pretvaranjem istih. Kako bi se to izbjeglo, potrebno je od samih početaka školovanja učenicima pomoći da razviju konceptualno razumijevanje procesa mjerenja.

Prema [19] mjerenje podrazumijeva usporedbu svojstava nekog predmeta (težine, duljine, površine, volumena, ...) s jedinicom za mjeru tog svojstva. Također navode tri koraka pomoću kojih se uvodi koncept mjerenja u nastavu.

1. korak: **Direktna usporedba dvaju predmeta**

   Cilj je da učenici uoče što treba mjeriti. Ako učenici uspoređuju volumen dviju kutija, onda moraju pronaći indirektan način kako bi usporedili volumene. Na primjer, mogu popuniti jednu kutiju zrnima graha i zatim ih presipavati u drugu kutiju te vidjeti jesu li ju popunili do vrha, je li ostalo zrna viška ili je pak kutija ostala dijelom prazna.

2. korak: **Upotreba fizičkog modela mjernih jedinica**

   Cilj je da učenici razumiju kako je pokrivanje ili ispunjavanje objekta nekim mjernim jedinicama zapravo usporedba tog objekta i mjerne jedinice, a rezultira brojem koji se naziva mjera. Kao primjer se može uzeti klupa u razredu i blok samoljepivih papirić. Učenici trebaju usporediti površinu stola s površinom papirića na način da se papirići poslažu jedan do drugog kako bi prekrili cijelu klupu. Prebrojavanjem papirića dovode u vezu površinu klupe i mjernu jedinicu, što je u ovom slučaju samoljepivi papirić, odnosno njegova površina.

3. korak: **Upotreba mjernih instrumenata**

   Krajnji cilj je povezivanje mjerenja pomoću standardnih mjernih instrumenata i mjerenja iz prošlog koraka. Važno je diskutirati koja je sličnost između ta dva načina mjerenja.

Nakon što su savladali pojam mjerenja i mjerili konkretne objekte, učenici otkrivaju mjerne jedinice. Prvo se uvode nestandardne mjerne jedinice kao što su korak, lakat, pedalj i palac, a potom standardne. Prvi korak je provjeriti imaju li učenici razvijen osjećaj za mjeru, na primjer, mogu li otprilike procijeniti litru vode ili jedan metar. Nakon toga učenici trebaju razviti sposobnost odabira prikladne mjerne jedinice i razinu preciznosti koja im je potrebna za neko mjerenje. U školi učenici procjenjuju i mjere duljinu (milimetar, centimetar, decimetar, metar, kilometar), površinu (centimetar kvadratni, decimetar kvadratni, metar kvadratni), volumen (centimetar kubni, decimetar kubni, metar kubni), volumen tekućine (decilitar, litra), kut (kutna sekunda, kutna minuta, kutni stupanj), vrijeme (sekunda, minuta, sat, dan, tjedan, mjesec, godina) i masu tijela (gram, dekagram, kilogram, tona). Učenicima treba vremena i prakse kako bi im to postalo lako i prirodno. Posljednji korak uključuje otkrivanje veze između mjernih jedinica.

Kako bi učenici naučili upješno mjeriti, prije samog mjerenja potrebno je procijeniti mjeru objekta kojeg mjeri. Na taj način, učenici se fokusiraju na sam proces i razmišljaju o onome što mjere, što im olakšava i samu percepciju mjernih jedinica. Autori iz [19] navode kako procjena prije samog mjerenja potiče intrinzičnu motivaciju jer učenike zanima koliko su bili precizni. Također navode i korištenje referentnih vrijednosti koje omogućuju bolju procjenu.

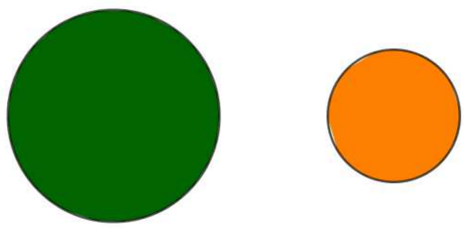
U ovom radu fokusirat ćemo se samo na jednu mjeru, a to je površina. Površina je veličina dijela ravne plohe koju zauzima neki lik. Učenici se s pojmom površine upoznaju u četvrtom razredu osnovne škole kada *uspoređuju površine likova te ih mjere jediničnim kvadratima [21].* Kako bismo im olakšali učenje potrebno je osmisliti aktivnosti pomoću kojih će razviti sposobnost procjene rezultata te usporedbe površina likova. U nastavku je primjer aktivnosti koja se može provesti na satu u četvrtom razredu osnovne škole.

Aktivnost 1: Imaju li likovi jednaku površinu?

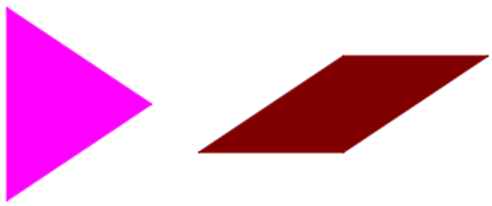
Cilj: Procijeniti imaju li likovi jednake površine te preoblikovati jedan od likova tako da se poklopi s drugim likom.

Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad, grupni rad), frontalna nastava
Nastavne metode: metoda dijaloga
Potrebni materijal: nastavni listić, set likova u boji koji se nalaze i na nastavnom listiću, ravnalo, škare, ljepilo, olovka
Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobiva nastavni listić na kojem se nalazi tablica 1.1. Učenik treba popuniti drugi stupac tablice tako da procijeni imaju li likovi jednake površine (ako imaju onda obrazložiti zašto to misle, a ako nemaju onda napisati koji lik ima veću površinu). Nakon što su svi učenici popunili tablicu, formiramo grupe po četvero učenika te im dajemo izrezane likove jednake veličine kao i na listiću (svaki učenik dobiva sve likove). Zajedno komentiraju svoje procjene te za likove za koje tvrde da imaju jednake površine pokušavaju jedan lik izrezati tako da oblikom i veličinom bude jednak drugome. Ako su dobili drugi lik, onda u treći stupac lijepe lik u obliku drugog lika kao dokaz svoje tvrdnje. Ako svi u grupi smatraju da likovi nemaju jednake površine, onda u treći stupac upišu svoj zaključak. Kada sve grupe završe s ispunjavanjem tablice, nastavnik kroz diskusiju s učenicima prezentira rješenje. Grupe koje nisu točno riješile zadatak, režu likove i lijepe ih u svoju tablicu. Ukoliko je potrebno, nastavnik pokaže dodatno na koji način je potrebno izrezati određeni lik.

Tablica 1.1: Nastavni listić

Likovi	Moja procjena: Imaju li likovi jednake površine?	Točan odgovor: Imaju li likovi jednake površine?
		

Likovi	Moja procjena: Imaju li likovi jednake površine?	Točan odgovor: Imaju li likovi jednake površine?
		
		
		
		
		

Likovi	Moja procjena: Imaju li likovi jednake površine?	Točan odgovor: Imaju li likovi jednake površine?
		

Primjer rješenja za jedan par likova: Za svaki par likova koji imaju jednake površine postoje dva moguća rješenja. Slika 1.1 pokazuje oba rješenja za peti par likova iz tablice 1.1.

Slika 1.1: Dvije verzije rješenja

Ovom aktivnošću nastavnik dobiva uvid u mogućnosti procijene i uspoređivanja površinu dvaju likova kod učenika, dok se grupnim radom učenike potiče na razmjenu ideja, argumentiranje i donošenje zaključaka.

Poglavlje 2

Kurikulum za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj

Školski kurikulum je moguće definirati kao plan za akciju ili pisani dokument koji uključuje strategije za postizanje željenih, unaprijed formuliranih ciljeva [2, str. 51]. U kurikulumu je naglasak na ishodima učenja, planiranje je usmjereno na učenika, a vrednuje se i proces, ne samo produkt učenja. *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj [21]* na snagu je stupila 22. siječnja 2019. godine. Prema navedenom dokumentu planira se učenje i poučavanje matematike u svim osnovnim školama i gimnazijama Republike Hrvatske.

Kurikulum je strukturiran tako da se kombiniranjem matematičkih procesa ostvaruju planirani ciljevi po domenama, koje povezuju srodne koncepte. Matematički procesi su prema [21] podijeljeni u pet skupina, a to su:

- *prikazivanje i komunikacija,*
- *povezivanje,*
- *logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje,*
- *rješavanje problema i matematičko modeliranje,*
- *primjena tehnologije.*

Domene kurikuluma [21] su:

A *brojevi,*

B *algebra i funkcije,*

C *oblik i prostor,*

D *mjerenje,*

E *podaci, statistika i vjerojatnost.*

Zastupljenost pojedinih domena u svakom razredu ovisi o razvojnim mogućnostima učenika. Koncept površine koji obrađujemo u ovom radu pripada domeni D, odnosno mjerenju.

2.1 Vertikalni pregled otkrivanja formula za računanje površina likova

U tablici 2.1 nalazi se vertikalni pregled otkrivanja formula za računanje površina, ispisani su svi odgojno-obrazovni ishodi iz [21] u kojima se spominje površina likova, te njihova razrada. Razrada ishoda za prvi i drugi razred srednje škole primjerena je gimnazijama sa 105 sati nastave matematike godišnje, dok se integrali rade samo u četvrtim razredima gimnazije sa 192 i 224 sata matematike godišnje. Svaki odgojno-obrazovni ishod ima svoju oznaku, npr. *MAT OŠ D.4.2.*. Oznaka OŠ označava da se ishod ostvaruje u osnovnoj školi, dok SŠ označava da se ishod ostvaruje u srednjoj školi. Nadalje, slovo označava kojoj domeni ishod pripada, prvi broj označava razred, dok drugi broj označava koji je to ishod po redu u navedenoj domeni i razredu.

Tablica 2.1: Odgojno-obrazovni ishodi

Razred	Odgojno-obrazovni ishod	Razrada ishoda
4. razred osnovne škole	*MAT OŠ D.4.2.* *Uspoređuje površine likova te ih mjeri jediničnim kvadratima*	*U ravnini uspoređuje likove različitih površina prema veličini dijela ravnine koju zauzimaju te tako upoznaje pojam površine.* *Mjeri površinu likova ucrtanih u kvadratnoj mreži prebrojavanjem kvadrata.* *Ucrtava u kvadratnu mrežu likove zadane površine.*

Razred	Odgojno-obrazovni ishod	Razrada ishoda
		Mjeri površine pravokutnih likova prekrivanjem površine jediničnim kvadratom. *Poznaje standardne mjere za površinu (centimetar kvadratni, decimetar kvadratni, metar kvadratni).* *Mjeri pravokutne površine u neposrednoj okolini.* *Prošireni sadržaji:* *Preračunava mjerne jedinice.* *Korelacija s Hrvatskim jezikom.*
5. razred osnovne škole	*MAT OŠ D.5.4.* *Računa i primjenjuje opseg i površinu geometrijskih likova.*	*Opisuje i računa opseg geometrijskoga lika ili geometrijskih oblika sastavljenih od osnovnih geometrijskih likova (kvadrata, pravokutnika, trokuta).* *Opisuje i računa površinu kvadrata i pravokutnika.* *Otkriva i obrazlaže formule za opseg i površinu.* *Povezuje umnožak dvaju jednakih brojeva s pojmom kvadrata broja i mjernom jedinicom za površinu.* *Poznaje mjerne jedinice za površinu (kilometar kvadratni, metar kvadratni, decimetar kvadratni, centimetar kvadratni, milimetar kvadratni).*
6. razred osnovne škole	*MAT OŠ D.6.2.* *Računa i primjenjuje opseg i površinu trokuta i četverokuta te mjeru kuta.*	*Opisuje i računa opseg i površinu geometrijskoga lika ili geometrijskih oblika sastavljenih od osnovnih geometrijskih likova (trokuta i paralelograma).* *Istražuje i primjenjuje zbroj mjera kutova u trokutu i četverokutu.*

Razred	Odgojno-obrazovni ishod	Razrada ishoda
7. razred osnovne škole	*MAT OŠ D.7.3.* *Odabire strategije za računanje opsega i površine mnogokuta.*	*Opisuje i računa opseg i površinu nepravilnih i pravilnih mnogokuta.* *Otkriva, obrazlaže i primjenjuje formulu za površinu pravilnoga mnogokuta koristeći se površinom karakterističnoga trokuta.* *Argumentira odabir strategije za računanje opsega i površine mnogokuta u problemskoj situaciji.* *Korelacija s Fizikom i Kemijom.*
7. razred osnovne škole	*MAT OŠ D.7.4.* *Računa i primjenjuje opseg i površinu kruga i njegovih dijelova.*	*Istražuje i računa opseg i površinu kruga i njegovih dijelova.* *Objašnjava ulogu i svojstva broja* π. *Modelira površinama i opsezima geometrijskih oblika (krug i dijelovi, kružnica i dijelovi, kružni vijenac, mnogokuti) rješavanje problemske situacije.* *Korelacija s Geografijom, Fizikom, Kemijom i Biologijom.*
1. razred srednje škole	*MAT SŠ C.1.1.* *Konstruira i analizira položaj karakterističnih točaka trokuta.*	*Definira i konstruira simetralu dužine, simetralu kuta, visinu i težišnicu te karakteristične točke trokuta. Uočava da težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1.* *Analizira položaj karakterističnih točaka ovisno o vrsti trokuta.* *Prošireni sadržaj:* *Otkriva formule za površinu trokuta s polumjerom upisane i opisane kružnice.*
1. razred srednje škole	*MAT SŠ C.1.2.* *MAT SŠ D.1.2.* *Primjenjuje Talesov poučak o proporcional-*	*Izriče i ilustrira poučke o sukladnosti i sličnosti trokuta te Talesov poučak o proporcionalnosti dužina, primjenjuje ih u modeliranju problema.*

Razred	Odgojno-obrazovni ishod	Razrada ishoda
	nosti dužina i sličnost trokuta.	*Određuje, obrazlaže i primjenjuje odnose površina, opsega i drugih veličina u sličnim trokutima.* *Primjenjuje Heronovu formulu pri računanju površine trokuta.* *Rješavajući primjere zadataka upoznaje povijest matematike.* *Prošireni sadržaj:* *Rješava probleme rabeći Euklidov poučak o pravokutnome trokutu.* *Crtice iz povijesti – Tales, Euler, Heron, Pitagora.*
2. razred srednje škole	*MAT SŠ C.2.3.* *MAT SŠ D.2.1.* *Primjenjuje znanja o kružnici i krugu.*	*Primjenjuje poučak o obodnome i središnjemu središnjem kutu pri dokazu Talesova poučka.* *Konstruira tangentu na kružnicu.* *S pomoću proporcionalnosti izvodi formule za duljinu kružnoga luka i površinu kružnoga isječka.* *Povezuje duljinu kružnoga luka s radijanskom mjerom kuta.* *Prošireni sadržaj:* *Računa površinu kružnoga odsječka.*
2. razred srednje škole	*MAT SŠ C.2.4.* *MAT SŠ D.2.2.* *Primjenjuje poučak o sinusima i poučak o kosinusu.*	*Povezuje trigonometrijske omjere u pravokutnome trokutu s koordinatama točke na kružnici.* *Računa površinu trokuta.* *Primjenjuje poučke u problemskim zadatcima.* *Prošireni sadržaj:* *Primjenjuje poučke u stereometriji.*

Razred	Odgojno-obrazovni ishod	Razrada ishoda
4. razred srednje škole	*MAT SŠ B.4.11.* *Primjenjuje integral u problemskim zadatcima.*	*Računa određeni integral rabeći Newton-Leibnizovu formulu.* *Određuje površinu ispod grafa funkcije i obujam rotacijskoga tijela s pomoću integrala.* *Primjenjuje integrale u rješavanju problema iz matematike i fizike.*

Poglavlje 3

Aktivnosti otkrivanja formula za površinu

3.1 Pravokutnik

Formulu za površinu pravokutnika učenici otkrivaju u petom razredu osnovne škole. To je prva formula za površinu lika koju učenici otkrivaju i koriste.

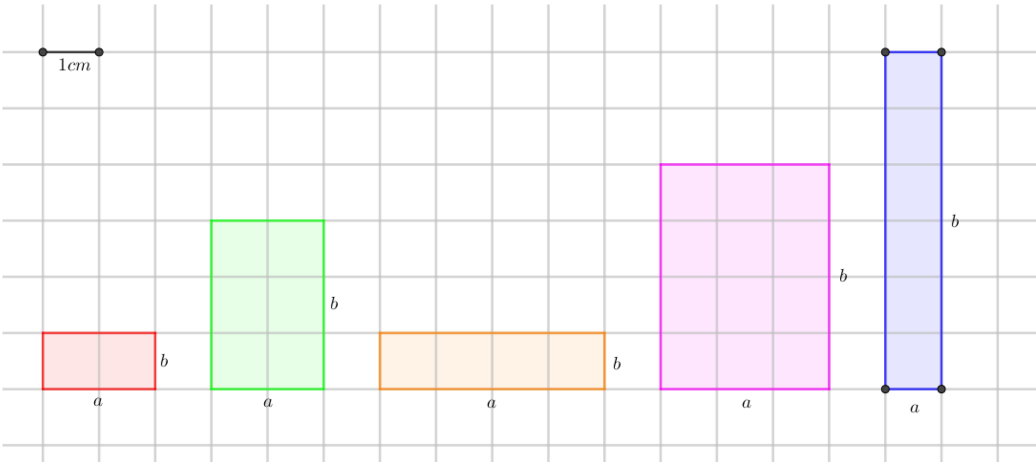
Aktivnost 2: Površina pravokutnika

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu pravokutnika
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad), frontalna nastava
Nastavne metode: metoda dijaloga, metoda induktivnog zaključivanja, heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, olovka
Tijek aktivnosti: Učenici će dobiti nastavni listić kojeg trebaju samostalno popuniti. Sve upute nalaze se na samom nastavnom listiću. Nakon što svi riješe sve zadatke, nastavnik usmeno provjeri jesu li svi učenici došli do točne formule te prokomentira mjerne jedinice koje se koriste za površinu.

Nastavni listić:

1. Popuni tablicu promatrajući pravokutnike sa slike.

Pravokutnik	Površina pravokutnika (broj jediničnih kvadratića) u cm^2	Duljina stranice a u cm	Duljina stranice b u cm
crveni			
zeleni			
narančasti			
rozi			
plavi			



2. Možemo li površinu pravokutnika izračunati pomoću duljina stranica pravokutnika? Ako da, kako?

3. Napiši formulu za površinu pravokutnika sa slike.

4. Izračunaj površinu pravokutnika kojemu su duljine stranica 13 dm i 41 dm. Koju mjernu jedinicu koristimo za površinu zadanog pravokutnika?

Rješenje nastavnog listića:

1. Popunjena tablica:

Pravokutnik	Površina pravokutnika (broj jediničnih kvadratića) u cm^2	Duljina stranice a u cm	Duljina stranice b u cm
crveni	2	2	1
zeleni	6	2	3
narančasti	4	4	1
rozi	12	3	4
plavi	6	1	6

2. Možemo, tako da pomnožimo duljine stranica a i b.

3. $P = a \cdot b$

4. $P = 13 \text{ dm} \cdot 41 \text{ dm} = 533 \text{ dm}^2$

   Mjerna jedinica je decimetar kvadratni (dm^2).

Zaključak: Površinu pravokutnika računamo kao umnožak duljina njegovih susjednih stranica. Ako su duljine stranica pravokutnika jednake a i b, onda je formula za površinu pravokutnika jednaka

$$P = a \cdot b. \tag{3.1}$$

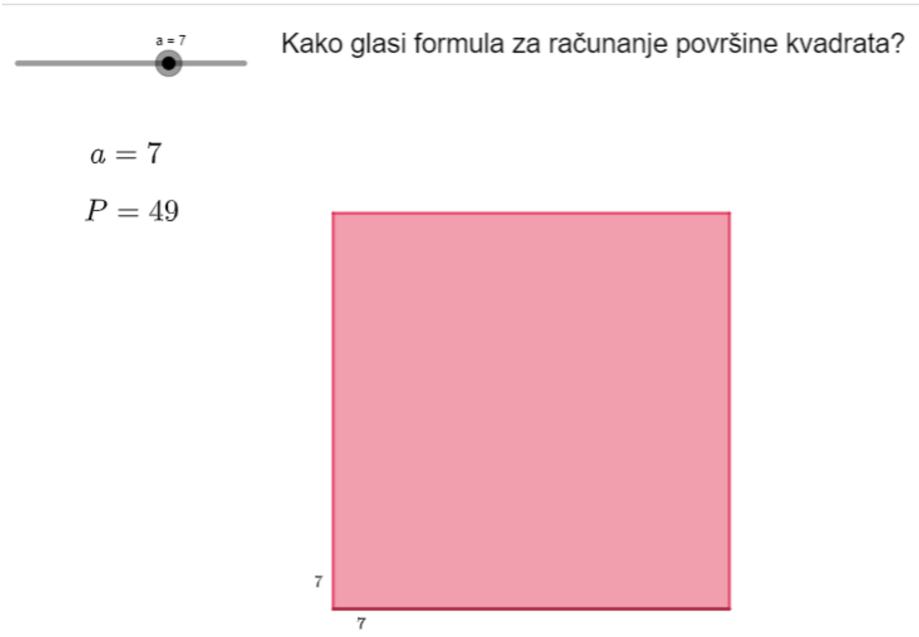
Dokaz formule (3.1) nalazi se na stranici 52.

3.2 Kvadrat

Sljedeća aktivnost temelji se na induktivnom zaključivanju kao i prethodna aktivnost za površinu pravokutnika. Međutim to možemo izbjeći tako da iskoristimo iskoristimo činjenicu da je kvadrat ustvari pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednake duljine, što ćemo pokazati u Aktivnosti 4. O tome koja aktivnost je pogodnija za učenike odlučuje nastavnik, ovisno o tome koji način je prilagođeniji učenicima u razredu.

Aktivnost 3: Površina kvadrata

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu kvadrata
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, metoda induktivnog zaključivanja, heuristička metoda
Potrebni materijal: tablet, GeoGebra applet, bilježnica, olovka
Tijek aktivnosti: Učenici dobivaju link na applet te pomoću njega otkrivaju formulu za površinu kvadrata. Nakon što učenici zapišu formulu, zajedno s nastavnikom komentiraju zaključak do kojeg su došli.



Slika 3.1: GeoGebra applet za kvadrat

Zaključak: Površina kvadrata jednaka je kvadratu duljine njegove stranice. Ako je duljina stranice kvadrata jednaka a, onda formula glasi:

$$P = a^2. \tag{3.2}$$

Aktivnost 4: I kvadrat je pravokutnik!

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu kvadrata
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)

Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: bilježnica, olovka
Tijek aktivnosti: Učenici će odgovarajući na pitanja nastavnika doći do formule za površinu kvadrata.
Pitanja nastavnika:

1. Koja je definicija pravokutnika? Koja definicija kvadrata?
2. Poznavajući formulu za površinu pravokutnika, kako glasi formula za površinu kvadrata stranice duljine a.

Odgovori na pitanja nastavnika:

1. Pravokutnik je četverokut koji ima četiri prava kuta.

   Kvadrat je pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednake duljine.
2. Površina kvadrata jednaka je $P = a \cdot a$, odnosno $P = a^2$.

Zaključak: Površina kvadrata jednaka je kvadratu duljine njegove stranice. Ako je duljina stranice kvadrata jednaka a, onda formula glasi:

$$P = a^2. \tag{3.3}$$

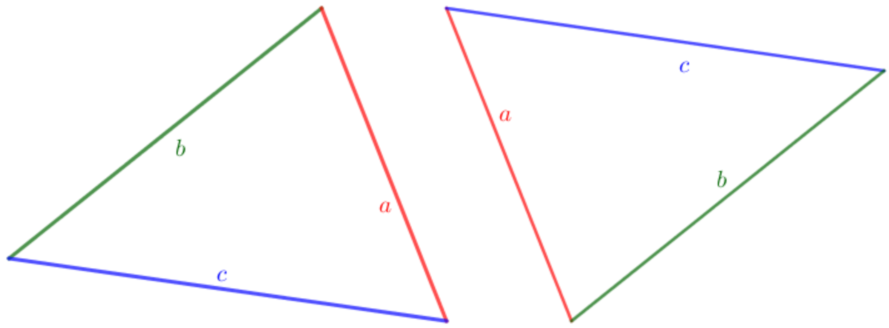
3.3 Trokut

Tijekom školovanja učenici otkrivaju razne formule za računanje površine trokuta, od onih elementarnih preko visine trokute, do onih u kojima se primjenjuje i trigonometrija trokuta. Sada ćemo navesti aktivnosti za otkrivanje nekoliko formula za računanje površine trokuta.

Aktivnost 5: Presloži u pravokutnik!

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu trokuta kojem su zadane duljina stranice i duljina pripadajuće visine
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad), frontalna nastava
Nastavne metode: metoda dijaloga, metoda generalizacije, heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, ravnalo, olovka, škare
Tijek aktivnosti: Učenici će dobiti nastavni listić s dva sukladna trokuta te rade prema uputama nastavnika.

Nastavni listić:



Upute nastavnika:

1. Izrežite oba trokuta. Jesu li oni sukladni? Uvjerite se u to tako da ih preklopite.

2. Jednom trokutu nacrtajte visinu na jednu stranicu (na primjer, jedan red na stranicu a, drugi red na stranicu b, a treći red na stranicu c). Označite nacrtanu visinu tako da njenu oznaku napišete s obje strane dužine.

3. Trokut kojem ste nacrtali visinu, prerežite duž visine.

4. Od dobivenih dijelova složite pravokutnik.

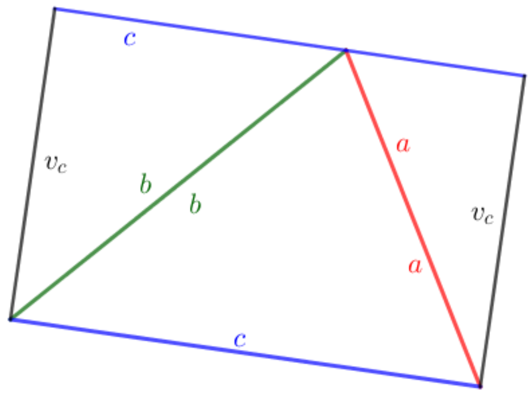
5. Koje su dužine stranice pravokutnika? Kako bi glasila formula za površinu dobivenog pravokutnika?

6. Svaki red ima drukčiju formulu, no zasad ćemo to ostaviti po strani. Od koliko početnih trokuta ste složili pravokutnik? Jesu li svi imali jednake trokute? Je li onda površina pravokutnika jednaka u svim grupama, iako su duljine stranica različite? Koliko puta je površina trokuta manja od površine pravokutnika? Uzimajući to u obzir, kako onda glasi formula za površinu trokuta? Sve tri formule su ispravne i daju nam jednaku površinu trokuta.

7. Vrijedi li formula za bilo koji trokut? Kako biste nekoga uvjerili u to?

Odgovori na pitanja iz uputa nastavnika:

4. Primjer pravokutnika:



5. Stranice pravokutnika su a i v_a (ili b i v_b ili c i v_c), ovisno o tome na koju stranicu su učenici crtali visinu. Površina pravokutnika bi tada bila jednaka $P = a \cdot v_a$ (ili $P = b \cdot v_b$ ili $P = c \cdot v_c$.

6. Pravokutnik se sastoji od dva početna trokuta. Svi su imali sukladne trokute i površine svih pravokutnika su jednake. Površina trokuta je dva puta manja od površine pravokutnika. Površina trokuta je jednaka $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$ (ili $P = \frac{b \cdot v_b}{2}$ ili $P = \frac{c \cdot v_c}{2}$).

7. Formula vrijedi za bilo koji trokut. Kako bismo to pokazali dovoljno je nacrtati proizvoljni trokut te ponoviti isti postupak ili izračunati površinu trokuta pomoću sve tri formule (tada je potrebno znati duljine stranica i visina na pripadajuće stranice).

Zaključak: Površina trokuta jednaka je polovici umnoška duljine stranice i duljine visine na tu stranicu. Ako su duljine stranica trokuta a, b, c, a duljine pripadajućih visina v_a, v_b, v_c onda vrijedi:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}, \tag{3.4}$$

$$P = \frac{b \cdot v_b}{2}, \tag{3.5}$$

$$P = \frac{c \cdot v_c}{2}. \tag{3.6}$$

Aktivnost 6: Površina jednakostraničnog trokuta

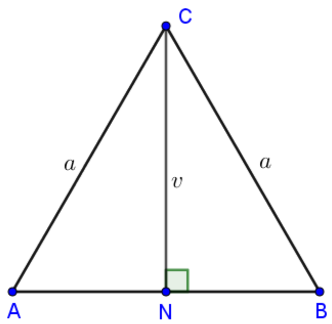
Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu jednakostraničnog trokuta
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda

Potrebni materijal: nastavni listić, olovka
Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobiva nastavni listić kojeg samostalno ispunjava. Nakon što svi ispune nastavni listić, nastavnik kroz diskusiju provjerava zaključke do kojih su učenici došli.

Formula za računanje površine jednakostraničnog trokuta izvodi se nakon što su učenici naučili Pitagorin poučak, u nastavnoj jedinici *Primjena Pitagorinog poučka na jednakostranični trokut.*

Nastavni listić:

Na slici je prikazan jednakostranični trokut $\triangle ABC$ duljine stranice a. Točka N je nožište visine na stranicu $\overline{AB}$.



1. Kako glasi formula za računanje površine trokuta $\triangle ABC$?
2. U kojem omjeru točka N dijeli stranicu $\overline{AB}$? Izrazi duljinu $\overline{AN}$ preko duljine stranice a.
3. Iskoristi Pitagorin poučak na trokut $\triangle ANC$ kako bi duljinu visine v izrazio/la preko duljine stranice trokuta a.
4. Uvrsti dobiveni izraz za v u formulu za računanje površine trokuta iz zadatka 1. To je formula za računanje površine jednakostraničnog trokuta.

Rješenje nastavnog listića:

1. $P = \frac{a \cdot v}{2}$.
2. Omjer: $\overline{AN} : \overline{NB} = 1 : 1$.
   $\overline{AN} = \frac{a}{2}$.
3. Pitagorin poučak na trokut $\triangle ANC$: $\frac{a}{2}^2 + v^2 = a^2$. Sređivanjem jednakosti dobivamo $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

4. $P = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

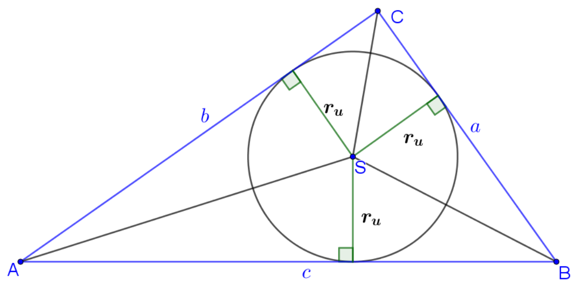
Zaključak: Površina jednakostraničnog trokuta duljine stranice a računa se po formuli:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \tag{3.7}$$

Aktivnost 7: Zadan polumjer trokutu upisane kružnice

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu trokuta kojem su zadane duljine stranica i polumjer trokutu upisane kružnice
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, olovka
Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobiva nastavni listić koji samostalno ispunjava. Do formule za površinu trokuta će doći odgovarajući na pitanja postavljena na listiću. Nakon što svi učenice riješe listić, zajedno s nastavnikom provjeravaju jesu li došli do istog zaključka.
Nastavni listić:

Promotri sliku i odgovori na pitanja.



1. Od kojih trokuta se sastoji trokut $\triangle ABC$? Koristi samo označene točke kao vrhove trokuta.

2. Kako glasi formula za površinu trokuta $\triangle ABC$?

3. Zapiši formule za računanje površina trokuta iz zadatka 1. Koristi oznake sa slike.

4. Površina trokuta $\triangle ABC$ jednaka je zbroju površina trokuta iz zadatka 1. Dakle, $P_{\triangle ABC} =$

5. Sredi dobivenu formulu tako da iskoristiš poluopseg trokuta s čija formula glasi: $s = \frac{a+b+c}{2}$, gdje su a, b i c duljine stranica trokuta.

Rješenje nastavnog listića:

1. Trokut $\triangle ABC$ sastoji se od trokuta $\triangle ABS$, $\triangle BCS$ i $\triangle CAS$.
2. Površina trokuta $\triangle ABC$ jednaka je $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$.
3. Površine trokuta: $P_{\triangle ABS} = \frac{c \cdot r_u}{2}$, $P_{\triangle BCS} = \frac{a \cdot r_u}{2}$ i $P_{\triangle CAS} = \frac{b \cdot r_u}{2}$.
4. $P_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot r_u}{2} + \frac{a \cdot r_u}{2} + \frac{b \cdot r_u}{2} = \frac{c \cdot r_u + a \cdot r_u + b \cdot r_u}{2}$
5. $P_{\triangle ABC} = \frac{r_u(a+b+c)}{2} = r_u \cdot \frac{a+b+c}{2} = r_u \cdot s$

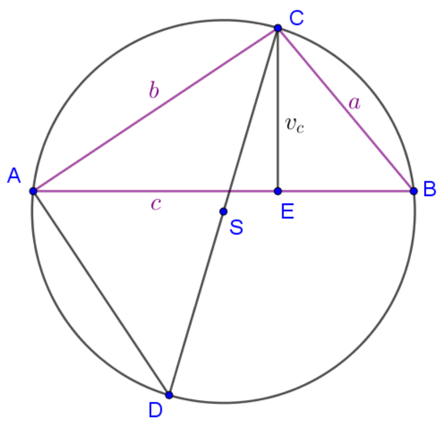
Zaključak: Površina trokuta kojemu je zadan polumjer trokutu upisane kružnice r i poluopseg s jednaka je:

$$P = r \cdot s. \tag{3.8}$$

Aktivnost 8: Zadan polumjer trokutu opisane kružnice

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu trokuta kojem su zadane duljine stranica i polumjer trokutu opisane kružnice
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, olovka
Tijek aktivnosti: Učenici će rješavajući nastavni listić sami izvesti formulu za računanje površine trokuta kojemu je zadan polumjer opisane kružnice. Nastavni listić je sastavljen pomoću objašnjenja iz [18, str. 98]. Na kraju će nastavnik kroz razgovor provjeriti jesu li svi došli do ispravne formule.
Nastavni listić:

Prouči sliku i prati navedene korake kako bi otkrio još jednu formulu za računanje površine trokuta.



Na slici je prikazan trokut $\triangle ABC$ i njemu opisana kružnica polumjera R. Točka D je odabrana tako da je $\overline{CD}$ promjer kružnice.

1. Kolika je duljina dužine $\overline{CD}$?
2. Napiši formulu za površinu trokuta $\triangle ABC$ koristeći v_c.
3. Kolika je mjera kuta $\angle DAC$ i zašto?
4. Kutovi $\angle CDA$ i $\angle CBA$ imaju istu mjeru. Kako to znamo?
5. Sve ovo nam je bilo potrebno kako bismo pokazali da na slici imamo dva slična trokuta. Koja su to dva trokuta?
6. Koristeći sličnost, zapiši omjer poznatih stranica.
7. Iz omjera izrazi v_c.
8. Dobiveni izraz za v_c uvrsti u formulu iz zadatka 2. Formula za površinu trokuta tada glasi: $P_{\triangle ABC} =$

Rješenje nastavnog listića:

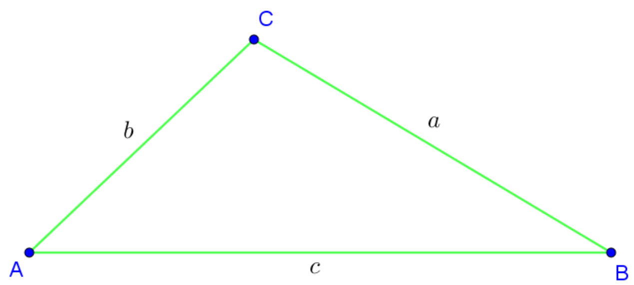
1. $|CD| = 2R$
2. $P_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot v_c}{2}$
3. Kut $\angle DAC$ je pravi jer se nalazi nad promjerom kružnice.
4. Kutovi $\angle CDA$ i $\angle CBA$ imaju istu mjeru jer su oba obodni kutovi nad tetivom $\overline{CA}$.
5. Trokut $\triangle BEC$ sličan je trokutu $\triangle DAC$.
6. Iz sličnosti trokuta slijedi omjer pozntih stranica: $\frac{a}{v_c} = \frac{2R}{b}$.
7. $v_c = \frac{ab}{2R}$
8. $P_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$

Zaključak: Površinu trokuta kojemu su zadane duljine stranica a, b i c i polumjer opisane kružnice R računamo po formuli:

$$P = \frac{abc}{4R}. \tag{3.9}$$

Aktivnost 9: Heronova formula

Cilj: učenici će otkriti Heronovu formulu za površinu trokuta
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, ravnalo, olovka
Tijek aktivnosti: Nastavnik učenicima podijeli nastavne listiće. Učenici prate korake koji su napisani na listiću kako bi došli do Heronove formule.
Nastavni listić:



1. Nacrtaj visinu iz vrha C te nožište visine označi s N. Duljinu dužine $\overline{AN}$ označi s x. Kolika je duljina dužine $\overline{NB}$? Duljinu dužine $\overline{CN}$ označi s v_c.

2. Izrazi v_c na dva načina koristeći Pitagorin poučak (u trokutima $\triangle ANC$ i $\triangle NBC$) te oznake koje si zapisao/la u prethodnom zadatku.

3. Izjednači oba izraza za ${v_c}^2$ te izrazi x pomoću a, b i c.

4. Uvrsti dobiveni izraz za x u jednakost koju si dobio/la iz trokuta $\triangle NBC$ u zadatku 2.

5. Provedi sve operacije koje su potrebne kako bi na desnoj strani jednakosti imao/la jedan razlomak, dok je na lijevoj strani jednakosti ${v_c}^2$ Uputa: Koristi razliku kvadrata gdje god je to moguće!

6. Sredi razlomak tako da koristiš poluposeg s za koji vrijedi $2s = a + b + c$. Na kraju u brojniku razlomka trebaš imati četiri faktora od kojih je jedan s, dok ostala tri moraju sadržavati $2s$.

7. Korjenuj jednakost.

8. Dobivenu duljinu v_c uvrsti u formulu za površinu trokuta u kojoj se koriste duljine c i v_c te pokrati sve što se može pokratiti.

9. Kako glasi Heronova formula za površinu trokuta?

Rješenje nastavnog listića: Zadaci u nastavnom listiću su koraci u dokaza Heronove formule. Dokaz Heronove formule, a samim time i rješenja zadataka nalaze se na stranici 56.
Zaključak: Heronova formula za površinu trokuta kojemu su zadane duljine stranica a, b i c glasi:

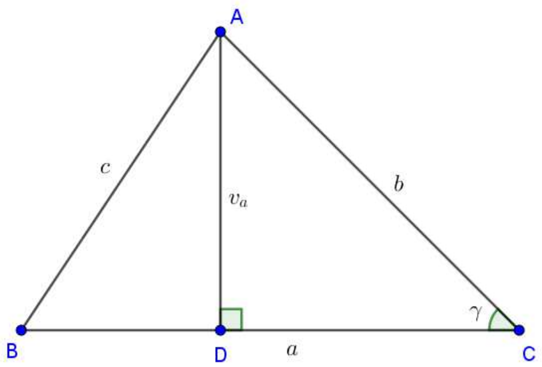
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{3.10}$$

pri čemu je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg.

Aktivnost 10: Zadane duljine dviju stranica te mjera kuta između njih

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu trokuta kojem su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, bilježnica, ljepilo, ravnalo, olovka
Tijek aktivnosti: Učenici dobiju nastavni listić u obliku sličice trokuta koju trebaju zalijepiti u bilježnicu. Nakon toga prate upute nastavnika te zapisuju postupak odnosno formule koje primjenjuju pri otkrivanju formule za površinu trokuta.

Da bi učenici otkrili ovu formulu, potrebno je poznavati trigonometriju pravokutnog trokuta.
Nastavni listić:



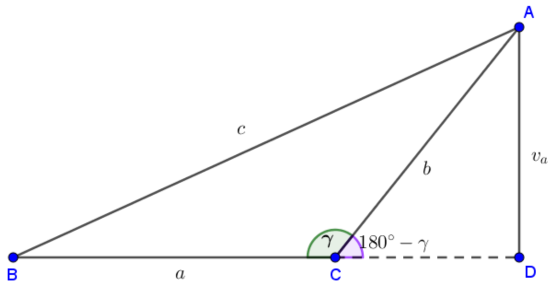
Upute nastavnika:

1. Na nastavnom listiću prikazan je trokut $\triangle ABC$ kojemu su zadane duljine stranica b i c te mjera kuta γ. Zapiši formulu za površinu trokuta $\triangle ABC$ u kojoj se koristi duljina stranice a te duljina visine na tu stranicu v_a.

2. Iz pravokutnog trokuta $\triangle ADC$ izrazi v_a koristeći poznate veličine.
3. Uvrsti dobiveni izraz za v_a u formulu za površinu trokuta koju si napisao/la ranije.
4. Kako glasi formula za površinu trokuta ako su mu zadane duljine dviju stranica te mjera kuta između njih?
5. Zapiši još dvije analogne formule za ovaj trokut ako je poznata veličina nekog drugog kuta te duljine priležećih stranica.
6. Vrijedi li formula i kada je kut γ tupi? Dokaži da si u pravu.

Odgovori na pitanja iz uputa nastavnika:

1. $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$
2. $v_a = b \cdot \sin\gamma$
3. $P = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$
4. $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$
5. $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$
   $P = \frac{1}{2}ac\sin\beta$
6. Vrijedi.



Visinu v_a preko poznatih veličina u ovom slučaju možemo izraziti koristeći trokut $\triangle BDC$. Tada vrijedi $v_a = b\sin 180° - \gamma$. Kako znamo da je $\sin 180° - \gamma = \sin\gamma$ možemo zaključiti da i u ovom slučaju vrijedi formula $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Zaključak: Površina trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica te mjera kuta između njih jednaka je:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta. \tag{3.11}$$

Aktivnost 11: Zadane mjere kutova i duljina jedne stranice

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu trokuta kojem su zadane mjere kutova i duljina jedne stranice
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: bilježnica, olovka
Tijek aktivnosti: Nastavnik kroz razgovor navodi učenike da otkriju formulu za površinu trokuta kojemu su poznate mjere kutova te duljina jedne stranice. Učenici zapisuju odgovore na pitanja nastavnika.
Pitanja nastavnika:

1. Kako glasi formula za površinu trokuta kojemu su zadane duljine stranica a i b te mjera kuta γ između njih?

2. Kako glasi poučak o sinusima?

3. Ako su nam u trokutu poznate mjere svih kutova te duljina stranice a, kako možemo izraziti duljinu stranice b koristeći poučak o sinusima?

4. Uvrstite izraz za b u formulu s početka razgovora te zapišite dobivenu formulu.

5. Kako glasi formula za površinu trokuta kojemu su poznate mjere kutova te duljina jedne stranice?

6. Koje dvije analogne formule možemo dobiti iz te formule?

Odgovori na pitanja nastavnika:

1. $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

2. Zadan je trokut $\triangle ABC$. Duljine njegovih stranica su jednake a, b i c , a α, β i γ su mjere pripadajućih kutova nasuprot stranica. Tada vrijedi:
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

3. $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$

4. $P = \frac{1}{2}a\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\sin\gamma = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$

5. $P = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$

6. $P = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}$, $P = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$

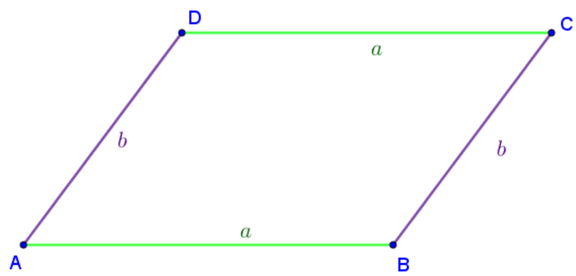
Zaključak: Površina trokuta kojemu su poznate mjere svih kutova te duljina jedne stranice računa se po formuli:

$$P = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}. \tag{3.12}$$

3.4 Paralelogram

Aktivnost 12: Površina paralelograma

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu paralelograma
Nastavni oblik: diferencirana nastava (rad u paru)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: paralelogram od papira, nastavni listić, geometrijski pribor, škare, ljepilo, bilježnica, olovka
Tijek aktivnosti: Učenici će dobiti sliku paralelograma i nastavni listić tako da jedan učenik u paru ima verziju A, a drugi učenik verziju B. Učenici trebaju zalijepiti nastavni listić u bilježnicu te pratiti upute koje pišu na njemu. Važno je prilagoditi sliku paralelograma prilikom printanja kako bi učenicima bilo lakše mjeriti duljine ravnalom (npr. $a = 7$ cm, $b = 5$ cm). Nakon što su učenici završili s diskusijom u paru i došli do zaključka, nastavnik provjerava jesu li svi učenici došli do ispravnog zaključka te zapisuju formulu u bilježnicu.
Paralelogram od papira:



Nastavni listić (verzija A):

1. Nacrtaj visinu iz vrha D na stranicu $\overline{AB}$ te s obje stane visine napiši oznaku v_a.

2. Ravnalom izmjeri duljinu stranice $\overline{AB}$ i nacrtane visine te ih zapiši u bilježnicu.

3. Prereži paralelogram po nacrtanoj visini te složi pravokutnik. Što su stranice dobivenog pravokutnika? Zapiši formulu za površinu pravokutnika.

4. Je li površina dobivenog pravokutnika jednaka površini početnog paralelograma? Zapiši formulu za površinu paralelograma.

5. Izračunaj površinu paralelograma koristeći duljine koje si izmjerio/la na početku te formulu koju si zapisao/la.

6. Objasni učeniku iz klupe što si otkrio/la te koliku si površinu paralelograma dobio/la. Zatim poslušaj što će ti on/ona reći te usporedite dobivene površine. Jesu li one jednake?

7. Zapiši formulu koju je on/ona dobio/la.

8. Zalijepi paralelogram kojeg si prerezao/la u bilježnicu tako da na kraju u bilježnici imaš početni paralelogram.

Nastavni listić (verzija B):

1. Nacrtaj visinu iz vrha D na stranicu $\overline{BC}$ te s obje stane visine napiši oznaku v_b.

2. Ravnalom izmjeri duljinu stranice $\overline{BC}$ i nacrtane visine te ih zapiši u bilježnicu.

3. Prereži paralelogram po nacrtanoj visini te složi pravokutnik. Što su stranice dobivenog pravokutnika? Zapiši formulu za površinu pravokutnika.

4. Je li površina dobivenog pravokutnika jednaka površini početnog paralelograma? Zapiši formulu za površinu paralelograma.

5. Izračunaj površinu paralelograma koristeći duljine koje si izmjerio/la na početku te formulu koju si zapisao/la.

6. Poslušaj što će ti učenik iz klupe reći što je radio/la. Zatim ti objasni što si radio/la te koju si površinu paralelograma dobio/la te ih usporedite. Jesu li one jednake?

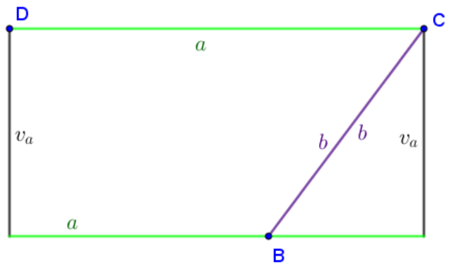
7. Zapiši formulu koju je on/ona dobio/la.

8. Zalijepi paralelogram kojeg si prerezao/la u bilježnicu tako da na kraju u bilježnici imaš početni paralelogram.

Rješenje nastavnog listića (verzije A):

2. $a = 7$ cm, $v_a = 4$ cm

3. Stranice pravokutnika su a i v_a. Površina pravokutnika jednaka je $P = a \cdot v_a$.



4. Površina pravokutnika jednaka je površini paralelograma. Površina paralelograma jednaka je $P = a \cdot v_a$.

5. $P =$ 7cm$\cdot$4 cm= 28 cm^2

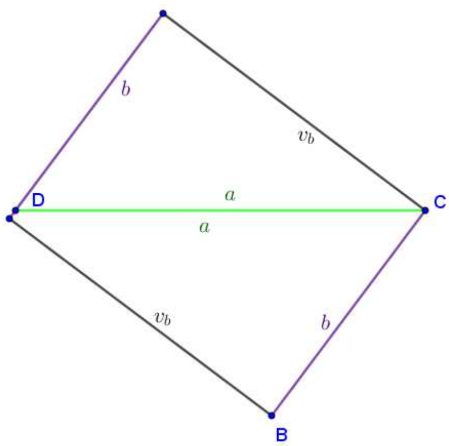
6. Nakon usporedbe mogu zaključiti kako su površine jednake.

7. $P = b \cdot v_b$

Rješenje nastavnog listića (verzije B):

2. $b = 5$ cm, $v_b = 5.6$ cm

3. Stranice pravokutnika su b i v_b. Površina pravokutnika jednaka je $P = b \cdot v_b$.



4. Površina pravokutnika jednaka je površini paralelograma. Površina paralelograma jednaka je $P = b \cdot v_b$.

5. $P =$ 5cm·5.6 cm= 28 cm^2

6. Nakon usporedbe mogu zaključiti kako su površine jednake.

7. $P = a \cdot v_a$

Zaključak: Površina paralelograma kojemu su duljine susjednih stranica a i b te duljine pripadajućih visina v_a i v_b jednaka je:

$$P = a \cdot v_a = b \cdot v_b. \tag{3.13}$$

Aktivnost 13: Zadana mjera kuta između susjednih stranica

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu paralelograma kojem su zadane duljine stranica i mjera kuta između njih
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: geometrijski pribor, olovka, bilježnica
Tijek aktivnosti: Učenici prate upute nastavnika te odgovaraju na postavljena pitanja kako bi otkrili formulu za računanje površine paralelograma.

Za provođenje aktivnosti potrebno je poznavanje trigonometrije pravokutnog trokuta.

Upute nastavnika:

1. U bilježnicu nacrtajte paralelogram $ABCD$ s duljinama susjednih stranica a i b. Kut pri vrhu A neka bude šiljast i označite ga s α. Nacrtajte visinu v_a iz točke D na stranicu $\overline{AB}$ te nožište visine označite s N.

2. Koju formulu za površinu paralelograma znate? Zapišite ju.

3. Može li se visina v_a izraziti pomoću kuta α? Kako?

4. Kada to uvrstite u formulu za površinu paralelograma umjesto v_a koju formulu dobivate? Zapišite ju.

5. Što mora biti zadano u zadatku kako bi se mogla koristiti ova formula?

Odgovori na pitanja iz uputa nastavnika:

2. $P = a \cdot v_a$

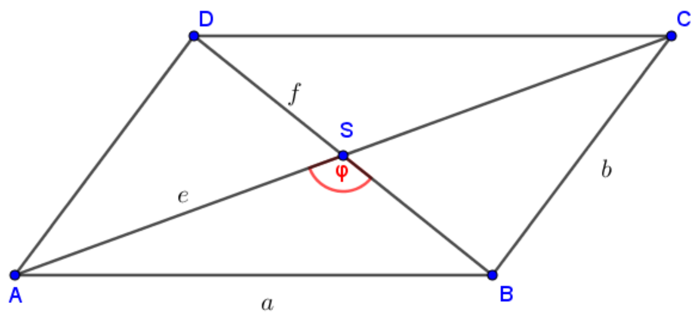
3. Može, primjenom trigonometrije na pravokutni trokut $\triangle AND$. Tada iz $\sin\alpha = \frac{v_a}{b}$ slijedi $v_a = b\sin\alpha$.
4. $P = ab\sin\alpha$
5. Kako bi se koristila formula iz prethodnog zadatka moraju biti zadane duljine susjednih stranica paralelograma te mjera kuta između njih.

Zaključak: Površina paralelograma kojemu su zadane duljine stranica a i b te mjera kuta α između njih jednaka je

$$P = ab\sin\alpha. \tag{3.14}$$

Aktivnost 14: Zadane duljine dijagonala te mjera kuta između njih

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu paralelograma kojem su zadane duljine dijagonala te mjera kuta između njih
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, ravnalo, olovka, bilježnica
Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobiva nastavni listić kojeg treba samostalno popuniti. Nastavnik na kraju aktivnosti provede diskusiju.
Nastavni listić:



1. Paralelogramu su zadane duljine dijagonala e i f te mjera kuta φ između njih. Paralelogram je podijeljen je na četiri trokuta, dva i dva su sukladna. Ispiši sukladne trokute.
2. Zapiši formule za računanje površina tih trokuta uzimajući u obzir podatke koji su zadani (prisjetite se formule za računanje površine trokuta ako su mu zadane duljine dviju stranica te mjera kuta između njih).

3. Površine svih trokuta u zadanom paralelogramu su jednake. Dokaži!
   (Uputa: Čemu je jednako $\sin(180 - \varphi)$?)
4. Uzimajući u obzir da su površine svih trokuta jednake, kako onda glasi formula za računanje površine paralelograma?

Rješenje nastavnog listića:

1. Sukladni trokuti:

$$\triangle ABS \cong \triangle DSC,$$
$$\triangle BSC \cong \triangle DSA.$$

2. $P_{\triangle ABS} = P_{\triangle DSC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \sin\varphi = \frac{ef}{8} \sin\varphi$
   $P_{\triangle BSC} = P_{\triangle DSA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2}(\sin 180^\circ - \varphi) = \frac{ef}{8}(\sin 180^\circ - \varphi)$
3. $P_{\triangle BSC} = P_{\triangle DSA} = \frac{ef}{8}(\sin 180^\circ - \varphi) = \frac{ef}{8} \sin\varphi = P_{\triangle ABS} = P_{\triangle DSC}$
4. $P = 4 \cdot P_{\triangle ABS} = 4 \cdot \frac{ef}{8} \sin\varphi = \frac{ef}{2} \sin\varphi$

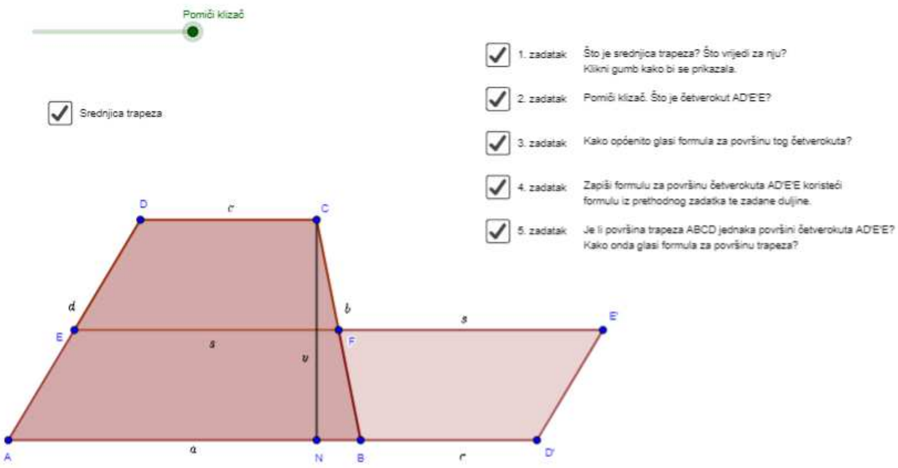
Zaključak: Površina paralelograma kojemu su zadane duljine dijagonala e i f te mjera kuta φ između njih računa se po formuli:

$$P = \frac{1}{2} ef \sin\varphi. \tag{3.15}$$

3.5 Trapez

Aktivnost 15: Površina trapeza

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu trapeza
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: tablet, GeoGebra applet, olovka, bilježnica
Tijek aktivnosti: Učenici će dobiti link na applet te će redom rješavati zadatke koji su tamo navedeni. Na kraju aktivnosti nastavnik prokomentira sve zadatke kako bi izbjegao pogrešne zaključke učenika. Nakon diskusije učenici u bilježnicu zapisuju formulu za računanje površine trapeza.



Slika 3.2: GeoGebra applet za trapez

Odgovori na pitanja iz appleta:

1. *Srednjica trapeza je dužina koja spaja polovišta krakova trapeza [13, str. 133].*
2. Četverokut $AD'E'E$ je paralelogram.
3. $P = a \cdot v_a$
4. $P = (a + c) \cdot \frac{v}{2}$
5. Površina trapeza $ABCD$ jednaka je površini četverokuta $AD'E'E$. Formula za površinu trapeza jednaka je $\frac{a+c}{2}v$.

Zaključak: Površina trapeza kojemu su duljine osnovica jednake a i c te duljina visine na osnovicu v jednaka je

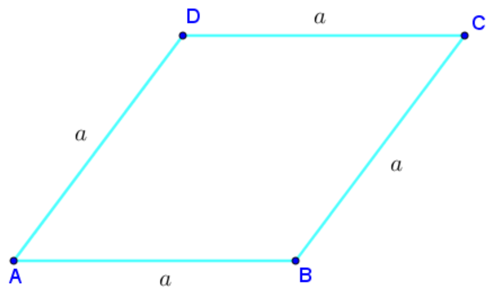
$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v. \tag{3.16}$$

3.6 Romb

Aktivnost 16: Površina romba

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu romba
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda

Potrebni materijal: nastavni listić, ravnalo, škare, olovka, ljepilo, bilježnica
Tijek aktivnosti: Učenici će dobiti romb od papira te će uz pomoć uputa i pitanja nastavnika otkriti formulu za računanje površine romba. Nastavnik prilikom postavljanja pitanja sam odlučuje kojeg učenika će prozvati da odgovori i tako može uključiti i povučenije učenike u razgovor.
Nastavni listić:



Pitanja i upute nastavnika:

1. Što je romb? Što vrijedi za dijagonale romba?

2. Konstruirajte dijagonale romba. Duljinu jedne dijagonale označite s e, a duljinu druge s f. Napišite s obje strane polovina dijagonala odgovarajuću oznaku, dakle četiri puta oznaku $\frac{e}{2}$ i isto toliko puta oznaku $\frac{f}{2}$.

3. Izrežite romb te ga prerežite po dijagonalama tako da dobijete četiri trokuta. Presložite trokute tako da dobijete lik kojemu znate izračunati površinu.

4. Koji lik ste dobili? Kako glasi formula za računanje površine tog lika?

5. Zapišite formulu za računanje površine novonastalog lika koristeći formulu iz prethodnog zadatka. Sredite izraz. Je li površina novonastalog lika jednaka površini početnog romba?

6. Kako glasi formula za računanje površine romba?

Odgovori na pitanja nastavnika:

1. Romb je paralelogram kojemu su susjedne stranice jednake duljine. Dijagonale romba se sijeku pod pravim kutom te se raspolavljaju.

4. Dobiveni lik je pravokutnik. Formula za računanje površine pravokutnika glasi $P = ab$.

5. $P = \frac{e}{2} \cdot f$ ili $P = \frac{f}{2} \cdot e$, ovisno o načinu na koji su trokuti presloženi u pravokutnik. Sređena formula za površinu lika glasi $P = \frac{ef}{2}$. Površina novonastalog lika jednaka je površini početnog romba.

6. Formula za površinu romba jednaka je $P = \frac{ef}{2}$.

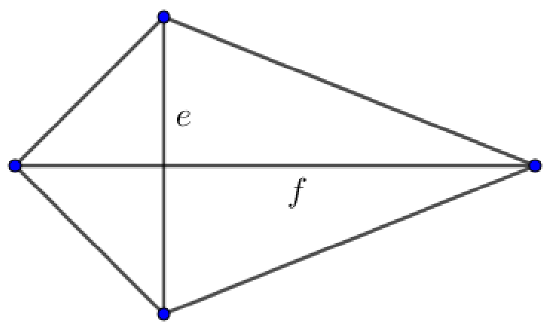
Zaključak: Površina romba s dijagonalama duljine e i f jednaka je

$$P = \frac{ef}{2}. \tag{3.17}$$

3.7 Deltoid

Aktivnost 17: Površina deltoida

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu deltoida
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: deltoid od papira, nastavni listić, olovka
Tijek aktivnosti: Učenici će dobiti deltoid od papira te nastavni listić koji ih vodi do formule za računanje površine deltoida.
Deltoid od papira:



Nastavni listić:

1. Što je deltoid? Pod kojim kutem se sijeku dijagonale deltoida?

2. Preklopi dobiveni deltoid po dijagonali duljine f. Jesu li dva trokuta koja su dobivena presavijanjem sukladna?

3. Kako glasi formula za računanje površine tog trokuta uzimajući u obzir da je druga dijagonala deltoida duljine e?

4. Od koliko trokuta s površinom iz prethodnog zadatka se sastoji deltoid? Kako glasi formula za računanje površine deltoida?

Rješenje nastavnog listića:

1. *Deltoid je četverokut s okomitim dijagonalama u kojem jedna dijagonala raspolavlja drugu dijagonalu [13, str. 136].*
2. Jesu.
3. $P = \frac{f \cdot \frac{e}{2}}{2} = \frac{ef}{4}$
4. Deltoid se sastoji od dva trokuta naveden površine. Formula za površinu deltoida jednaka je $P = 2 \cdot \frac{ef}{4} = \frac{ef}{2}$.

Zaključak: Površina deltoida kojemu su zadane duljine dijagonala e i f jednaka je:

$$P = \frac{ef}{2}. \tag{3.18}$$

3.8 Četverokut

Formula iz Aktivnosti 14 vrijedi za bilo koji četverokut kojemu su zadane duljine dijagonala te mjera kuta između njih.
Zaključak: Površina četverokuta kojemu su zadane duljine dijagonala e i f te mjera kuta φ između njih računa se po formuli:

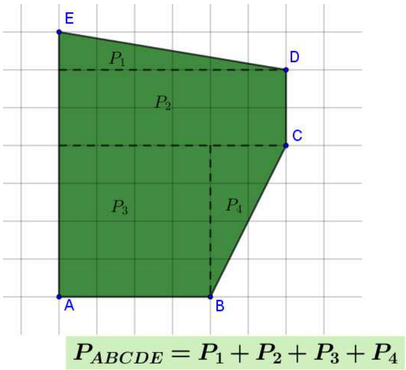
$$P = \frac{1}{2} ef \sin \varphi. \tag{3.19}$$

Romb i trapez su četverokuti u kojima je kut φ jednak $90°$. Prema tome $\sin(90°) = 1$. Kada se to uvrsti u formulu 3.19 dobijemo da je površina romba i trapeza jednaka $P = \frac{1}{2}ef$.

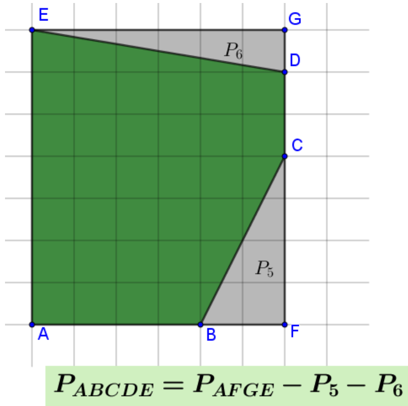
Dokaz formule (3.19) nalazi se na stranici 58.

3.9 Nepravilni mnogokuti

Za računanje površine nepravilnih mnogokuta ne postoji formula. Površina nepravilnih mnogokuta u udžbenicima se računa na dva različita načina. Prvi način je da se mnogokut podijeli na geometrijske likove kojima znamo izračunati površinu te se sve površine zbroje i tako dobivamo površinu nepravilnog mnogokuta kao na slici 3.3. Drugi način je da se mnogokut dopuni do pravokutnika kojemu se izračuna površina, a zatim se od te površine oduzmu površine likova koji su "dodani" prilikom crtanja pravokutnika oko nepravilnog mnogokuta kako bi odredili njegovu površinu kao na slici 3.4.



Slika 3.3: Podjela na likove



Slika 3.4: Dopuna do pravokutnika

Prilikom obrade ovog nastavnog sadržaja može se spomenuti Pickova formula. Prije same aktivnosti otkrivanja formule valja objasniti što je uopće Pickova formula.

Pickova formula koristi se za računanje površina mnogokuta koji su ucrtani u kvadratnu mrežu, a svi vrhovi se nalaze u čvorovima mreže. Otkrio ju je austrijski matematičar Georg Alexander Pick i ona je zapravo teorem kojeg je i dokazao. Formula povezuje tri komponente:

- P je površina mnogokuta koji je ucrtan u kvadratnu mrežu,
- r je broj rubnih čvorova, odnosno broj čvorova koji se nalaze na stranicama mnogokuta, uključujući i same vrhove mnogokuta,
- u je broj unutarnjih čvorova mnogokuta,

i glasi:

$$P(r, u) = \frac{1}{2}r + u - 1 \tag{3.20}$$

Slijedi aktivnost koja koristi ideju iz [16], a svodi se na rješavanje sustava tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice.

Aktivnost 18: Pickova formula

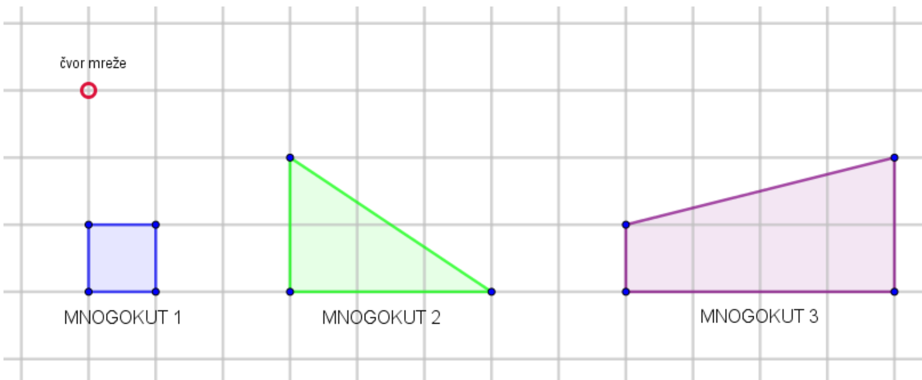
Cilj: učenici će otkriti Pickovu formulu
Nastavni oblik: diferencirana nastava (grupni rad)

Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, ravnalo, olovka, bilježnica
Tijek aktivnosti: Učenici će biti podijeljeni u grupe po troje. Svaka grupa dobiva nastavni listić koji trebaju zajednički riješiti.
Nastavni listić:

Austrijski matematičar Georg Alexander Pick otkrio je formulu za računanje površine mnogokuta upisanog u kvadratnu mrežu, uz uvjet da su svi vrhovi čvorovi mreže. Promatrao je površinu mnogokuta P, broj čvorova mreže koji se nalaze na stranicama ili u vrhovima mnogokuta r te broj čvorova mreže unutar mnogokuta u. Kako biste i vi znali računati površinu mnogokuta u kvadratnoj mreži potrebno je odrediti koeficijente A, B i C u formuli

$$P = Ar + Bu + C. \tag{3.21}$$

1. Popunite tablicu pomoću mnogokuta na slici.



Mnogokut	Broj rubnih čvorova r	Broj unutarnjih čvorova u	Površina mnogokuta P
1			
2			
3			

2. Uvrstite vrijednosti iz tablice u formulu (3.21) za svaki mnogokut sa slike 1.

   Mnogokut 1:

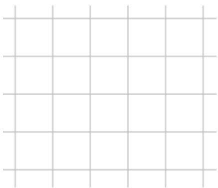
   Mnogokut 2:

   Mnogokut 3:

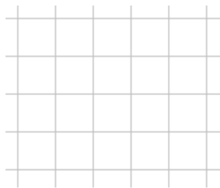
3. Riješite dobiveni sustav i zapišite formulu.

4. Provjerite ispravnost formule na vlastitim primjerima. Dogovorite se tko je učenik A, tko je učenik B, a tko je učenik C i neka svatko od vas riješi ono što piše uz njegovo/njezino slovo.

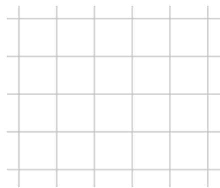
   Mnogokut u kvadratnoj mreži (svatko crta mnogokut u jednoj kvadratnoj mreži ovisno o tome tko je učenik A, učenik B i učenik C):



Slika 3.5: A



Slika 3.6: B



Slika 3.7: C

   Račun za površinu mnogokuta na standardni način:

   A: $P_B =$

   B: $P_C =$

   C: $P_A =$

   Površina mnogokuta izračunata pomoću vaše formule:

   A: $P_C =$

   B: $P_A =$

   C: $P_B =$

   Jesu li oba načina računanja površine dala jednake rezultate za pojedine mnogokute? Ukoliko nisu, provjerite je li došlo do pogreške prilikom računanja.

5. Formula koju ste ovdje otkrili zove se Pickova formula i glasi: $P =$

Rješenje nastavnog listića:

Mnogokut	Broj rubnih čvorova r	Broj unutarnjih čvorova u	Površina mnogokuta P
1	4	0	1
2	6	1	3
3	8	3	6

2. Mnogokut 1: $1 = 4A + C$

   Mnogokut 2: $3 = 6A + B + C$

   Mnogokut 3: $6 = 8A + 3B + C$

3. Rješenje sustava je: $A = \frac{1}{2}, B = 1$ i $C = -1$. Formula tada glasi: $P = \frac{1}{2}r + u - 1$.

4. Oba načina računanja površine dala su jednake rezultate.

5. $P = \frac{1}{2}r + u - 1$

Ovo je dosta jednostavan način otkrivanja Pickove formule. Međutim, prema trenutnom kurikulumu učenici ne znaju rješavati sustave linearnih jednadžbi u trenutku kada računaju površinu nepravilnih mnogokuta. Ova aktivnost bi tada mogla biti provedena na dodatnoj nastavi ili kao zadatak nadarenim učenicima kojima bi ovo mogao biti mali izazov i prilika da istraže kako se rješavaju sustavi linearnih jednadžbi i prije nego to nauče na redovnoj nastavi. Isto tako ovo može biti dodatna aktivnost nakon što učenici nauče rješavati sustave dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice kao primjena sustava s više nepoznanica i usput nauče zanimljivu formulu koju kasnije mogu koristiti u zadacima.

U literaturi se može naići na još jedan način otkrivanja Pickove formule. Taj način zahtjeva puno veću sposobnost učenika jer sami moraju doći do formule promatrajući brojne primjere (vidi [5]). Ipak, ovaj način se može primijeniti i u osnovnoj školi.

3.10 Pravilni mnogokuti

Aktivnost 19: Površina pravilnog mnogokuta

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu pravilnog mnogokuta
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: tablet ili računalo, GeoGebra, nastavni listić, olovka
Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobiva nastavni listić s tablicom i uputama pomoću kojih će raditi u GeoGebri te na kraju doći do formule za računanje površine pravilnih mnogokuta.
Napomena: Preduvjet za provedbu ove aktivnosti je učenikovo poznavanje rada u GeoGebri.
Nastavni listić:

Popuni četiri retka tablice tako da provedeš sve korake navedene ispod tablice za pravilni četverokut, pravilni peterokut, pravilni sedmerokut te pravilni deseterokut.

Broj stranica pravilnog mnogokuta n	Površina pravilnog mnogokuta P	Površina karakterističnog trokuta $P_\triangle$	Omjer P i $P_\triangle$
4			
5			
7			
10			

Koraci:

1. Otvori novi prozor u GeoGebri te konstruiraj pravilni mnogokut sa zadanim brojem vrhova i sa stranicom duljine 2. Zapiši površinu pravilnog mnogokuta u tablicu.
2. Pronađi središte mnogokuta i označi ga sa S.
3. Odredi površinu trokuta $\triangle ABS$ tako da iskoristiš opciju *Mnogokut*. Zapiši ju u tablicu. (Napomena: Trokut $\triangle ABS$ naziva se karakteristični trokut.)
4. Odredi omjer površine pravilnog mnogokuta i površine karakterističnog trokuta te ga zapiši u tablicu.

   (Za računanje omjera površina koristi GeoGebru.)

Nakon popunjavanja tablice:

1. Gledajući tablicu, što je zapravo omjer površine P pravilnog mnogokuta i površine $P_\triangle$ karakterističnog trokuta?
2. Kako glasi formula za računanje površine pravilnog mnogokuta ako je broj stranica n, a površina karakterističnog trokuta $P_\triangle$?
3. Ako računaš površinu pomoću kalkulatora i koristeći vrijednosti površina iz tablice, tada nećeš dobiti rješenje kao što si zapisao/la u tablicu. Što misliš, zašto je tome tako?

Rješenje nastavnog listića:

1. Omjer površine pravilnog mnogokuta i površine karakterističnog trokuta jednak je broju stranica mnogokuta n.
2. $P = n \cdot P_\triangle$

Broj stranica pravilnog mnogokuta n	Površina pravilnog mnogokuta P	Površina karakterističnog trokuta $P_\triangle$	Omjer P i $P_\triangle$
4	4	1	4
5	6.88	1.38	5
7	14.54	2.08	7
10	30.78	3.08	10

3. Rješenje neće biti jednako zato što GeoGebra pokazuje rješenje zaokruženo na dvije decimale (s čime bismo mi računali omjer), ali računa s brojem kojeg je dobio algoritmom za računanje površine mnogokuta.

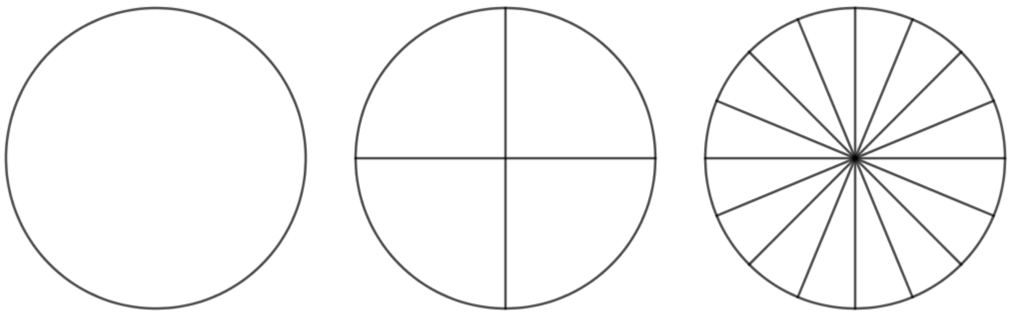
Zaključak (iz [14, str. 136]): *Površina pravilnog n-terokuta jednaka je umnošku broja stranica i površine karakterističnog trokuta $P_\triangle$:*

$$P = n \cdot P_\triangle. \tag{3.22}$$

3.11 Krug i njegovi dijelovi

Aktivnost 20: Površina kruga

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu kruga
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: tri kruga od papira, ravnalo, škare, ljepilo, olovka, bilježnica
Tijek aktivnosti: Učenici će dobiti tri kruga od papira te će uz pomoć uputa nastavnika otkriti formulu za površinu kruga.
Krugovi od papira:

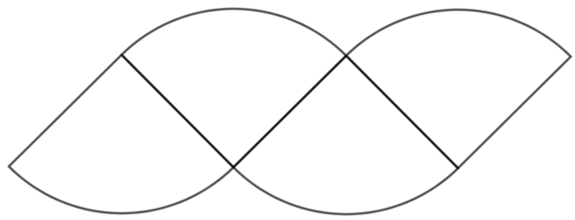


Upute nastavnika:

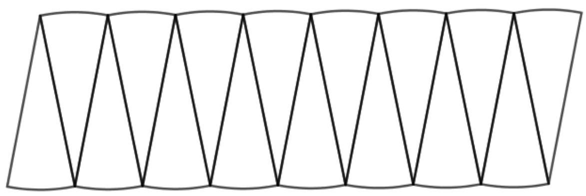
1. Pred vama se nalaze tri kruga polumjera r.
2. Izrežite prvi krug i zalijepite ga u bilježnicu.
3. Izrežite drugi krug tako da ga razrežete po iscrtanim promjerima te ga zalijepite u bilježicu tako da se kružni isječci dodiruju po stranici koja je polumjer kruga, a kružni luk je naizmjence s gornje ili donje strane novonastajućeg lika. Podsjeća li vas lik na nešto što ste učili?
4. Izrežite treći krug tako da ponovite postupak kojeg ste radili s drugim krugom. Podjeća li vas sada lik na neki geometrijski lik kojeg ste radili do sada?
5. Kako glasi formula za računanje površine paralelograma? Zapišite ju.
6. Čemu je približno jednaka duljina dulje stranice novonastalog lika kojeg ste zalijepili u bilježnicu? Čemu je približno jednaka duljina visine na dulju stranicu u novonastalom liku? Zapišite ih.
7. Uvrstite li te duljine u formulu za računanje površine paralelograma, kako onda glasi formula za računanje površine kruga?

Odgovori na pitanja iz uputa nastavnika:

3. Lik podsjeća na paralelogram.



4. Lik podsjeća na paralelogram.



5. $P = a \cdot v_a$

6. Duljina dulje stranice približno je jednaka $r\pi$, a duljina visine na tu stranicu jednaka je r.

7. $P = r^2\pi$

Zaključak: Površina kruga polumjera r jednaka je

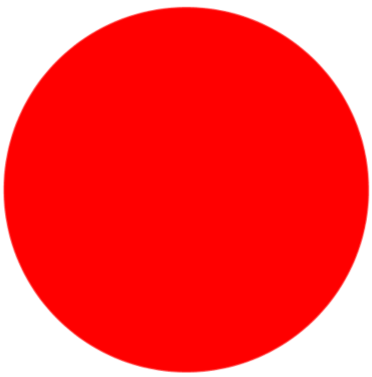
$$P = r^2\pi. \tag{3.23}$$

Napomena: Ideja za aktivnost preuzeta je iz [1].

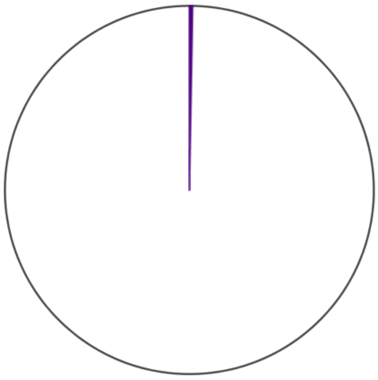
Aktivnost 21: Površina kružnog isječka

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu kružnog isječka
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga
Potrebni materijal: nastavni listić, olovka
Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobiva nastavni listić pomoću kojeg dolazi do traženih zaključaka. Nakon što svi učenici odgovore na pitanja, nastavnik ih prokomentira zajedno s učenicima.
Nastavni listić:

1. Na slici se nalazi crveni krug polumjera r. Kako glasi formula za računanje površine kruga?



2. Na slici je obojen kružni isječak kojemu je mjera središnjeg kuta $1°$, a polumjer kruga je r.

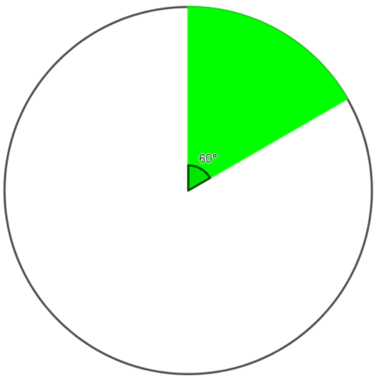


Kolika je mjera punog kuta?

Koliki dio kruga je obojen?

Kolika je površina tog kružnog isječka ako znamo površinu cijelog kruga?

3. Na slici se nalazi kružni isječak kojemu je mjera središnjeg kuta 60°, a polumjer kruga je r.



Koliki dio kruga je obojen?

Od koliko se ljubičastih kružnih isječaka iz prethodnog zadatka sastoji zeleni kružni isječak?

Koliko je puta površina zelenog kružnog isječka veća od površine ljubičastog kružnog isječka?

Kako bii izračunali površinu zelenog kružnog isječka ako znaš površinu ljubičastog?

4. Zaokruži. Mjera središnjeg kuta kružnog isječka i površina kružnog isječka međusobno su **proporcionalne / obrnuto proporcionalne** veličine.

5. Kako bi izračunao/la površinu kružnog isječka kojemu je mjera središnjeg kuta jednaka α u krugu polumjera r?

6. Formula za računanje površine kružnog isječka kojemu je mjera središnjeg kuta jednaka α u krugu polumjera r glasi:

Rješenje nastavnog listića:

1. Površina kruga jednaka je $P = r^2\pi$.

2. Mjera punog kuta je 360°. Obojena je $\frac{1}{360}$ kruga. Površina obojenog dijela kruga jednaka je $\frac{r^2\pi}{360}$.

3. Obojena je $\frac{1}{6}$ kruga. Jedan zeleni kružni isječak sastoji se od šezdeset ljubičastih kružnih isječaka. Površina zelenog kružnog isječka šezdeset puta je veća od površine ljubičastog kružnog isječka. Površina zelenog isječka tada je jednaka $\frac{r^2\pi 60}{360}$.

4. Mjera središnjeg kuta kružnog isječka i površina kružnog isječka međusobno su proporcionalne veličine.

5. $P = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$

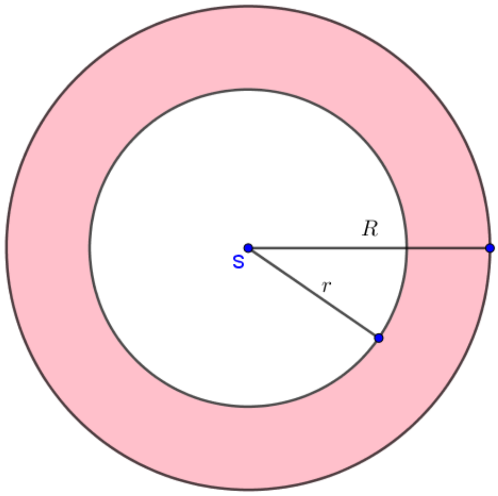
6. Površina kružnog isječka kojemu je mjera središnjeg kuta jednaka α glasi: $P = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$.

Zaključak: Površina kružnog isječka kojemu je mjera središnjeg kuta jednaka α u krugu polumjera r jednaka je:

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360}. \tag{3.24}$$

Aktivnost 22: Površina kružnog vijenca

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu kružnog vijenca
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, olovka
Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobiva nastavni listić pomoću kojeg dolazi do traženog zaključka.
Nastavni listić:
Promotri sliku te odgovori na sljedeća pitanja.



1. Na slici se nalaze dva kruga, veći polumjera R i manji polumjera r. Kako glase formule za računanje površina tih krugova? Površine označi s P_{veliki} i P_{mali}.
2. Rozom bojom označen je kružni vijenac čiju površinu označimo s P. Od čega se sastoji veći krug? Kako možeš izračunati njegovu površinu ako znaš površine potrebnih likova?
3. Kako glasi formula za računanje površine kružnog vijenca ukoliko znaš površine velikog i malog kruga. Zapiši ju. Iz formule izluči π. Kako glasi formula za računanje površine kružnog vijenca?

Rješenje nastavnog listića:

1. $P_{veliki} = R^2\pi$

   $P_{mali} = r^2\pi$
2. Veći krug sastoji se od kružnog vijenca i manjeg kruga. Površina većeg kruga jednaka je zbroju površina kružnog vijenca i manjeg kruga.
3. $P = P_{veliki} - P_{mali} = R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2)$

Zaključak: Površina kružnog vijenca koji je određen s koncentrične kružnice polumjera R i r računa se po formuli:

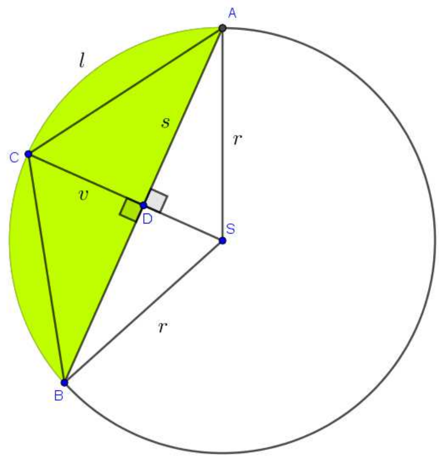
$$P = (R^2 - r^2)\pi. \tag{3.25}$$

Aktivnost 23: Površina kružnog odsječka (osnovna škola)

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu kružnog odsječka
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, olovka, bilježnica
Tijek aktivnosti: Učenici će dobiti nastavni listić na kojem se nalazi krug sa svim važnim elementima koji su potrebni za otkrivanje formule. Trebaju zapisati tri formule koje se traže te na kraju iskombinirati sve formule koje su zapisali kako bi dobili formulu za računanje površine kružnog odsječka. Nastavni listić je napravljen prema uzoru na objašnjenje iz [3, str. 262]
Nastavni listić:

Zadano: r radijus pripadnog kruga, l duljina pripadajućeg kružnog luka, s duljina pripadajuće tetive i v visina kružnog odsječka.

Prisjeti se formula za računanje površine kružnog isječka, trokuta i četverokuta te zapiši čemu je jednako P_{ki}, P_{ACBS} i P_{ACB} koristeći zadane veličine. Na kraju zapiši formulu za računanje površine P kružnog odsječka koristeći sve tri ranije napisane formule.



$P_{ki} =$

$P_{ACBS} =$

$P_{\Delta ACB} =$

$P =$

Zapiši formulu za računanje površine kružnog odsječka koristeći zadane veličine:
$P =$

Rješenje nastavnog listića:
Formule za računanje površine likova:

$$P_{ki} = \frac{rl}{2},$$

$$P_{ACBS} = \frac{sr}{2},$$

$$P_{ACB} = \frac{sv}{2},$$

$$P = \frac{rl}{2} - \frac{sr}{2} + \frac{sv}{2}.$$

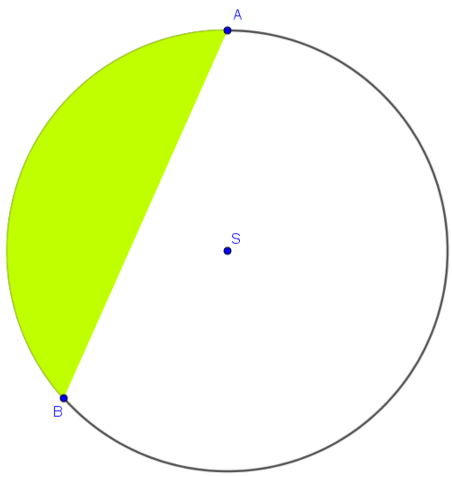
Zaključak: Površina kružnog odsječka jednaka je

$$P = \frac{rl}{2} - \frac{sr}{2} + \frac{sv}{2}, \tag{3.26}$$

pri čemu je r radijus pripadnog kruga, l duljina pripadajućeg kružnog luka, s duljina pripadajuće tetive i v visina kružnog odsječka.

Aktivnost 24: Površina kružnog odsječka (srednja škola)

Cilj: učenici će otkriti formulu za površinu kružnog odsječka.
Nastavni oblik: diferencirana nastava (individualni rad)
Nastavne metode: metoda dijaloga, heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, ravnalo, olovka
Tijek aktivnosti: Učenici će dobiti nastavni listić kojeg trebaju popuniti i tako će otkriti kako mogu izračunati površinu kružnog odsječka.
Nastavni listić:



1. Na slici je označen kružni odsječak koji pripada kružnom luku $\widehat{AB}$. Na istoj slici crvenom bojom označi kružni isječak koji pripada istom luku.

2. Od čega se sastoji kružni isječak? Kako bi izračunao/la površinu kružnog isječka ukoliko znaš površine likova od kojih se kružni isječak sastoji? Zapiši formulu.

3. Koristeći formulu koju si zapisao/la u prethodnom zadatku zapiši kako bi izračunao/la površinu kružnog odsječka.

Rješenje nastavnog listića:

2. Kružni isječak sastoji se od kružnog odsječka i trokuta $\triangle ABS$. Površina kružnog isječka jednaka je zbroju površina kružnog odsječka i trokuta $\triangle ABS$.

   $P_{ki} = P + P_{\triangle ABS}$

   (Kako nisu zadane oznake za površine likova, učeničko rješenje ne mora biti jednako ovdje zapisanom rješenju.)

3. $P = P_{ki} - P_{\triangle ABS}$

Zaključak: Površina kružnog odsječka koji pripada kružnom luku $\widehat{AB}$ jednaka je razlici površine kružnog isječka P_{ki} koji pripada istom kružnom luku te površine trokuta $P_{\triangle ABS}$ pri čemu je S središte kruga.

$$P = P_{ki} - P_{\triangle ABS} \tag{3.27}$$

Napomena: Formula (3.27) je općenita formula koje služi kao "recept" za računanje površine kružnog odsječka. Površina kružnog isječka i površina trokuta računaju se ovisno o tome što je u zadatku zadano koristeći sve formule koje su učenici naučili tijekom školovanja. Slijedi jedan primjer računanja površine kružnog isječka:

- Zadano: duljina kružnog luka l, polumjer kruga r, mjera pripadajućeg središnjeg kuta α
- $P_{ki} = \frac{rl}{2}$
- $P_{\triangle ABS} = \frac{r^2 \sin\alpha}{2}$
- $P = P_{ki} - P_{\triangle ABS} = \frac{rl}{2} - \frac{r^2 \sin\alpha}{2} = \frac{r}{2}(l - r\sin\alpha)$

Poglavlje 4

Dokazi formula za površinu

U ovom poglavlju nalaze se dokazi za nekoliko ranije spomenutih formula za računanje površine likova. Valja napomenuti kako se većina formula u školskoj matematici ne dokazuje, no u gimnazijskim udžbenicima za programe s 5 i više sati matematike ipak ima raspisanih dokaza. Jedan od njih je dokaz za računanje površine četverokuta preko duljina dijagonala i mjere kuta između njih koji je također naveden ovdje.

4.1 Površina pravokutnika $P = ab$

Ovo je primjer dokaza koji nije primjeren za školsku matematiku jer se koristi limes kojeg učenici upoznaju tek u četvrtom razredu srednje škole. Za dokaz je potrebna sljedeća definicija površine:

Definicija 4.1.1. *Neka je $\mathcal{P}$ svih mnogokuta u ravnini (uključujući $\emptyset$). Površina (ili ploština) p na skupu $\mathcal{P}$ je funkcija $p : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ s ovim svojstvima*

(P1) $p(\Pi) \geq 0, \forall \Pi \in \mathcal{P}$,

(P2) $p(\Pi_1 + \Pi_2) = p(\Pi_1) + p(\Pi_2), \forall \Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}$,

(P3) Ako je $\Pi_1 \cong \Pi_2$, onda je $p(\Pi_1) = p(\Pi_2)$,

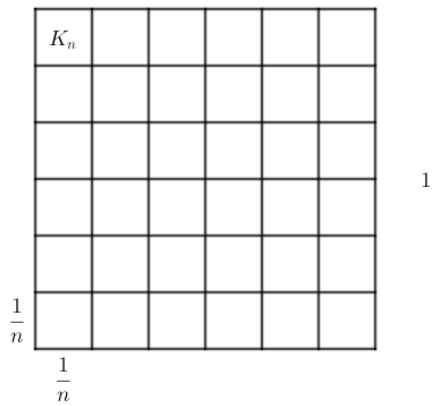
(P4) Postoji bar jedam kvadrat K sa stranicom 1 takav da je $p(K) = 1$.

Teorem 4.1.2. *Površina p pravokutnika $ABCD$ sa susjednim stranicama duljine a i b jednaka je*

$$p = a \cdot b. \tag{4.1}$$

Dokaz. *(prema [20, str. 244])* Neka je K kvadrat sa stranicom duljine 1. Podijelimo stranice kvadrata na dijelove duljine $\frac{1}{n}$. Na svakoj stranici kvadrata ima n takvih dijelova. Kada nacrtamo paralele sa stranicama kvadrata kroz dobivene točke, dobivamo da se kvadrat K sastoji od n^2 sukladnih kvadratića stranice duljine $\frac{1}{n}$ kao na slici 4.1. Zbog (P3) svi kvadratići imaju jednaku površinu. Označimo jedan kvadratić s K_n te vrijedi sljedeća jednakost:

$$p(K) = n^2 p(K_n). \tag{4.2}$$



Slika 4.1: Kvadrat K

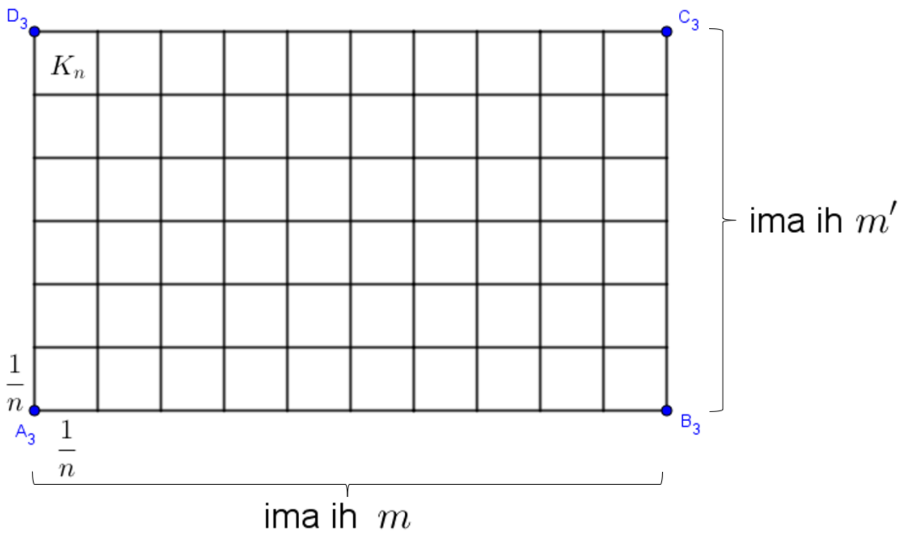
Prema (P4) površina kvadrata K jednaka je $p(K) = 1$ pa iz jednakosti 4.2 slijedi:

$$p(K_n) = \frac{1}{n^2}. \tag{4.3}$$

Neka su a i b pozitivni racionalni brojevi i duljine susjednih stranica pravokutnika $ABCD$. Tada postoje brojevi $m, m' \in \mathbb{N}$ takvi da a i b možemo zapisati kao:

$$a = \frac{m}{n}, b = \frac{m'}{n}.$$

Svaku stranicu pravokutnika podijelimo na dijelove duljine $\frac{1}{n}$ te možemo primijetiti da se na stranici a nalazi m, a na stranici b m' takvih dijelova. Kada povučemo paralele sa stranicama pravokutnika kroz dobivene točke možemo zaključiti da se pravokutnik sastoji od $m \cdot m'$ sukladnih kvadratića stranice duljine $\frac{1}{n}$ od kojih jednog označimo s K_n kako je prikazano na slici 4.2.



Slika 4.2: Pravokutnik $ABCD$

Površinu pravokutnika tada zapisujemo kao

$$p(ABCD) = m \cdot m' \cdot p(K_n)$$

i koristeći (4.3) dobivamo da je površina pravokutnika jednaka

$$p(ABCD) = m \cdot m' \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n} = a \cdot b.$$

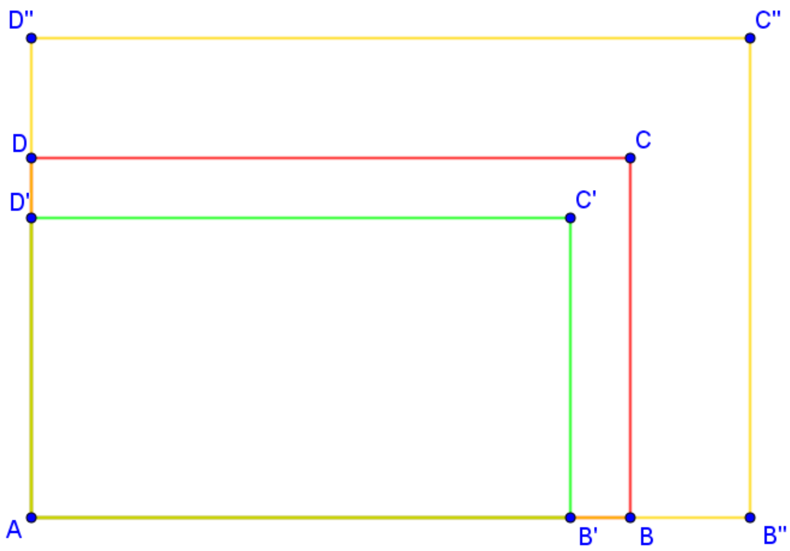
Time je dokaz u slučaju kada su a i b pozitivni racionalni brojevi gotov.

Neka su sada a i b pozitivni realni brojevi. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\frac{a_n}{n} \leq a < \frac{a_n + 1}{n},$$

$$\frac{b_n}{n} \leq b < \frac{b_n + 1}{n}.$$

Sada promatramo tri pravokutnika sa slike 4.3. Pravokutnik $AB'C'D'$ ima stranice duljine $\frac{a_n}{n}$ i $\frac{b_n}{n}$, a pravokutnik $AB''C''D''$ ima stranice duljine $\frac{a_n+1}{n}$ i $\frac{b_n+1}{n}$.



Slika 4.3: Pravokutnici

Zaključujemo kako je $AB'C'D' \subseteq ABCD \subset AB''C''D''$, a zbog monotonosti površine tada vrijedi da je $p(AB'C'D') \leq p(ABCD) < p(AB''C''D'')$. Koristeći prvi slučaj možemo odrediti površine pravokutnika $AB'C'D'$ te $AB''C''D''$ i one su jednake

$$p(AB'C'D') = \frac{a_n b_n}{n^2},$$

$$p(AB''C''D'') = \frac{(a_n + 1)(b_n + 1)}{n^2}.$$

Kada to uvrstimo u nejednakost površina dobivamo sljedeće:

$$\frac{a_n b_n}{n^2} \leq ab < \frac{(a_n + 1)(b_n + 1)}{n^2},$$

odnosno

$$p(AB'C'D') \leq ab < p(AB''C''D'').$$

Iz ovih nejednakosti slijedi da je

$$|p(ABCD) - ab| < p(AB''C''D'') - p(AB'C'D'),$$

odnosno

$$0 \leq |p(ABCD) - ab| \leq \frac{(a_n + 1)(b_n + 1)}{n^2} - \frac{a_n b_n}{n^2} = \frac{a_n + b_n + 1}{n^2} \leq \frac{a \cdot n + b \cdot n + 1}{n^2}.$$

Sada iskoristimo limes kada n ide u beskonačnost te primjećujemo kako $\frac{a \cdot n + b \cdot n + 1}{n^2}$ tada teži u 0 pa primjenom Teorema o sendviču imamo sljedeće:

$$\lim_{n \to \infty} |p(ABCD) - ab| = 0,$$

kako izraz ne ovisi o n slijedi

$$|p(ABCD) - ab| = 0,$$

odnosno

$$p(ABCD) = ab$$

čime je dokaz gotov.

$\square$

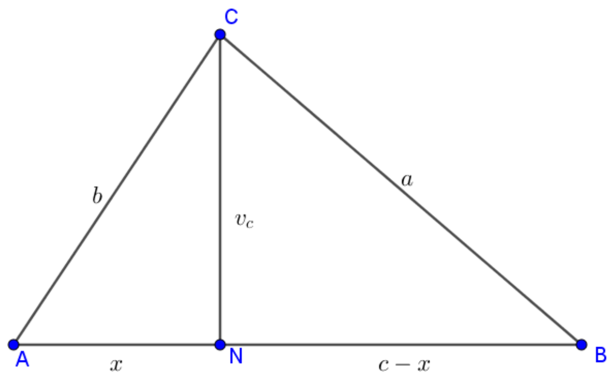
4.2 Heronova formula

Teorem 4.2.1. *(Heronova formula). Površina trokuta kojemu su zadane duljine stranica a, b i c jednaka je*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{4.4}$$

pri čemu je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg.

Dokaz. (prema [15, str. 38]) Neka je trokut $\triangle ABC$ šiljastokutan i N nožište visine iz vrha C. Neka je $|CN| = v_c$, a $|AN| = x$ kao na slici 4.4.



Slika 4.4: Trokut *ABC*

Iz pravokutnog trokuta $\triangle ANC$ pomoću Pitagorinog poučka možemo izraziti

$$v_c{}^2 = b^2 - x^2, \tag{4.5}$$

a iz pravokutnog trokuta $\triangle CNB$ pomoću Pitagorinog poučka možemo izraziti

$$v_c{}^2 = a^2 - (c-x)^2. \tag{4.6}$$

Iz (4.5) i (4.6) slijedi

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 &= a^2 - (c-x)^2 \\ &= a^2 - c^2 + 2cx - x^2, \\ 2cx &= -a^2 + b^2 + c^2, \\ x &= \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Uvrštavanjem (4.7) u (4.5) dobivamo

$$\begin{aligned} v_c{}^2 &= b^2 - (\frac{-a^2+b^2+c^2}{2c})^2 \\ &= (b - \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}) \cdot (b + \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}) \\ &= \frac{2bc+a^2-b^2-c^2}{2c} \cdot \frac{2bc-a^2+b^2+c^2}{2c} \\ &= \frac{a^2-(b-c)^2}{2c} \cdot \frac{(b+c)^2-a^2}{2c} \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2c} \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2c} \\ &= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2} \\ &= \frac{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{4c^2} \\ &= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}, \\ v_c &= \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ \frac{cv_c}{2} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ P &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

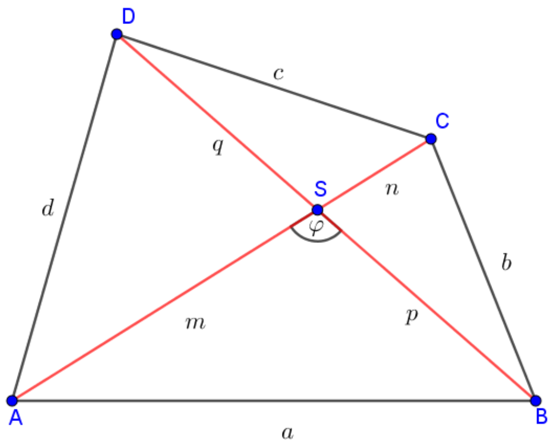
□

4.3 Površina četverokuta $P = \frac{1}{2}ef\sin\varphi$

Teorem 4.3.1. *Površina četverokuta kojemu su zadane duljine dijagonala e i f te mjera kuta φ između njih dana je formulom*

$$P = \frac{1}{2}ef\sin\varphi. \tag{4.8}$$

Dokaz. (prema [11, str. 41] Četverokutu $ABCD$ nacrtamo dijagonale i označimo ih s $e = |AC|$ i $f = |BD|$. Dijagonalama je četverokut podijeljen na četiri trokuta. Sjecište dijagonala dijeli svaku dijagonalu na dva dijela koja označimo kao na slici 4.5.



Slika 4.5: Četverokut $ABCD$

Površina četverokuta $ABCD$ jednaka je zbroju površina dobivenih trokuta. Površine trokuta lako možemo izračunati po formuli 3.11. Pri računanju ćemo koristiti i svođenje na prvi kvadrant, odnosno jednakost $\sin(180° - x) = \sin x$.

$$\begin{aligned}
P(\triangle ABS) &= \frac{1}{2}mp\sin\varphi,\\
P(\triangle BCS) &= \frac{1}{2}pn\sin(180° - \varphi) = \frac{1}{2}pn\sin\varphi,\\
P(\triangle CDS) &= \frac{1}{2}nq\sin\varphi,\\
P(\triangle DAS) &= \frac{1}{2}qm\sin(180° - \varphi) = \frac{1}{2}qm\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Kada zbrojimo površine trokuta dobivamo da je površina četverokuta jednaka

$$P(ABCD) = \frac{1}{2}(mp + pn + nq + qm)\sin\varphi. \tag{4.9}$$

Izraz u zagradi možemo srediti i dobivamo:

$$mp + pn + nq + qm = p(m+n) + q(n+m) = (m+n)(p+q). \tag{4.10}$$

Znamo da je $m + n = e$ i $p + q = f$ pa kada to uvrstimo u (4.10), a dobiveno zatim u (4.9) dobivamo formulu:

$$P = \frac{1}{2} ef \sin \varphi$$

čime je dokaz gotov.

$\square$

Poglavlje 5

Analiza i usporedba zadataka

U ovom poglavlju prikazat ćemo kakvi se tipovi zadataka, u kojima se računa površina, nalaze u udžbenicima te ih usporediti s tipovima zadataka koji se pojavljuju na ispitima državne mature iz matematike te u sklopu PISA i TIMSS istraživanja.

5.1 Zadaci u udžbenicima

Usporedit ćemo zadatke iz nastavne jedinice *Površina pravokutnika i kvadrata* u udžbenicima koji su odobreni od strane Ministarstva znanosti i obrazovanja i koriste se u školskoj godini 2022./2023.

Tablica 5.1: Usporedba zadataka iz udžbenika

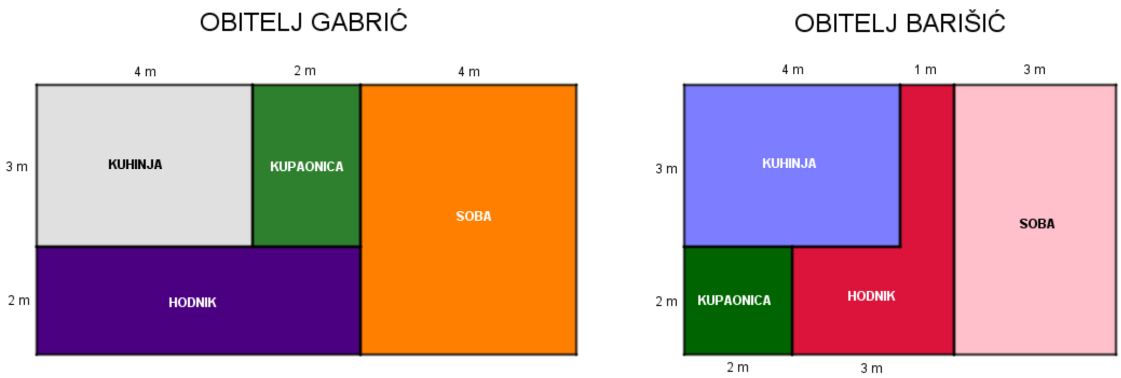
Zadatak	Udžbenik A	Udžbenik B	Udžbenik C
Zadaci otvorenog tipa	Ima.	Ima.	Nema.
Zadaci zatvorenog tipa	Ima.	Ima.	Ima.
Zadaci u kojima treba nacrtati kvadrat ili pravokutnik zadane površine.	Ima.	Ima.	Nema.
Zadaci u kojima je tijekom rješavanja potrebno pretvoriti mjerne jedinice.	Ima, samo u problemskim zadacima.	Ima, u osnovnim i problemskim zadacima.	Ima, samo u problemskim zadacima.

Zadatak	Udžbenik A	Udžbenik B	Udžbenik C
Osnovni zadaci u kojima se provjerava poznavanje formule za računanje površine (zadane duljine stranica i treba izračunati površinu ili obratno).	Ima, po jedan podzadatak za pravokutnik i kvadrat.	Ima. Nisu napisane samo zadane veličine, već je potrebno iz zadatka ispisati što je poznato i tek onda izračunati.	Ima, po dva podzadatka za pravokutnik i četiri za kvadrat za svaki tip zadatka.
Zadaci u kojima se kao poznata veličina pojavljuje i opseg lika te je potrebno poznavanje i te formule.	Ima, nekoliko tipova zadataka. Uglavnom po dva podzadatka.	Ima, sve moguće kombinacije, samo po jedan podzadatak.	Ima, količinski jednako kao i za osnovne zadatke.
Zadaci u kojima treba izračunati površinu lika prebrojavanjem jediničnih kvadrata.	Ima.	Ima.	Nema.
Zadaci u kojima treba izračunati površinu nacrtanog lika.	Ima, samo jedan zadatak.	Ima nekoliko zadataka različite težine. Kompleksniji zadatak ima nekoliko podzadataka.	Ima nekoliko zadataka različite težine. Jednostavniji zadaci u kojima je lik već podijeljen na pravokutnike i kvadrate te zadaci u kojima je potreban dulji račun.
Problemski zadaci	Ima, nekoliko zadatak različite težine.	Ima, zadaci su različite težine.	Ima, nekoliko zadataka različite težine.

Svi udžbenici imaju osnovne zadatke koje bi svi učenici trebali znati riješiti. Zadaci u kojima je potrebno nacrtati pravokutnik zadane površine su zadaci otvorenog tipa jer za bilo koju zadanu površinu postoji više mogućih kombinacija za duljine stranica. Za sve zadatke koji se nalaze u udžbenicima potrebno je samo poznavanje formula za računanje opsega i površine kvadrata i pravokutnika te nedostaje zadataka za razmišljanje.

Slijedi nekoliko zadataka različitih tipova koji se nalaze u udžbenicima.

Zadatak 1 (iz [17, str. 54]):



a) *Tko ima veću kuhinju? Za koliko?*

b) *Tko ima veći hodnik? Za koliko?*

c) *Je li neka od prostorija u obliku kvadrata?*

d) *Koje prostorije imaju oblik pravokutnika?*

e) *Tko ima veći stan? Za koliko?*

Zadatak 2 (iz [17, str. 51]):

Pod prostorije kvadratnog oblika ima opseg 16 m. Koliko četvornih metara linoleuma treba za tu prostoriju?

Zadatak 3 (iz [12, str. 101]):

Zid u dnevnom boravku je pravokutnog oblika dimenzija 40 dm $\times$ 20 dm. Koliko je kamenih ploča dimenzija 5 dm $\times$ 4 dm potrebno da bi se popločio zid? Ako je cijena 100 dm^2 ploča 129 kn, kolika će biti ukupna cijena kupljenih kamenih ploča?

Zadatak 4 (iz [22, str. 115]):

Nacrtaj dva različita pravokutnika čije su površine 16 cm^2.

5.2 Zadaci s ispita državne mature

Ispiti državne mature provode se od školske godine 2009./2010. i provodi ih Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja (NCVVO). Uspješnim polaganjem državne mature gimnazijalci završavaju srednjoškolsko obrazovanje, dok učenici ostalih četverogodišnjih škola moraju polagati državnu maturu ukoliko žele nastaviti svoje obrazovanje.

Ispit državne mature iz matematike koncipiran je na način da postoje dvije razine (osnovna i viša razina) i učenici prilikom prijave ispita odlučuju koju razinu žele pisati. Prilikom pisanja ispita iz matematike učenici dobivaju i *Knjižicu formula* u kojoj se nalaze formule za računanje površine likova (vidi sliku 5.1).

- Površina trokuta: $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$, $P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

  $P = \frac{ab \sin \gamma}{2}$, $P = \frac{abc}{4r_o}$, $P = r_u s$
- Jednakostraničan trokut: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $r_o = \frac{2}{3}v$, $r_u = \frac{1}{3}v$
- Površina paralelograma: $P = a \cdot v$
- Površina trapeza: $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$
- Površina kruga: $P = r^2\pi$
- Opseg kruga: $O = 2r\pi$
- Površina kružnoga isječka: $P = \frac{r^2\pi\alpha}{360°}$
- Duljina kružnoga luka: $l = \frac{r\pi\alpha}{180°}$

Slika 5.1: Knjižica formula: površina

Zadaci na ispitu državne mature u kojima učenici moraju računati površinu nekog lika nisu zadaci kao u udžbenicima već zahtjevaju malo više razmišljanja o načinu rješavanja. To svakako ima smisla jer su učenicima sve formule zapravo dane i ne može se provjeravati znanje formule već primjena ispravne formule u pojedinom zadatku.

Sada ćemo navesti nekoliko zadataka u kojima je potrebno računati površina lika. Zadaci su s ljetnih rokova ispita državne mature koji su provedeni od školske godine 2019./2020. naovamo nakon što je uveden novi kurikulum. Svi provedeni ispiti državne mature mogu se pronaći na stranici *Nacionalnog centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja* (vidi [7]).

Zadatak 1: (2019./2020., osnovna razina, zadatak 26.1.)

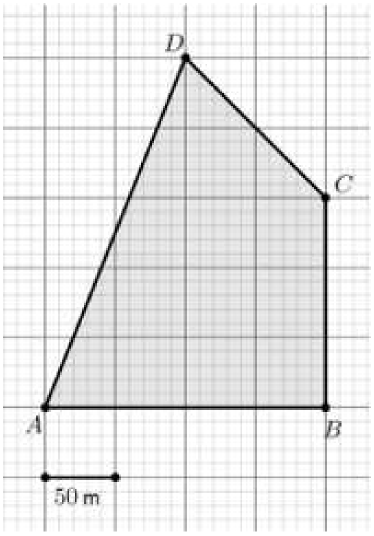
Na zemljištu pravokutnog oblika uzgajaju se rajčice tako da na svakome kvadratnom metru raste 6 sadnica. Ukupno je posađeno 1620 sadnica. Ako je duljina zemljišta za 10.5 metara veća od širine, kolika je širina zemljišta?

Zadatak 2: (2019./2020., osnovna razina, zadatak 28.3.)

Park prikazan na skici ima oblik pravokutnog trokuta površine 4200 m^2*. Matija šeće uz rub parka od točke **A** preko točke **B** do točke **C** i prijeđe 190 m. Koliko bi metara prešao da je od točke **A** do točke **C** išao najkraćim putom?*

Zadatak 3: (2019./2020., viša razina, zadatak 25.1.)

U kvadratnoj je mreži prikazano zemljište u obliku četverokuta.



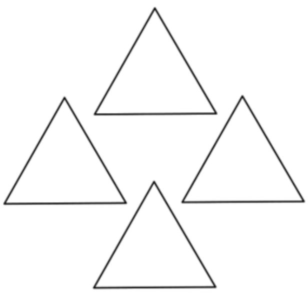
Koliko je vremena potrebno oraču da izore prikazano zemljište ako u pola sata prosječno izore 5000 m^2 zemljišta?

Zadatak 4: (2019./2020., viša razina, zadatak 30.)

Zadan je pravokutni trokut s katetama duljine 20 cm i 21 cm. Koliki je postotak površine trokuta prekriven krugom kojemu je središte u vrhu pravoga kuta toga trokuta i kojemu je polumjer 16 cm?

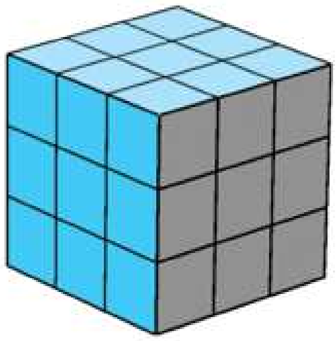
Zadatak 6: (2020./2021., osnovna razina, zadatak 15.)

Cvjetnjak se sastoji od četiriju dijelova u obliku jednakostraničnih trokuta kao što je prikazano na slici. Ukupna površina cvjetnjaka iznosi 5 m^2. Koliko je ukupno metara ograde potrebno za ograđivanje svih dijelova cvjetnjaka ako se svaki dio cvjetnjaka ograđuje zasebno?



Zadatak 7: (2021./2022., viša razina, zadatak 20.)

Koliko je oplošje Rubikove kocke ako je volumen jedne kockice od kojih se ona sastoji 6.859 cm^3?



A. *149.29* cm^2

B. *185.19* cm^2

C. *194.94* cm^2

D. *584.82* cm^2

Komentari na zadatke:

U svim zadacima koje smo naveli, računanje površine samo je jedan korak u rješavanju zadatka i potrebno je dosta toga povezati kako bi se u konačnici došlo do točnog rješenja. Na prvi pogled nije jasno da se u svim ovim zadacima treba računati površina lika, no zadatak će biti ispravno riješen samo ako se iskoristi i točna formula za računanje površine određenog lika.

5.3 Zadaci s PISA istraživanja

PISA, odnosno Programme for International Student Assessment najveće je svjetsko istraživanje u obrazovanju koje je krajem 1990-ih godina Organizacija za ekonomsku suradnju i razvoj (OECD) pokrenula s ciljem prikupljanja međunarodno usporedivih podataka o znanju i kompetencijama petnaestogodišnjih učenika [9]. Republika Hrvatska u istraživanju sudjeluje od 2006. godine. Istraživanje se provodi svake tri godine, s iznimkom pandemijske 2021. godine kada je istraživanje odgođeno i održano je 2022.

godine. PISA istraživanjem se provjerava čitalačka, matematička i prirodoslovna pismenost učenika, a naši učenici su na ispitima ostvarili ispodprosječne rezultate.

Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje objavio je dokument pod nazivom *Primjeri PISA zadataka iz matematičke pismenosti: testovi "papir-olovka" (PISA 2000, PISA 2003, PISA 2012) [6]* u kojem se nalaze primjeri zadataka iz područja matematičke pismenosti te u nastavku slijede zadaci u kojima je bilo potrebno računati površinu likova.

Zadatak (iz [6, str. 16]): Površina kontinenta

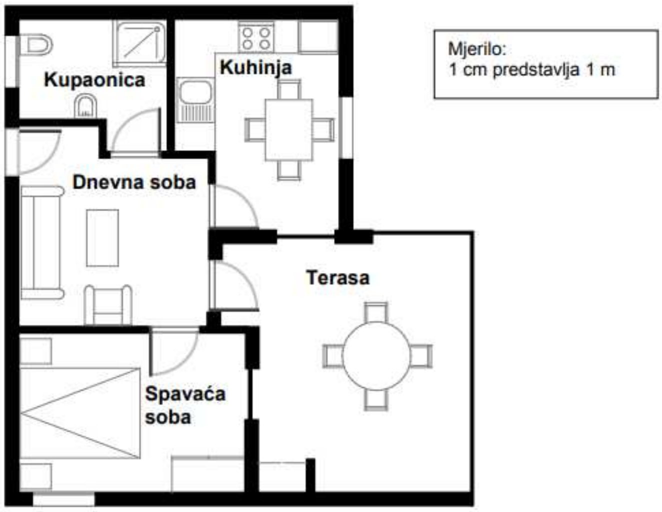
Ovo je karta Antartike:

Pitanje 1:

Procijeni površinu Antartike uz pomoć mjerila na karti. Prikaži postupak izračunavanja i objasni kako si došao/la do procjene (možeš crtati po karti ako će ti to pomoći procjenjivanju).

Zadatak (iz [6, str. 78]): Kupnja stana

Ovo je tlocrt stana koji Goranovi roditelji žele kupiti od jedne agencije za prodaju nekretnina:

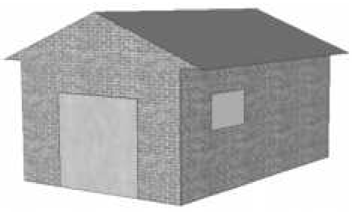


Pitanje 1:

Da bi procijenio/la ukupnu površinu stana (uključujući terasu i zidove), možeš izmjeriti veličinu svake prostorije, izračunati površinu svake od tih prostorija te zbrojiti sve površine. Međutim, postoji mnogo učinkovitija metoda za procjenu ukupne površine kod koje moraš izmjeriti samo 4 dužine. Označi na gornjem tlocrtu četiri dužine koje su potrebne za procjenu ukupne površine ovoga stana.

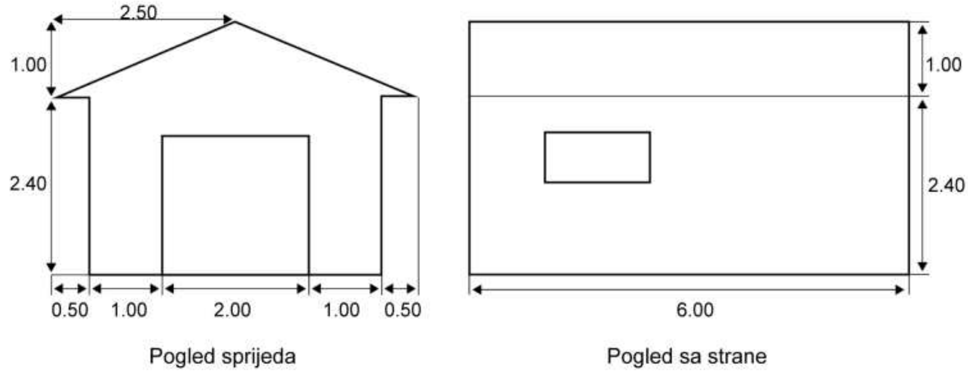
Zadatak (iz [6, str. 129]): Garaža

"Osnovni" asortiman jednog proizvođača garaža obuhvaća modele garaža sa samo jednim prozorom i jednim vratima. Juraj je odabrao donji model iz "osnovnog" asortimana. Ovdje je prikazan položaj prozora i vrata:



Pitanje 2:

Donja dva nacrta prikazuju dimenzije garaže (u metrima) koju je Juraj odabrao:



Krov se sastoji od dvije potpuno jednake pravokutne ploče. Izračunaj ukupnu površinu krova. Prikaži postupak izračunavanja.

Komentari na zadatke:

U svim zadacima potrebno je znati formule za računanje površine likova kako bi se došlo do konačnog rješenja. U zadatku *Površina kontinenta* učenici sami odabiru lik pomoću kojeg će procijeniti površinu kontinenta na način da nacrtaju lik, odrede duljine koje su im potrebne za računanje površine pomoću odabrane formule te na kraju zapišu rezultat. Stan iz zadatka *Kupnja stana* podsjeća na nepravilni mnogokut kojemu učenici trebaju odrediti neke od vanjskih mjera kako bi izračunali površinu stana. Za računanje površine opet trebaju iskoristiti formulu za računanje površine pravokutnika. U zadatku *Garaža* učenici uz primjenu Pitagorinog poučka dobivaju jednu od dvije stranice pravokutnika kojemu trebaju izračunati površinu opet po formuli za računanje površine pravokutnika.

Na kraju možemo zaključiti kako zadaci nisu osmišljeni na način da učenici samo uvrste poznate vrijednosti u formulu za površinu, već moraju doći do veličina koje su im potrebne za prikladnu formulu za računanje površine lika koje se opet moraju sami sjetiti. Zadaci provjeravaju sposobnost logičnog zaključivanja i primjene znanja naučenog tijekom osnovnoškolskog obrazovanja.

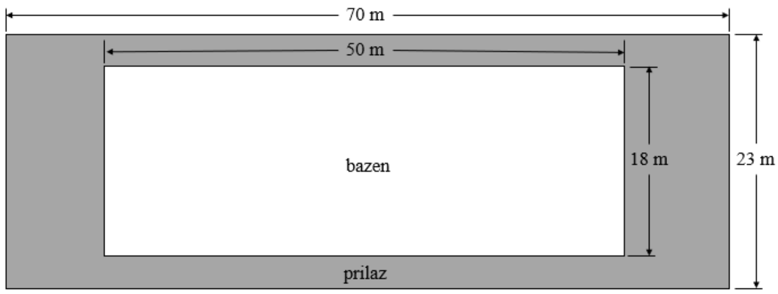
5.4 Zadaci s TIMSS istraživanja

Istraživanje TIMSS – međunarodno istraživanje trendova u znanju matematike i prirodoslovlja (Trends in International Mathematics and Science Study) provodi se u sklopu organizacije IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement – Međunarodno udruženje za vrednovanje obrazovnih postignuća) [8]. Istraživanjem se mjere postignuća na područjima matematike i prirodoslovlja učenika četvrtog i osmog razreda osnovne škole te učenika četvrtih razreda srednje škole. Učenici iz Republike Hrvatske sudjeluju u zadnja tri ciklusa istraživanja i svaki put postižu sve bolje rezultate, na zadnjem istraživanju postigli su iznadprosječne rezultate u oba područja.

Zadaci iz matematike podijeljeni su u tri sadržajne i tri kognitivne domene. Zadaci u kojima je potrebno računati površinu likova nalaze se u sadržajnoj domeni *Geometrijski likovi, geometrijska tijela i mjerenje.* Slijede primjeri zadataka iz dosadašnjih istraživanja.

Zadatak 1 (iz [10, str. 64]):

Oko bazena oblika pravokutnika postavljen je popločani prilaz kako je prikazano na skici.



Kolika je površina popločanog prilaza oko bazena?

A 100 m^2

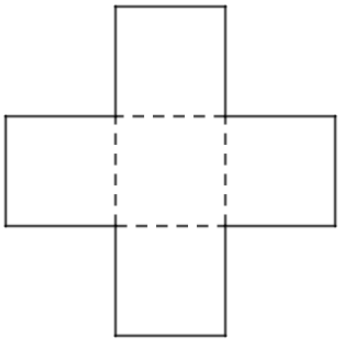
B 161 m^2

C 710 m^2

D 1610 m^2

Zadatak 2 (iz [10, str. 73]):

Lik se sastoji od 5 kvadrata jednake površine. Površina cijelog lika jednaka je 245 cm^2.

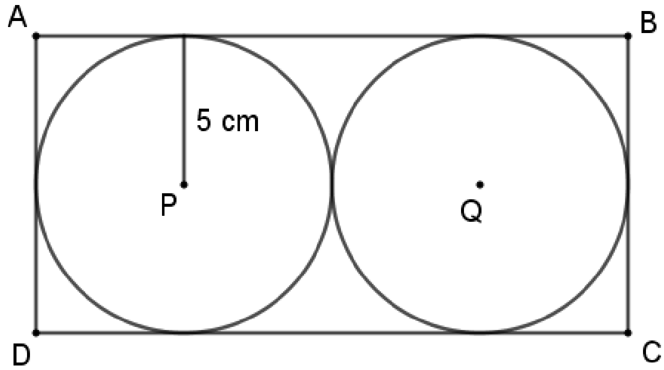


A. Odredi površinu jednog kvadrata.

B. Odredi duljinu jedne stranice kvadrata.

C. Odredi opseg cijelog lika.

Zadatak 3 (iz [10, str. 93]):



Na slici je prikazan pravokutnik $ABCD$, a krugovi oko središta P i Q imaju radijuse duljine 5 cm. Kolika je površina pravokutnika?

A 50 cm^2

B 60 cm^2

C 100 cm^2

A 200 cm^2

Komentari na zadatke:

Zadaci koji se pojavljuju na ispitima u sklopu TIMSS istraživanja težinom i načinom konstrukcije sličniji su zadacima koji se pojavljuju na ispitima državne mature iz matematike. Kao što je vidljivo i u ovih nekoliko zadataka, postoje zadaci višestrukog izbora koji se također nalaze i na ispitima državne mature. Kako bi učenici točno riješili zadatke moraju poznavati formule za računanje površine likova, ali isto tako u svakom zadatku ipak trebaju još neki podatak ili ideju kako uklopiti sve u ispravnu formulu.

5.5 Usporedba zadataka

Nakon što smo proanalizirali tipove zadataka iz udžbenika, s ispita državne mature te s PISA i TIMSS istraživanja možemo zaključiti sljedeće:

- Tipovi zadataka u udžbenicima različitih izdavača su dosta slični, razlika je samo u količini podzadataka, osnovni zadaci su zastupljeni u svim udženicima.
- Zadaci koji se pojavljuju na ispitima državne mature ne provjeravaju jesu li učenici zapamtili neku formulu, već provjeravaju jesu li učenici u mogućnosti odabrati ispravnu formulu te jesu li ju shvatili i znaju li ju primijeniti u zadatku.
- Zadaci s ispita državne mature imaju sličnosti sa zadacima s TIMSS istraživanja, kako u načinu konstrukcije zadatka tako i u samoj težini i kompleksnosti. Zbog toga ne treba čuditi iznadprosječan rezultat kojeg učenici iz Republike Hrvatske postižu na ispitima u sklopu TIMSS istraživanja.
- Zadaci s PISA istraživanja se razlikuju od zadataka koji se nalaze u udžbenicima. Zadaci s PISA istraživanja često nemaju jedinstven način rješavanja te učenici moraju razmišljati kako iskoristiti ono što im je ponuđeno da bi došli do rješenja. Znanje konkretne formule nije dovoljno, ako ne znaju kako doći do podataka koji su im za korištenje formule potrebni.

Bibliografija

[1] M. Balat, T. Brešćanski, L. Kralj, Lj. Peretin i M. Stepić, *Površina kruga i kružnog isječka*, https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/b504e46e-b7a7-4770-bcae-f6b108769a03/html/10622_Povrsina_kruga_i_kruznog_isjecka.html, posjećena 2022-07-17.

[2] B. Baranović, V. Domović, J. Matić, S. Puzić i V. Vizek Vidović, *Školski kurikulum: Teorijski i praktični aspekti*, Institut za društvena istraživanja, Zagreb, 2015.

[3] S. Barnaki, *Repetitorij matematike osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2013.

[4] I. Božić i T. Šikić, *UVOĐENJE POJMA ODREĐENOG INTEGRALA U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike **12** (2011), br. 48, 41–51.

[5] T. Buhiniček, *PIcKOvA FORMUlA*, Matka: časopis za mlade matematičare **22** (2014), br. 88, 231–233.

[6] Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje, *Primjeri PISA zadataka iz matematičke pismenosti: testovi "papir-olovka" (PISA 2000, PISA 2003, PISA 2012)*, https://pisa.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2018/05/Primjeri-PISA-zadataka_matemati%C4%8Dka-pismenost_papir-olovka.pdf, posjećena 2022-08-22.

[7] Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, *Provedeni ispiti*, https://www.ncvvo.hr/kategorija/drzavna-matura/provedeni-ispiti/, posjećena 2022-08-22.

[8] ———, *TIMSS*, https://www.ncvvo.hr/medunarodna-istrazivanja/timss/, posjećena 2022-08-22.

[9] ______, *Što je PISA?*, https://pisa.ncvvo.hr/sto-je-pisa/, posjećena 2022-08-22.

[10] TIMSS & PIRLS International Study Center, *TIMSS 2003 mathematics items, released set eighth grade*, https://timss.bc.edu/PDF/T03_RELEASED_M8.pdf, posjećena 2022-08-23.

[11] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik za 2. razred gimnazija i strukovnih škola (5 sati nastave tjedno), 2. dio*, Element, Zagreb, 2019.

[12] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović i S. Varošanec, *Matematika 5, udžbenik za 5. razred osnovne škole, 2. dio*, Element, Zagreb, 2019.

[13] ______, *Matematika 6, udžbenik za 6. razred osnovne škole, 1. dio*, Element, Zagreb, 2020.

[14] ______, *Matematika 7, udžbenik za 7. razred osnovne škole, 2. dio*, Element, Zagreb, 2020.

[15] D. Ilišević i M. Bombardelli, *Elementarna geometrija, skripta*, 2007, https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilisevic/Slike/EGskripta.pdf.

[16] P. Mladinić, *Površina likova u cjelobrojnoj mreži*, Matka: časopis za mlade matematičare **20** (2011), br. 77, 2–4.

[17] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina i N. Grgić, *Matematički izazovi 5, udžbenik sa zadacima za vježbanje iz matematike za 5. razred osnovne škole, 2. dio*, Alfa, Zagreb, 2019.

[18] A. Pletikosić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, R. Gortan i V. Vujasin Ilić, *Matematika 1, udžbenik matematike u prvom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje (5 sati nastave tjedno)*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[19] J.A. Van de Walle, K. Karp i J.M. Bay-Williams, *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Allyn & Bacon, 2010, ISBN 9780205573523, https://books.google.hr/books?id=w_zuAAAAMAAJ.

[20] D. Veljan i B. Pavkovic, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb (1992).

[21] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*, (2019), https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html.

[22] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić i M. Vuković, *Matematika 5, udžbenik iz matematike za 5. razred osnovne škole, 2. svezak*, Profil Klett, Zagreb, 2020.

Sažetak

Površina je veličina dijela ravne plohe koju zauzima neki lik. Učenici se s pojmom površine susreću u četvrtom razredu osnovne škole. Tijekom školovanja upoznaju formule za računanje površine mnogih likova. U prvom poglavlju objašnjen je koncept mjerenja u nastavi matematike, dok je u sljedećem dan vertikalan pregled otkrivanja formula za računanje površina likova. U trećem poglavlju nalaze se primjeri aktivnosti otkrivanja formula za računanje površina likova koje se mogu iskoristiti na nastavi matematike. U četvrtom poglavlju dokazane su neke od formula koje su spomenute u prethodnom poglavlju. Na samom kraju rada analizirani su zadaci koji se nalaze u udžbenicima te uspoređeni sa zadacima koji se pojavljuju na ispitima državne mature te u sklopu PISA i TIMSS istraživanja.

Summary

The area is the space taken up by a flat surface of an object. The students encounter the term area in the fourth grade of elementary school. During their schooling, they are getting to know mathematical formulas for different plane figure area calculations. The first chapter explains the concept of measuring in mathematics, while the following chapter gives vertical overview of plane figure area calculation formulas. The third chapter gives examples of activities for discovering formulas for plane figure area calculation that can be used in mathematics teaching. In the fourth chapter there is proof for some of the formulas mentioned in the previous chapter. The very end of the thesis gives analysis of the tasks found in the coursebooks and compares them to the tasks from Matura exams and PISA and TIMSS researches.

Životopis

Rođena sam 18. svibnja 1997. godine u Virovitici. U rodnom gradu pohađala sam Osnovnu školu Ivane Brlić-Mažuranić, a zatim prirodoslovno-matematički smjer u Gimnaziji Petra Preradovića. Godine 2016. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematike, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2020. upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematike, smjer nastavnički na istom fakultetu.