Analogija u geometriji

Colussi, Mateja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Mateja Colussi

ANALOGIJA U GEOMETRIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Matiji Bašiću na stručnim savjetima, strpljenju, potpori i vodstvu pri izradi ovog diplomskog rada.
Veliko hvala i ostalim profesorima koji su proširili znanje, približili apstraktni dio matematike te ostavili poseban utisak.
Hvala svim kolegicama i kolegama te prijateljicama i prijateljima koji su studiranje učinili zabavnijim i bezbolnijim.
Igore, hvala ti što si bio uz mene i ispratio me u samoj završnici ovog puta.
Veliko hvala mojoj dragoj obitelji, posebno roditeljima Marini i Umbertu, sestri Maji, nećaku Mihaelu, šogoru Mateju te baki Jeleni i djedu Juraju. Hvala na svoj ljubavi, bezuvjetnoj podršci, toplim riječima i vjeri u moj uspjeh. Bez vas ne bih bila to što jesam!

Sadržaj

Uvod

”Matematičar je čovjek koji umije naći analogije među tvrdnjama, bolji matematičar je onaj koji pronalazi analogije među dokazima, najbolji matematičar je onaj koji uočava analogije teorija, no može se zamisliti i onaj koji među analogijama vidi analogije.”

Stefan Banach [17]

Analogija je riječ koja je nezaobilazna u rječniku jednog matematičara ili dokazu neke tvrdnje. Svatko se od nas barem jednom susreo s tom riječi u nekom kontekstu, bilo to na nastavi matematike ili u običnom društvu. Ona prožima cijelo naše mišljenje, svakidašnji govor, umjetničko stvaralaštvo, ali i visoka znanstvena istraživanja.

U ovom diplomskom radu bavit ću se analogijom u svakodnevnom životu i matematici, a posebni naglasak staviti na analogiju u geometriji, koja je i glavna tema ovog diplomskog rada. Govorit ću o lažnoj i krivoj te pravoj analogiji i davati razne primjere. Riječ će biti i o odnosu analogije i ostalih oblika mišljenja ili zaključivanja, a pokoju riječ posvetit ću Leonhardu Euleru, matematičaru kojeg se smatra ocem analogije.

U prvom poglavlju opisat ćemo pojam analogije u jeziku svakodnevnog života, njenu važnost u matematici i vezu s ostalim oblicima zaključivanja. Dat ćemo razne primjere lažne i prave analogije te ukratko opisati bibliografija i značaj matematičara Leonharda Eulera. U drugom poglavlju opisat ćemo važnost analogije u geometriji i dati razne primjere iz školske matematike. U trećem poglavlju stavit ćemo naglasak na analogiju u nastavi matematike, učeničke miskoncepcije i važnost upotrebe tehnologije. Za kraj ćemo dati tri aktivnosti za neke od primjera iz drugog poglavlja u kojima učenici mogu uočiti analogije iz više područja školske geometrije te koje se mogu provesti na satu matematike.

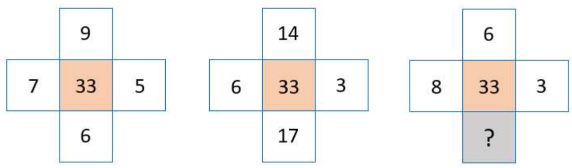
Poglavlje 1

Analogija

U ovom poglavlju opisujemo što sve pojam analogije može značiti i zbog čega je važan alat u matematičkom zaključivanju. Poglavlje započinjemo kratkim tekstom o pojmu analogije i povijesnom crtom o Leonhardu Euleru, matematičaru kojeg se smatra ocem analogije.

1.1 Što je analogija?

Zaključivanje na temelju analogije javlja se kako u matematici, tako i u običnom jeziku svakodnevnog života. Analogija označava da smo uočili sličnost između nekih objekata i na temelju te sličnosti zaključili da objekti imaju još neka zajednička svojstva. Sljedeći primjer pokazuje da nije uvijek jednostavno uočiti sličnost između objekata ili pravilnost te da nas ponekad pravilo koje primijetimo ne mora nužno voditi na pravi zaključak.



Slika 1.1: Matematička zagonetka

Neki čitatelj rješenje zagonetke sa slike može pokušati pronaći pomoću operacije zbrajanja. Zbroji li sve brojeve oko srednjeg broja u prvom slučaju dobiva 27, a u drugom 40. Time se jasno ne vidi kako bi stvorio pravilo koje bi na analogan način od tih brojeva dalo 33. Stoga čitatelj mora potražiti drugačiju strategiju i uključiti druge računske operacije.

$$(9 \cdot 7) - (5 \cdot 6) = 63 - 30 = 33$$

$$(14 \cdot 6) - (3 \cdot 17) = 84 - 51 = 33.$$

Analognim razmišljanjem uspješno će doći do rješenja:

$$(6 \cdot 8) - (3 \cdot ?) = 33$$

$$48 - 3 \cdot ? = 33$$

$$3 \cdot ? = 15$$

$$? = 5.$$

No, tako možemo doći i do krivih zaključaka. Vrsta neformalne zablude ili tehnike uvjeravanja u kojoj činjenica da su dvije stvari slične u jednom pogledu dovodi do nevažećeg zaključka da moraju biti slične i u nekom drugom pogledu, nazivamo lažna analogija. Često se primjeri lažne analogije predstavljaju u obliku usporedbe ili metafore, a jedan od primjera je sljedeći: "*Stara izreka "ono što te ne ubije te ojača" je istinita. Stoga, uzimanje nesmrtonosnih doza otrova neće biti štetno za zdravlje.*" Ovo je primjer lažne analogije jer je stara izreka metafora o prevladavanju izazova u životu i učenju iz njih te se ona ne odnosi na moguće posljedice fizičkog oštećenja tijela.

Primjer 1.1.1. ***Kvadrat umnoška i kvadrat zbroja***
Učenici se još u osnovnoj školi upoznaju s pojmom potencije te pravilima kvadrata umnoška i kvadrata zbroja. Česti problemi s kojima se susreću kako učenici, tako i učitelji jest da djeca bez razmišljanja analogno primijene neko usvojeno svojstvo ili pravilo u trenutku kada to nije točno čime dobiju neispravno pravilo. Dobar primjer za to su kvadrat umnoška i kvadrat zbroja.
Kako bi se uopće izvelo pravilo za kvadrat umnoška, učenici trebaju usvojiti primjenu definicije potencije i svojstvo komutativnosti množenja:

$$(ab)^2 = ab \cdot ab = a \cdot a \cdot b \cdot b = a^2b^2.$$

Analognim postupkom može se izvesti i pravilo za umnožak tri i više faktora. Znajući to pravilo u skraćenom obliku $(ab)^2 = a^2b^2$, a ne imajući na umu definiciju potencije, većina učenika analogijom će primijeniti pravilo i na kvadrat zbroja. Točnije, zaključit će da je

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2,$$

što nije točno. Zbog toga je jako bitno usvojiti znanje i ne samo primijeniti analogiju, već dobro promisliti može li se to učiniti. Iako nas analogno zaključivanje ponekad dovodi do netočnih zaključaka, to ne umanjuje njenu važnost za proširivanjem ljudske spoznaje i promišljanja.

Osim matematike i običnog jezika, zaključivanje na temelju analogije javlja se i u raznim područjima ljudskog djelovanja, poput filozofije, prava i humanističkih znanosti. Na starogrčkom jeziku riječ *analogija* izvorno je značila proporcionalnost, odakle je shvaćena kao identičnost odnosa između bilo koja dva uređena para, matematičke prirode ili ne. Tako je Immanuel Kant u svom djelu *Kritika rasuđivanja* tvrdio da postoje potpuno isti odnos između dva potpuno različita objekta.

Analogiju su od antičkog doba proučavali i raspravljali filozofi, znanstvenici, teolozi i pravnici. Velika zasluga za njezino uvođenje i razvoj pripada Aristotelu, u čijim djelima igra veliku ulogu. Osim Aristotela, grčki filozof Platon također je koristio širi pojam analogije. Oni su analogiju vidjeli kao zajedničku apstrakciju. Analogni objekti nisu nužno dijelili odnos, već i ideju, obrazac, pravilnost ili filozofiju. Prihvatili su da se usporedbe, metafore i "slike" (alegorije) mogu koristiti kao argumenti, a ponekad su ih nazivali *analogijama*.

U srednjem vijeku došlo je do povećane upotrebe i teoretiziranja analogije. Rimski su pravnici već koristili analogno zaključivanje i grčku riječ *analogia*. U kršćanskoj teologiji prihvaćeni su analogni argumenti kako bi se objasnio Božji bitak i odgovorilo na pitanja "Tko je Bog?" i "Koje su njegove osobine?".

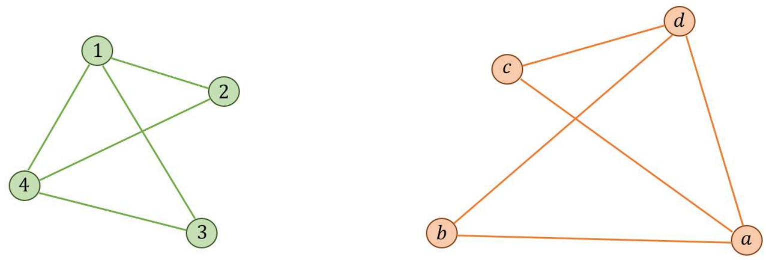
Promotrimo li suvremenije izvore, kako bi se analogija povezala s teorijom preslikavanja strukture u psihologiji i jezikom teorije kategorija u matematici potrebno je objasniti pojmove *izvor* i *cilj* za koje postoje dvije različite tradicije upotrebe [25]:

1. U kognitivnoj psihologiji, teoriji književnosti i u specijalizacijama unutar filozofije, a izvan logike, govori o preslikavanju s onoga što je poznatije područje iskustva (izvor) na ono što je problematičnije područje iskustva (cilj).

2. Logička, kulturalna i ekonomska tradicija govori o "strelici", homomorfizmu, preslikavanju ili morfizmu od onoga što je složenija domena (izvor) do onoga što je manje složena kodomena (cilj), koristeći riječi u smislu matematičke teorije kategorija.

Teorija preslikavanja strukture, koju je izvorno predložila američka psihologinja Dedre Gentner [27], teorija je u psihologiji koja opisuje psihološke procese uključene u zaključivanje kroz analogije i učenje iz njih. Točnije, ova teorija ima za cilj opisati kako se poznato znanje ili znanje o osnovnoj domeni može koristiti za informiranje pojedinaca o razumijevanju manje poznate ideje ili ciljne domene. Drugim riječima, na domenu se gleda kao da se sastoji od objekata, svojstava objekta i odnosa koji karakteriziraju način na koji objekti i njihova svojstva međusobno djeluju. Proces analogije zatim uključuje prepoznavanje sličnih struktura između dviju domena, zaključivanje daljnje sličnosti u strukturi preslikavanjem dodatnih odnosa osnovne domene prema ciljnoj domeni, a zatim provjeru tih zaključaka u odnosu na postojeće znanje o ciljnoj domeni.

Teorija kategorija je opća teorija matematičkih struktura i njihovih odnosa koju su uveli Samuel Eilenberg i Saunders Mac Lane sredinom 20. stoljeća. Danas se teorija kategorija koristi u gotovo svim područjima matematike te u nekim područjima računalne znanosti. Kategoriju čine morfizmi među objektima, koji povezuju izvor (domenu) i cilj (kodomenu). Često se kaže da je morfizam *strelica* koja svoj *izvor* preslikava na *cilj*. Morfizmi se mogu komponirati ako je cilj prvog morfizma jednak izvoru drugog te su često neka vrsta funkcije, ali ne uvijek. Drugi temeljni koncept kategorije je koncept funktora, koji igra ulogu morfizma između dvije kategorije, što je sličan koncept teoriji stukturnog preslikavanja analogije Dendre Gentnera. U matematici neke vrste analogija mogu imati preciznu matematičku formulaciju kroz koncept izomorfizma, bijektivnog preslikavanja dvije matematičke strukture iz jedne u drugu, što bi predstavljalo potpunu analogiju. U pojedinostima, to znači da s obzirom na dvije matematičke strukture istog tipa, analogija između njih može se smatrati bijekcijom koja čuva sve relevantne strukture. Primjer takve bijekcije/izomorfizma može se pronaći u teoriji grafova.



Slika 1.2: Grafovi s četiri vrha

Općenito, graf je struktura u kojoj je jedino važno koji vrhovi su spojeni. Tako, promatrajući grafove sa slike možemo zaključiti da su neovisno o izgledu dani grafovi isti. Vrh 1 na lijevom grafu odgovara vrhu d na desnom. Analogno se dođe do zaključka i za ostale vrhove: $2 \longrightarrow c$, $3 \longrightarrow b$ i $4 \longrightarrow a$.

Ibn Taymiyyah, Francis Bacon i kasnije John Stuart Mill [28] tvrdili su da je analogija samo poseban slučaj indukcije. Prema njihovom mišljenju, analogija je induktivni zaključak iz zajedničkih poznatih atributa na drugi vjerojatni zajednički atribut u sljedećem obliku:

Premise

a je A, B, C, D, E

b je A, B, C, D

Zaključak

b je vjerojatno E.

Ovo gledište, svodeći analogiju na indukciju, ne prihvaća analogiju kao autonomni način mišljenja ili zaključivanja. Oblik zaključivanja koji se zasniva na razmatranju jednog ili više, ali ne i svih pojedinačnih i posebnih slučajeva naziva se *nepotpuna indukcija*, dok se *potpuna indukcija* zasniva na razmatranju svih pojedinačnih i posebnih slučajeva. Zaključak izveden potpunom indukcijom uvijek je istinit, dok nepotpunom indukcijom može biti neistinit.

Matematika je općenito deduktivna znanost, a u nastajanju je induktivna. Indukcija je rasuđivanje od pojedinačnog k općem, to jest proces kojim se stvaraju generalizacije. Slabost potpune indukcije je u tome što ona ne razvija nove ideje i ne doprinosi u većoj mjeri obogaćivanju znanja, dok nepotpuna indukcija iziskuje veći kapacitet znanja kako bi se na temelju samo jednog ili više, ali ne svih slučajeva, donio valjani zaključak.

Ponekad se analogija koristi samo kako bi se istaknula sličnost. Takva analogija je nepotpuna i kod nje se treba posebno paziti prilikom donošenja zaključaka. Dobar primjer su 2D i 3D analogoni koji se razlikuju u dimenziji, ali se isticanjem sličnih svojstava dolazi do zaključka za još jedno slično svojstvo.

1.2 Leonhard Euler

Leonhard Euler švicarski je matematičar, fizičar i astronom, rođen u Baselu 15. travnja 1707. godine. Sin je protestantskog svećenika Paula Euler i Marguerite Brucker. Obrazovanje započinje u Baselu, a već sa svojih 14 godina upisuje fakultet. Godie 1723. Euler završava magisterij iz filozofije disertacijom u kojoj uspoređuje Descartesov i Newtonov rad.

Slika 1.3: Leonhard Euler

Kako je Johann Bernoulli [1] bio bliski prijatelj obitelji Euler, Euler ga je zamolio za privatnu poduku iz područja matematike. Tada Bernoulli ubrzo uočava Eulerov veliki po-

[1] Johann Bernoulli (1667. - 1748.) - švicarski matematičar; brat Jacoba Bernoullija

tencijal te uvjerava njegovog oca kako je matematika Eulerov poziv nakon čega započinje studirati matematiku.

Kada je 1733. godine Daniel Bernoulli [2] napustio mjesto glavnog profesora matematike na Akademiji u Sankt Peterburgu u želji da se vrati u Basel, Euler nasljeđuje njegovo mjesto. U to vrijeme, 1734. godine Euler se ženi Katharinom Gsell, kćerkom poznatog ruskog slikara. Zajedno su imali trinaestero djece, od kojih je samo petero preživjelo, a od njih troje nadživjelo oca. Jedino Eulerovo dijete koje se bavilo matematikom i bilo član *Akademije* bio je sin Johann Albrecht.

Do 1740. godine Euler stječe vrlo visoki ugled, osvojivši Veliku nagradu Pariške akademije 1738. i 1740. godine. Ugled mu je otvarao vrata Berlina, no on je htio ostati u Sankt Peterburgu. Međutim, zbog velikih političkih nemira u Rusiji, Euler prihvaća poziv pruskog kralja Fridrika II. Velikog za radno mjesto voditelja matematičkog odjela na *Akademiji znanosti* te seli s obitelji u Berlin. U 25 godina koje je proveo u Berlinu, Euler je napisao oko 380 znanstvenih članaka, čime ga se smatra jednim od najproduktivnijih matematičara u povijesti. Tijekom boravka na Berlinskoj akademiji Euler u potpunosti osjepljuje. Usprkos tome, zbog izvanredne sposobnosti pamćenja i velike motivacije, nastavlja svoj rad u matematici te u tom razdoblju nastaje više od polovice njegovih radova.

Godine 1766. Euler se vraća u Sankt Peterburg, gdje provodi ostatak svog života. Nakon toga, 1771. godine njegov dom uništila je vatra te u bijegu uspjeva spasiti sebe i nekoliko svojih rukopisa. Samo dvije godine kasnije umire mu žena. 18. rujna 1783. godine Euleru dolazi do izljeva krvi u mozak te on umire u sedamdesetsedmoj godini života. Sanktpeterburška akademija nastavlja objavljivati njegov rad još gotovo 50 godina nakon njegove smrti.

Euler se dugo vremena bavio matematičkom analizom, koja je bila glavno područje djelovanja matematičara 18. stoljeća. Upravo iz tog područja potječe njegovo najznačajnije djelo *Uvod u analizu beskonačnosti* iz 1748. godine. Rezultat koji je Euleru donio najveću slavu, a ujedno po čemu je bitan za temu ovog diplomskog rada, bilo je njegovo rješenje problema koji je kasnije poznat kao baselski problem. Problem se bavi pronalaskom zatvorenog oblika beskonačnog reda

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \ n \in \mathbb{N},$$

kojeg je postavio talijanski matematičar Pietro Mengoli [3] 1650. godine, a Jacob Bernoulli [4] jedan je od matematičara koji nije uspjevao pronaći rješenje. Godine 1735. Euler daje svoje rješenje do kojega je došao primjenom nove metode. On uvodi jednadžbu beskonačnog

[2] Daniel Bernoulli (1700. - 1782.) - švicarski matematičar, fizičar, botaničar i oceanograf

[3] Pietro Mengoli (1626. - 1686.) - talijanski matematičar i duhovnjak

[4] Jacob Bernoulli (1655. - 1705.) - švicarski matematičar; brat Johanna Bernoullija

stupnja i na nju primjenjuje svojstva algebarskih jednadžbi konačnog stupnja. Uspjeva dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \ n \in \mathbb{N},$$

čime problem rješava prijelazom od konačnog ka beskonačnom. Postupak se opravdava analogijom, metodom koja će kasnije postati važno sredstvo istraživanja. Izvod se temelji na "faktoriziranju funkcije" $\frac{\sin x}{x}$ pomoću nultočaka, po analogiji na faktoriziranje polinoma.

Euler je jedan od začetnika teorije funkcija kompleksne varijable. Dao je svoju definiciju eksponencijalne funckije e^x na skupu kompleksnih brojeva i povezao ju s trigonometrijskim funkcijama sinus i kosinus. Danas tu poveznicu nazivamo Eulerova formula, a ona izgleda ovako

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

iz čega slijedi i Eulerov identitet

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

koji se smatra jednom od najljepših jednakosti cijele matematike.

Osim matematičke analize, velika važnost pridaje mu se i u kombinatorici i topologiji. Najpoznatiji problem kojeg je riješio bio je "*Sedam mostova Königsberga*" Problem je glasio: "*Je li moguće prijeći preko svakog od mostova samo jednom i vratiti se na početnu točku?*". Neke od njegovih drugih doprinosa su Eulerova funkcija, Eulerovi brojevi, Eulerov pravac, Eulerova formula za homogene funckije, Eulerova formula za zakrivljenost plohe i drugi. Euleru dugujemo i cijeli niz modernih oznaka današnje matematike, poput: i za imaginarnu jedinicu, e za Eulerov broj, $f(x)$ standardni zapis realne funkcije, oznake Δ, sin, cos.

Euler je 1738. godine rješavao jednadžbu četvrtog stupnja $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ analogno Vièteovom načinom rješavanja jednadžbe trećeg stupnja $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Isto tako, poznata forumula koju je Euler otkrio 1752. godine, nastala je kao posljedica primjene zaključivanja po analogiji. U svoja dva znanstvena rada proučavao je problem vrijedi li formula za sumu kutova poligona sa n stranica koja glasi $(n-2)\pi$ analogno za poliedre. Kao rezultat dobiva novu hipotezu, danas poznatu kao Eulerova formula

$$V - B + S = 2,$$

gdje V predstavlja broj vrhova, B broj bridova, a S broj stranica poliedra. Upravo će o pojmu analogije i zaključivanju po analogiji biti više riječi u nastavku ovog diplomskog rada.

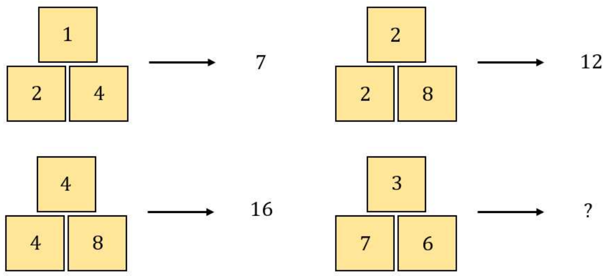
1.3 Analogija u matematici

Analogija (grč. *analogia* - razmjer, sklad, pravilnost, odnos, srodnost, podudarnost), u matematičkom smislu, posebni je oblik traduktivnog zaključivanja, to jest zaključivanja kod kojeg se iz dvaju ili više sudova određenog stupnja općenitosti dobiva novi sud istog stupnja općenitosti. Ona je jedna vrsta sličnosti, ali nije svaka sličnost analogija. Za analogiju je osim sličnosti potrebna i podudarnost objekata u određenim odnosima. Osim analogije, drugi oblici mišljenja ili zaključivanja su analiza i sinteza, apstrakcija i konkretizacija, specijalizacija i generalizacija te indukcija i dedukcija. U nastavku ovog potpoglavlja reći ćemo nešto više o analogiji kao načinu razmišljanja, podrobnije prikazati analogne objekte, svojstva i postupke, odnosno definicije, tvrdnje i dokaze te dati razne primjere. Kao teorijsku podlogu i važan izvor primjera koristila sam poglavlje *Analogija* knjige *Znanstveni okviri nastave matematike* profesora Zdravka Kurnika. [17]

Zaključivanje po analogiji

Zaključivanje po analogiji misaoni je postupak pri kojem se iz opažanja da se dva objekta podudaraju u određenom broju svojstava ili odnosa iznosi zaključak o njihovom podudaranju i u drugim svojstvima ili odnosima koji se kod jednog objekta nisu izravno opažali.

Očito je da zaključivanje po analogiji nije strogo niti jedinstveno. Podudaranje objekata u jednom dijelu svojstva ne mora nužno značiti njihovo podudaranje i u drugim svojstvima. Kao primjer toga možemo uzeti zadatke s testa inteligencije, psihotesta za vozački ispit ili neku matematičku zagonetku kakve često možemo vidjeti i na društvenim mrežama.



Slika 1.4: Matematička zagonetka

Zagonetka sa slike može se riješiti na više načina, a da se pritom analogijom postupka dobiju brojevi sa slike. Jedan pokušaj rješavanja može biti pomoću operacije zbrajanja. Zbroje li se brojevi u skupovima od po tri broja, dobiju se brojevi prikazani na slici. Analognim razmišljanjem dolazi se do jednog mogućeg rješenja:

$$3 + 7 + 6 = 10 + 6 = 16.$$

Drugi mogući pokušaj rješavanja, kojim se dolazi do rješenja uključuje druge računske operacije.

$$(2 \cdot 4) - (1 \cdot 1) = 8 - 1 = 7$$
$$(4 \cdot 8) - (4 \cdot 4) = 32 - 16 = 16$$
$$(2 \cdot 8) - (2 \cdot 2) = 16 - 4 = 12$$

Analognim razmišljanjem dolazi se do drugog mogućeg rješenja:

$$(7 \cdot 6) - (3 \cdot 3) = 42 - 9 = 33.$$

Općenito, u matematici se zaključivanje po analogiji može provoditi u odnosu na svojstvo ili pravilo te postupak ili dokaz. Svojstvima na primjer pripadaju komutativnost i asocijativnost u aritmetici ili sukladnost i sličnost u geometriji. Primjenom svojstava mogu se definirati razni matematički objekti, to jest apstraktni pojmovi. Matematika je znanost koja proučava razne postupke i objekte, a koji su prema određenoj srodnosti i unutarnjoj strukturi razvrstani u skupove. To su brojevi, relacije, funkcije, jednadžbe, likovi i tijela i drugi. Možemo uočiti kako su pojmovi u matematici u srodstvu i velikoj povezanosti te ih je teško izolirano promatrati. Objekte zadajemo definicijama, a njihova svojstva dalje istražujemo, opisujemo teoremima i dokazujemo. Dokaz je konačan niz tvrdnji, pri čemu je svaka tvrdnja izvedena logično iz prethodnih tvrdnji ili korištenjem već dokazano istinitih tvrdnji. Postupak u matematici može biti algoritam, konstrukcija ili neki drugi niz koraka koje slijedimo, a u čijoj pozadini postoji opravdanje ili teorija kojom će ono što radimo rezultirati željenim ishodom. Budući da su dokazi i postupci opisani kao niz zaključaka/radnji, promatrat ćemo ih na istoj razini. Slično, na istoj ćemo razini promatrati tvrdnje o svojstvima objekata (definicije kojima ih zadajemo ili teoreme koje izvodimo) i pravilnostima o odnosima među objektima. Stoga, možemo reći da zaključivanje po analogiji promatramo na dvije razine. Na jednoj razini ćemo promatrati analogne tvrdnje (definicije, svojstva, pravila), a na drugoj analogne postupke (procese, dokaze, argumentacije) i tvrdnje koje proizlaze na temelju tih postupaka. Kao što smo već spominjali, na prvoj razini moguće je da analogija bude nepotpuna (neosnovana), dok se na drugoj razini samo moramo uvjeriti zašto je dozvoljeno provesti analogni postupak i to garantira da će izvedene tvrdnje biti istinite. U nastavku donosimo još neke primjere.

Analogna svojstva i pravila

U ovom potpoglavlju dat ćemo nekoliko primjera svojstava i pravila te definicija objekata koji se u paru s drugim objektom zbog svojih svojstva mogu definirati primjenom analogije. Bitno je naglasiti da primjenom analogije od ispravnog svojstva ne moramo dobiti ispravno svojstvo, dok definicije primjenom analogije mogu biti besmislene i kontradiktorne. Ključno je uvijek provjeriti sva potrebna svojstva kako bismo se u potpunosti uvjerili da se analogija može primijeniti. U sljedećim primjerima bit će prikaz dobrog i pravilnog korištenja analogije kojim dobivamo ispravno svojstvo ili smislenu definiciju.

Primjer 1.3.1. ***Vièteove formule za kvadratni i kubni polinom***
Opća kvadratna jednadžba oblika $ax^2+bx+c=0$, gdje su koeficijenti a, b i c realni brojevi i $a \neq 0$ ima dva rješenja x_1 i x_2 oblika:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Zbrojimo li rješenja kvadratne jednadžbe dobivamo:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}.$$

Pomnožimo li rješenja kvadratne jednadžbe, dobivamo:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Dakle, za rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$, vrijede formule:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Navedene formule poznate su pod nazivom *Vièteove formule*. Primjenom analogije naslućujemo da bi za rješenja x_1, x_2 i x_3 kubne jednadžbe $ax^3+bx^2+cx+d=0$, gdje su koeficijenti a, b, c i d realni brojevi i $a \neq 0$, mogao vrijediti sljedeći analogon Vièteovih formula:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{-b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 &= \frac{c}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= \frac{-d}{a}. \end{aligned}$$

Uspoređivanjem koeficijenata u dvama zapisima kubne jednadžbe

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

točnije izjednačavanjem općeg i faktoriziranog zapisa, lako se utvrđuje valjanost formula.

U idućem primjeru vidjet ćemo kako analogijom s lakoćom možemo definirati pojam hiperbole ako dobro definiramo pojam elipse i njena svojstva.

Primjer 1.3.2. ***Definicija elipse i hiperbole***
Za početak, definiramo elipsu:

Definicija 1.3.3. *Neka su u ravnini π dane dvije različite točke, F_1 i F_2 te pozitivan realan broj a uz uvjet $2a > d(F_1, F_2)$. Elipsa E s fokusima (ili žarištima) u točkama F_1 i F_2 i velikom osi duljine $2a$ skup je svih točaka T u ravnini za koje je zbroj udaljenosti do fokusa F_1 i F_2 jednak $2a$.*
Skraćeno pišemo:

$$E = \{T \in \pi : d(F_1, T) + d(F_2, T) = 2a\}.$$

Analogno, definiramo i hiperbolu:

Definicija 1.3.4. *Neka su u ravnini π dane dvije različite točke, F_1 i F_2 i pozitivan realan broj a uz uvjet $2a < d(F_1, F_2)$. Hiperbola H s fokusima (ili žarištima) u točkama F_1 i F_2 i velikom osi duljine $2a$ je skup svih točaka T u ravnini za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti do fokusa F_1 i F_2 jednak $2a$.*
Skraćeno pišemo:

$$H = \{T \in \pi : |d(f_1, T) - d(f_2, T)| = 2a\}.$$

Uočimo da je jedina razlika u definiciji što kod elipse vrijedi da je zbroj udaljenosti fokusa jednak velikoj osi, dok se kod hiperbole ta vrijednost postiže za apsolutnu vrijednost razlike udaljenosti fokusa.

Analogni postupci i dokazi

Osim uočavanja sličnih objekata i postavljanja pretpostavki prenošenjem svojstava s jednog objekta na drugi, važni su i postupci i dokazi. Postupci su bitni jer određenim postupcima ili algoritmima učenici rješavaju zadatke i nadograđuju svoje znanje. Primjenom nekih postupaka učenici trebaju znati i teorijsku pozadinu kako bi u potpunosti znali primijeniti postupak. Kroz vježbu na nastavi ili za domaću zadaću učenici na analogni ili vrlo sličan način primjenjuju postupke naučene na nastavi. Zbog toga se analogija treba njegovati još od nižih razreda osnovne škole jer ona omogućuje aktivnije sudjelovanje učenika i bolje usvajanje gradiva.

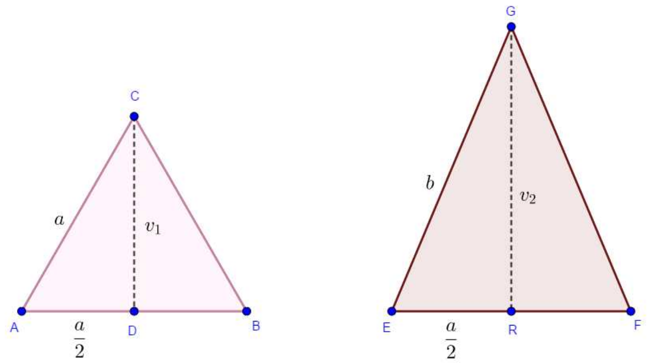
Primjer 1.3.5. ***Visina jednakostraničnog i jednakokračnog trokuta***
Pitagorin poučak često se koristi za izvođenje mnogih formula objekata u planimetriji i stereometriji u kojima okomitost i pravokutni trokut igraju ključnu ulogu. Poučak možemo primjeniti i u izvodu formule za visinu u jednakokračnom, odnosno jednakostraničnom trokutu. Za početak prisjetimo se kako glasi Pitagorin poučak.

Teorem 1.3.6. *Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama tog trokuta, to jest*

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

gdje je c hipotenuza, a a i b katete pravokutnog trokuta.

Formule $v_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ i $v_2 = \frac{1}{2}a\sqrt{4b^2 - a^2}$, gdje je a duljina osnovice trokuta i b duljina kraka, za duljine visina jednakostraničnog i jednakokračnog trokuta izvode se analogno korištenjem Pitagorinog poučka.



Slika 1.5: Jednakostranični i jednakokračni trokut

Dokaz. Neka je zadan jednakokračni trokut EFG s duljinom a osnovice i b krakova. Iz vrha G spustimo visinu v_2 na stranicu $\overline{EF}$. Neka je točka R nožište te visine. Promatrajmo pravokutni trokut ERG, kojemu je stranica $\overline{EG}$ hipotenuza, a $\overline{ER}$ i $\overline{RG}$ katete. Označimo duljine stranica $\overline{ER}$, $\overline{RG}$ i $\overline{EG}$ redom $\frac{a}{2}$, v_2 i b. Tada primjenom Pitagorinog poučka na spomenuti trokut dobivamo

$$b^2 = {v_2}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Longrightarrow {v_2}^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Longrightarrow v_2 = \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4}}$$

$$\Longrightarrow v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Kako je jednakostranični trokut poseban slučaj jednakokračnog trokuta, analognim postupkom može se doći do formule za njegovu visinu. Potrebno je uočiti da će krak b u izvodu formule biti jednak duljini osnovice a, što će činiti jedinu razliku u postupku. Točnije, formulu za duljinu visine jednakostraničnog trokuta možemo dobiti uvrštavanjem a umjesto b u formulu za visinu jednakokračnog trokuta. To je postupak specijalizacije, još jedan od načina zaključivanja kada se promatra poseban slučaj.

Primjer 1.3.7. ***Euklidov algoritam***
Jedan od najpoznatijih algoritama u školskoj matematici je takozvani Euklidov algoritam, to jest postupak za računanje najvećeg zajedničkog djelitelja. Ako su a i b cijeli brojevi takvi da je $a \neq 0$ i ako postoji cijeli broj d takav da je $b = a \cdot d$, onda kažemo da *a dijeli b* ili da je *b djeljiv s a* i pišemo $a|b$. Inače, $a \nmid b$. Broj d nazivamo *zajednički djelitelj* cijelih brojeva a i b ako $d|a$ i $d|b$, a najveći među svim djeliteljima *najveći zajednički djelitelj* i označavamo s (a, b), $NZD(a, b)$ ili $M(a, b)$. U algoritmu se koristi teorem iz elementarne teorije brojeva, poznatiji pod nazivom *Teorem o dijeljenju s ostatkom*, a glasi ovako: *Neka su $a, b \in \mathbb{N}$ i $a \neq 0$. Tada postoje jedinstveni $q, r \in \mathbb{Z}$ takvi da je*

$$b = aq + r, \quad 0 \leq r < a.$$

Spomenuti teorem koristi se više puta i u svakom se idućem koraku primjenjuje na broj kojim se dijelilo te na ostatak koji se dobio. Prikažimo na konkretnom primjeru kako primjenjujemo Euklidov algoritam: *Odredimo najveći zajednički djelitelj brojeva 1870 i 1023*.

$$1870 = 1 \cdot 1023 + 847,$$

$$1023 = 1 \cdot 847 + 176,$$

$$847 = 4 \cdot 176 + 143,$$

$$176 = 1 \cdot 143 + 33,$$

$$143 = 4 \cdot 33 + 11,$$

$$33 = 3 \cdot 11 + 0.$$

Najveći zajednički djelitelj brojeva 1870 i 1023 je 11, to jest $NZD(1870, 1023) = 11$. Općenito, najveći zajednički djelitelj bit će jednak posljednjem ostatku različitom od nule. Za potrebe ovog diplomskog rada, dokaz spomenutog teorema nećemo prikazati, niti algoritam zapisati općenito i dokazati. Slično provodimo u školi na satu matematike, na kojem učenici shvaćaju algoritam na temelju primjera i primjenjuju ga u drugim primjerima po analogiji. Tu vidimo da je analogija vrlo moćan alat u razmišljanju jer nam omogućava da dođemo do rezultata, iako nismo dali općenite upute koje su apstraktne i komplicirane za izreći.

Kroz sljedeća dva primjera moći ćemo vidjeti koliko nam analogno zaključivanje skraćuje postupak dokazivanja.

Primjer 1.3.8. ***Poučak o sinusima***
Poučak o sinusima prvi se puta spominje u drugom razredu srednje škole, kada učenici iskazuju teorem i dokazuju ga na više načina. Prikazat ćemo dva dokaza istog teorema u kojima je potrebna trigonometrija pravokutnog trokuta te će se razlikovati u elementima koji se promatraju (visina trokuta ili promjer trokutu opisane kružnice kroz vrh trokuta).

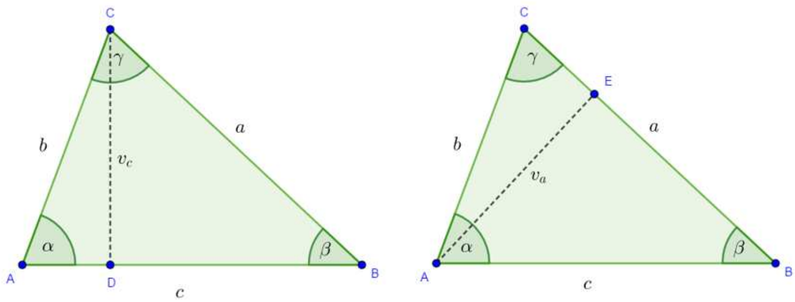
Teorem 1.3.9. *Neka je dan trokut ABC. Ako su a, b i c duljine njegovih stranica, a α, β i γ redom veličine odgovarajućih unutarnjih kutova nasuprot tih stranica, tada vrijedi sljedeća jednakost*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Dodatno, u svakom su trokutu omjeri duljina stranica i vrijednosti sinusa tim stranicama nasuprotnih kutova jednaki promjeru $2R$ trokutu opisane kružnice, to jest

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Dokaz. Neka je dan šiljastokutni trokut ABC i šiljasti kutovi α, β i γ. Iz vrha C povučemo visinu v_c na stranicu $\overline{AB}$. Neka je nožište te visine točka D.



Slika 1.6: Šiljastokutni trokuti - prvi dokaz

Kako je α šiljasti kut, tada iz pravokutnog trokuta ADC vidimo da je

$$\sin\alpha = \frac{v_c}{b},$$

odnosno

$$v_c = b \cdot \sin\alpha.$$

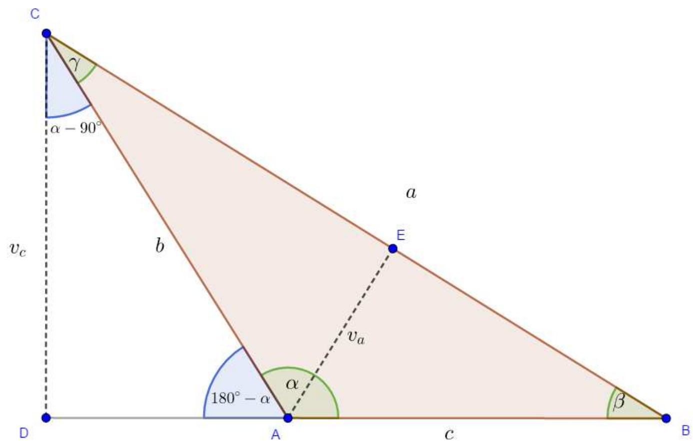
Iz trokuta DBC analogno slijedi $\sin\beta = \frac{v_c}{a}$, to jest $v_c = a \cdot \sin\beta$.
Izjednačimo

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \Longrightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Potpuno analogno, pokaže se jednakost za stranice b i c te pripadne kutove. Uloge stranica a i c su potpuno ravnopravne pa na svim mjestima gdje su a i α pišemo oznake c i γ. Prema tome, u trokutu vrijedi *poučak o sinusima*:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Prvi dokaz ovog teorema proveden je za šiljastokutni trokut jer se za tupokutni trokut on provodi na vrlo sličan način uz dodatni oprez oko označavanja kutova.

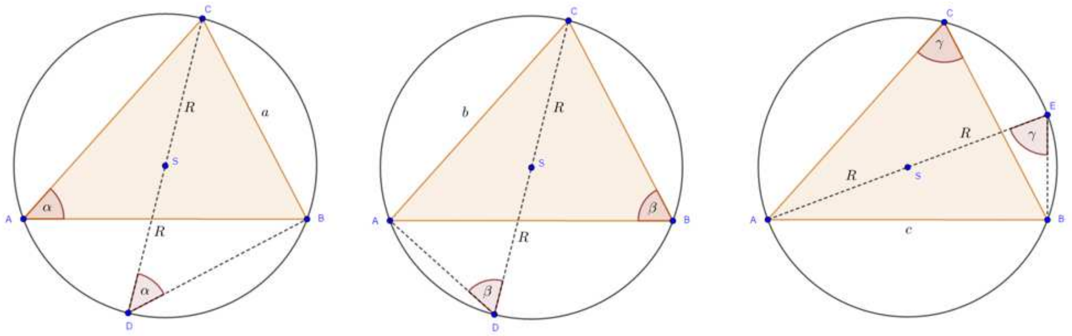


Slika 1.7: Tupokutni trokut

Pogledamo li sliku, lako se uoči da se dokaz provodi u potpunosti analogno za šiljaste kutove β i γ. Za potrebe dokaza, promatrat će se pravokutni trokuti BEA i AEC te iz njih izraziti visina v_a. Izjednačavanjem dobit će se izraz $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Ono što će činiti razliku jest sinus tupog kuta α. U pravokutnom trokutu CDA uočimo da je kut pri vrhu A jednak $180° - \alpha$, a sinus tog kuta $\frac{v_c}{b}$. Prema definiciji je $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, a prema tome $\sin\alpha = \frac{v_c}{b}$. Promatrajući pravokutni trokut CDB, sinus kuta β jednak je $\frac{v_c}{a}$ pa izjednačavanjem izražene visine v_c iz obje formule dobivamo izraz $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, čime je teorem dokazan.

Prikažimo drugi dokaz ovog teorema:

Dokaz. Neka je dan šiljastokutni trokut ABC i središte S tom trokutu opisane kružnice.



Slika 1.8: Šiljastokutnom trokutu opisana kružnica - drugi dokaz

Uočimo promjer kružnice kojem je jedna krajnja točka točka C, a druga točka D. Kutovi pri vrhovima A i D su obodni kutovi nad istim lukom kružnice $\overset{\frown}{BC}$. Prema poučku o obodnim kutovima nad istim lukom ti su kutovi jednaki i imaju mjeru α.
Nadalje, prema Talesovom poučku o obodnom kutu nad promjerom kružnice kut $\angle DBC$ je pravi. Tada primjenom trigonometrije na pravokutni trokut $\triangle DBC$ slijedi $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, odnosno $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. Analogno se dokaže i za preostale stranice i kutove:

$$\sin\beta = \frac{b}{2R} \implies 2R = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\sin\gamma = \frac{c}{2R} \implies 2R = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Tada slijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Na oba smo načina koristili analogiju te oba pokazuju kako analogno zaključivanje dovodi do konceptualno jasnijeg razumijevanja i dokazivanja tvrdnji.

Primjer 1.3.10. ***Je li broj racionalan ili iracionalan?***
Općenito, broj je iracionalan ako ima beskonačni neperiodični decimalni zapis ili ako se ne može zapisati u obliku razlomka $\dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Pokažimo na primjeru $\sqrt{2}$ kako se na nastavi matematike provodi dokaz da je neki broj iracionalan te se uvjerimo da analogno možemo dokazati da je neki drugi broj također iracionalan.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\sqrt{2}$ racionalan. To znači da postoje prirodni brojevi m i n za koje vrijedi da je

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Odredimo brojeve m i n takve da je razlomak $\frac{m}{n}$ potpuno skraćen. Kvadriranjem dobivamo

$$2n^2 = m^2,$$

iz čega zaključujemo da je broj m^2 djeljiv s 2. Ako je m^2 djeljiv s 2, onda je i m djeljiv s dva pa zapisujemo

$$m = 2k, \ k \in \mathbb{N}.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$\begin{aligned} 2n^2 &= (2k)^2 \\ 2n^2 &= 4k^2 \\ n^2 &= 2k^2. \end{aligned}$$

Ponovno možemo zaključiti da je broj n^2 djeljiv s 2. Ako je n^2 djeljiv s 2, onda je i n djeljiv s 2. Zaključili smo da su m i n djeljivi s 2, što znači da razlomak $\frac{m}{n}$ nije skraćen do kraja. To je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, broj $\sqrt{2}$ je iracionalan.
Analognim dokazom došli bismo do istog zaključka za broj $\sqrt{3}$ ako ispravno provedemo analogiju, gdje bi jedina razlika bila u tome što bismo broj 2 u dokazu zamijenili brojem 3. Isto bismo tako napravili i za bilo koji broj $\sqrt{p}$, gdje je p prost broj.

U idućem potpoglavlju reći ćemo nešto više o poveznici analogije i generalizacije, odnosno kako primjenom analognog načina razmišljanja i induktivnim zaključivanjem možemo doći do poopćenog oblika nekog pravila.

1.4 Analogija i generalizacija

Generalizacija (lat. *generalisatio* - poopćavanje, uopćavanje, uopćenitost; lat. *generalis* - općenit, opći, glavni, sveobuhvatan) jedna je od osnovnih znanstvenih metoda istraživanja. Prijelaz je to s razmatranja danog skupa objekata na odgovarajuće razmatranje njegova nadskupa. Polazi se od nekog pojma kojemu je pridružen određeni skup objekata, njegov opseg i ustanovljuje neko svojstvo svih elemenata zadanog skupa. Zatim se promatra općenitiji pojam i svojstvo prenosi na sve elemente dobivenog nadskupa ili se izgrađuje općenitije svojstvo. Budući da odmah nije jasno hoće li pri tome prenošenju svojstvo ostati sačuvano, to se ono za sve elemente nadskupa nužno mora dokazati. Prema tome, generalizacija ili poopćavanje je metoda kojom se izgrađuju općenitiji pojmovi i općenitije tvrdnje.

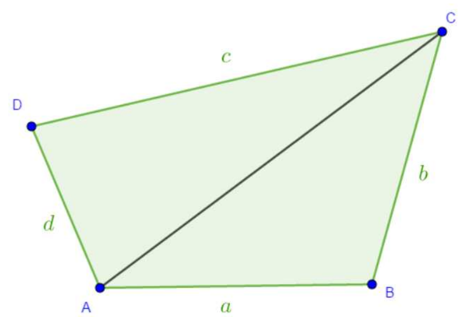
Osnova joj je induktivni način razmišljanja, zaključivanje od pojedinačnog k općem. Generalizacija, odnosno prijelaz s konkretnog i pojedinačnog k općem, je složeni misaoni proces koji ima široku primjenu u nastavi matematike jer daje važan i bogat izvor novih saznanja.
Analogija je usko povezana s generalizacijom. Analogijom dobivamo sve više podataka na temelju kojih zajedničkim promatranjem možemo lakše uočiti uzorak, to jest generalnu tvrdnju. Na idućim primjerima prikazat ćemo upravo to, kako analogijom možemo uočiti uzorak.

Sljedeća tvrdnja je dobro poznata i njen dokaz se obrađuje u osnovnoj školi. Mi tu tvrdnju stoga nećemo dokazivati, već koristiti kao polazište za daljnje razmatranje.

Lema 1.4.1. *Zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta iznosi* $180°$.

Propozicija 1.4.2. *Zbroj veličina unutarnjih kutova konveksnog četverokuta iznosi* $360°$.

Dokaz. Neka je zadan konveksni četverokut $ABCD$. Iz vrha A povucimo dijagonalu $\overline{AC}$, koja rastavlja četverokut na trokute ABD i ABD.

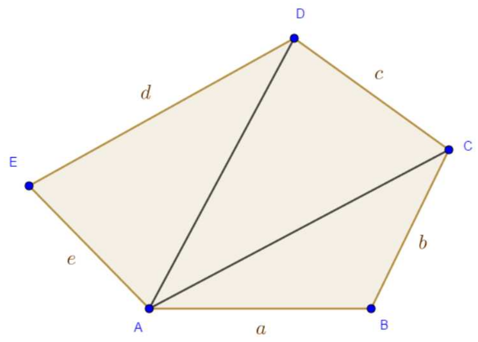


Slika 1.9: Konveksni četverokut

Dakle, tom dijagonalom konveksni četverokut rastavljen je na 2 trokuta. Zbroj unutarnjih kutova konveksnog četverokuta jednak je zbroju kutova u tim trokutima, to jest $2 \cdot 180° = 360°$.

Propozicija 1.4.3. *Zbroj veličina unutarnjih kutova konveksnog peterokuta iznosi* $540°$.

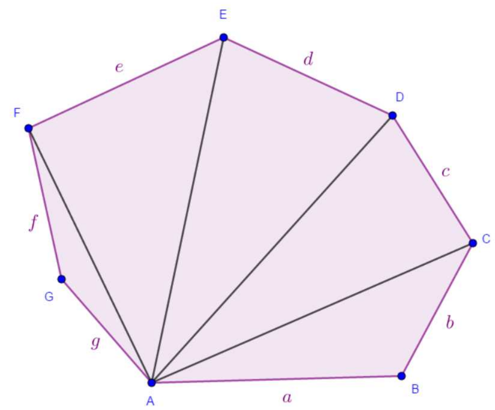
Dokaz. Neka je zadan konveksni peterokut $ABCDE$. Iz vrha A povucimo sve dijagonale, koje konveksni peterokut rastavljaju na trokute ABC, ACD i ADE.
Broj tih trokuta jednak je broju stranica $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, a njih je ukupno 3. Dakle, tim dijagonalama konveksni peterokut rastavljen je na 3 trokuta. Zbroj unutarnjih kutova konveksnog peterokuta jednak je zbroju kutova u tim trokutima, to jest $3 \cdot 180° = 540°$.



Slika 1.10: Konveksni peterokut

Pokušajmo sada dokazati istu tvrdnju, ali za konveksni sedmerokut, primjenom analognog dokaza iz prethodne dvije propozicije:

Propozicija 1.4.4. *Zbroj veličina unutarnjih kutova konveksnog sedmerokuta iznosi* 900°.



Slika 1.11: Konveksni sedmerokut

Dokaz. Neka je zadan konveksni sedmerokut $ABCDEFG$. Iz vrha A povucimo sve dijagonale, koje konveksni sedmerokut rastavljaju na trokute ABC, CDA, DEA, EFA i FGA. Broj tih trokuta jednak je broju stranica $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, a njih je ukupno 5. Dakle, tim dijagonalama konveksni peterokut rastavljen je na 5 trokuta. Zbroj unutarnjih kutova konveksnog sedmrokuta jednak je zbroju kutova u tim trokutima, to jest $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$.

Dijagonalom smo četverokut podijelili na 2 trokuta i na kraju dobili $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$, dijagonalama smo peterokut podijelili na 3 trokuta i na kraju dobili $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$, odnosno sedmerokut na 5 trokuta i na kraju dobili $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$. Prema tome, potrebno je

uočiti sljedeće: četverokut je podijeljen na $4-2=2$ trokuta, peterokut na $5-2=3$ trokuta, odnosno sedmerokut na $7-2=5$ trokuta. Ideja koju smo dobili za peterokut i sedmerokut analogno se može primijeniti na bilo koji mnogokut. Dakle, analogno možemo provesti isti dokaz, to jest analogno dokazati opću tvrdnju. Time imamo direktan dokaz opće tvrdnje. S druge strane, kada bismo izmjerili za $n=3,4,5,7$ koliki je zbroj kutova u n - terokutu, opet bismo uočili da je rezultat $(n-2)\cdot 180°$ te zaključili tu opću tvrdnju bez dokaza, koristeći nepotpunu indukciju.
Dakle, opća formula za zbroj veličina unutrašnjih kutova konveksnog n - terokuta je

$$(n-2)\cdot 180°,$$

odnosno generalizacija prethodne tvrdnje je sljedeća:

Teorem 1.4.5. *Zbroj veličina unutarnjih kutova u konveksnom n - terokutu je $(n-2)\cdot 180°$.*

Još jedan primjer koji govori o vezi analogije i generalizacije je postupak kojim se dolazi do poopćenog pravila logaritma umnoška.

Primjer 1.4.6. ***Logaritam umnoška***
S pojmom logaritma učenici se susreću u trećem razredu srednje škole, kada definiraju logaritam broja i logaritamsku funkciju. Prije rješavanja zadataka, učenici izvode razna pravila i svojstva logaritamske funkcije. Jedno od njih je i logaritam umnoška, koji se učenicima prezentira u obliku

$$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

gdje je $a \in <0,+\infty> \backslash 1$, a x_1 i x_2 pozitivni realni brojevi. Tada se primjenom analogije ono može proširiti na tri broja

$$\log_a(x_1x_2x_3) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3,$$

četiri broja

$$\log_a(x_1x_2x_3x_4) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \log_a x_4$$

odnosno općenito n brojeva

$$\log_a(x_1x_2...x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + ... + \log_a x_n,$$

gdje je n prirodan broj veći od 1, a $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi. Tako se analognim zaključivanjem i induktivnim načinom razmišljanja dolazi do generalne tvrdnje, gdje se svojstvo primjenjivalo na konačan broj.

Iduće poglavlje bit će posvećeno analogiji u matematičkom području geometrije s posebnim naglaskom upravo na analogiju između planimetrije i stereometrije.

Poglavlje 2

Analogija u geometriji

Geometrija je grana matematika koja se bavi proučavanjem raznih tipova prostora i njihovom matematičkom formalizacijom. S obzirom da se povezuje i isprepliće s drugim matematičkim disciplinama, poput matematičke analize i teorije skupova, gube se njezine oštre granice. Tipovi geometrija međusobno se razlikuju prema tipu prostora koji istražuju, metodama kojima se služe, dimenziji prostora ili pak klasi objekata koje proučavaju. Moderno doba pokreće i razvoj novih teorija geometrije pa se danas osobito razvija diferencijalna geometrija. Geometrija koja se obrađuje u školama jest euklidska geometrija, točnije geometrija euklidske ravnine (planimetrija) i geometrija euklidskog prostora (stereometrija). Proučavanje geometrije jako je bitna komponenta u učenju matematike jer ona dopušta analizu i interpretaciju svijeta koji učenike okružuje koristeći se usvojenim znanjem i alatom iz različitih područja matematike.

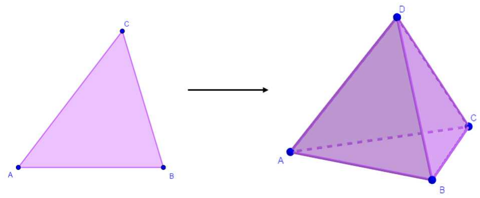
Kako bi se što bolje razumjeli matematički, posebno geometrijski koncepti, bitno je povezati verbalna objašnjenja, simbole i definicije te vizualni prikaz. Već smo u prethodnom poglavlju detaljno pojasnili u čemu je sve analogija bitna, ali i korisna. U geometriji to dolazi još više do izražaja jer zaključke i razmišljanja možemo vizualizirati. Kao što je već na početku prvog poglavlja rečeno, matematika je znanost koja proučava velik broj objekata. Najjednostavniji primjer analognih objekata su trokut i tetraedar pa je najbolji prikaz analogije između planimetrije i stereometrije, odnosno geometrijskih likova i tijela.

2.1 Likovi i tijela

Na početku prvog poglavlja spomenuli smo da se analogija ponekad koristi samo kako bi se istaknula sličnost, što predstavlja nepotpunu analogiju kod koje se posebno treba paziti na donošenje zaključaka. Navedimo nekoliko dobrih primjera 2D i 3D analogona, to jest poligona i poliedara.

Trokut i tetraedar

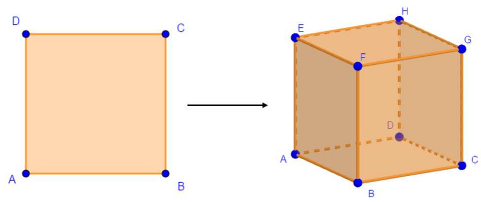
Najjednostavniji poligon je trokut. On je određen s najmanjim brojem nekolinearnih točaka u ravnini, kojih je tri i omeđen je trima dužinama. Razmišljamo li na isti način, ali u prostoru, najjednostavniji poliedar bit će tijelo koje je određeno s najmanjim brojem nekomplanarnih točaka u prostoru, kojih je četiri i omeđen četirima trokutima. Upravo te karakteristike ima trostrana piramida, odnosno tetraedar. Dakle, došli smo do zaključka da je tetraedar analogon trokutu prema promatranim svojstvima. Specijalni slučaj je jednakostranični trokut, najmanji pravilni mnogokut, kojem je analogon pravilni tetraedar.



Slika 2.1: Trokut i tetraedar

Kvadrat i kocka

Nekako slijedno, sljedeći poligon kojeg možemo promatrati je kvadrat. To je lik koji je određen četirima nekolinearnim točka i omeđen četirima okomitim dužinama. Pokušamo li zaključiti koji je analogon kvadrata prema analogiji na vrhove trokuta i tetraedara, mogli bismo doći do krivog zaključka. S obzirom da trokut ima tri vrha, a njegov analogon četiri, prema tome bi analogon kvadrata trebao imati za jedan više vrhova od njega. Zaključili bismo da je njegov analogon četverostrana piramida. S druge strane, usporedimo li analogone, vidimo da je tetraedar omeđen trokutima, dok je četverostrana piramida omeđena kvadratom i trima trokutima.



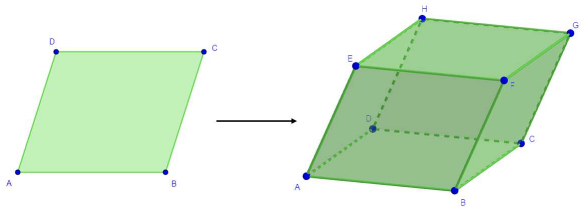
Slika 2.2: Kvadrat i kocka

Promotrimo karakteristike kvadrata. To je lik kojem su sve stranice jednake duljine, nasuprotne stranice su paralelne, susjedne stranice su okomite i dijagonale se raspolavljaju.

Razmišljamo li analogno, poliedar kojeg tražimo je tijelo kojem su sve stranice jednake, nasuprotne strane su paralelne, susjedne strane su okomite i prostorne dijagonale se raspolavljaju. Te karakteristike odgovaraju kocki. Prema tome, analogon kvadrata je kocka.

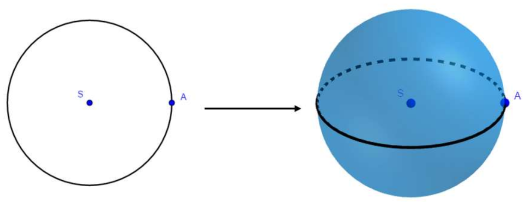
Paralelogram i paralelepiped

Paralelogram je lik kojemu su nasuprotne stranice paralelne i sukladne, nasuprotni kutovi su jednake veličine i dijagonale mu se raspolavljaju. Prema tome, potrebno je pronaći tijelo kojemu su nasuprotne strane paralelne i sukladne, nasuprotni prostorni kutovi jednake veličine i kojem se prostorne dijagonale raspolavljaju. Razmišljamo li analogno kao u prethodna dva primjera, traženi poliedar omeđen je likovima čiji analogon tražimo, to jest paralelogramima. Dakle, prema karakteristikama radi se o paralelepipedu.



Slika 2.3: Paralelogram i paralelepiped

Kružnica i sfera



Slika 2.4: Kružnica i sfera

Prema definiciji, znamo da je kružnica skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od neke čvrste točke koju nazivamo središte. Dakle, trebamo pronaći skup svih točaka u prostoru koje su jednako udaljene od neke čvrste točke. Prema toj analogonoj karakteristici, zaključak je da je to sfera. Ako bismo u obzir uzeli i dio ravnine koji kružnica zatvara, to jest promatrali krug, tada lako možemo zaključiti da je njegov analogon kugla jer je ona dio prostora omeđena sferom.

No, analogija ne mora uvijek biti jednoznačna pa prema tome neki objekti mogu imati i više analogona, što ovisi o vrsti srodnosti koja se promatra. Promotrimo sljedeći primjer koji to dobro prikazuje.

2.2 Prostorni analogoni Pitagorinog poučka

U prethodnom poglavlju iskazali smo Pitagorin poučak i vidjeli jednu u nizu njegovih primjenu. Konkretno, u izvodu formule za visinu jednakostraničnog i jednakokračnog trokuta. Pitagorin poučak vezan je uz pravokutni trokut, a njega možemo promatrati na tri različita načina, kao: polovinu pravokutnika, trokut kojemu su stranice iz jednog vrha okomite i trokut čije dvije okomite stranice čine otvorenu izlomljenu liniju. Ovakvi različiti pogledi na trokut dovode do srodnosti s trima prostornim objektima. [16] [17]

1. Ako promatramo pravokutni trokut kao polovinu pravokutnika, njegov analogon bit će polovica kvadra, to jest uspravna trostrana prizma kojoj je osnovka pravokutan trokut.

2. Ako promatramo pravokutan trokut kao trokut kojemu su sve stranice iz jednog vrha okomite, njegov analogon je tetraedar kojemu su svi bridovi iz jednog vrha međusobno okomiti. Drugim riječima, pravokutni trokut promatramo kao trokut s pravim kutom, a njegov analogon kao tetraedar s prostornim pravim kutom.

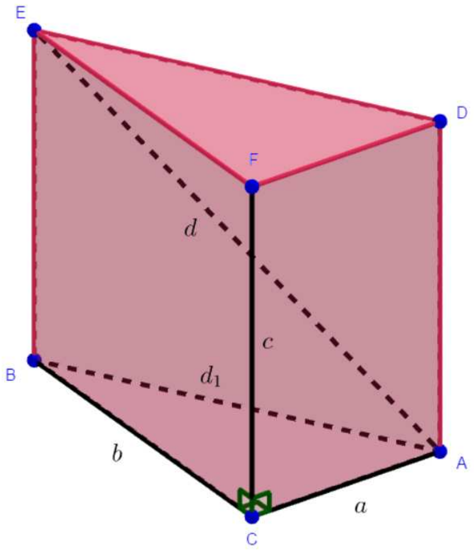
3. Ako promatramo pravokutan trokut kao trokut kojemu su dvije stranice međusobno okomite, njegov analogon je tetraedar u kojem postoji više parova međusobno okomitih bridova.

S obzirom da postoje tri prostorna analogona pravokutnog trokuta, postoje i odgovarajuće relacije analogne Pitagorinom poučku. Razmotrimo sva tri prostorna analogona Pitagorinog poučka redom.

Pravokutan trokut kao polovina pravokutnika

Teorem 2.2.1. *Neka je $ABCDEF$ trostrana prizma dobivena kao polovina kvadra i neka je $a = |CA|$, $b = |CB|$, $c = |CF|$, $d_1 = |AB|$ i $d = |AE|$. Tada vrijedi:*

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$



Slika 2.5: Trostrana prizma $ABCDEF$

Dokaz. Uočimo dva pravokutna trokuta ABE i ABC. Primjenom Pitagorinog poučka na navedene trokute dobivamo da je

$$d^2 = d_1^2 + c^2$$
$$d_1^2 = a^2 + b^2.$$

Uvrštavanjem d_1 iz druge jednadžbe u prvu dobivamo sljedeće:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

čime smo dokazali početnu tvrdnju.

Možemo uočiti da prvi prostorni analogon Pitagorinog poučka povezuje duljinu prostorne dijagonale kvadra s duljinama bridova iz jednog vrha kvadra. Potrebno je uočiti da smo formulu Pitagorinog poučka proširili još jednom veličinom kako smo iz ravnine prešli u prostor.

Pravokutan trokut kao trokut kojemu su stranice iz jednog vrha okomite

U formuli Pitagorinog poučka $c^2 = a^2+b^2$ su a, b i c duljine stranica trokuta. Unija stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ čine rub trokuta ABC. U formuli $c^2 = a^2 + b^2$ kvadrat mjere najdulje stranice jednak je zbroju kvadrata mjera preostalih stranica.

Primijenimo analogiju na tetraedar $ABCD$ kojemu su bridovi iz vrha D međusobno okomiti. Rub tog tijela je unija trokuta ABC, DAB, DBC i DAC. Najveći od tih četiri trokuta je onaj nasuprot vrha prostornog pravog kuta, to jest trokut ABC. Mjere trokuta su njihove površine pa možemo postaviti dvije hipoteze. U jednoj je kvadrat mjere najvećeg trokuta jednak zbroju kvadrata mjera preostalih trokuta, to jest

$$p(ABC)^2 = p(DAB)^2 + p(DAC)^2 + p(DBC)^2,$$

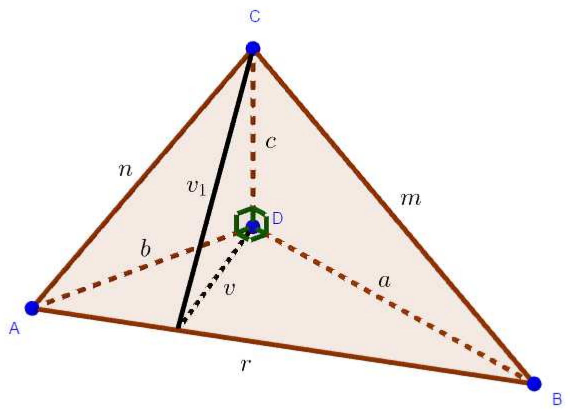
dok je u drugoj kub mjere najvećeg trokuta jednak zbroju kubova mjera preostalih trokuta, to jest

$$p(ABC)^3 = p(DAB)^3 + p(DAC)^3 + p(DBC)^3.$$

Općenito, kvadrat u formuli Pitagorinog poučka može biti povezan s dimenzijom ravnine pa je logično da u prostornoj analogiji kvadrat zamijenimo s kubom. Druga jednakost nije valjana, ali prva jest. Da bismo ju dokazali, povučene su u trokutima ABD i ABC visine iz vrhova D i C duljine v i v_1.

Teorem 2.2.2. *Neka je $ABCD$ tetraedar kojemu su bridovi iz vrha D međusobno okomiti. Neka su a, b i c duljine bridova iz vrha D, a duljine preostalih bridova m, n i r. Tada vrijedi da je kvadrat površine strane nasuprot vrha D jednak zbroju kvadrata površina preostalih triju strana, to jest*

$$p(ABC)^2 = p^2(DAB)^2 + p^2(DAC)^2 + p^2(DBC)^2.$$



Slika 2.6: Tetraedar $ABCD$

Dokaz. Neka su $P(DAB) = \frac{ab}{2}$, $P(DAC) = \frac{bc}{2}$ i $P(DBC) = \frac{ac}{2}$ redom površine pravokutnih trokuta $\triangle DAB$, $\triangle DAC$ i $\triangle DBC$. Tada su kvadrati njihovih površina redom $p(DAB)^2 = \frac{a^2b^2}{4}$, $p(DAC)^2 = \frac{b^2c^2}{4}$ i $p(DBC)^2 = \frac{a^2c^2}{4}$. Uočimo da je visina v iz vrha D u trokutu DAB jednaka $v = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, a visina v_1 u trokutu ABC iz vrha C jednaka $v_1^2 = c^2 + v^2$. Uvrštavanjem v u v_1 dobivamo da je $v_1 = c^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. Promatrajući trokut ABC uočimo da je njegova površina $p(ABC)$ jednaka $\frac{rv_1}{2}$. Slijedi da je kvadrat njegove površine jednak

$$\begin{aligned}
p(ABC)^2 = \frac{r^2v_1^2}{4} &= \frac{1}{4}(a^2+b^2)\left(c^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \\
&= p(DAB)^2 + p(DBC)^2 + p(DAC)^2,
\end{aligned}$$

čime smo pokazali početnu tvrdnju.

Pravokutan trokut kao trokut kojemu su dvije stranice međusobno okomite

Formulu Pitagorinog poučka $c^2 = a^2 + b^2$ možemo zapisati i kao alternirajuću sumu kvadrtata duljina stranica izjednačenu s nulom, to jest $a^2 - c^2 + b^2 = 0$. Postavimo prema tome sličan analogon koji vrijedi za vrstu tetraedra čije su stranice pravokutni trokuti.

Teorem 2.2.3. *Neka je $ABCD$ tetraedar kojemu su bridovi $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BD}$ duljina b, a, d u parovima okomiti i neka su c, e i f duljine ostalih bridova. Ako su P_A, P_B, P_C, P_D površine strana tetraedra nasuprot vrhova A, B, C i D, tada vrijedi*

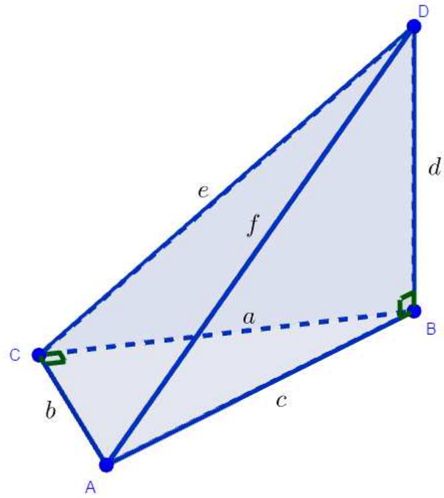
$$P_A^2 - P_C^2 + P_B^2 - P_D^2 = 0.$$

Dokaz. Uočimo da su površine P_A, P_B, P_C, P_D nasuprot vrhova A, B, C i D redom jednake:

$$P_A = \frac{ad}{2},\ \ P_B = \frac{be}{2},\ \ P_C = \frac{cd}{2},\ \ P_D = \frac{ab}{2},$$

a kvadrati tih površina:

$$P_A^2 = \frac{a^2d^2}{4},\ \ P_B^2 = \frac{b^2e^2}{4},\ \ P_C^2 = \frac{c^2d^2}{4},\ \ P_D^2 = \frac{a^2b^2}{4}.$$



Slika 2.7: Tetraedar $ABCD$

Zapišimo sve površine preko stranica a, b i visine d.

$$
\begin{aligned}
P_A^2 &= \frac{a^2d^2}{4}\\
P_B^2 &= \frac{b^2e^2}{4} = \frac{b^2(a^2+d^2)}{4} = \frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^2d^2}{4}\\
P_C^2 &= \frac{c^2d^2}{4} = \frac{d^2(a^2+b^2)}{4} = \frac{a^2d^2}{4} + \frac{b^2d^2}{4}\\
P_D^2 &= \frac{a^2b^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Pogledamo li pozornije, uočit ćemo da su zbrojevi $P_A^2 + P_B^2$ i $P_D^2 + P_D^2$ jednaki pa na temelju te činjenice tražena veza među promatranim površinama glasi $P_A^2 - P_C^2 + P_B^2 - P_D^2 = 0$, što je tvrdnja koju je trebalo i dokazati.

2.3 Površina pravokutnika i volumen kvadra

S površinom ili ploštinom, odnosno volumenom ili obujmom učenici se susreću još u trećem, odnosno četvrtom razredu osnovne škole, a kasnije i kroz cijeli ostatak svog obrazovanja. U nižim razredima površina se uvodi pomoću prebrojavanja jediničnih kvadrata, odnosno volumen mjerenjem tekućina. Tek se u petom razredu osnovne škole površina i volumen javljaju u obliku formula koje učenici otkrivaju i primjenjuju. Geometrijski likovi čija se površina prva otkriva i računa jesu kvadrat i pravokutnik, a geometrijska tijela čiji se

volumen otkriva i računa jesu njihovi analogoni kocka i kvadar. Analogijom, specijalizacijom, induktivnim zaključivanjem i generalizacijom učenici otkrivaju svojstva i formule geometrijskih likova i tijela. Najbolji prikaz analogije je između teorema, odnosno dokaza površine pravokutnika i volumena kvadra što je ujedno i još jedan primjer potpune analogije.
Teorija mjerenja volumena skupova točaka u prostoru slična je teoriji mjerenja površine skupova točaka u ravnini. Poligoni i poliedri su vrlo srodni pa se definicija volumena poliedara uvodi posve analogno kao i površina poligona.

Definicija 2.3.1. *Neka je P_2 skup svih poligona.* ***Površina*** *ili* ***ploština*** *P na skupu P_2 je funkcija $P : P_2 \to \mathbb{R}$ sa svojstvima:*

(P1) $P(A) \geq 0, \quad \forall A \in P_2,$

(P2) Za svaka dva poligona $A, B \in P_2$ čije unutrašnjosti nemaju zajedničkih točaka vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

(P3) $A \cong B \implies P(A) = P(B),$

(P4) Postoji bar jedan kvadrat K takav da je $P(K) = 1$.

Definicija 2.3.2. *Neka je P_3 skup svih poliedara.* ***Volumen*** *V na skupu poliedara je funkcija $V : P_3 \to \mathbb{R}$ sa svojstvima:*

(V1) $V(A) \geq 0, \quad \forall A \in P_3,$

(V2) Za svaka dva poliedra A i B čije unutrašnjosti nemaju zajedničkih točaka vrijedi

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B),$$

(V3) $A \cong B \implies V(A) = V(B),$

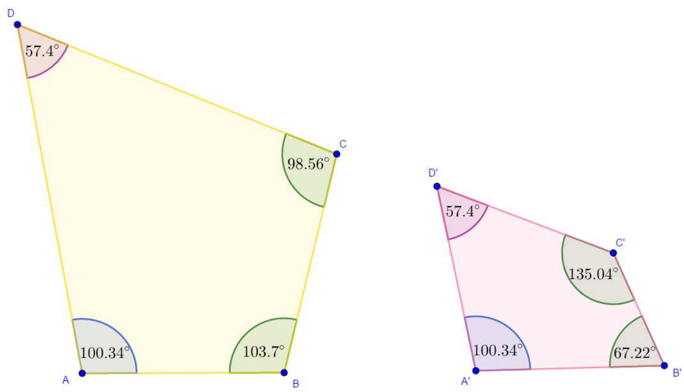
(V4) Postoji bar jedna kocka K takva da je $V(K) = 1$.

Teorem 2.3.3. *Ako postoji površina P i ako je $\pi = ABCD$ pravokutnik takav da je $|AB| = a$, $|BC| = b$, onda je $P(ABCD) = a \cdot b$.*

Dokaz spomenutog teorema provodi se u tri dijela, a u školama se provode samo prva dva. Treći dio sadrži diferencijalni račun koji učenici obrađuju tek u četvrtom razredu srednje škole. U prvom dijelu, određuje se površina kvadrata čija je stranica duljine $\frac{1}{n}$. To je bitni dio dokaza jer se on koristi kao referenca za preostala dva dijela. Drugi dio dokaza sastoji se od određivanja formule za površinu pravokutnika čije su duljine stranica racionalni brojevi, dok se u trećem dijelu tvrdnja proširuje na realne brojeve. Potpuno analogno, iskazao bi se i dokazao teorem za volumen kvadra, to jest da je $V = abc$, gdje su a, b i c duljine stranica kvadra.

2.4 Sličnosti trokuta i sličnosti četverokuta

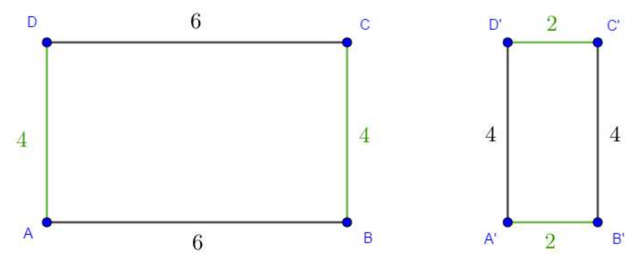
S pojmom sličnosti te opisivanjem sličnosti trokuta matematičkim jezikom učenici se susreću još u osmom razredu osnovne škole proučavajući dva trokuta istog oblika, ali ne nužno i jednake veličine. Tada upoznaju sljedeću definiciju: ”*Dva su trokuta slična ako su im odgovarajući kutovi jednake veličine i ako su im duljine odgovarajućih stranica proporcionalne.*”. Možemo li analogno definirati i za poligone? Da.
Nakon definicija, na nastavi se dokazuju poučci o sličnosti koji olakšavaju zaključivanje na temelju manje uvjeta. Na primjer, dovoljno je da se dva trokuta podudaraju u dva kuta da bismo zaključili da su slični, što predstavlja KK poučak o sličnosti. Prema tome, za trokut vrijedi da je KK uvjet ekvivalentan definiciji. Pokušajmo to analogijom primijeniti za četverokute.



Slika 2.8: Četverokuti s dva jednaka kuta

Dok uspoređujemo dane četverokute, lako je uočiti da su $\angle BAD$ i $\angle B'A'D'$ te $\angle ADC$ i $\angle A'D'C'$ jednake veličine. Kada bismo u ovom trenutku primijenili analogiju, zaključili bismo da su ta dva četverokuta slična. No, pogledamo li samo njihove oblike, uočavamo da to nije istina. U čemu je problem? Definicija analogije kaže da ”na temelju srodnih svojstava zaključujemo da je još neko svojstvo jednako”. Prema tome smo dobro postupili, ali nismo provjerili sva svojstva. Za trokut znamo da je zbroj unutarnjih kutova jednak 180° pa će treći odgovarajući kut sigurno biti jednake veličine. Kod četverokuta to nije slučaj jer je zbroj unutarnjih kutova 360° pa preostala dva odgovarajuća kuta ne moraju biti jednake veličine. Zato je jako bitno provjeravati sva potrebna svojstva i kritički primjenjivati analogiju.

Na sljedećem primjeru zaključit ćemo je li dovoljan uvjet za sličnost da se dva četverokuta podudaraju u svim kutovima.



Slika 2.9: Pravokutnici s različitim omjerima stranica

Pogledajmo pravokutnike na slici. Lako uočavamo da su svi kutovi jednake veličine. Analogijom po KK poučku o sličnosti trokuta zaključili bismo da su oni slični. Je li to stvarno tako? Pogledamo li na primjer omjer

$$\frac{BC}{A'B'} = \frac{AA}{C'D'},$$

uočit ćemo da je on jednak 2. No, pogledamo li omjer preostalih stranic

$$\frac{AB}{B'C'} = \frac{CD}{D'A'},$$

uočit ćemo da je omjer jednak 3, što nije jednako. Dakle, neovisno o tome što su im svi kutovi jednake veličine, na temelju omjera stranica zaključujemo da oni nisu slični. Prema tome, KKK poučak o sličnosti ne vrijedi za četverokute i analogija u odnosu na sličnost trokuta nije u potpunosti primijenjena.

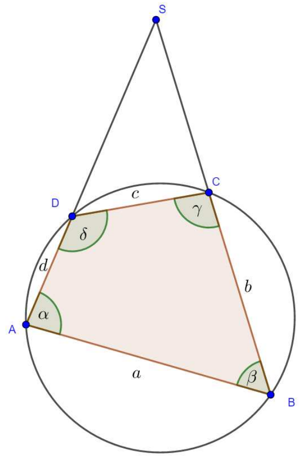
2.5 Analogon Heronove formule za četverokut

Heronova formula jedna je od najpoznatijih formula u geometriji kojom se računa površina trokuta ako su mu zadane duljine svih stranica. Ime je dobila po grčkom matematičaru Heronu, koji ju spominje u svom djelu *Metrika*, a glasi:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje su a, b i c stranice trokuta, a s poluopseg trokuta, to jest $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Za potrebe ovog diplomskog rada promatrat ćemo tetivni četverokut, dok se slučaj s tangencijalnim četverokutom nalazi u [24].



Slika 2.10: Tetivni četverokut

Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Znamo da vrijedi: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Produljimo dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ preko točaka D i C do sjecišta S. Uočimo dva slična trokuta, ABS i CDS. Oni su slični prema K-K poučku o sličnosti trokuta jer im je kut pri vrhu S zajednički i $|\angle CDS| = 180° - \delta = \beta = |\angle ABS|$. Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina odgovarajućih stranica, to jest vrijedi:

$$\frac{P_{\triangle CDS}}{P_{\triangle ABS}} = \frac{c^2}{a^2},$$

iz čega se nakon kratkog sređivanja dobiva

$$P_{ABCD} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cdot P_{\triangle ABS}.$$

Označimo $u := |\overline{AS}|$ i $v := |\overline{BS}|$. Površinu trokuta $\triangle ABS$ možemo zapisati pomoću *Heronove formule*:

$$P_{\triangle ABS} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+u+v)(u+v-a)(a+u-v)(a+v-u)}.$$

S obzirom da su trokuti $\triangle ABS$ i $\triangle CDS$ slični, vrijede razmjeri:

$$|SA| : |AB| = |SC| : |CD| \;\; i \;\; |SB| : |AB| = |SD| : |CD|,$$

to jest

$$\frac{u}{a} = \frac{v-b}{c} \quad \text{i} \quad \frac{v}{a} = \frac{u-d}{c}.$$

Zbrajanjem i oduzimanjem prethodnih jednakosti te sređivanjem dobivamo:

$$u+v = \frac{a(b+d)}{a-c} \quad \text{i} \quad u-v = \frac{a(d-b)}{a+c}.$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} a+u+v &= \frac{2a(s-c)}{a-c} \\ u+v-a &= \frac{2a(s-a)}{a-c} \\ a+u-v &= \frac{2a(s-b)}{a+c} \\ a+v-u &= \frac{2a(s-d)}{a+c}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenih jednadžbi u formulu za površinu trokuta ABS slijedi:

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABS} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2a(s-c)}{a-c}\cdot\frac{2a(s-a)}{a-c}\cdot\frac{2a(s-b)}{a+c}\cdot\frac{2a(s-d)}{a+c}} \\ P_{\triangle ABS} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16a^4}{(a-c)^2(a+c)^2}(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \\ P_{\triangle ABS} &= \frac{a^2}{a^2-c^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \end{aligned}$$

Prema tome, slijedi da je površina tetivnog četverokuta $ABCD$:

$$P_{ABCD} = \frac{a^2-c^2}{a^2}P_{\triangle ABS} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Dakle, dobivena formula analogon je Heronove formule, to jest Heronovu formulu možemo potpuno analogno primijeniti na četverokut. Spomenuta formula poznatija je pod nazivom *Brahmaguptina formula*, a ime je dobila prema jednom od najistaknutijih indijskih matematičara. [8]

2.6 Uvjet dodira pravca i krivulje

Krivulje drugog reda obrađuju se u trećem razredu srednje škole. Uvjet tangencijalnosti pravca i kružnice obrađuje se u gimnazijama sa pet i više sati tjedno, dok se uvjet tangencijalnosti pravca i krivulja drugog reda (elipsa, hiperbola i parabola) po novom kurikulumu obrađuje na nastavi matematike sa šest i sedam sati tjedno, a za preostale gimnazije je pod dodatnim sadržajem. Kako se prvo obrađuje uvjet dodira pravca i kružnice, uvjeti za pravac i preostale krivulje dobiju se potpuno analognim postupkom. Za potrebe ovog diplomskog rada prikazat ćemo određivanje uvjeta tangencijalnosti pravca i parabole te elipse. [4] [24]

Za pravac koji nije paralelan s osi parabole kažemo da je tangenta parabole ako ima s njome točno jednu zajedničku točku. Nađimo uvjet da pravac $y = kx + l$ bude tangenta parabole $y^2 = 2px$, to jest uvjet da taj pravac dira parabolu. Koordinate (x, y) sjecišta pravca i parabole očito su rješenje sustava

$$\begin{cases} y = kx + l \\ y^2 = 2px. \end{cases}$$

Uvrstimo li y iz prve jednadžbe u drugu, dobit ćemo

$$k^2x^2 + 2(kl - p)x + l^2 = 0.$$

Općenito, pravac će dirati parabolu ako spomenuti sustav ima jedno rješenje, to jest ako je diskriminanta jednaka nuli. Izračunajmo diskriminantu kvadratne jednadžbe.

$$\begin{aligned} D &= 4(kl - p)^2 - 4k^2l^2 \\ D &= 4(k^2l^2 - 2klp + p^2) - 4k^2l^2 \\ D &= 4(-2klp + p^2) \\ D &= 4p(-2kl + p) \end{aligned}$$

Kako je $p \neq 0$, iz uvjeta $D = 0$ slijedi

$$-2kl + p = 0,$$

to jest $p = 2kl$ što predstavlja uvjet da pravac $y = kx + l$ dira parabolu $y^2 = 2px$.

Potpuno analogno, odredimo uvjet tangencijalnosti pravca i elipse. Broj zajedničkih točaka elipse s općom jednadžbom $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i pravca $y = kx + l$ ovisi o diskriminanti kvadratne jednadžbe koju dobijemo rješavajući sustav njihovih jednadžbi

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = kx + l. \end{cases}$$

Riješimo li sustav metodom supstitucije, dobivamo kvadratnu jednadžbu oblika

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2klx + a^2(l^2 - b^2) = 0.$$

Pravac će biti tangenta elipse ako i samo ako sustav ima samo jedno rješenje, odnosno ako i samo ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe jednaka nuli. Nakon određivanja diskriminante kvadratne jednadžbe i uvrštavanjem u uvjet $D = 0$ te sređivanjem, dobivamo da je uvjet dodira pravca i elipse dan jednadžbom

$$k^2a^2 + b^2 = l^2.$$

2.7 Crtanje grafova funkcija

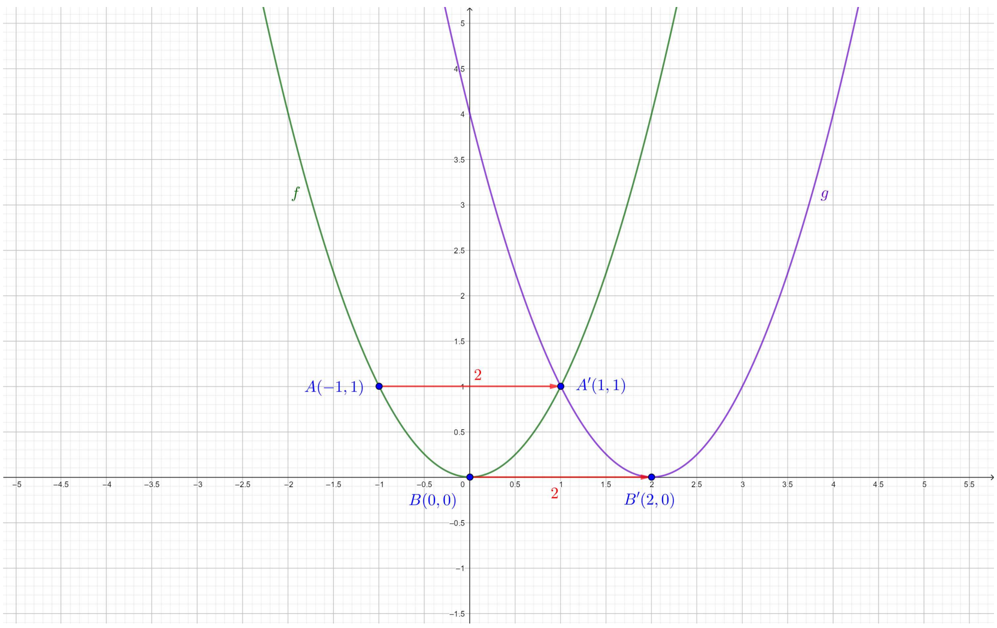
U srednjoj školi učenici se susreću se sa zadatcima u kojima je crtanje grafova funkcija sastavni dio zadatka. Očekuje se da skiciranje grafova bude brz, lak i rutinski posao. Postoje mnoga područja u kojima je spomenuta vještina nužna, poput: grafičkog rješavanje sustava jednadžbi ili nejednadžbi, određivanja broja rješenja jednadžbi, izračunavanja površine ravniniskih likova, računanja volumena rotacijskih tijela pomoću određenih integrala i slično. Na nekim se fakultetima transformacije grafova slabo ili uopće ne obrađuju pa se očekuje da ona bude dobro obrađena u srednjoj školi.

Za potrebe ovog diplomskog rada fokus će biti na translaciji u smjeru osi x i y te zrcaljenju s obzirom na osi x i y. Translacija i zrcaljenje su dva od šest jednostavnijih slučaja linearne transformacije grafa $g(x) = a \cdot f(bx + c) + d$. [14] [15]

Translacija grafova

Translacija ili pomak grafa funkcije $f(x)$ je postupak kojim se graf nove funkcije $g(x)$ dobiva pomakom u smjeru osi x ili y za određenu duljinu. Točnije, graf funkcije $g(x) = f(x+c)$ dobiva se translacijom grafa funkcije $f(x)$ u smjeru x-osi za c, dok se graf funkcije $g(x) = f(x) + d$ dobiva translacijom grafa funkcije $f(x)$ u smjeru y-osi za d.

Primjer 2.7.1. ***Graf funkcije*** $g(x) = (x-2)^2$

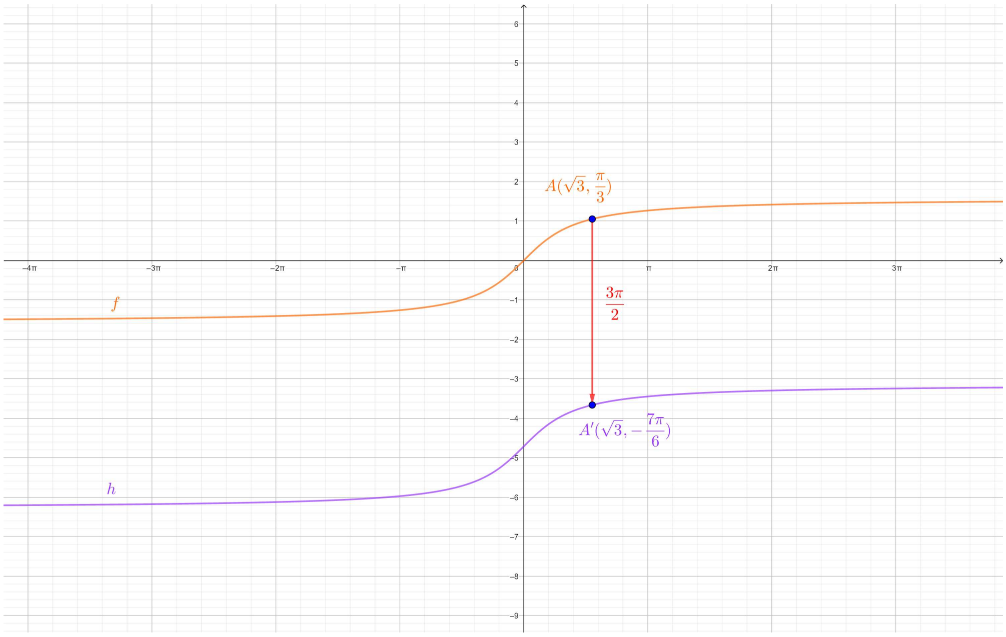


Slika 2.11: Graf funkcije $g(x) = (x-2)^2$

Neka je početna funkcija $f(x) = x^2$. S obzirom da je funkcija čiji graf crtamo $g(x) = (x-2)^2$, to jest oblika $g(x) = f(x+c)$, to graf početne funkcije $f(x)$ translatiramo za dvije jedinične dužine u desno duž x-osi. Uočimo, y koordinate točaka ostat će jednake, dok će se x koordinate uvećati za dva. Prema tome, graf funkcije $g(x)$ dobit ćemo tako da svaku točku koja pripada grafu funkcije $f(x)$ transformiramo na sljedeći način:

$$(x, y) \longrightarrow (x+2, y).$$

Primjer 2.7.2. ***Graf funkcije*** $h(x) = \arctan x - \dfrac{3\pi}{2}$



Slika 2.12: Graf funkcije $h(x) = \arctan x - \dfrac{3\pi}{2}$

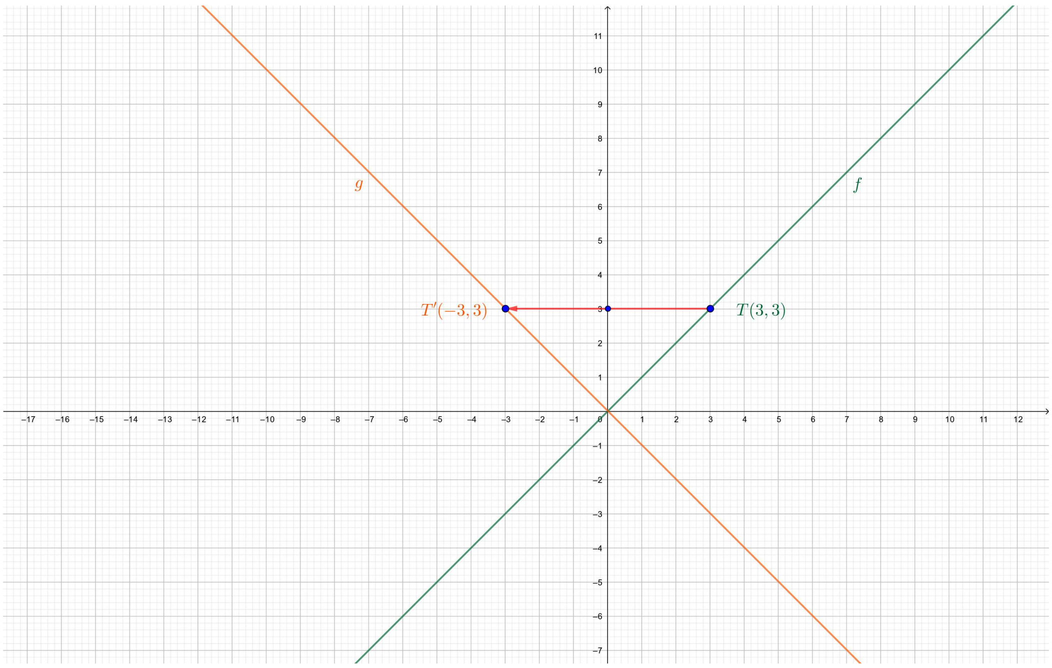
Neka je početna funkcija $f(x) = \arctan x$. S obzirom da je funkcija čiji graf crtamo $h(x) = \arctan x - \dfrac{3\pi}{2}$, to jest oblika $h(x) = f(x) + d$, to graf početne funkcije $f(x)$ translatiramo za $\dfrac{3\pi}{2}$ prema dolje duž y-osi. Uočimo, x koordinate točaka ostat će jednake, dok će se y koordinate smanjivati za $\dfrac{3\pi}{2}$. Prema tome, graf funkcije $g(x)$ dobit ćemo tako da potom graf spustimo za $\dfrac{3\pi}{2}$ prema dolje nakon što svaku točku koja pripada grafu funkcije $f(x)$ transformiramo na sljedeći način:

$$(x, y) \longrightarrow \left(x, y - \frac{3\pi}{2}\right).$$

Zrcaljenje grafova

Zrcaljenje grafa funkcije s obzirom na y-os poseban je slučaj rastezanja ili stezanja grafa funkcije u smjeru x-osi, a događa se u slučaju kada je koeficijent $b = -1$. Drugim riječima, graf funkcije $g(x) = f(-x)$ nastaje osnosimetričnim preslikavanjem grafa funkcije $f(x)$ s obzirom na y-os. S druge strane, zrcaljenje grafa funkcije s obzirom na x-os je poseban slučaj rastezanja ili stezanja grafa funkcije u smjeru y-osi, a događa se u slučaju kada je koeficijent $a = -1$. Drugim riječima, graf funkcije $g(x) = -f(x)$ nastaje osnosimetričnim preslikavanjem grafa funkcije $f(x)$ s obzirom na y-os.

Primjer 2.7.3. ***Graf funkcije*** $g(x) = -x$



Slika 2.13: Graf funkcije $g(x) = -x$

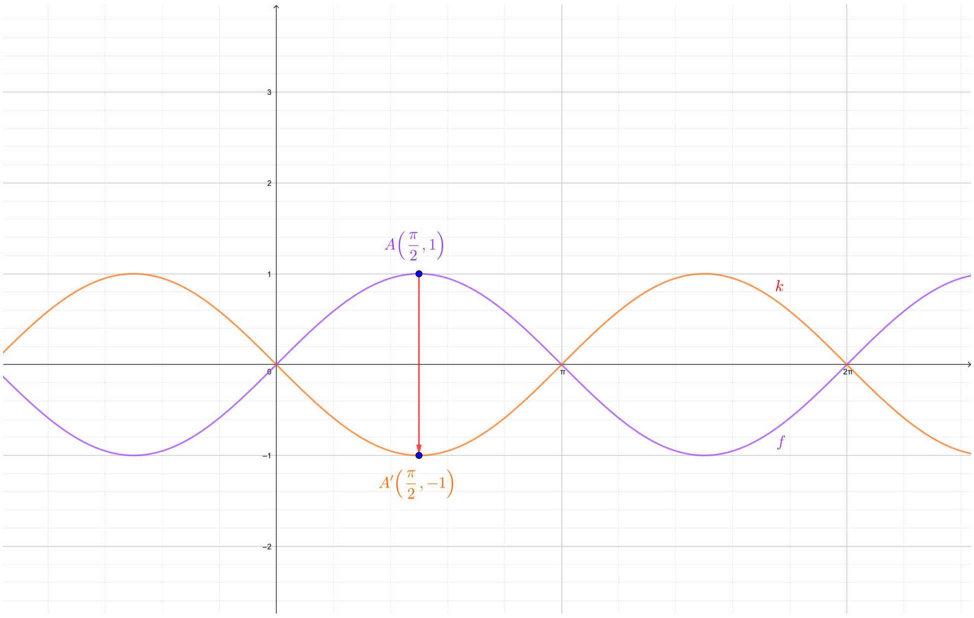
Neka je početna funkcija $f(x) = x$. S obzirom da je funkcija čiji graf crtamo $g(x) = -x$, to jest oblika $g(x) = -f(x)$, to graf početne funkcije $f(x)$ zrcalimo s obzirom na y-os. Uočimo, y koordinate točaka ostat će jednake, dok će x koordinate postati suprotne, odnosno mijenjati predznak. Prema tome, graf funkcije $g(x)$ dobit ćemo tako da svaku točku koja pripada grafu funkcije $f(x)$ transformiramo na sljedeći način:

$$(x, y) \longrightarrow (-x, y).$$

Uočimo da je ovaj način razmišljanja dosta sličan translaciji grafa funkcije duž x-osi jer y koordinata točke i nakon transformacije ostaje jednaka, dok se x koordinata mijenja.

Prema tome, mogli bismo reći da je zrcaljenje grafa funkcije s obzirom na y-os analogno translaciji grafa funkcije duž x-osi.

Primjer 2.7.4. ***Graf funkcije*** $k(x) = \sin(-x)$



Slika 2.14: Graf funkcije $k(x) = \sin(-x)$

Neka je početna funkcija $f(x) = \sin(x)$. S obzirom da je funkcija čiji graf crtamo $k(x) = \sin(-x)$, to jest oblika $k(x) = f(-x)$, to graf početne funkcije $f(x)$ zrcalimo s obzirom na x-os. Uočimo, x koordinate točaka ostat će jednake, dok će se y koordinate smanjivati. Prema tome, graf funkcije $k(x)$ dobit ćemo tako da svaku točku koja pripada grafu funkcije $f(x)$ transformiramo na sljedeći način:

$$(x, y) \quad \longrightarrow \quad (x, -y).$$

Uočimo da je ovaj način razmišljanja dosta sličan translaciji grafa funkcije duž y-osi jer x koordinata točke i nakon transformacije ostaje jednaka, dok se y koordinata mijenja.

U idućem poglavlju reći ćemo nešto više riječi o važnosti analogije u nastavi matematike, učeničkim miskoncepcijama, važnosti tehnoloigije te dane tri aktivnosti za neke od primjera iz drugog poglavlja u kojima učenici mogu uočiti analogije iz više područja školske geometrije te koje se mogu provesti na satu matematike.

Poglavlje 3

Analogija u nastavi matematike

3.1 Važnost analogije u nastavi matematike

Osnovne znanstvene metode mišljenja i razmišljanja važne su za suvremenu nastavu matematike i metodiku nastave matematike. Među njima je i analogija. Tijekom nastavnog sata učitelja se često čuje kako govori sljedeće rečenice: "*slično se izvodi*", "*na isti se način dokazuje*", "*trokuti se podudaraju*", "*Što u prostoru odgovara pravokutniku?*" i slično. Te rečenice imaju važan cilj i dubok smisao. Njihovim ponavljanjem učitelj ukazuje na analogiju koja postaje zorno sredstvo povezivanja i lakšeg savladavanja nastavnog gradiva. Osim toga, ona je i sredstvo razvijanja stvaralačkog mišljenja i kreativnosti kod učenika. Prilikom rješavanja nekog problema učenici se usmjeravaju na razmatranje nekog srodnog problema i oponašanje postupka njegovog rješavanja. Ponekad analogija neće biti glavni alat u rješavanju problema, ali će potencijalno ukazati na smjer koji vodi do rješenja. Ovo je viša razina matematičkog obrazovanja za razliku od samog usvajanja gradiva. Matematički način mišljenja posebno je cijenjena vrlina koja je primjenjiva i u mnogim drugim područjima, a stječe se postupno i primjereno. Nastava matematike bit će uspješnija ako se znanstveni postupci primjereno i pravilno primjenjuju, s dozom i osjećajem za težinu matematičkog sadržaja i mišljenja te uvažavajući matematičke sposobnosti svakog učenika ponaosob. U suprotnom, učenici će imati znatnih poteškoća pri svladavanju gradiva i s vremenom mogu steći dojam da je matematika težak i zahtjevan predmet za kojeg nemaju dovoljno kompetenicija. Bitno je da nastavnik svojim učenicima razvija radoznalost duha, sklonost za samostalan umni rad te da im ukazuje na putove novih otkrića.

3.2 Učeničke miskoncepcije i upotreba tehnologije

Mnogi učitelji susreću se s raznim miskoncepcijama učenika kroz svoj radni vijek što stvara dodatan izazov njihovom poslu jer trebaju smišljati razne načine kako ih spriječiti. One se kod učenika mogu javiti zbog različitih razloga: nedostatak i/ili neusvojenost znanja, krivo shvaćanje i razumijevanje nastavnika, vlastito krivo zaključivanje koje učitelj ne uoči i slično.

Na temu miskoncepcija, posebno u geometriji, napravljena su i mnoga istraživanja. Tako je između ostalog Ayşen Özerem [23] 2012. godine proveo istraživanje o miskoncepcijama u geometriji na učenicima sedmog razreda. Glavni cilj tog istraživanja bio je pronaći slabosti učenika po pitanju mjera, kutova, oblika, transformacija, konstrukcija i 3D oblika te osvijestiti nastavnike o miskoncepcijama učenika i općih obrazovnih pitanja. Za prikupljanje podataka studenti su testirani na dva međuispita i dva završna ispita na kojima su postavljena pitanjima o geometriji na kojima su trebali analizirali svoje vještine rješavanja problema i ocijeniti koliko su naučili tijekom godine. Primjeri nekih zabilježenih miskoncepcija i mogućih razloga navedeni su u sljedećoj tablici.

Pogreške	**Mogući razlozi**
Prilikom računanja površine trokuta, zaboravljeno podijeliti s 2	Suhoparno rješavanja, napamet naučena formula, slabo zaključivanje
Pogrešna ili zaboravljena formula	Slaba koncentracija, nepotpuno razumijevanje, nedovoljno vježbe
Pogrešno označene veličine kutova u jednakostraničnom trokutu	Nemogućnost primjene prethodnog znanja, brzopletost
Nerazumijevanje razlike između izraza i jednadžbe	Neusvojeno gradivo jednadžbi i algebarskih izraza
Krivo izračunat zbroj unutarnjih kutova u trokutu	Učenje formula i definicija nepovezano
Nije provedena konstrukcija simetrale kuta	Krivo shvaćeno pitanje, nedostatak znanja
Na pitanje o poligonu i kvadratu, učenik zanemaruje kvadrat	Nemogućnost spajanja koncepta poligona i kvadrata
Krivo provedena rotacija lika	Pogrešna upotreba rotacije zbog nedostatka znanja

Rezultati istraživanja otkrili su da učenici imaju niz pogrešnih predodžbi i manjkavih znanja vezanih uz predmet geometrije. Sa spomenutim pogreškama i miskoncepcijama susreću se i današnji učenici, a one se uvelike mogu smanjiti upotrebom tehnologije te nastavu učiniti zanimljivijom i zabavnijom. Većini učenika pokusi i vizualni prikazi prodube znanje, pomognu bolje shvatiti gradivo ili jednostavno brže dođu do zaključka. U tome ponekad može pomoći samo učiteljevo skiciranje problema na ploči. S druge strane, ponekad tehnologija može dodatno zbuniti učenike ili ih previše zaigrati pa ona u potpunosti izgubi smisao. Ključno je prepoznati takav trenutak na nastavi, što učiteljski posao čini izazovnijim.

U nastavku ovog poglavlja navest ćemo nekoliko primjera aktivnosti koje se mogu provoditi na nastavi matematike, a u kojima je upotreba tehnologije ključna ili samo alat kojim se provjerava zaključak.

3.3 Aktivnosti

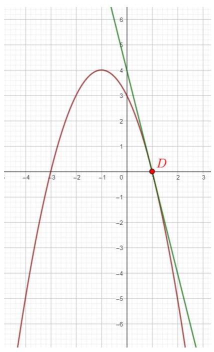
Aktivnost "Prostorni analogoni geometrijskih likova"

Cilj aktivnosti: Učenici će, podijeljeni u heterogene četveročlane grupe, rješavajući nastavni listić, otkriti prostorne analogone kvadrata i kruga.
Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u heterogenoj grupi
Potreban materijal: nastavni listić za svaku grupu
Nastavna pomagala: program dinamične geometrije GeoGebra
Tijek aktivnosti: Na početku učitelj zajedno s učenicima ponavlja definiciju kvadrata i kruga, njihovih karakteristika te pojmovima nekolinerano i nekomplanarno. Nakon uvodnog ponavljanja svakoj grupi dijeli nastavni listić, kojeg nakon završene aktivnosti lijepe u svoje bilježnice. Zadatak učenika u grupi je da izaberu predstavnika te kroz diskusiju dođu do zaključka. Tijekom aktivnosti nastavnik prolazi razredom i pomaže ako uoči da je učenicima potrebna pomoć. Nakon svakog riješenog zadatka, učenici popunjavaju dio sa zaključkom kojeg zajedno s nastavnikom i ostatkom razreda na kraju sata komentiraju na glas.

Nastavni listić: Aktivnost "Prostorni analogoni geometrijskih likova"
Zadatak 1. Nacrtaj kvadrat proizvoljne duljine stranice u programu dinamične geometrije GeoGebra i odgovori na sljedeća pitanja: 1. Čime je kvadrat omeđen? 2. Čime je kvadrat određen? 3. Koja su svojstva i karakteristike kvadrata? 4. Koje geometrijsko tijelo ima slična svojstva?
Zaključak: Prostorni analogon kvadrata je ________.
Zadatak 2. Nacrtaj krug proizvoljne duljine radijusa u programu dinamične geometrije GeoGebra i odgovori na sljedeća pitanja: 1. Čime je krug omeđen? 2. Čime je krug određen? 3. Koja su svojstva kruga, a koja kružnice? 4. Koje geometrijsko tijelo ima slična svojstva?
Zaključak: Prostorni analogon kruga je ________, dok je kružnice ________.

Aktivnost ”Uvjet dodira pravca i parabole”

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti uvjet dodira pravca i parabole te algebarski potkrijepiti svoje zaključke.
Oblik rada: diferencirana nastava u obliku individualnog rada
Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika
Nastavna pomagala: program dinamične geometrije GeoGebra
Tijek aktivnosti: Na početku učitelj zajedno s učenicima ponavlja jednadžbu pravca i parabole te uvjet dodira pravca i kružnice. Nakon uvodnog ponavljanja svakom učeniku dijeli nastavni listić, kojeg nakon završene aktivnosti učenici lijepe u svoje bilježnice. Tijekom aktivnosti nastavnik prolazi razredom i pomaže ako uoči da je učenicima potrebna pomoć. Nakon što učenici riješe prvi zadatak s nastavnog listića, zapisuju svoje zaključke te ih pokušavaju algebarski potkrijepiti. Na samom kraju zajedno s učiteljem i ostatkom razreda komentira na glas.

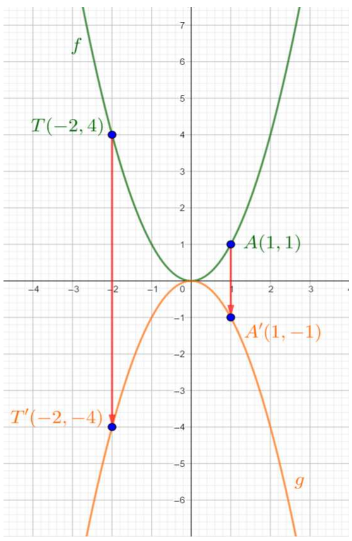
Nastavni listić: Aktivnost ”Uvjet dodira pravca i parabole”
Zadatak 1. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ i pravac $y = -4x + 4$. Zatim, odgovori na sljedeća pitanja: 1. Ima li pravac zajedničkih točaka s parabolom? Provjeri svoj odgovor uz pomoć programa dinamične geometrije. 2. Koliko zajedničkih točaka imaju dani pravac i parabola? 3. Kako nazivamo taj pravac? 4. Kako možemo provjeriti je li dani pravac tangenta parabole?
Zadatak 2. Nacrtaj graf funkcije drugog stupnja prema svom izboru. Zadaj parametre k i l pomoću klizača pa pokušaj odrediti jednadžbu pravca $y = kl + l$ koji s grafom izabrane funkcije ima jednu zajedničku točku. 
Zadatak 3. Neka je pravac zadan jednadžbom $y = kx + l$, a parabola $y^2 = 2px$. Algebarski odrediti jednadžbu tangente u točki (x, y).
Zaključak: Što primjećuješ? Je li lakše odrediti jednadžbu tangente na graf funkcije uz pomoć programa dinamične geometrije ili algebarski?

Aktivnost "Translacija i zrcaljenje grafa funkcije"

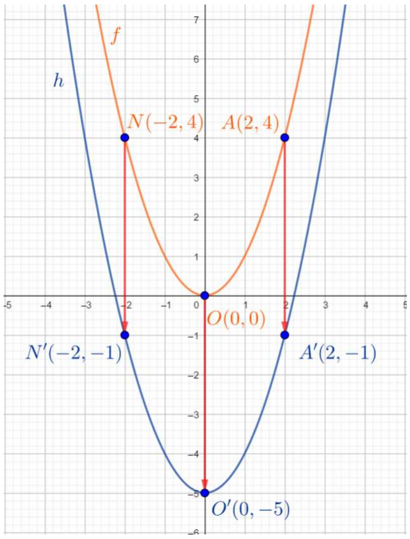
Cilj aktivnosti: Učenici će, podijeljeni u parove, zajedničkim rješavanjem nastavničkog listića uočiti analogiju u razmišljanju između pomicanja grafa funkcije $h(x) = x^2 - 5$ duž x-osi i zrcaljenja grafa funkcije $g(x) = -x^2$ u odnosu na y-os.
Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u paru
Potreban materijal: nastavni listić za svaki par
Nastavna pomagala: program dinamične geometrije GeoGebra
Tijek aktivnosti: Na početku učitelj zajedno s učenicima ponavlja definiciju funkcije i grafa funkcije te osne simetrije i translacije. Nakon uvodnog ponavljanja svakom paru dijeli nastavni listić, kojeg nakon završene aktivnosti lijepe u svoje bilježnice. Tijekom aktivnosti nastavnik prolazi razredom i pomaže ako uoči da je učenicima potrebna pomoć. Nakon što učenici riješe oba zadatka, popunjavaju dio sa zaključkom kojeg zajedno s nastavnikom i ostatkom razreda komentiraju na glas.

Nastavni listić: Aktivnost "Translacija i zrcaljenje grafa funkcije"

Zadatak 1. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2$ pa odgovori na sljedeća pitanja:
1. Što primjećuješ?
2. Može li se graf funkcije g nacrtati pomoću grafa funkcije f? Kako?
3. Označi točke $A(1, 1)$ i $T(-2, 4)$ na grafu funkcije f te njihove osnosimetrične slike na grafu funkcije g. Kolika je udaljenost točke od x-osi u odnosu na njezinu osnosimetričnu sliku točke od x-osi?
4. Kako glasi pravilo kojim se mogu odrediti koordinate osnosimetrične točke bez crtanja?
5. Postoji li još koji postupak kojim bismo mogli pronaći slike tih točaka?



Zadatak 2. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = x^2$ i $h(x) = x^2 - 5$ pa odgovori na sljedeća pitanja:
1. Što primjećuješ?
2. Može li se graf funkcije h nacrtati pomoću grafa funkcije f? Kako?
3. Označi točke $N(-2,4)$, $O(0,0)$ i $A(2,4)$ na grafu funkcije f te njihove translatirane slike na grafu funkcije h. Kolika je udaljenost točke od njezine translatirane točke?
4. Kako glasi pravilo kojim se mogu odrediti koordinate translatirane točke bez crtanja?
5. Postoji li još koji postupak kojim bismo mogli pronaći slike tih točaka?



Zaključak: Primjećuješ li neku vezu između postupka zrcaljenja grafa funkcije s obzirom na x-os i translacije duž y-osi?

Bibliografija

[1] Barišin, J., Dijanić, Ž., Gortan, R., Jukić Matić, Lj., Matić, I., Mišurac, M., Vujasin Ilić, V., Zelčić, M., (2021). *Matematika 2, 2. dio*, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje za 3 i 4 sata tjedno, Zagreb: Školska knjiga

[2] Bašić, M., Milin Šipuš, Ž., *Metodika nastave matematike*, nastavni materijali, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

[3] Bombardelli, M., Ilišević, D. (2007). *Elementarna geometrija*, skripta, Zagreb. Dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni.php`

[4] Bombardelli, M., Milin Šipuš, Ž. (2016). *Analitička geometrija*, predavanja i zadatci za vježbu, Zagreb. Dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni.html`

[5] Bombardelli, M., Časopis za nastavu matematike, *Eulerova formula* 19(2003), 179-182. Dostupno na: `http://mis.element.hr/list/5/broj/19/clanak/222/eulerova-formula`

[6] Brückler, F. M., Osječki matematički list (1845-4607), *Leonhard Euler* 10(2010), 95-101. Dostupno na: `https://hrcak.srce.hr/59282`

[7] Clements, D. H., State University of New Youk at Buffalo, *Teaching and Learning Geometry*, Chapter 11, 2003. Dostupno na `https://www.researchgate.net/publication/258933229_Teaching_and_learning_geometry`

[8] Colussi, M., Kraš, V. (2022). *Ptolomejev teorem i Brahmaguptina formula*, seminarski rad iz kolegija *Metodika nastave matematike 4*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu.

[9] Došlić, T., Sandrić, N. (2018). *Matematika 1*, Zagreb: Sveučilište u Zagrebu. Građevinski fakultet. Dostupno na: `https://www.grad.unizg.hr/_download/repository/T._____Doslic%2C_N._Sandric%3B_Matematika_1.pdf`

[10] Ferrarello, D., Mammana, M. F., Pennisi, M. (2020). *From 2d to 3d geometry: discovering, conjecturing, proving*, University of Catania, Italy. Dostupno na: `https://directorymathsed.net/montenegro/Ferrarello.pdf`

[11] Gojmerac Dekanić, G., Radanović, R. Varošanec, S., (2021). *Matematika 8, 1. dio*, udžbenik za 8. razred osnovne škole, Zagreb: Element

[12] Guhe, M., Pease, A., Smaill, A. *Analogy formulation and modification in Geometry* 10(2009). Dostupno na: `https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.397.1601&rep=rep1&type=pdf`

[13] Habulan, M., (2018). *Eulerova formula i primjene*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu. Dostupno na: `https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:877334`

[14] Kabić, M., MiŠ: časopis za nastavu matematike, *O problemu obrade grafova* 50(2009), 224-230. Dostupno na: `http://mis.element.hr/fajli/900/50-10.pdf`

[15] Kabić, M., MiŠ: časopis za nastavu matematike, *Transformacije grafova funkcija i krivulja* 51(2009), 38-44. Dostupno na: `http://mis.element.hr/fajli/915/51-09.pdf`

[16] Keček, D., Poldrugač, A., Vuković, P., Tehnički glasnik, *Poopćenje Pitagorinog poučka* 7(2013), 103-107. Dostupno na: `https://hrcak.srce.hr/105588`

[17] Kurnik, Z., (2009). Metodika nastave matematike, *Znanstveni okviri nastave matematike*, 87-132, 155-168, 193-213, Zagreb: Element

[18] Kwan, M., Yourdictionary, *False Analogy Examples*. Dostupno na: `https://examples.yourdictionary.com/false-analogy-examples.html` [Pristupljeno 24.7.2022.]

[19] Lovrić, A., *Leonhard Euler - znameniti matematičar XVIII. stoljeća*, diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2019. Dostupno na: `https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:726248`

[20] Magdaş, I., Acta Didactica Napocensia, *Analogical Reasoning in Geometry Education* 8(2015), 57-65. Dostupno na: `https://www.semanticscholar.org/paper/Analogical-Reasoning-in-Geometry-Education.-Magdas/c124c6cc381e522a9f13a87646aed94a13607fcf`

[21] Matijaković, J., *Znanstvene metode u nastavi matematike*, diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2012. Dostupno na: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:390546

[22] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, Narodne novine, *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj* NN 7/2019. Dostupno na: https://narodne-novine.nn.hr/eli/sluzbeni/2019/7/146

[23] Özerem, A., *Misconceptions In Geometry And Suggested Solutions For Seventh Grade Students* 55(2012), 720-729. Dostupno na: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.557

[24] Pavković, B., Veljan, D., (1995). *Elementarna matematika 2*, Zagreb: Školska knjiga

[25] Šagud, K., Toplek, Ž., Vojnović, M., Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, *Matematička indukcija* 20(2019), 63-79. Dostupno na: https://hrcak.srce.hr/clanak/337169

[26] Varošanec, S., *Metodika nastave matematike*, nastavni materijali, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu Dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/sem1819/

[27] Wikipedia, (2022). *Analogy*. Dostupno na: https://en.m.wikipedia.org/wiki/Analogy; [Pristupljeno 24.7.2022.]

[28] Wikipedia, (2022). *Category theory*. Dostupno na: https://en.m.wikipedia.org/wiki/Category_theory; [Pristupljeno 24.7.2022.]

[29] Wikipedia, (2022). *Structure-mapping theory*. Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Structure-mapping_theory; [Pristupljeno 24.7.2022.]

Sažetak

Zaključivanje na temelju analogije javlja se kako u običnom jeziku svakodnevnog života tako i u matematici i nekim drugim znanostima. U matematici analogija označava da smo uočili sličnost između nekih objekata i na temelju te sličnosti zaključili da objekti imaju još neka zajednička svojstva. U ovome radu objasnili smo što je analogija i koliko je važan alat u matematičkom zaključivanju te ju povezali s ostalim oblicima mišljenja i zaključivanja. U prvom dijelu rada opisali smo što je analogija općenito, dali primjere lažne analogije te rekli koju riječ o Leonhardu Euleru. Potom smo proučavali na temelju čega se u matematici zaključivanje po analogiji može provoditi. Davali razne primjere i poseban naglasak stavili na analogiju i generalizaciju. Drugi dio rada posvetili smo analogiji u geometriji, s naglaskom na analogiju između planimetrije i stereometrije. Treći dio rada posvetili smo analogiji u samoj nastavi matematike (posebno geometrije). Rekli smo pokoju riječ o njenoj važnosti u školskom obrazovanju, miskoncepcijama učenika, cilju upotrebe tehnologije te na samom kraju dali tri aktivnosti koje se mogu primijeniti u nastavi matematike.

Summary

Conclusions based on analogy occur both in the ordinary language of everyday life and in mathematics, as well as in some other sciences. In mathematics, analogy means that we have noticed a similarity between some objects and based on this similarity we have concluded that the objects have some other properties in common. In this work, we explained what analogy is and how important of a tool it is in making mathematical conclusions as well as connected it with other forms of thinking and deductioning. In the first part of the work, we described what analogy is in general, gave examples of false analogy and said a few words about Leonhard Euler. Then we studied the basis on which concluding using analogy can be carried out in mathematics. Then gave various examples and put special emphasis on analogy and generalization. We devoted the second part of the work to analogy in geometry, with an emphasis on the analogy within planimetry and stereometry. We devoted the third part of the work to analogy within teaching of mathematics (especially geometry). We said a few words about its importance in school education, students' misconceptions, the purpose of analogy within technology and at the very end we gave three activities that can be applied in mathematics lessons.

Životopis

Rođena sam 22. rujna 1995. godine u Zagrebu gdje sam pohađala osnovnu i srednju školu. Zahvaljujući sestrinoj ljubavi prema matematici, u osnovnoj školi razvio se moj interes za to područje. U srednjoj školi opća gimnazija Tituša Brezovačkog interes i privrženost matematici prepoznala je moja razrednica i profesorica matematike Andrea Igaly, koja me dodatno poticala i motivirala. Zbog mnogo hobija i osobnog zanimanja, imala sam nedoumice oko izbora fakulteta. No, pri odabiru fakulteta presudila je ljubav prema matematici i želja za radom s djecom pa sam tako 2014. godine upisala Preddiplomski studij Matematika, smjer nastavnički na Matematičkom odjseku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Po njegovom završetku 2018. godine stekla sam diplomu sveučilišne prvostpnice edukacije matematike te godinu dana radila u nastavi. Godine 2019. upisala sam Diplomski studij Matematika, smjer nastavnički kojega sada završavam.