

Rangiranje sportskih ekipa

Gojšić, Filip

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:192838>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-23**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Gojšić

RANGIRANJE SPORTSKIH EKIPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr sc. Damir Bakić

Zagreb, rujan, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sestrama koje me gnjave kada ću završiti faks

Sadržaj

| | |
|------------------------------------|-----------|
| Sadržaj | iv |
| 1 Uvod | 1 |
| 2 PageRank algoritam | 2 |
| 2.1 Originalni algoritam | 2 |
| 3 Perron-Frobeniusov teorem | 8 |
| 3.1 Pozitivne matrice | 8 |
| 3.2 Nenegativne matrice | 20 |
| 4 Rangiranje NFL ekipa | 26 |
| 4.1 Prilagodba algoritma | 26 |
| 4.2 Podaci | 28 |
| 4.3 Rezultati | 35 |
| Bibliografija | 44 |

Poglavlje 1

Uvod

”Ako nije sve u pobjedi zašto broje rezultat?”, pitanje je Vincea Lombardija, jednog od najboljih trenera u povijesti američkog nogometa, kojim savršeno sumira cilj sporta: biti bolji od svog suparnika. No što kada nemamo rezultat, kada utakmica još nije odigrana? Rangiranjem svih ekipa od najbolje do najgore intrinzični je dio svake organizirane sportske lige. Ograničenja se javljaju kada dvije ekipe nisu međusobno igrale zbog čega sa sigurnošću ne možemo procijeniti bolju, ili su igrale više puta s različitim rezultatima.

Ukupne oklade kod licenciranih kladionica tokom prethodne sezone najveće svjetske lige američkog nogometa, NFL-a (engl. *National Football League*) procijenjene su na 100 milijardi američkih dolara [2] dok su prava prenošenja istih lige procijenjena na 110 milijardi dolara [7] za iduće desetljeće. Tolika količina uloženog novca sa sobom povlači potrebu za što točnijim projekcijama snaga ekipa s ciljem postavljanja optimalnih koeficijenata od strane kladionica te prenošenja utakmica upravo najboljih ekipa od strane televizijskih kuća.

PageRank algoritam razvijen je od strane Googlea s ciljem optimizacije pretraživanja internetskih stranica. Algoritam se bazira na pretpostavkama da postoji ograničen broj internetskih stranica te da su one međusobno povezane jednosmjernim linkovima. Supstitucijom web stranica s ekipama te linkovima s pobjedama dobijemo algoritam primjenjiv za rangiranje sportskih ekipa u sportskim natjecanjima zatvorenog sustava (kao što je i NFL).

Cilj ovog rada je opisati rad PageRank algoritma te pomoću njega simulirati rangiranje NFL ekipa tokom jedne sezone. Daljnju analizu rezultata generiranih pomoću algoritama provesti ćemo njihovom usporedbom sa službenim rangiranjima od lige, projekcijama pobjednika koje daje najveća američka sportska medijska kuća (ESPN) te sa stvarnim rezultatima.

Poglavlje 2

PageRank algoritam

U ovom poglavlju analizirati ćemo PageRank algoritam. Krenuti ćemo od njegovog nastajanja krajem prošlog tisućljeća te proučiti način na koji on funkcionira. Primarno ću se osvrnuti na njegovu originalnu namjenu rangiranja internetskih stranica, započevši s jednostavnim primjerom s malim brojem stranica.

2.1 Originalni algoritam

Kreatori Googlea, Larry Page (po kojemu je sam algoritam djelomično i dobio ime) te Sergey Brin, kao dio istraživačkog projekta na privatnom sveučilištu Stanford u Californiji 1996. godine razvili su originalni PageRank algoritam. Algoritam se koristio u prototipu prvog Googleovog pretraživača iako je patent originalno bio u vlasništvu sveučilišta Stanford. Google je naknadu za korištenje algoritma platio u vlastitim dionicama koje je Stanford 2005. prodao za 336 milijuna dolara[4] a danas bi vrijedile preko 4 milijarde dolara.

Definirajmo konačan skup internetskih stranica $s_1, s_2, \dots, s_n, n \in \mathbf{N}$. Ideja na kojoj se algoritam temelji jest da svaka internetska stranica $s_j, j = 1, \dots, n$ posjeduje inherentnu vrijednost koju ćemo zvati rang $r_j, j = 1, \dots, n$ koja proizlazi iz njene "popularnosti među poveznicama" (engl. *link popularity*). Pomoću tih vrijednosti internetske stranice moguće je poredati od prve ("najpopularnije") do n-te ("najnepopularnije"). Sukladno njihovom rangju internetske stranice bi bile poredane tijekom google pretraživanja. Kako bismo dobili vrijednost pridruženu internetskoj stranici definirajmo sljedeća dva skupa:

B_j = skup stranica koje posjeduju link na stranicu $j \subseteq \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$

L_j = skup indeksa stranica koje sadrže link na stranicu $j = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : s_i \in B_j\}$.

Naspram RankDex algoritma kojega je Larry Page citirao u svome radu, PageRank prilikom nalaženja rang ne gleda jednostavnu sumu broj linkova prema stranici već svakome linku također daje određenu "težinu" ovisno o popularnosti stranice na kojoj se nalazi te broju linkova na toj stranici. Koristiti ćemo notaciju n_i za broj linkova na stranici s_i . Laički rečeno, link s popularne stranice ima veću težinu nego link s nepopularne stranice. Nadalje, link sa stranice koja sadrži dva linka bolji je od linka sa stranice koja sadrži 10 linkova. Stoga definirajmo rang stranice s_j kao:

$$r_j = \sum_{i \in L_j} \frac{r_i}{n_i}, j = 1, \dots, n.$$

Prethodno analizi algoritma potrebno je definirati pojam usmjerenog grafa, pošto se isti učestalo koristi za vizualizaciju problema kojeg rješavamo.

Definicija 1. Usmjereni graf je uređeni par (V, E) gdje je V skup vrhova, a E je skup uređenih parova elemenata iz V . Elementi skupa E su usmjereni bridovi. \triangleleft

Pogledajmo sljedeći trivijalan primjer kako bismo shvatili kako algoritam funkcionira: Pretpostavimo da postoje četiri internetske stranice: A, B, C i D koje predstavljaju vrhove usmjerenog grafa prikazanog na slici 2.1. Nadalje, pretpostavimo da su stranice međusobno povezane na sljedeći način:

- stranica A sadrži linkove na stranice B, C i D,
- stranica B sadrži link samo na stranicu A,
- stranica C sadrži linkove na stranice B i D te
- stranica D sadrži linkove na stranice A i B.

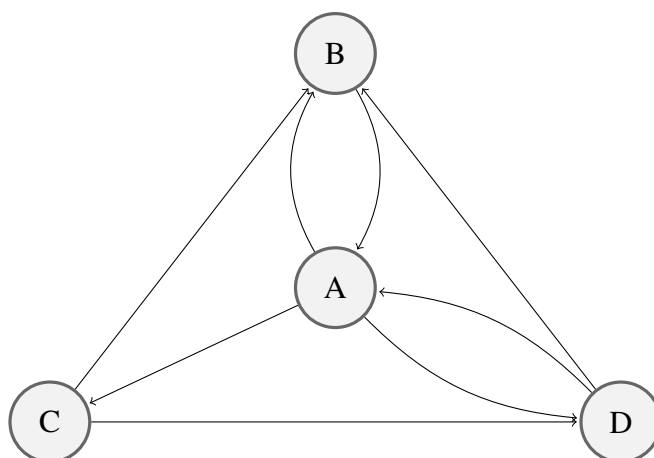
Linkovi među stranicama prikazani su pomoću usmjerenih bridova koji idu od vrhova korespondirajući stranicama na kojima se linkovi nalaze do u vrhova koji odgovaraju stranicama na koje linkovi vode. Usmjereni graf konstruiran sukladno prethodno opisanim pravilima je priložen ispod.

PageRank se bazira na pretpostavci da će korisnik nasumično prelaziti s jedne internet-ske stranice na drugu koristeći linkove.

Matrični prikaz ovog grafa konstruiramo pomoću kvadratne matrice:

$$X = [x_{ij}], X \in M_{4 \times 4} \tag{2.1}$$

$$x_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{n_i}, & i \in L_j \\ 0, & i \notin L_j \end{cases} \tag{2.2}$$



Slika 2.1: Usmjeren graf

Na našem konkretnom primjeru dobivamo matricu:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kada bismo zapisali rangove stranica kao

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

dobili bismo jednadžbu:

$$R^t = R^t \times X. \quad (2.3)$$

gdje je R^t transponirana matrica matrice R .

Definicija 2. Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$. Transponirana matrica $B = [b_{ij}] \in M_{mn}$ matrice A je ona za koju vrijedi $b_{ij} = a_{ji}$ za sve $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Transponiranu matricu matrice A označavamo s A^t . \triangleleft

Vidljivo je da se ovdje radi o sustavu od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica. On konkretno u ovom slučaju glasi:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= r_2 + \frac{1}{2}r_4 \\
 r_2 &= \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{2}r_3 + \frac{1}{2}r_4 \\
 r_3 &= \frac{1}{3}r_1 \\
 r_4 &= \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{2}r_3
 \end{aligned}$$

Kojemu rješenje glasi za svaki realan broj σ :

$$R = \begin{bmatrix} \sigma \\ \frac{3}{4}\sigma \\ \frac{1}{4}\sigma \\ \frac{1}{2}\sigma \end{bmatrix}$$

Najbolja praksa jest izabrati σ takav da vrijedi $\sum_{i=1}^n r_i = 1$, što u našem primjeru daje:

$$R = \begin{bmatrix} 0.39 \\ 0.29 \\ 0.13 \\ 0.19 \end{bmatrix}$$

Sukladno tome zaključujemo da internetske stranice iz našeg primjera možemo rangirati na način da je stranica A najznačajnija, potom B, zatim D te na posljetku stranica C.

Kako bismo bolje razumjeli dobiveno rješenje R pogledajmo sljedeće tri definicije:

Definicija 3. Neka je $A \in M_n$ matrica. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se karakteristični polinom matrice A .

Nultočke (korijeni karakterističnog polinoma) su svojstvene vrijednosti matrice A . \triangleleft

Definicija 4. Vektor $x \neq 0$ koji zadovoljava:

$$Ax = \lambda x$$

naziva se desni svojstveni vektor matrice A za svojstvenu vrijednost λ , a vektor $y \neq 0$ koji zadovoljava

$$y^t A = \lambda y^t$$

naziva se lijevi svojstveni vektor matrice A za svojstvenu vrijednost λ . \triangleleft

Sada možemo zaključiti da je R^t lijevi svojstveni vektor, odnosno matrica s jednim retkom te n stupaca, matrice X za svojstvenu vrijednost 1. Iz prirode problema je također vidljivo da nam kao rezultat ne odgovara svaki svojstveni vektor već samo pozitivan, tj. svojstveni vektor čije su sve komponente pozitivni brojevi. U poglavlju 3 ovog rada osvrnuti ćemo se na teorem koji dokazuje postojanje takve svojstvene vrijednosti te pripadajućeg pozitivnog svojstvenog vektora.

Kada bismo pak pretpostavili da se korisnik ne koristi isključivo linkovima koji se nalaze na internetskim stranicama, već u određenom postotku $1 - \alpha$ slučajeva u preglednik direktno upisuje adresu neke od stranica, tada bismo jednadžbu 2.3 morali prilagoditi na sljedeći način:

$$R^t = R^t \times Z \quad (2.4)$$

gdje smo matricu Z konstruirali pomoću prethodno korištene matrice X te novo konstruirane matrice koja predstavlja prelaženje s jedne internetske stranice na drugu (ili ponovno istu) slučajnim odabirom umjesto korištenjem linkova:

$$Y = [y_{ij}], Y \in M_n \quad (2.5)$$

$$y_{ij} = \frac{1}{n}, \forall i, j \quad (2.6)$$

Matricu Z definiramo kao:

$$Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y \quad (2.7)$$

Uvedimo u prethodno analizirani primjer pretpostavku da u 50% slučajeva korisnik ne koristi linkove već direktno prelazi sa stranice na stranicu. Tada bismo dobili:

$$\begin{aligned} Z &= \alpha X + (1 - \alpha)Y \\ &= 0.5 \times \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.5 \times \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/10 & 3/10 & 3/10 & 3/10 \\ 7/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 \\ 1/10 & 2/5 & 1/10 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/10 & 1/10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Iz čega proizlazi sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{1}{10}r_1 + \frac{7}{10}r_2 + \frac{1}{10}r_3 + \frac{2}{5}r_4 \\
 r_2 &= \frac{3}{10}r_1 + \frac{1}{10}r_2 + \frac{2}{5}r_3 + \frac{2}{5}r_4 \\
 r_3 &= \frac{3}{10}r_1 + \frac{1}{10}r_2 + \frac{1}{10}r_3 + \frac{1}{10}r_4 \\
 r_4 &= \frac{3}{10}r_1 + \frac{1}{10}r_2 + \frac{2}{5}r_3 + \frac{1}{10}r_4
 \end{aligned}$$

Rješenje toga sustava glasi:

$$R = \begin{bmatrix} \sigma \\ \frac{507}{601}\sigma \\ \frac{300}{601}\sigma \\ \frac{390}{601}\sigma \end{bmatrix}$$

Kada bismo pratili najbolju praksu dobili bismo $\sigma(1 + \frac{507+300+390}{601}) = 1$ odnosno $\sigma = 0.33$ te

$$R = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.28 \\ 0.17 \\ 0.22 \end{bmatrix}$$

Sukladno tome zaključujemo da internetske stranice iz našeg prilagođenog primjera možemo rangirati na način da je stranica A najznačajnija, potom B, zatim D te na posljepku stranica C. Vidljivo je da prilagodba algoritma u našem primjeru ne mijenja rezultate rangiranje stranica.

Poglavlje 3

Perron-Frobeniusov teorem

Kako bismo osigurali postojanje jedinstvenog rješenja PageRank algoritma oslanjamo se na Perron-Frobeniusov teorem. Prije iskaza samog teorema potrebno je definirati nekolicinu matematičkih pojmova vezanih uz svojstva matrica koje se primjenjuju u PageRank algoritmu.

3.1 Pozitivne matrice

U ovome poglavlju fokusirati ćemo se na pozitivne matrice te Perronov teorem koji govori o postojanju jedinstvenog rješenja PageRank algoritma gdje koristimo matricu Z koju smo definirali u 2.7 gdje $(1-\alpha) \neq 0$ pošto je time osigurano da je Z pozitivna matrica. Prethodno iskazu i dokazu samoga teorema potrebno je uvesti nekolicinu pojmova iskaza koje ćemo koristiti u samome teoremu te prilikom dokazivanja istoga.

Definicija 5. Za matricu $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ kažemo da je pozitivna (nenegativna) ako su joj svi elementi pozitivni (nenegativni), odnosno vrijedi $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geq 0$) za sve $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$. ◁

U daljnjem tekstu koristiti ćemo notaciju $A > 0$ ($A \geq 0$) za pozitivne (nenegativne) matrice te notaciju $A > B$ ($A \geq B$) koja je ekvivalentna $A - B > 0$ ($A - B \geq 0$) kada je matrica $A - B$ pozitivna (nenegativna).

Definicija 6. Vektorska norma na vektorskom prostoru V je funkcija $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbf{R}$ koja za svaki $x, y \in V$ te skalar α zadovoljava:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ te
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

◁

Napomenimo posebno sljedeće vektorske norme na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (3.1)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (3.2)$$

Definicija 7. Matrična norma na prostoru M_n je funkcija $\|\cdot\| : M_n \rightarrow \mathbf{R}$ koja za svaki $A, B \in M_n$ te skalar α zadovoljava:

- $\|A\| \geq 0$,
- $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ te
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$.
- $\|A B\| \leq \|A\| \|B\|$

◁

Definicija 8. Neka je $\|\cdot\|$ vektorska norma na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V . Prirodna matrična norma inducirana vektorskom normom $\|\cdot\|$ na prostoru M_n je matrična norma $\|\|\cdot\|\| : M_n \rightarrow \mathbf{R}$ definirana na sljedeći način:

$$\|\|\cdot\|\| = \max_{\|x\|=1, x \in V} \|Ax\|.$$

◁

Napomenimo posebno sljedeće prirodne matrične norme inducirane vektorskim normama opisanima u 3.1 i 3.2:

$$\|\|\cdot\|\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$$

$$\|\|\cdot\|\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

Stoga vidimo da je matična 1-norma definirana kao maksimalna suma apsolutnih vrijednosti po stupcima matrice A , dok je matična ∞ -norma definirana kao maksimalna suma apsolutnih vrijednosti po redcima matrice A .

Dokaz. Neka je $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$ te $a_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i,0} \\ \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n-1} \end{bmatrix}$ za $i = 0, \dots, n-1$.

Dokažimo prvo zaključak o matičnoj 1-normi:

Neka je $A \in M_n$ te $A = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}]$, gdje su a_0, \dots, a_{n-1} te j' takav da $\max_{0 \leq j \leq n-1} \|a_j\|_1 = \|a_{j'}\|_1$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \left\| \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \right\|_1 \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} x_j a_j \right\|_1 \\ &\leq \max_{\|x\|_1=1} \sum_{j=0}^{n-1} \|x_j a_j\|_1 \\ &\leq \max_{\|x\|_1=1} \sum_{j=0}^{n-1} |x_j| \|a_j\|_1 \\ &\leq \max_{\|x\|_1=1} \sum_{j=0}^{n-1} |x_j| \|a_{j'}\|_1 \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \|a_{j'}\|_1 \sum_{j=0}^{n-1} |x_j| \\ &= \|a_{j'}\|_1. \end{aligned}$$

Neka je e_i n -dimenzionalni vektor koji na i -tom mjestu ima vrijednost 1 dok su mu svi ostali elementi jednaki 0, tada vrijedi:

$$\|a_{j'}\|_1 = \|Ae_{j'}\|_1 \leq \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1.$$

Stoga imamo

$$\|a_j\|_1 \leq \|Ax\|_1 \leq \|a_j\|_1,$$

odnosno,

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \|a_j\|_1 = \max_{0 \leq j \leq n-1} \|a_j\|_1.$$

Dokažimo sada da je matrična ∞ -norma jednaka maksimumu suma apsolutnih vrijednosti po redcima:

Neka je $A \in M_n$ te $A = \begin{bmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ \vdots \\ a_{n-1}^t \end{bmatrix}$, sada imamo

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \left\| \begin{bmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ \vdots \\ a_{n-1}^t \end{bmatrix} x \right\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \left\| \begin{bmatrix} a_0^t x \\ a_1^t x \\ \vdots \\ a_{n-1}^t x \end{bmatrix} \right\|_\infty \\ &= \max_{\|x\|_\infty=1} (\max_i |a_i^t x|) = \max_{\|x\|_\infty=1} \max_i \left| \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_{i,p} x_p \right| \leq \max_{\|x\|_\infty=1} \max_i \sum_{p=0}^{n-1} |\alpha_{i,p} x_p| \\ &= \max_{\|x\|_\infty=1} \max_i \sum_{p=0}^{n-1} (|\alpha_{i,p}| |x_p|) \leq \max_{\|x\|_\infty=1} \max_i \sum_{p=0}^{n-1} (|\alpha_{i,p}| \max_k |x_k|) \leq \max_i \sum_{p=0}^{n-1} (|\alpha_{i,p}| \|x\|_\infty) \\ &= \max_i \sum_{p=0}^{n-1} |\alpha_{i,p}| = \max_i \|a_i\|_1. \end{aligned}$$

Stoga vrijedi $\|A\|_\infty \leq \max_i \|a_i\|_1$.

Neka je k takav da je $\max_i \|a_i\|_1 = \|a_k\|_1$ te $y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$ takav da je

$$a_k^t y = |\alpha_{k,0}| + |\alpha_{k,1}| + \dots + |\alpha_{k,n-1}| = \|a_k\|_1.$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \\ &= \max_{\|x\|_\infty=1} \left\| \begin{bmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ \vdots \\ a_{n-1}^t \end{bmatrix} x \right\|_\infty \geq \left\| \begin{bmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ \vdots \\ a_{n-1}^t \end{bmatrix} y \right\|_\infty \\ &= \left\| \begin{bmatrix} a_0^t y \\ a_1^t y \\ \vdots \\ a_{n-1}^t y \end{bmatrix} \right\|_\infty \geq |a_k^t y| = a_k^t y = \|a_k\|_1 = \max_i \|a_i\|_1 \end{aligned}$$

Stoga imamo

$$\max_i \|a_i\|_1 \leq \|A\|_\infty \leq \max_i \|a_i\|_1.$$

□

Definicija 9. Neka je $A \in M_n$ matrica i V n -dimenzionalni vektorski prostor. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, onda se dimenzija svojstvenog podprostora $V_A(\lambda) = \{x \in V : Ax = \lambda x\}$ naziva geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ i označava s $d(\lambda)$. ◁

Definicija 10. Neka je $A \in M_n$ matrica i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je karakteristični polinom oblika $k_A = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda)$, $p(\lambda_0) \neq 0$, $l \in \mathbb{N}$. Broj l zovemo algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ_0 i označavamo ga s $l(\lambda_0)$. ◁

Definicija 11. Spektralni radijus $\rho(A)$ kvadratne matrice A je broj

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

gdje je $\sigma(A)$ skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A . ◁

Lema 12. Neka je $A \in M_n$ te neka je $\|\cdot\|$ prirodna matrična norma na M_n . Tada vrijedi:

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

Dokaz. Neka je x svojstveni vektor matrice A koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ . Konstruirajmo matricu X takvu da joj je svaki stupac jednak vektoru x . Tada očito vrijedi $AX = \lambda X$ iz čega proizlazi:

$$|\lambda| \|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \|X\|.$$

Iz gornje jednadžbe dobijemo da je $|\lambda| \leq \|A\|$, a pošto je λ proizvoljna svojstvena vrijednost vrijedi $\rho(A) \leq \|A\|$. □

Lema 13. Neka je $A \in M_n$ te $\epsilon > 0$, tada postoji prirodna matrična norma $\| \cdot \|$ takva da:

$$\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon.$$

Dokaz. Jordanova dekompozicija matrice A sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ glasi:

$$A = S \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} S^{-1},$$

gdje je

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix},$$

$S \in M_n$ regularna matrica, n_i je algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ_i te je $\sum_{i=1}^k n_k = n$. Nadalje, konstruirajmo matricu:

$$D(\eta) = \begin{bmatrix} D_{n_1}(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{n_2}(\eta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & D_{n_k}(\eta) \end{bmatrix},$$

gdje je

$$D_m(\eta) = \begin{bmatrix} \eta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \eta^m \end{bmatrix}.$$

Tada vrijedi:

$$D(1/\epsilon)S^{-1}ASD(\epsilon) = \begin{bmatrix} B_{n_1}(\lambda_1, \epsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{n_2}(\lambda_2, \epsilon) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & B_{n_k}(\lambda_k, \epsilon) \end{bmatrix},$$

gdje je

$$B_m(\lambda, \epsilon) = \begin{bmatrix} \lambda & \epsilon & & & \\ & \lambda & \epsilon & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & \epsilon \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Definiramo prirodnu matricnu normu $\| \cdot \|$ za svaki $M \in M_n$ kao:

$$\|M\| := \|D(1/\epsilon)S^{-1}ASD(\epsilon)\|_1.$$

Stoga vrijedi,

$$\|A\| = \max_{1 \leq l \leq k} (|\lambda_l| + \epsilon) = \rho(A) + \epsilon.$$

□

Lema 14. Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz nenegativnih brojeva takvih da

$$a_{i+j} \leq a_i + a_j, \quad \forall i, j \geq 1.$$

Tada postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ te iznosi $\inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$.

Dokaz. Neka je $L = \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$. Za svaki $\epsilon > 0$ po definiciji infimuma postoji n takav da $a_n < n(L + \epsilon)$. Neka je $b = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$. Kada je $m \geq n$, neka je $m = qn + r$ gdje je $0 \leq r < n$. Iz definicije niza vrijedi

$$a_{mq+r} = a_{n+n+\dots+n+r} \leq a_n + a_n + \dots + a_n + a_r \leq qa_n + b.$$

Stoga

$$\frac{a_m}{m} \leq \frac{qa_n}{m} + \frac{b}{m} < \frac{qn(L + \epsilon)}{m} + \frac{b}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} L + \epsilon,$$

pošto $\frac{qn}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$.

□

Teorem 15 (Gelfrandova formula). Neka je $\| \cdot \|$ prirodna matricna norma na M_n , tada vrijedi:

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}, \quad \forall A \in M_n. \quad (3.3)$$

Dokaz. Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A takva da $|\lambda| = \rho(A)$ te x svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ . Pošto vrijedi $\lambda x = Ax$ očito vrijedi i $\lambda^n x = A^n x, \forall n \in \mathbb{N}$. Stoga zaključujemo da je λ^n svojstvena vrijednost matrice A^n te $\rho(A)^n$ je njen spektralni radijus.

Za dani $k \geq 0$ po lemi 12 vrijedi:

$$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|, \quad \text{odnosno } \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}.$$

Iz toga proizlazi $\rho(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$. Sukladno lemi 14 te nizu $(a_n = \log(\|A^n\|^{1/n}))_{n \in \mathbf{N}}$ koji zadovoljava uvjete leme taj limes postoji.

Dokažimo sada da vrijedi i $\rho(A) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$, odnosno da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $K \geq 0$ takav da vrijedi $\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \epsilon$, $\forall k \geq K$. Iz leme 13 znamo da postoji prirodna matična norma $\|\cdot\|_\alpha$ na M_n takva da vrijedi $\|A\|_\alpha \leq \rho(A) + \epsilon/2$. Nadalje, iz ekvivalentnosti normi na M_n znamo da postoji konstanta $C > 0$ takva da $\|M\|_\alpha \leq C\|M\|$; $\forall M \in M_n$. Sada, za svaki $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|A^k\|_\alpha &\leq C\|A^k\| \leq C\|A\|^k \leq C(\rho(A) + \epsilon/2)^k \\ \|A^k\|_\alpha^{1/k} &\leq C^{1/k}(\rho(A) + \epsilon/2) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \rho(A) + \epsilon/2. \end{aligned}$$

Iz doljnje jednadžbe zaključujemo da postoji $K \geq 0$ da vrijedi $\|A^k\|_\alpha^{1/k} \leq \rho(A) + \epsilon$, $\forall k \geq K$ pa je stoga i iskaz teorema dokazan. \square

Lema 16. Neka je $A > 0 \in M_n$ i neka su θ i ψ dva različita vektora za koje vrijedi $\theta \geq \psi$. Tada vrijedi $A\theta > A\psi$ te postoji $\epsilon > 0$ takav da je $A\theta > (1 + \epsilon)A\psi$.

Dokaz. Dokažimo prvo da je $A\theta > A\psi$. To vrijedi ako i samo ako je

$$[A\theta - A\psi]_i = [A(\theta - \psi)]_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\theta_j - \psi_j) > 0.$$

Iz pozitivnosti matrice A te pretpostavki o vektorima θ i ψ pak slijedi:

$$0 < \min_{i,j} (a_{ij}) \sum_{j=1}^n (\theta_j - \psi_j) < \sum_{j=1}^n \min_{i,j} (a_{ij})(\theta_j - \psi_j) \leq [A(\theta - \psi)].$$

Time smo dokazali prvi dio iskaza leme.

Drugi dio iskaza leme proizlazi iz činjenice da je vektor $A(\theta - \psi)$ pozitivan, tj. da postoji $\epsilon > 0$ takav da ke vektor $A(\theta - \psi) - \epsilon\psi$ i dalje pozitivan. To povlači $A\theta > (1 + \epsilon)A\psi$. \square

Lema 17. Ako su $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbf{C}$ takvi da $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$, onda postoji $c \in \mathbf{C}$ takav da je $cz_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Dokaz. Neka je $z \in \mathbf{C}$ tada za $c = e^{-i \arg(z)}$ vrijedi $cz = |z|$. Dokazali smo da za svaki $z \in \mathbf{C}$ postoji $c \in \mathbf{C}$ takav da $cz = |z|$. Ako je $z = 0$ za c možemo uzeti bilo koji kompleksni broj. Uzmimo $d = e^{-i\delta}$ takav da vrijedi $d(z_1 + \dots + z_n) = |z_1| + \dots + |z_n|$, tada imamo

$$\begin{aligned} |z_1 + \dots + z_n| &= \operatorname{Re}(|z_1 + \dots + z_n|) \\ &= \operatorname{Re}(d(z_1 + \dots + z_n)) \\ &= \operatorname{Re}(d|z_1|) + \dots + \operatorname{Re}(d|z_n|) \\ &\leq |dz_1| + \dots + |dz_n| \\ &= |z_1| + \dots + |z_n|. \end{aligned}$$

Sukladno pretpostavci leme vrijedi jednakost, odnosno $Re(dz_i) = |dz_i|$, $i = 1, \dots, n$. Stoga, za $c = e^{i\delta}$ tvrdnja je zadovoljena. \square

Lema 18. *Neka je A pozitivna matrica te neka je ψ vektor i j proizvoljan indeks. Ako vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}|\psi_j| = \left| \sum_{i=1}^n a_{ij}\psi_j \right|$$

tada postoji kompleksan broj $c \neq 0$ tako da je $c\psi$ nenegativan vektor.

Dokaz. Primjenom leme 17 na vektore $a_{ij}\psi_j$ znamo da postoji $c \in \mathbf{C}$ takav da $ca_{ij}\psi_j > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. Kako je riječ o pozitivnoj matrici imamo nejednakost $c\psi_j > 0$ čime dokazujemo samu lemu. \square

Lema 19. *Neka je $A = [a_{ij}]$ nenegativna matrica. Tada je $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$ te $\rho(A) \leq \|A\|_1$. Ako su sume po svim redcima matrice A jednake, tada vrijedi $\rho(A) = \|A\|_\infty$. U slučaju da su sve sume po stupcima jednake, tada vrijedi $\rho(A) = \|A\|_1$.*

Dokaz. Neka je λ proizvoljna svojstvena vrijednost matrice A . Tada, po propoziciji 12 znamo da vrijedi

$$|\lambda| \leq \rho(A) \leq \|A\|$$

za svaku prirodnu matricnu normu. U slučaju kada su sume svih redaka jednake znamo da je vektor $[1 \dots 1]^t$ svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda = \|A\|_\infty$, što po gore priloženoj nejednadžbi dobijemo iskaz leme.

Kada su pak sume stupaca jednake, dokaz je analogan za matricu A^t . Iz toga proizlazi da je $\lambda = \|A^t\|_\infty = \|A\|_1$, iz čega (uz gore priloženu nejednadžbu) proizlazi iskaz leme. \square

Teorem 20. *Neka je $A = [a_{ij}]$ nenegativna matrica. Tada vrijedi:*

$$\min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

Dokaz. Kako bi dokaz bio pregledniji uvedimo notaciju $\theta = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$. Definirajmo matricu $B = [b_{ij}]$ kao:

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \forall i, j \\ \theta \frac{a_{ij}}{\sum_{l=1}^n a_{il}}, & \forall i, j \end{cases}$$

Očito vrijedi $A \geq B \geq 0$ te $\sum_{j=1}^n b_{ij} = \theta$ za sve i od 1 do n . Iz leme 19 proizlazi da je $\rho(B) = \theta$, dok iz teorema 15 proizlazi da vrijedi $\rho(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\|_1^{1/k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_1^{1/k} = \rho(A)$ iz čega dobivamo minimum mogućeg spektralnog radijusa dok direktno iz leme 19 dobivamo njegov mogući maksimum. \square

Teorem 21 (Perron). *Neka je $A \in M_n$ pozitivna matrica. Tada vrijedi:*

- (i) $\rho(A) > 0$,
- (ii) $\rho(A)$ je svojstvena vrijednost matrice A i njoj pripada pozitivan svojstveni vektor,
- (iii) $\rho(A)$ je jedinstvena svojstvena vrijednost na kružnici $|\lambda| = \rho(A)$,
- (iv) $\rho(A)$ ima geometrijsku krajnost 1 te
- (v) $\rho(A)$ ima algebarsku kratnost 1.

Dokaz. (i) Primjenom teorema 20 na matricu A dobijemo:

$$0 < \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(A)$$

- (ii) Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A takva da $|\lambda| = \rho(A)$. Pretpostavimo da postoji njoj pridružen svojstveni vektor ψ . Neka je Ψ vektor takav da vrijedi $\Psi_j = |\psi_j|$, $\forall i = 1, \dots, n$ za kojega tada vrijedi:

$$(A\Psi)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}|\psi_j| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}\psi_j \right| = |\lambda\psi_i| = \rho\Psi_i$$

Odnosno $A\Psi \geq \rho(A)\Psi$.

U slučaju da u gornjem zapisu vrijedi jednakost dokaz je gotov. Kada vrijedi nejednakost primjenjujemo lemu 16 na nejednadžbu $A^2\Psi > A\rho(A)\Psi$ iz čega proizlazi:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ t.d. } A^2\Psi > (1 + \epsilon)\rho(A)A\Psi.$$

Zato što je matrica A pozitivna, matrica A^m je pozitivna za svaki prirodni broj m . Stoga množenjem obje strane nejednakosti s A^m ne mijenjamo nejednakost:

$$A^{m+2}\Psi \geq (1 + \epsilon)\rho(A)A^{m+1}\Psi$$

Pošto to vrijedi za svaki m :

$$\begin{aligned} A^{m+1} &\geq (1 + \epsilon)\rho(A)A^m\Psi \\ &\geq (1 + \epsilon)^2\rho(A)^2A^{m-1}\Psi \\ &\vdots \\ &\geq (1 + \epsilon)^m\rho(A)^m A\Psi \end{aligned}$$

Dobivamo kontradikciju s Gelfandovom formulom $\rho(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\|^{1/m} \geq (1 + \epsilon)\rho(A)$.

Zaključujemo da vrijedi jednakost vektora $A\Psi = \rho(A)\Psi$. Štoviše, Ψ je svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti $\rho(A)$ te za njega možemo zaključiti da nije samo nenegativan, već je pozitivan vektor pošto je $A|\psi| = \rho(A)|\psi|$ pozitivan.

- (iii) Pretpostavimo da postoji svojstvena vrijednost λ takva da pripada kružnici $|\lambda| = \rho(A)$ no $\lambda \neq \rho(A)$. Neka je Ψ vektor definiran sukladno dijelu (i) dokaza ovog teorema. Iz toga vrijedi $A\Psi = \rho(A)\Psi$, odnosno:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}|\psi_j| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}\psi_j \right|, \forall 1 \leq i \leq n.$$

Vidimo da to zadovoljava uvijete leme 18 što znači da postoji kompleksan broj c različit od nule takav da vrijedi $c\psi \geq 0$. Stoga vrijedi:

$$\lambda(c\psi) = c(\lambda\psi) = c(A\psi) = A(c\psi) \geq 0.$$

štp također povlači da su $c\psi$ te λ nenegativni.

Pošto je $\rho(A)$ jedina nenegativna svojstvena vrijednost na kružnici $|\lambda| = \rho(A)$ dolazimo do kontradikcije.

- (iv) Neka je ψ pozitivan svojstveni vektor prethodno definirana u ovom dokazu te neka je ψ' linearno nezavisni svojstveni vektor svojstvene vrijednosti $\rho(A)$.

Možemo pretpostaviti da je ψ' realan; u suprotnome bismo mogli razdvojiti realan i imaginarni dio vektora te ih zapisati kao dva zasebna vektora koji bi ponovo bili jedinstveni vektora pošto su A te $\rho(A)$ realni. Jedan od njih mora biti linearno nezavisni o ψ .

Neka je $c > 0$ takav da je $\psi - c\psi'$ nenegativan vektor te je barem jedan njegov element jednak nuli. On ne može biti nulvektor pošto su ψ te ψ' po pretpostavkama linearno nezavisni, no vrijedi:

$$\psi - c\psi' = \frac{A[\psi - c\psi']}{\rho(A)} > 0$$

Kontradikcija proizlazi iz toga da smo odabrali c takav da je barem jedan element jednak nuli. Zaključujemo da su ψ te ψ' linearno zavisni, odnosno $\rho(A)$ ima geometrijsku kratnost 1.

(v) Sukladno prethodnim dijelovima dokaza, neka je ψ desni svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\rho(A)$. Znamo da je on jedinstven i pozitivan.

Neka je π pozitivan lijevi svojstveni vektor od $\rho(A)$. Osiguravamo to primjenom iskaza (i) ovoga teorema za matricu A^t .

Ovaj par vektora omogućuje nam dekompoziciju \mathbb{R}^n na direktnu sumu.

Potprostor $\pi^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \pi x = 0\}$ je $n - 1$ dimenzionalan te mu vektor ψ ne pripada pošto

$$\pi\psi = \sum \pi_j \psi_j > 0.$$

Time smo dokazali da je

$$\mathbb{R}^n = \text{span}\{\psi\} \oplus \pi^\perp.$$

Neka je $\{\psi_2, \dots, \psi_n\}$ baza potprostora π^\perp te neka je X matrica takva da:

$$X = \begin{bmatrix} \psi & \psi_2 & \dots & \psi_n \end{bmatrix}.$$

Tada XAX^{-1} ostavlja invarijantne prostore $X^{-1}\text{span}\{\pi\} = \text{span}\{e_1\}$ te $X^{-1}\pi^\perp = \text{span}\{e_2, \dots, e_n\}$. Ova izmjena bazi pretvara A u dijagonalnu blok matricu:

$$X^{-1}AX = \left[\begin{array}{c|c} \rho(A) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & Y \end{array} \right]$$

za neku matricu Y .

Neka λ ima algebarsku kratnost veću od 1. Tada ona također mora biti svojstvena vrijednost matrice Y , što povlači činjenicu da Y mora imati svojstveni vektor za $\rho(A)$, što se kosi s iskazom (ii) ovog teorema.

Zaključujemo da $\rho(A)$ ima algebarsku kratnost 1.

□

Definicija 22. Neka je $A \in M_n$ pozitivna matrica. Jedinstveni vektori ψ i π konstruirani kao u dokazu točke (v) prethodnog teorema nazivaju se desni i lijevi Perronov vektor te za njih vrijedi:

$$\begin{aligned} A\psi &= \rho(A)\psi, & \sum_{i=1}^n \psi_i &= 1, & \psi_i &> 0, \forall i \\ \pi^t A &= \rho(A)\pi^t, & \sum_{i=1}^n \psi_i \pi_i &= 1, & \pi_i &> 0, \forall i. \end{aligned}$$

◁

Iz ovoga je očito da je lijevi Perronov vektor rješenje jednadžbe 2.4 te da on zadovoljava najbolju praksu, tj. da vrijedi $\sum_{i=1}^n r_i = 1$.

3.2 Nenegativne matrice

Kako bismo mogli dokazati da postoji jedinstveno rješenje PageRank algoritma u slučajima kada se korisnik koristi isključivo linkovima te ne postoji link između određene dvije stranice, odnosno $\exists x_{ij} = 0$ potrebno je poopćiti Perronov teorem na nenegativne matrice. Prethodno iskazu teorema prođimo kroz leme, propozicije i teoreme koje ćemo koristiti u dokazu Perron-Frobeniusovog teorema:

Lema 23. *Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $A \in M_n$. Tada su $\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n + 1$ svojstvene vrijednosti matrice $I + A$ te vrijedi $\rho(I + A) = \rho(A) + 1$. Ako je A nenegativna matrica tada vrijedi $\rho(I + A) = \rho(A) + 1$.*

Dokaz. Pošto za vektor x koji je svojstveni vektor matrice A s pripadajućom svojstvenom vrijednosti λ vrijedi:

$$(I + A)x = x + Ax = x + \lambda x = x(1 + \lambda)$$

očito vrijedi da je $1 + \lambda$ svojstvena vrijednost matrice $I + A$.

Nadalje, spektralni radijus matrice $I + A$ je $\rho(A) + 1$ jer:

$$\rho(I + A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i + 1| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| + 1 = \rho(A) + 1.$$

Nenegativnost matrice A povlači da su sve njene svojstvene vrijednosti veće od 0, pa je stoga i spektralni radijus veći od 0. Samim time dokazan je zadnji dio leme. \square

Propozicija 24. *Ako je $A \in M_n$ nenegativna matrica, tada je $\rho(A)$ svojstvena vrijednost matrice A te postoji nenegativan svojstveni vektor $x \neq 0$ takav da vrijedi $Ax = \rho(A)x$.*

Dokaz. Definiramo niz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strogo pozitivnih brojeva koji konvergira prema nuli. Sukladno tome definiramo niz pozitivnih matrica $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takav da je, za matricu $J_n \in M_n$ koja na svakom mjestu ima jedinicu:

$$B_n = A + b_n J_n.$$

Sukladno Perronovom teoremu raspisujemo:

$$B_n x(b_n) = \rho(B_n) x(b_n), \quad x(b_n) > 0, \quad \|x(b_n)\|_1 = 1.$$

Niz $x(b_n)$ svojstvenih vektora iz gornje jednadžbe je podskup kompaktnog skupa $\{y : \|y\|_1 = 1\}$, što znači da sadrži konvergentan podniz. Neka je $\lim_{j \rightarrow \infty} x(b_{n_j}) = x$ te iz pretpostavki propozicije vrijedi $x \geq 0$ te $\|x\|_1 = 1$. Za odgovarajući podniz $(b_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ te

vrijedi $(b_{n_j}) > (b_{n_{j+1}})$, $\forall j$ te $\lim_{j \rightarrow 0} b_{n_j} = 0$.

Pošto je $B_{k_j} > B_{k_{j+1}}$ vrijedi da je $\rho(B_{k_j}) > \rho(B_{k_{j+1}}) \geq \rho(A)$ vrijedi i $\rho = \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(B_{k_j}) \geq \rho(A)$. Primijenivši limes na prethodno konstruirani podniz $j \rightarrow k_j$ dobijemo $Ax = \rho x$, odakle $\rho \geq \rho(A)$. \square

Definicija 25. Kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n$ reducibilna ako postoji permutacijska matrica $P \in M_n$ takva da vrijedi:

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad B \in M_r, \quad D \in M_{n-r}, \quad 1 \leq r \leq n-1.$$

Kvadratna matrica $A \in M_n$ je ireducibilna ako nije reducibilna. \triangleleft

Definicija 26. Neka je $A \in M_n$. Usmjereni graf $\mathcal{G} = (V, E)$ gdje $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ te $E = \{\overrightarrow{v_i v_j} : a_{ij} \neq 0\}$ naziva se pripadajući graf matrice A te se označava s $\mathcal{G}(A)$. Put od vrha v_k do vrha v_l je niz usmjerenih bridova $\overrightarrow{v_k v_{r1}}, \overrightarrow{v_{r1} v_{r2}}, \dots, \overrightarrow{v_{rj-1} v_l}$ pri čemu je j duljina puta. Graf $\mathcal{G}(A)$ je jako povezan ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putem. \triangleleft

Propozicija 27. Matrica $A \in M_n$ je ireducibilna ako i samo ako je njen graf $\mathcal{G}(A)$ jako povezan.

Dokaz. Neka je A' reducibilna matrica te pod definiciji postoji P takav da vrijedi

$$P^t A' P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = A'', \quad B \in M_r, \quad D \in M_{n-r}, \quad 1 \leq r \leq n-1.$$

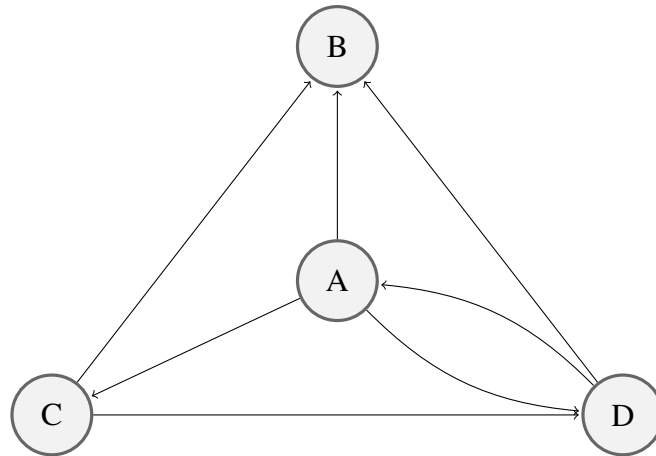
Grafovi $\mathcal{G}(A')$ i $\mathcal{G}(A'')$ razlikuju se samo u oznakama čvorova.

Kada bismo tražili put u $\mathcal{G}(A'')$ koji počinje u nekom od čvorova v''_{r+1}, \dots, v''_n , a završava u nekom od čvorova v''_1, \dots, v''_r . Na tome putu bi morao postojati brid koji počinje u prvoj te završava u drugoj particiji, što nije moguće pošto su ti elementi matrice A'' jednaki nuli. Stoga zaključujemo da $\mathcal{G}(A')$ nije jako povezan.

Dokažimo sad obrnutu ovisnost. Pretpostavimo da $\mathcal{G}(A)$ nije jako povezan. To bi značilo da postoje dva vrha v_k i v_l između kojih ne postoji put.

Konstruirajmo particiju skupa vrhova \mathcal{V} tako da je \mathcal{V}_l skup svih vrhova koji su povezani s vrhom v_l (uključujući i sam vrh v_l) te $\mathcal{V}_k = \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_l$. Uvedimo renumeraciju krenuvši od vrhova iz \mathcal{V}_l a potom \mathcal{V}_k . Neka je $|\mathcal{V}_l| = r$. Odgovarajućom permutacijom P transformiramo A u $A' = P^t A P$. Kada bi za neki a'_{ij} , $i \in r+1, \dots, n$, $j \in 1, \dots, r$ vrijedilo da je različit od nule tada bi se to kosilo s uvjetima konstruirane particije, što znači da je A' reducibilna. \square

Ireducibilnost matrice korištene u PageRank algoritmu je ključna za primjenu samog algoritma. Analizirajmo sljedeći primjer kako bismo vidjeli moguće probleme koji se pojavljuju prilikom korištenja reducibilnih matrica u algoritmu:

Slika 3.1: Usmjeren graf ireducibilne matrice X'

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Odnosno imamo isti slučaj kao u primjeru iz poglavlja 2 no stranica B ne sadrži linkove niti na jednu drugu stranicu, što je vidljivo iz ispod priloženog grafa. Stoga očito matrica X' nije ireducibilna jer kada bi korisnik linkom došao na stranicu B on bi zaglavio. Analizom pripadajućeg sustav jednažbi:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{4}r_4 \\ r_2 &= \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{2}r_3 + \frac{1}{2}r_4 \\ r_3 &= \frac{1}{3}r_1 \\ r_4 &= \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{2}r_3 \end{aligned}$$

uviđamo da je jedino rješenje nulvektor. Zaključujemo da u ovom slučaju PageRank algoritam nije primjenjiv.

Propozicija 28. *Nenegativna matrica $A \in M_n$ je ireducibilna ako i samo ako je $(I+A)^{n-1} > 0$.*

Dokaz. Ekvivalentna tvrdnja gornjoj tvrdnji je: A je reducibilna matrica ako i samo ako matrica $(I + A)^{n-1}$ sadrži barem jednu nulu. Dokažimo tu tvrdnju:

Pretpostavimo da je A nenegativna reducibilna matrica. Tada sukladno definiciji reducibilnosti matrice postoji P takav da vrijedi

$$P^t A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = A', B \in M_r, D \in M_{n-r}, 1 \leq r \leq n-1.$$

Matrice $(A')^k, k \in 2, \dots, n-1$ sadrže nule u donjem lijevom bloku što povlači njihovu reducibilnost.

Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned} P^t (I + A)^{n-1} P &= P^t (I + (n-1)A + \binom{n-1}{2} A^2 + \dots + A^{n-1}) P \\ &= P^t P + (n-1) P^t A P + \binom{n-1}{2} P^t A^2 P + \dots + P^t A^{n-1} P \\ &= I + (n-1) A' + \binom{n-1}{2} (A')^2 + \dots + (A')^{n-1} \end{aligned}$$

Pošto svaki element sume ima nulu u donjem lijevom bloku znamo da je matrica $(I + A')^{n-1}$ također reducibilna, odnosno da joj je minimalno jedan od elemenata jednak nuli.

Pretpostavimo pak da za indekse p, q matrica $(I + A)^{n-1}$ na mjestu (p, q) ima nulu. Pošto vrijedi:

$$(I + A)^{n-1} = I + (n-1)A + \binom{n-1}{2} (A')^2 + \dots + A^{n-1}$$

te znamo da su svi pribrojnici nenegativni, svaki od pribrojnika na mjestu (p, q) mora imati nulu. Pošto je jedan od sumanada I znamo da $p \neq q$. Zaključujemo da ne postoji put u $\mathcal{G}(A)$ od vrha v_p do vrha v_q jer matrica A^n ima nulu na mjestu (p, q) za svaki $n \in \mathbf{N}$, odnosno graf $\mathcal{G}(A)$ nije jako povezan. Sukladno propoziciji 27 to povlači reducibilnost matrice A . \square

Prijedimo sada konačno na glavni teorem ove cjeline, pomoću kojega osiguravamo ne samo postojanje rješenja kojega dobijemo pomoću PageRank algoritma, već i njegovu pozitivnost te jedinstvenost.

Teorem 29 (Perron-Frobenius). *Neka je $n \geq 2$ te $A \in M_n$ ireducibilna i nenegativna matrica. Tada je.*

(i) $\rho(A) > 0$,

(ii) $\rho(A)$ ima algebarsku kratnost 1,

(iii) postoji jedinstveni desni Perronov vektor te

(iv) poroži jedinstven lijevi Perronov vektor.

Dokaz. (i) Iz ireducibilnost matrice A proizlazi da je svaki njen red/stupac različit od 0, odnosno vrijedi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0, \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} > 0, \quad \forall j$$

Sada iz teorema 20 proizlazi

$$0 < \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(A)$$

$$0 < \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \rho(A)$$

(ii) Pretpostavimo suprotno, odnosno da $\rho(A)$ ima algebarsku kratnost veću od 1. Tada iz leme 23 proizlazi da svojstvena vrijednost $1 + \rho(A) = \rho(I + A)$ matrice $I + A$ ima algebarsku kratnost veću od 1. Stoga i $(1 + \rho(A))^{n-1} = \rho((I + A)^{n-1})$ ima algebarsku kratnost veću od 1 što je u kontradikciji s iskazom (v) teorema 21 jer je po propoziciji 28 ta matrica pozitivna.

(iii) Propozicija 24 povlači postojanje nenegativnog svojstvenog vektora pridruženog spektralnom radijusu matrice A . Ireducibilnost matrice A po propoziciji 28 daje pozitivnost matrice $(I + A)^{n-1}$ te tada iz leme 23 proizlazi:

$$\begin{aligned} (I + A)^{n-1} &= (I + (n-1)A + \binom{n-1}{2}A^2 + \dots + A^{n-1})x \\ &= x + (n-1)Ax + \binom{n-1}{2}A^2x + \dots A^{n-1}x \\ &= x + (n-1)\rho(A)x + \binom{n-1}{2}\rho(A)^2x + \dots \rho(A)^{n-1}x \\ &= (1 + \rho(A))^{n-1}x \\ &= \rho(I + A)^{n-1}x \end{aligned}$$

Iz čega vidimo da je x svojstveni vektor matrice $(I + A)^{n-1}$. Po Perronovom teoremu sada znamo da je x jedinstveni pozitivan vektor te postoji α takav da $\sum_{i=1}^n \alpha x_i = 1$.

(iv) Dokaz je ekvivalentan dokazu iskaza (iii) za matricu A^t .

□

Poglavlje 4

Rangiranje NFL ekipa

U ovom poglavlju analizirati ćemo primjenu PageRank algoritma na sportske ekipe, točnije rangirati ćemo ekipe koje su se natjecale u prošlogodišnju sezonu NFL-a. Rezultate dobivene algoritmom usporediti ćemo sa stvarnim rezultatima utakmica te s prognozama televizijskih kuća koje se bave analizom utakmica kao i s prognozama danih od strane kladionica.

4.1 Prilagodba algoritma

Prije nego što se upustimo u analizu NFL ekipa potrebno je vidjeti način primjene PageRank algoritma s ciljem rangiranja sportskih ekipa u zatvorenom obliku natjecanja. Osvrtom na rad [12], koji se bavi rangiranjem NFL ekipa iz 2005. sezone pomoću PageRank algoritma, vidimo da je algoritam prilagođen tako da je sada s_1, s_2, \dots, s_n skup NFL ekipa (u originalnom algoritmu to je bio konačan skup internet stranica) koji je sam po sebi ograničen. Nadalje, skup B_j nije skup stranica koje posjeduju link na stranicu s_j , već su:

$$B_j = \text{skup ekipa koje su izgubile od ekipe } j \subseteq \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

te je L_j skup indeksa ekipa koje su izgubile od ekipe j :

$$L_j = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : s_i \in B_j\}.$$

Matrica $X \in M_n$ je također prilagođena tako da reflektira činjenicu da pobijediti ekipu 30 - 0 vrijedi značajno više nego pobijediti ekipu 30 - 29:

$$x_{ij} := \begin{cases} \frac{w_{ij}}{\sum_{i \in L_j} w_{ij}}, & i \in L_j \\ 0, & i \notin L_j \end{cases} \quad (4.1)$$

gdje je w_{ij} gol razlika s kojom je ekipa j pobijedila ekipu i . U slučaju kada ekipe igraju više puta te ista ekipa j pobijedi ekipu i tada je w_{ij} = suma gol razlika tih utakmica, ako pak prvi put pobijedi ekipa i dok drugi put pobijedi ekipa j to interpretiramo kao da stranica i sadrži link na stranicu j te obrnuto. Na primjer imamo pet ekipa: Pittsburgh (Pit), Chicago (Chi), Carolina (Car), New Orleans (NO) te Tampa Bay (TB); uzmimo da su tim poretком one s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 . Neka su odigrane sljedeće utakmice:

- Pit 30 - 18 Chi,
- Chi 20 - 10 Car,
- Chi 24 - 21 TB,
- Car 30 - 20 TB,
- Car 14 - 34 TB,
- Car 17 - 14 NO,
- Car 24 - 27 NO te
- NO 14 - 27 TB.

Tada bi matrica $W = [w_{ij}] \in M_5$ bila:

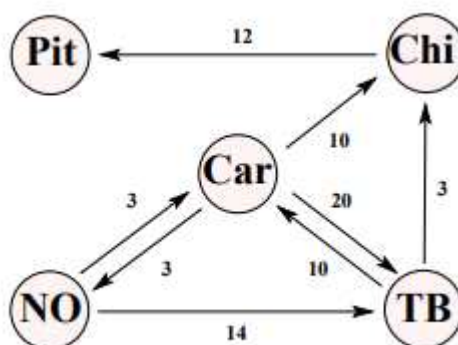
$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dok bi matrica X definirana sukladno 4.1 bila:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10/33 & 0 & 1/11 & 20/33 \\ 0 & 0 & 3/17 & 0 & 14/17 \\ 0 & 3/13 & 10/13 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicija 30. Težinski graf je par (\mathcal{G}, ω) gdje je $\mathcal{G} = (V, E)$ graf, a $\omega : E \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ neka funkcija koju nazivamo težinska funkcija. Broj $\omega(e)$ nazivamo težinom grafa. \triangleleft

Težinski graf u ovom primjeru izgledao bi:



Slika 4.1: Usmjeren graf za priložene momčadi i odigrane utakmice

4.2 Podaci

NFL je zatvorena liga (ne postoji mogućnost relegacije kao na primjer iz HNL-a u 2. HNL) s 32 tima koja su podijeljena u 2 konferencije: Američku nogometnu konferenciju (engl. *American football conference*, AFC) i Nacionalnu nogometnu konferenciju (engl. *National football conference*, NFC). Svaka konferencija sadrži 16 timova podijeljenih u 4 divizije. Sama podijela, zajedno s kraticama korištenim za timove, prikazana je u slici ispod.

| Konferencija | Divizija | Tim | Kratika |
|----------------------|----------|-----------------------|---------|
| AFC | North | Baltimore Ravens | BLT |
| | | Cincinnati Bengals | CIN |
| | | Cleveland Browns | CLV |
| | | Pittsburgh Steelers | PIT |
| | South | Houston Texans | HST |
| | | Indianapolis Colts | IND |
| | | Jacksonville Jaguars | JAX |
| | | Tennessee Titans | TEN |
| | East | Buffalo Bills | BUF |
| | | Miami Dolphins | MIA |
| | | New England Patriots | NE |
| | | New York Jets | NYJ |
| | West | Denver Broncos | DEN |
| Kansas City Chiefs | | KC | |
| Las Vegas Raiders | | LV | |
| Los Angeles Chargers | | LAC | |
| | | | |
| NFC | North | Chicago Bears | CHI |
| | | Detroit Lions | DET |
| | | Green Bay Packers | GB |
| | | Minnesota Vikings | MIN |
| | South | Atlanta Falcons | ATL |
| | | Carolina Panthers | CAR |
| | | New Orleans Saints | NO |
| | | Tampa Bay Buccaneers | TB |
| | East | Dallas Cowboys | DAL |
| | | New York Giants | NYG |
| | | Philadelphia Eagles | PHI |
| | | Washington Football T | WAS |
| | West | Arizona Cardinals | ARZ |
| Los Angeles Rams | | LAR | |
| San Francisco 49ers | | SF | |
| Seattle Seahawks | | SEA | |

Slika 4.2: Podjela NFL ekipa po konferencijama i divizijama

Svaka NFL sezona je također podijeljena na dva dijela: regularna sezona te doigravanje. Regularna sezona traje 18 tjedana tokom kojih svaki tim igra 17 utakmica te ima jedan tjedan odmora. Svaki tim u tih 17 utakmica igra:

- po dvije utakmice (1 na domaćem terenu i 1 u gostima) protiv ostala tri tima u svojoj diviziji (ukupno 6 utakmica),
- utakmicu protiv svakog tima iz predodređene druge divizije (2 na domaćem terenu i 2 u gostima) iz svoje konferencije (ukupno 4 utakmice),
- utakmicu protiv timova koji su prošlu godinu završili na istoj poziciji unutar svojih divizija iz preostale dvije divizije u svojoj konferenciji (ukupno 2 utakmice),
- utakmicu protiv svakog tima iz predodređene druge divizije (2 na domaćem terenu i 2 u gostima) iz druge konferencije (ukupno 4 utakmice) te
- utakmicu protiv tima koji je prošlu sezonu završio na istoj poziciji unutar svoje divizije a nalazi se u drugoj konferenciji (ukupno 1 utakmica).

Radi broja ozljeda tokom utakmica te općenitih fizičkih zahtjeva sporta nije moguće imat dovoljno velik broj utakmica da svaki tim igra protiv svakog drugog tima. Nadalje vidimo da ovakva regularna sezona daje lakše rasporede timovima koji su prošle godine bili lošiji. S matematičke strane, vidljivo je da će ovakav raspored regularne sezone osigurati ireducibilnu matricu koju ćemo koristit prilikom implementacije PageRank algoritma.

Po završetku regularne sezone po 7 timova iz svake konferencije ulazi u doigravanje. Od tih 7 timova prva četiri su pobjednici divizija unutar konferencije te preostala 3 su momčadi s najboljim omjerom iz skupa timova u konferenciji koji nisu osvojili svoju diviziju. Doigravanje ima 4 kola:

1. "Wildcard": Po 3 utakmice u svakoj konferenciji, igraju 2. rangirana momčad s 7., 3. s 6. te 4. s 5., momčad višeg ranga ima domaći teren (najbolje rangirana momčad u svakoj konferenciji preskače ovo kolo),
2. "Divisional Round": Po 2 utakmice u svakoj konferenciji, 1. rangirana momčad igra s najniže rangiranom momčadi koja je pobjedila u prethodnom kolu te preostale dvije momčadi igraju jedna protiv druge, ponovo momčad višeg ranga ima domaći teren,
3. "Conference Championship": Jedna utakmica po konferenciji, preostale dvije momčadi igraju jedna protiv druge, ponovo momčad višeg ranga ima domaći teren te
4. "SuperBowl": Finale, pobjednici konferencija igraju, nitko nema prednost domaćeg terena pošto se igra na prije sezone određenom stadionu.

S [5] preuzeti su podaci o svih 272 utakmica regularne sezone te 13 utakmica doigravanja.

| Tjedan | Pobjednik | Gubitnik | Poeni pobjednik | Poeni gubitnik | Izgubljene lopte pobjednik | Izgubljene lopte gubitnik |
|--------|--------------------------|--------------------------|-----------------|----------------|----------------------------|---------------------------|
| 1 | Tampa Bay Buccaneers | Dallas Cowboys | 31 | 29 | 4 | 1 |
| 1 | Philadelphia Eagles | Atlanta Falcons | 32 | 6 | 0 | 0 |
| 1 | Pittsburgh Steelers | Buffalo Bills | 23 | 16 | 0 | 1 |
| 1 | Carolina Panthers | New York Jets | 19 | 14 | 1 | 1 |
| 1 | Cincinnati Bengals | Minnesota Vikings | 27 | 24 | 0 | 1 |
| 1 | Seattle Seahawks | Indianapolis Colts | 28 | 16 | 1 | 1 |
| 1 | Arizona Cardinals | Tennessee Titans | 38 | 13 | 1 | 3 |
| 1 | San Francisco 49ers | Detroit Lions | 41 | 33 | 2 | 1 |
| 1 | Houston Texans | Jacksonville Jaguars | 37 | 21 | 0 | 3 |
| 1 | Los Angeles Chargers | Washington Football Team | 20 | 16 | 2 | 1 |
| 1 | Kansas City Chiefs | Cleveland Browns | 33 | 29 | 0 | 2 |
| 1 | Denver Broncos | New York Giants | 27 | 13 | 1 | 1 |
| 1 | New Orleans Saints | Green Bay Packers | 38 | 3 | 0 | 3 |
| 1 | Miami Dolphins | New England Patriots | 17 | 16 | 1 | 2 |
| 1 | Los Angeles Rams | Chicago Bears | 34 | 14 | 0 | 2 |
| 1 | Las Vegas Raiders | Baltimore Ravens | 33 | 27 | 1 | 2 |
| 2 | Washington Football Team | New York Giants | 30 | 29 | 1 | 0 |
| 2 | Buffalo Bills | Miami Dolphins | 35 | 0 | 2 | 3 |
| 2 | Carolina Panthers | New Orleans Saints | 26 | 7 | 1 | 2 |
| 2 | Chicago Bears | Cincinnati Bengals | 20 | 17 | 1 | 4 |
| 2 | Cleveland Browns | Houston Texans | 31 | 21 | 2 | 2 |
| 2 | Los Angeles Rams | Indianapolis Colts | 27 | 24 | 2 | 2 |
| 2 | Denver Broncos | Jacksonville Jaguars | 23 | 13 | 0 | 2 |
| 2 | New England Patriots | New York Jets | 25 | 6 | 0 | 4 |
| 2 | San Francisco 49ers | Philadelphia Eagles | 17 | 11 | 0 | 0 |
| 2 | Las Vegas Raiders | Pittsburgh Steelers | 26 | 17 | 0 | 1 |
| 2 | Tampa Bay Buccaneers | Atlanta Falcons | 48 | 25 | 1 | 3 |
| 2 | Arizona Cardinals | Minnesota Vikings | 34 | 33 | 2 | 0 |
| 2 | Dallas Cowboys | Los Angeles Chargers | 20 | 17 | 1 | 2 |
| 2 | Tennessee Titans | Seattle Seahawks | 33 | 30 | 1 | 0 |
| 2 | Baltimore Ravens | Kansas City Chiefs | 36 | 35 | 2 | 2 |
| 2 | Green Bay Packers | Detroit Lions | 35 | 17 | 0 | 2 |
| 3 | Carolina Panthers | Houston Texans | 24 | 9 | 0 | 0 |
| 3 | Atlanta Falcons | New York Giants | 17 | 14 | 1 | 1 |
| 3 | Buffalo Bills | Washington Football Team | 43 | 21 | 0 | 3 |
| 3 | Cleveland Browns | Chicago Bears | 26 | 6 | 0 | 0 |
| 3 | Cincinnati Bengals | Pittsburgh Steelers | 24 | 10 | 1 | 2 |
| 3 | Tennessee Titans | Indianapolis Colts | 25 | 16 | 3 | 0 |
| 3 | Arizona Cardinals | Jacksonville Jaguars | 31 | 19 | 1 | 4 |
| 3 | Baltimore Ravens | Detroit Lions | 19 | 17 | 1 | 0 |
| 3 | Los Angeles Chargers | Kansas City Chiefs | 30 | 24 | 0 | 4 |
| 3 | New Orleans Saints | New England Patriots | 28 | 13 | 0 | 3 |
| 3 | Denver Broncos | New York Jets | 26 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | Las Vegas Raiders | Miami Dolphins | 31 | 28 | 1 | 0 |
| 3 | Minnesota Vikings | Seattle Seahawks | 30 | 17 | 0 | 0 |
| 3 | Los Angeles Rams | Tampa Bay Buccaneers | 34 | 24 | 0 | 0 |
| 3 | Green Bay Packers | San Francisco 49ers | 30 | 28 | 0 | 2 |
| 3 | Dallas Cowboys | Philadelphia Eagles | 41 | 21 | 1 | 2 |
| 4 | Cincinnati Bengals | Jacksonville Jaguars | 24 | 21 | 0 | 0 |
| 4 | Washington Football Team | Atlanta Falcons | 34 | 30 | 0 | 0 |
| 4 | Buffalo Bills | Houston Texans | 40 | 0 | 1 | 5 |
| 4 | Dallas Cowboys | Carolina Panthers | 36 | 28 | 0 | 2 |
| 4 | Chicago Bears | Detroit Lions | 24 | 14 | 1 | 2 |
| 4 | Cleveland Browns | Minnesota Vikings | 14 | 7 | 0 | 1 |
| 4 | Indianapolis Colts | Miami Dolphins | 27 | 17 | 1 | 2 |
| 4 | Kansas City Chiefs | Philadelphia Eagles | 42 | 30 | 1 | 0 |
| 4 | New York Giants | New Orleans Saints | 27 | 21 | 1 | 1 |
| 4 | New York Jets | Tennessee Titans | 27 | 24 | 1 | 0 |
| 4 | Arizona Cardinals | Los Angeles Rams | 37 | 20 | 0 | 2 |
| 4 | Seattle Seahawks | San Francisco 49ers | 28 | 21 | 0 | 2 |
| 4 | Baltimore Ravens | Denver Broncos | 23 | 7 | 0 | 1 |
| 4 | Green Bay Packers | Pittsburgh Steelers | 27 | 17 | 1 | 2 |
| 4 | Tampa Bay Buccaneers | New England Patriots | 19 | 17 | 0 | 2 |
| 4 | Los Angeles Chargers | Las Vegas Raiders | 28 | 14 | 0 | 1 |
| 5 | Los Angeles Rams | Seattle Seahawks | 26 | 17 | 1 | 2 |
| 5 | Atlanta Falcons | New York Jets | 27 | 20 | 2 | 1 |
| 5 | Philadelphia Eagles | Carolina Panthers | 21 | 18 | 2 | 3 |
| 5 | Green Bay Packers | Cincinnati Bengals | 25 | 22 | 1 | 2 |
| 5 | Pittsburgh Steelers | Denver Broncos | 27 | 19 | 1 | 1 |
| 5 | Minnesota Vikings | Detroit Lions | 19 | 17 | 2 | 2 |
| 5 | New England Patriots | Houston Texans | 25 | 22 | 2 | 1 |
| 5 | Tennessee Titans | Jacksonville Jaguars | 37 | 19 | 0 | 2 |
| 5 | Tampa Bay Buccaneers | Miami Dolphins | 45 | 17 | 0 | 2 |
| 5 | New Orleans Saints | Washington Football Team | 33 | 22 | 2 | 2 |
| 5 | Chicago Bears | Las Vegas Raiders | 20 | 9 | 0 | 1 |
| 5 | Los Angeles Chargers | Cleveland Browns | 47 | 42 | 1 | 0 |
| 5 | Arizona Cardinals | San Francisco 49ers | 17 | 10 | 1 | 1 |
| 5 | Dallas Cowboys | New York Giants | 44 | 20 | 2 | 2 |
| 5 | Buffalo Bills | Kansas City Chiefs | 38 | 20 | 0 | 4 |
| 5 | Baltimore Ravens | Indianapolis Colts | 31 | 25 | 1 | 1 |
| 6 | Tampa Bay Buccaneers | Philadelphia Eagles | 28 | 22 | 1 | 1 |
| 6 | Jacksonville Jaguars | Miami Dolphins | 23 | 20 | 1 | 1 |
| 6 | Minnesota Vikings | Carolina Panthers | 34 | 28 | 1 | 3 |
| 6 | Green Bay Packers | Chicago Bears | 24 | 14 | 0 | 1 |
| 6 | Cincinnati Bengals | Detroit Lions | 34 | 11 | 1 | 1 |
| 6 | Indianapolis Colts | Houston Texans | 31 | 3 | 0 | 3 |
| 6 | Kansas City Chiefs | Washington Football Team | 31 | 13 | 3 | 2 |
| 6 | Los Angeles Rams | New York Giants | 38 | 11 | 2 | 4 |
| 6 | Baltimore Ravens | Los Angeles Chargers | 34 | 6 | 2 | 1 |
| 6 | Arizona Cardinals | Cleveland Browns | 37 | 14 | 0 | 3 |
| 6 | Dallas Cowboys | New England Patriots | 35 | 29 | 2 | 2 |
| 6 | Las Vegas Raiders | Denver Broncos | 34 | 24 | 0 | 4 |
| 6 | Pittsburgh Steelers | Seattle Seahawks | 23 | 20 | 1 | 1 |
| 6 | Tennessee Titans | Buffalo Bills | 34 | 31 | 1 | 1 |

Slika 4.3: Rezultati utakmica prvih 6 tjedana regularne sezone

| Tjedan | Pobjednik | Gubitnik | Poent pobjednik | Poent gubitnik | Izgubijene točke pobjednik | Izgubijene točke gubitnik |
|--------|--------------------------|--------------------------|-----------------|----------------|----------------------------|---------------------------|
| 7 | Cleveland Browns | Denver Broncos | 17 | 14 | 0 | 1 |
| 7 | Atlanta Falcons | Miami Dolphins | 30 | 28 | 2 | 2 |
| 7 | New York Giants | Carolina Panthers | 25 | 3 | 0 | 1 |
| 7 | Cincinnati Bengals | Baltimore Ravens | 41 | 17 | 1 | 0 |
| 7 | Green Bay Packers | Washington Football Team | 24 | 10 | 1 | 2 |
| 7 | Tennessee Titans | Kansas City Chiefs | 27 | 3 | 1 | 3 |
| 7 | New England Patriots | New York Jets | 54 | 13 | 0 | 3 |
| 7 | Los Angeles Rams | Detroit Lions | 28 | 19 | 0 | 2 |
| 7 | Las Vegas Raiders | Philadelphia Eagles | 33 | 22 | 1 | 2 |
| 7 | Tampa Bay Buccaneers | Chicago Bears | 38 | 3 | 1 | 5 |
| 7 | Arizona Cardinals | Houston Texans | 31 | 5 | 1 | 1 |
| 7 | Indianapolis Colts | San Francisco 49ers | 30 | 18 | 2 | 4 |
| 7 | New Orleans Saints | Seattle Seahawks | 13 | 10 | 1 | 0 |
| 8 | Green Bay Packers | Arizona Cardinals | 24 | 21 | 0 | 3 |
| 8 | Carolina Panthers | Atlanta Falcons | 19 | 13 | 1 | 2 |
| 8 | Buffalo Bills | Miami Dolphins | 26 | 11 | 0 | 2 |
| 8 | San Francisco 49ers | Chicago Bears | 33 | 22 | 0 | 1 |
| 8 | New York Jets | Cincinnati Bengals | 34 | 31 | 3 | 1 |
| 8 | Pittsburgh Steelers | Cleveland Browns | 15 | 10 | 0 | 1 |
| 8 | Tennessee Titans | Indianapolis Colts | 34 | 31 | 2 | 3 |
| 8 | Philadelphia Eagles | Detroit Lions | 44 | 6 | 0 | 1 |
| 8 | Los Angeles Rams | Houston Texans | 38 | 22 | 0 | 1 |
| 8 | Seattle Seahawks | Jacksonville Jaguars | 31 | 7 | 0 | 1 |
| 8 | New England Patriots | Los Angeles Chargers | 27 | 24 | 1 | 2 |
| 8 | New Orleans Saints | Tampa Bay Buccaneers | 36 | 27 | 0 | 3 |
| 8 | Denver Broncos | Washington Football Team | 17 | 10 | 1 | 2 |
| 8 | Dallas Cowboys | Minnesota Vikings | 20 | 16 | 2 | 0 |
| 8 | Kansas City Chiefs | New York Giants | 20 | 17 | 2 | 1 |
| 9 | Indianapolis Colts | New York Jets | 45 | 30 | 0 | 2 |
| 9 | Atlanta Falcons | New Orleans Saints | 27 | 25 | 0 | 1 |
| 9 | Jacksonville Jaguars | Buffalo Bills | 9 | 6 | 1 | 3 |
| 9 | Denver Broncos | Dallas Cowboys | 30 | 16 | 0 | 2 |
| 9 | Baltimore Ravens | Minnesota Vikings | 34 | 31 | 2 | 0 |
| 9 | New England Patriots | Carolina Panthers | 24 | 6 | 2 | 3 |
| 9 | Cleveland Browns | Cincinnati Bengals | 41 | 16 | 0 | 3 |
| 9 | Miami Dolphins | Houston Texans | 17 | 9 | 5 | 4 |
| 9 | New York Giants | Las Vegas Raiders | 23 | 16 | 1 | 3 |
| 9 | Los Angeles Chargers | Philadelphia Eagles | 27 | 24 | 0 | 0 |
| 9 | Arizona Cardinals | San Francisco 49ers | 31 | 17 | 0 | 3 |
| 9 | Kansas City Chiefs | Green Bay Packers | 13 | 7 | 0 | 2 |
| 9 | Tennessee Titans | Los Angeles Rams | 28 | 16 | 1 | 2 |
| 9 | Pittsburgh Steelers | Chicago Bears | 29 | 27 | 1 | 2 |
| 10 | Miami Dolphins | Baltimore Ravens | 22 | 10 | 0 | 2 |
| 10 | Dallas Cowboys | Atlanta Falcons | 43 | 3 | 1 | 3 |
| 10 | Buffalo Bills | New York Jets | 45 | 17 | 2 | 5 |
| 10 | Pittsburgh Steelers | Detroit Lions | 16 | 16 | 3 | 0 |
| 10 | Tennessee Titans | New Orleans Saints | 23 | 21 | 0 | 1 |
| 10 | Washington Football Team | Tampa Bay Buccaneers | 29 | 19 | 1 | 2 |
| 10 | New England Patriots | Cleveland Browns | 45 | 7 | 0 | 1 |
| 10 | Indianapolis Colts | Jacksonville Jaguars | 23 | 17 | 0 | 1 |
| 10 | Minnesota Vikings | Los Angeles Chargers | 27 | 20 | 1 | 1 |
| 10 | Carolina Panthers | Arizona Cardinals | 34 | 10 | 2 | 2 |
| 10 | Philadelphia Eagles | Denver Broncos | 30 | 13 | 1 | 1 |
| 10 | Green Bay Packers | Seattle Seahawks | 17 | 0 | 1 | 2 |
| 10 | Kansas City Chiefs | Las Vegas Raiders | 41 | 14 | 1 | 2 |
| 10 | San Francisco 49ers | Los Angeles Rams | 31 | 10 | 0 | 2 |
| 11 | New England Patriots | Atlanta Falcons | 25 | 0 | 1 | 4 |
| 11 | Indianapolis Colts | Buffalo Bills | 41 | 15 | 0 | 4 |
| 11 | Baltimore Ravens | Chicago Bears | 16 | 13 | 1 | 1 |
| 11 | Houston Texans | Tennessee Titans | 22 | 13 | 0 | 5 |
| 11 | San Francisco 49ers | Jacksonville Jaguars | 30 | 10 | 0 | 2 |
| 11 | Philadelphia Eagles | New Orleans Saints | 40 | 29 | 1 | 3 |
| 11 | Washington Football Team | Carolina Panthers | 27 | 21 | 1 | 0 |
| 11 | Cleveland Browns | Detroit Lions | 13 | 10 | 2 | 2 |
| 11 | Minnesota Vikings | Green Bay Packers | 34 | 31 | 0 | 0 |
| 11 | Miami Dolphins | New York Jets | 24 | 17 | 1 | 1 |
| 11 | Cincinnati Bengals | Las Vegas Raiders | 32 | 13 | 1 | 2 |
| 11 | Kansas City Chiefs | Dallas Cowboys | 19 | 9 | 2 | 3 |
| 11 | Arizona Cardinals | Seattle Seahawks | 23 | 13 | 0 | 0 |
| 11 | Los Angeles Chargers | Pittsburgh Steelers | 41 | 37 | 1 | 0 |
| 11 | Tampa Bay Buccaneers | New York Giants | 30 | 10 | 1 | 3 |
| 12 | Chicago Bears | Detroit Lions | 16 | 14 | 1 | 1 |
| 12 | Las Vegas Raiders | Dallas Cowboys | 36 | 33 | 0 | 0 |
| 12 | Buffalo Bills | New Orleans Saints | 31 | 6 | 2 | 1 |
| 12 | Atlanta Falcons | Jacksonville Jaguars | 21 | 14 | 1 | 2 |
| 12 | Cincinnati Bengals | Pittsburgh Steelers | 41 | 10 | 1 | 3 |
| 12 | New York Jets | Houston Texans | 21 | 14 | 1 | 1 |
| 12 | New York Giants | Philadelphia Eagles | 13 | 7 | 0 | 4 |
| 12 | Miami Dolphins | Carolina Panthers | 33 | 10 | 1 | 3 |
| 12 | Tampa Bay Buccaneers | Indianapolis Colts | 38 | 31 | 2 | 5 |
| 12 | New England Patriots | Tennessee Titans | 36 | 13 | 0 | 4 |
| 12 | Denver Broncos | Los Angeles Chargers | 28 | 13 | 1 | 2 |
| 12 | San Francisco 49ers | Minnesota Vikings | 34 | 26 | 1 | 2 |
| 12 | Green Bay Packers | Los Angeles Rams | 36 | 28 | 1 | 3 |
| 12 | Baltimore Ravens | Cleveland Browns | 16 | 10 | 4 | 2 |
| 12 | Washington Football Team | Seattle Seahawks | 17 | 15 | 1 | 1 |
| 13 | Dallas Cowboys | New Orleans Saints | 27 | 17 | 1 | 4 |
| 13 | Tampa Bay Buccaneers | Atlanta Falcons | 30 | 17 | 1 | 1 |
| 13 | Arizona Cardinals | Chicago Bears | 33 | 22 | 0 | 4 |
| 13 | Los Angeles Chargers | Cincinnati Bengals | 41 | 22 | 3 | 4 |
| 13 | Detroit Lions | Minnesota Vikings | 29 | 27 | 2 | 1 |
| 13 | Philadelphia Eagles | New York Jets | 33 | 18 | 0 | 1 |
| 13 | Indianapolis Colts | Houston Texans | 31 | 0 | 1 | 2 |
| 13 | Miami Dolphins | New York Giants | 20 | 9 | 0 | 1 |
| 13 | Seattle Seahawks | San Francisco 49ers | 30 | 23 | 3 | 3 |
| 13 | Washington Football Team | Las Vegas Raiders | 17 | 15 | 1 | 0 |
| 13 | Los Angeles Rams | Jacksonville Jaguars | 37 | 7 | 0 | 2 |
| 13 | Pittsburgh Steelers | Baltimore Ravens | 20 | 19 | 0 | 1 |
| 13 | Kansas City Chiefs | Denver Broncos | 22 | 9 | 1 | 3 |
| 13 | New England Patriots | Buffalo Bills | 14 | 10 | 1 | 1 |

Slika 4.4: Rezultati utakmica drugih 6 tjedana regularne sezone

| Tjedan | Pobjednik | Gubitnik | Poeni pobjednik | Poeni gubitnik | Izgubljene točke pobjednik | Izgubljene točke gubitnik |
|-----------|--------------------------|--------------------------|-----------------|----------------|----------------------------|---------------------------|
| 14 | Minnesota Vikings | Pittsburgh Steelers | 36 | 28 | 2 | 1 |
| 14 | Atlanta Falcons | Carolina Panthers | 29 | 21 | 1 | 3 |
| 14 | San Francisco 49ers | Cincinnati Bengals | 26 | 23 | 0 | 2 |
| 14 | Cleveland Browns | Baltimore Ravens | 24 | 22 | 1 | 2 |
| 14 | Dallas Cowboys | Washington Football Team | 27 | 20 | 2 | 4 |
| 14 | Seattle Seahawks | Houston Texans | 33 | 13 | 0 | 0 |
| 14 | Tennessee Titans | Jacksonville Jaguars | 20 | 0 | 0 | 4 |
| 14 | Kansas City Chiefs | Las Vegas Raiders | 48 | 9 | 0 | 5 |
| 14 | New Orleans Saints | New York Jets | 30 | 9 | 0 | 0 |
| 14 | Denver Broncos | Detroit Lions | 38 | 10 | 0 | 2 |
| 14 | Los Angeles Chargers | New York Giants | 37 | 21 | 0 | 2 |
| 14 | Tampa Bay Buccaneers | Buffalo Bills | 33 | 27 | 0 | 1 |
| 14 | Green Bay Packers | Chicago Bears | 45 | 30 | 0 | 3 |
| 14 | Los Angeles Rams | Arizona Cardinals | 30 | 23 | 0 | 2 |
| 15 | Kansas City Chiefs | Los Angeles Chargers | 34 | 28 | 2 | 2 |
| 15 | Indianapolis Colts | New England Patriots | 27 | 17 | 1 | 2 |
| 15 | Buffalo Bills | Carolina Panthers | 31 | 14 | 1 | 1 |
| 15 | Detroit Lions | Arizona Cardinals | 30 | 12 | 1 | 1 |
| 15 | Dallas Cowboys | New York Giants | 21 | 6 | 1 | 4 |
| 15 | Green Bay Packers | Baltimore Ravens | 31 | 30 | 0 | 0 |
| 15 | Houston Texans | Jacksonville Jaguars | 30 | 16 | 1 | 0 |
| 15 | Miami Dolphins | New York Jets | 31 | 24 | 3 | 1 |
| 15 | Pittsburgh Steelers | Tennessee Titans | 19 | 13 | 0 | 4 |
| 15 | San Francisco 49ers | Atlanta Falcons | 31 | 13 | 1 | 1 |
| 15 | Cincinnati Bengals | Denver Broncos | 15 | 10 | 0 | 1 |
| 15 | New Orleans Saints | Tampa Bay Buccaneers | 9 | 0 | 0 | 2 |
| 15 | Las Vegas Raiders | Cleveland Browns | 16 | 14 | 2 | 0 |
| 15 | Minnesota Vikings | Chicago Bears | 17 | 9 | 1 | 3 |
| 15 | Philadelphia Eagles | Washington Football Team | 27 | 17 | 2 | 0 |
| 15 | Los Angeles Rams | Seattle Seahawks | 20 | 10 | 1 | 1 |
| 16 | Tennessee Titans | San Francisco 49ers | 20 | 17 | 0 | 2 |
| 16 | Green Bay Packers | Cleveland Browns | 24 | 22 | 0 | 4 |
| 16 | Indianapolis Colts | Arizona Cardinals | 22 | 16 | 0 | 0 |
| 16 | Atlanta Falcons | Detroit Lions | 20 | 16 | 1 | 1 |
| 16 | Buffalo Bills | New England Patriots | 33 | 21 | 0 | 2 |
| 16 | Tampa Bay Buccaneers | Carolina Panthers | 32 | 6 | 0 | 1 |
| 16 | Cincinnati Bengals | Baltimore Ravens | 41 | 21 | 0 | 1 |
| 16 | Houston Texans | Los Angeles Chargers | 41 | 29 | 0 | 3 |
| 16 | New York Jets | Jacksonville Jaguars | 26 | 21 | 0 | 1 |
| 16 | Los Angeles Rams | Minnesota Vikings | 30 | 23 | 3 | 1 |
| 16 | Philadelphia Eagles | New York Giants | 34 | 10 | 0 | 2 |
| 16 | Chicago Bears | Seattle Seahawks | 25 | 24 | 0 | 0 |
| 16 | Las Vegas Raiders | Denver Broncos | 17 | 13 | 3 | 0 |
| 16 | Kansas City Chiefs | Pittsburgh Steelers | 36 | 10 | 0 | 3 |
| 16 | Dallas Cowboys | Washington Football Team | 56 | 14 | 0 | 2 |
| 16 | Miami Dolphins | New Orleans Saints | 20 | 3 | 1 | 2 |
| 17 | Buffalo Bills | Atlanta Falcons | 29 | 15 | 3 | 1 |
| 17 | New Orleans Saints | Carolina Panthers | 18 | 10 | 0 | 2 |
| 17 | Chicago Bears | New York Giants | 29 | 3 | 2 | 4 |
| 17 | Cincinnati Bengals | Kansas City Chiefs | 34 | 31 | 0 | 0 |
| 17 | Las Vegas Raiders | Indianapolis Colts | 23 | 20 | 2 | 0 |
| 17 | Arizona Cardinals | Dallas Cowboys | 25 | 22 | 0 | 1 |
| 17 | New England Patriots | Jacksonville Jaguars | 50 | 10 | 0 | 3 |
| 17 | Tennessee Titans | Miami Dolphins | 34 | 3 | 0 | 2 |
| 17 | Tampa Bay Buccaneers | New York Jets | 28 | 24 | 1 | 1 |
| 17 | Philadelphia Eagles | Washington Football Team | 20 | 16 | 0 | 1 |
| 17 | Los Angeles Chargers | Denver Broncos | 34 | 13 | 0 | 1 |
| 17 | San Francisco 49ers | Houston Texans | 23 | 7 | 1 | 1 |
| 17 | Seattle Seahawks | Detroit Lions | 51 | 29 | 0 | 3 |
| 17 | Los Angeles Rams | Baltimore Ravens | 20 | 19 | 3 | 2 |
| 17 | Green Bay Packers | Minnesota Vikings | 37 | 10 | 0 | 0 |
| 17 | Pittsburgh Steelers | Cleveland Browns | 26 | 14 | 1 | 2 |
| 18 | Kansas City Chiefs | Denver Broncos | 28 | 24 | 0 | 1 |
| 18 | Dallas Cowboys | Philadelphia Eagles | 51 | 26 | 0 | 1 |
| 18 | New Orleans Saints | Atlanta Falcons | 30 | 20 | 0 | 3 |
| 18 | Buffalo Bills | New York Jets | 27 | 10 | 0 | 0 |
| 18 | Tampa Bay Buccaneers | Carolina Panthers | 41 | 17 | 0 | 2 |
| 18 | Minnesota Vikings | Chicago Bears | 31 | 17 | 0 | 2 |
| 18 | Cleveland Browns | Cincinnati Bengals | 21 | 16 | 2 | 0 |
| 18 | Jacksonville Jaguars | Indianapolis Colts | 26 | 11 | 0 | 2 |
| 18 | Detroit Lions | Green Bay Packers | 37 | 30 | 0 | 3 |
| 18 | Tennessee Titans | Houston Texans | 28 | 25 | 0 | 0 |
| 18 | Miami Dolphins | New England Patriots | 33 | 24 | 0 | 3 |
| 18 | Washington Football Team | New York Giants | 22 | 7 | 0 | 3 |
| 18 | Pittsburgh Steelers | Baltimore Ravens | 16 | 13 | 1 | 3 |
| 18 | Seattle Seahawks | Arizona Cardinals | 38 | 30 | 2 | 1 |
| 18 | San Francisco 49ers | Los Angeles Rams | 27 | 24 | 2 | 2 |
| 18 | Las Vegas Raiders | Los Angeles Chargers | 35 | 32 | 0 | 2 |
| WildCard | Cincinnati Bengals | Las Vegas Raiders | 26 | 19 | 0 | 2 |
| WildCard | Buffalo Bills | New England Patriots | 47 | 17 | 0 | 2 |
| WildCard | Tampa Bay Buccaneers | Philadelphia Eagles | 31 | 15 | 0 | 3 |
| WildCard | San Francisco 49ers | Dallas Cowboys | 23 | 17 | 1 | 1 |
| WildCard | Kansas City Chiefs | Pittsburgh Steelers | 42 | 21 | 2 | 1 |
| WildCard | Los Angeles Rams | Arizona Cardinals | 34 | 11 | 0 | 2 |
| Division | Cincinnati Bengals | Tennessee Titans | 19 | 16 | 1 | 3 |
| Division | San Francisco 49ers | Green Bay Packers | 13 | 10 | 1 | 1 |
| Division | Los Angeles Rams | Tampa Bay Buccaneers | 30 | 27 | 4 | 2 |
| Division | Kansas City Chiefs | Buffalo Bills | 42 | 36 | 0 | 0 |
| ConfChamp | Cincinnati Bengals | Kansas City Chiefs | 27 | 24 | 1 | 2 |
| ConfChamp | Los Angeles Rams | San Francisco 49ers | 20 | 17 | 1 | 1 |
| SuperBowl | Los Angeles Rams | Cincinnati Bengals | 23 | 20 | 2 | 0 |

Slika 4.5: Rezultati utakmica ostatka regularne sezone te doigravanja

Nadalje, preuzeli smo podatke o točnosti prognoza pobjednika od strane kladionica [6], ESPN-ovih stručnjaka [1] te službenih NFL "power rankingsa" [3] koji rangiraju ekipe na tjednoj bazi po snazi od 1. do 32. U dolje priloženoj tablici vidljivo je koliku su točnost predviđanja pobjednika imali svaka od stavki kroz tjedne 2021. sezone. Predviđanja "power rankingsa" kalkulirali smo tako da smo pretpostavili da će bolje rangirana momčad pobijediti lošije rangiranu momčad.

| Tjedan | ESPN | PFF | NFL.com |
|-----------|------|-----|---------|
| 1 | 54% | 44% | 56% |
| 2 | 62% | 69% | 63% |
| 3 | 67% | 56% | 50% |
| 4 | 60% | 69% | 63% |
| 5 | 72% | 75% | 69% |
| 6 | 64% | 71% | 71% |
| 7 | 63% | 69% | 69% |
| 8 | 58% | 47% | 67% |
| 9 | 55% | 50% | 50% |
| 10 | 44% | 54% | 43% |
| 11 | 64% | 67% | 53% |
| 12 | 53% | 57% | 53% |
| 13 | 64% | 57% | 79% |
| 14 | 72% | 86% | 71% |
| 15 | 65% | 69% | 56% |
| 16 | 66% | 67% | 63% |
| 17 | 79% | 81% | 75% |
| 18 | 59% | 56% | 50% |
| Wildcard | 77% | 62% | 83% |
| Division | 41% | 62% | 25% |
| ConfChamp | 38% | 62% | 0% |
| SuperBowl | 63% | 62% | 100% |
| Total | 62% | 65% | 61% |

Slika 4.6: Postotak točnosti predviđanja pobjednika

4.3 Rezultati

PageRank metodom, nakon svakog tjedna odigranih utakmica, rangirati ćemo sve 32 ekipe u NFL-u. Potom ćemo, kako bismo testirali točnost našeg rangiranja prognozirati utakmice za naredni tjedan na način da ćemo pretpostaviti da ekipa višeg ranga pobjeđuje onu nižeg ranga.

Sukladno metodi opisanoj u poglavlju 4.1 konstruirali smo matrice $W = [w_{ij}] \in M_{32}$ ($n = 32$ je ukupan broj timova u ligi) za 3 različite funkcije w :

1. $w_{ij} :=$ broj pobjeda tima j protiv tima i (u daljnjem tekstu koristiti ćemo notaciju $w =$ pobjede),
2. $w_{ij} :=$ gol razlika prilikom pobjede tima j protiv tima i (u daljnjem tekstu koristiti ćemo notaciju $w =$ razlika) i te
3. $w_{ij} :=$ broj oduzetih lopti prilikom pobjede tima j protiv tima i (u daljnjem tekstu koristiti ćemo notaciju $w =$ oduzete).

U slučaju kada timova igraju jedan protiv drugoga te isti tim pobjedi više puta w_{ij} postaje suma pobjeda/gol razlika u pobjedama/oduzetih lopti. Nadalje, konstruiramo matrice $X = [x_{ij}] \in M_{32}$ sukladno jednadžbi 4.1. Kako bismo uzeli u obzir i slučajnost rezultata, odnosno da postoji mogućnost da bilo koji od timova na određen dan bude bolji od bilo kojeg drugog tima potrebno je konstruirati i matricu Y definiranu sukladno 2.5. Sada imamo matricu Z koju smo opisali jednadžbom $Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y$ gdje $0 < (1 - \alpha) < 1$ pretstavlja mogućnost slučajnog rezultata utakmice bilo koja dva tima.

Pomoću ispod priložene funkcije PageRank napravljene u R programskom jeziku pronašli smo rangiramo sve ekipa od najbolje do nagore kroz svih 18 tjedana regularne sezone te doigravanje. Funkcija kao ulazne parametre uzima α te broj "metoda" koji diktira kojoj od funkcija opisanih u 4.3 je w_{ij} jednak.

Funkcija pomoću for petlje prolazi iz podatak o svih utakmicama (set podataka df) filtrira skup onih odigranih za određen tjedan (set podataka tmp). Nadalje, za svaki od timova u NFL-u, koji su abecedno poredani u vektoru $ekipe$ provjerava da li je izgubio u tom tjednu. U slučaju da je taj tim doista izgubio (pretpostavimo da se radi o timu i -tom mjestu te je izgubio od tima koji je j -tom u vektoru $ekipe$) tada x_{ij} uvećavamo za gol razliku utakmice, broj oduzetih lopti ili jednostavno za 1 ovisno o odabranoj metodi. Kako te kalkulacije ne bismo morali raditi svaki put od početka konstruirana je pomoćna matrica X_2 koja zadovoljava uvjete iz 2.1. Konstruiramo matricu $Z = \alpha X_2 + (1 - \alpha)Y$ te pomoću funkcije $eigen()$ nalazimo lijevi Perronov vektor matrice Z . Pomoću njega rangiramo sve ekipe u NFL-u od najbolje do najgore. Taj poredak zatim spremamo u tablicu $final$ koja sadrži sva rangiranja kroz sezonu. Konačni rezultat funkcije je vektor $predictions = [p_1 \dots p_{21}] \in R^{21}$ s postocima točnosti prognoza utakmica po tjednima (izostavljen je prvi tjedan pošto nismo mogli

smisljeno primijeniti PageRank algoritam prije nego je ijedna utakmica uopće odigrana), gdje je

$$p_k := \frac{\text{correct}}{gp} = \frac{\text{broj točno prognoziranih utakmica u tjednu } k}{\text{broj odigranih utakmica u tjednu } k}.$$

Utakmicu odigranu u tjednu k smatramo točno prognoziranom ako je pobjednik bio bolje rangiran od gubitnika po završetku tjedna $k - 1$ (vidljivo u linijama koda 57 do 59).

```

2
3 PageRank<-function(alfa, metoda)
4 {
5   X=matrix(0, 32, 32)
6   Y=matrix(1/32, 32, 32)
7
8
9   for (tj in 1:22)
10  {
11    tmp<-df[df$week==tj, ]
12    for(i in 1:32)
13    {
14      utakmica<-tmp[tmp$'Loser'==ekipe[i],]
15      w<-numeric(4)
16      w[1]<-1
17      w[2]<-sum(utakmica$'Pts diff')
18      w[3]<-sum(utakmica$'TOL')
19      j<-match(utakmica$Winner, ekipe)
20      X[i,j]<-X[i,j]+w[metoda]
21    }
22
23    X2<-X
24
25    for(k in 1:32)
26    {
27      if(sum(X2[k,])>0)X2[k,]<-X2[k,]/sum(X2[k,])
28    }
29
30    Z<-alfa*X2+(1-alfa)*Y
31    help<-eigen(t(Z))
32
33    rang<-Re(unlist(help$vectors[,1]))
34
35    if(sum(rang)<0)rang<-(-1)*rang
36
37    test<-as.numeric(rang)
38    poredak<-data.frame(rang, ekipe)
39    poredak<-poredak[order(poredak$rang, decreasing = TRUE),]
40
41    final<-cbind(final,poredak$ekipe)
42
43
44  }
45
46  final<-final[,-1]
47
48  predictions<-numeric(21)
49
50  for(tj in 2:22)
51  {
52    tmp<-df[df$week==tj, ]
53    correct<-0
54    gp<-dim(df[df$week==tj, ])[1]
55    for(gm in 1:gp)
56    {
57      w<-match(tmp[gm,]$Winner, final[,tj-1])
58      l<-match(tmp[gm,]$Loser, final[,tj-1])
59      if(w < l) correct<-correct+1
60    }
61    predictions[tj-1]<-correct/gp
62  }
63
64  return(predictions)
65 }

```

Slika 4.7: Kod PageRank funkcije

Kako bismo bolje razumjeli sam kod pogledajmo kako smo dobili predikcije za 18. tjedan (posljednji tjedan regularne sezone) za $w = \text{pobjede}$ te $\alpha = 0.75$. Sukladno rezultatima prvih 17 tjedana sezone konstruirana je matrica $X \in M_{32}$ priložena ispod gdje je suma retka i jednaka broju izgubljenih utakmica momčadi i , dok je suma stupca j jednaka broju pobjeda momčadi j . Kao notaciju redaka i stupaca koristili smo kratice priložene u 4.2.

| | ARZ | ATL | BLT | BUF | CAR | CHI | CIN | CLV | DAL | DEN | DET | GB | HST | IND | JAX | KC | LV | LAC | LAR | MA | MIN | NE | NO | NYG | NYJ | PHI | PIT | SF | SEA | TB | TEN | WAS | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|----|-----|-----|----|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|----|-----|----|-----|-----|---|---|---|
| ARZ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| ATL | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | | | |
| BLT | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| BUF | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | | |
| CAR | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | |
| CHI | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | |
| CIN | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| CLV | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| DAL | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | |
| DEN | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| DET | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| GB | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| HST | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| IND | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | | |
| JAX | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | | |
| KC | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | |
| LV | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | |
| LAC | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| LAR | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | |
| MA | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | |
| MIN | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| NE | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| NO | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | |
| NYG | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| NYJ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| PHI | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| PIT | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| SF | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| SEA | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| TB | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| TEN | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| WAS | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Slika 4.8: Matrica X za $w = \text{pobjede}$, $\alpha = 0.75$ te $t\text{jedan} = 17$

Pomoću matrice X formiramo matricu $X_2 = [\chi_{ij}]$ gdje

$$\chi_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^{32} x_{ij}}$$

Nadalje pomoću matrice X_2 te na početku definirane matrice

$$Y = [y_{ij}] \in M_{32}$$

$$y_{ij} = \frac{1}{32}, \forall i, j$$

konstruiramo matricu

$$Z = \alpha X_2 + (1 - \alpha)Y = 0.75X_2 + 0.25Y.$$

| | ARZ | ATL | BLT | BUF | CAR | CHI | CIN | CLV | DAL | DEN | DET | GB | HST | IND | JAX | KC | LV | LAC | LAR | MIA | MIN | NE | NO | NYG | NYJ | PHI | PIT | SF | SEA | TB | TEN | WAS | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| ARZ | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,16 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |
| ATL | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,17 | 0,01 | 0,09 |
| BLT | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,20 | 0,10 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,10 | 0,10 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |
| BUF | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 |
| CAR | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,08 | 0,08 | 0,08 | 0,08 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,08 | |
| CHI | 0,08 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,08 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 |
| CIN | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |
| CLV | 0,09 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,17 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |
| DAL | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | |
| DEN | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,17 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |
| DET | 0,01 | 0,06 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,06 | 0,06 | 0,01 | 0,06 | 0,01 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,01 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |
| GB | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,26 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,26 | 0,01 | 0,26 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |
| HST | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,07 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | |
| IND | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,11 | 0,22 | 0,01 | |
| JAX | 0,06 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,06 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | |
| KC | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | |
| LV | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,22 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | |
| LAC | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |
| LAR | 0,20 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,20 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,20 | 0,01 | 0,01 | 0,20 | 0,01 | |
| MIA | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,20 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,10 | 0,10 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,10 | 0,10 | 0,01 | |
| MIN | 0,09 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,01 | 0,09 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |
| NE | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,01 | |
| NO | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,10 | 0,10 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | |
| NYG | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,07 | 0,07 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,07 | |
| NYJ | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,07 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,01 | 0,13 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,07 | 0,01 | 0,01 | |
| PHI | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,11 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | |
| PIT | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,22 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,11 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |
| SF | 0,22 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,22 | 0,01 | 0,11 | 0,01 | |
| SEA | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,08 | 0,08 | |
| TB | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,20 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,38 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,20 | 0,01 | |
| TEN | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | |
| WAS | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,08 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,01 | 0,16 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |

Slika 4.9: Matrica Z za $w = \text{pobjede}$, $\alpha = 0.75$ te $t\text{jedan} = 17$

Očito je matrica Z ireducibilna pozitivna matrica, stoga zadovoljava uvjete teorema 29, što osigurava postojanje lijevog Perronovog vektora. Nadalje, teorem 20 nam osigurava da je $\rho(A)$ upravo 1 pošto je suma svakog retka u matrici Z upravo 1, što nam potvrđuju i dobivene svojstvene vrijednosti matrice Z.

| λ | $ \lambda $ |
|-------------|-------------|
| 1,00+0i | 1,00 |
| 0,31+0i | 0,31 |
| 0,1+0,29i | 0,30 |
| 0,1-0,29i | 0,30 |
| 0,29+0,04i | 0,29 |
| 0,29-0,04i | 0,29 |
| -0,18+0,22i | 0,29 |
| 0,18-0,22i | 0,29 |
| 0+0,26i | 0,26 |
| 0-0,26i | 0,26 |
| -0,02+0,24i | 0,24 |
| -0,02-0,24i | 0,24 |
| -0,08+0,20i | 0,21 |
| -0,08-0,20i | 0,21 |
| 0,01+0,20i | 0,20 |
| 0,01+0,20i | 0,20 |
| -0,05+0,15i | 0,16 |
| -0,05-0,15i | 0,16 |
| -0,14+0,06i | 0,15 |
| -0,14-0,06i | 0,15 |
| -0,07+0,12i | 0,14 |
| 0,07-0,12i | 0,14 |
| 0,13+0i | 0,13 |
| -0,11+0i | 0,11 |
| -0,08+0,07i | 0,11 |
| -0,08-0,07i | 0,11 |
| -0,04+0,07i | 0,08 |
| -0,04-0,07i | 0,08 |
| -0,01+0,08i | 0,08 |
| -0,01-0,08i | 0,08 |
| -0,06+0,03i | 0,06 |
| -0,06+0,03i | 0,06 |

Slika 4.10: Svojevne vrijednosti matrice Z s njihovim apsolutnim vrijednostima

Pogledajmo također i svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1. Pridružimo njemu kratice korespondirajućih ekipa, odnosno naziv ekipe čija je kratica ime i -tog retka.

| Svojstveni vektor | Ekipa |
|-------------------|--------------------------|
| 0,24 | Arizona Cardinals |
| 0,11 | Atlanta Falcons |
| 0,17 | Baltimore Ravens |
| 0,20 | Buffalo Bills |
| 0,13 | Carolina Panthers |
| 0,11 | Chicago Bears |
| 0,21 | Cincinnati Bengals |
| 0,13 | Cleveland Browns |
| 0,19 | Dallas Cowboys |
| 0,13 | Denver Broncos |
| 0,09 | Detroit Lions |
| 0,27 | Green Bay Packers |
| 0,11 | Houston Texans |
| 0,18 | Indianapolis Colts |
| 0,08 | Jacksonville Jaguars |
| 0,27 | Kansas City Chiefs |
| 0,18 | Las Vegas Raiders |
| 0,20 | Los Angeles Chargers |
| 0,22 | Los Angeles Rams |
| 0,14 | Miami Dolphins |
| 0,18 | Minnesota Vikings |
| 0,18 | New England Patriots |
| 0,25 | New Orleans Saints |
| 0,11 | New York Giants |
| 0,12 | New York Jets |
| 0,13 | Philadelphia Eagles |
| 0,18 | Pittsburgh Steelers |
| 0,17 | San Francisco 49ers |
| 0,11 | Seattle Seahawks |
| 0,21 | Tampa Bay Buccaneers |
| 0,26 | Tennessee Titans |
| 0,14 | Washington Football Team |

Slika 4.11: Svojstveni vektor za $\lambda = 1$

Gore prikazani vektor rješenje je jednadžbe $R^t = R^t \times Z$, iz čega zaključujemo da je vrijednost u prvoj koloni te i -tom retku gore prikazane tablice rang ekipe u drugoj koloni te i -tom retku. Skaliramo vektor R tako da ispunjava najbolju praksu da je suma njegovih elemenata jednaka 1 te poredajmo rangove od najvećeg do najmanjeg.

| Rang | Ekipa |
|------|--------------------------|
| 0,05 | Kansas City Chiefs |
| 0,05 | Green Bay Packers |
| 0,05 | Tennessee Titans |
| 0,05 | New Orleans Saints |
| 0,04 | Arizona Cardinals |
| 0,04 | Los Angeles Rams |
| 0,04 | Tampa Bay Buccaneers |
| 0,04 | Cincinnati Bengals |
| 0,04 | Los Angeles Chargers |
| 0,04 | Buffalo Bills |
| 0,04 | Dallas Cowboys |
| 0,03 | Las Vegas Raiders |
| 0,03 | Indianapolis Colts |
| 0,03 | New England Patriots |
| 0,03 | Minnesota Vikings |
| 0,03 | Pittsburgh Steelers |
| 0,03 | Baltimore Ravens |
| 0,03 | San Francisco 49ers |
| 0,03 | Miami Dolphins |
| 0,03 | Washington Football Team |
| 0,02 | Philadelphia Eagles |
| 0,02 | Cleveland Browns |
| 0,02 | Denver Broncos |
| 0,02 | Carolina Panthers |
| 0,02 | New York Jets |
| 0,02 | Seattle Seahawks |
| 0,02 | Chicago Bears |
| 0,02 | Houston Texans |
| 0,02 | Atlanta Falcons |
| 0,02 | New York Giants |
| 0,02 | Detroit Lions |
| 0,01 | Jacksonville Jaguars |

Slika 4.12: Ekipe i njihovi rangovi

Pomoću gore priloženog rangiranja ekipa nakon 17. tjedna regularne sezone predviđamo rezultate 18. tjedna. Pretpostavljamo da će ekipa koja je bolje rangirana, pa sukladno tome i više pozicionirana na tablici, pobijediti ekipu koja je lošije rangirana. Usporedbom sa stvarnim rezultatima utakmica odigranima u 18. tjednu dobijemo točnost naših predikcija.

| Tjedan | Pobjednik | Gubitnik | Rank pobjednika | Rank gubitnika | Rang pobjednika > Rang gubitnika |
|--------|--------------------------|----------------------|-----------------|----------------|----------------------------------|
| 18 | Kansas City Chiefs | Denver Broncos | 0,050 | 0,023 | TRUE |
| 18 | Dallas Cowboys | Philadelphia Eagles | 0,035 | 0,025 | TRUE |
| 18 | New Orleans Saints | Atlanta Falcons | 0,046 | 0,020 | TRUE |
| 18 | Buffalo Bills | New York Jets | 0,037 | 0,022 | TRUE |
| 18 | Tampa Bay Buccaneers | Carolina Panthers | 0,040 | 0,023 | TRUE |
| 18 | Minnesota Vikings | Chicago Bears | 0,033 | 0,021 | TRUE |
| 18 | Cleveland Browns | Cincinnati Bengals | 0,024 | 0,038 | FALSE |
| 18 | Jacksonville Jaguars | Indianapolis Colts | 0,015 | 0,034 | FALSE |
| 18 | Detroit Lions | Green Bay Packers | 0,017 | 0,049 | FALSE |
| 18 | Tennessee Titans | Houston Texans | 0,048 | 0,021 | TRUE |
| 18 | Miami Dolphins | New England Patriots | 0,026 | 0,034 | FALSE |
| 18 | Washington Football Team | New York Giants | 0,025 | 0,020 | TRUE |
| 18 | Pittsburgh Steelers | Baltimore Ravens | 0,033 | 0,032 | TRUE |
| 18 | Seattle Seahawks | Arizona Cardinals | 0,021 | 0,045 | FALSE |
| 18 | San Francisco 49ers | Los Angeles Rams | 0,032 | 0,040 | FALSE |
| 18 | Las Vegas Raiders | Los Angeles Chargers | 0,034 | 0,037 | FALSE |

Slika 4.13: Točnosti predikcija utakmica odigranih u 18. tjednu

Vidljivo je da smo pomoću PageRank algoritma s ulaznim parametrima $\alpha = 0.75$ te $w = \text{pobjede}$ na temelju svih odigranih utakmica u prvih 17 tjedana uspješno prognozirali pobjednike u 9 od 16 (56.25%) odigranih utakmica u 18. tjednu NFL sezone.

U dolje priloženoj tablici možemo vidjeti postotak točno prognoziranih utakmica za cijelu sezonu ovisno o metodama w opisanim u 4.3 te vrijednostima $\alpha = 0.5, 0.75, 0.9$ te 0.95 .

| | $w = \text{pobjede}$ | $w = \text{razlika}$ | $w = \text{oduzete}$ |
|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\alpha = 0.5$ | 67.75% | 67.75% | 66.26% |
| $\alpha = 0.75$ | 67.38% | 67.38% | 66.63% |
| $\alpha = 0.9$ | 68.50% | 68.12% | 68.87% |
| $\alpha = 0.95$ | 67.38% | 67.00% | 67.38% |

Slika 4.14: Sveukupna točnost PageRank predikcija ovisno o parametrima

Vidljivo je da su svi rezultati PageRank algoritma za definirane funkcije w te vrijednosti α relativno podjednaki, odnosno da nema velikih fluktuacija među rezultatima koji variraju između 66% i 69% točno prognoziranih utakmica. Zaključujemo su najtočnije predikcije, neovisno o funkciji w , za $\alpha = 0.9$. S druge strane od promatranih funkcija w ne postoji ona koja je najtočnija u predikcijama rezultata za svaki promatrani α . Najtočnija metoda je primjenjivala funkciju $w = \text{oduzete}$ te $\alpha = 0.9$. Usporedimo sada njene rezultate s predikcijama kladionica, ESPN-ovih stručnjaka te službenih NFL "power rankingsa".



Slika 4.15: Usporedba rezultata metoda predikcija po tjednima

| Tjedan | w = oduzete $\alpha = 0.9$ | ESPN | PFF | NFL.com |
|-----------|-------------------------------|------|-----|---------|
| 2 | 88% | 62% | 69% | 63% |
| 3 | 81% | 67% | 56% | 50% |
| 4 | 81% | 60% | 69% | 63% |
| 5 | 75% | 72% | 75% | 69% |
| 6 | 64% | 64% | 71% | 71% |
| 7 | 85% | 63% | 69% | 69% |
| 8 | 80% | 58% | 47% | 67% |
| 9 | 29% | 55% | 50% | 50% |
| 10 | 43% | 44% | 54% | 43% |
| 11 | 67% | 64% | 67% | 53% |
| 12 | 67% | 53% | 57% | 53% |
| 13 | 57% | 64% | 57% | 79% |
| 14 | 71% | 72% | 86% | 71% |
| 15 | 75% | 65% | 69% | 56% |
| 16 | 69% | 66% | 67% | 63% |
| 17 | 69% | 79% | 81% | 75% |
| 18 | 63% | 59% | 56% | 50% |
| WildCard | 50% | 77% | 62% | 83% |
| Division | 75% | 41% | 62% | 25% |
| ConfChamp | 100% | 38% | 62% | 0% |
| SuperBowl | 100% | 63% | 62% | 100% |
| Total | 69% | 62% | 65% | 61% |

Slika 4.16: Tablični prikaz rezultata metoda predikcija po tjednima

Zaključujemo da je PageRank algoritam najbolja od promatranih metoda predikcije NFL utakmica za priložen set podataka.

- [12] Anjela Y. Govan i Carl B. Meyer, *Ranking National Football League Teams Using Google' Page Rank*, (2006), http://carlmeyer.com/Presentations/Anjela_Charleston.pdf.
- [13] Frank R. Kschischang, *The Subadditivity Lemma*, (2009.).
- [14] Maroje Marohnić i Matija Bašić, *Diskretna matematika vježbe*, (2015.).
- [15] Saša Singer i Nela Bosner, *Numerička analiza predavanja*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/nadpredavanja/>, (2010.).
- [16] Robert A. van de Geijn, *Notes on Vector and Matrix Norms*, (2014.).

Sažetak

PageRank je algoritam kreiran za rangiranje internetskih stranica koje su međusobno povezane linkovima. Algoritam je baziran na ideji da što više linkova vodi na određenu stranicu to je stranica bolja odnosno njen rang je veći, no ne vrijede svi linkovi jednako. Linkovi s bolje rangiranih stranica vrijede više od onih s loše rangiranih. Također, link sa stranice koja posjeduje linkove na malo stranica (ili samo jednu) vrijedi više od linka sa stranice koja posjeduje puno linkova. Nadalje, potrebno je uračunati i mogućnost da korisnik ne koristi linkove već direktno ide na proizvoljnu stranicu.

Algoritam je moguće izmijeniti tako da umjesto internetskih stranica rangira sportske ekipe; u našem slučaju konkretno timove u NFL-u. Zaključili smo, bazirano na podacima iz 2021. sezone, da je PageRank algoritam predviđao pobjednike točnije nego kladionice, profesionalni prognozeri te službena stranica lige.

Summary

PageRank is an algorithm used to ranking web pages which are interconnected by links. The algorithm is based on the idea that the more links lead to a certain page, the better the page is, that is, its ranking is higher, but not all links are equally valuable. Links from higher-ranking sites are worth more than those from poorly-ranked ones. Also, a link from a page that has links to few pages (or just one) is worth more than a link from a page that contains a lot of links. Furthermore, it is necessary to take into account the possibility that the user does not use link but goes directly to an arbitrary page.

The algorithm can be changed so that it ranks sports teams instead of websites; in our case NFL teams. We concluded, based on data from the 2021 season, that the PageRank algorithm predicted winners more accurately than bookmakers, professional analysts and the league's official website.

Životopis

Rođen sam 26. kolovoza 1997. u Zagrebu. Po završetku Osnovne škole Gustava Krleca, 2012. godine upisao sam Prvu Gimnaziju u Zagrebu. Njenim završetkom, 2016. godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, gdje sam 2019. godine stekao titulu sveučilišnog prvostupnika matematike, *univ. bacc. math.*, nakon čega sam upisao Diplomski studij Financijska i poslovna matematika.