Definicije u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi

Kraš, Valentina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Valentina Kraš

DEFINICIJE U NASTAVI MATEMATIKE U OSNOVNOJ I SREDNJOJ ŠKOLI

Diplomski rad

Zagreb, rujan 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Valentina Kraš

DEFINICIJE U NASTAVI MATEMATIKE U OSNOVNOJ I SREDNJOJ ŠKOLI

Diplomski rad

Voditelj rada:

Prof. dr. sc. Mladen Vuković

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________________, predsjednik
2. ____________________________________, član
3. ____________________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ____________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji i dečku koji su mi tijekom cijelog studija pružali bezuvjetnu ljubav, podršku i razumijevanje.

Zahvaljujem se prijateljima koji su me ohrabrivali kada je bilo teško i bili moralna podrška.

Posebno se zahvaljujem mentoru prof.dr.sc. Mladenu Vukoviću na ukazanom povjerenju te savjetima i komentarima koji su mi uvelike pomogli pri izradi ovog diplomskog rada.

SADRŽAJ

Uvod

Nekada se u nastavi matematike naglasak stavljao na uvježbavanje raznih vrsta zadataka. Nastava se provodila formalnim prezentiranjem te se premalo pažnje posvećivalo uspješnom usvajanju matematičke teorije i preciznom definiranju matematičkih pojmova. Novom obrazovnom reformom poznatom pod nazivom *Škola za život* htjelo se doskočiti tom problemu. Sada je glavni cilj istraživački usmjerena nastava matematike kod koje se u središte nastave stavlja učenik kojemu se dodjeljuje aktivna uloga u sudjelovanju na nastavi. Učenik u procesu učenja oponaša znanstvenika što nazivamo *vođenim otkrivanjem*. Na taj se način potiče doživljaj matematike kao ljudske znanosti što ona uistinu i jest jer je nastala kao rezultat istraživanja. Također, osigurava da matematički pristup odgovara razini znanja i mogućnosti samih učenika. Otkrivanje može biti ugodno, dok učenje otkrivanjem može biti motivirajuće pogotovo za one učenike koji matematiku doživljavaju kao „bauk“. Istraživački usmjerena nastava doprinosi boljem razumijevanju matematike, razvoju kritičkog mišljenja kod učenika te shvaćanju važnosti matematike za život. Vođeno otkrivanje u kojem učenici analiziraju, sintetiziraju, apstrahiraju, generaliziraju, pretpostavljaju, itd. možemo smatrati višom razinom matematičkog obrazovanja koje učenike uči „kako razmišljati i rješavati probleme“ ne samo u matematici već općenito u svakodnevnom životu. Zbog svega navedenog, bitna uloga nastavnika je da u nastavi uspostavi vezu između matematike kao nastavnog predmeta i matematike kao znanosti te vodi i podupire proces učenja kod učenika. Matematika je predmet čiji se sadržaji moraju postepeno i primjereno graditi. Kako bismo istu razumjeli nužno je pravilno usvajanje matematičke teorije koja uključuje precizne definicije matematičkih pojmova. Ovaj rad posvećen je definicijama u osnovnoj i srednjoj školi. Na samom početku rada upoznat ćemo se s matematičkim pojmom kao oblikom mišljenja, osnovnim i izvedenim pojmovima te procesom izgradnje matematičkog pojma. Nadalje, vidjet ćemo za koje pojmove se, prema novom kurikulumu, eksplicitno navodi da se definiraju te ćemo analizirati definicije istih u promatranim udžbenicima za osnovnu i srednju školu. Također ćemo se dotaknuti i starijih programa i kurikuluma. Na kraju ćemo dati primjer nastavne pripreme u kojoj se uvodi pojam limesa niza.

1. Matematički pojam i definicija

Prema [24], **matematički pojam** je oblik mišljenja u kojemu se odražavaju bitna svojstva objekata koji se proučavaju. Matematičku teoriju čine dvije vrste pojmova: osnovni i izvedeni. **Osnovni matematički pojmovi** su jednostavni pojmovi koje ne definiramo. To su, primjerice, točka, pravac, ravnina i skup. **Izvedene pojmove** eksplicitno i precizno definiramo, tj. njihovo značenje opisujemo pomoću osnovnih pojmova ili nekih ranije definiranih pojmova. U definiciji pojma značajnu ulogu igraju bitna obilježja pojma. Svako obilježje pojma koje je uključeno u definiciju mora biti nužno, a sva obilježja zajedno moraju biti dovoljna za jasno i egzaktno opisivanje pojma.

Definicija pojma je nabrajanje nužnih i dovoljnih obilježja pojma povezanih logičkom rečenicom ili simboličkim zapisom (vidi [24]). Postoje pravila koja definicija mora zadovoljavati. Definicija mora biti primjerena definiranom pojmu - niti preuska, niti preširoka - mora razotkrivati bit pojma; mora biti pregledna, sažeta i suvremena. U sljedećem primjeru navest ćemo rečenicu koju ne možemo smatrati definicijom pojma paralelogram jer, osim same definicije, sadrži i karakterizaciju stoga ne zadovoljava gore navedena svojstva.

Primjer 1.1: Nekorektna definicija pojma paralelogram

> *Četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne i jednakih duljina naziva se paralelogram.*

U prethodnom primjeru uočavamo da smo u istoj rečenici naveli dva bitna ekvivalentna svojstva od kojih je jedan višak.

Smatramo da je bolje reći:

> *Četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne nazivamo paralelogram.*

ili

> *Četverokut kojemu su nasuprotne stranice jednakih duljina nazivamo paralelogram.*

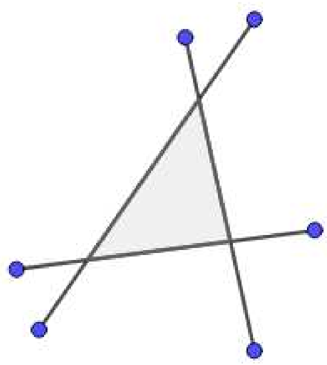
U trenutku kad jednu od prethodnih rečenica koju smo naveli da je bolje reći uzmemo kao radnu definiciju, druga postaje karakterizacija koja proizlazi iz definicije te se dokazuje.

Nadalje, definicija ne smije biti izrečena slikovitim ili dvosmislenim jezikom te ne smije biti negativna ako može biti pozitivna.

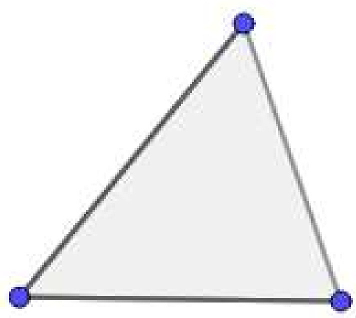
Primjer 1.2: Dvosmislena definicija pojma trokuta

Trokut je dio ravnine omeđen trima dužinama.

U ovom primjeru nije jasno na koji dio ravnine se točno misli. Dio ravnine možemo omeđiti pomoću tri dužine na razne načine. Jedan način prikazan je na slici 1, ali on se ne odnosi na pojam trokuta. Ako u nastavi koristimo ovu definiciju za pojam trokuta, onda je bitno definiciju upotpuniti slikom (vidi sliku 2).



Slika 1: Ne odgovara pojmu trokuta



Slika 2: Pojam trokuta

Primjer 1.3: Negativna definicija

Iracionalni brojevi su brojevi koji nisu racionalni.

Mana prethodne definicije je u tome što nam ona ne otkriva što su to iracionalni brojevi, već što oni nisu. Smatramo da je bolje izreći pozitivnu definiciju iracionalnih brojeva. Prema Kurniku (vidi [24]) pozitivna definicija iracionalnih brojeva glasi:

Realan broj koji se zapisuje u obliku beskonačnog neperiodičkog decimalnog razlomka naziva se iracionalan broj.

Na kraju, definicija svakako ne smije biti cirkularna.

Primjer 1.4: Cirkularne definicije pojmova okomiti pravci i kružnica

a) *Pravci koji zatvaraju pravi kut nazivaju se okomiti pravci. Kut čiji su kraci međusobno okomiti naziva se pravi kut.*
b) *Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od središta kružnice.*

Najpoznatiji primjer cirkularne definicije je definicija pojma okomitih pravaca u kojoj su okomiti pravci definirani pomoću pravog kuta. Samim time, niti jedan od pojmova zapravo nije definiran. Jedan od načina opisa pravog kuta, a onda i okomitih pravaca je:

Kut koji je jednak svome susjednom kutu naziva se pravi kut.

Kada smo opisali pojam pravog kuta na prethodni način, tada možemo opisati pojam okomitih pravaca pomoću pojma pravog kuta. Također, primjer još jedne cirkularne definicije je definicija pojma kružnice pri čemu je kružnica definirana pomoću njezinog središta. U ovom slučaju nije zadovoljen kriterij postepenog uvođenja pojmova u nastavi matematike jer je središte kružnice uvedeno prije samog pojma kružnice. Bolje bi bilo reći:

Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od neke čvrste točke u ravnini. Tu čvrstu točku nazivamo središte kružnice.

Neki pojam možemo definirati na više načina. Međutim, sve definicije koje predstavljaju isti pojam moraju biti međusobno ekvivalentne, što znači da moraju određivati isti skup objekata.

Primjer 1.5: Ekvivalentne definicije koje se odnose na isti pojam simetrala dužine

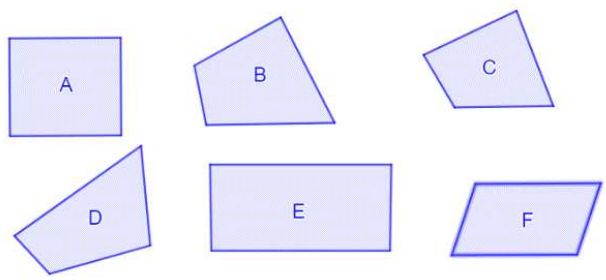
> ***Verzija 1***. *Simetrala dužine je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od krajnjih točaka te dužine.*
> ***Verzija 2***. *Simetrala dužine je pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju.*

Proces formiranja matematičkog pojma je složen i postupan proces koji se odvija u nekoliko koraka:

1) ZAPAŽANJE – promatranje i upoznavanje konkretnih objekata i njihovih konkretnih svojstava
2) PREDODŽBA O POJMU – uočavanje nečeg općeg i zajedničkog elementima iz promatranog skupa objekata
3) IZGRADNJA POJMA – izdvajanje bitnih, općih svojstava pojma (apstrahiranje).

Primjer 1.6: Formiranje pojma paralelogram

1. korak (ZAPAŽANJE): Među svim geometrijskim likovima, učenici se fokusiraju samo na četverokute. Četverokute promatraju na konkretnim modelima od papira, kartona, žice, itd.



Slika 3: Četverokuti

2. korak (PREDODŽBA): Učenici uočavaju da postoje oni četverokuti kojima su nasuprotne stranice paralelne i sukladne. Možda će neki učenici uočiti da su kutovi uz istu stranicu suplementarni.
3. korak (IZGRADNJA POJMA): U toj fazi učenici dolaze do definicije pojma paralelograma.
   Četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne naziva se paralelogram.

Ako na ovaj način definiramo pojam paralelograma, onda sva ostala bitna svojstva iz 2. koraka postaju poučci koje tek treba dokazati.

Pravilnim formiranjem pojma, nastavnik ostvaruje načelo znanstvenosti koje uspostavlja vezu između matematike kao nastavnog predmeta i matematike kao znanosti. Načelo znanstvenosti u formiranju matematičkog pojma očituje se kroz procese analize, sinteze, apstrahiranja i poopćavanja. Analizu i sintezu provodimo kroz prva dva koraka formiranja pojma, dok apstrahiranje i poopćavanje provodimo u trećem, zadnjem koraku.

Zadatak nastavnika matematike je postići jasnoću i adekvatnu preciznost kod uvođenja matematičkih pojmova. Pod adekvatnu, prvenstveno mislimo na primjerenu dobi i razini znanja učenika. U osnovnoškolskom obrazovanju naglasak je stavljen na razumijevanju i opisivanju matematičkih pojmova. Kod usvajanja novih matematičkih pojmova, učenici kreću od poznatog konteksta, razvijaju vlastite metode te kroz precizno i adekvatno dizajnirani niz primjera uz intervenciju nastavnika dolaze do onoga što nazivamo formalnim znanjem. Općenito, matematička teorija gradi se kroz nekoliko etapa, a prva je svakako navođenje osnovnih matematičkih pojmova. Usvajanje istih omogućuje daljnje produbljivanje i proširivanje matematičkog obrazovanja, odnosno, definiranje drugih, složenijih pojmova koji utječu na rješavanje složenih matematičkih problema i izgradnju kritičkog mišljenja.

2. Kurikulumi i programi nastavnog predmeta Matematika

Ovo poglavlje sastoji se od tri točke. U prvoj točki ukratko ćemo opisati važeći kurikulum (vidi [1]) za nastavni predmet Matematika. Zatim ćemo u drugoj točki izdvojiti one pojmove za koje se eksplicitno navodi da se definiraju u nastavi matematike i dati kritički osvrt na neke od njih. Za kraj, u trećoj točki ćemo se osvrnuti na definicije matematičkih pojmova u starim nastavnim programima i kurikulumima.

2.1 Važeći kurikulum nastavnog predmeta Matematika

Nekad je matematička pismenost obuhvaćala izvođenje osnovnih aritmetičkih vještina ili operacija. No s digitalizacijom i modernizacijom društva matematička pismenost prepoznata je kao jedan od temeljnih preduvjeta za stjecanje i razvoj životnih vještina učenika te pripremanje mladih za sudjelovanje u društvu. Zbog navedenog, javila se potreba za reorganizacijom obrazovnog sustava te nastavnog plana i programa. To je za posljedicu imalo donošenje novog kurikuluma. *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za osnovne i srednje škole i gimnazije u RH* te *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za srednje strukovne škole u RH* objavljene su u Narodnim novinama (br. 7/2019, br. 10/2019), a na snagu su stupile u siječnju 2019. godine. Aktualni kurikulum za nastavni predmet Matematika vrijedi za sve razrede osnovnih škola, gimnazija i strukovnih škola od školske godine 2021./2022. Njime su se modificirali i detaljizirali odgojno – obrazovni ishodi te su oni u kurikulumu za nastavni predmet matematika opisani sljedećim elementima:

- Odgojno – obrazovni ishodi
- Razrada ishoda
- Odgojno – obrazovni ishodi na razini usvojenosti „dobar“ na kraju razreda
- Sadržaji
- Preporuke za ostvarivanje odgojno – obrazovnih ishoda.

2.2 Pregled matematičkih pojmova u važećem kurikulumu za koje je eksplicitno navedeno da se definiraju

Proučavajući važeći kurikulum za nastavni predmet Matematika (vidi [1]) možemo uočiti da kroz osnovnu školu učenici strogo ne definiraju većinu matematičkih pojmova već ih samo opisuju za razliku od srednje škole gdje se susreću s raznim definicijama. U tablici 1 navedeni su oni matematički pojmovi za koje je eksplicitno navedeno da se definiraju.

Razred	**Pojmovi koji se „definiraju" prema važećem kurikulumu**
5. razred OŠ	- skupovi točaka u ravnini (točke, pravci, polupravci, dužine i kutovi) - simetrala dužine - krug i kružnica
1. razred SŠ (gimnazija)	- nultočka - simetrala dužine - simetrala kuta - visina - težišnica - karakteristične točke trokuta
2. razred SŠ (gimnazija)	- bijekcija - klasična vjerojatnost
3. razred SŠ (gimnazija)	- trigonometrijske funkcije
4. razred SŠ (gimnazija)	- derivacija funkcije u točki - limes niza - polinomi (izborni sadržaj)

Tablica 1.: Pregled eksplicitno navedenih pojmova koji se prema važećem kurikulumu „definiraju"

Prema [1], učenici se prvi put s konkretnom definicijom susreću u **petom razredu osnovne škole** kada definiraju skupove točaka u ravnini (točke, pravci, polupravci, dužine i kutovi) i simetralu dužine u okviru sadržaja: „*Skupovi točaka u ravnini: točka, pravac,* *polupravac, dužina, kut. Vrste kutova. Sukladne dužine. Sukladni kutovi. Simetrala dužine. Kutovi uz presječnicu usporednih pravaca*.“.

Iako je u kurikulumu jasno navedeno da u petom razredu osnovne škole definiraju skupove točaka u ravnini, važno je naglasiti da se ne radi o strogim i preciznim matematičkim definicijama. Naime, točke i pravci osnovni su objekti euklidske geometrije te ih smatramo intuitivno jasnima pa ih kao takve ne definiramo. S druge strane, pojam polupravca i dužine definiramo na temelju aksioma uređaja (poretka) s kojim se učenici kroz svoje osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje ne susreću.

Aksiom poretka (uređaja) jedan je od aksioma na kojima se temelji euklidska ravnina i koje elementi (točke i pravci) euklidske ravnine zadovoljavaju, a on glasi:

> Na svakom pravcu ravnine postoje točno dva međusobno suprotna linearna uređaja.

Dogovorno se ta dva suprotna uređaja iz navedenog aksioma označavaju s $\leq$ i $\geq$. Da bismo definirali pojam dužine i polupravca najprije moramo definirati pojam „ležati između“. Neka su A i B dvije različite točke u ravnini. Prema aksiomu pripadanja (incidencije) euklidske ravnine, postoji jedinstveni pravac koji prolazi tim dvjema točkama. Kažemo da točka T **leži između** točaka A i B na pravcu AB ako vrijedi ili $A \leq T \leq B$ ili $A \geq T \geq B$. Sada možemo definirati dužinu i polupravac:

> Skup svih točaka pravca AB koje leže između točaka A i B uključujući te dvije točke nazivamo **dužinom**.
>
> Skup svih točaka T pravca AB za koje vrijedi $A \leq T \leq B$ ili $A \leq B \leq T$ nazivamo **polupravac** s početkom u točki A koji prolazi točkom B različitom od točke A.

Što se tiče pojma kut, jasno je da učenicima na toj razini na nastavi ne možemo izreći strogu definiciju navedenog pojma već se pojam mora graditi postepeno prema uzrastu i predznanju učenika (načelo primjerenosti). S pojmom kuta učenici se susreću još u nižim razredima osnovne škole, ali na razini prepoznavanja. Nerijetko se u nižim razredima koristi tzv. genetička definicija pojma kut koja glasi:

„Dio ravnine koji opiše polupravac vrtnjom oko svoje početne točke naziva se kut.“

S obzirom da se genetičkom definicijom opisuje način nastajanja objekta koji se definira, navedena definicija je poželjna u nastavi matematike jer će pomoći učenicima da lakše vizualiziraju navedeni pojam što je i primarni cilj kod usvajanja pojmova u osnovnoj školi.

Nadalje, tada definiraju krug i kružnicu unutar sadržaja: „*Konstrukcija kvadrata. Konstrukcija pravokutnika. Konstrukcija jednakostraničnog trokuta. Konstrukcija kružnice i kruga. Dijelovi kružnice i kruga*.“. Kao odgojno-obrazovni ishod na razini usvojenosti „dobar“ na kraju petog razreda osnovne škole spominje se definiranje kruga i kružnice te opisivanje njihovih elemenata.

U nižim razredima osnovne škole učenici se najprije upoznaju s pojmom kruga, dok kružnicu upoznaju kao zakrivljeni rub kruga. U petom razredu pak najprije definiraju kružnicu kao skup točaka u ravnini jednako udaljenih od neke čvrste (fiksne) točke, a krug kao dio ravnine omeđen kružnicom. Ovo je definicija koja se najčešće koristi u nastavi matematike pa je tako možemo naći u gotovo svim promatranim udžbenicima za peti razred osnovne škole. Ovo je primjer dobre definicije kružnice jer u ovom primjeru nije narušena povezanost matematike kao nastavnog predmeta i matematike kao znanosti (načelo znanstvenosti). Prva dva koraka procesa formiranja pojma kružnice, opažanje i predodžba, učenici su već prošli u nižim razredima, dok u petom razredu prolaze kroz treći korak, a to je formiranje pojma. Uočimo da definicija kruga nije precizna jer nije jednostavno teorijski utemeljiti da zatvorena krivulja dijeli ravninu na dva dijela. Primjerice, kod poligona (jednostavnih jednodimenzionalnih mnogokuta) je to puno jasnije jer Jordanov teorem potkrjepljuje teoriju da svaki jednostavni jednodimenzionalni mnogokut razdvaja ravninu na dva područja koja nazivamo unutrašnjost (omeđeni dio) i vanjština (neomeđeni dio) mnogokuta (vidi [25]). Analogni teorem za zatvorene krivulje ne postoji.

U važećem kurikulumu razredi u gimnaziji su podijeljeni prema godišnjem broju sati nastave matematike. U **prvom razredu gimnazije** učenici definiraju nultočku u sklopu sadržaja: „*Linearna funkcija. Graf linearne funkcije*." te se na toj razini u nekim od promatranih udžbenika definira i pojam funkcije koja se sustavno analizira tek u četvrtom razredu srednje škole. Također, definiraju simetralu dužine, simetralu kuta, visinu, težišnicu i karakteristične točke trokuta unutar sadržaja: „*Karakteristične točke trokuta*.". Kao odgojno – obrazovni ishod na razini usvojenosti „dobar" spominje se definiranje središta trokutu opisane kružnice.

Iako je u aktualnom kurikulumu (vidi [1]) naglašeno da definiraju pojam funkcije, možemo se pitati imaju li učenici dovoljno predznanja da strogo matematički definiraju navedeni pojam. Kroz osnovnu školu, prema [1], učenici ne spominju pojam funkcije već pojam ovisnosti. U udžbeniku [8] unutar cjeline *Proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost* obrađuje se nastavna jedinica *Linearna ovisnost*, dok je jedinica *Linearna funkcija* stavljena u prošireni sadržaj. Na toj razini učenicima nije teško shvatiti ovisnost dviju veličina od kojih je jedna zavisna o drugoj pa tako razlikuju zavisne i nezavisne veličine. Međutim, ovdje često dolazi do poteškoća pa kasnije povezuju pojam ovisnosti s pojmom funkcije. No, nije svaka ovisnost funkcija. To možemo vidjeti na primjeru pridruživanja ocjena iz matematike učenicima u razredu. U ovom primjeru možemo različitim nezavisnim veličinama pridružiti jednaku zavisnu veličinu, odnosno, više učenika u razredu može dobiti istu ocjenu. Da bi kasnije shvatili pojam funkcije i strogo ju definirali, potrebno je da učenici razumiju pravilo pridruživanja i budu svjesni činjenice da ovisnost nije nužno funkcija.

Pojam funkcije u srednjoškolskom obrazovanju veže se uz pojmove konkretnih funkcija kao što su linearna, kvadratna, eksponencijalna, logaritamska i trigonometrijska funkcija. Konkretno, u prvom razredu srednje škole, pojam funkcije koristi se u obradi linearne funkcije. Prema jednom od promatranih udžbenika (vidi [9]), uvodi se pojam linearne funkcije bez da se prethodno uveo pojam funkcije. Iz ovog primjera vidimo da su učenici zakinuti za opće razumijevanje pojma funkcije prije same obrade konkretnih funkcija.

Najviše poteškoća od svih navedenih pojmova koji se, prema kurikulumu, definiraju u prvom razredu gimnazije zadaje pojam simetrale kuta. Postoje različite definicije navedenog pojma. Navest ćemo neke od njih.

„*Simetrala kuta je polupravac koji dijeli kut na dva sukladna kuta*."

„*Simetrala kuta je polupravac koji dijeli kut na dva kuta jednakih veličina*."

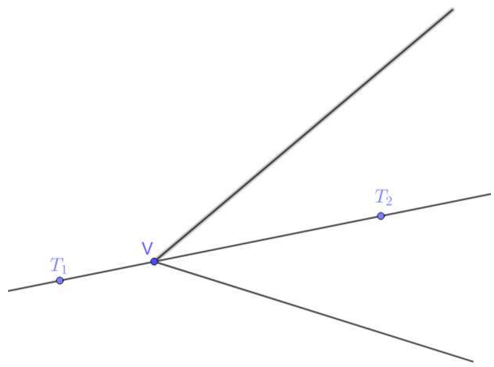
„*Simetrala kuta je polupravac koji dijeli kut na dva jednaka dijela*."

„*Simetrala kuta je skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od krakova kuta*."

Prva rečenica je primjer cirkularne definicije jer je pojam simetrale kuta definiran pomoću pojma sukladni kutovi. Uočimo da je druga rečenica zapravo ekvivalentna prvoj (sukladni kutovi = kutovi jednakih mjera/veličina).

Treća rečenica nije korektna jer izaziva nedoumicu. Nije posve jasno što znači „dva jednaka dijela". Intuitivno nam je jasno što to znači, ali to je daleko od stroge definicije koja se mora temeljiti na izgrađenim aksiomima i definicijama, a ne na intuiciji.

Četvrta rečenica može biti definicija pojma simetrale kuta, ali s obzirom da je u školi učenicima simetrala kuta predočena kao polupravac/pravac, to je navedena rečenica zapravo karakterizacija/svojstvo. Ovdje se problem dalje produbljuje pa se nameće pitanje vrijedi li navedena karakterizacija ako je simetrala kuta definirana kao pravac. Naime, ako je simetrala kuta definirana kao pravac, onda iz navedene rečenice nije jasno kada točka pripada simetrali kuta jer su obje točke T_1 i T_2 (vidi sliku 4) jednako udaljene od oba kraka kuta. Iz tog je razloga potrebno preformulirati rečenicu i naglasiti da se radi o „skupu svih unutrašnjih točaka kuta koje su jednako udaljene od krakova tog kuta".



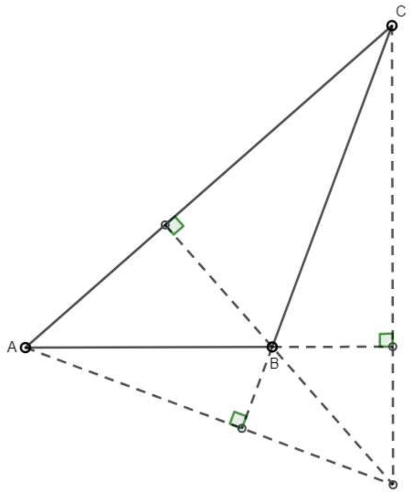
Slika 4: Simetrala kuta

U prethodnom primjeru možemo vidjeti da se neki matematički pojam može definirati na više načina. Ono na što treba obratiti pozornost jest da sve te definicije moraju biti međusobno ekvivalentne. Jednu od definicija treba izabrati kao radnu definiciju, dok će sve ostale u tom slučaju biti karakterizacije definiranog pojma.

Nadalje, pogledajmo primjere definicija pojmova ortocentra i težišta trokuta:

> „*Točka u kojoj se sijeku visine trokuta naziva se ortocentar*."
>
> „*Točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta naziva se težište trokuta*. *Težište dijeli svaku težnicu u omjeru* $2:1$, *računajući od vrha trokuta*."

Najprije uočimo nepravilnost kod definiranja pojma ortocentra. Općenito, tvrdnja „visine trokuta sijeku se u jednoj točki" nije istinita. Naime, visinu trokuta definiramo kao dužinu koja spaja vrh trokuta s nožištem okomice spuštene iz tog vrha na nasuprotnu stranicu trokuta. Ako uzmemo za primjer tupokutan trokut, vidjet ćemo da se visine u tom trokutu ne sijeku, ali se sijeku pravci na kojima leže visine tog trokuta i to izvan tog trokuta (vidi sliku 5). Prema gore navedenoj definiciji, ortocentar ne bi bio definiran za tupokutne trokute. Iz tog razloga, bitno je naglasiti da ortocentrom nazivamo točku u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta.



Slika 5: Tupokutan trokut

Kod pojma težišta trokuta, najčešće se događa da učenik prilikom definiranja tog pojma kaže i drugu navedenu rečenicu zato što je naglašena u udžbeniku zajedno s prvom rečenicom što može dovesti do poteškoća u razlikovanju definicija i poučaka. Zato zahtjev za sažetosti i minimalnosti sadržaja iza sebe ima metodičko opravdanje. Ovdje glavnu ulogu svakako ima sam nastavnik koji može utjecati da se navedeni zahtjev ispuni pravilnim definiranjem pojma. Dakle, u ovom slučaju radi se o poučku iza kojega stoje dvije tvrdnje koje treba dokazati:

1. Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki.
2. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ računajući od vrha trokuta.

Kod **drugih razreda gimnazije**, bez obzira na broj sati, u kurikulumu se kod sadržaja „*Funkcije*“ kao preporuka za ostvarivanje odgojno – obrazovnog ishoda navodi definiranje bijekcije i prepoznavanje iste na primjerima skupova prikazanih Vennovim dijagramima. S klasičnom vjerojatnosti učenici se prvi puta susreću u osmom razredu osnovne škole kada istu rade na razini opisivanja vjerojatnosti slučajnog događaja, razlikovanja skupa povoljnih događaja od skupa elementarnog događaja i računanja vjerojatnosti nekog događaja kako bi mogli donijeti odluke.

U drugim razredima gimnazije priča s klasičnom vjerojatnosti se produbljuje te se ista strogo definira. Učenici primjenjuju klasičnu definiciju vjerojatnosti na raznim zadacima što spada u usvojenost „dobar“ na kraju razreda.

U **trećim razredima gimnazije** definiraju trigonometrijske funkcije broja na brojevnoj kružnici pomoću eksponencijalnog preslikavanja pravca na kružnicu unutar sadržaja: „*Brojevna kružnica. Definicija trigonometrijskih funkcija. Svojstva trigonometrijskih funkcija*.“ Iskazivanje definicija trigonometrijskih funkcija spada u usvojenost „dobar“ na kraju razreda.

U svim **četvrtim razredima gimnazije,** bez obzira na godišnji broj sati nastave matematike, obrađuje se derivacija funkcije u točki u sklopu sadržaja: „*Problem tangente i brzine. Definicija derivacije funkcije*“. Učenici definiraju derivaciju funkcije u točki te povezuju istu s problemom tangente i brzine. Primjer definicije derivacije funkcije u točki iz udžbenika [21]:

Neka je funkcija f neprekidna na intervalu I te neka je $x_0 \epsilon I$ i *Δx prirast argumenta takav da je $x_0 + \Delta x \in I$. Derivacija funkcije f u točki x_0 je broj $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ako taj limes postoji. Ako derivacija postoji u svakoj točki intervala, kažemo da je funkcija derivabilna na tom intervalu.*

Ono što se razlikuje ovisno o broju sati nastave matematike je obrada sadržaja „*Monotonost i omeđenost niza. Limes niza*" i „*Polinomi. Poučak o dijeljenju polinoma s ostatkom. Poučak o faktorizaciji polinoma. Nultočke polinoma*". Monotonost i omeđenost niza te limes niza se obrađuju samo u razredima sa 160, 192 i 224 sati godišnje. U kurikulumu [1] navedeno je da primjenjuju definiciju limesa niza, no navedeni pojam ne definira se strogo u svim udžbenicima. U nekima je pojam limesa niza naveden opisno, dok je u nekima precizno definiran kao u [20]:

Realni broj a je limes ili granična vrijednost niza realnih brojeva (a_n) ako za svaki broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj n_0 takav da za sve $n > n_0$ vrijedi $|a_n - a| < \varepsilon$.

Polinomi se obrađuju samo u razredima sa 192 i 224 sati matematike godišnje pri čemu se isti definiraju. Definicija polinoma iz udžbenika [21]:

Funkcija $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdje su a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n realni brojevi, $a_n \neq 0$ i $n \in N_0$ naziva se polinom n-tog stupnja s

realnim koeficijentima. Brojeve a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n nazivamo koeficijentima polinoma, koeficijent a_n nazivamo vodećim koeficijentom, a koeficijent a_0 nazivamo slobodnim

koeficijentom. Broj $n \in N_0$ je stupanj polinoma p. Pišemo $n = st\, p$.

Iz svega navedenog možemo zaključiti da nije poželjno od učenika zahtijevati da pamte naglašene rečenice iz udžbenika kao definicije jer se najčešće ne radi o strogim matematičkim definicijama, već suprotno, radi se o matematički nepreciznim opisima pojmova koji narušavaju načelo znanstvenosti. Kao primjer možemo dati pojam sukladnosti i okomitih pravaca. U osnovnoj školi učenicima je predstavljena sljedeća definicija pojma „sukladni likovi":

Dva su lika sukladna ako se mogu nanijeti jedan na drugi.

Međutim, sukladnost strogo definiramo pomoću izometrije, a da bismo mogli definirati izometriju, potrebna nam je funkcija udaljenosti. Preslikavanje $f: M \to M$ je izometrija ravnine M ako vrijedi

$$d\big(f(A), f(B)\big) = d(A, B), \forall A, B \in M.$$

Dakle, izometrija je preslikavanje koje čuva udaljenost pa će izometrija svaku dužinu preslikati u njoj sukladnu dužinu. Sada možemo matematički precizno definirati sukladnost:

Dva su lika sukladna ako postoji izometrija koja preslikava jedan lik u drugi.

S obzirom da učenici za pojam izometrije nisu čuli u osnovnoj školi, uočavamo od kolike je važnosti definiciju prilagoditi uzrastu učenika, ali onda ne možemo pričati o strogoj matematičkoj definiciji pojma. S druge strane, uočavamo da upravo prilagođene „definicije" dovode do zbrke i nerazumijevanja pa tako učenici u kasnijem obrazovanju najčešće ne razlikuju definicije od poučaka jer u definicije unose sve što znaju o matematičkom pojmu. Također, u nastavi se znaju dogoditi cirkularne definicije što stroga definicija svakako ne smije biti. Kako bismo ukazali na složenost kod uvođenja matematičkih pojmova još jednom ćemo navesti primjer cirkularne definicije koji smo naveli u prvom poglavlju:

Pravci koji zatvaraju pravi kut nazivaju se okomiti pravci. Kut čiji su kraci okomiti naziva se pravi kut.

Kao što smo već prije rekli, ovdje je pojam okomitih pravaca definiran pomoću pojma pravog kuta, i obratno, pojam pravog kuta definiran je pomoću pojma okomitih pravaca. Na taj način niti jedan od navedenih pojmova nismo definirali. Ispravno bi bilo najprije definirati pojam pravog kuta kao kuta koji je jednak svojem sukutu (susjednom kutu), a tek onda definirati pojam okomitih pravaca.

Iz navedena dva primjera vidimo koliko je kompleksno strogo matematički definirati određeni pojam te da ne možemo učenicima ponuditi stroge matematičke definicije ukoliko nemaju dovoljno predznanja da bi iste mogli razumjeti. Isto tako, sve ono što je u udžbenicima istaknuto ili ponuđeno kao definicija nekog pojma, najčešće to uistinu nije stroga definicija.

Nužno je da matematika u osnovnoj školi ostane konkretna i induktivna. Tu važnu ulogu igra nastavnik matematike koji je posrednik između matematičke teorije i učenika. Nastava matematike mora se temeljiti na pojmovima koji su znanstveno utemeljeni, a do apstraktnih postavki, tj. generalizacija, nužno je dolaziti razmatranjem konkretnih objekata i induktivnim pristupom. Upravo takav pristup zadržava načelo „lakše ka težem“, odnosno „jednostavno ka složenom“ što je primjerenije učenicima, a omogućava daljnje produljivanje znanja na višoj razini. Na taj način ujedno se kod učenika formira i razvija matematičko mišljenje.

2.3 Definicije matematičkih pojmova u starim nastavnim programima i kurikulumima

Što se tiče evolucije nastavnih programa i kurikuluma, do godine 2019./2020. nastava matematike u srednjim školama provodila se prema nastavnom programu za gimnazije (vidi [3]) objavljenom u Glasniku Ministarstva 1994. godine. Taj nastavni program sadrži ispisane ciljeve i sadržaj te nigdje nije navedeno koje pojmove treba obraditi i do koje razine. Također, nije strukturiran na gimnazije s određenim brojem sati matematike i na srednje strukovne škole.

Hrvatski nacionalni obrazovni standard (vidi [4]), skraćeno HNOS, iz 2006. godine je nastavni plan i program za osnovnu školu. Sadrži teme koje se obrađuju po razredima u osnovnoj školi s ključnim pojmovima i obrazovnim postignućima. Ovdje je već vidljivo o kojim matematičkim pojmovima se priča u određenoj temi, ali ni ovdje se ne navodi koji pojmovi se trebaju eksplicitno definirati. HNOS je bio aktualan od 2006. do 2019. godine te je napravljen s ciljem traženja kompromisa između tradicionalnog i novih stajališta u nastavi matematike. Njime je uveden novi pristup poučavanja koji u središte stavlja učenika, a ne sadržaj. Taj dokument uvelike je utjecao na obrazovanje jer su izbačeni sadržaji koji nemaju znanstveno utemeljenje i koji su neprimjereni dobi učenika. S druge strane, dodan je sadržaj koji je neophodan u formiranju kritičkog mišljenja učenika i rješavanju matematičkih problema.

Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje (vidi [2]), skraćeno NOK, donesen je 2010. godine. Njime je obrazovanje podijeljeno na cikluse:

1. ciklus: 1 - 4.razred OŠ
2. ciklus: 5. i 6. razred OŠ
3. ciklus: 7. i 8. razred OŠ

4. ciklus: odnosi se na 1. i 2. razred srednjih strukovnih i umjetničkih škola, dok u gimnazijama obuhvaća sva četiri razreda. Ujedno se odnosi i na stjecanje najniže razine strukovne kvalifikacije.

U Nacionalnom okvirnom kurikulumu su razrađeni opći odgojno – obrazovni ciljevi nastavnog predmeta Matematika i istaknute su dvije dimenzije matematičkog obrazovanja:

- MATEMATIČKI PROCESI:
  1. Prikazivanje i komunikacija
  2. Povezivanje
  3. Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje
  4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje
  5. Primjena tehnologije
- MATEMATIČKI KONCEPTI:
  1. Brojevi
  2. Algebra i funkcije
  3. Oblik i prostor
  4. Mjerenje
  5. Podatci

U odnosu na stare kurikulume te nastavne planove i programe, uočavamo izmjene u sadržaju u ovisnosti o dobi učenika. Prema starim kurikulumima, eksponencijalna i logaritamska funkcija radile su se u drugom razredu gimnazije, dok je sada u drugom ostala samo kvadratna funkcija, a eksponencijalna i logaritamska prebačene su u treći razred gimnazije. Isto tako, aktualnim kurikulumom razdijeljena je i trigonometrija. Prema novom kurikulumu, u prvom razredu gimnazije obrađuje se trigonometrija pravokutnog trokuta, u drugom trigonometrija raznostraničnog trokuta, dok se trigonometrijske veličine realne varijable i trigonometrijske funkcije obrađuju u trećem razredu gimnazije. Razlika u odnosu na stari kurikulum je u tome što je novim razdijeljena tzv. „mala trigonometrija“ na prvi i drugi razred gimnazije, dok je u starom bila samo u drugom razredu gimnazije. Što se tiče samih definicija matematičkih pojmova, samo je u aktualnom kurikulumu navedeno koji pojmovi se eksplicitno definiraju s time da se učenici sa strogim definicijama susreću tek u srednjoškolskom obrazovanju što je pak prilagođeno dobi učenika i njihovom predznanju.

3. Definicije u udžbenicima matematike

U ovom poglavlju ćemo analizirati na koji način su pojmovi, za koje smo u prethodnom poglavlju naveli da se definiraju prema važećem kurikulumu, definirani u promatranim udžbenicima.

3.1 Analiza udžbenika za osnovnu školu

Skupovi točaka u ravnini (točke, pravci, polupravci, dužine i kutovi)

Prema aktualnom kurikulumu (vidi [1]) učenici u **petom razredu osnovne škole** definiraju skupove točaka u ravnini, simetralu dužine te krug i kružnicu. U prvom udžbeniku navedeni pojmovi se obrađuju unutar cjeline „Skupovi točaka u ravnini“. Na samom početku te cjeline navedeni su ishodi učenja i pojmovi s kojima će se učenici upoznati u navedenoj cjelini. Kao jedan od ishoda učenja navodi se:

- Učenici će opisati, definirati, skicirati, crtati i označavati skupove točaka u ravnini kao što su točke, pravci, polupravci, dužine, kutovi, kružnica, krug i proučavati njihove međusobne odnose.

Kod drugog udžbenika razlika je u poretku nastavnih jedinica unutar cjeline „Skupovi točaka“.

Prva nastavna jedinica unutar cjeline „Skupovi točaka u ravnini“ u prvom udžbeniku je „Točka, pravac, polupravac, dužina“. Prije uvođenja matematičkih pojmova točke, pravca, polupravca i dužine dani su primjeri predočavanja ravnine u prostoru. Tako je navedeno da ravninu predočavamo školskom pločom ili listom papira te se naglašava da se ravnina po volji širi kako bi učenici dobili dojam da ravnina nema „granica“. S obzirom da se većina učenika do tada već susrela s računalima i vjerojatno upoznala pojam piksela, u prvom udžbeniku se pikseli kao element slike uspoređuju s točkama kao elementom ravnine. Za točke se navodi sljedeće:

> *Kao što se pri izradi slika na zaslonu računala koristimo najmanjim njegovim djelićima – pikselima, tako se i pri stvaranju slika u ravnini i prostoru koristimo njihovim najmanjim dijelovima –* ***točkama****.*

U drugom udžbeniku točka je opisana kao najmanji dio ravnine.

Na ovaj način, učenicima se želi približiti pojam točke kao najmanjeg elementa ravnine. Očito je da ovime nije definiran pojam točke. Kao što smo istaknuli u prošlom poglavlju, pojam točke ne definiramo već ga smatramo osnovnim pojmom.

Nadalje, pojam pravca u prvom udžbeniku opisan je na sljedeći način:

> *Ako ravnoj crti ne istaknemo krajnje točke, nego zamišljamo da se crta po volji produljuje, tada smo nacrtali* ***pravac****.*

Pojam pravca također je osnovni pojam koji ne definiramo pa tako ovo ne možemo smatrati definicijom pravca već opisom kojim je učenicima pravac predočen kao „ravna crta koja se beskonačno širi na obje strane“. Pitamo li učenike „Što je pravac?“ često ćemo kao odgovor čuti da je pravac ravna linija koja se po volji produljuje na obje strane. Takvi opis pravca dan je u drugom udžbeniku:

> ***Pravac*** *je neograničena (neomeđena) ravna crta.*

Zasigurno će većina učenika upravo navedeno uzeti kao „definiciju“ pojma pravca. Ukoliko nastavnik učenicima ne osvijesti razliku između definicije matematičkog pojma i opisa već od njihove rane dobi, utoliko to kasnije može postati prepreka u postizanju uspješne nastave matematike, a samim time i u njihovom daljnjem matematičkom obrazovanju. Poanta rečenog je da ne možemo učenicima definirati pojam koji se i sam u matematici kao znanosti ne definira jer time također narušavamo načelo znanstvenosti u nastavi matematike.

Nakon uvođenja pojma pravca u prvom udžbeniku, uvodi se pojam polupravca, a zatim pojam dužine.

Definicija pojma polupravca u prvom udžbeniku:

Ako na jednom pravcu p istaknemo neku točku T, tada možemo uočiti da se s obje strane te točke protežu dijelovi tog pravca. Svaki od tih dijelova pravca zasebno zajedno s točkom T čini ***polupravac s početnom točkom $\boldsymbol{T}$*****.**

Definicija pojma dužine u prvom udžbeniku:

Ako na nekom pravcu odaberemo dvije različite točke, možemo promatrati točke pravca koje se nalaze između točaka A i B, uključujući i točke A i B. Skup svih navedenih točaka naziva se ***dužina****. Dakle, dužina je ravna omeđena crta.*

Opet možemo uočiti da način formiranja pojmova polupravac i dužina nije matematički precizan te da je cilj da učenici razumiju navedene pojmove. Da bismo strogo formirali i definirali matematičke pojmove dužine i polupravca, najprije bi morali učenike upoznati s aksiomima euklidske geometrije ravnine. Međutim, na toj razini oni još nisu spremni niti imaju dovoljno predznanja da bi iste shvatili. Naime, kao što je opisano u prethodnom poglavlju, pojmove dužine i polupravca definiramo pomoću aksioma incidencije (pripadanja). Da bi iste definirali, najprije moramo definirati pojam ležati između. Uočimo da je u prvom udžbenik pojam dužine opisan pomoću pojma ležati između, a da pritom isti nije definiran. No, učenici već intuitivno znaju značenje pojma ležati između.

U drugom udžbeniku se pojam polupravca uvodi pomoću proizvoljne točke T koja se nalazi na pravcu p i dijeli taj pravac na dva dijela. Navedeno je da svaki od tih dijelova, zajedno s točkom T, zovemo polupravac.

Definicija polupravca u drugom udžbeniku:

Polupravac *s početnom točkom T, gdje je $T \in p$, jest skup svih točaka pravca p koje se nalaze s iste strane točke T, uključujući i točku T.*

Ova definicija pojma polupravca je matematički preciznija od definicije koja se nalazi u prvom udžbeniku. Naime, u prvom udžbeniku se polupravac s početnom točkom T definira kao dio pravca, opisan prvom rečenicom (vidi definiciju polupravca u prvom udžbeniku), zajedno s točkom T pa zapravo ne možemo govoriti o strogoj definiciji već o opisu navedenog pojma. Osim toga, u tom opisu nigdje ne nalazimo riječi „naziva se“ ili „zove se“ što bi naglasilo da se radi o definiciji.

U drugom udžbeniku, pojam dužine uvodi se prije pojma pravca što nije matematički ispravno. Naime, pojmove u matematici treba graditi postepeno. U ovom slučaju, to načelo je narušeno jer je dužina dio pravca, a ne obratno. Iz tog razloga, smatramo da je bolje prvo uvesti pojam pravca pa tek onda pojam dužine.

Definicija pojma dužine u drugom udžbeniku:

> ***Dužina*** *je ograničena (omeđena) ravna crta.*

Uspoređujući definicije pojma dužine u prvom i drugom udžbeniku možemo doći do zaključka da je preciznija definicija istog iz prvog udžbenika. Iako je definicija iz drugog udžbenika učenicima intuitivno jasna, ne možemo je smatrati matematički preciznom jer se definicije, kao što smo već spomenuli, ne temelje na intuiciji.

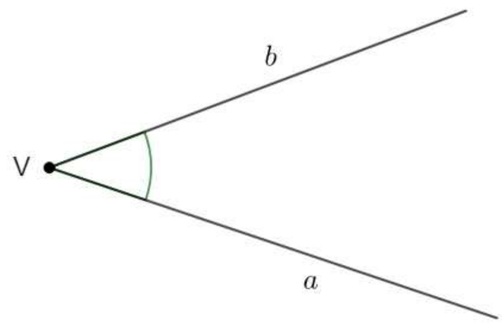
S pojmom kuta učenici se prvi put susreću u nižim razredima osnovne škole, točnije u četvrtom razredu osnovne škole. Tada je u nastavi matematike prisutna genetička definicija pojma kut kako bi si učenici lakše vizualizirali i predočili navedeni pojam. U prvom udžbeniku kut se obrađuje u nastavnoj jedinici „Kut“. Uvodi se kroz primjer iz stvarnog života u kojemu se proučavaju krovovi kuća u gorju i primorju. Nakon toga, kut se definira sljedećom rečenicom:

> *Dio ravnine omeđen dvama polupravcima čija je početna točka ista naziva se* ***kut****.*

U drugom udžbeniku pojam kuta uvodi se u nastavnoj jedinici „Kut. Vrste i mjerenje kutova“ bez početne motivacije, tj. primjera iz stvarnog života, za razliku od prvog udžbenika. Kut je u ovom udžbeniku definiran na isti način kao i u prvom, tj. kao dio ravnine:

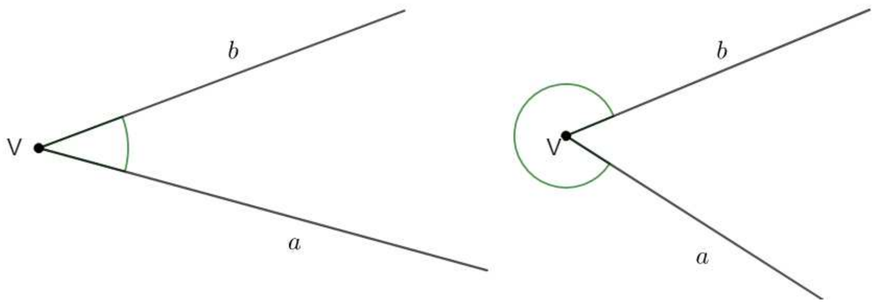
> ***Kut*** *je dio ravnine omeđen dvama polupravcima koji imaju zajedničku početnu točku.*

Uočimo da u rečenici nije jasno na koji se od dva dijela ravnine točno misli pa takva definicija može zbuniti učenike ukoliko nastavnik ne naglasi o kojem dijelu ravnine se točno radi. Ova poteškoća može kasnije biti problem kod učenja vrsta kutova. Naime, učenici najčešće ne percipiraju izbočeni kut kao dopušteni kut. Stoga gore navedena definicija pojma kuta mora biti popraćena grafičkim prikazom (vidi sliku 6).



Slika 6: Kut

U oba promatrana udžbenika istaknuto je da na kut crtamo kružni luk kako bismo naglasili koji od dvaju kutova omeđenih polupravcima promatramo (vidi sliku 7).



Slika 7: Kutovi

Kružnica i krug

U istoj nastavnoj jedinici „Točka, pravac, polupravac, dužina" u prvom udžbeniku uvodi se pojam kružnice kroz primjer u kojemu su nacrtane dužine $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ za koje vrijedi $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$. U primjeru je potrebno uočit da su točke B, C i D jednako udaljene od točke A. Navedeno je da točke B, C i D pripadaju zakrivljenoj liniji koju nazivamo kružnica. Točka S predstavljena je kao središte kružnice, dok je dužina koja spaja središte kružnice s nekom njenom točkom predstavljena kao polumjer kružnice. Dalje se kružnica definira kao:

> ***Kružnica*** *k sa središtem S u točki S i duljinom polumjera* r *je skup svih točaka ravnine koje su od točke S udaljene za duljinu* r.

Dakle, u prvom udžbeniku središte kružnice i polumjer uvedeni su prije definiranja pojma kružnice što nije matematički sustavno. Smatramo da najprije moramo uvesti pojam kružnice kako bismo mogli definirati „dijelove“ kružnice, tj njezino središte i polumjer.

Kao što možemo vidjeti, razlika je u tome što školska definicija nije pisana matematičkim jezikom, tj. matematičkim simbolima.

U drugom udžbeniku pojam kružnice uvodi se unutar nastavne jedinice „Kružnica i krug“ kao jedan od najvažnijih geometrijskih likova. Definira se na sljedeći način:

> ***Kružnica*** *je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od neke točke S u toj ravnini. Točku S nazivamo* ***središtem ili centrom kružnice****.* ***Polumjer*** *je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera je* ***radijus*** *i označava se s* r.

Vidimo da su ovdje pojmovi sustavno izgrađeni, tj. najprije je definirana kružnica, a zatim njezino središte i polumjer.

Dalje se u nastavnoj jedinici „Krug i kružnica“ u prvom udžbeniku najprije ponavlja naučeno o kružnici, a zatim se pojam kruga definira pomoću pojma kružnice na sljedeći način:

> *Skup točaka u ravnini omeđen kružnicom, uključujući i točke kružnice nazivamo* ***krug****.*

U drugom udžbeniku krug je definiran kao dio ravnine:

> ***Krug*** *je dio ravnine omeđen kružnicom.*

Uz ovu rečenicu, naglašeno je da i sve točke kružnice pripadaju krugu.

Učenici već u nižim razredima nauče razlikovati krug i kružnicu. Ono što stvara nejasnoće je to što učenici ne shvaćaju zašto kružnica dijeli ravninu na dva dijela (unutrašnji dio– ograničen i vanjski dio - neograničen). Kako bi olakšali učenicima, nastavnici ilustriraju krug bojanjem unutrašnjosti. Također, nije lako dokazati da zatvorena linija dijeli ravninu na dva dijela. Zbog prethodnog, navedena školska definicija kruga nije matematički precizna.

Simetrala dužine

Pojam simetrale dužine u prvom udžbeniku predstavljen je sljedećom rečenicom:

> ***Simetrala dužine*** *je pravac okomit na tu dužinu koji je dijeli na dva dijela jednakih duljina.*

S obzirom da je u tom udžbeniku uokvirena samo prethodno napisana rečenica, učenici možda neće zamijetiti rečenicu koja se nalazi ispod nje, a u kojoj se navodi da takav okomit pravac prolazi polovištem dužine. Uzmemo li u obzir samo uokvirenu rečenicu, radi se o matematički nepreciznoj definiciji koja može zbuniti učenike. Da je pravac okomit na dužinu, to je jasno, ali što znači da takav okomit pravac dijeli tu dužinu na dva dijela jednakih duljina? Pitamo se, kojom točkom dužine onda mora prolaziti takav pravac i postoji li više takvih točaka. Naravno da se radi o jedinstvenoj točki, a to je točka polovišta jer polovište dijeli dužinu na dva dijela jednakih duljina. U obzir moramo uzeti da neki učenici možda neće odmah zaključiti da opisan pravac mora prolaziti polovištem te dužine. Stoga bi preciznija školska definicija pojma simetrale dužine bila:

> *Pravac koji prolazi polovištem dužine i okomit je na nju naziva se* ***simetrala dužine****.*

Upravo takva definicija simetrale dužine dana je i uokvirena u drugom udžbeniku. Također, u drugom udžbeniku jasno je naglašeno da je rečenica:

> *Svaka točka simetrale dužine jednako je udaljena od krajnjih točaka te dužine.*

karakterizacija pojma simetrale dužine, dok u prvom udžbeniku to nije naglašeno. Kako bi izbjegli situaciju u kojoj učenik na pitanje „Što je simetrala dužine?“ navodi sve što zna o njemu, nastavnici prilikom poučavanja moraju jasno naglasiti razliku između definicije tog pojma i njegove karakterizacije.

Općenito, većina definicija matematičkih pojmova pojmova za koje se, prema aktualnom kurikulumu spominje da se definiraju, nisu stroge matematičke definicije u što smo se već uvjerili analizom prethodnih pojmova. Osnovni cilj nastave matematike, pogotovo u osnovnoj školi, je da učenici razumiju pojmove te da ih mogu predočiti, a ne da ih znaju definirati jer svojim predznanjem na toj razini još uvijek nisu spremni razumjeti stroge matematičke definicije već bi ih iste samo zbunile što bi dovelo do „učenja napamet".

3.2 Analiza udžbenika za srednju školu

Sada ćemo analizirati na koji način su definirani pojmovi za koje se u aktualnom kurikulumu (vidi [1]) eksplicitno navodi da se definiraju u udžbenicima za srednje škole s 3 ili 4 sata matematike tjedno.

Prvi razred gimnazije

Krenut ćemo od prvog razreda gimnazije za koji se navodi da se definiraju pojmovi: nultočka, simetrala dužine, simetrala kuta, visina trokuta, karakteristične točke trokuta. U prvom promatranom udžbeniku navedeni pojmovi definiraju se unutar cjeline „Trokut", dok se u drugom udžbeniku definiraju unutar cjeline „Sukladnost i sličnost". U oba udžbenika su dani ishodi cjeline, a u prvom udžbeniku jedan od ishoda glasi:

- Učenici će definirati i konstruirati simetralu dužine, simetralu kuta, visinu i težišnicu te karakteristične točke trokuta.

Nultočka

Pojam nultočke se definira u sklopu cjeline „Linearna funkcija". U promatranim udžbenicima prije svake cjeline nalaze se ishodi te razrada ishoda cjeline kako bi učenici dobili dojam o tome što će obrađivati u istoj. Tako se u prvom udžbeniku prije cjeline „Linearna funkcija“ kao jedan od ishoda spominje:

- Učenici će definirati i određivati nultočku.

Prije svega, spomenimo da se prije uvođenja pojma linearne funkcije u prvom udžbeniku uvodi pojam funkcije općenito pa se ista definira na sljedeći način:

> ***Funkcija sa skupa A u skup B*** *je pravilo koje svakom elementu skupa A pridružuje točno jedan element skupa B. Zapisujemo* $f\colon A \to B$*. U zapisu* $f\colon A \to B$*, skup A nazivamo domena ili područje definicije funkcije, a skup B kodomena ili područje vrijednosti funkcije.*

Vidimo da je ovdje veza između elemenata skupa A i B iskazana matematički precizno te se koriste matematički simboli. Međutim, s obzirom da se neki učenici s pojmom funkcije tek sada prvi put upoznaju, to bi mogao biti preveliki skok za neke učenike. Kao što je navedeno u drugom poglavlju, učenici se u sedmom razredu osnovne škole upoznaju samo s pojmom linearne ovisnosti, a ne funkcije (linearna funkcija se u sedmom razredu nalazi u proširenom sadržaju) tako da je na ovoj razini pojam funkcije nekima od njih „strani“ pojam. Stoga uvođenje matematičkog zapisa u definiciju pojma funkcije na toj razini može biti problematično jer moramo uzeti u obzir da neće svi učenici razumjeti značenje tog zapisa, a to je da f djeluje na skup A i preslikava elemente iz skupa A u skup B („funkcija sa skupa A u skup B“), već će vrlo vjerojatno isti samo „naučiti napamet“. No, to ne znači da matematički simboli nisu važni i potrebni u nastavi. Razumijevanje matematičkog jezika omogućuje učenicima rješavanje problemskih zadataka na višem nivou te prevođenje tekstualnih zadataka iz stvarnog života u matematički zadatak pisan matematičkim simbolima. Međutim, učenici najprije moraju usvojiti matematički sadržaj kako bi bili osposobljeni za upotrebu i razumijevanje matematičke terminologije te matematičkih simbola. Kako bi se pojam funkcije što kvalitetnije približio učenicima, obrađuju se i pojmovi domene, kodomene te grafa funkcije.

S druge strane, u drugom udžbeniku se prije pojma linearne funkcije ne uvodi pojam funkcije što opet može predstavljati problem jer se u tom slučaju pojam funkcije sve do četvrtog razreda gradi na konkretnim funkcijama bez da učenici razumiju pojam funkcije općenito. Svakako, uvođenjem osnovnih pojmova o funkciji, uspješnije se uvode konkretne funkcije.

Vratimo se sada na pojam nultočke. Taj pojam se obrađuje u sklopu linearne funkcije pa tako na toj razini govorimo o nultočki linearne funkcije.

Definicija nultočke u prvom udžbeniku:

> ***Nultočka funkcije*** *je vrijednost* x_0 *za koju je* $f(x_0) = 0$.

Definicija nultočke u drugom udžbeniku:

> ***Nultočka linearne funkcije*** *je onaj broj* x *za koji je* $f(x) = 0$.

Ovo je dobra definicija nultočke koja vrijedi za funkciju f općenito, ne samo za linearnu funkciju. U oba udžbenika još se spominje da je točka u kojoj graf funkcije siječe x os oblika $(x_0, 0)$, tj. $(x, 0)$. Ovdje se često događa da učenici nultočku definiraju kao točku. Razlog tome može biti taj što se u riječi nultočka iza prefiksa *nul* nalazi riječ *točka*. Kako bi to izbjegli, bitno je učenicima naglasiti razliku između nultočke i točke u kojoj graf funkcije siječe os apsicu.

Simetrala dužine

S pojmom simetrale dužine učenici su se već susreli u petom razredu osnovne škole. U prvom razredu gimnazije ponavljaju definiciju navedenog pojma te je u oba udžbenika ona izrečena na sljedeći način:

> ***Simetrala dužine*** *je pravac koji je okomit na dužinu i prolazi njezinim polovištem.*

Kada bismo htjeli precizirati da se radi o definiciji, u rečenici bi se trebale nalaziti riječi „naziva se“ ili „zove se“ pa smatramo da bi bilo bolje kada bismo rekli:

> *Pravac koji je okomit na dužinu i prolazi njezinim polovištem naziva se* ***simetrala dužine***.

Međutim, analizom promatranih udžbenika uočavamo nedostatak riječi „naziva se“ ili „zove se“ u većini rečenica koje se smatraju „definicijom“ nekog pojma. Na ovoj razini više pažnje se posvećuje karakterizaciji pojma simetrale dužine koju bi učenici trebali razlikovati od definicije tog pojma ukoliko su ga u osnovnoj školi dobro usvojili. U oba promatrana udžbenika dokazuje se poučak o simetrali dužine:

Svaka točka simetrale dužine jednako je udaljena od krajnjih točaka dužine.

Smatramo da je na toj razini dobro postepeno uvoditi neke „lakše“ (primjerene nastavi i razini znanja učenika) dokaze poučaka u nastavu matematike jer upravo oni proširuju učenikovo znanje o nekom matematičkom području. Dokazivanjem tvrdnji učenici uče rasuđivati i zaključivati, a upravo je to jedan od glavnih zadataka nastave matematike. Kako je važno matematički precizno formulirati definicije, tako je važno precizno formulirati i poučke. Naime, često se kao poteškoća kod učenika javlja razlikovanje pretpostavke i tvrdnje poučka. Zbog toga smatramo da bi tvrdnje u nastavi matematike trebalo iskazivati u obliku „ako…onda“. Ako iste u udžbeniku nisu iskazane tim oblikom, svakako bi trebalo posvetiti vremena da se one ipak iskažu tim oblikom. Na taj način, kasnije će učenici lakše razlikovati pretpostavku od tvrdnje i moći će izreći obrat teorema.

Simetrala kuta

Pogledajmo kako je pojam simetrale kuta definiran u prvom, a kako u drugom udžbeniku.

Definicija u prvom udžbeniku:

Simetrala kuta *je pravac koji prolazi vrhom kuta i dijeli taj kut na dva sukladna kuta.*

Definicija u drugom udžbeniku:

Simetrala kuta *je pravac koji prolazi vrhom kuta i dijeli taj kut na dva sukladna dijela.*

Uočimo kako nijedna od navedenih rečenica nema karakterizaciju definicije prema kojoj bi se u rečenici trebala nalaziti riječ „naziva se“ ili „zove se“.

Sjetimo se kako smo navedene definicije već analizirali u drugom poglavlju kod primjera različitih definicija pojma simetrale kuta. Naveli smo da je rečenica koja je dana u drugom udžbeniku matematički neprecizna jer nije definirano što znači „dva jednaka dijela“. Nadalje, obje rečenice dane u promatranim udžbenicima nisu precizne za daljnje izricanje karakterizacije pojma simetrale kuta što smo također analizirali u drugom poglavlju. U oba udžbenika dokazuje se poučak:

Svaka točka simetrale kuta jednako je udaljena od krakova kuta.

Ukoliko je simetrala kuta definirana kao pravac, što u ovom slučaju jest, nije jasno koje točke pripadaju simetrali kuta pa se nameće pitanje vrijedi li to i za vanjske točke ili samo unutarnje točke kuta koje se nalaze na spomenutom pravcu. Zbog svega navedenog, smatramo da bi trebalo istaknuti da se radi o unutarnjim točkama kuta.

Visina trokuta

U prvom udžbeniku navedeno je da visina trokuta leži na pravcu koji prolazi vrhom trokuta, a okomit je na nasuprotnu stranicu tog trokuta. Ova rečenica dana je s ciljem ponavljanja pojma visine trokuta kako bi se mogao uvesti pojam ortocentra. To očito nije stroga definicija visine trokuta. S druge strane, u drugom udžbeniku pojam visine nije opisan niti definiran.

Primjer precizne definicije pojma visine trokuta iz [25] :

*Neka je ΔABC dani trokut. Označimo s N_1, N_2, N_3 sjecišta okomica povučenih iz točaka A, B, C na pravce BC, CA, AB redom. Dužine $\overline{AN_1}, \overline{BN_2}, \overline{CN_3}$ zovemo **visine trokuta** ΔABC.*

Karakteristične točke trokuta

Karakteristične točke trokuta su: težište, ortocentar, središte trokutu opisane kružnice, središte trokutu upisane kružnice. Pogledajmo kako su definirani navedeni pojmovi u promatranim udžbenicima.

Da bismo mogli definirati pojam težišta najprije moramo definirati pojam težišnice. U prvom udžbeniku pojmovi težišnice i težišta definirani su zajedno:

> ***Težišnica trokuta*** *je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice. Težišnice trokuta sijeku se u točki* T *koja se naziva* ***težištem trokuta****.*

Uočimo najprije da u prvoj rečenici u kojoj se definira pojam težišnice trokuta nedostaje riječ „naziva se“. Smatramo da je bolje danu rečenicu preformulirati na sljedeći način:

> *Dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice naziva se* ***težišnica trokuta.***

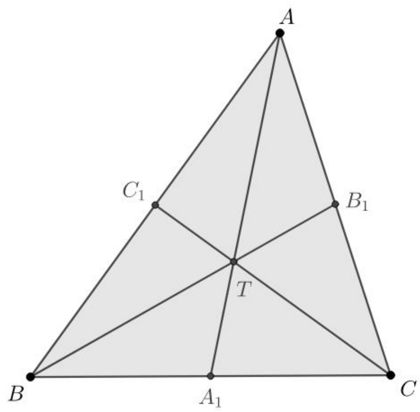
Druga rečenica u kojoj se definira pojam težišta trokuta je korektna definicija istog. Uočimo, kada ne bi prethodno bio definiran pojam težišnice trokuta, druga rečenica bi bila cirkularna definicija. Međutim, s obzirom da je najprije definiran pojam težišnice, definicija pojma težišta je dobra definicija. Također, u prvom udžbeniku je istaknuto da naziv težišta trokuta potječe od pojma težište (hvatište) u fizici gdje predstavlja materijalnu točku u kojoj djeluje rezultantna sila na tijelo koje ostaje u ravnoteži. Ova zanimljivost svakako može motivirati učenike i ukazati na povezanost matematike i ostalih predmeta.

U drugom udžbeniku je najprije definiran pojam težišnice:

> *Dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice naziva se* ***težišnica.***

Nakon toga definira se pojam težišta na sljedeći način:

> *Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki* T *koju nazivamo* ***težište trokuta****. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru* $2:1$*, tj.*
>
> $$|AT|:|TA_1| = |BT|:|TB_1| = |CT|:|TC_1| = 2:1.$$



Slika 8: Težište trokuta ABC

Problem koji se ovdje može javiti je da učenici možda neće znati odvojiti definiciju pojma težišta trokuta od njegove karakterizacije, odnosno poučka. Definicija pojma težišta je samo prva prethodno navedena rečenica, dok druga rečenica predstavlja karakterizaciju tog pojma koja se, između ostalog, dokazuje u tom udžbeniku.

Prisjetimo se, u prvom udžbeniku ponavlja se pojam visine trokuta s ciljem uvođenja pojma ortocentra. U tom udžbeniku dana je sljedeća definicija ortocentra:

> *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki koju nazivamo **ortocentar** i označavamo O.*

U dugom udžbeniku ne ponavlja se pojam visine trokuta, dok je definicija pojma ortocentra dana sljedećom rečenicom:

> *Pravci koji sadrže visine trokuta sijeku se u jednoj točki koju nazivamo **ortocentar trokuta**.*

Vidimo da su u oba udžbenika definicije pojma ortocentra trokuta slične. Kod ovakvih definicija pojma ortocentra mogu nastupiti poteškoće u usvajanju istog. Naime, uočimo da se unutar tih rečenica koje su dane kao definicije pojma ortocentra krije tvrdnja koju ne možemo uzeti „zdravo za gotovo“, a učenici ju iz tog oblika rečenica možda neće odmah znati izdvojiti. Tvrdnja glasi:

Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.

U drugom udžbeniku ta tvrdnja je dokazana, dok u prvom udžbeniku to nije slučaj. Smatramo da je bitno da nastavnik ovdje naglasi razliku između tvrdnje i definicije pa bi bolje bilo reći:

Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki. Tu točku nazivamo ***ortocentar trokuta****.*

Na ovaj način jasno je odvojena tvrdnja (prva rečenica) od definicije (druga rečenica). Još bolji primjer precizne definicije pojma ortocentra trokuta dan je u [25]:

Sjecište H pravaca na kojima leže visine trokuta zove se ***ortocentar trokuta****.*

Pritom je tvrdnja da se pravci na kojima leže visine trokuta sijeku u jednoj točki najprije dokazana.

Što se tiče pojma središta trokutu opisane kružnice, on je u prvom udžbeniku definiran ovako:

Središte trokutu opisane kružnice *je sjecište simetrala stranica trokuta.*

Smatramo da bi bolje bilo reći:

Sjecište simetrala stranica trokuta nazivamo ***središte trokutu opisane kružnice****.*

U drugom udžbeniku navedeni pojam je opisan na sljedeći način:

Oko svakog trokuta može se opisati kružnica. Simetrale stranica trokuta sijeku se u njezinom središtu.

Ovo je matematički neprecizna rečenica u kojoj je opisano da se simetrale stranica sijeku u središtu kružnice opisane trokutu. To znači da je najprije dano središte opisane kružnice, a tek onda izjavljujemo da se simetrale stranica sijeku u tom središtu. To može zbuniti učenike pa je bolje preformulirati rečenicu ovako:

Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki. Tu točku nazivamo ***središte trokutu opisane kružnice.***

Dokaz tvrdnje da se simetrale stranica sijeku u jednoj točki opisan je u drugom udžbeniku. U prvom udžbeniku samo je navedeno da je svaka točka simetrale stranice trokuta jednako udaljena od dvaju vrhova trokuta te da se sve tri simetrale stranica trokuta sijeku u točki *S* koja je jednako udaljena od svih vrhova trokuta pa se izvodi zaključak da se stoga svakom trokutu može opisati kružnica. Upravo iz dokaza navedene tvrdnje postaje očito zašto je ta točka središte kružnice opisane trokutu (točka sjecišta simetrala stranica trokuta jednako udaljena od vrhova trokuta). S obzirom da se u dokazu navedene tvrdnje koristi svojstvo simetrale dužine koje su učenici već dobro upoznali, dokaz je primjeren nastavi. Iz samog dokaza učenici mogu učvrstiti svoje znanje i u potpunosti razumjeti pojam središta opisane kružnice dok bez dokaza više mehanički pamte definiciju istog nego što to čine s razumijevanjem.

Pogledajmo sada što je s pojmom središta trokutu upisane kružnice. Definicija pojma središta trokutu upisane kružnice u prvom udžbeniku:

> ***Središte trokutu upisane kružnice*** *je sjecište simetrala kutova trokuta.*

Smatramo da bi bolje bilo reći:

> *Sjecište simetrala unutarnjih kutova trokuta naziva se* ***središte trokutu upisane kružnice****.*

Također, prije definiranja pojma središta trokutu upisane kružnice u prvom udžbeniku navodi se da je svaka točka simetrale kuta jednako udaljena od dviju stranica trokuta te da se sve tri simetrale kutova trokuta sijeku u jednoj točki *S* pa se izvodi zaključak da je tada i sjecište *S* jednako udaljeno od svih stranica tog trokuta.

U drugom udžbeniku najprije je opisan dokaz tvrdnje da se sve tri simetrale kutova trokuta sijeku u jednoj točki, a zatim je istaknuto:

> *Za dani trokut postoji točno jedna kružnica koja dira sve tri njegove stranice. Njezino središte sjecište je triju simetrala kutova trokuta.*

Primijetimo da je u drugom udžbeniku za upisanu kružnicu napisano da je jedinstvena, tj. da postoji samo jedna takva kružnica koja dira sve tri stranice trokuta, dok za opisanu kružnicu to nije navedeno. Zbog toga bi neki učenici mogli bez razmišljanja izvesti zaključak da opisana kružnica trokutu nije jedinstvena što znamo da nije istinita tvrdnja pa ih na to treba upozoriti prilikom usvajanja navedenog pojma. Nadalje, smatramo da bi u rečenicama trebalo istaknuti da se radi o simetralama *unutarnjih* kutova trokuta kako bismo zadovoljili kriterij preciznosti. To se odnosi na oba promatrana udžbenika. Na kraju, smatramo da bi još preciznije bilo reći:

> *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. Tu točku nazivamo* ***središte trokutu upisane kružnice****.*

Drugi razred gimnazije

U drugom razredu gimnazije, prema aktualnom kurikulumu (vidi [1]), kao preporuka definira se pojam bijekcije. Također se eksplicitno navodi definiranje pojma klasične vjerojatnosti kako bi se definicija mogla primjenjivati u različitim zadacima.

Bijekcija

U oba promatrana udžbenika pojam bijekcije obrađuje se u sklopu cjeline „Funkcije“. U oba promatrana udžbenika pojam bijekcije uvodi se unutar nastavne jedinice u kojoj se obrađuje inverzna funkcija. Prirodno je da se bijekcija i inverzna funkcija obrađuju zajedno jer uvođenje pojma bijekcije potaknuto je potrebom za pojmom inverzne funkcije. Teorem koji govori o povezanosti bijekcije i inverzne funkcije glasi:

> *Svaka funkcija koja je bijekcija ima inverznu funkciju.*

Da bismo došli do pojma bijekcije, smatramo da je bitno da učenici najprije dobro shvate pojmove injekcije i surjekcije. U oba promatrana udžbenika pojmovi injekcije, surjekcije i bijekcije definirani su slično. Razlika je u uvođenju navedenih pojmova te korištenju matematičkih simbola u definicijama istih.

U prvom udžbeniku pojmovi injekcije, surjekcije i bijekcije uvode se pomoću skupova prikazanih Vennovim dijagramima. Definicija navedenih pojmova glasi:

Funkcija $f\colon A \rightarrow B$ je ***injektivna funkcija ili injekcija*** *ako različite elemente skupa A preslikava u različite elemente skupa B.Funkcija $f\colon A \rightarrow B$ je* ***surjektivna funkcija ili surjekcija*** *ako za svaki element y iz skupa B postoji element x iz skupa*

A za koji je $f(x) = y$. Funkcija $f\colon A \rightarrow B$ je ***bijektivna funkcija ili bijekcija*** *ako je injektivna i surjektivna.*

U drugom udžbeniku nema motivacije i slikovnog prikaza kod uvođenja tih pojmova već je samo navedena definicija koja glasi:

Funkcija $f\colon D \rightarrow R$ je ***injekcija*** *ako vrijedi: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Ona je* ***surjekcija*** *ako za svaki $y \in R$ postoji $x \in D$ takav da je $f(x) = y$. Funkcija*

$f\colon D \rightarrow R$ je ***bijekcija*** *ako je injekcija i surjekcija.*

Uspoređujući promatrane udžbenike, smatramo da je učenicima razumljivije uveden pojam bijekcije kod prvog udžbenika, nego kod drugog. Naime, u prvom udžbeniku dan je primjer u kojemu se nalaze slike koje prikazuju pridruživanje na razini skupova koji su prikazani Vennovim dijagramima. Jedno od pridruživanja nije funkcija. Na taj način, osim što će si učenici moći vizualno predočiti što je injekcija, surjekcija i bijekcija, ponovit će i pojam funkcije. Nakon vizualne predodžbe, lakše će percipirati navedene pojmove, a samim time i shvatiti definiciju istih. U drugom udžbeniku to nije slučaj. On ostavlja dojam da se kroz navedene pojmove, koji su vrlo bitni u izgradnji matematičke teorije vezane uz pojam funkcije, prolazi bez detaljnijeg proučavanja. Vrlo vjerojatno će većina učenika „napamet" naučiti gore navedenu definiciju (vidi definiciju pojmova injekcije, surjekcije i bijekcije u drugom udžbeniku) jer će im matematičke simbole biti teško pretočiti u riječi. Zbog prethodno navedenog, smatramo da je bitno da nastavnik što kvalitetnije uvede učenike u obradu pojma bijekcije dajući im primjere funkcija koje su injekcije, surjekcije ili bijekcije kroz vizualne prikaze (Vennovi dijagrami). Također je bitno da nastavnik pretpostavi poteškoće koje se mogu javiti kod primjene definicija pojmova injekcije i surjekcije.

Zasigurno će neki učenici kod ispitivanja injektivnosti funkcije koristiti sljedeću tvrdnju:

Funkcija je injektivno preslikavanje ako vrijedi $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Međutim, ta tvrdnja vrijedi za svaku funkciju (ne samo funkciju koja je injekcija) što zaključujemo iz njezine definicije. Naime, ako se neki element iz domene preslikava u dva različita elementa kodomene, onda to preslikavanje nije funkcija.

Isto tako, neki učenici možda će interpretirati definiciju surjekcije na sljedeći način:

> *Ako za svaki x iz domene možemo izračunati njegovu funkcijsku vrijednost, tj. $f(x)$, onda je funkcija surjekcija.*

Međutim, i ta tvrdnja vrijedi za svaku funkciju što opet zaključujemo iz definicije pojma funkcije. Svaka funkcija zadana je svojom domenom, kodomenom i pravilom. Domena je područje definiranosti funkcije pa se u njoj nalaze elementi x za koje je definirana funkcijska vrijednost $f(x)$. Odmah zaključujemo da za svaki element domene funkcije možemo naći njegov „pripadajući" element iz kodomene.

Vjerojatnost

S pojmom vjerojatnosti učenici se susreću još u osnovnoj školi kada istu rade na razini opisivanja vjerojatnosti slučajnog događaja, razlikovanja skupa povoljnih događaja od skupa elementarnog događaja i računanja vjerojatnosti nekog događaja kako bi mogli donijeti odluke. U srednjoj školi osnovne pojmove o klasičnoj vjerojatnosti nadograđuju. U prvom udžbeniku dan je zanimljiv primjer koji služi kao motivacija klasične definicije vjerojatnosti. U primjeru Barbara govori sestri da je šansa da dobije sezonski posao pola pola. Sestra zatim skreće pažnju Barbari objašnjavajući da s obzirom da je na razgovoru za posao bilo njih pet kandidata, šansa za dobivanje posla nije „pola - pola", nego $\frac{1}{5}$ jer posao može dobiti ili Barbara ili bilo koji drugi kandidat od njih petero.

Definicija klasične vjerojatnosti u prvom udžbeniku:

> ***Vjerojatnost nekog događaja A*** *jednaka je omjeru broja povoljnih ishoda za taj događaj i ukupnog broja mogućih ishoda $P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$ uz uvjet da su ishodi jednako mogući pri čemu je $k(A)$ broj ishoda povoljnih za događaj A, dok je $k(\Omega)$ ukupan konačan broj elementarnih događaja (ishoda).*

Na ovaj način definirana je vjerojatnost *a priori* (teorijska definicija vjerojatnosti) jer se računa bez prethodnog izvođenja pokusa. Uočimo da je ova definicija klasične vjerojatnosti matematički neprecizna. Naime, izraz „jednako mogući ishodi“ zapravo se odnosi na ishode koji imaju jednaku vjerojatnost pa se tako radi o cirkularnoj definiciji. Također, definicija vjerojatnosti a priori je ograničena jer je definirana za konačan skup Ω.

Koncept jednako vjerojatnih rezultata pokusa učenici intuitivno lako shvaćaju. Međutim, u ovom slučaju problem nastaje kad učenici počnu vjerovati da svaki mogući ishod ima jednaku vjerojatnost. Nakon teorijske vjerojatnosti, definira se eksperimentalna (empirijska) vjerojatnost, tj. **vjerojatnost kao relativna frekvencija** na sljedeći način:

> *Vjerojatnost događaja A jednaka je broju kojem teže relativne frekvencije tog događaja kad se pokus ponavlja mnogo puta.*

$$P(A) \approx \frac{frekvencija\ događaja\ A}{broj\ ponavljanih\ pokusa}.$$

U drugom udžbeniku kao motivacija navodi se bacanje novčića. Učenicima se daje uputa da bacanje novčića ponove dvadeset puta i pritom bilježe koliko puta se pojavilo pismo. Jasno je da se kao rezultat pokusa može dobiti svaki broj od 0 do 20. Ono što bi učenici trebali uočiti je da što je veći broj bacanja (npr. 30, 100, 1000, itd.) to se manje razlikuju vrijednosti relativne frekvencije. Dakle, za veliki broj bacanja relativna frekvencija pojavljivanja pisma je blizu broja 0.5, tj. pri ponavljanju pokusa relativna frekvencija pojavljivanja događaja približava se njegovoj vjerojatnosti. Učenici iz toga zaključuju da je vjerojatnost događaja „dobili smo pismo“ jednaka 0.5. Na ovaj način uvode se pojmovi frekvencije događaja i relativne frekvencije

U drugom udžbeniku najprije se definira **vjerojatnost kao relativna frekvencija**:

> *Za podatke dobivene statističkim praćenjem nekog događaja vjerojatnost računamo formulom* $p(A) = \frac{M}{N}$. *Ovdje je* N *broj svih podataka, a* M *broj onih koji ulaze u događaj A.*

Zatim se definira teorijska vjerojatnost:

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja računa se formulom

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{broj\ povoljnih\ ishoda}{broj\ mogućih\ ishoda}.$$

Uspoređujući promatrane udžbenike, vidimo da su definicije vjerojatnosti slične. Razlika je u redoslijedu uvođenja. U prvom udžbeniku najprije se uvodi teorijska, a zatim eksperimentalna vjerojatnost, dok u drugom udžbeniku imamo obrnuti redoslijed uvođenja.

Treći razred gimnazije

Trigonometrijske funkcije

Pojam trigonometrije je kompleksan pojam koji zahtjeva postepeno uvođenje ponajviše zbog svoje praktične namjene (fizika, geodezija, računarstvo, strojarstvo, elektrotehnika, astronomija, arhitektura, pomorstvo, itd.) Tako se u prvom razredu gimnazije obrađuju trigonometrijski omjeri, dok se u drugom razredu gimnazije radi trigonometrija trokuta. Na taj se način prođe kroz prva dva koraka u izgradnji pojma trigonometrije: trigonometrija pravokutnog trokuta i trigonometrija raznostraničnog trokuta. U trećem razredu gimnazije nastavlja se s trigonometrijom pa se tako prelazi na sljedeća dva koraka, a to su trigonometrijske veličine realne varijable i trigonometrijske funkcije. U oba promatrana udžbenika na početku cjeline istaknuti su ishodi cjeline. Jedan od ishoda glasi:

- Učenici će definirati trigonometrijske funkcije broja na brojevnoj kružnici.

Također, u oba udžbenika na početku se ponavlja pojam kuta. Definiraju se orijentirani kut, pozitivno orijentirani kut, negativno orijentirani kut, glavna mjera kuta i radijanska mjera kuta. Učenici su se s pojmom kuta susreli kroz svoje osnovnoškolsko obrazovanje kada su kut definirali kao dio ravnine, dok je mjera kuta bila pozivan broj. Na ovoj razini poučavanja, kutu pridružujemo mjeru, a ta mjera ovisi o tome koliko puta se jedan krak kuta vrtio do drugog. Kako bi se uopće mogle uvesti trigonometrijske funkcije, najprije se mora definirati eksponencijalno preslikavanje. Upravo je eksponencijalno preslikavanje temelj za razumijevanje trigonometrijskih funkcija. U oba udžbenika, definicija eksponencijalnog preslikavanja predočena je grafičkim prikazom kako bi učenici mogli lakše interpretirati istu. Opisano je da se najprije u koordinatni sustav smjesti kružnica polumjera 1 sa središtem u ishodištu. Zatim se smjesti brojevni pravac usporedan s osim y u točki $A(1,0)$. Brojevni pravac namatamo oko kružnice tako da dio tog pravca na kojem su smješteni pozitivni realni brojevi namatamo u pozitivnom smjeru (smjeru gibanja kazaljke na satu), dok dio na kojem su smješteni negativni realni brojevi namatamo u negativnom smjeru (smjeru obrnutom od gibanja kazaljke na satu). Namatanjem smo na taj način svakom broju s brojevnog pravca pridružili točno jednu točku na kružnici. Time smo definirali eksponencijalno preslikavanje.

Definicija eksponencijalnog preslikavanja u prvom udžbeniku:

> ***Eksponencijalno preslikavanje*** *je funkcija E sa skupa realnih brojeva na skup svih točaka kružnice* k *koje realnom broju* t *pridružuje točku* $E(t)$ *brojevne kružnice.*
>
> *Pišemo* $t \mapsto E(t)$. *Kružnicu* k *nazivamo* ***brojevna kružnica****.*

Definicija eksponencijalnog preslikavanja u drugom udžbeniku:

> *Svakom broju* t *brojevnog pravca pridružena je točka* T *na brojevnoj kružnici. Time je definirano preslikavanje* E *između realnih brojeva i točaka brojevne kružnice koje nazivamo* ***eksponencijalno preslikavanje****. Pišemo* $E(t) = T$.

Vidimo da je u oba udžbenika eksponencijalno preslikavanje definirano na sličan način. Nakon definiranja eksponencijalnog preslikavanja, brojevna kružnica povezuje se s trigonometrijskim omjerima koje su učenici usvojili još u prvom razredu srednje škole pa se na taj način dolazi do definicija trigonometrijskih funkcija koje su opet u oba udžbenika objašnjene i definirane na sličan način. Funkcije sinus i kosinus definirane su zajedno u oba udžbenika pomoću brojevne kružnice (vidi sliku 9). Uvode se istovremeno jer se radi o koordinatama točke $E(t)$.

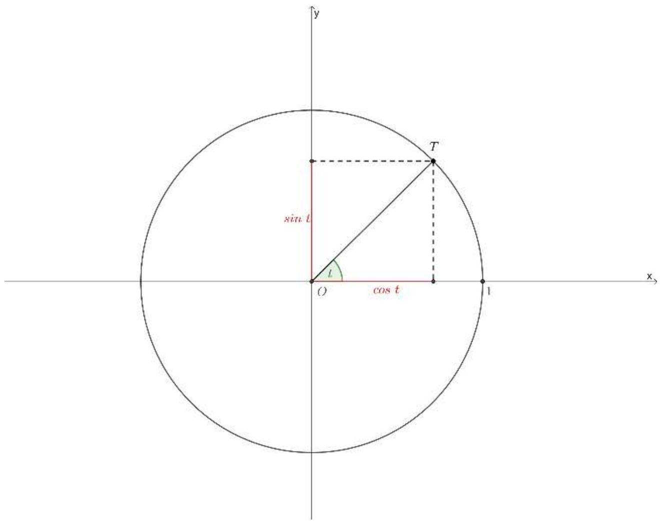
Definicija funkcije sinus i kosinus u prvom udžbeniku:

> *Neka je* t *realni broj i točka* $E(t)$ *pridružena broju* t *eksponencijalnim preslikavanjem. Funkcija koja realnom broju* t *pridružuje apscisu točke* $E(t)$

*naziva se **kosinus**, a pridružena vrijednost označuje se* $\cos t$. *Funkcija koja realnom broju* t *pridružuje ordinatu točke* $E(t)$ *naziva se **sinus**, a pridružena vrijednost označuje se* $\sin t$. *Vrijedi* $-1 \leq \sin t \leq 1$ *i* $-1 \leq \cos t \leq 1$.

Definicija funkcija sinus i kosinus u drugom udžbeniku:

Neka je t *po volji odabran realan broj,* $T = E(t)$ *njemu odgovarajuća točka na brojevnoj kružnici. Tada je* $T = (\cos t, \sin t)$. *Dakle, vrijednost funkcije **kosinus**:* $\cos t$ *je apscisa, a vrijednost funkcije **sinus**:* $\sin t$ *je ordinata točke* $T = E(t)$.



Slika 9: Definicija funkcija sinus i kosinus pomoću brojevne kružnice

Definicija funkcija sinus i kosinus je korektna u oba udžbenika. Slične su definiciji koja se navodi u [25]:

Namatanje $E: \mathbb{R} \to K$ *je funkcija koja broju* $t \in \mathbb{R}$ *pridružuje točku* $E(t) \in K$. *Apscisa točke* $E(t)$ *zove se **kosinus broja*** $\boldsymbol{t}$ *i označava sa* $\cos t$. *Ordinata točke* $E(t)$ *zove se **sinus broja*** $\boldsymbol{t}$ *i označava* $\sin t$. *Na taj su način definirane funkcije* $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *i* $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *koje se zovu redom funkcije sinus i kosinus.*

Ovdje se kod učenika eventualno mogu javiti poteškoće u prijelazu s trigonometrije kuta (= trigonometrija trokuta) na trigonometriju realnog broja (= trigonometrija kružnice). Naime, radijanska mjera kuta uvodi se kao mjera u skupu svih realnih brojeva. To je za učenike nova mjera i važno je da shvate da ona nema dimenziju kao što ju ima stupanj. Radijanska mjera kuta je realan broj, a definira se kao omjer $\alpha_{rad} = \frac{l}{r}$ pri čemu je l duljina odgovarajućeg luka kružnice, a r njezin polumjer.

Nadalje, učenici su još u prvom razredu gimnazije definirali funkcije tangens i kotangens za šiljaste kutove u pravokutnom trokutu pomoću funkcija sinus i kosinus na sljedeći način:

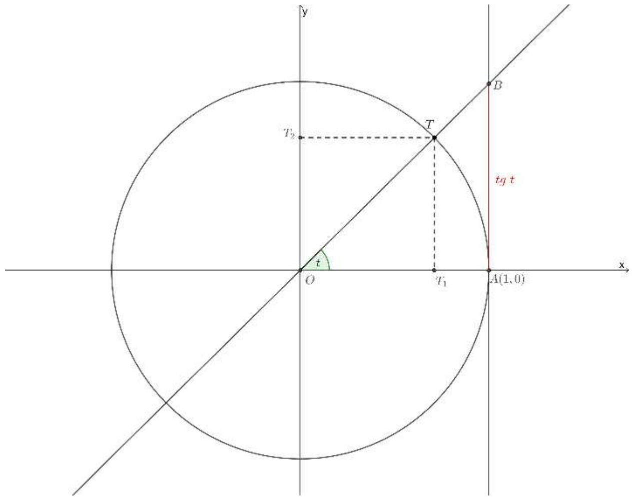
$$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$ctg\ t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

pri čemu je tangens definiran za sve realne brojeve t za koje je $\cos t \neq 0$, a kotangens za sve realne brojeve t za koje je $\sin t \neq 0$, što je očito jer dijeljenje s nulom nije definirano.

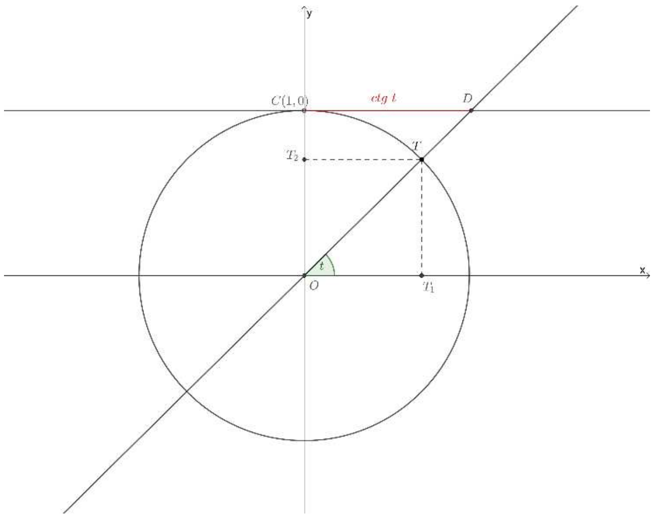
U trećem razredu srednje škole funkcije tangens i kotangens definiraju se pomoću brojevne (trigonometrijske) kružnice. U oba promatrana udžbenika najprije se opisuje postupak kojim dolazimo do definicije navedenih pojmova.

Opišimo najprije postupak za funkciju tangens. Imamo brojevnu (trigonometrijsku) kružnicu smještenu u ishodište $O(0,0)$ koordinatnog sustava. Povučemo pravac kroz točku $A(1,0)$ tako da taj pravac bude tangenta na brojevnu kružnicu. Tu tangentu nazivamo os tangensa. Za realan broj t njemu pridružena točka na brojevnoj kružnici je točka $T = E(t)$. Presjek pravca OT i osi tangensa je točka B. Apscisa točke B očito je jednaka 1, a ordinata te točke ovisi o realnom broju t i naziva se **tangens od $\boldsymbol{t}$**. Dakle, točka B ima koordinate $B(1, tg\ t)$. Nakon toga, pomoću brojevne kružnice izvodi se jedan od osnovnih trigonometrijskih identiteta za funkciju tangens, tj. $tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t}$. Do ovog rezultata dolazi se uočavanjem sličnih trokuta ΔOAB i ΔOT_1T (vidi sliku 10).



Slika 10: Definicija funkcije tangens pomoću brojevne kružnice

Sličan postupak radimo kako bismo došli do funkcije kotangens samo što sada tangentu na brojevnu kružnicu povlačimo u točki $C(0,1)$. Tu tangentu nazivamo os kotangensa. Za realni broj t njemu pridružena točka na brojevnoj kružnici je $T = E(t)$. Presjek pravca OT i osi kotangensa je točka D. Ordinata točke D očito je jednaka 1, dok apscisa te točke ovisi o realnom broju t i naziva se **kotangens od t**. Dakle, točka D ima koordinate $D(ctg\ t, 1)$. Zatim se na analogni način kao kod funkcije tangens izvodi osnovni identitet za funkciju kotangens $ctg\ t = \frac{\cos t}{\sin t}$ uočavanjem sličnih trokuta ΔODC i ΔOTT_2 (vidi sliku 11).



Slika 11: Definicija funkcije kotangens pomoću brojevne kružnice

Četvrti razred gimnazije

Derivacija funkcije u točki

Pojam derivacije funkcije u točki dio je diferencijalnog računa i obrađuje se u četvrtom razredu srednje škole. Prije samih definicija u oba promatrana udžbenika učenike se upoznaje s problemom tangente i brzine. Navedeni problemi su opisani u oba udžbenika. Problem brzine opisan je kroz konkretan primjer. Mi ćemo više pažnje posvetiti problemu tangente pri čemu tangentu definiramo pomoću derivacije.

Pojam tangente za krivulje drugog reda definira se kao pravac koji s krivuljom ima samo jednu zajedničku točku. Međutim, kod ostalih krivulja to više nije istina i upravo ovdje dolazi do učeničkih miskoncepcija. Na ovoj razini učenike suočavamo s novim primjerima koji kod njih izazivaju kognitivni konflikt. Naime, više ne pričamo o tangenti kružnice ili tangenti elipse. Sada pričamo o tangenti na graf funkcije. Na ovoj razini tangenta je pravac koji u promatranoj okolini ima s grafom funkcije jednu zajedničku točku, ali ona može siječi graf funkcije u još nekoj točki.

U drugom udžbeniku detaljno je raspisano kako dolazimo do jednadžbe tangente na graf funkcije. Navodi se da kad promatramo tangentu u nekoj točki T na grafu funkcije, onda nas zanima samo ponašanje funkcije u neposrednoj okolini točke T. Jednadžbu tangente možemo odrediti pomoću jedne točke (točka u kojoj tangenta dira graf funkcije) i njezinog koeficijenta smjera. Problem se zapravo svodi na određivanje koeficijenta smjera tangente koji se određuje promatrajući sekante na grafu funkcije. Kao rezultat u graničnom slučaju procesa u kojem se sekante približavaju tangenti u promatranoj točki dobiva se broj koji je upravo derivacija funkcije u točki. S ciljem određivanja koeficijenta smjera tangente, učenicima se najprije približavaju pojmovi prirasta varijable i prirasta funkcije, a nakon toga se isti povezuju s koeficijentom smjera tangente. Na sličan se način i u prvom udžbeniku uvodi problem tangente. Nakon toga, dolazimo do definicije pojma derivacije funkcije u točki.

Definicija u prvom udžbeniku:

Neka je funkcija f neprekidna na intervalu I te neka je $x_0 \in I$ i Δx prirast argumenta takav da je $x_0 + \Delta x \in I$. ***Derivacija funkcije f u točki x_0*** *je broj $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ako taj limes postoji. Ako derivacija postoji u svakoj točki intervala, kažemo da je funkcija* ***derivabilna*** *na tom intervalu.*

Definicija u drugom udžbeniku:

Derivacija funkcije f u točki x_0 *je broj:*

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ako ovaj limes postoji. Za funkciju f kažemo da je derivabilna u točki x_0 ako postoji $f'(x_0)$. Funkcija je ***derivabilna*** *na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako u svakoj točki tog intervala postoji $f'(x_0)$. Tada je na intervalu $\langle a, b\rangle$ definirana funkcija f' koju nazivamo derivacijom funkcije f.*

Definicije pojma derivacije funkcije u točki razlikuju se po tome što je u definiciji u prvom udžbeniku naglašeno da funkcija mora biti neprekidna na promatranom intervalu I. Naglasimo da u definiciji derivacije neprekidnost funkcije na promatranom intervalu nije nužno zahtijevati. U drugom udžbeniku, nužan uvjet za postojanje derivacije navodi se tek nakon definicije te se isti dokazuje. Bitno je učenicima osvijestiti činjenicu da funkcije koje nisu neprekidne u zadanoj točki u toj točki nemaju tangentu pa samim time niti definiranu derivaciju.

Limes niza

S pojmom niza učenici su se susreli još u nižim razredima osnovne škole kada su isti usvojili na intuitivnoj razini. Tek u četvrtom razredu srednje škole, niz definiraju kao funkciju:

Funkcija $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ koja svakome prirodnom broju n pridružuje realni broj a_n naziva se ***niz realnih brojeva****. Broj $a(n) = a_n$ naziva se opći ili n-ti član niza.*

U oba promatrana udžbenika limes niza obrađuje se unutar cjeline „Nizovi“. Kao motivacija učenike se potiče na razmišljanje o beskonačnim nizovima realnih brojeva (a_n).

Najprije se u oba udžbenika razmatraju dva primjera u kojima su nizovi zadani općim članom te je potrebno analizirati što se događa s članovima zadanog niza kako n postaje sve veći. U oba udžbenika primjeri su riješeni tako da se prvo određuje prvih nekoliko članova niza. Dodatno, u prvom udžbeniku prvih nekoliko članova zadanog niza u primjerima prikazano je i na brojevnom pravcu kako bi učenici lakše zaključili kojem realnom broju se približavaju članovi zadanog niza kako se n povećava. Kroz ta dva primjera je objašnjeno što znači da se članovi nekog niza približavaju (teže) nuli te je navedeno kako činjenicu da limes niza jednak nuli zapisujemo kao $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ili $a_n \to 0$ kada $n \to \infty$.

U trećem primjeru u oba udžbenika zadan je niz čiji se članovi približavaju broju 1 i upravo on vodi do opće definicije pojma limesa niza. U prvom udžbeniku nastavno na treći primjer proučava se proizvoljni interval oko broja 1 i provjerava se koliko se članova niza nalazi unutar tog intervala. Zatim se izvodi zaključak da koliko god smanjili interval oko broja 1, izvan tog intervala uvijek će ostati konačno mnogo članova niza. U drugom udžbeniku, kod trećeg primjera računa se udaljenost između broja 1 i općeg člana niza. Dobiva se da ta razlika teži nuli kada n teži u beskonačnost, što znači da se članovi tog niza sve više i više približavaju broju 1.

Nakon trećeg primjera slijedi definicija pojma limesa niza pa pogledajmo kako je navedeni pojam definiran u prvom, a kako u drugom udžbeniku.

Definicija pojma limesa niza u prvom udžbeniku:

*Realni broj a je **limes** ili **granična vrijednost** niza realnih brojeva (a_n) ako se izvan svakog intervala oko broja a nalazi konačan broj članova niza. Niz brojeva (a_n) je **konvergentan** ako ima limes. U suprotnom, niz je **divergentan**.*

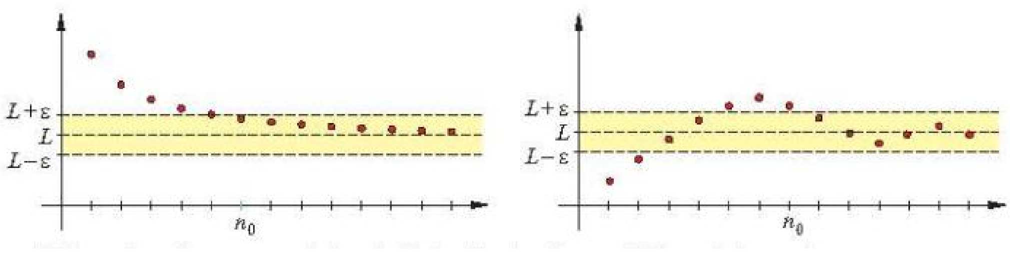
Očito je da je ova definicija pojma limesa niza opisna definicija. Napisana je s ciljem predodžbe samog pojma. Nakon opisne definicije, a s ciljem uvođenja još preciznije definicije pojma limesa niza, u prvom udžbeniku navodi se da interval oko broja a možemo zadati pomoću pozitivnog realnog broja ε tako da promatramo interval $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$. Zatim se opisuje da se neki član niza nalazi a_n nalazi unutar tog intervala, ako je njegova udaljenost od broja a manja od ε. Suprotno, član a_n se nalazi izvan tog intervala. Sada konačno možemo reći što znači činjenica da se izvan tog intervala nalazi konačno mnogo članova niza. To znači da sigurno postoji neki član niza nakon kojeg će za sve sljedeće članove niza vrijediti da „upadaju“ u interval oko broja a. Točnije, navedeno je da postoji prirodan broj n_0 takav da su svi članovi niza nakon n_0-tog člana unutar intervala oko broja a. Sada su učenici spremni za matematički precizniju definiciju, a ona glasi:

*Realni broj a je **limes** ili **granična vrijednost** niza realnih brojeva (a_n) ako za svaki broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj n_0 takav da za sve $n > n_0$ vrijedi $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Definicija pojma limesa u drugom udžbeniku:

*Kažemo da je realni broj a **limes niza** (x_n) ako za svaki (ma kako malen) realni broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj n_0 takav da za sve $n > n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. Niz je **konvergentan** ako ima limes. Inače je **divergentan**.*

Grafički su prikazana dva primjera konvergentnih nizova (vidi sliku 12) kako bi učenici što bolje razumjeli prethodnu definiciju.



Slika 12: Konvergentni nizovi

Nakon navedenih definicija, u oba udžbenika se s pomoću definicije limesa niza dokazuje ima li uistinu niz zadan u trećem primjeru limes 1. Usporedbom udžbenika zaključujemo da su u oba udžbenika dane precizne definicije pojma limesa niza, dok je u prvom udžbeniku dodatno pojašnjeno značenje iste. Iz prvog udžbenika učenici će lakše shvatiti strogu definiciju pisanu matematičkim simbolima jer je prije stroge definicije pojašnjeno što znači da neki član niza pripada nekom intervalu oko broja a. S druge strane, to objašnjenje dano je u drugom udžbeniku pomoću grafičkog prikaza dva konvergentna niza. Smatramo da je poželjno zahtijevati da učenik interpretira definiciju pisanu matematičkim simbolima kako bi nastavnik „provjerio“ razumijevanje iste.

Polinomi

Kao što smo spomenuli u drugom poglavlju, prema aktualnom kurikulumu (vidi [1]), polinomi se obrađuju samo u školama sa 192 i 224 sati nastave matematike godišnje i to u četvrtom razredu srednje škole. U promatranom udžbeniku obrađuju se unutar cjeline „Funkcije“. Kao motivacija u promatranom udžbeniku spominju se linearna i kvadratna funkcija te se navodi kako općenito za $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ funkciju u obliku $f(x) = ax + b$ nazivamo linearnom funkcijom, a $g(x) = ax^2 + bx + c$ nazivamo kvadratnom funkcijom. Isto tako, spominju se pojmovi monoma, binoma i trinoma. Naime, prema aktualnom kurikulumu (vidi [1]), učenici opisuju pojmove monoma i binoma u sedmom razredu osnovne škole. U promatranom udžbeniku za sedmi razred osnovne škole, navedeni pojmovi opisani su na sljedeći način:

> ***Monom*** *ili jednočlani algebarski izraz jest izraz koji se sastoji od oznaka brojeva, varijabli i oznake računske radnje množenja.* ***Binom*** *je dvočlani izraz sastavljen od dva monoma između kojih je znak* $+$ *ili* $-$.

Jasno je da je cilj danih opisnih definicija pojmova monoma i binoma da ih učenici međusobno razlikuju.

S obzirom da se polinomi u četvrtom razredu srednje škole obrađuju nakon definicije pojma funkcije učenicima neće biti teško shvatiti definiciju polinoma kao funkcije koja je dana u promatranom udžbeniku, a glasi:

Funkcija $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadana formulom* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *gdje su* a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n *realni brojevi,* $a_n \neq 0$ *i* $n \in N_0$ *naziva se* ***polinom n-tog stupnja s realnim koeficijentima***. *Brojeve* a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n *nazivamo* ***koeficijentima polinoma***, *koeficijent* a_n *nazivamo* ***vodećim koeficijentom***, *a koeficijent* a_0 *nazivamo* ***slobodnim koeficijentom***. *Broj* $n \in N_0$ *je stupanj polinoma* p. *Pišemo* $n = st\ p$.

4. Primjer nastavne pripreme uvođenja matematičkog pojma

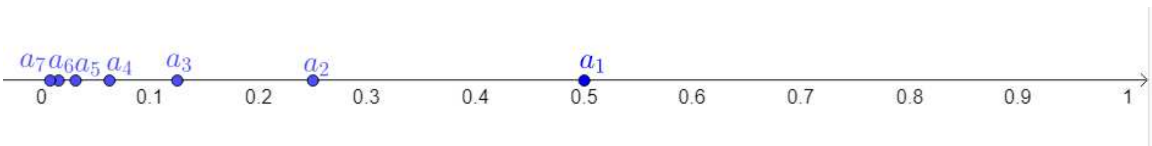
U ovom poglavlju ćemo dati primjer pripreme uvođenja pojma limesa niza u četvrtom razredu srednje škole.

4.1 Opis pripreme vezane uz uvođenje pojma limesa niza

Cilj ove pripreme je definirati pojam limesa niza. Na samom početku sata učenicima možemo dati motivacijski zadatak koji će ih potaknuti na razmišljanje o beskonačnim nizovima. Primjer motivacijskog zadatka:

Motivacijski zadatak: Što se događa s članovima niza zadanog općim članom $a_n = \frac{1}{2^n}$ za velike vrijednosti broja n?

Učenicima je potrebno dati vremena da razmisle o zadatku, a zatim uz pomoć nastavnika dođu do ideje da o tome što se događa s članovima zadanog niza za velike vrijednosti broja n mogu doći tako da ispišu prvih nekoliko članova niza. Nakon što učenici u svoje bilježnice ispišu prvih nekoliko članova niza, nastavnik može na brojevnom pravcu na ploči ili u Geogebri prikazati članove zadanog niza.



Slika 13: Prikaz nekoliko prvih članova niza na brojevnom pravcu

Iz grafičkog prikaza jasno uočavamo kakvo je ponašanje članova niza pa učenici mogu zaključiti da će svaki sljedeći član niza biti manji od prethodnog pri čemu su svi članovi zadanog niza pozitivni te da se svi članovi niza približavaju broju 0 kada se n povećava.

Nastavnik može pitati učenike hoće li neki član niza možda poprimiti vrijednost jednaku 0. Učenici bi trebali sami zaključiti da se to nikada neće dogoditi. Sada je važno da nastavnik naglasi učenicima da iako nijedan član niza u ovom primjeru nije jednak nuli, ipak su im vrijednosti sve bliže nuli što je n veći. Zato kažemo da niz *teži* nuli, a broj 0 nazivamo *limes* ili *granična vrijednost* zadanog niza a_n. U ovom trenutku nastavnik može na ploču napisati kako zapisujemo prethodnu činjenicu, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Kako bi približio učenicima što znači tvrdnja da niz teži broju 0 nastavnik može reći učenicima da promotre neki interval, npr. $\langle -0.2, 0.2\rangle$. Nastavnik može pitati učenike koliko članova niza se nalazi izvan tog intervala, a koliko ih se nalazi unutar intervala. Iz grafičkog prikaza niza na brojevnom pravcu očito je da se izvan tog intervala nalaze dva člana niza, dok se unutar intervala nalaze svi ostali članovi. Možemo pretpostaviti da neće svim učenicima odmah biti jasna prethodna tvrdnja. Kako bi učenike uvjerio da se unutar tog intervala stvarno nalaze svi članovi niza osim njih konačno mnogo nastavnik može učenike podsjetiti na definiciju niza realnih brojeva (definiciju niza realnih brojeva naveli smo u trećem poglavlju). Poželjno je pogledati što se događa ako smanjimo veličinu intervala pa pogledamo na primjer interval $\langle -0.1, 0.1\rangle$. Sada izvan tog intervala imamo tri člana niza dok se svi ostali nalaze unutar tog intervala. Nakon analize nekoliko intervala učenici bi trebali biti u stanju izvesti zaključak da smanjivanjem intervala oko broja 0, broj članova niza izvan promatranog intervala će se povećavati, ali ćemo uvijek izvan promatranog intervala imati konačan broj članova niza dok će se svi ostali nalaziti unutar tog intervala. Dakle, nula je granična vrijednost ili limes niza zadanog niza. Pomoću metode dijaloga dolazimo do sljedeće opisne definicije:

> *Realni broj a je limes ili granična vrijednost niza realnih brojeva (a_n) ako se izvan svakog intervala oko broja a nalazi samo konačno mnogo članova niza.*

Kako bi još preciznije definirao limes niza nastavnik učenike postupno treba prisjetiti i objasniti što to znači da se neki član niza nalazi unutar nekog intervala, a što znači da se nalazi izvan tog intervala. Općenito, interval oko broja a možemo zadati pomoću pozitivnog realnog broja ε pa promatrani interval možemo zapisati kao $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$.

Neki član niza (a_n) nalazi se unutar tog intervala ako vrijedi $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. To je ekvivalentno sa $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, tj. sa $|a_n - a| < \varepsilon$. S druge strane, ako se neki član niza ne nalazi unutar tog intervala, onda vrijedi $|a_n - a| \geq \varepsilon$, tj. njegova udaljenost do broja a je veća od ε. Bitno je da nastavnik učenicima naglasi da činjenica da se izvan promatranog intervala nalazi konačno mnogo članova niza znači da postoji neki član niza nakon kojeg će se svi ostali članovi tog niza nalaziti unutar promatranog intervala. Nakon toga, učenici su spremni za matematički precizniju definiciju limesa niza:

> *Realni broj a je limes ili granična vrijednost niza realnih brojeva (a_n) ako za svaki broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da za sve $n > n_0$ vrijedi $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Važno je učenicima osvijestiti da pojam limesa obuhvaća:

- proces konvergencije: „niz teži“, „vrijednosti članova niza se približavaju“
- limes kao konkretni realni broj.

Nadalje, poželjno je učenicima dati za primjer i neke posebne vrste nizova, npr. konstantni niz.

Zadatak: Ima li niz zadan općim članom $a_n = 5$ limes?

Očito je da se radi o konstantnom nizu kod kojeg su vrijednosti svih članova jednake 5. Ovdje možemo očekivati da će se neki učenici zbuniti pa ih nastavnik može uputiti na isto razmatranje kao u motivacijskom primjeru. Koliko god „mali“ interval oko broja 5 promatrali, unutar njega nalazit će se svi članovi niza. Dakle, izvan proizvoljnog intervala se ne nalazi niti jedan član niza, tj. izvan je nula članova (što je konačan broj). Stoga zaključujemo da je limes zadanog niza jednak 5.

Zadatak: Ima li niz zadan općim članom $a_n = (-1)^n$ limes?

Kod ovog niza vrijednosti članova za parne n jednake su 1 dok su vrijednosti članova za neparne n jednake -1. Dakle, članovi tog niza poprimaju vrijednosti 1 ili -1. Nastavnik daje uputu učenicima da najprije promotre proizvoljni interval oko broja 1, npr. $\langle 0,2 \rangle$. Učenici uočavaju da se izvan tog intervala nalazi beskonačno mnogo članova.

Promatranjem proizvoljnog intervala oko broja -1, npr. $\langle -2, 0\rangle$ uočavaju isto. Na temelju uočenog zaključuju da taj niz nema limes.

Zadatak: Je li niz zadan općim članom $a_n = (1 + n)n$ konvergentan?

Nastavnik može dati uputu učenicima da ispišu prvih nekoliko članova niza. Članovi tog niza su $2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$ Učenici bi trebali uočiti da zadani niz beskonačno raste jer je svaki sljedeći član tog niza veći od prethodnog. Nastavnik može reći učenicima da promotre neki interval oko broja 12. Zatim ih može pitati koliko članova tog niza se nalazi izvan intervala. Koliko god mali interval oko nekog realnog broja odabrali postoji beskonačno mnogo članova niza koji se nalaze izvan tog intervala. Nastavnik treba naglasiti učenicima da taj niz teži u beskonačnost kada n teži u beskonačnost. Učenici zaključuju da je taj niz nije konvergentan. Nastavnik zatim treba uvesti pojam divergencije niza tako što će reći učenicima da ukoliko niz ne konvergira kažemo da divergira. Zatim na ploču zapisuje činjenicu da zadani niz divergira, tj. teži u beskonačnost $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\right)$.

Nakon tog zadatka dolazimo do opisne definicije divergentnog niza:

> *Niz brojeva (a_n) teži u beskonačnost ako za svaki realni broj M postoji konačno mnogo članova niza koji su manji od broja M. Za takav niz kažemo da divergira i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.*

Na kraju sata poželjno je napraviti tzv. provjeru ostvarenosti zadanog cilja tako što će nastavnik pitati učenike da ponove što su danas radili. Nastavnik bi trebao provjeriti jesu li učenici razumjeli pojam limesa niza tako što će zahtijevati od učenika da interpretiraju definiciju zapisanu matematičkim simbolima.

Na sljedećem satu bilo bi dobro napraviti aktivnost kojom bi učenici uvježbali prethodno naučeno o limesu niza.

Aktivnost: Spari kartice

Cilj aktivnosti: Učenici će uvježbati limes niza.

Oblik rada: Rad u četveročlanim skupinama uz argumentiranje, diskusiju i sučeljavanje učeničkih mišljenja.

Materijal: Kartice za igru *Spari kartice*, bilježnica.

Tijek aktivnosti:

Nastavnik učenike podijeli u četveročlane skupine te svakoj grupi učenika podijeli dvije hrpe kartica. Jedna hrpa sadrži nizove dok druga sadrži pripadne limese tih nizova. Zadatak učenika je da spare kartice. Pobjednik je ona grupa koja će najbrže, a prije svega točno, spariti kartice.

$a_n = \frac{1}{5^n}$	0
$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$	$+\infty$
$a_n = 2$	2
$a_n = -2n + 5$	$-\infty$
$a_n = \frac{2+n}{n}$	1
$a_n = 2 \cdot \left(-\frac{7}{5}\right)^{n-1}$	Ne postoji

Slika 14: Primjer kartica za igru *Spari kartice*

Nakon odrađene aktivnosti poželjno je da pobjednička grupa učenika zapiše rješenja na ploču te da se svaki od nizova prokomentira zajedno sa učenicima.

Zaključak

Proces formiranja matematičkog pojma zahtjeva postupnost i preciznost. Sastoji se od tri koraka u kojima možemo prepoznati znanstvene postupke kao što su analiza, sinteza, apstrahiranje i poopćavanje. Pravilnim uvođenje nekog matematičkog pojma nastavnik ostvaruje važno didaktičko načelo, a to je načelo znanstvenosti koje povezuje matematiku kao znanost i matematiku kao nastavni predmet. Kod analize promatranih udžbenika vidjeli smo da većina rečenica koje su predstavljene kao definicije određenih matematičkih pojmova nisu stroge matematičke definicije. Da bi definicija bila matematički stroga, mora zadovoljavati određena pravila koja smo naveli u prvom poglavlju. Također smo vidjeli koliko je kompleksno strogo matematički definirati određeni pojam jer učenicima ne možemo predstaviti preciznu matematičku definiciju ukoliko nemaju dovoljno predznanja da bi istu usvojili. Stoga je nužno da matematika u osnovnoj školi ostane konkretna i induktivna. Glavni cilj mora biti razumijevanje i predočavanje matematičkog pojma pojmova. Ukoliko nastavnik inzistira na učenju definicije pojma koju učenik nije u stanju shvatiti, to može dovesti do učenja napamet i suhoparnog reproduciranja naučenog bez razumijevanja. Time stvaramo kontraefekt kod učenika pa tako dolazi do poteškoća u učenju sadržaja koji se nastavljaju na višoj razini. Osim toga, u trenutku kada učenici počnu matematiku doživljavati kao težak predmet počinje razvijanje negativnog stava prema istoj. Kako bismo učenicima olakšali učenje novih sadržaja, potrebno je nastavu učiniti zanimljivom. Suvremena nastava matematike sve se više okreće zabavnim i zanimljivim igrama koje učenike motiviraju za rad, sudjelovanje i komunikaciju.

Bibliografija

[1] *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije,* https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf

[2] *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obavezno i srednjoškolsko obrazovanje*, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske, Zagreb, 2010., http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf

[3] *Nastavni program za gimnazije, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske*, Zagreb, 1994.

[4] *Nastavni plan i program za osnovnu školu, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske*; Zagreb, 2006.

[5] J. Barišin, Ž. Dijanić, R. Gortan, I. Matić, Lj. J. Matić, M. Mišurac, V. V. Ilić, M. Zelčić, *Matematika 2, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 3 i 4 sata nastave tjedno*, *1. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[6] J. Barišin, , Ž. Dijanić, R. Gortan, V. V. Ilić, Lj. J. Matić, A. Pletikosić, *Matematika 1, udžbenik matematike u prvom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 2. dio, 3 i 4 sata nastave tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[7] Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, G. Paić, *Matematički izazovi 7, udžbenik sa zadatcima za vježbanje iz matematike za sedmi razred osnovne škole, 1.dio*, Alfa, 1.izdanje, 2020.

[8] Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, G. Paić, *Matematički izazovi 7, udžbenik sa zadatcima za vježbanje iz matematike za sedmi razred osnovne škole, 2.dio*, Alfa, 1.izdanje, 2020.

[9] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i strukovnih škola, 2.dio*, Element, 2019.

[10] B. Dakić, N. Elezović*, Matematika 1, udžbenik za 1. razred gimnazija i strukovnih škola (3 ili 4 sati nastave tjedno), 2.dio, Element,* Zagreb, *2020.*

[11] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik za 2. razred gimnazija i strukovnih škola (3, 4 ili 5 sati nastave tjedno), 1. dio*, Element, Zagreb, 2020.

[12] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik za 2. razred gimnazija i strukovnih škola (3, 4 ili 5 sati nastave tjedno), 2. dio*, Element, Zagreb, 2020.

[13] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3, udžbenik za 3. razred gimnazija i strukovnih škola, 3 ili 4 sata nastave tjedno*, Element, Zagreb, 2020.

[14] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, udžbenik za 4. razred gimnazija i strukovnih škola (3 ili 4 sata nastave tjedno), 1.dio*, Element, Zagreb, 2020.

[15] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, udžbenik za 4. razred gimnazija i strukovnih škola (3 ili 4 sata nastave tjedno), 2.dio*, Element, Zagreb, 2020.

[16] G. G. Dekanić, P. Radanović, S. Varošanec, *Matematika 5, udžbenik za 5. razred osnovne škole, 1.dio*, Element, Zagreb, 2020.

[17] Ž. Dijanić, R. Gortan, I. Matić, Lj. J. Matić, M. Njerš, A. Pletikosić, T. Srnec, M. Zelčić, *Matematika 3, udžbenik matematike u trećem razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 3 i 4 sati nastave tjedno*, 1.dio, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[18] Ž. Dijanić, I. Matić, Lj. J. Matić, M. Šujansky, T. Vukas, M. Zelčić, *Matematika 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 1. dio, 3 i 4 sata nastave tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[19] Ž. Dijanić, I. Matić, Lj. J. Matić, M. Šujansky, T. Vukas, M. Zelčić, *Matematika 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 2. dio, 3 i 4 sata nastave tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[20] Ž. Dijanić, Matić, Lj. Jukić Matić, T. Srnec, M. Šujansky, T. Vukas, M. Zelčić, *Matematika 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 5, 6 i 7 sati tjedno, 1.dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[21] Ž. Dijanić, Matić, Lj. Jukić Matić, T. Srnec, M. Šujansky, T. Vukas, M. Zelčić, *Matematika 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 5, 6 i 7 sati tjedno, 2.dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[22] B. Guljaš, Matematička analiza I&II – skripta s predavanja, Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO, 2015.

[23] M. Kuliš, I. Matić, B. A. Piton, N. Zvelf, *Matematika 5, udžbenik matematike u petom razredu osnovne škole sa zadatcima za rješavanje, 1. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[24] Z. Kurnik, *Oblici matematičkog mišljenja*, Element, Zagreb, 2013.

[25] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

Sažetak

U prvom poglavlju ovog diplomskog rada opisan je proces izgradnje matematičkog pojma te su dani primjeri nekorektnih, dvosmislenih, cirkularnih, negativnih i ekvivalentnih definicija nekog matematičkog pojma. Drugo poglavlje posvećeno je važećem kurikulumu pa je tako dan pregled matematičkih pojmova koji se prema istom definiraju. Također, dan je i osvrt na definicije matematičkih pojmova u starim nastavnim programima i kurikulumima. U trećem poglavlju dana je analiza promatranih udžbenika za osnovnu i srednju školu, dok je u zadnjem poglavlju opisan primjer pripreme uvođenja limesa niza za četvrti razred srednje škole.

Summary

In the first chapter of this thesis, the process of creating a mathematical term is described. Examples of incorrect, ambiguous, circular, negative and equivalent definitions of a mathematical term are given. The second chapter is dedicated to the current curriculum, so an overview of mathematical concepts that are defined according to the same, is given. Also, a review of the definitions of mathematical terms in previous teaching programs and curricula is given. In the third chapter, an analysis of the observed textbooks for primary and secondary schools is provided, while in the last chapter, an example of the preparation of the introduction of limes series for the fourth grade of secondary schools is described.

Životopis

Rođena sam 13. studenog 1994. godine u Varaždinu. Pohađala sam Osnovnu školu Ivana Kukuljevića Sakcinskog u Ivancu, a zatim završila opću gimnaziju u Srednjoj školi Ivanec. Nakon srednje škole upisala sam Prirodoslovno – matematički fakultet u Zagrebu. Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer, završila sam 2018. godine nakon čega sam iste godine upisala nastavnički smjer diplomskog sveučilišnog studija Matematika.