

# Poliedri

---

Lovrić, Dražen

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:448261>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-11**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Dražen Lovrić

**POLIEDRI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc.dr.sc. Tomislav Pejković

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*“An investment in knowledge always pays the best interest.”*

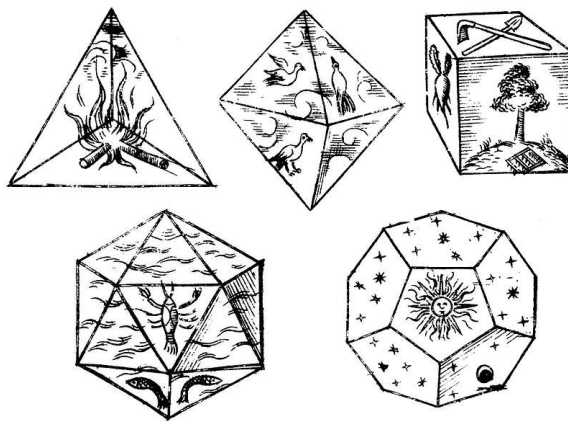
*Benjamin Franklin*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Osnovni pojmovi i tvrdnje</b>	<b>3</b>
<b>2 Pravilni poliedri</b>	<b>5</b>
<b>3 Eulerov i Cauchyjev teorem</b>	<b>17</b>
3.1 Eulerov teorem . . . . .	17
3.2 Cauchyjev teorem o krutosti . . . . .	20
3.3 Deltaedri . . . . .	24
<b>4 Uniformni i neuniformni poliedri</b>	<b>29</b>
4.1 Polupravilni poliedri . . . . .	29
4.2 Neuniformni poliedri pravilnih strana . . . . .	35
<b>5 Grupe simetrija poliedara</b>	<b>40</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>48</b>

# Uvod

Poliedar je geometrijsko tijelo omeđeno ravninskim mnogokutima. Poliedrima su se kroz povijest bavili mnogi poznati matematičari. Već oko 400 g.pr.Kr. Platon je najposebnije među njima, pravilne poliedre ili Platonova tijela, povezivao sa svemirom i četiri osnovna elementa - zemlja, zrak, vatra, voda.



Slika 0.1: Platonova tijela

Kao što ćemo vidjeti, za otkrivanje mnogih saznanja o poliedrima zaslužan je Euklid. Njegovi *Elementi* započinju konstrukcijom jednakostraničnog trokuta, a završavaju konstrukcijom pravilnih poliedara u Knjizi XIII. Također se pretpostavlja da su *Elementi* nastali upravo zbog Euklidove želje da razotkrije geometrijsku pozadinu pet Platonovih tijela.

U svojoj izgubljenoj knjizi Arhimed je proučavao trinaest polupravilnih poliedara, uz jednu varijantu, koje zajedno nazivamo Arhimedova tijela. Kasnije ih je Kepler ponovno otkrio i klasificirao, dok je spomenutu varijantu prvi primijetio hrvatski matematičar Stanko Bilinski.

U bližoj povijesti vrlo su važni Eulerov i Cauchyjev teorem. Bez njih nisu moguća ikakva razmatranja konveksnih poliedara.

U ovom radu nakon kratkog ponavljanja i uvođenja osnovnih pojmova u prvom poglavlju, u drugom poglavlju konstruiramo sve pravilne poliedre.

U trećem poglavlju dokazujemo Eulerov teorem koji povezuje broj vrhova, bridova i strana konveksnog poliedra te Cauchyjev teorem o krutosti konveksnih poliedara. Koristeći te rezultate u nastavku klasificiramo deltaedre, tj. konveksne poliedre kojima su sve strane jednakostranični trokuti.

Četvrto poglavlje posvećeno je poliedrima kojima su sve strane pravilni mnogokuti, a u zadnjem poglavlju proučavamo grupe simetrija poliedara što ilustriramo na primjeru pravilnih poliedara.

Osnovna literatura korištena u izradi ovog rada je posljednje poglavlje knjige [4] R. Hartshornea.

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

# Poglavlje 1

## Osnovni pojmovi i tvrdnje

*Mnogokut* je dio ravnine ograničen dužinama čiji su krajevi  $n \geq 3$  različitih točaka ravnine, sa svojstvom da se nikoje dvije od tih dužina ne sijeku (osim u svojim krajevima) te da je svaka od tih  $n$  točaka kraj točno dviju dužina [2].

*Pravilni mnogokuti* su mnogokuti koji imaju sve stranice jednake duljine i sve kuteve jednake veličine.

*Izometrija euklidske ravnine* je svaka bijekcija  $f : E^2 \rightarrow E^2$  ravnine na samu sebe takva da za svake dvije točke  $A, B$  vrijedi  $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ , gdje je  $d(A, B)$  udaljenost točaka  $A$  i  $B$  [10].

Dana je točka  $O$  i neki realan broj  $k \neq 0$ . *Homotetijom* s centrom  $O$  i s koeficijentom  $k$  zovemo preslikavanje skupa točaka ravnine na sebe tako da vrijedi  $O \mapsto O$  i za svaku točku  $T \neq O$  imamo  $T \mapsto T'$ , gdje su točke  $T, T', O$  kolinearne te za orijentirane duljine dužina  $OT, OT'$  vrijedi  $\frac{OT'}{OT} = k$ . Homotetija prostora definira se sasvim analogno [10].

Kompoziciju parnog broja osnih simetrija zovemo *direktnom izometrijom* ili *gibanjem*, a kompoziciju neparnog broja osnih simetrija zovemo *indirektnom izometrijom*. Direktna izometrija čuva, a indirektna mijenja orijentaciju ravnine. Svako gibanje je ili translacija ili rotacija, a svaka indirektna izometrija je klizna simetrija ili specijalno osna simetrija [10].

*Poliedar* je tijelo omeđeno isključivo ravninskim mnogokutima.

Poliedar kojemu se spojna dužina bilo koja dva vrha nalazi u unutrašnjosti poliedra ili na njegovoj strani ili je to njegov brid, zovemo *konveksnim poliedrom* [6]. Konveksni poliedar je omeđen skup u prostoru dobiven kao presjek konačno mnogo poluprostora.

Ravninski poligoni čine *strane* poliedra. Njihove stranice i vrhovi su ujedno i *bridovi* i *vrhovi* poliedra.

*Diedralni kut* je kut između dvije strane poliedra, odnosno kut između dvije zrake koje pripadaju ravninama tih strana, a povučene su iz točke zajedničkog brida poliedra i okomite na njega.

*Kut strane* je kut pri vrhu poliedra, a nalazi se u strani poliedra koja sadrži taj vrh.



*Prostorni kut* je određen svim stranama pri nekom vrhu poliedra.

Poliedar je *upisan* sferi ako svi njegovi vrhovi leže na sferi.

Poliedar je *opisan* sferi ako sve njegove strane pripadaju tangencijalnim ravninama na tu sferu.

Graf je *planaran* ako se može nacrtati u ravnini  $E^2$  tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima s kojima su incidentni. U protivnom, graf je neplanaran.

*Stablo* je povezani graf bez ciklusa.

Neprazan skup  $G = (G, \cdot)$ , gdje je  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  binarna operacija, zove se *grupa* ako vrijede svojstva

$$\text{za sve } x, y, z \in G \text{ je } (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad (\text{asocijativnost}),$$

$$\text{za svaki } x \in G \text{ postoji } e \in G \text{ tako da } e \cdot x = x \cdot e = x \quad (\text{neutralni element}),$$

$$\text{za svaki } x \in G \text{ postoji jedinstveni } x^{-1} \in G \text{ tako da } x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e \quad (\text{inverzni element}).$$

Ako još za sve  $x, y \in G$  vrijedi svojstvo

$$x \cdot y = y \cdot x \quad (\text{komutativnost}),$$

onda kažemo da je  $G$  *komutativna* ili *abelova grupa* [9].

Bijekciju  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  zovemo *permutacija*.

Permutacija  $\sigma$  je *parna* ako ima paran broj inverzija, tj. parova  $(i, j)$  takvih da  $i < j$ ,  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Ako permutacija nije parna, onda je *neparna*.

Permutacije na skupu  $\{1, \dots, n\}$  čine s obzirom na kompoziciju funkcija grupu koju nazivamo *simetrična grupa* stupnja  $n$ . Parne permutacije čine podgrupu te grupe koja se zove *alternirajuća grupa*.

Svaka permutacija se može napisati kao kompozicija ili produkt ciklusa.

Za grupu  $G$  kažemo da djeluje na skupu  $X$  ako postoji preslikavanje  $\phi : G \times X \rightarrow X$  takvo da za sve  $x \in X$  vrijedi

1.  $\phi(e, x) = x$ , gdje je  $e$  neutralni element u grupi  $G$ ,
2.  $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$ , za sve  $g, h \in G$ .

## Poglavlje 2

### Pravilni poliedri

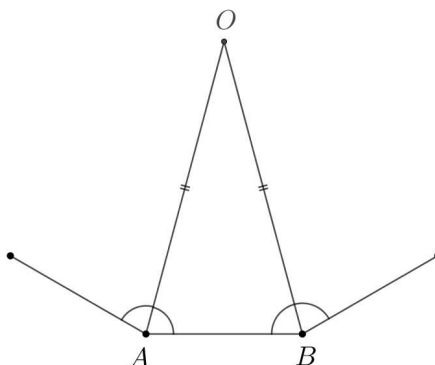
Najpoznatiji poliedri jesu pravilni poliedri ili Platonova tijela. “U svom djelu *Timaeus* oko 350. g. prije Krista, grčki filozof Platon razvija svojevrsnu atomističku teoriju i materijalni svijet gleda kao kombinaciju četiriju temeljnih elemenata. A ta četiri elementa su pravilni poliedri. Tetraedar je čestica vatre. Tetraedar je oštar te lako prodire u druga tijela. Kocka je najstabilniji od pet poliedara pa je čestica zemlje oblika kocke. Prozračni oktaedar je čestica zraka, a ikosaedar, jer je najobliji pa stoga lako klizi, čestica je vode. Tu je još i peti pravilni poliedar, dodekaedar, i u Platonovu tumačenju oblik dodekaedra ima svemir.” [1]

Značajnu ulogu u proučavanju pravilnih poliedara imao je i Euklid, baveći se njima u svojoj poznatoj zbirki knjiga *Elementi*. Tako ujedno i klasificira tetraedar, kocku, oktaedar, ikosaedar i dodekaedar prema broju i vrsti njihovih strana. Tvrdi da su to jedini pravilni poliedri koji postoje, a potom ih konstruira upisane u sferu. U ovom poglavlju formulirati ćemo definiciju pravilnih poliedara te proučiti njihovu egzistenciju i jedinstvenost.

**Propozicija 2.1.** *U Kartezijevoj ravnini nad skupom realnih brojeva, za svaki  $n \geq 3$ , postoji pravilni  $n$ -terokut sa stranicom proizvoljne duljine. Svaka dva pravilna  $n$ -terokuta sa jednakom stranicom su sukladni. Vrhovi pravilnog  $n$ -terokuta leže na kružnici, odnosno pravilnom  $n$ -terokutu možemo opisati kružnicu. Za bilo koja dva vrha, postoji rotacija tog pravilnog  $n$ -terokuta koja preslikava jedan vrh u drugi.*

*Dokaz.* Za egzistenciju, označimo na kružnici  $n$  jednako udaljenih točaka, a pri središtu kružnice tada imamo kutove veličine  $2\pi/n$ . Homotetija s odgovarajućim koeficijentom osigurava da duljina stranice  $n$ -terokuta bude jednaka duljini dane dužine. Zatim dokazujemo jedinstvenost. Pretpostavimo da je dan pravilni  $n$ -terokut sa stranicom  $\overline{AB}$ . Raspolovimo kutove pri vrhovima  $A$  i  $B$ , a sjecište tih dviju simetrala kutova označimo s  $O$ . Tada je  $O$  jednako udaljena od  $A$  i  $B$ . Provedemo istu konstrukciju nad ostalim vrhovima  $n$ -terokuta, pa koristeći *KSK* teorem o sukladnosti trokuta lako uočimo da je  $O$  jednako udaljena od svih njegovih vrhova, odnosno svi oni leže na kružnici sa središtem u točki  $O$ . Tako smo

dokazali i da su svaka dva pravilna  $n$ -terokuta sa jednakom stranicom sukladni. Preostaje nam dokazati egzistenciju tražene rotacije, pa uzmimo rotaciju oko središta  $O$  za kut  $2\pi/n$ . Ona će preslikati jedan vrh u njemu susjedni. Višestruka primjena te rotacije (koja je kao kompozicija rotacija oko istog centra ponovno rotacija) preslikati će jedan vrh u bilo koji drugi.



□

Euklid nije zapisao generalnu definiciju pravilnog poliedra, ali definira svakog od njih zasebno (*Knjiga XI, Elementi*).

*Piramida* je tijelo dobiveno spajanjem točke sa svim vrhovima mnogokuta, pri čemu ta točka ne leži u ravnini mnogokuta. Slijede **Euklidove** definicije pravilnih poliedara.

**Tetraedar** je trostrana piramida sastavljena od četiri jednakostranična trokuta.

**Kocka** je tijelo omeđeno sa šest jednakih kvadrata.

**Oktaedar** je tijelo omeđeno s 8 jednakostraničnih trokuta.

**Ikosaedar** je tijelo omeđeno s 20 jednakostraničnih trokuta.

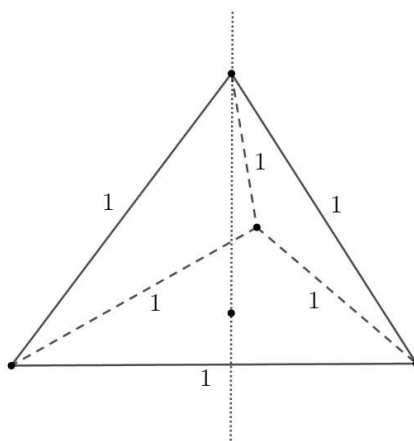
**Dodekaedar** je tijelo omeđeno s 12 pravilnih peterokuta.

Želimo dokazati da ti poliedri zaista i postoje pa ćemo ih konstruirati. Euklid je to učinio u *Knjizi XIII*, ali složenijim metodama.

**Propozicija 2.2.** *Postoje tetraedar, kocka, oktaedar, ikosaedar i dodekaedar sa sljedećim svojstvima:*

- (a) *U svakom od njih svi diedralni kutovi su jednaki.*
- (b) *Vrhovi im leže na sferi.*
- (c) *Za svaka dva vrha postoji direktna izometrija koja šalje jedan vrh u drugi.*

*Dokaz.* Konstrukciju tetraedra započinjemo s jednakostraničnim trokutom stranice primjerice duljine 1. Kroz središte trokuta i okomito na ravninu u kojoj on leži povučemo pravac. Na tom pravcu odredimo točku koja je za 1 udaljena od nekog vrha trokuta, pa je tada za 1 udaljena od svakog od vrhova trokuta. Dobivena piramida jest tetraedar.



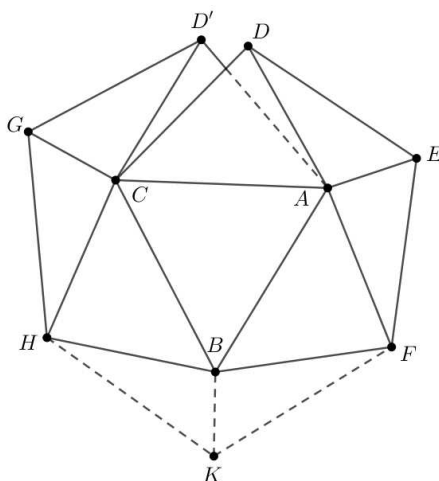
Slika 2.1: Prikaz konstrukcije tetraedra

Diedralni kutovi određeni s tri novonastale strane su očito jednaki, ali smo konstrukciju mogli započeti i s jednom od njih, pa zaključujemo da su svi diedralni kutovi tetraedra jednaki. Tetraedru možemo opisati sferu jer znamo da je sfera jedinstveno određena s 4 nekomplanarne točke. Jedan vrh ćemo poslati u neki drugi rotacijom s obzirom na os koja prolazi vrhom i središtem njemu nasuprotne strane tetraedra.

Želimo konstruirati kocku pa prvo uzmimo kvadrat sa stranicom duljine 1. Potom u vrhovima podignemo okomice na ravninu u kojoj leži kvadrat te na svakoj okomici, na udaljenosti 1, označimo točku. Povežemo točke na istim okomicama i sve novonastale susjedne točke. Diedralni kutovi su zbog unutarnjih kutova kvadrata i podignutih okomica svi jednaki i iznose  $90^\circ$ . Prostorne dijagonale kocke se sve sijeku u nekoj točki  $S$  te se pritom međusobno raspolavljaju. Tada svi vrhovi kocke leže na sferi sa središtem u  $S$ . Neki vrh možemo poslati u bilo koji drugi kompozicijom rotacija kocke s obzirom na os koja prolazi središtima dvaju nasuprotnih strana.

Da bismo konstruirali oktaedar, uzmimo sferu radijusa 1 i njezina tri međusobno okomita promjera. Sada imamo šest sjecišta promjera sa sferom, povežemo ih tako da dobijemo 8 jednakostraničnih trokuta. Svaki par susjednih vrhova oktaedra možemo poslati u bilo koji drugi par njegovih vrhova slijedom rotacija s obzirom na osi na kojima leže tri okomita promjera. To ujedno povlači da su svi diedralni kutovi u oktaedru jednaki.

Sljedeći je ikosaedar. Nacrtamo pravilni peterokut  $BCDEF$  sa stranicama duljine 1. Prema Propoziciji 2.1 znamo da mu možemo opisati kružnicu. Povucimo pravac kroz središte te kružnice, okomit na ravninu u kojoj leži peterokut. Na tom pravcu označimo točku  $A$ , udaljenu za 1 od točke  $B$ . Tada je  $A$  udaljena za 1 i od ostalih točaka  $C, D, E, F$ . Spajanjem točke  $A$  s vrhovima peterokuta nastaje peterostrana piramida s pobočjem sastavljenim od jednakostraničnih trokuta. Zbog simetrije su diedralni kutovi između svaka ta dva susjedna jednakostranična trokuta jednaki. Konstruirajmo još jednu takvu sukladnu peterostranu piramidu s bazom  $B'A'D'GH$  i nasuprotnim vrhom  $C'$ . Zbog jednakih diedralnih kutova prve i druge piramide, ako postavimo trokut  $A'B'C'$  na trokut  $ABC$ , točke  $D$  i  $D'$  će se poklopiti. Sada imamo tijelo s osam jednakostraničnih trokuta i svim jednakim diedralnim kutovima. Provedemo li postupak još jednom, dobit ćemo tijelo s deset jednakostraničnih trokuta i trokutom  $ABC$  u središtu. Primijetimo i kako su svi kutovi između susjednih bridova koji čine vanjski rub našeg tijela (njih ukupno šest) jednaki unutarnjem kutu pravilnog peterokuta. Sada napravimo još jednu takvu plohu od deset jednakostraničnih trokuta i potom ju spojimo s onom prvom. Zbog jednakosti svih diedralnih kutova i kutova između vanjskih bridova, spajanjem će nastati ikosaedar.



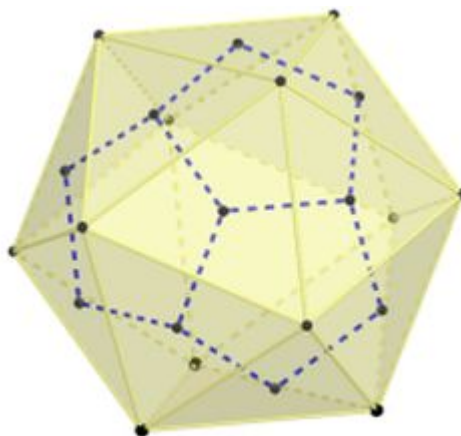
Slika 2.2: Prikaz konstrukcije ikosaedra

Neka se okomice na bilo koje dvije susjedne strane ikosaedra kroz središta tih strana sijeku u točki  $O$ . Tada su sva četiri vrha koja pripadaju tim dvjema stranama jednako udaljena od  $O$ . Pošto su svi diedralni kutovi ikosaedra jednaki, točka  $O$  je jednako udaljena od svih njegovih vrhova. To znači da mu možemo opisati sferu sa središtem u  $O$ .

Konstrukciju smo mogli započeti i s bilo kojom drugom peterostranom piramidom na ikosaedru, baš zbog jednakosti svih diedralnih kutova. Rotacijom ikosaedra, s obzirom na os koja prolazi dvama nasuprotnim vrhovima, šaljemo bilo koji trokut u njemu susjedni,

odnosno bilo koji vrh u njemu susjedni. Kompozicijom tih rotacija, što je direktna izometrija, možemo svaki vrh poslati u bilo koji drugi.

Ikosaedar će nam poslužiti za konstrukciju dodekaedra. U svakom vrhu ikosaedra se sastaje pet jednakostraničnih trokuta, spojimo središta susjednih trokuta (strana). Dobili smo pravilni peterokut, a njih ukupno 12, jer je toliko vrhova ikosaedra, čini dodekaedar.



Slika 2.3: Prikaz konstrukcije dodekaedra

Opet su svi diedralni kutovi jednaki jer su zbog simetrije ikosaedra svi susjedni peterokuti u istom međusobnom položaju. Već smo rekli da su vrhovi dodekaedra zapravo središta ikosaedrovih strana. Za sve te točke znamo da su jednako udaljene od središta sfere opisane ikosaedru. Tako dodekaedru možemo opisati sferu sa središtem u istoj točki  $O$ , a istovremeno je to ikosaedru upisana sfera. Možemo primijetiti kako rotacijom ikosaedra, s obzirom na os koja prolazi dvama nasuprotnim vrhovima, šaljemo bilo koji trokut u njemu susjedni, odnosno bilo koji vrh dodekaedra u njemu susjedni. Kompozicijom takvih rotacija (direktna izometrija) šaljemo proizvoljni vrh dodekaedra u bilo koji drugi.  $\square$

Svih pet Platonovih tijela moguće je konstruirati koristeći samo ravnalo i šestar, pri čemu konstrukcije izvodimo u odgovarajućim ravninama. Dakle, ta tijela smještena su u Kartezijevom trodimenzionalnom koordinatnom sustavu s koordinatama vrhova iz polja konstruktibilnih brojeva.

Sada smo konstrukcijama pokazali egzistenciju, ali još nas zanima jedinstvenost. Euklid tvrdi da su konstruirani poliedri jedini poliedri omeđeni sukladnim pravilnim mnogokutima, odnosno da ne postoji nijedan drugi. Njegovo zaključivanje je sljedeće. Ukoliko poliedar sastavljamo od jednakostraničnih trokuta, tada se u jednom vrhu može sastati njih 3, 4 ili 5. Već ih 6 ne može biti jer onda svi leže u istoj ravnini.

Isto tako pri jednom vrhu možemo imati samo 3 kvadrata jer 4 kvadrata također leže u istoj ravnini, i samo 3 pravilna peterokuta. Najmanji broj pravilnih šesterokuta pri jednom

vrhu jest 3, međutim kako njegov unutarnji kut iznosi  $120^\circ$  dobivamo  $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ . Oni tada opet leže u istoj ravnini pa možemo odbaciti šesterokute i sve ostale pravilne mnogokute s više stranica. Euklid zaključuje da 5 valjanih slučajeva odgovara konstruiranim poliedrima.

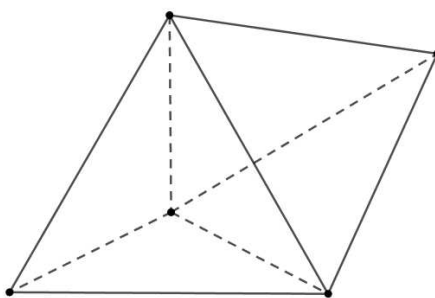
Konstruirajmo i promotrimo kako izgleda "udubljeni ikosaedar". Izuzmimo od običnog ikosaedra jednu peterostranu piramidu s vrhom  $A$  i bazom  $BCDEF$ . Nju ćemo zamijeniti s peterostranom piramidom  $A'BCDEF$ , gdje je  $A'$  zrcalna slika točke  $A$  u odnosu na ravninu  $BCD$ . Točka  $A'$  se nalazi unutar originalnog ikosaedra, ili možemo reći da je udubljeni ikosaedar konkavan u točki  $A'$ . Kao i ikosaedar, omeđen je s 20 sukladnih jednakostraničnih trokuta, ali ta dva tijela nisu sukladna. Iz ovog primjera je očito da u Euklidovoj definiciji pravilnog poliedra nedostaje zahtjev konveksnosti.

Dodavanjem zahtjeva konveksnosti pretpostavci da su sve strane sukladni pravilni mnogokuti nismo potpuno ispravili Euklidov zaključak, ali vrijedi sljedeća tvrdnja.

**Propozicija 2.3.** *Pri jednom vrhu konveksnog poliedra, čije su sve strane sukladni pravilni mnogokuti, moguće je imati samo 3, 4 ili 5 trokuta, 3 kvadrata ili 3 peterokuta.*

*Dokaz.* Zbog konveksnosti poliedra, zbroj svih kutova strana pri nekom vrhu mora biti manji od  $2\pi$ , a samo naših 5 slučajeva zadovoljava taj zahtjev.  $\square$

Pogledajmo na sljedećem primjeru *trokutaste bipiramide* jesmo li time potpuno popravili Euklidovu tvrdnju. To tijelo dobijemo kada duž jedne strane spojimo dva sukladna tetraedra. Radi se o konveksnom poliedru omeđenom sa 6 jednakostraničnih trokuta, ali ne pripada nijednom od pet konstruiranih.



Slika 2.4: Trokutasta bipiramida

Vidimo kako se u nekim vrhovima sastaju 4 strane, a u nekima samo 3. Ono što dodatno trebamo zahtijevati jest da se u svakom vrhu poliedra sastaje jednak broj strana.

Idući teorem nam daje osnovne formule koje vežu elemente sfernog trokuta, a navodimo ga jer ćemo njegove posljedice koristiti u nekoliko dokaza [8].

**Teorem 2.4** (Kosinusov poučak za stranice sfernog trokuta). *Vrijedi*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

*kao i još dvije analogne formule.*

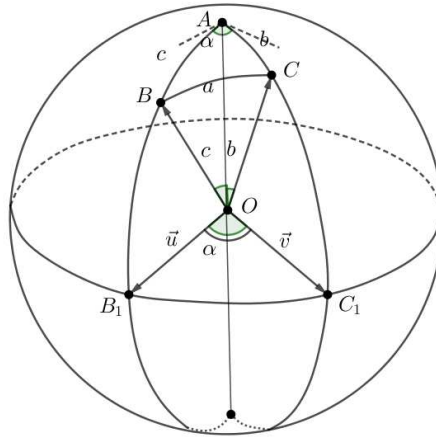
*Dokaz.* Promotrimo standardnu sferu  $S^2$ . Uzmimo da je  $A$  “sjeverni pol” i neka velika kružnica kroz  $A$  i  $B$ , odnosno  $A$  i  $C$  siječe “ekvator” u točki  $B_1$ , odnosno  $C_1$ . Izrazimo vektore  $\vec{OB}$  i  $\vec{OC}$  pomoću linearno nezavisnih vektora  $\vec{u} = \vec{OB_1}$ ,  $\vec{v} = \vec{OC_1}$  i  $\vec{OA}$ . Očito imamo

$$\begin{aligned}\vec{OB} &= \vec{OA} \cos c + \vec{u} \sin c \\ \vec{OC} &= \vec{OA} \cos b + \vec{v} \sin b.\end{aligned}$$

Vektor  $\vec{OA}$  je okomit na  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ , pa je skalarni produkt nula, tj.  $\vec{OA} \cdot \vec{u} = \vec{OA} \cdot \vec{v} = 0$ , dok je  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos \alpha$ . Stoga je

$$\cos a = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = (\vec{OA} \cos c + \vec{u} \sin c) (\vec{OA} \cos b + \vec{v} \sin b) = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Analogne jednakosti dobivamo i za  $\cos b$  i  $\cos c$ .



□

**Teorem 2.5.** *Svaki poliedar koji je:*

- (a) omeđen sukladnim pravilnim mnogokutima,
- (b) konveksan,
- (c) u svakom vrhu se sastaje jednak broj strana,



sukladan je jednom od pet konstruiranih u Propoziciji 2.2. Također, za njih vrijede dodatna svojstva:

- (d) svi diedralni kutovi su jednaki,
- (e) vrhovi im leže na sferi,
- (f) za bilo koja dva vrha, postoji direktna izometrija poliedra koja šalje jedan vrh u drugi.

Za dokaz teorema ćemo iskoristiti iduću lemu.

**Lema 2.6.** *Neka se tri strane poliedra, s kutovima strana  $a, b, c$ , sastaju u vrhu  $O$ . Tada su tri diedralna kuta određena tim stranama jedinstveno određeni s  $a, b, c$ . Posebno, ako su  $a, b, c$  jednaki, onda su i tri diedralna kuta jednaki.*

*Dokaz.* Ako presiječemo naše tri strane poliedra s jediničnom sferom pri vrhu  $O$ , kao presjek ćemo dobiti sferni trokut. Njegovim stranicama, kao dijelovima velikih kružnica, pridruženi su nasuprotni kutovi  $a, b, c$  pri središtu sfere. Tako odmah znamo da duljine stranica izražene u radijanima iznose  $a, b, c$ . Također, zbog Teorema 2.4 je jasno da su tri unutarnja kuta sfernog trokuta  $\alpha, \beta, \gamma$  određena s duljinama njegovih stranica. Kao kutovi između tangenti na velike kružnice u određenom vrhu,  $\alpha, \beta, \gamma$  su zapravo diedralni kutovi poliedra. Vidimo da su jednoznačno određeni kutovima strana pri vrhu  $O$ , tj. kutovima  $a, b, c$ . □

*Dokaz Teorema.* Pretpostavili smo da je poliedar konveksan te da se u svakom vrhu sastaje jednak broj strana pa onda možemo primijeniti Propoziciju 2.3 i razmatrati samo 5 slučajeva.

**1. slučaj** Tri jednakostranična trokuta pri svakom vrhu.

Neka je  $A$  jedan od vrhova konveksnog poliedra i neka su  $B, C, D$  njemu susjedni vrhovi. Stranice  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$  su sve jednake pa onda vrhovi  $B, C, D$  tvore jednakostraničan trokut. U svakom od vrhova  $B, C, D$  se već sastaju dva, a trokut  $BCD$  čini treći jednakostraničan trokut u tim vrhovima. Sada je jasno da je poliedar sastavljen od ukupno 4 jednakostranična trokuta. Prema Lemi 2.6 diedralni kutovi su jednaki onima u tetraedru konstruiranom u Propoziciji 2.2. Tada su ta dva tetraedra sukladni, do na sličnost. Svojstva (d), (e), (f) također slijede iz Propozicije 2.2.

**2. slučaj** Tri kvadrata pri svakom vrhu.

Prema Lemi 2.6 svi diedralni kutovi poliedra su jedinstveno određeni. Radi se o pravim kutovima pa ako krenemo od jednog vrha, tri kvadrata koja se u njemu sastaju tvore dio kocke. Kao i u 1. slučaju, pri susjednom vrhu treća strana poliedra koja se u njemu

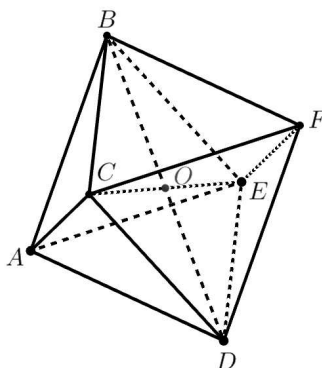
sastaje mora biti sukladan kvadrat. Zaključujemo da se radi o kocki, koju smo konstruirali u Propoziciji 2.2. Iz iste propozicije proizlaze i svojstva (d), (e), (f).

**3. slučaj** Tri pravilna peterokuta pri svakom vrhu.

Diedralni kutovi su jedinstveno određeni pa odgovaraju diedralnim kutovima konstruiranog dodekaedra u Propoziciji 2.2. Opet krećemo od jednog vrha, i kao u prošlom slučaju, obilazeći po susjednim vrhovima imamo poliedar sukladan prije konstruiranom dodekaedru. Svojstva (d), (e), (f) onda slijede iz Propozicije 2.2.

**4. slučaj** Četiri jednakostranična trokuta pri svakom vrhu.

U ovom slučaju se u svakom vrhu sastaju četiri strane, pa ne možemo iskoristiti Lemu 2.6. Neka je  $A$  jedan vrh poliedra. U njemu se sastaju četiri trokuta pa ima četiri susjedna vrha  $B, C, D, E$ . U vrhu  $B$  se trenutno sastaju dva jednakostranična trokuta i tri od potrebna četiri brida. Tada znamo da mora postojati vrh  $F$  tako da su  $BCF$  i  $BEF$  ona dva jednakostranična trokuta koja nedostaju. Odmah uočimo da sada pri vrhu  $C$  imamo tri strane pa slijedi da  $CDF$  mora biti jednakostraničan trokut. Na isti način i  $DEF$  mora biti četvrti jednakostranični trokut pri vrhu  $E$ . Dobili smo poliedar omeđen s 8 jednakostraničnih trokuta u istom rasporedu kao kod oktaedra u Propoziciji 2.2. Znajući to, sada ćemo dokazati sukkladnost tih dvaju poliedara.



Točke  $A$  i  $F$  su nasuprotni vrhovi poliedra, od kojih su  $B, C, D, E$  jednako udaljene pa stoga leže u simetralnoj ravnini koja raspolavlja  $\overline{AF}$ . Točke  $B, C, D, E$  su sve jednako udaljene od  $A$  pa se nalaze na sferi sa središtem u  $A$ . Presjek ravnine i sfere nam daje kružnicu. Te točke su redom jednako udaljene i jedna od druge pa formiraju kvadrat, jer je romb upisan u kružnicu nužno kvadrat. Neka je  $O$  sjecište dijagonala tog kvadrata, odnosno njegovo središte. Dužine  $\overline{AF}, \overline{BD}, \overline{CE}$  su tada sve međusobno okomite i prolaze kroz  $O$ . Ako su bridovi poliedra duljine 1, onda je točka  $O$  udaljena  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  od točaka  $A, B, C, D, E, F$ . To znači da sve one leže na sferi sa središtem u točki  $O$ , a upravo smo tako proveli konstrukciju

oktaedra u Propoziciji 2.2, iz koje slijede i svojstva (d), (e), (f).

**5. slučaj** Pet jednakostraničnih trokuta pri svakom vrhu.

Kao i u prošlom slučaju, ne možemo primijeniti Lemu 2.6 pa prvo pokažemo da se poliedar sastoji od 20 strana i 12 vrhova, u istom rasporedu kao kod ikosaedra u Propoziciji 2.2. Potom dokazujemo da je taj poliedar sukladan ikosaedru. U dokazu će nam pomoći *Cauchyjev teorem o krutosti*, kojeg proučavamo u idućem poglavlju.  $\square$

**Definicija 2.7.** *Pravilni poliedar ili Platonovo tijelo je konveksni poliedar čije su sve strane sukladni pravilni mnogokuti, a u svakom njegovom vrhu se sastaje jednak broj strana.*

Prema Teoremu 2.5 možemo zaključiti da su jedini pravilni poliedri onih 5 konstruiranih u Propoziciji 2.2.

Pravilni poliedar	$V$	$B$	$S$	strane
Tetraedar	4	6	4	trokuti
Heksaedar (kocka)	8	12	6	kvadrati
Oktaedar	6	12	8	trokuti
Dodekaedar	20	30	12	peterokuti
Ikosaedar	12	30	20	trokuti

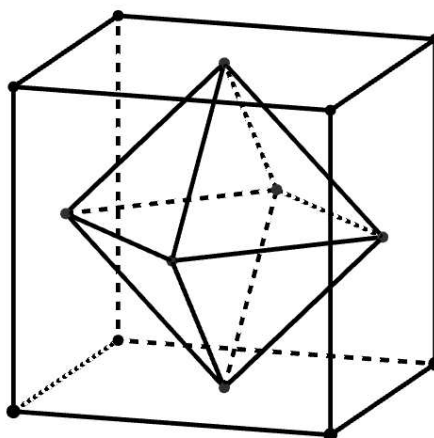
Tablica 2.1: Broj vrhova, bridova i strana Platonovih tijela

“Promotrimo li ovdje kocku i oktaedar vidjet ćemo da ta dva pravilna poliedra imaju isti broj bridova, dok jedan od njih ima isti broj vrhova koliko ima drugi strana. Ovo isto vrijedi i za dodekaedar i ikosaedar. Kod tetraedra vidimo da ima isti broj vrhova kao i strana. Ovakvo svojstvo nazivamo dualnošću. Kažemo da su kocka i oktaedar, kao i dodekaedar i ikosaedar međusobno dualni, dok je tetraedar dualan samom sebi.” [7]

Takva svojstva nam omogućuju da pravilne poliedre upisujemo jedne u druge.

### Oktaedar i kocka

Odredimo središta svih strana kocke. Kocka i oktaedar su dualni te možemo 6 središta strana kocke uzeti za 6 vrhova oktaedra. Spajanjem po dva susjedna vrha dobivamo oktaedar.



Slika 2.5: Oktaedar upisan kocki

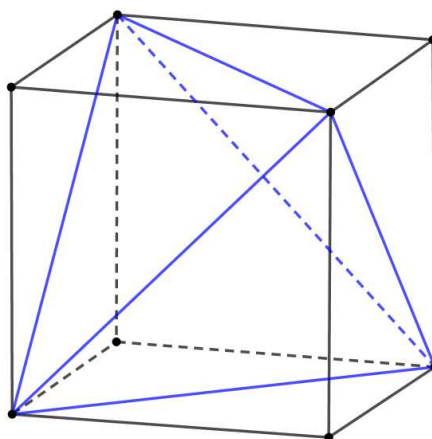
Istim načinom možemo i obrnuto, kocku upisati oktaedru.

### **Ikosaedar i dodekaedar**

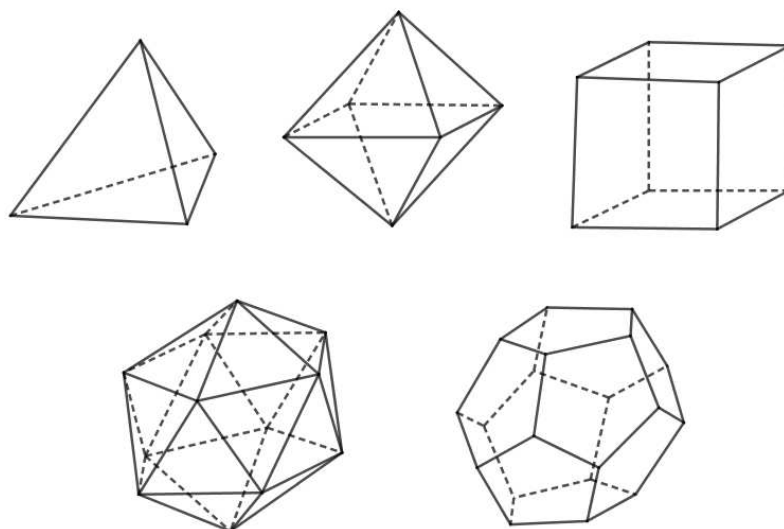
Ikosaedar možemo upisati dodekaedru tako da spojimo središta susjednih strana dodekaedra.

### **Tetraedar i kocka**

Na drugačiji način, tetraedar upisujemo kocki tako da dijagonale strana kocke čine bridove tetraedra.



Slika 2.6: Tetraedar upisan kocki



Slika 2.7: Pravi poliedri u kosoj projekciji

## Poglavlje 3

# Eulerov i Cauchyjev teorem

U ovom poglavlju obradit ćemo dva teorema koji nam daju vrlo važne rezultate općenito o poliedrima, a vidjet ćemo i njihovu direktnu primjenu u nekim primjerima. *Eulerov teorem* otkriva u kojem su odnosu brojevi vrhova, bridova i strana konveksnog poliedra, dok *Cauchyjev teorem o krutosti* govori da su dva konveksna poliedra sukladni ako imaju sukladne strane i ako su one jednako raspoređene.

### 3.1 Eulerov teorem

**Teorem 3.1 (Eulerov teorem).** *Neka je u konveksnom poliedru  $v$  broj vrhova,  $e$  broj bridova i  $f$  broj strana. Tada vrijedi*

$$v - e + f = 2.$$

Mnogo je dokaza Eulerovog teorema, a mi ćemo navesti dva u kojima krećemo od povezanog planarnog grafa. Zanimljivo je da je Legendre prvi dokazao teorem, dok Euler to nije uspio.

*Prvi dokaz.* Zamislimo da iz unutrašnje točke jedne strane gledamo unutrašnjost poliedra. Poliedar je konveksan pa tada vidimo sve ostale strane bez preklapanja. Situacija će ostati nepromijenjena i ako se točka gledišta vrlo malo podigne iz ravnine odgovarajuće strane prema vanjštini poliedra. Tu sliku možemo projicirati na ravninu, a ustvari se radi o smještanju grafa poliedra u ravninu. Pritom će se kutovi i udaljenosti promijeniti, ali će bridovi ostati ravni. U ravnini dobijemo lik sastavljen od mnogokuta koji odgovaraju stranama originalnog poliedra. Strana na kojoj smo odabrali točku gledišta odgovara cijelom području ravnine izvan lika. Broj vrhova, bridova i strana (brojeći i vanjsko neograničeno područje) odgovara broju vrhova, bridova i strana originalnog poliedra. Na liku u ravnini provodimo dvije vrste operacija ili koraka.

- (a) Izaberimo brid koji odvaja dvije strane ili koji odvaja jednu stranu od vanjskog područja te ga uklonimo. To će rezultirati smanjenjem broja bridova za jedan i broja strana, također za jedan. Zbog toga vrijednost izraza  $v - e + f$  ostaje nepromijenjena.
- (b) Ukoliko u nekom koraku postupka ostane vrh iz kojeg izlazi samo jedan brid, uklonit ćemo oboje. Tom operacijom ćemo smanjiti broj vrhova i broj bridova za 1, pa je opet vrijednost izraza  $v - e + f$  nepromijenjena.

Korak (a) provodimo dok god možemo, a kada to više nije moguće znači da u našem grafu više nema ciklusa. Graf je sada stablo, pa možemo provesti korak (b). Kada nam ponestanu svi bridovi ostaje samo jedna točka jer je graf bio povezan te je u svakom koraku i ostajao povezan. Na kraju imamo  $v = 1$ ,  $e = 0$ ,  $f = 1$ , iz čega slijedi  $v - e + f = 2$ . Koraci (a) i (b) nisu mijenjali vrijednost izraza  $v - e + f$  pa je i izraz  $v - e + f$  za originalni poliedar jednak 2.  $\square$

*Drugi dokaz.* Dokaz možemo provesti i tako da gledamo zbroj kutova [2].

Odredit ćemo zbroj kutova u svim mnogokutima ravninskog ulaganja ruba poliedra na dva načina. Od ukupno  $v$  vrhova, njih  $v_1$  pripada uklonjenoj strani poliedra, pa su to vanjski vrhovi lika u ravnini. Preostalih  $v - v_1$  vrhova nalazi se u unutrašnjosti lika. Zato zbroj svih kutova možemo izračunati kao zbroj svih kutova jednog  $v_1$ -terokuta i  $v - v_1$  punih kutova.

$$Z = (v_1 - 2) \cdot \pi + (v - v_1) \cdot 2\pi = (2v - v_1 - 2) \cdot \pi.$$

S druge strane, istu sumu možemo dobiti kao zbroj suma unutarnjih kutova svih “malih” mnogokuta, nastalih od strana poliedra. Njih ima  $f - 1$ , jer je jedna strana uklonjena. Označimo brojeve njihovih vrhova s  $n_1, n_2, \dots, n_{f-1}$ . Vrijedi

$$Z = \sum_{i=1}^{f-1} (n_i - 2) \cdot \pi = (n_1 + n_2 + \dots + n_{f-1} - 2(f - 1)) \cdot \pi.$$

Dakle, možemo izjednačiti

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{f-1} - 2(f - 1) = 2v - v_1 - 2.$$

Pritom je  $n_1 + n_2 + \dots + n_{f-1}$  ukupan broj bridova, ali su “unutarnji” brojani dvaput. Zato vrijedi

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{f-1} = 2e - v_1.$$

Uvrstimo li to u prethodnu jednakost, dobivamo

$$\begin{aligned} (2e - v_1) - 2(f - 1) &= 2v - v_1 - 2, \\ 2e - 2f + 2 &= 2v - 2, \\ e - f + 1 &= v - 1, \end{aligned}$$

i konačno,  $v - e + f = 2$ .  $\square$

Eulerov teorem ima veoma korisnu posljedicu, povezanu i s kutovima strana poliedra. Već otprije znamo da pri svakom vrhu konveksnog poliedra zbroj pripadnih kutova strana mora biti manji od  $2\pi$ .

**Definicija 3.2.** Defekt  $\delta_V$  pri vrhu  $V$  poliedra definiramo kao razliku  $2\pi$  i zbroja svih kutova strana pri vrhu  $V$ . Stoga je  $\delta_V > 0$ .

**Korolar 3.3 (Descartes).** U konveksnom poliedru je zbroj defekata svih vrhova jednak  $4\pi$ ,  $\sum \delta_V = 4\pi$ .

*Dokaz.*

$$\begin{aligned}\sum_V \delta_V &= \sum_V (2\pi - \sum (\text{kutova strana pri } V)) \\ &= 2\pi v - \sum (\text{svih kutova strana}),\end{aligned}$$

gdje je  $v$  broj vrhova poliedra. Znamo da je zbroj unutarnjih kutova  $n$ -terokuta jednak  $(n-2)\pi$ . Označimo s  $f_n$ , za svaki  $n$ , broj strana koje imaju  $n$  stranica. Tada imamo ukupno  $f = \sum_n f_n$  strana, a bridova  $\frac{1}{2} \sum_n n f_n$ . Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}\sum_V \delta_V &= 2\pi v - \sum_n (n-2)\pi f_n \\ &= 2\pi v - \pi \sum_n n f_n + 2\pi \sum_n f_n \\ &= 2\pi(v - e + f) = 4\pi.\end{aligned}\quad \square$$

Također, pomoću Eulerove formule možemo dokazati i da smo u prethodnom poglavlju zaista konstruirali sva Platonova tijela, tj. da nema drugih [5].

**Teorem 3.4.** Postoji točno pet Platonovih tijela.

*Dokaz.* Označimo s  $m$  koliko se strana sastaje u svakom vrhu nekog Platonovog tijela, a s  $n$  broj stranica oko svake strane. Vrijedi  $m \geq 3, n \geq 3$  i očito je  $2e = mv = nf$ . Izrazimo li broj vrhova i strana preko broja bridova te uvrstimo u Eulerovu formulu, slijedi

$$2\frac{e}{m} - e + 2\frac{e}{n} = 2 \iff (2n - mn + 2m)e = 2mn.$$

Stoga vrijedi  $2m + 2n - mn > 0$ , tj.  $(m-2)(n-2) < 4$ , odakle slijedi da  $(m-2)(n-2)$  iznosi 1, 2 ili 3. Za svaki mogući par  $(m, n)$  možemo izračunati  $v, e$  i  $f$ , što vidimo u idućoj tablici.

U Propoziciji 2.2 smo konstruirali svih pet tijela te tako pokazali da zaista i postoje.  $\square$



$m$	$n$	$v$	$e$	$f$	naziv
3	3	4	6	4	tetraedar
3	4	8	12	6	kocka
4	3	6	12	8	oktaedar
3	5	20	30	12	dodekaedar
5	3	12	30	20	ikosaedar

## 3.2 Cauchyjev teorem o krutosti

Pretpostavimo da dva konveksna poliedra imaju sukladne strane i da su one jednako raspoređene. Konkretnije, to znači da postoji bijekcija  $\varphi$  koja ide sa skupa strana prvog poliedra  $F_1, \dots, F_f$  u skup strana drugog poliedra  $F'_1, \dots, F'_f$ , tako da je  $F_i$  sukladan  $\varphi(F_i)$ , za svaki  $i$ . Također,  $\varphi$  se može proširiti na bijekcije skupova bridova i vrhova tih dvaju poliedara koje čuvaju incidenciju. Tada želimo zaključiti da su poliedri sukladni, tj. postoji izometrija prostora koja jedan preslikava u drugi.

Cauchy je imao sljedeću ideju dokaza. Uspoređujemo diedralne kutove dvaju poliedara duž odgovarajućih bridova te ako su oni svi jednaki, onda su i poliedri sukladni. U suprotnom ćemo promatrati povećanje ili smanjenje diedralnih kutova oko svakog vrha i iskoristiti Eulerov teorem, u svrhu kontradikcije. Zanima nas što se događa pri određenom vrhu  $V$  pa ćemo presjeći strane poliedra (koje se sastaju u  $V$ ) s malom sferom oko  $V$ . U presjeku dobivamo sferni mnogokut čiji su unutarnji kutovi upravo diedralni kutovi našeg poliedra. Potpoglavlje započinjemo proučavanjem ravninskih mnogokuta s promjenjivim kutovima.

**Lema 3.5 (Steinitz).** *Neka su dana dva ravninska konveksna mnogokuta  $A_1A_2 \dots A_n$  i  $B_1B_2 \dots B_n$  sa svim stranicama jednakim, osim možda posljednjih:  $A_iA_{i+1} = B_iB_{i+1}$ , za sve  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Pretpostavimo i da su kutovi prvog mnogokuta manji ili jednaki od kutova drugog,  $\angle A_i \leq \angle B_i$ , za  $i = 2, \dots, n-1$ , s bar jednom strogom nejednakosti. Onda vrijedi  $A_1A_n < B_1B_n$ .*

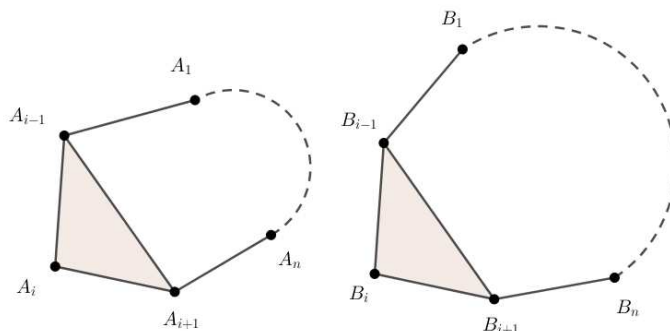
*Dokaz.* Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po  $n$ .

**Baza indukcije** Za  $n = 3$  znamo da tvrdnja vrijedi prema Propoziciji 24 iz 1. knjige Euklidovih *Elementa* (I.24). Drugačije to vidimo direktno iz kosinusa teorema u trokutu.

**Pretpostavka indukcije** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj  $n-1$ .

**I. slučaj** Neka je  $n \geq 4$  i  $\angle A_i = \angle B_i$ , za neki  $i$ . Tada je trokut  $A_{i-1}A_iA_{i+1}$  sukladan trokutu  $B_{i-1}B_iB_{i+1}$ , prema S-K-S poučku o sukladnosti trokuta pa je  $A_{i-1}A_{i+1} = B_{i-1}B_{i+1}$ . Sada možemo izostaviti vrhove  $A_i$  i  $B_i$  jer ćemo i nakon toga imati zadovoljene sve pret-

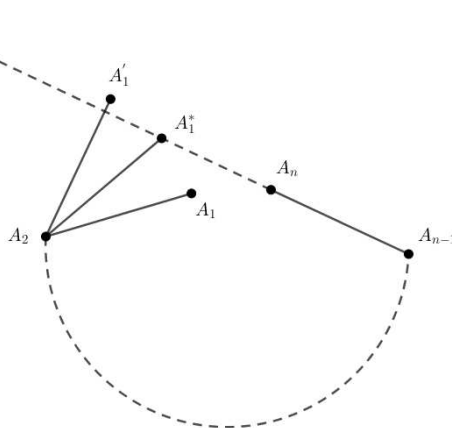
postavke leme. Mnogokuti tada imaju  $n - 1$  vrhova pa koristeći induktivnu pretpostavku zaključujemo  $A_1A_n < B_1B_n$ .



**2. slučaj** Pretpostavimo  $n \geq 4$  i  $\angle A_i < \angle B_i$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ . Označimo točku  $A'_1$  tako da  $A_1A_2 = A'_1A_2$  i  $\angle A'_1A_2A_3 = \angle B_2$ . Prvo usporedimo  $A_1 \cdots A_n$  sa  $A'_1A_2 \cdots A_n$ . Vidimo da je  $\angle A_3 = \angle A_3$  pa koristeći Slučaj 1 zaključujemo  $A_1A_n < A'_1A_n$ . Potom usporedimo  $A'_1A_2 \cdots A_n$  i  $B_1 \cdots B_n$ , pa iz  $\angle A_2 = \angle B_2$  slijedi  $A'_1A_n < B_1B_n$ , opet zbog Slučaja 1. Sada zbog tranzitivnosti vrijedi  $A_1A_n < B_1B_n$ , što smo i željeli pokazati.

**3. slučaj** Može se dogoditi da novi mnogokut  $A'_1A_2 \cdots A_n$  nije konveksan pa ne možemo iskoristiti raniji slučaj. Tada sigurno postoji točka  $A_1^*$  koja se dobiva između  $A_1$  i  $A'_1$ , a takva da su  $A_1^*, A_{n-1}, A_n$  kolinearne i  $A_1^*A_2 = A_1A_2$ . Usporedimo  $A_1 \cdots A_n$  i  $A_1^*A_2 \cdots A_n$  pa vrijedi  $A_1A_n < A_1^*A_n$ . Dalje usporedimo  $A_1^*A_2 \cdots A_{n-1}$  i  $B_1B_2 \cdots B_{n-1}$ , odakle slijedi  $A_1^*A_{n-1} < B_1B_{n-1}$  zbog pretpostavke indukcije. Zbog kolinearnosti vrijedi i  $A_1^*A_n = A_1^*A_{n-1} - A_{n-1}A_n$ . Uzimajući sve u obzir dobivamo

$$\begin{aligned} A_1A_n &< A_1^*A_n \\ &= A_1^*A_{n-1} - A_{n-1}A_n \\ &< B_1B_{n-1} - B_{n-1}B_n \\ &\leq B_1B_n \end{aligned}$$

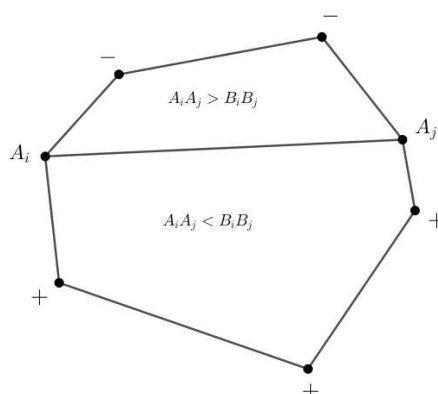


□

Zapravo nam za Cauchyjev teorem nije potrebna prethodna lema za ravninske mnogokute, već analogna tvrdnja za sferne mnogokute koju dokazujemo potpuno analogno prethodnom dokazu koristeći pri tome kosinusev teorem za stranice sfernog trokuta, tj. Teorem 2.4.

**Lema 3.6.** *Neka su  $A_1 \dots A_n$  i  $B_1 \dots B_n$  dva konveksna mnogokuta u ravnini ili na sferi s jednakim odgovarajućim stranicama  $A_i A_{i+1} = B_i B_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$  (interpretiramo  $n + 1 = 1$ ). Za svaki  $i$  označimo vrh  $A_i$  s + ako je  $\angle A_i < \angle B_i$ , s – ako je  $\angle A_i > \angle B_i$  te bez oznake ako su kutovi jednaki. Tada će svi odgovarajući kutovi biti jednaki ili će se dok obilazimo prvi mnogokut predznak promijeniti bar četiri puta, ignorirajući neoznačene vrhove.*

*Dokaz.* Par je broj promjena predznaka pa ako bi ih bilo manje od četiri, a više od 0, jedina mogućnost su točno dvije promjene. U tom slučaju možemo povući dijagonalu  $A_i A_j$  i time razdvajamo mnogokut na dva manja konveksna mnogokuta, od kojih jedan sadrži samo – predznake, a drugi samo + predznake. Možemo primijeniti prethodnu Lemu 3.5 pa za – mnogokut vrijedi  $A_i A_j > B_i B_j$ , a za + mnogokut imamo  $A_i A_j < B_i B_j$ . To je očito kontradikcija te zaključujemo da samo dvije promjene predznaka nisu moguće. Za konveksne mnogokute na sferi iskoristimo spomenuti analogon prethodne leme te dolazimo do istog zaključka.



□

**Teorem 3.7 (Cauchyjev teorem o krutosti).** *Pretpostavimo da su dana dva konveksna poliedra i bijekcija  $\varphi$  koja skup strana jednog poliedra preslikava u skup strana drugog, tako da su odgovarajuće strane sukladne i jednako raspoređene. Tada su ta dva poliedra sukladni.*

*Dokaz.* Svaki brid prvog poliedra označimo s +, – ili bez oznake, ovisno o tome je li pripadni diedralni kut manji, veći ili jednak odgovarajućem diedralnom kutu drugog poliedra. Potom kod svakog vrha presiječemo poliedar s malom sferom. Nastaje konveksni sferni mnogokut, a njegovi vrhovi nasljeđuju oznake bridova poliedra + ili –. One sada predstavljaju manji ili veći kut sfernog mnogokuta prvog poliedra nasuprot odgovarajućem kutu sfernog mnogokuta drugog poliedra. Prema Lemi 3.6, ako sada kod svakog vrha poliedra obidemo predznake njemu incidentnih bridova, ili će svi biti neoznačeni ili ćemo naići na bar 4 promjene predznaka. Do kontradikcije ćemo doći brojeći promjene predznaka na dva načina.

**1. slučaj** Pretpostavimo da su svi bridovi označeni s + ili –, a s  $t$  označimo ukupan broj promjena predznaka bridova oko svih vrhova poliedra. Prema Lemi 3.6, mora vrijediti  $t \geq 4v$ , gdje je  $v$  broj vrhova poliedra. Prebrojavanje možemo provesti i po stranama poliedra. Trokutasta strana može pridonijeti najviše dvije promjene predznaka svojim trima vrhovima, jer dvije njene susjedne stranice moraju imati isti predznak. Slično zaključujemo da  $n$ -terokutna strana može pridonijeti najviše  $n$  promjena predznaka svojim vrhovima ako je  $n$  paran, odnosno  $n - 1$  ako je  $n$  neparan. Slijedi

$$t \leq 2f_3 + \sum_{n \geq 4} n f_n,$$

gdje je  $f_n$  broj  $n$ -terokutnih strana. Dvije dobivene nejednakosti zajedno daju

$$4v \leq 2f_3 + \sum_{n \geq 4} n f_n.$$

Sada možemo iskoristiti Eulerov teorem 3.1 za dobivanje kontradikcije. U jednakost  $v = e - f + 2$  stavimo  $e = \frac{1}{2} \sum n f_n$  i  $f = \sum f_n$ . To nam daje

$$2 \sum_{n \geq 3} (n-2)f_n + 8 \leq 2f_3 + \sum_{n \geq 4} n f_n,$$

$$2 \sum_{n \geq 4} (n-2)f_n - \sum_{n \geq 4} n f_n + 8 = \sum_{n \geq 4} (n-4)f_n + 8 \leq 0,$$

što je nemoguće jer su svi pribrojnici u sumi nenegativni.

**2. slučaj** Pretpostavimo da su neki bridovi označeni, a neki ne. Ovdje ćemo promatrati samo označene bridove i vrhove, takozvanu *mrežu*. Vrhovi mreže jesu vrhovi poliedra incidentni s bar jednim označenim bridom. Bridovi mreže su označeni bridovi poliedra. *Strana mreže* je bilo koja maksimalna unija strana poliedra koje nisu odvojene bridovima mreže. To više nije ravninski mnogokut, već ploha omeđena bridovima mreže.

Provodimo isti dokaz kao u 1. slučaju, ali na mreži. Označimo broj njenih vrhova s  $v'$ , bridova s  $e'$  i strana s  $f'$ . Postupak je potpuno isti, jedino moramo paziti da mreža možda uopće nije poliedar pa ne možemo primijeniti Eulerov teorem. Zato možemo primijeniti njegov dokaz na mreži, uz mogućnost da njena ravninska realizacija možda neće biti povezana. Zbog toga na kraju dokaza može ostati više od jedne točke pa vrijedi  $v' - e' + f' \geq 2$ . S tom nejednakosti i dalje stoji argument nenegativnosti, korišten na kraju 1. slučaja, pa opet dođemo do kontradikcije.

U jedinom preostalom slučaju su svi bridovi neoznačeni pa su svi diedralni kutovi jednaki, a time su i poliedri sukladni.  $\square$

### 3.3 Deltaedri

Sve konveksne poliedre koji za strane imaju samo jednakostranične trokute klasificirat ćemo koristeći baš dva glavna teorema ovog poglavlja. Takve poliedre zovemo *deltaedri*.

**Teorem 3.8.** *Postoji točno 8 konveksnih poliedara čije su sve strane jednakostranični trokuti.*

*Dokaz.* Iz Propozicije 2.3 znamo da pri svakom vrhu možemo imati samo 3, 4 ili 5 jednakostraničnih trokuta. Odgovarajući defekti pri tim vrhovima su onda  $\pi$ ,  $\frac{2\pi}{3}$  ili  $\frac{\pi}{3}$ . Označimo sada sa  $a, b, c$  broj vrhova u kojima se sastaje 3,4,5 trokuta, tim redom. Tada su  $a, b$  i  $c$  nenegativni cijeli brojevi, a prema Korolaru 3.3 imamo

$$\pi a + \frac{2\pi}{3} b + \frac{\pi}{3} c = 4\pi,$$

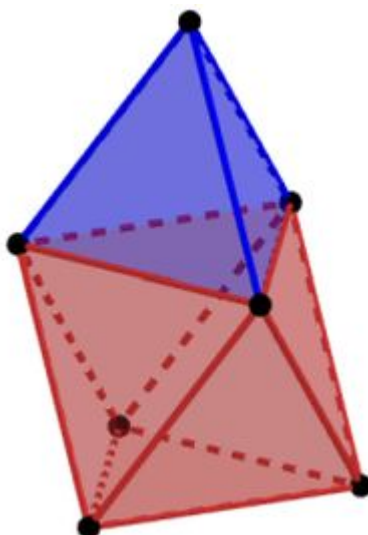
odnosno

$$a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c = 4.$$

Ova jednadžba ima konačan broj rješenja u skupu nenegativnih cijelih brojeva. Zato ćemo ispitati egzistenciju poliedara koji odgovaraju mogućim rješenjima te dobiti potpunu klasifikaciju.

Već od prije znamo da postoje **tetraedar**, **oktaedar** i **ikosaedar**. Dalje, pokažimo da neke kombinacije  $a, b, c$  uopće nisu moguće u konstrukciji takvog poliedra.

Prvo tvrdimo da ne možemo imati vrh s 3 strane susjedan vrhu s 5 strana. Lema 2.6 nam kaže da su diedralni kutovi pri vrhu s 3 strane jedinstveno određeni te su to zapravo diedralni kutovi tetraedra. Zato možemo zamisliti tetraedar položen na jednu stranu oktaedra.



Tada su spojni vrhovi upravo vrhovi s 5 strana, ali se tri strane oktaedra nalaze u istim ravninama kao i strane tetraedra pa poliedar nije konveksan u strogom smislu konveksnosti (da nikoje dvije strane ne leže u istoj ravnini). Ako pak jednu od pet strana oko odgovarajućeg vrha poliedra pogurnemo prema unutra tako da uklonimo navedenu komplanarnost, onda će se druga strana uz taj vrh izbočiti i poliedar neće biti konveksan.

Posljedično, ako je  $a > 0$ , to znači da postoji bar jedan vrh s tri trokuta, a budući da mu nijedan od 3 susjedna vrha ne smije biti vrh s 5 trokuta tada vrijedi  $a + b \geq 4$ . Analogno zaključujemo ako je  $c > 0$ , onda  $b + c \geq 6$ . U idućoj tablici, gdje su prikazane sve moguće kombinacije  $a, b$  i  $c$ , zbog ovog argumenta otpadaju svi slučajevi označeni s (1).

Iduće pretpostavimo da postoji samo jedan 3-vrh. Tada njegova tri susjedna vrha moraju biti 4-vrhovi zbog prijašnjeg argumenta te se potom poliedar zatvara još jednim 3-vrhom. Ovaj poliedar sastavljen od 6 jednakostraničnih trokuta smo već spomenuli, a zove

$a$	$b$	$c$	Ime ili oznaka	$v$	$e$	$f$
4	0	0	tetraedar	4	6	4
3	1	1	(1)			
3	0	3	(1)			
2	3	0	trokutasta bipiramida	5	9	6
2	2	2	(1)			
2	1	4	(1)			
2	0	6	(1)			
1	4	1	(2)			
1	3	3	(2)			
1	2	5	(2)			
1	1	7	(2)			
1	0	9	(2)			
0	6	0	oktaedar	6	12	8
0	5	2	peterokutna bipiramida	7	15	10
0	4	4	skošeni disfenoid	8	18	12
0	3	6	triaugmentirana trokutasta prizma	9	21	14
0	2	8	biaugmentirana četvrtasta antiprizma	10	24	16
0	1	10	(3)			
0	0	12	ikosaedar	12	30	20

Tablica 3.1: Konveksni poliedri čije su sve strane jednakostranični trokuti

se **trokutasta bipiramida**. Odmah smo pokazali nemogućnost slučaja kod kojih je  $a = 1$ , u tablici označeni oznakom (2).

Poliedar za  $(a, b, c) = (0, 5, 2)$  dobijemo tako da dvije pravilne peterostrane piramide zalijepimo duž njihovih baza, a zove se **peterokutna bipiramida**.

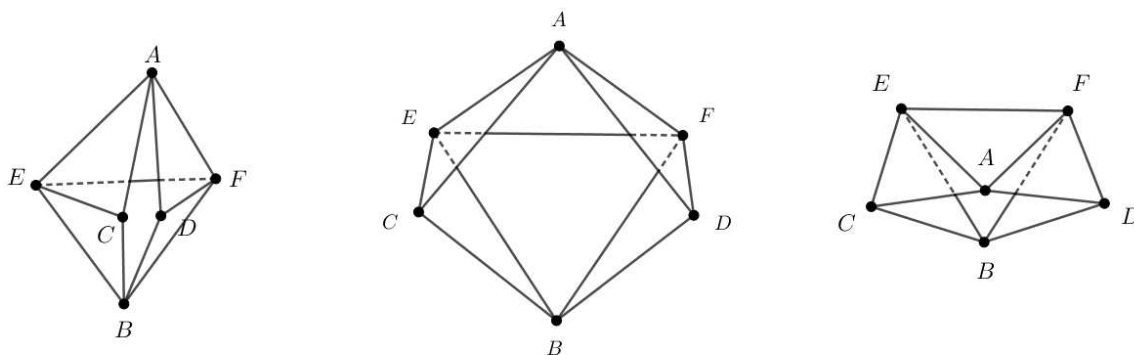
Poliedar za  $(a, b, c) = (0, 3, 6)$  se zove **triaugmentirana trokutasta prizma**, a konstruiramo ju na sljedeći način. Krenemo od pravilne trostrane prizme (dva jednakostranična trokuta u paralelnim ravninama, spojena s tri kvadrata) te na svaki kvadrat pobočja prizme položimo pravilnu četverostranu piramidu.

Poliedar za  $(a, b, c) = (0, 2, 8)$  zovemo **biaugmentirana četvrtasta antiprizma**. Četvrtasta antiprizma se sastoji od dva kvadrata u paralelnim ravninama, koji su prvo bili poravnati, a onda smo jednoga zarotirali oko zajedničke osi za  $45^\circ$  i potom oba spojili pomoću 8 jednakostraničnih trokuta. Preostaje nam samo na kvadrata koji čine baze položiti pra-

vilne četverostrane piramide.

Nadalje, pokažimo da ne postoji traženi poliedar s kombinacijom  $(a, b, c) = (0, 1, 10)$ . Poliedar sadrži samo jedan 4-vrh pa krenimo od njega. Njemu susjedna četiri vrha moraju biti 5-vrhovi pa se poliedar dalje formira u obliku prethodnog  $(0, 2, 8)$  te time neizbježno nastaje drugi 4-vrh. U tablici s (3) označavamo ovaj slučaj.

Zadnja nam preostaje kombinacija  $(a, b, c) = (0, 4, 4)$  i uvjerit ćemo se da postoji takav konveksni poliedar. Zovemo ga **skošeni disfenoid** ili **trokutasti dodekaedar** ili **sijamski dodekaedar**. Započinjemo s trokutastom bipiramidom, tako da ju rastvorimo duž dva brida, od gornjeg vrha  $A$  do donjeg vrha  $B$ . Sada zamislimo da guramo  $A$  i  $B$  jedan prema drugome, pri čemu se rascijepljeni vrh razdvaja u vrhovima  $C$  i  $D$ , a duljina  $EF$  ostaje fiksna. Kako se  $AB$  smanjuje, a  $CD$  povećava, zasigurno će u nekom trenutku te dvije duljine biti jednake (Bolzanov teorem), pa su onda jednaki i svi kutovi neravninskog četverokuta  $ACBD$ .



Slika 3.1: Formiranje skošenog disfenoida

Stvorimo još jednu takvu plohu, ali vrhove koje smo na prvoj plohi označili s  $A$  i  $B$  sada označimo s  $C$  i  $D$  te obrnuto. Spajanjem dviju ploha duž  $ACBD$  dobivamo traženi poliedar.

Svi navedeni poliedri osim skošenog disfenoida mogu se konstruirati koristeći samo ravnalo i šestar, pri čemu te instrumente koristimo u proizvoljnim ravninama. Kod njega se konstruktivna zadaća svodi na konstrukciju korijena ireducibilnog kubnog polinoma s cjelobrojnim koeficijentima, što nije moguće samo ravnalom i šestarom [10].

Za svaki ukupan broj strana poliedra postoji samo jedna moguća trojka  $(a, b, c)$  koja određuje raspored strana, pa smo time pokazali jedinstvenost, do na izometrije, prema Cauchyjevom teoremu 3.7.  $\square$



Sada napokon možemo odgovoriti i jesu li poliedri konstruirani u 2.2 jedini konveksni poliedri koji zadovoljavaju Euklidove definicije Platonovih tijela. Ovdje praktički umjesto zahtjeva (c) u Teoremu 2.5, da se u svakom vrhu sastaje jednak broj strana, imamo dan samo ukupan broj strana. Za tetraedar je očito, a za kocku i dodekaedar jedinstvenost slijedi iz Teorema 2.5 jer se u svakom vrhu sastaju 3 strane, prema Propoziciji 2.3. Za oktaedar i ikosaedar nije bilo očito sve do sad, jer je postojala mogućnost više rasporeda jednakostraničnih trokuta s različitim brojem njih pri različitim vrhovima. Pokazavši njihovu jedinstvenost, opravdane su Euklidove definicije i za oktaedar i ikosaedar.

## Poglavlje 4

# Uniformni i neuniformni poliedri pravilnih strana

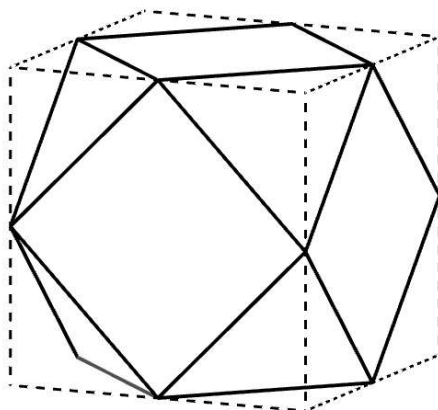
Nakon što smo proučili pravilne poliedre i poliedre čije su sve strane jednakostranični trokuti, pitamo se koji konveksni poliedri omeđeni pravilnim mnogokutima još postoje. Sve zajedno ih nazivamo **poliedri pravilnih strana**, a njima pripadaju i **polupravilni poliedri**.

### 4.1 Polupravilni poliedri

Polupravilni poliedri su uniformni poliedri pravilnih strana. Uniformni u smislu da se u svakom vrhu sastaje jednak broj strana iste vrste, u istom kružnom poretku. Zato ih možemo jednostavno opisati s danim rasporedom strana pri jednom vrhu. Tako će uređena  $k$ -torka  $(a_1, \dots, a_k)$  opisivati vrh u kojem se redom sastaju pravilni  $a_1$ -terokut, pravilni  $a_2$ -terokut, ..., pravilni  $a_k$ -terokut. Kako ćemo vidjeti, polupravilne poliedre čine *pravilni poliedri*, *pravilne prizme*, *pravilne antiprizme* te **Arhimedova tijela**.

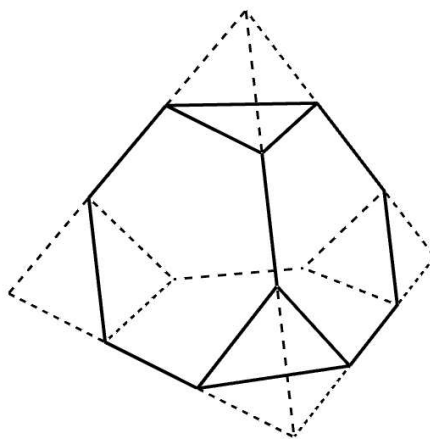
Trojka  $(3, 3, 3)$  označava tri jednakostranična trokuta pri svakom vrhu, što je zapravo tetraedar.

Oznaka  $(3, 4, 3, 4)$  opisuje poliedar kojem se u svakom vrhu sastaju dva jednakostranična trokuta i dva kvadrata, međusobno alternirajući u kružnom rasporedu oko vrha. Primjer takvog poliedra jest **kuboktaedar**. Možemo ga konstruirati tako da uzmemo kocku i na svakoj njenoj strani spojimo polovišta susjednih bridova. Nakon što odstranimo vrhove kocke duž novonastalih dužina, dobiveni poliedar se sastoji od 6 kvadrata i 8 jednakostraničnih trokuta, s  $(3, 4, 3, 4)$  rasporedom pri svakom vrhu.



Slika 4.1: Konstrukcija kuboktaedra pomoću kocke

**Krnji tetraedar** također nastaje odsijecanjem iz pravilnog poliedra. Uzmemo tetraedar i na svakoj njegovoj strani spojimo odgovarajuće točke koje označavaju trećine bridova, tako da spajanjem nastane pravilni šesterokut. Nakon što odstranimo vrhove tetraedra duž novonastalih dužina, dobiveni poliedar se sastoji od 4 pravilna šesterokuta i 4 jednakos-tranična trokuta, s (3, 6, 6) rasporedom pri svakom vrhu.



Slika 4.2: Konstrukcija krnjeg tetraedra pomoću tetraedra

Oznaka za  $n$ -stranu prizmu je  $(4, 4, n)$ , a ukoliko je  $n = 4$ , radi se o kocki. Nastaje tako da dva sukladna pravilna mnogokuta ( $n \geq 3$ ), poravnata u paralelnim ravninama, spojimo kvadratima.

Prije smo objasnili kako nastaje četvrtasta antiprizma, a isto vrijedi i za  $n$ -stranu antiprizmu. Počinjemo od dva sukladna pravilna  $n$ -terokuta, poravnata u paralelnim ravni-

nama, jednoga rotiramo oko zajedničke osi za  $\pi/n$  i zatim oba spojimo jednakostraničnim trokutima (visinu antiprizme namjestimo kako nam je potrebno). Za  $n = 3$  riječ je o oktaedru.

Idućim teoremom ćemo pokazati da osim prizmi i antiprizmi, kojih ima beskonačno mnogo, te pravilnih poliedara, postoji još samo konačno mnogo polupravilnih poliedara. Riječ je upravo o Arhimedovim tijelima.

**Teorem 4.1 (Arhimed).** *Pored pet Platonovih tijela i dvije beskonačne familije prizmi i antiprizmi, preostaje još samo 13 ostalih polupravilnih poliedara.*

*Dokaz.* Promatramo konveksne poliedre, pa zbroj kutova strana pri vrhu mora biti manji od  $2\pi$ . Kut strane pravilnog  $n$ -terokuta iznosi  $\frac{(n-2)\pi}{n}$ , pa pri vrhu  $(a_1, \dots, a_k)$  vrijedi

$$\sum_{i=1}^k \frac{a_i - 2}{a_i} \pi < 2\pi$$

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{2}{a_i}\right) < 2$$

i konačno

$$k - 2 < \sum_{i=1}^k \frac{2}{a_i}. \quad (4.1)$$

Promatramo moguće slučajeve, uz posljednju nejednakost kao uvjet.

**1. slučaj** U svakom se vrhu sastaju 3 strane  $(a, b, c)$ . Tada nejednakost izgleda ovako

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2}. \quad (4.2)$$

Ako su  $a, b, c$  jednaki, onda je  $a = 3, 4$  ili  $5$ . To, naravno, odgovara pravilnim poliedrima.

Ukoliko imamo bar dva različita parametra, na primjer  $a \neq b$ , prolazeći po rubovima  $c$ -strane jasno je da susjedne strane moraju alternirati između  $a$  i  $b$  pa slijedi da je  $c$  paran broj. Taj uvjet, zajedno s nejednakosti (4.2), daje sedam uređenih trojki iz Tablice 4.1 te prizme  $(4, 4, n)$ .

**2. slučaj** U svakom se vrhu sastaju 4 strane  $(a, b, c, d)$ . Tada nejednakost izgleda ovako

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} > 1. \quad (4.3)$$

Neka je  $a = 3$  pa razmotrimo što se događa oko tog trokuta. Pri svakom njegovom vrhu  $b$  i  $d$  moraju biti susjedne strane, dijeleći brid s trokutom. Dobiva se da je  $b = d$  pa nam taj

uvjet uz nejednakost (4.3) daje uređene četvorke u Tablici 4.1, ali i oktaedar (3, 3, 3, 3) te  $n$ -stranu antiprizmu (3, 3, 3,  $n$ ).

**3. slučaj** U svakom se vrhu sastaje 5 strana. Pripadna nejednakost je onda

$$\sum_{i=1}^5 \frac{2}{a_i} > 3,$$

što će nam dati dvije petorke prikazane u Tablici 4.1 i ikosaedar (3, 3, 3, 3, 3).

Raspored strana pri vrhu	Ime	$v$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	Ostali $f_n$
(3, 6, 6)	krnji tetraedar	12	4			$f_6 = 4$
(4, 6, 6)	krnji oktaedar	24		6		$f_6 = 8$
(5, 6, 6)	krnji ikosaedar	60			12	$f_6 = 20$
(3, 8, 8)	krnja kocka	24	8			$f_8 = 6$
(3, 10, 10)	krnji dodekaedar	60	20			$f_{10} = 12$
(4, 6, 8)	krnji kuboktaedar	48		12		$f_6 = 8, f_8 = 6$
(4, 6, 10)	krnji ikosadodekaedar	120		30		$f_6 = 20, f_{10} = 12$
(3, 4, 3, 4)	kuboktaedar	12	8	6		
(3, 5, 3, 5)	ikosadodekaedar	30	20		12	
(3, 4, 4, 4)	rombokuboktaedar	24	8	18		
(3, 4, 5, 4)	rombikosadodekaedar	60	20	30	12	
(3, 3, 3, 3, 4)	skošena kocka	24	32	6		
(3, 3, 3, 3, 5)	skošeni dodekaedar	60	80		12	

Tablica 4.1: Arhimedova tijela

Ostalo nam je pokazati da ne možemo imati šest ili više strana pri vrhovima. Mora vrijediti (4.1) i  $a_i \geq 3$ , tj.  $\frac{2}{3} \geq \frac{2}{a_i}$  za svaki  $i$ , pa je

$$k - 2 < \sum_{i=1}^k \frac{2}{a_i} \leq \sum_{i=1}^k \frac{2}{3} = \frac{2}{3}k$$

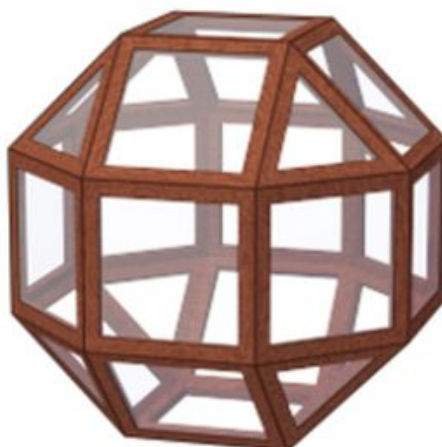
$$k < 6$$

Jednom kada imamo raspored strana pri vrhovima, jedinstveno je određen cjelokupni raspored poliedra (uz jednu iznimku) pa jedinstvenost slijedi iz Cauchyjevog teorema 3.7.

Što se tiče egzistencije, svi poliedri iz tablice se mogu konstruirati ravnalom i šestarom, osim posljednja dva. Skošena kocka i skošeni dodekaedar su također jedini koji se ne mogu jednostavnim operacijama konstruirati iz pravilnih poliedara.  $\square$

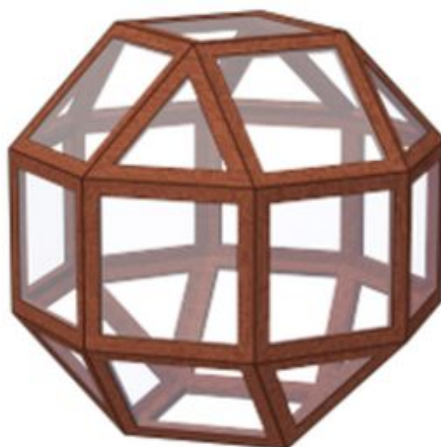
Razjasnimo sada na koju smo iznimku mislili dok smo raspravljali o jedinstvenosti. Naime, **rombokuboktaedar** smatramo posebnim slučajem. Njega možemo konstruirati na sljedeći način.

U sredini kockinih strana nacrtajmo kvadrate čije su stranice paralelne bridovima kocke. Bridove uklonimo, a zatim kvadratima spojimo kvadrate susjednih strana. Prije toga smo odabrali odgovarajuću duljinu stranice kvadrata koji se nalaze na kocki. Jednakokranični trokuti su se smjestili gdje su bili prostorni kutovi kocke, a dobiveni rombokuboktaedar možemo shvatiti kao osmostranu prizmu s dvije kalote (kapice). Dio rombokuboktaedra koji se sastoji od jednog kvadrata te njemu susjednih četiri kvadrata i četiri trokuta smatramo njegovom kalotom.



Slika 4.3: Rombokuboktaedar

Ako rotiramo, na primjer, gornju kalotu rombokuboktaedra za  $45^\circ$  dobit ćemo još jedan polupravilni poliedar s istom oznakom za raspored strana (3, 4, 4, 4). Ta dva poliedra nisu sukladna, a novonastalog zovemo pseudorombokuboktaedar ili Aškinuze-Bilinski poliedar.



Slika 4.4: Pseudorombokuboktaedar

Važno je spomenuti kako je hrvatski matematičar Stanko Bilinski (1909.-1998.) prvi otkrio pseudorombokuboktaedar. Međutim, danas se njegovo otkriće ipak pripisuje drugom matematičaru.

“Svakako valja istaći da iz rezultata u ovoj disertaciji izlazi da postoji svega 14 polupravnih (Arhimedovih) poliedara. Nažalost, S. Bilinski je mislio da je to već davno poznati rezultat i nije ga jasno istakao. Stoga se danas postojanje četrnaestog Arhimedovog poliedra nepravedno pripisuje sovjetskom matematičaru V. G. Aškinuzeu. L. A. Ljusternik u svojoj monografiji piše: ‘Značajno je da je u teoriji polupravnih poliedara više od 2000 godina postojao defekt kojeg je tek nedavno uočio sovjetski matematičar V. G. Aškinuze, tj. da postoji četrnaesti polupravilni poliedar, koji se razlikuje od rombokuboktaedra samo time da mu je gornji dio koji se sastoji od 5 kvadrata i 4 jednakostranična trokuta zaokrenut za  $\pi/4$ . Upravo to je i bio razlog da se ta dva polupravilna poliedra geometrijski nisu razlikovali.’”

S. Bilinski je očito dakle bio prvi, koji je našao četrnaesti polupravilni poliedar i ne samo to već je dao i strogi dokaz da su to svi takvi poliedri.” [3]

**Korolar 4.2.** *Polupravilni poliedri imaju sljedeća svojstva:*

- (a) *Diedralni kutovi pri jednom vrhu jednaki su diedralnim kutovima pri bilo kojem drugom vrhu.*
- (b) *Vrhovi leže na sferi.*
- (c) *Osim za pseudorombokuboktaedar, postoji direktna izometrija poliedra koja preslikava jedan vrh u bilo koji drugi vrh, a da pritom poliedar ostane invarijantan.*

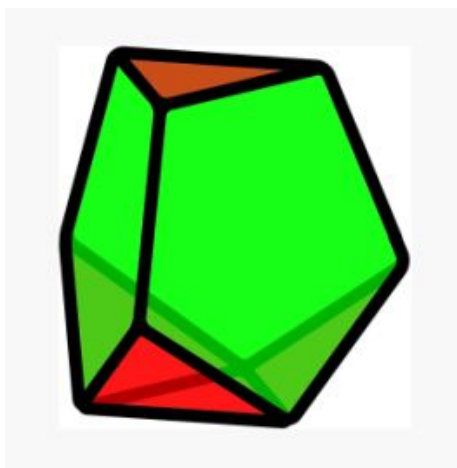
*Dokaz.* Već smo rekli kako je raspored svih strana poliedra jedinstveno određen s oznakom rasporeda strana pri vrhu, i to neovisno od kojeg vrha krenemo. Sukladnost slijedi iz Cauchyjevog teorema 3.7 i povlači (c), koji dalje implicira (a) i (b). Za pseudorombokuboktaedar vrijede (a) i (b), ali ne i (c).  $\square$

## 4.2 Neuniformni poliedri pravilnih strana

Neuniformni poliedri ne moraju imati isti raspored oko svakog vrha, ali su sve strane i dalje pravilni mnogokuti. U dijelu rada gdje smo proučavali konveksne poliedre omeđene jednakostraničnim trokutima već smo se susreli s pet neuniformnih poliedara (onih pet koji nisu pravilni poliedri u Tablici 3.1). Općenito ih možemo lako dobiti rezanjem ili spajanjem poliedara pravilnih strana koje već znamo.

Pogledajmo kako nastaje **umanjeni ikosaedar**. U svakom vrhu ikosaedra se sastaje pet jednakostraničnih trokuta za koje možemo zamisliti da zajedno s pravilnim peterokutom kao bazom tvore pravilnu peterostranu piramidu. Odsijecanjem te piramide od ikosaedra dobivamo umanjeni ikosaedar koji se sastoji od 15 trokuta i jednog peterokuta. Ako njemu dodatno uklonimo piramidu čija je baza paralelna bazi prve uklonjene piramide, nastaje pravilna peterostrana antiprizma.

*Dvostruko umanjeni ikosaedar* nastaje odsijecanjem dvije peterostrane piramide čije su baze susjedne u originalnom ikosaedru. Nakon što uklonimo i treću takvu piramidu, stvoreni poliedar se zove *trostruko umanjeni ikosaedar*, a omeđen je s 3 peterokuta i 5 trokuta. Zapravo se radi o elementarnom poliedru pravilnih strana, jer je minimalan u tom smislu da se ne može dalje rastavljati kao unija poliedara pravilnih strana.



Slika 4.5: Trostruko umanjeni ikosaedar



Ako na jednu ili dvije nasuprotne strane kocke zalijepimo pravilne četverostrane piramide, opet dobivamo neuniformni poliedar pravilnih strana. Još dva nastaju tako da, na primjer, uklonimo srednji dio rombokuboktaedra te spojimo gornju i donju kalotu, na dva moguća načina.

Uočavamo kako bi moglo postojati mnogo neuniformnih poliedara pravilnih strana, a prema Johnsonovoj klasifikaciji ima ih čak 91. Idućim teoremom ćemo pokazati da ih postoji samo konačno mnogo.

**Teorem 4.3.** *Postoji konačno mnogo neuniformnih konveksnih poliedara pravilnih strana, do na sukladnost, nakon što fiksiramo duljinu brida.*

*Dokaz.* Glavna ideja dokaza je pokazati da za dovoljno veliki  $n$ , svaki konveksni poliedar pravilnih strana koji sadrži  $n$ -stranu mora biti prizma ili antiprizma, a oni su kao što znamo uniformni. To nam implicira da neuniformni poliedar može biti sastavljen od samo konačno mnogo vrsta strana. Prema Korolaru 3.3, svaki vrh ima pozitivni defekt pa je broj odabira rasporeda strana pri vrhovima konačan, tako da zbroj svih defekata bude jednak  $4\pi$ . Tada je konačan i broj načina na koje možemo te vrhove organizirati tako da tvore poliedar, te su svaka dva poliedra s istim rasporedom sukladna, prema Cauchy teoremu 3.7. Za dokaz teorema nam zato treba samo dokaz iduće leme.  $\square$

**Lema 4.4.** *Postoji  $n_0$  za koji je svaki konveksni poliedar pravilnih strana, koji sadrži stranu s  $n \geq n_0$  stranica, ili prizma ili antiprizma.*

*Dokaz.* Lemu ćemo zbog jednostavnosti dokazati za  $n_0 = 42$ , iako ona vrijedi već za  $n_0 = 11$ . Promotrimo što se događa pri vrhu  $n$ -terokuta. Za početak pretpostavimo da se radi o 3-vrhu  $(a, b, n)$ . Iz dokaza Teorema 4.1 znamo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}.$$

Također, kako bi pri tom vrhu strane tvorile trodimenzionalnu figuru, zbroj kutova strana  $a$  i  $b$  mora biti veći od kuta strane  $n$ . To nam daje

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2},$$

odnosno kada obje nejednakosti uzmemo u obzir

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| < \frac{1}{n}.$$

Minimalna vrijednost izraza s lijeve strane (veća od 0), za  $a, b \geq 3$ , jest  $\frac{1}{42}$ . Ako uzmemo da je  $n \geq 42$ , tada mora vrijediti

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{2} \\ 2a + 2b - ab &= 0 \\ ab - 2a - 2b + 4 &= 4 \\ (a - 2)(b - 2) &= 4\end{aligned}$$

pa je  $(a, b) = (3, 6)$  ili  $(4, 4)$ . Pokazali smo da su, za  $n \geq 42$ , jedini mogući rasporedi pri 3-*vrhu*  $n$ -terokuta  $(3, 6, n)$  i  $(4, 4, n)$ .

Za  $n \geq 6$  nije moguć 5-*vrh*  $n$ -terokuta. To proizlazi iz nejednakosti iz 3. slučaja dokaza Teorema 4.1

$$\sum_{i=1}^5 \frac{2}{a_i} > 3.$$

Preostaje nam promotriti 4-*vrh*  $(a, b, c, n)$ . Analogno kao i prije, u ovom slučaju dobivamo

$$\left| 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| < \frac{1}{n}.$$

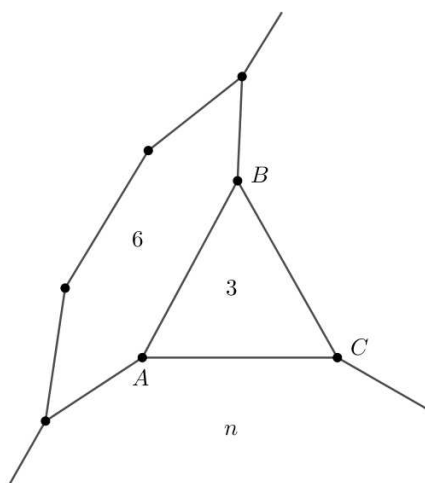
Minimalna vrijednost izraza s lijeve strane (veća od 0), za  $a, b, c \geq 3$ , jest  $\frac{1}{12}$ . Ako uzmemo  $n \geq 12$ , mora vrijediti

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1,$$

odnosno  $a = b = c = 3$ . Jedini mogući raspored pri 4-*vrhu*  $n$ -terokuta, za  $n \geq 12$ , jest  $(3, 3, 3, n)$ .

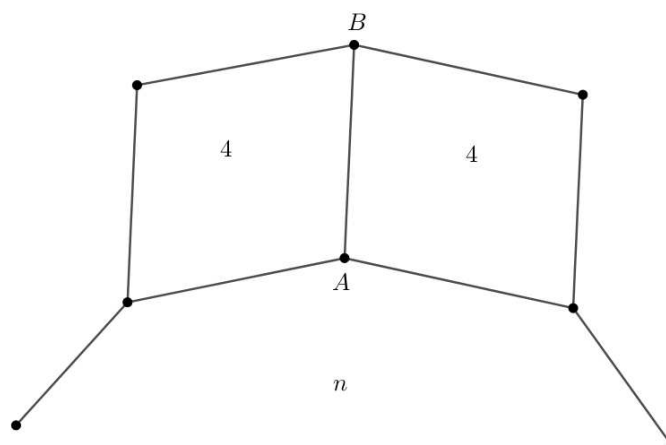
U zadnjem dijelu dokaza moramo pokazati da je, za  $n \geq 42$ , poliedar kojeg sastavimo prizma ili antiprizma.

Vrh  $(3, 6, n)$  označimo s  $A$ , a vrh na drugom kraju 3 – 6 brida s  $B$ . Zbog diedralnog kuta duž tog brida, kut između ostala dva brida koja izlaze iz  $B$  mora biti jednak kutu strane pri vrhu  $A$ , prema Lemi 2.6. Pritom znamo da pri vrhu  $B$  možemo imati samo  $n$ -terokut ili  $(3, 6)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(3, 3, 3)$  za preostale strane. Posljednja tri slučaja odbacujemo jer onda zbroj kutova strana pri vrhu  $B$  iznosi  $2\pi$ , a znamo da defekt vrha mora biti pozitivan. Zaključujemo da je  $n$ -terokut preostala strana pri vrhu  $B$ , a vrh  $C$  je tada ustvari  $(3, n, n)$  vrh, što nije moguće. Sada je jasno da ne možemo imati vrh  $(3, 6, n)$ .



Slika 4.6: Vrh (3,6,n)

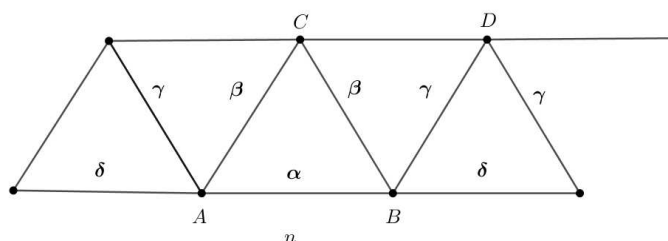
Nadalje, sada označimo vrh  $(4, 4, n)$  s  $A$ , a vrh na drugom kraju  $4 - 4$  brida s  $B$ . Zaključujemo analogno kao i u prethodnom slučaju, kut između ostala dva brida iz  $B$  mora biti jednak odgovarajućem kutu strane pri  $A$ . Kao i prije, zbog defekta nam ostaje  $n$ -terokut kao jedina mogućnost za preostalu stranu pri vrhu  $B$ . Nastali poliedar je upravo  $n$ -strana prizma.



Slika 4.7: Vrh (4,4,n)

I zadnje, neka je  $A$  vrh  $(3, 3, 3, n)$ . Pri susjednom vrhu  $n$ -terokuta je tada bar jedan trokut. Već znamo da slučaj  $(3, 6, n)$  nije moguć pa nam preostaje da susjedni vrh bude

$(3, 3, 3, n)$ , i tako možemo zaključiti za svaki vrh  $n$ -terokuta. Ako fiksiramo diedralni kut  $\alpha$  duž brida  $AB$ , onda su time određeni i svi diedralni kutovi između trokuta, ali i nepoznati kutovi strana pri vrhovima  $C$  i  $D$ . Uočimo kako moguće vrijednosti ovih kutova alterniraju. Ukoliko su kutovi  $\alpha$  i  $\delta$  jednaki, uz oznake kao na Slici 4.8, tada će kutovi strana pri  $C$  i  $D$  biti jednaki onima pri  $A$  i  $B$ . Time je jasno da je preostala strana pri (na primjer) vrhu  $C$  zapravo  $n$ -terokut, pa se radi o antiprizmi. Ako su pak  $\alpha$  i  $\delta$  različiti, jedan kut strane pri  $C$  ili  $D$  će biti veći, a drugi manji od onih pri  $A$  i  $B$ . Možemo pretpostaviti da je onaj pri vrhu  $C$  veći pa je preostala strana tog vrha jedan  $n'$ -terokut, za neki  $n' > n$ . Taj isti  $n'$ -terokut također sadrži i vrh  $D$ , a prema tome kutovi strana pri  $C$  i  $D$  trebaju biti jednaki. Znamo da to nije moguće, dolazimo do kontradikcije i zato odbacujemo ovaj podslučaj.

Slika 4.8: Vrh  $(3,3,3,n)$ 

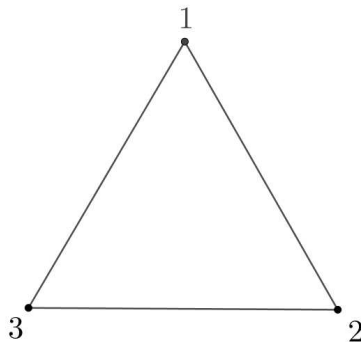
Dokazali smo da je svaki konveksni poliedar pravilnih strana koji sadrži  $n$ -terokut,  $n \geq 42$ , prizma ili antiprizma.  $\square$

## Poglavlje 5

# Grupe simetrija poliedara

Motivirani željom da saznamo više o poliedrima proučavati ćemo njihove simetrije, odnosno grupe tih simetrija. Simetriju neke figure shvaćamo kao preslikavanje kojim ta figura ostaje nepromijenjena. Zapravo ju možemo definirati kao bijektivno preslikavanje figure na samu sebe, uz očuvanje svih udaljenosti i kutova, tj. izometriju. Kompozicija dvije simetrije je simetrija, vrijedi asocijativnost za kompozicije simetrija, identiteta je neutralni element te postoji inverzno preslikavanje svake simetrije i ono je također simetrija. Dakle, skup simetrija neke figure, uz operaciju kompozicije, je grupa. Zovemo ju *grupa simetrija*.

Pogledajmo koje simetrije nalazimo kod jednakostraničnog trokuta. Označimo njegove vrhove brojevima 1, 2, 3.



Rotacija oko središta trokuta, za kut  $\frac{2\pi}{3}$  u smjeru kazaljke na satu, preslikati će trokut u sebe samog. Dakle, našli smo prvu simetriju koja uspostavlja permutaciju vrhova  $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ , što možemo kraće zapisati (123) koristeći zapis permutacije kao ciklus ili produkt ciklusa. Dvostruka primjena takve rotacije opet daje simetriju, a permutacija vrhova je onda (132). Identitu  $e$  ćemo dobiti ako još jednom, treći put, provedemo istu rotaciju. Osnna simetrija s obzirom na os koja prolazi vrhom trokuta i polovištem nasuprotne stranice nam daje drugu vrstu simetrije jednakostraničnog trokuta. Spustimo visinu iz, primjerice,

vrha 1 na polovište stranice 23. Pripadna permutacija vrhova je (23), a osne simetrije s obzirom na ostale dvije osi daju permutacije (12) i (13). Važno je spomenuti kako je simetrija trokuta potpuno određena ako znamo kako djeluje na njegove vrhove. Sve dosad spomenute simetrije zato možemo reprezentirati pripadnim permutacijama

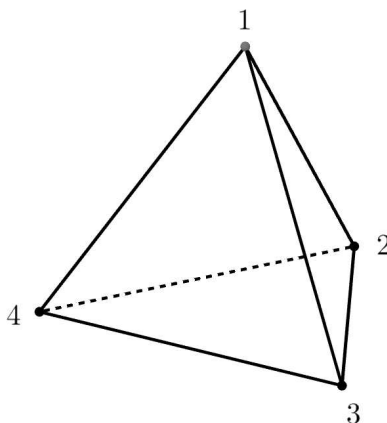
$$e, (123), (132), (12), (13), (23).$$

Primijetimo kako su to zapravo sve moguće permutacije skupa  $\{1, 2, 3\}$ . Zaključujemo da je grupa simetrija jednakostraničnog trokuta *izomorfna* grupi svih permutacija tročlanog skupa. Zovemo ju *simetrična grupa*, a označavamo sa  $S_3$ . U ovom primjeru smo se susreli s tri vrste simetrija. To su identiteta, rotacije i osne simetrije.

S druge strane, grupa simetrija jednakokračnog trokuta se sastoji od samo dvije simetrije – identitete i osne simetrije s obzirom na simetralu osnovice trokuta. Grupa simetrija raznostraničnog trokuta sadrži samo identitetu te takvu grupu zovemo *trivijalna* grupa simetrija.

Grupa simetrija pravilnog  $n$ -terokuta sastoji se od  $2n$  elemenata. Naime, rotacija za kut  $\frac{2\pi}{n}$  oko središta  $n$ -terokuta je generator cikličke podgrupe koja se sastoji od  $n$  elemenata, odnosno identitete te  $n - 1$  rotacija za kutove  $\frac{2\pi k}{n}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ . Zatim imamo i  $n$  osnih simetrija s obzirom na osi koje prolaze jednim vrhom i središtem  $n$ -terokuta. Dakle, ukupno je  $2n$  simetrija. Ovu grupu zovemo *diedralna grupa* pravilnog  $n$ -terokuta i označavamo  $D_n$ .

Razmotrimo sada i simetrije tetraedra s označenim vrhovima 1, 2, 3, 4. Prva vrsta simetrije jest rotacija s obzirom na os. Rotacija tetraedra s obzirom na os koja prolazi, primjerice, vrhom 1 i središtem nasuprotne strane inducira simetriju jednakostraničnog trokuta, dok vrh 1 ostaje fiksiran. Pripadna permutacija vrhova je tada (234), a za dvostruku takvu rotaciju (243). Analogno, možemo promatrati rotaciju s obzirom na os koja prolazi vrhom 2 i središtem nasuprotne strane. Tako dobivamo simetrije s pripadnim permutacijama (134) i (143).



Ako u trodimenzionalnom prostoru prvo rotiramo oko jedne osi, pa potom oko druge osi, jasno je da se radi o nekoj vrsti simetrije, ali ne znamo je li riječ o rotaciji. S obzirom da je simetrija tetraedra potpuno određena svojim djelovanjem na njegove vrhove, svakako možemo izračunati permutaciju nastalu od kompozicije dviju rotacija.

$$(134)(234) = (13)(24).$$

Iz toga vidimo kako se radi o simetriji koja zamjenjuje vrhove 1 i 3 te 2 i 4. Istu simetriju možemo provesti rotacijom za  $\pi$  s obzirom na os koja prolazi polovištima bridova 13 i 24. Dakle, u ovom slučaju kompozicija rotacija oko dvije različite osi zaista jednako djeluje na vrhove tetraedra kao i neka rotacija oko treće osi. Kasnije ćemo se uvjeriti da takva tvrdnja vrijedi i općenito.

Osim rotacija s obzirom na osi, postoji još simetrija tetraedra. Primjerice, zrcaljenje tetraedra u odnosu na ravninu koja sadrži brid 12 te prolazi polovištem brida 34 je simetrija (34), pri čemu su vrhovi 1 i 2 fiksne točke preslikavanja.

Zamislimo da su sve strane poliedra pri nekom vrhu numerirane u smjeru kazaljke na satu. Ukoliko je nakon djelovanja simetrije redosljed strana i dalje u smjeru kazaljke na satu, kažemo da ta simetrija čuva orijentaciju. U suprotnom, kažemo da mijenja orijentaciju. Tako rotacije čuvaju, a zrcaljenja mijenjaju orijentaciju.

Želimo pokazati da je kompozicija dviju rotacija tetraedra opet rotacija pa nas zanima čine li rotacije grupu. Označimo s  $R$  skup rotacija tetraedra u koji smo uključili i identitetu. S  $G_0$  ćemo označiti grupu direktnih izometrija tj. gibanja tetraedra, a ona je sadržana u grupi simetrija tetraedra koje čuvaju orijentaciju  $G_1$ . S druge strane,  $G_1$  je sadržana u grupi  $G$  svih simetrija tetraedra,

$$R \subseteq G_0 \subseteq G_1 \subseteq G.$$

Brojimo elemente skupa  $R$  te pokazujemo da vrijedi  $R = G_0 = G_1$  i  $G_1 < G$ . Za svaki vrh postoje dvije rotacije koje ga ostavljaju fiksnim, a za svaki par nasuprotnih bridova postoji jedna rotacija koja te bridove preslikava u sebe same. Uz identitetu, to je ukupno barem 12 elemenata skupa  $R$ . Svakako je  $G_1 \neq G$  jer imamo i zrcaljenja koja ne čuvaju orijentaciju. Kako su simetrije određene svojim djelovanjem na vrhove, grupa  $G$  je izomorfna podgrupi simetrične grupe  $S_4$ ,

$$R \subseteq G_1 < G \subseteq S_4.$$

Grupa  $R$  ima bar 12 elemenata, a grupa  $S_4$  ima točno 24 elementa. Lagrangeov teorem nam kaže da red podgrupe dijeli red grupe, pa zaključujemo  $R = G_0 = G_1$  i  $G \cong S_4$ . Dokazali smo da je  $R$  grupa te da je  $G$  izomorfna grupi  $S_4$ . Permutacije u  $R$  su tipa (123) ili (12)(34). To su parne permutacije, pa je  $R$  izomorfna alternirajućoj grupi  $A_4$  koja se sastoji od parnih permutacija u  $S_4$ . Tako smo dokazali iduću propoziciju.

**Propozicija 5.1.** *Grupa svih simetrija tetraedra je izomorfna simetričnoj grupi  $S_4$ . Rotacije tetraedra tvore podgrupu reda 12 izomorfnu alternirajućoj grupi  $A_4$ .*

**Propozicija 5.2.** *Kompozicija dviju rotacija poliedra je ponovno rotacija (ili identiteta). Općenitije, bilo koja simetrija poliedra koja čuva orijentaciju je rotacija oko neke osi (ili identiteta).*

*Dokaz.* Rotacije čuvaju orijentaciju pa je dovoljno dokazati samo drugu tvrdnju. Označimo s  $\rho$  simetriju poliedra koja čuva orijentaciju. Pri njoj se težište poliedra  $O$  preslikava u sebe samog pa ćemo njega izabrati za ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava u  $\mathbb{R}^3$ . Nije teško  $\rho$  proširiti do izometrije na čitavom  $\mathbb{R}^3$ . Sada  $\mathbb{R}^3$  promatramo kao vektorski prostor  $V^3(O)$  nad poljem  $\mathbb{R}$ . U prostoru  $V^3$  se zbrajanje izvodi po pravilu paralelograma pa vrijedi  $\rho(v_1 + v_2) = \rho(v_1) + \rho(v_2)$ . Također, vrijedi i  $\rho(\lambda v) = \lambda\rho(v)$ , za svaki  $\lambda \in \mathbb{R}$ . To je dovoljno da zaključimo kako je  $\rho$  linearni operator sa  $\mathbb{R}^3$  u  $\mathbb{R}^3$ . Skalarni produkt  $\langle v, w \rangle$  je definiran sa  $|v| \cdot |w| \cdot \cos \theta$ , gdje je  $\theta$  kut između vektora  $v$  i  $w$ . Već smo spomenuli da je  $\rho$  izometrija, tj. čuva udaljenosti i kutove, pa vrijedi i  $\langle v, w \rangle = \langle \rho(v), \rho(w) \rangle$ . Linearni operatori koji čuvaju skalarni produkt zovu se unitarni operatori. Matrični prikaz unitarnog operatora je ortogonalna matrica. Determinanta bilo koje ortogonalne matrice je  $\pm 1$ . Unitarni operatori reprezentirani matricom determinante 1 čuvaju, dok oni s matricom determinante  $-1$  mijenjaju orijentaciju. Karakteristični polinom od  $\rho$  je polinom 3. stupnja, pa sigurno ima realnu nultočku. Dakle, postoji realna svojstvena vrijednost  $\lambda$  i pridruženi svojstveni vektor  $e$  tako da vrijedi  $\rho(e) = \lambda e$ . Svojstvena vrijednost  $\lambda$  unitarnog operatora  $\rho$  ima apsolutnu vrijednost jednaku 1, što povlači  $\lambda = \pm 1$ . Pretpostavimo najprije da je  $\lambda = 1$ . Onda je  $\rho(e) = e$ . U tom slučaju  $\rho$  ostavlja fiksnim pravac određen vektorom  $e$  jer vrijedi  $\rho(\alpha e) = \alpha\rho(e) = \alpha e$ , pa je  $\rho$  preslikavanje (koje čuva orijentaciju) ravnine okomite na vektor  $e$ . Riječ je o rotaciji u toj ravnini, odnosno rotaciji s obzirom na os određenoj vektorom  $e$ . Također možemo uočiti da  $\rho$  zaista čuva orijentaciju.

Pretpostavimo sada da ne postoji vektor  $e$  za kojeg vrijedi  $\rho(e) = e$ , već samo  $e$  za kojeg je  $\rho(e) = -e$ . Pritom se pravac određen vektorom  $e$  preslikava u sebe samog, a  $\rho$  je na ravnini okomitoj na  $e$  preslikavanje koje mijenja orijentaciju. Zaključujemo da se radi o osnovj simetriji s obzirom na os u toj ravnini, koja sadrži fiksan vektor. Pretpostavka je bila da ne postoji nijedan fiksan vektor te stoga dolazimo do kontradikcije.

Dokazali smo da je  $\rho$  rotacija oko neke osi. □

U nastavku promatramo grupu  $G$  rotacija ikosaedra. Pronaći ćemo red te grupe bez navođenja svih njezinih elemenata koristeći znanje iz teorije grupa. Označimo s  $A$  neki vrh ikosaedra te neka je  $H_A$  podgrupa grupe  $G$  koja sadrži samo rotacije kojima je  $A$  fiksna točka. Podgrupu  $H_A$  zovemo stabilizator vrha  $A$ . Ukoliko  $A$  ostaje fiksna, os te rotacije prolazi kroz  $A$  i njoj nasuprotnu ili antipodalnu točku. Rotacija za kut  $\frac{2\pi}{5}$  oko te osi preslikava ikosaedar u samog sebe i generator je grupe  $H_A$  koja se sastoji od 5 elemenata – rotacije za  $\frac{2\pi k}{5}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Sljedeća nas zanima *orbita* vrha  $A$  pod djelovanjem grupe  $G$  na ikosaedar. Zapravo tražimo skup točaka ikosaedra u koje se  $A$  može preslikati djelovanjem elemenata grupe  $G$ .



Rotacija reda 3 s obzirom na os okomitu na središte strane uz  $A$  šalje  $A$  u neki od njegovih susjednih vrhova. Na taj način možemo svaki vrh poslati u bilo koji njemu susjedni vrh, stoga orbitu vrha  $A$  pod djelovanjem grupe  $G$  čine svih 12 vrhova ikosaedra.

Za svaki vrh  $C$ , skup svih elemenata iz  $G$  koji šalju vrh  $A$  u  $C$  je *lijeva susjedna klasa* podgrupe  $H_A$ , oblika  $gH_A$ , gdje je  $g \in G$  i  $g(A) = C$ . Broj svih susjednih klasa se naziva *indeks* podgrupe. Red grupe  $G$  jednak je umnošku reda podgrupe  $H_A$ , koji iznosi 5, i indeksa te podgrupe koji je jednak broju elemenata orbite vrha  $A$ , odnosno njih 12. Prema tome, red grupe  $G$  je 60.

Sve elemente grupe  $G$  možemo i direktno prebrojiti. Već smo vidjeli da svakom vrhu, zajedno s njegovom antipodalnom točkom, odgovara podgrupa reda 5. Pritom svaka takva podgrupa sadrži identitetu te četiri elementa (rotacije) reda 5. To nam ukupno daje  $4 \cdot \frac{12}{2} = 24$  elementa reda 5.

Za svaki par nasuprotnih strana postoje dvije rotacije reda 3 s obzirom na os koja prolazi njihovim središtima. Stoga, imamo  $2 \cdot \frac{20}{2} = 20$  elemenata reda 3.

Rotacija s obzirom na os koja prolazi polovištima nasuprotnih bridova ima red 2. Takvih rotacija, odnosno elemenata reda 2 ima  $1 \cdot \frac{30}{2} = 15$ .

Kada pribrojimo i identitetu, dobivamo točno  $24 + 20 + 15 + 1 = 60$  elemenata grupe  $G$ .

Proučimo sada podgrupe grupe  $G$  i njihovu povezanost sa stereometrijom ikosaedra. Stabilizator vrha je podgrupa reda 5. Analogno zaključujemo da je stabilizator središta strane reda 3, a stabilizator polovišta brida je reda 2.

Promotrimo os koja prolazi kroz dva nasuprotna vrha ikosaedra. Stabilizator tog pravca se sastoji od stabilizatora jednog vrha, ali i od rotacija koje šalju vrh u njemu antipodalni. To je diedralna grupa  $D_5$ . Slično, stabilizator osi koja prolazi središtima dviju nasuprotnih strana je diedralna grupa  $D_3$ , izomorfna simetričnoj grupi  $S_3$ . Stabilizator osi kroz polovišta dvaju nasuprotnih bridova jest diedralna grupa  $D_2$ .

Dosad nabrojane podgrupe grupe  $G$  su reda 2, 3, 5, 4, 6, 10. Postoje i podgrupe reda 12, ali može se pokazati da neki kardinaliteti podgrupa nisu mogući. Primjerice, pokažimo da ne postoji podgrupa  $H$  reda 15. Ako pretpostavimo da takva podgrupa postoji, tada prema Cayleyevom teoremu mora sadržavati element reda 5, što je rotacija oko vrha  $A$ . Time  $H$  sadrži grupu generiranu tim elementom, odnosno grupu  $H_A$ . Orbite skupa vrhova pod djelovanjem grupe  $H_A$  su zapravo točka  $A$  i njezina antipodalna točka te dvije orbite sastavljene svaka od 5 vrhova. Također, grupa  $H$  mora sadržavati element reda 3, pa orbita vrha  $A$  pod djelovanjem  $H$  sadrži barem 6 elemenata. Red grupe  $H$  je onda barem  $5 \times 6 = 30$ , što je očito kontradikcija.

Normalne podgrupe definiramo pomoću konjugacije. Kažemo da su dva elementa  $a, b \in G$  konjugirana ako postoji  $g \in G$  tako da vrijedi  $b = gag^{-1}$ . Primjerice, ako je  $a$  rotacija oko vrha  $A$ , onda je  $b$  ista vrsta rotacije oko vrha  $B = g(A)$ . Zaista, vidimo da  $g^{-1}$  vraća vrh  $B$  u  $A$ , zatim  $a$  izvrši rotaciju te konačno  $g$  preslika  $A$  u  $B$ . Možemo reći da su

dvije rotacije konjugirane ako su to rotacije za isti kut oko dvije različite osi. Budući se svaka točka ikosaedra može preslikati u sebi antipodalnu točku, svaka je rotacija konjugirana vlastitom inverzu. Stoga su sve rotacije reda 2 konjugirane, kao i reda 3. Rotacije reda 5 svrstavamo u dvije konjugacijske klase. Rotacije za kut  $\pm \frac{2\pi}{5}$  tvore jednu klasu, a drugu klasu čine rotacije za  $\pm \frac{4\pi}{5}$ . Rotacije jedne klase preslikavaju neke strane u susjedne strane, dok rotacije druge klase ne preslikavaju strane u susjedne. Grupu rotacija možemo zato particionirati u konjugacijske klase koje redom imaju 1, 12, 12, 20, 15 elemenata.

**Definicija 5.3.** *Normalna podgrupa grupe  $G$  je podgrupa  $N$  koja je stabilna na konjugaciji, odnosno  $gNg^{-1} = N$ , za svaki  $g \in G$ .*

Ako normalna podgrupa sadrži element  $a$ , tada mora sadržavati i sve konjugate od  $a$ . Jedine normalne podgrupe grupe  $G$  rotacija ikosaedra su trivijalne podgrupe  $\{e\}$  i  $G$ . Zaista, normalna podgrupa  $N$  sadrži identitetu, njezin red dijeli 60 te mora biti unija tog elementa i nekog podskupa skupa konjugacijskih klasa redova 12, 12, 20, 15. Jedini zbrojevi tih brojeva koji dijele 60 jesu upravo 1 i 60. Za  $G$  kažemo i da je *jednostavna* grupa što znači da nema netrivialnih normalnih podgrupa.

Konačno, pokazujemo da je grupa  $G$  izomorfna alternirajućoj grupi na 5 elemenata  $A_5$ . Definirajmo *okvir* ikosaedra kao skup tri međusobno okomite osi koje prolaze polovištima nasuprotnih bridova. Ukupno je pet takvih okvira, a svaka rotacija ikosaedra inducira njihovu permutaciju. Rotacija reda 5 daje permutaciju oblika  $(abcde)$ , rotacija reda 3 permutaciju  $(abc)$  te rotacija reda 2 permutaciju  $(ab)(cd)$ . Radi se o parnim permutacijama tako da postoji homomorfizam između  $G$  i  $A_5$ . On je injektivan, a s obzirom da te dvije grupe imaju isti red i surjektiv. Između grupa smo uspostavili izomorfizam pa su one izomorfne, to jest  $G \cong A_5$ . Pokazali smo sljedeću propoziciju.

**Propozicija 5.4.** *Grupa rotacija ikosaedra je jednostavna grupa reda 60, izomorfna alternirajućoj grupi  $A_5$ .*

Rotacije poliedra induciraju rotacije sfere, određujući tako konačne podgrupe *specijalne ortogonalne* grupe  $SO(3)$  ortogonalnih linearnih operatora čija je determinanta jednaka 1. Sljedeći teorem nam govori da su grupe rotacija pravilnih poliedara, uz cikličke i diedralne grupe, jedine moguće konačne podgrupe od  $SO(3)$ .

**Teorem 5.5.** *Svaka konačna podgrupa od  $SO(3)$  je izomorfna jednoj od sljedećih:*

$C_n$ , ciklička, za  $n \geq 1$ ,

$D_n$ , diedralna, za  $n \geq 2$ ,

$T$ , grupa tetraedra,  $\cong A_4$ ,

$O$ , grupa oktaedra,  $\cong S_4$ ,

$I$ , grupa ikosaedra,  $\cong A_5$ .

*Štoviše, ako su dvije konačne podgrupe od  $SO(3)$  izomorfne kao grupe, onda su konjugirane kao podgrupe od  $SO(3)$ .*

*Dokaz.* Zamislimo sferu  $S$  sa središtem u ishodištu, a  $SO(3)$  promatramo kao grupu rotacija te sfere. Neka je  $G$  konačna podgrupa od  $SO(3)$ , odnosno konačna grupa rotacija sfere  $S$  te sa  $N$  označimo red te podgrupe. Zbog Propozicije 5.2 znamo da je svaki element grupe  $G$ , koji nije identiteta, zapravo rotacija oko neke osi koja prolazi središtem sfere. Dvije točke u kojima ta os siječe sferu zovemo *polovima* rotacije. Kako je  $G$  konačna grupa, znamo da je i skup polova svih rotacija  $P$  također konačan skup. Ako je  $x \in P$  pol neke rotacije  $a \in G$  i  $g \in G$ , onda je  $g(x)$  pol konjugirane rotacije  $gag^{-1}$ . To nam pokazuje da  $G$  djeluje kao grupa permutacija na skupu  $P$ .

Neka sada za svaki  $x \in P$ ,  $H_x \subseteq G$  bude stabilizator od  $x$ , a  $P_x \subseteq P$  orbita točke  $x$  pod djelovanjem grupe  $G$ . Tada vrijedi  $r_x n_x = N$ , gdje je  $r_x$  red podgrupe  $H_x$ , a  $n_x$  broj točaka u orbiti  $P_x$ .

Elemente od  $G$  koji nisu identiteta možemo i prebrojiti.

Svaki element ima dva pola, a za svaki pol  $x$  postoji  $r_x - 1$  elemenata iz podgrupe  $H_x$ . Zbrajanjem po svim polovima dobivamo

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in P} (r_x - 1) = N - 1.$$

Zapišimo  $P$  kao uniju svojih orbita  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ , pod grupom  $G$ . U orbiti su  $r_x$  i  $n_x$  jednaki pa sumu pišemo

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^t n_i (r_i - 1) = N - 1.$$

Znamo da je  $r_i n_i = N$  za svaki  $i$ . Podijelimo s  $N$  pa dobivamo temeljnu jednadžbu

$$\sum_{i=1}^t \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) = 2 - \frac{2}{N}.$$

Moguće podgrupe  $G$  ćemo utvrditi analizom mogućih rješenja jednadžbe, uz cjelobrojne  $r_i \geq 2$  i  $N \geq 1$ , imajući na umu da  $r_i$  dijeli  $N$  za svaki  $i$ . Kako je svaki  $r_i \geq 2$ , to je vrijednost lijeve strane jednadžbe barem  $\frac{1}{2}t$ , a vrijednost desne manja od 2. Zaključujemo  $t \leq 3$ .

**1. slučaj** Neka je  $t = 1$ . Jedino rješenje jednadžbe je  $r = N = 1$ , ali to ne zadovoljava uvjet  $r \geq 2$ .

**2. slučaj** Neka je  $t = 2$ . Iz temeljne jednadžbe slijedi

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Opet koristimo činjenicu da je  $r_i n_i = N$  te množenjem jednačbe s  $N$  dobivamo

$$n_1 + n_2 = 2.$$

Jedino rješenje je  $n_1 = n_2 = 1$ , stoga  $r_1 = r_2 = N$ . Dakle, postoji samo jedna os s pripadna dva pola. Zaključujemo da je  $G$  izomorfna cikličkoj grupi reda  $N$ , za  $N \geq 1$ .

**3. slučaj** Neka je  $t = 3$ . Sada se temeljna jednačba svodi na

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1 + \frac{2}{N}.$$

Posebno, lijeva strana jednačbe mora biti veća od 1, a jedine trojke sa  $r_1, r_2, r_3 \geq 2$  koje to zadovoljavaju su  $(2, 2, n)$ ,  $(2, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$  i  $(2, 3, 5)$ .

Prvo uzmimo  $(r_1, r_2, r_3) = (2, 2, n)$ . Tada je  $N = 2n$  i  $n_3 = 2$ . Tako imamo jednu os kojoj pripada ciklička grupa rotacija reda  $n$  te dvije orbite od  $n$  osi za rotacije reda 2.  $G$  je izomorfna diedralnoj grupi  $D_n$ .

Pretpostavimo  $(r_1, r_2, r_3) = (2, 3, 3)$ . Dobivamo da je  $N = 12$  i  $(n_1, n_2, n_3) = (6, 4, 4)$ . Izaberimo orbitu od 4 točke te ih označimo s  $A, B, C, D$ . Stabilizator  $H_A$  je grupa reda 3, ostavlja  $A$  fiksna, a  $B, C, D$  ciklički permutira. Zato su  $B, C, D$  jednako udaljene od  $A$ . Sve četiri točke su jednako udaljene jedna od druge jer isti argument možemo primijeniti na točke  $B, C, D$ . Njihovim spajanjem se dobije tetraedar upisan u sferu. Grupa  $G$  permutira  $A, B, C, D$  pa time inducira rotacije tetraedra. Imamo homomorfizam grupa  $G \rightarrow T$ , gdje je  $T$  grupa rotacija tetraedra. Homomorfizam je injektivan i obje grupe imaju isti red, pa je  $G$  izomorfna grupi  $T$ .

Na sličan način se dokazuju i preostala dva slučaja te dobivamo da je za  $(r_1, r_2, r_3) = (2, 3, 4)$   $G$  izomorfna grupi simetrija oktaedra, a za  $(r_1, r_2, r_3) = (2, 3, 5)$  je  $G$  izomorfna grupi simetrija ikosaedra.

Ostalo nam je dokazati posljednju tvrdnju teorema. Pretpostavimo da su  $G_1$  i  $G_2$  dvije konačne grupe rotacija sfere, koje su izomorfne kao grupe. Tada su one izomorfne istim grupama iz izreke teorema. U dokazima slučajeva  $C_n, D_n$  postoji glavna os s obzirom na koju se vrše rotacije za  $\frac{2\pi}{n}$  i koja određuje grupu. U slučaju grupe  $C_n$  možemo preslikati glavnu os od  $G_1$  na onu od  $G_2$ , i to rotacijom sfere  $g$  koja onda daje konjugaciju tih dviju grupa,  $G_2 = gG_1g^{-1}$ . Za grupu  $D_n$  možemo dodatno zahtijevati da  $g$  šalje sekundarnu os od  $G_1$  u onu od  $G_2$ , pa opet vrijedi  $G_2 = gG_1g^{-1}$ . U slučajevima grupa  $T, O, I$  u sferu je upisan tetraedar, oktaedar ili ikosaedar, a  $G$  je njegova grupa rotacija. Neka je  $g \in G$  rotacija sfere koja preslikava dva susjedna vrha prve figure u susjedne vrhove druge figure. Tada je tražena konjugacija  $G_2 = gG_1g^{-1}$ .  $\square$

# Bibliografija

- [1] M. Bombardelli, *Platonova tijela i Eulerova formula*, Matematika i škola 19 (2003.), Element, (str. 178-180).
- [2] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Elementarna geometrija-skripta iz predavanja*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb 2007.
- [3] M. Bombardelli, V. Volenec, *In memoriam: Stanko Bilinski*, Glasnik matematički 33 (1998.), (str. 323-325).
- [4] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, New York 2000., Poglavlje 8 (str. 435-480).
- [5] I. Nakić, *Diskretna matematika-predavanja*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb 2011., (str. 77-78).
- [6] D. Palman, *Nacrtna geometrija*, Element, Zagreb 2001.
- [7] D. Palman, *Stereometrija*, Element, Zagreb 2005.
- [8] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb 1995.
- [9] B. Širola, *Algebarske strukture, skripta*, PMF-Matematički odsjek
- [10] *Konstruktivne metode u geometriji, skripta*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb 2020.

## Izvori slika

- Slika 0.1, dostupna na [https://www.researchgate.net/figure/Johannes-Keplers-drawing-of-the-five-Platonic-solids-representing-the-elements\\_fig5\\_273138106](https://www.researchgate.net/figure/Johannes-Keplers-drawing-of-the-five-Platonic-solids-representing-the-elements_fig5_273138106)
- Slike 4.3 i 4.4, dostupne na [https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Elongated\\_square\\_gyrobicupola,\\_davinci.png](https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Elongated_square_gyrobicupola,_davinci.png)

- Slika 4.5, dostupna na <https://www.redbubble.com/i/poster/Tridiminished-Icosahedron-Shapes-Johnson-63-by-JLERogers/95815958.LVTDI>
- Ostale slike nacrtane su u programu GeoGebra.

# Sažetak

Ovaj diplomski rad koji se bavi temom poliedara uz poglavlje sa osnovnim pojmovima sastoji se od još četiri značajna poglavlja. U drugom poglavlju konstruktivno pokazujemo da pravilni poliedri zaista postoje. Kako bi bili jedinstveni, popravljamo Euklidovu definiciju pravilnih poliedara tako što dodajemo uvjet konveksnosti te zahtjev da se u svakom vrhu sastaje jednak broj strana. Na kraju je dana ispravna definicija pravilnog poliedra. Dva najvažnija teorema dani su u trećem poglavlju. Eulerov teorem opisuje odnos broja vrhova, bridova i strana konveksnog poliedra, a Cauchyjev teorem otkriva kada su dva konveksna poliedra sukladna. Primjenom oba teorema klasificiramo deltaedre, konveksne poliedre čije su sve strane jednakostranični trokuti. U četvrtom poglavlju klasificirani su konveksni poliedri pravilnih strana gdje razlikujemo uniformne i neuniformne poliedre. Polupravilne poliedre, kao uniformne poliedre, čine pravilni poliedri, prizme, antiprizme i Arhimedova tijela. Također pokazujemo da postoji samo konačno mnogo neuniformnih konveksnih poliedara pravilnih strana. U završnom poglavlju istražujemo grupe simetrija pravilnih poliedara. Njihove grupe rotacija, zajedno s cikličkim i diedralnim grupama, jedine su konačne podgrupe grupe rotacija sfere.

# Summary

This Master's Thesis with the subject of polyhedra contains an introductory chapter with relevant definitions and the main part of the work consisting of four chapters. In the second chapter, we show constructively that regular or Platonic solids do exist. In order to make them unique, we amend Euclid's definition of regular polyhedra adding the condition of convexity and the requirement that an equal number of sides meet in each vertex. The two most important results are given in the third chapter. Euler's theorem describes the relationship between the number of vertices, edges and sides of a convex polyhedron, while Cauchy's theorem explains when two convex polyhedra are congruent. Applying these theorems, we determine all convex deltahedra, i.e. polyhedra whose all sides are equilateral triangles. Convex polyhedra with sides that are regular polygons are classified in the fourth chapter where we distinguish between uniform and non-uniform polyhedra. Semi-regular polyhedra, being uniform polyhedra, contain regular polyhedra, prisms, antiprisms and Archimedean solids. We also show that there are only finitely many non-uniform convex polyhedra with regular sides. In the final chapter, we investigate symmetry groups of regular polyhedra. Their rotation groups, together with cyclic and dihedral groups, are the only finite subgroups of the rotation group of a sphere.



# Životopis

Rođen sam 2.12.1994. u Zagrebu, a odrastao i živim u Svetoj Nedelji. Obrazovanje sam započeo u OŠ Matka Laginje u Zagrebu. Nakon završetka osnovne škole, 2009. godine nastavljam školovanje u prirodoslovno-matematičkoj XV. gimnaziji (MIOC) u Zagrebu, na informatičkom smjeru. Na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 2017. godine upisujem preddiplomski studij Matematika, smjer nastavnički. Završio sam ga 2019. godine i iste godine upisao diplomski studij Matematika, smjer nastavnički na istom fakultetu.