

Bicentrični mnogokuti

Matijević, Ana

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:423042>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-22**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Matijević

BICENTRIČNI MNOGOKUTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Marija Galić

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvaljujem se doc. dr. sc. Mariji Galić na vodstvu, strpljenju, brizi i konzultacijama pri nastajanju ovog rada.

Najveće hvala roditeljima Marijanu i Miri na svakoj molitvi, bezuvjetnoj vjeri i podršci koju sam imala od prvog dana.

Hvala bratu Marku i sestri Katarini što nikad nisu sumnjali u mene i što su mi olakšavali sva stresna razdoblja.

Također, hvala svim mojim prijateljima na motivaciji, lijepim uspomenama te što su bili uz mene tijekom studiranja.

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
1 Trokut	2
1.1 Eulerov teorem	2
2 Tetivni i tangencijalni četverokuti	5
2.1 Konveksni četverokuti	5
2.2 Tangencijalni četverokuti	6
2.3 Tetivni četverokuti	10
3 Bicentrični četverokuti	15
3.1 Definicija	15
3.2 Karakterizacija	15
3.3 Odnos radijusa upisane i opisane kružnice	24
3.4 Površina	32
3.5 Ponceletov porizam	36
3.6 Konstrukcija	38
4 Ostali bicentrični mnogokuti	40
4.1 Definicija	40
4.2 Pravični mnogokuti	40
4.3 Svojstva bicentričnih mnogokuta	41
Bibliografija	43

Uvod

Od davnina geometrija zaokuplja pažnju matematičara pa je tako i ovaj diplomski rad posvećen temi iz područja euklidske geometrije. Činjenica da se svakom trokutu može upisati i opisati kružnica znana nam je još od osnovne škole, no razmišljajući malo apstraktnije, prirodno nam se nameće pitanje postoje li još neki mnogokuti s ovim svojstvom.

Dobro su nam poznati i pojmovi tetivnog i tangencijalnog četverokuta. Međutim, osim što postoje četverokuti kojima se može upisati kružnica i četverokuti kojima se kružnica može opisati, postoje i četverokuti koji imaju oba navedena svojstva. Takvi se četverokuti nazivaju bicentričnim četverokutima. Bicentrični četverokuti konveksni su četverokuti koji su istovremeno i tangencijalni i tetivni. Mi ćemo se u ovom radu najviše baviti takvim četverokutima, no dotaknut ćemo se i ostalih bicentričnih mnogokuta.

Prvo poglavlje govori o trokutima. Svaki je trokut bicentričan te je odnos polumjera njemu upisane i opisane kružnice dan Eulerovom formulom (za trokut). U drugom poglavlju definirat ćemo tangencijalne i tetivne četverokute te dokazati njihova osnovna svojstva kao i izvesti formulu za površinu istih. Treće poglavlje posvećeno je bicentričnim četverokutima. U tom poglavlju spomenut ćemo neke karakterizacije i zanimljive rezultate koji se odnose na vezu između radijusa upisane i opisane kružnice. Primjer takve formule je analogon Eulerovog teorema za trokute, odnosno Fussov teorem, kao i Yunova nejednakost. U ovom ćemo poglavlju reći nešto i o Ponceletovom porizmu, izvanrednom teoremu koji nam govori o postojanju četverokuta koji je istovremeno upisan jednoj, a opisan drugoj kružnici. Za kraj trećeg poglavlja navest ćemo dvije konstrukcije bicentričnog četverokuta. U četvrtom poglavlju poopćit ćemo neka svojstva bicentričnih četverokuta na bicentrične mnogokute.

Poglavlje 1

Trokut

1.1 Eulerov teorem

Svakom se trokutu može upisati i opisati kružnica. Kažemo da je svaki trokut i tetivan i tangencijalan, odnosno bicentričan. Odnos polumjera njemu upisane i opisane kružnice dan je Eulerovom formulom (za trokut) koju ćemo u nastavku iskazati i dokazati.

Teorem 1.1.1 (Eulerov teorem). *Neka je R polumjer trokutu opisane kružnice, a r polumjer trokutu upisane kružnice. Udaljenost središta O opisane kružnice i središta S upisane kružnice danog trokuta $\triangle ABC$ dana je s*

$$|OS|^2 = R^2 - 2Rr.$$

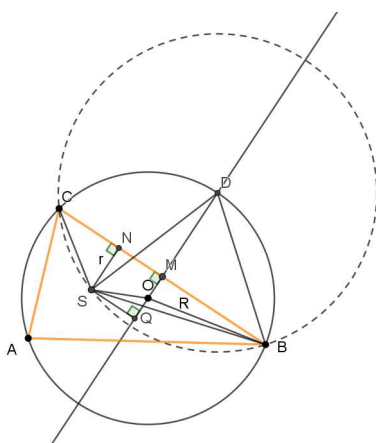
Dokaz. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i njemu opisana kružnica sa središtem u točki O radijusa R . Neka je točka S središte upisane kružnice radijusa r istog trokuta (kao na Slici 1.1).

Nadalje, opišimo kružnicu trokutu $\triangle BCS$. Središte te kružnice je u točki D . Neka je točka M polovište stranice \overline{BC} trokuta $\triangle ABC$, a točka Q ortogonalna projekcija točke S na pravac OD .

Budući da je $|DB| = |DS|$ (jer se radi o radijusu kružnice opisane trokutu $\triangle BCS$), možemo te duljine dodati i oduzeti desnoj strani jednakosti na sljedeći način:

$$|OB|^2 - |OS|^2 = |OB|^2 - |DB|^2 + |DS|^2 - |OS|^2. \quad (1.1)$$

Koristeći Pitagorin poučak u pravokutnim trokutima $\triangle BMO$, $\triangle BDM$, $\triangle DSQ$ i $\triangle OSQ$,



Slika 1.1: Dokaz Eulerovog teorema

imamo:

$$\begin{aligned} |OB|^2 &= |OM|^2 + |MB|^2, \\ |DB|^2 &= |DM|^2 + |MB|^2, \\ |DS|^2 &= |SQ|^2 + |QD|^2, \\ |OS|^2 &= |SQ|^2 + |QO|^2 \iff |OS|^2 - |SQ|^2 = |OQ|^2. \end{aligned}$$

Sada jednadžbu (1.1) možemo zapisati ovako:

$$\begin{aligned} |OB|^2 - |OS|^2 &= |OB|^2 - |DB|^2 + |DS|^2 - |OS|^2 \\ &= (|OM|^2 + |MB|^2) - (|DM|^2 + |MB|^2) + (|SQ|^2 + |QD|^2) - |OS|^2 \\ &= |OM|^2 - |DM|^2 + |QD|^2 - (|OS|^2 - |SQ|^2) \\ &= |OM|^2 - |DM|^2 + |QD|^2 - |OQ|^2. \end{aligned}$$

Koristeći razliku kvadrata, imamo

$$\begin{aligned} |OB|^2 - |OS|^2 &= (|OM| - |DM|)(|OM| + |DM|) + (|QD| - |OQ|)(|QD| + |OQ|) \\ &= |OD|(|OM| - |DM|) + |OD|(|QD| + |OQ|) \\ &= |OD|(|OM| - |DM| + |QD| + |OQ|) \\ &= |OD|(|OM| - |DM| + (|DM| + |MQ|) + |OQ|) \\ &= |OD|(|MQ| + |MQ|) \\ &= |OD| \cdot 2 \cdot |MQ|. \end{aligned}$$

Konačno, dobili smo

$$|OB|^2 - |OS|^2 = 2 \cdot |OD| \cdot |MQ|.$$

Kako je $|OB| = |OD| = R$ te $|MQ| = |NS| = r$, pri čemu je N ortogonalna projekcija točke S na stranicu \overline{BC} pa je $MNSQ$ pravokutnik, vrijedi

$$R^2 - |OS|^2 = 2Rr.$$

□

Poglavlje 2

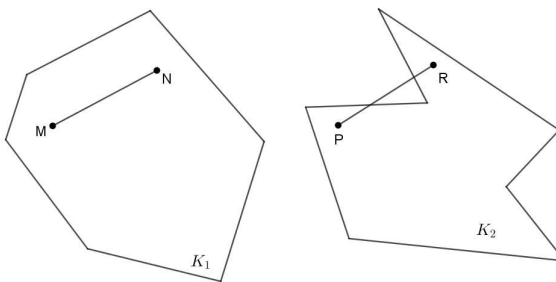
Tetivni i tangencijalni četverokuti

2.1 Konveksni četverokuti

Prije nego se dotaknemo tangencijalnih i tetivnih četverokuta, ponovit ćemo definiciju konveksnog četverokuta. Prije toga moramo uvesti pojam konveksnog skupa. Definicije i primjeri preuzeti su iz [19].

Definicija 2.1.1. *Ako se za bilo koje dvije točke M i N skupa K i dužina \overline{MN} nalazi u tom skupu, kažemo da je skup K **konveksan**. Inače je **nekonveksan**.*

Sada pogledajmo skupove točaka K_1 i K_2 na Slici 2.1. Vidimo da se za bilo koje dvije točke M i N skupa K_1 i dužina \overline{MN} nalazi su skupu K_1 . Također vidimo i da u skupu K_2 možemo pronaći dvije točke P i R takve da dužina \overline{PR} ne pripada tom skupu. Primjeri



Slika 2.1: Primjer konveksnog skupa K_1 i nekonveksnog skupa K_2

konveksnih skupova u ravnini su trokut, pravokutnik i krug.

Definicija 2.1.2. *Neka su u ravnini dane četiri točke A, B, C i D tako da nikoje tri nisu kolinearne. Dio ravnine kojeg omeđuju dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ zovemo **četverokut**.*

Četverokut može biti konveksan ili nekonveksan. U ovom radu bavit ćemo se konveksnim četverokutima.

2.2 Tangencijalni četverokuti

Poznato je da se kružnica može upisati svakom trokutu, no to svojstvo kod četverokuta nije tako često. U ovoj ćemo sekciji proučavati tangencijalni četverokut. On je poseban po tome što mu se može upisati kružnica. Zove se tangencijalni jer su pravci na kojima leže stranice tog četverokuta tangente njemu upisane kružnice.

Definicija 2.2.1. *Konveksni četverokut kojemu se može upisati kružnica naziva se **tangencijalni četverokut**.*

Primjer tangencijalnog četverokuta jest kvadrat. Kružnici upisanoj kvadratu središte je u sjecištu dijagonala kvadrata, a polumjer joj je jednak polovini duljine stranice kvadrata. Još jedan primjer tangencijalnog četverokuta je romb. Njemu su, kao i kvadratu, dijagonale međusobno okomite te se raspolavljaju. Zato je kružnici upisanoj rombu središte u sjecištu njegovih dijagonala, a polumjer joj je jednak polovini duljine visine romba.

Prije nego li se nastavimo baviti karakterizacijom tangencijalnih četverokuta, spomenut ćemo jedno svojstvo koje se tiče ove vrste četverokuta, a bit će nam korisno u dokazima daljnjih teorema u ovome radu.

Teorem 2.2.2. *Dan je tangencijalni četverokut $ABCD$. Neka su X i W točke u kojima on dira upisanu kružnicu na stranicama \overline{AB} i \overline{AD} redom. Neka je α kut $\sphericalangle BAD$ i neka je K točka presjeka \overline{AS} i \overline{XW} . Tada vrijedi da je*

$$\sphericalangle XAS = \sphericalangle SAW = \frac{\alpha}{2}.$$

Dokaz. Koristeći oznake kao na Slici 2.2 vidimo da su trokuti $\triangle AXS$ i $\triangle AWS$ sukladni prema teoremu $SSK^>$ o sukladnosti trokuta budući da im je $|AS|$ zajednička stranica, $|SW| = |SX| = r$ te $\sphericalangle AWS = \sphericalangle SXA = 90^\circ$. Iz te sukladnosti slijedi da je

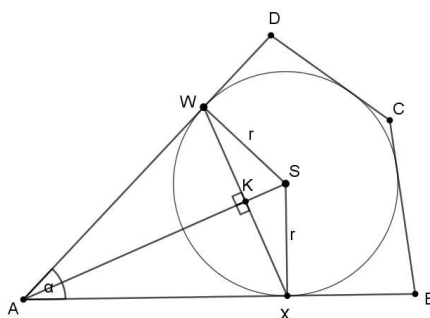
$$|AW| = |AX|. \quad (2.1)$$

Neka je K točka u kojoj se sijeku AS i XW . Trokut $\triangle AXW$ je sada očito jednakokračan. Posljedica toga je da je

$$\sphericalangle WXA = \sphericalangle AWX.$$

Četverokut $AXSW$ je deltoid jer ima dva para međusobno sukladnih susjednih stranica. Sada znamo da se njegove dijagonale \overline{AS} i \overline{XW} sijeku pod pravim kutom, odnosno:

$$\sphericalangle AKX = \sphericalangle WKA = 90^\circ. \quad (2.2)$$



Slika 2.2: Teorem o kutu između tangente iz neke točke izvan kružnice i pravca koji prolazi tom točkom i središtem kružnice

Sada zbog (2.1) i (2.2) te činjenice da je $|AK|$ zajednička stranica trokutima ΔKXA i ΔKWA , slijedi da su ta dva trokuta sukladna. Zato je

$$\sphericalangle XAK = \sphericalangle KAW = \frac{\alpha}{2}.$$

□

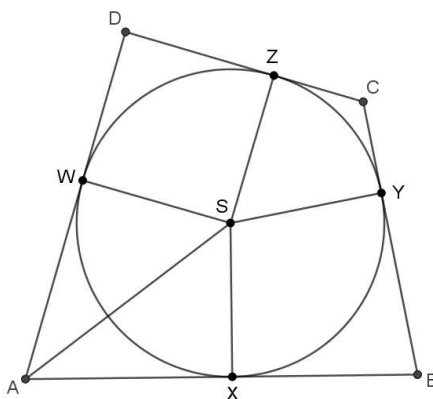
Dalje nastavljamo s karakterizacijom. Sljedeći nam teorem donosi lijepo svojstvo koje vrijedi za stranice tangencijalnog četverokuta. Teorem je nazvan prema francuskom inženjeru Henriju Pitotu koji je živio na prijelazu iz 17. u 18. stoljeće.

Teorem 2.2.3 (Pitotov teorem). *Zbroj duljina dviju nasuprotnih stranica tangencijalnog četverokuta jednak je zbroju duljina drugih dviju stranica tog četverokuta, odnosno*

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|.$$

Dokaz. Neka su točke X, Y, Z, W dirališta stranica tangencijalnog četverokuta $ABCD$ s njemu upisanom kružnicom, kao na Slici 2.3.

Promotrimo sada trokute ΔAXS i ΔAWS . Oni imaju zajedničku stranicu \overline{AS} . Stranice \overline{SX} i \overline{SW} radijusi su upisane kružnice četverokuta. Dakle, $|SX| = |SW|$. Nadalje, tangenta na kružnicu okomita je na njezin radijus. Dakle, $\sphericalangle AXS = \sphericalangle AWS = 90^\circ$. Slijedi da su trokuti ΔAXS i ΔAWS sukladni prema SSK teoremu o sukladnosti. Iz sukladnosti slijedi da je $|AX| = |AW|$. Na analogan način možemo zaključiti da je $|BX| = |BY|$, $|CY| = |CZ|$ te $|DZ| = |DW|$. Konačno, zbrajanjem duljina nasuprotnih stranica $|AB|$ i



Slika 2.3: Pitotov teorem o stranicama tangencijalnog četverokuta

$|CD|$, dobivamo

$$\begin{aligned}
 |AB| + |CD| &= (|AX| + |XB|) + (|CZ| + |DZ|) \\
 &= (|AW| + |BY|) + (|CY| + |DW|) \\
 &= (|AW| + |DW|) + (|BY| + |CY|) \\
 &= |AD| + |BC|,
 \end{aligned}$$

što nam je bio cilj dokazati. □

Dokaz Pitotovog teorema preuzet je iz [8]. Vrijedi i obrat Pitotovog teorema ([6]). Ovaj obrat prvi put je dokazan više od sto godina nakon što je Pitot dokazao Teorem 2.2.3 i to od strane švicarskog matematičara Jakoba Steinerja.

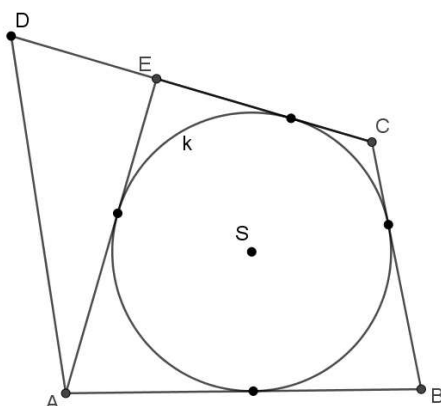
Teorem 2.2.4 (Obrat Pitotovog teorema). *Ako za duljine stranica konveksnog četverokuta $ABCD$ vrijedi*

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|, \quad (2.3)$$

onda je taj četverokut tangencijalan.

Dokaz. Neka je dan konveksni četverokut $ABCD$ za koji vrijedi formula (2.3). Neka je k kružnica kojoj su stranice \overline{AB} , \overline{BC} i \overline{CD} četverokuta $ABCD$ tangente, kao na Slici 2.4. Središte te kružnice je točka u kojoj se sijeku simetrale kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCD$. Ova točka središta, kao i kružnica, uvijek postoje.

Cilj nam je pokazati da je i stranica \overline{AD} četverokuta $ABCD$ tangenta na kružnicu k . Koristit ćemo dokaz kontradikcijom. Pretpostavimo da stranica \overline{AD} četverokuta $ABCD$ nije tangenta na kružnicu k . Povlačimo tangentu iz točke A na kružnicu. Presjek te



Slika 2.4: Obrat Pitotovog teorema

tangente i pravca CD označimo slovom E . Primijetimo da na Slici 2.4 točka E leži na dužini \overline{CD} .

Kako je naša kružnica upisana četverokutu $ABCE$, iz Pitotovog teorema (Teorem 2.2.3) slijedi

$$|AB| + |CE| = |BC| + |AE|. \quad (2.4)$$

Iz pretpostavke teorema vrijedi jednakost (2.3), a budući da je točka E na dužini \overline{CD} , to možemo zapisati i ovako:

$$|AB| + |CE| + |ED| = |AD| + |BC|. \quad (2.5)$$

Jednadžbe (2.4) i (2.5) impliciraju

$$|AE| = |AD| - |ED|,$$

odnosno

$$|AE| + |ED| = |AD|.$$

To nije moguće jer da bi trokut $\triangle AED$ bio trokut, mora vrijediti nejednakost trokuta. Dakle, naša je pretpostavka bila pogrešna. Stranica \overline{AD} četverokuta $ABCD$ također je tangenta na kružnicu, što znači da je $ABCD$ tangencijalan. Time je teorem dokazan. \square

Primijetimo da smo točku E definirali tako da leži baš na dužini \overline{CD} . No, teorem bi dokazali na sličan način i da se točka E ne nalazi na dužini, ali se nalazi na pravcu CD .

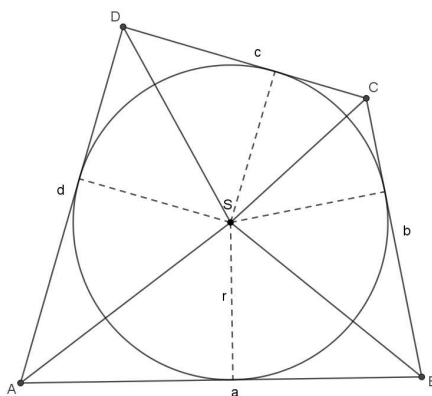
U sljedećem teoremu izvest ćemo formulu za površinu tangencijalnog četverokuta.

Teorem 2.2.5. *Neka su a , b , c i d duljine stranica tangencijalnog četverokuta $ABCD$, a r duljina radijusa njemu upisane kružnice. Za površinu tangencijalnog četverokuta*

$ABCD$ vrijedi

$$P_{ABCD} = \frac{a + b + c + d}{2} \cdot r.$$

Dokaz. Vrhove četverokuta $ABCD$ spojimo sa središtem njemu upisane kružnice kao na Slici 2.5. Time smo podijelili četverokut na četiri trokuta: $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$ i $\triangle DAS$. Površina četverokuta $ABCD$ jednaka je zbroju površina trokuta dobivenih spa-



Slika 2.5: Površina tangencijalnog četverokuta

janjem vrhova četverokuta $ABCD$ sa središtem njemu upisane kružnice, odnosno

$$P_{ABCD} = P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CDS} + P_{DAS}.$$

Nadalje, visina sva četiri trokuta je zapravo radijus kružnice upisane četverokutu $ABCD$ jer je tangenta na kružnicu okomita na njezin radijus. Prema formuli za površinu trokuta slijedi

$$P_{ABCD} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} + \frac{d \cdot r}{2} = \frac{(a + b + c + d) \cdot r}{2},$$

čime smo dokazali tvrdnju □

2.3 Tetivni četverokuti

Osim što postoje četverokuti kojima se može upisati kružnica, postoje i oni kojima se kružnica može opisati. Stranice takvog četverokuta tetive su njemu opisane kružnice, odakle im i dolazi naziv.

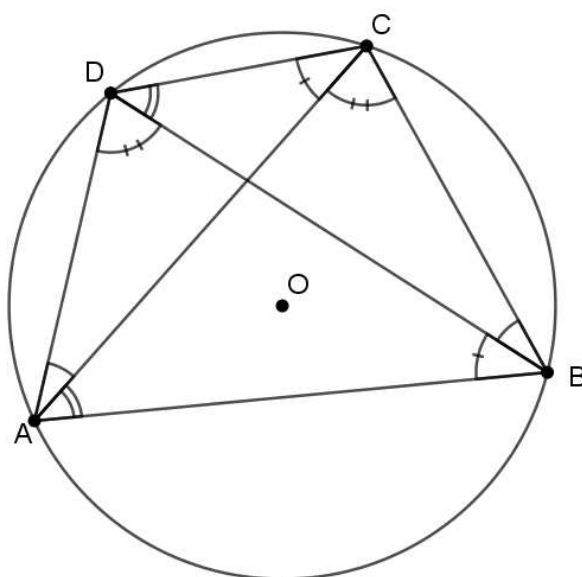
Definicija 2.3.1. *Konveksni četverokut kojemu se može opisati kružnica naziva se **tetivni četverokut**.*

Primjer tetivnog četverokuta je pravokutnik. Središte kružnice opisane pravokutniku je u sjecištu njegovih dijagonala. Polumjer te kružnice jednak je polovini duljine dijagonale.

Sljedeće svojstvo (preuzeto iz [14]) vrijedi za kutove tetivnog četverokuta.

Teorem 2.3.2. *Nasuprotni kutovi tetivnog četverokuta su suplementarni.*

Dokaz. Neka je zadan tetivni četverokut $ABCD$ kao na Slici 2.6 i neka su unutarnji kutovi tog četverokuta kod vrhova A, B, C, D nazvani redom $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Iz činjenice da su



Slika 2.6: Poučak o kutovima tetivnog četverokuta

obodni kutovi nad istim lukom kružnice jednakih veličina, slijedi:

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD, \sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC, \sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA, \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB.$$

Sada vrijedi:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= (\sphericalangle CAD + \sphericalangle BAC) + (\sphericalangle DCA + \sphericalangle ACB) \\ &= (\sphericalangle CBD + \sphericalangle BDC) + (\sphericalangle DBA + \sphericalangle ADB) \\ &= (\sphericalangle DBA + \sphericalangle CBD) + (\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC) \\ &= \beta + \delta. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Zbroj veličina kutova u svakom četverokutu iznosi 360° . Tako je

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ. \quad (2.7)$$

Posljedica (2.6) i (2.7) je da je $\alpha + \gamma = 180^\circ$ te $\beta + \delta = 180^\circ$. Time je ovaj teorem dokazan. \square

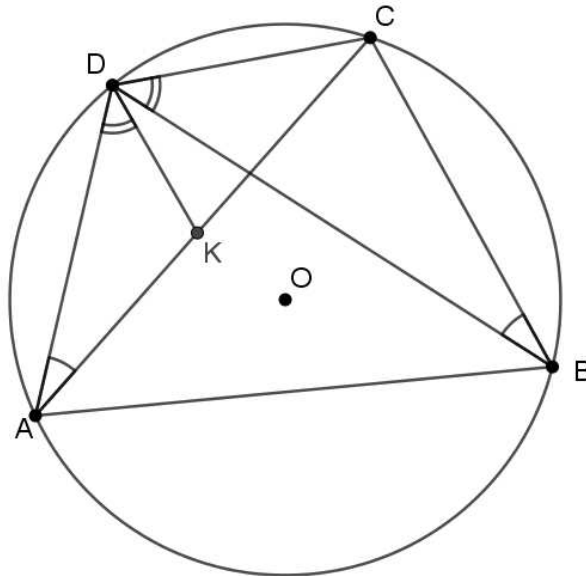
Sljedeći teorem, koji smo preuzeli iz [8], pokazuje odnos stranica i dijagonala tetivnog četverokuta.

Teorem 2.3.3 (Ptolomejev teorem). *Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta.*

Dokaz. Neka je zadan tetivni četverokut $ABCD$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\sphericalangle BDC \leq \sphericalangle ADB$ kao na Slici 2.7 (inače bi zamijenili vrhove A i C). Točku K definirajmo tako da se nalazi na dijagonali \overline{AC} i da pritom vrijedi

$$\sphericalangle ADK = \sphericalangle BDC. \quad (2.8)$$

Budući da osim (2.8) vrijedi i da je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$ jer su to obodni kutovi nad istim



Slika 2.7: Ptolomejev teorem o tetivnom četverokutu

lukom \widehat{CD} , slijedi da su trokuti $\triangle AKD$ i $\triangle BCD$ slični prema K-K teoremu o sličnosti. Kao posljedicu toga imamo

$$\frac{|AK|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|},$$

odnosno

$$|AD| \cdot |BC| = |AK| \cdot |BD|. \quad (2.9)$$

Primijetimo da je

$$\begin{aligned} \sphericalangle KDC &= \sphericalangle KDB + \sphericalangle BDC \\ &= \sphericalangle KDB + \sphericalangle ADK \\ &= \sphericalangle ADB. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nadalje, osim (2.10) vrijedi i da je $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA$ jer su to obodni kutovi nad istim lukom \widehat{DA} . Zato su trokuti $\triangle ADB$ i $\triangle KDC$ slični prema K-K teoremu o sličnosti. Sada imamo

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|CK|},$$

odnosno

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |CK|. \quad (2.11)$$

Zbrojimo li (2.9) i (2.11), dobit ćemo

$$\begin{aligned} |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| &= |AK| \cdot |BD| + |BD| \cdot |CK| \\ &= (|AK| + |CK|) \cdot |BD| \\ &= |AC| \cdot |BD|, \end{aligned}$$

čime smo dokazali teorem. □

U sljedećem ćemo teoremu izvesti formulu za površinu tetivnog četverokuta. Iskaz i dokaz teorema su iz [14].

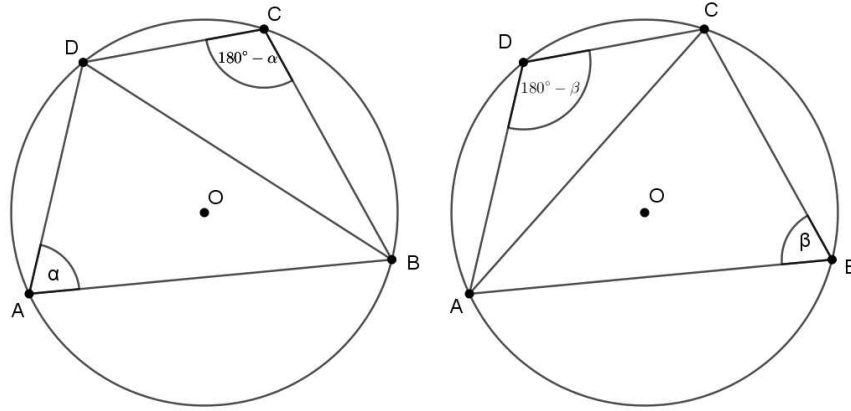
Teorem 2.3.4. *Neka su α i β unutarnji kutovi tetivnog četverokuta $ABCD$ pri vrhovima A i B , redom. Za površinu tetivnog četverokuta $ABCD$ vrijedi*

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2} (|AB| \cdot |AD| + |BC| \cdot |CD|) \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} (|AB| \cdot |BC| + |CD| \cdot |AD|) \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

Dokaz. Kako su α i β unutarnji kutovi tetivnog četverokuta $ABCD$ pri vrhovima A i B redom, kao na Slici 2.8, prema Teoremu 2.3.2 slijedi da je $\sphericalangle DCB = 180^\circ - \alpha$ te $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \beta$.

Sada povlačimo dijagonalu \overline{BD} tetivnom četverokutu $ABCD$ te ga tako dijelimo na dva dijela kao na lijevom dijelu Slike 2.8. Traženu površinu četverokuta $ABCD$ dobit ćemo zbrajanjem površina tako dobivenih trokuta. Drugim riječima, imamo

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \sin (180^\circ - \alpha). \quad (2.12)$$



Slika 2.8: Površina tetivnog četverokuta

Kako znamo da je $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, jednadžbu (2.12) možemo zapisati i na sljedeći način:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| \cdot |AD| + |BC| \cdot |CD|) \cdot \sin \alpha.$$

Sada povlačimo dijagonalu \overline{AC} te tako dijelimo četverokut na dva dijela kao na desnom dijelu Slike 2.8. Traženu površinu četverokuta $ABCD$ dobit ćemo zbrajanjem površina trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$. Drugim riječima, imamo

$$\begin{aligned} P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \beta + \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |AD| \cdot \sin(180^\circ - \beta) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (|AB| \cdot |BC| + |CD| \cdot |AD|) \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

Time je naš teorem dokazan. □

Poglavlje 3

Bicentrični četverokuti

3.1 Definicija

Osim što postoje četverokuti kojima se može upisati kružnica i četverokuti kojima se kružnica može opisati, postoje i četverokuti koji imaju oba navedena svojstva.

Definicija 3.1.1. *Konveksni četverokut kojemu se može i upisati i opisati kružnica naziva se **bicentrični četverokut**.*

Radijus opisane kružnice označava se s R , dok se radijus upisane kružnice označava s r . Središte opisane kružnice označavat ćemo s O , a središte četverokutu upisane kružnice sa S . Iz definicije proizlazi da bicentrični četverokuti imaju sva svojstva i tetivnih i tangencijalnih četverokuta. Zovemo ih još i *tetivno-tangencijalnim četverokutima*. Najjednostavniji primjer bicentričnog četverokuta jest kvadrat. Središte kvadratu i upisane i opisane kružnice je u sjecištu njegovih dijagonala.

3.2 Karakterizacija

Jedna karakterizacija bicentričnih četverokuta dobiva se kombinacijom karakterizacija tangencijalnih i tetivnih četverokuta, odnosno kombinacijom Teorema 2.2.3 i Teorema 2.3.2. Drugim riječima, za bicentrični četverokut $ABCD$ s uzastopnim stranicama $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$ i $|AD|$ te uzastopnim kutovima α , β , γ i δ pri vrhovima A , B , C i D redom, vrijedi:

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= |AD| + |BC|, \\ \alpha + \gamma &= \beta + \delta = 180^\circ. \end{aligned}$$

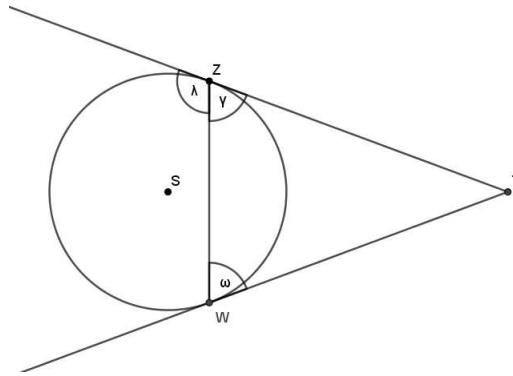
Definicija 3.2.1. *Ako upisana kružnica tangencijalnog četverokuta $ABCD$ dodiruje taj četverokut u točkama X , Y , Z , W redom, onda se odsječci \overline{XZ} i \overline{WY} nazivaju **tangentne tetive**.*

Prethodna definicija preuzeta je iz [10]. Nadalje, za dokaz Teorema 3.2.3 potrebna nam je sljedeća lema. Lema, kao i teorem, preuzeti su iz [9].

Lema 3.2.2. *Kutovi između tetive i dviju tangenti na kružnicu u krajnjim točkama te tetive su suplementarni, tj. koristeći oznake kao na Slici 3.1, vrijedi:*

$$\omega + \lambda = 180^\circ.$$

Dokaz. U točkama Z i W na kružnici produžimo tangente tako da se sijeku u točki T kao na Slici 3.1. Trokut ΔTZW je jednakokračan, pa su kutovi tog trokuta uz osnovicu



Slika 3.1: Lema o kutovima između tetive i dviju tangenti

\overline{ZW} sukladni, odnosno $\omega = \gamma$. Također, $\gamma + \lambda = 180^\circ$ jer su to kutovi na jednom pravcu. Slijedi:

$$\omega + \lambda = 180^\circ.$$

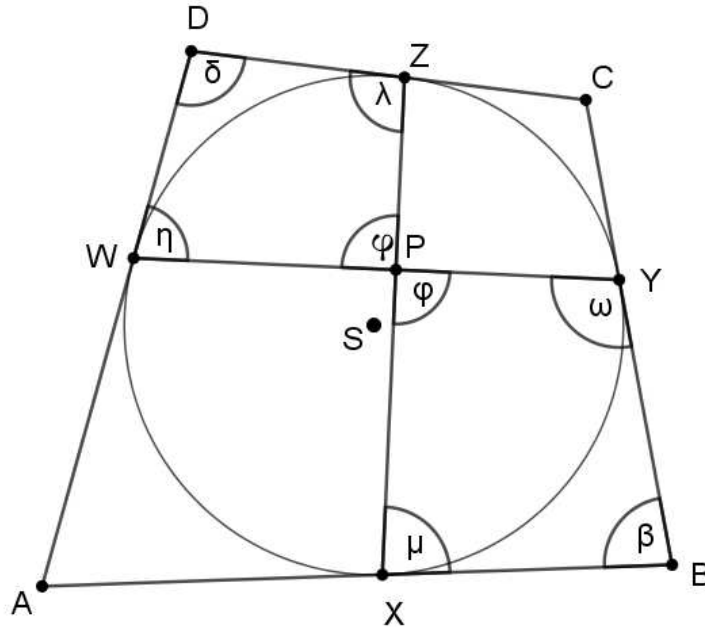
Time je ova lema dokazana. □

Teorem 3.2.3. *Tangentne tetive u tangencijalnom četverokutu su okomite ako i samo ako je taj četverokut bicentričan.*

Dokaz. Dan je tangencijalni četverokut $ABCD$. Taj četverokut dira kružnicu u točkama X, Y, Z i W tako da je $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{BC}$, $Z \in \overline{CD}$ te $W \in \overline{AD}$. Neka su α, β, γ i δ unutarnji kutovi četverokuta $ABCD$ uz vrhove A, B, C i D redom. Nadalje, neka je P točka presjeka tangentskih tetiva \overline{XZ} i \overline{YW} . Označimo ostale kutove na sljedeći način: $\angle XPY = \angle ZPW = \varphi$, $\angle BXP = \mu$, $\angle PYB = \omega$, $\angle DZP = \lambda$ te $\angle PWD = \eta$. (Sve oznake su kao na Slici 3.2.)

Zbroj veličina kutova svakog četverokuta iznosi 360° pa stoga u četverokutima $XBYP$ i $PZDW$ imamo:

$$\mu + \beta + \omega + \varphi = 360^\circ, \quad \eta + \varphi + \lambda + \delta = 360^\circ. \quad (3.1)$$



Slika 3.2: Okomite tangentne tetive u bicentričnom četverokutu

Zbrojimo li jednađžbe u (3.1), dobivamo:

$$\mu + \beta + \omega + \varphi + \eta + \varphi + \lambda + \delta = 720^\circ. \quad (3.2)$$

Koristeći Lemu 3.2.2), imamo:

$$\mu + \lambda = 180^\circ, \quad \omega + \eta = 180^\circ. \quad (3.3)$$

Sada možemo uvrstiti (3.3) u (3.2), odakle slijedi

$$2\varphi + \beta + \delta = 360^\circ \iff \beta + \delta = 360^\circ - 2\varphi.$$

Tangentne tetive \overline{XZ} i \overline{YW} su okomite, odnosno $\varphi = 90^\circ$ ako i samo ako je $\beta + \delta = 180^\circ$, što nam je već jako dobro poznata karakterizacija tetivnog četverokuta (Teorem 2.3.2) s obzirom na to da su β i δ nasuprotni kutovi četverokuta. Time je teorem dokazan. \square

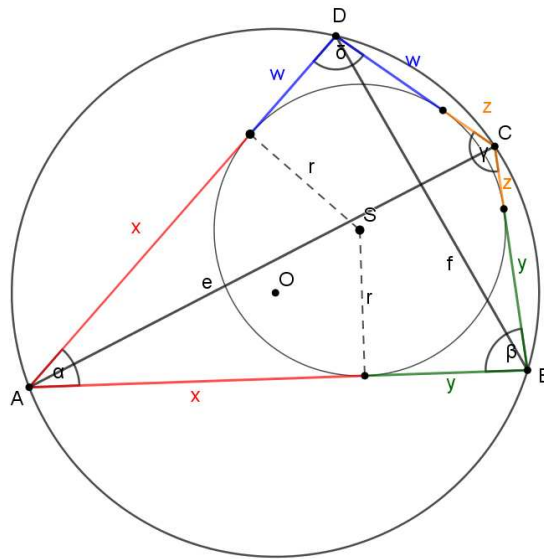
Teorem 3.2.3 govori nam da je četverokut $ZWXY$ **ortodijagonalni četverokut**. U euklidskoj geometriji ortodijagonalni četverokut je četverokut u kojem se dijagonale sijeku pod pravim kutom.

Sljedeće tri jednostavne leme (Lema 3.2.4, Lema 3.2.5 i Lema 3.2.6) koristit će nam za dokaz teorema 3.2.7 u nastavku. Sve leme imaju istu pretpostavku kao taj teorem. Teorem, kao i sve tri leme preuzeti su iz [7].

Lema 3.2.4. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut. Neka su α, β, γ i δ uzastopni kutovi pri vrhovima A, B, C i D . Također, neka su x, y, z i w duljine od vrhova četverokuta do dirališta istog četverokuta s kružnicom kao na Slici 3.3. Tangencijalni četverokut $ABCD$ je i tetivni ako i samo ako je

$$xz = yw.$$

Dokaz. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut. Budući da zbroj veličina kutova u svakom četverokutu iznosi 360° , slijedi da je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$. Zato znamo da su $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ i $\frac{\delta}{2}$ šiljasti te da vrijedi da je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} = 180^\circ$. Trebamo pokazati da vrijedi:



Slika 3.3: Teorem o dijagonalama bicentričnog četverokuta

$$\text{Četverokut } ABCD \text{ je tetivni} \iff \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}. \quad (3.4)$$

Sada dokazujemo tvrdnju (3.4).

\Rightarrow Ako je $ABCD$ tetivni, onda je $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$, tj. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2} = 90^\circ$.

Imamo

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 1$$

i

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\beta}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = 1.$$

Dokazali smo

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2},$$

odnosno jedan smjer tvrdnje (3.4).

☐ Drugi smjer dokazat ćemo obratom po kontrapoziciji. Ako $ABCD$ nije tetivni četverokut, onda bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} > 90^\circ$ i $\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2} < 90^\circ$. Iz

$$0 > \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

i činjenice da su $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\gamma}{2}$ šiljasti možemo zaključiti da je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} > 1$. Slično se dobije i da je $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} < 1$. Nadalje je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \neq \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$. Time je dokaz tvrdnje (3.4) gotov.

Sada vidimo (prema oznakama na Slici 3.3) da vrijede trigonometrijski omjeri

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x}, \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{y}, \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{z}, \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{r}{w}. \quad (3.5)$$

Uvrstimo li formule (3.5) u dokazanu tvrdnju (3.4), dobivamo:

$$\begin{aligned} \text{Četverokut } ABCD \text{ je tetivni} &\iff \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} \\ &\iff \frac{r}{x} \cdot \frac{r}{z} = \frac{r}{y} \cdot \frac{r}{w} \\ &\iff xz = yw, \end{aligned}$$

što smo i trebali dokazati. ☐

Lema 3.2.5. *Radijus r tangencijalnom četverokutu $ABCD$ upisane kružnice dan je izrazom*

$$r^2 = \frac{yzw + xzw + xyw + xyz}{x + y + z + w}, \quad (3.6)$$

sukladno oznakama na Slici 3.3.

Dokaz. Neka su α , β , γ i δ uzastopni unutarnji kutovi četverokuta $ABCD$ pri vrhovima A , B , C i D . Također, neka je $k = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $l = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $m = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ i $n = \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$. Neka su $\varepsilon_1 = \sum k$, $\varepsilon_2 = \sum kl$, $\varepsilon_3 = \sum klm$ i $\varepsilon_4 = \sum klmn$ elementarni simetrični polinomi u k , l , m i n . Prema [13] imamo:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4}.$$

Budući da vrijedi $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} = 180^\circ$, slijedi da je $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = 0$, pa zbog $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, tj.

$$\frac{r}{x} + \frac{r}{y} + \frac{r}{z} + \frac{r}{w} = \frac{r^3}{yzw} + \frac{r^3}{xzw} + \frac{r^3}{xyw} + \frac{r^3}{xyz}$$

slijedi (3.6). ☐

Lema 3.2.6 koristi Lemu 3.2.5 i daje formule za duljine dijagonala tangencijalnog četverokuta koje zapravo odgovaraju onima za tetivne četverokute.

Lema 3.2.6. *Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut. Neka su α, β, γ i δ uzastopni kutovi pri vrhovima A, B, C i D . Također, neka su x, y, z i w duljine od vrhova četverokuta do dirališta istog četverokuta s kružnicom kao na Slici 3.3. Označimo s e i f dijagonale \overline{AC} i \overline{BD} , redom. Tangencijalni četverokut $ABCD$ je i tetivni ako i samo ako je*

$$e^2 = \frac{x+z}{y+w} \cdot ((x+z)(y+w) + 4yw),$$

$$f^2 = \frac{y+w}{x+z} \cdot ((x+z)(y+w) + 4xz).$$

Dokaz. Koristimo li u računu lemu 3.2.5, vrijedi da je

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \frac{r^2}{x^2}}{1 + \frac{r^2}{x^2}} = \frac{x^2 - r^2}{x^2 + r^2} \\ &= \frac{x^2 \cdot (x+y+z+w) - (yzw + xzw + xyw + xyz)}{x^2 \cdot (x+y+z+w) + (yzw + xzw + xyw + xyz)} \\ &= \frac{x^2 \cdot (x+y+z+w) - (yzw + xzw + xyw + xyz)}{(x+y)(x+z)(x+w)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Stoga iz kosinusovog poučka i (3.7) slijedi:

$$\begin{aligned} f^2 &= (x+y)^2 + (x+w)^2 - 2 \cdot (x+y)(x+w) \cdot \cos \alpha \\ &= (x+y)^2 + (x+w)^2 - 2 \cdot \frac{x^2 \cdot (x+y+z+w) - (yzw + xzw + xyw + xyz)}{x+z} \\ &= \frac{y+w}{x+z} \cdot ((x+z)(y+w) + 4ac). \end{aligned}$$

Na sličan način dobije se i formula za kvadrat druge dijagonale, odnosno e^2 , čime je ova lema dokazana. \square

Teorem 3.2.7. *Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut s dijagonalama \overline{AC} i \overline{BD} duljina e i f redom. Neka su x, y, z i w duljine od vrhova četverokuta do dirališta istog četverokuta s kružnicom kao na Slici 3.3. Četverokut $ABCD$ je tetivni ako i samo ako vrijedi*

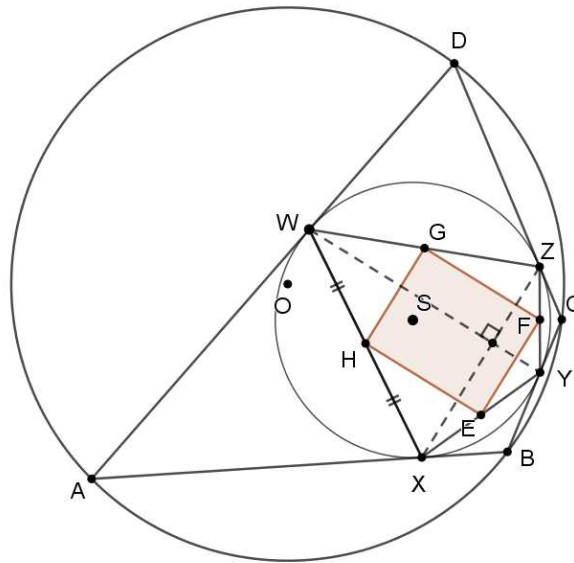
$$\frac{e}{f} = \frac{x+z}{y+w}.$$

Dokaz. Koristeći Lemu 3.2.4 i Lemu 3.2.6 vidimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} \text{Tangencijalni četverokut } ABCD \text{ je tetivan} &\Leftrightarrow xz = yw \Leftrightarrow 4xz = 4yw \\ &\Leftrightarrow (x+z)(y+w) + 4xz = (x+z)(y+w) + 4yw \Leftrightarrow \frac{f^2}{x+z} = \frac{e^2}{y+w} \\ &\Leftrightarrow \frac{e^2}{f^2} = \left(\frac{x+z}{y+w}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{e}{f} = \frac{x+z}{y+w}. \end{aligned}$$

□

Teorem 3.2.8. *Neka je dan tangencijalni četverokut $ABCD$ i neka njemu upisana kružnica sa središtem u S dira taj četverokut u točkama X, Y, Z i W tako da je $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{BC}$, $Z \in \overline{CD}$ i $W \in \overline{DA}$. Neka su točke E, F, G, H polovišta stranica \overline{XY} , \overline{YZ} , \overline{ZW} i \overline{WX} redom (kao na Slici 3.4). Tangencijalni četverokut je tetivni ako i samo ako je četverokut $EFGH$ pravokutnik.*



Slika 3.4: Svojstvo bicentričnog četverokuta da je $EFGH$ pravokutnik

Dokaz. Gledamo trokute ΔXZW i ΔHWG . Budući da su H i G polovišta stranica \overline{WX} , odnosno \overline{WZ} , imamo:

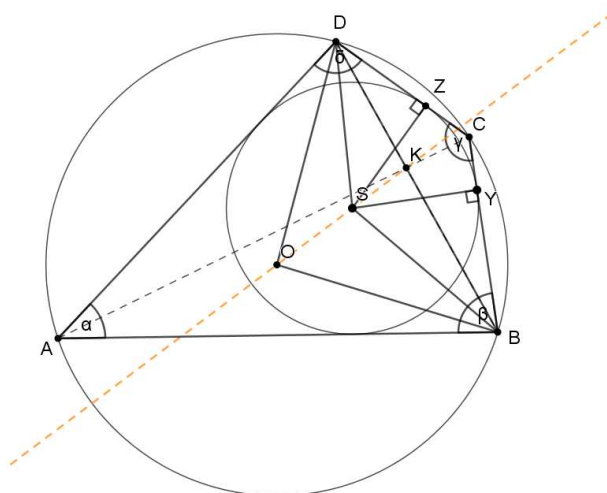
$$\frac{|XW|}{|HW|} = \frac{|WZ|}{|WG|} = 2.$$

Ta dva trokuta također imaju i zajednički kut $\sphericalangle XWZ$ (to jest $\sphericalangle HWZ$), pa su zato slični prema SKS poučku o sličnosti trokuta. Posljedica toga je da je $\frac{|XZ|}{|HG|} = 2$ i s obzirom na to da su im onda i preostala dva kuta sukkladna, $XZ \parallel HG$. Vidimo da je \overline{HG} zapravo srednjica trokuta $\triangle XZW$. Na isti način se dobije i da je \overline{EF} srednjica trokuta $\triangle XZY$, \overline{HE} srednjica trokuta $\triangle WYX$ i \overline{GF} srednjica trokuta $\triangle WYZ$. Sada smo dobili da je $|EH| = |GF|$ i $|EF| = |GH|$, kao i da je $EH \parallel GF$ i $EF \parallel GH$.

Pretpostavimo sada da je $ABCD$ tetivan četverokut. Prema Teoremu 3.2.3 znamo da je $ABCD$ tetivan četverokut ako i samo ako je $XZ \perp WY$. Ekvivalentno tomu je da je $HG \perp HE$. Drugim riječima, dokazali smo da je $EFGH$ pravokutnik. Kako su sve tvrdnje bile međusobno ekvivalente, dokazali smo oba smjera ovog teorema. \square

Teorem 3.2.9. *Dan je bicentrični četverokut $ABCD$ s opisanom kružnicom $k_o(O, R)$ i upisanom kružnicom $k_u(S, r)$. Neka je K točka u kojoj se sijeku dijagonale \overline{AC} i \overline{BD} tog četverokuta. Vrijedi da su točke O, S i K kolinearne.*

Dokaz. Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kutovi redom pri vrhovima A, B, C, D kao na Slici 3.5.



Slika 3.5: Teorem o trima kolinearnim točkama O, S i K

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su kutovi α i β šiljasti. U ovom slučaju i središte opisanog kruga O i središte upisanog kruga S leže unutar trokuta $\triangle ABK$. Budući da je četverokut $ABCD$ bicentričan, za njega vrijedi Teorem 2.3.2 za tetivne četverokute, pa imamo:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BSD &= 360^\circ - \frac{1}{2}\beta - \gamma - \frac{1}{2}\delta = 360^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \delta) - \gamma = 360^\circ - 90^\circ - \gamma \\ &= 270^\circ - \gamma = 270^\circ - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha. \end{aligned}$$

Kut $\sphericalangle BOD$ središnji je kut nad tetivom \overline{BD} , pa je dvostruko veći od obodnog kuta $\sphericalangle BAD$ nad istom tetivom, tj.

$$\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle BAD = 2\alpha.$$

Slično,

$$\begin{aligned} \sphericalangle ASC &= 360^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \delta - \frac{1}{2}\gamma = 360^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) - \delta = 270^\circ - \delta \\ &= 270^\circ - (180^\circ - \beta) = 90^\circ + \beta \end{aligned}$$

te

$$\sphericalangle AOC = 2 \cdot \sphericalangle ABC = 2\beta.$$

Sada primijetimo da trokuto $\triangle OBD$ i $\triangle SBD$ imaju jednu zajedničku stranicu \overline{BD} . Udaljenost točke O od \overline{BD} je zapravo duljina visine na stranicu \overline{BD} u trokutu $\triangle OBD$, a udaljenost točke S od \overline{BD} je zapravo duljina visine na stranicu \overline{BD} u trokutu $\triangle SBD$.

Površina trokuta je općenito jednaka polovini umnoška duljine stranice trokuta i duljine visine na tu stranicu. S druge strane, površina je također jednaka umnošku duljina dviju stranica trokuta i sinusa kuta između tih dviju stranica. Nadalje, trokuti $\triangle BSY$ i $\triangle SDZ$ su pravokutni, pa za njih možemo upotrijebiti trigonometriju pravokutnog trokuta. Iskoristimo li sve ovdje napisano, imamo:

$$\begin{aligned} \frac{d(O, BD)}{d(S, BD)} &= \frac{\frac{|BD| \cdot d(O, BD)}{2}}{\frac{|BD| \cdot d(S, BD)}{2}} = \frac{P_{\triangle OBD}}{P_{\triangle SBD}} = \frac{|OB| \cdot |OD| \cdot \sin(\sphericalangle BOD)}{|SB| \cdot |SD| \cdot \sin(\sphericalangle BSD)} \\ &= \frac{R^2 \sin 2\alpha}{\frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{\delta}{2}} \cdot \sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\delta}{2}}{\cos \alpha} \\ &= \frac{R^2}{r^2} \cdot \sin \alpha \cdot 2 \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \left(\frac{180^\circ - \beta}{2} \right) = \frac{R^2}{r^2} \cdot \sin \alpha \cdot 2 \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \\ &= \frac{R^2}{r^2} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sada gledamo koji ćemo rezultat dobiti za omjer ako umjesto dijagonale \overline{BD} upotrijebimo dijagonalu \overline{AC} . Tako je na sličan način kao gore:

$$\begin{aligned}
\frac{d(O, AC)}{d(S, AC)} &= \frac{\frac{|AC| \cdot d(O, AC)}{2}}{\frac{|AC| \cdot d(S, AC)}{2}} = \frac{P_{\Delta OAC}}{P_{\Delta SAC}} = \frac{|OA| \cdot |OC| \cdot \sin(\sphericalangle AOC)}{|SA| \cdot |SC| \cdot \sin(\sphericalangle ASC)} \\
&= \frac{R^2 \sin 2\beta}{\frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \sin(90^\circ + \beta)} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{2 \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \beta} \\
&= \frac{R^2}{r^2} \cdot \sin \beta \cdot 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \left(\frac{180^\circ - \alpha}{2} \right) = \frac{R^2}{r^2} \cdot \sin \beta \cdot 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\
&= \frac{R^2}{r^2} \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Vidimo da smo u (3.8) i (3.9) dobili isti rezultat. Drugim riječima,

$$\frac{d(O, BD)}{d(S, BD)} = \frac{d(O, AC)}{d(S, AC)} \iff \frac{d(O, AC)}{d(O, BD)} = \frac{d(S, AC)}{d(S, BD)},$$

što znači da su točke K , S i O kolinearne. □

Prethodni teorem preuzeli smo iz [1].

3.3 Odnos radijusa upisane i opisane kružnice

Fussov problem

Fussov problem (Teorem 3.3.1) dolazi od njemačkog matematičara Nicolausa Fussa (1755.-1826.), učenika i prijatelja velikog matematičara Leonharda Eulera (1707.-1783.), koji se prvi bavio bicentričnim četverokutima te je djelovao na Akademiji znanosti i umjetnosti u Sankt Petersburgu. Taj problem Heinrich Dörrie u svojoj knjizi [4] svrstava u sto velikih problema elementarne matematike. Fuss je ovim teoremom zapravo otkrio uvjet za egzistenciju bicentričnog četverokuta.

Izraz dan Fussovom teoremom jako nalikuje na Eulerov teorem za trokute, a to je zato što je on zapravo analogon Eulerovog teorema za trokute, ali se u svome teoremu Fuss bavi bicentričnim četverokutima. To je problem u kojem tražimo relaciju između polumjera upisane kružnice r , polumjera opisane kružnice R i udaljenosti d središta upisane kružnice S do središta opisane kružnice O za bilo koji bicentrični četverokut.

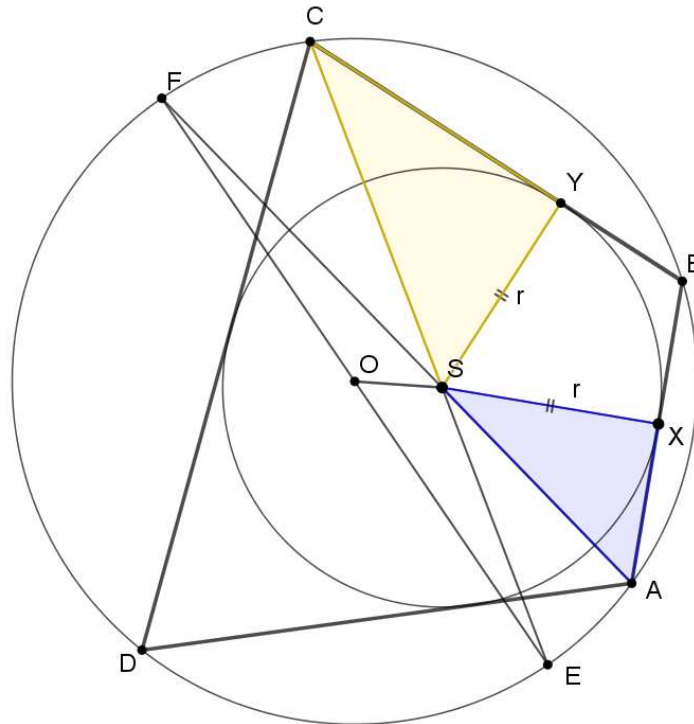
Poznato je nekoliko dokaza ovog teorema. Neki uključuju koncept Ponceletovog porizma, inverznu metodu ili neke druge analitičke metode. Mi ćemo ovaj teorem dokazati vrlo jednostavnom, elegantnom metričkom metodom koristeći samo alate klasične euklidske geometrije. Dokaz je preuzet iz [4] i [17].

Teorem 3.3.1 (Fussov teorem). *Neka je $ABCD$ bicentrični četverokut s polumjerom upisane kružnice r i polumjerom opisane kružnice R i neka je d udaljenost između središta S upisane i središta O opisane kružnice. Tada vrijedi sljedeća jednakost:*

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}. \quad (3.10)$$

Posebno, ukoliko je uvjet (3.10) zadovoljen, onda za svaku točku T na kružnici $k(O, R)$ postoji četverokut kojemu je ta kružnica također opisana, a kružnica $k(S, r)$ upisana kružnica.

Dokaz. Neka je zadan bicentrični četverokut $ABCD$ i njemu upisana kružnica $k_u(S, r)$, kao i njemu opisana kružnica $k_o(O, R)$. Neka su X i Y točke u kojima upisana kružnica k_u dira stranice četverokuta \overline{AB} , odnosno \overline{BC} (kao na Slici 3.6). Također, neka je d udaljenost središta upisane kružnice S do središta opisane kružnice O četverokuta $ABCD$.

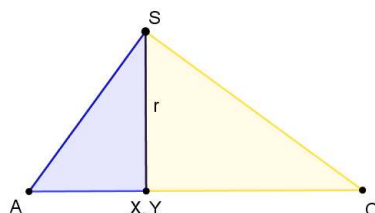


Slika 3.6: Fussov teorem

Kako je četverokut $ABCD$ tetivni, prema Teoremu 2.3.2 slijedi da su mu nasuprotni kutovi $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle DCB$ suplementarni. Posljedica toga je činjenica da su kutovi $\sphericalangle BAS$ i $\sphericalangle SCB$ komplementarni. Matematičkim zapisom imamo:

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle DCB| = 180^\circ \implies |\sphericalangle BAS| + |\sphericalangle SCB| = 90^\circ \implies |\sphericalangle XAS| + |\sphericalangle SCY| = 90^\circ. \quad (3.11)$$

Po konstrukciji znamo da je $|SX| = |SY| = r$. Zbog tvrdnje (3.11) i činjenice da je zbroj veličina kutova u trokutu 180° , slijedi da dva trokuta $\triangle AXS$ i $\triangle CSY$ zajedno čine pravokutni trokut s katetama $|AS|$ i $|CS|$ te hipotenuzom $|AX| + |YC|$. Taj trokut nalazi se na Slici 3.7. Površina ovog trokuta može se izračunati na dva načina (prikazano jed-



Slika 3.7: Novonastali pravokutni trokut u dokazu Fussovog teorema

nadžbama (3.12) i (3.13)):

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot (|AX| + |YC|) \cdot r, \quad (3.12)$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |SC|. \quad (3.13)$$

Izjednačimo li jednadžbe (3.12) i (3.13), dobit ćemo

$$(|AX| + |YC|) \cdot r = |AS| \cdot |SC|,$$

a kada to kvadriramo

$$(|AX| + |YC|)^2 \cdot r^2 = |AS|^2 \cdot |SC|^2. \quad (3.14)$$

Nadalje, primijenimo li Pitagorin poučak na naš novonastali trokut, dobivamo

$$(|AX| + |YC|)^2 = |AS|^2 + |SC|^2, \quad (3.15)$$

a kada cijeli izraz (3.15) pomnožimo s r^2 dobivamo:

$$r^2 \cdot (|AX| + |YC|)^2 = r^2 \cdot (|AS|^2 + |SC|^2).$$

Podijelimo li sada jednadžbu (3.15) jednadžbom 3.14 te taj izraz malo sredimo, dobivamo

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{|AS|^2} + \frac{1}{|CS|^2}. \quad (3.16)$$

Neka sada AS i CS sijeku k_o u točkama F i E redom kao na Slici 3.6. Tada je \overline{EF} promjer kružnice k_o jer zbog teorema o obodnom i središnjem kutu vrijedi:

$$\begin{aligned} \sphericalangle FOD + \sphericalangle DOE &= 2 \cdot (\sphericalangle FAD + \sphericalangle DCE) \\ &= \sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD \\ &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Došli smo do pozicije gdje možemo primijeniti formulu za duljinu težišnice $|SO|$ u trokutu $\triangle EFS$, pa imamo:

$$\begin{aligned} |EF|^2 + |FS|^2 &= 2 \cdot |SO|^2 + \frac{|EF|^2}{2} \\ &= 2d^2 + \frac{(2R)^2}{2}, \end{aligned}$$

odnosno, sredimo li taj izraz, dobivamo:

$$|EF|^2 + |FS|^2 = 2 \cdot (d^2 + R^2). \quad (3.17)$$

Uzimajući u obzir činjenicu da se točka S nalazi unutar četverokutu $ABCD$ opisane kružnice k_o na kojoj se nalaze točke A , C , E i F , možemo izjednačiti dva izraza za potenciju točke S :

$$|SA| \cdot |SF| = |SC| \cdot |SE| = R^2 - d^2. \quad (3.18)$$

Iz formule (3.18) imamo:

$$|AS| = \frac{R^2 - d^2}{|FS|}, \quad |CS| = \frac{R^2 - d^2}{|ES|},$$

pa vrijedi

$$\frac{1}{|AS|^2} + \frac{1}{|CS|^2} = \frac{|FS|^2}{(R^2 - d^2)^2} + \frac{|ES|^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{|ES|^2 + |FS|^2}{(R^2 - d^2)^2}.$$

Koristeći jednadžbu (3.17), dobivamo

$$\frac{1}{|AS|^2} + \frac{1}{|CS|^2} = \frac{2 \cdot (R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2}. \quad (3.19)$$

Konačno, iz (3.16) i (3.19) slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{|AS|^2} + \frac{1}{|CS|^2} = \frac{2 \cdot (R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{(R+d)^2 + (R-d)^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{(R+d)^2 + (R-d)^2}{(R-d)^2 \cdot (R+d)^2} \\ &= \frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2}, \end{aligned}$$

što smo i trebali dokazati. □

Yunova nejednakost

Kineski matematičar Zhang Yun, trenutno profesor matematike na Massachusetts Institute of Technology, u jednom od svojih radova utvrdio je nejednakost koja je po njemu nazvana Yunova nejednakost. Dok je njegov dokaz uglavnom usmjeren na kutove četverokuta i kako su oni povezani s radijusom upisane i opisane kružnice, naš se dokaz, preuzet iz [12], temelji na izračunima sa stranicama. Ova prilično nedavna nejednakost za bicentrične četverokute zapravo je proširenje Eulerove nejednadžbe $R \geq \sqrt{2} \cdot r$, pa ćemo prvo nju dokazati (prema [5]). Za dokaz ćemo koristiti Fussovu formulu (formulu (3.10)).

Teorem 3.3.2 (Eulerova nejednakost za bicentrične četverokute). *Neka je $ABCD$ bicentrični četverokut kojemu opisana kružnica ima polumjer R , a upisana kružnica polumjer r . Tada je*

$$R \geq r \cdot \sqrt{2}.$$

Dokaz. Vrijedi Fussova formula (formula ((3.10)) za bicentrične četverokute, gdje je d udaljenost između središta upisane i opisane kružnice četverokuta. Budući da središte upisane kružnice četverokuta leži unutar opisane kružnice istog, udaljenost od središta upisane do središta opisane kružnice četverokuta manja je od polumjera opisane kružnice, to jest imamo $d < R$. Sada, prema nejednakosti između harmonijske i kvadratne sredine, primijenjenoj na brojeve $\frac{1}{R+d}$ i $\frac{1}{R-d}$, pri čemu je prvi ovaj broj trivijalno pozitivan, a drugi je pozitivan zbog $d < R$, dobivamo

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}}{2}} \geq \frac{2}{(R+d) + (R-d)}.$$

S obzirom da su obje strane nejednakosti pozitivnog predznaka, smijemo kvadrirati:

$$\frac{\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}}{2} \geq \left(\frac{2}{(R+d) + (R-d)} \right)^2.$$

Nadalje,

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} \geq 2 \cdot \left(\frac{2}{(R+d) + (R-d)} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{2}{2R} \right)^2 = \frac{2}{R^2}.$$

Stoga

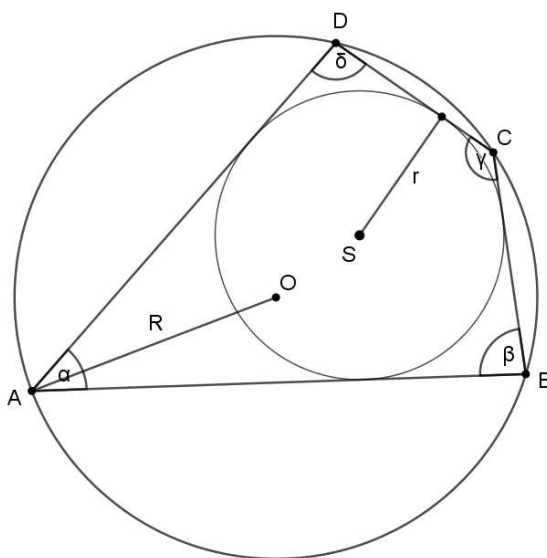
$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} \geq \frac{2}{R^2}$$

i prema tome je $R^2 \geq 2r^2$, odnosno $R \geq \sqrt{2} \cdot r$. Time smo dokazali našu tvrdnju. \square

Teorem 3.3.3 (Yunova nejednakost). Neka je r radijus upisane, a R radijus opisane kružnice bicentričnog četverokuta. Tada vrijedi:

$$\frac{r\sqrt{2}}{R} \leq \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \leq 1, \quad (3.20)$$

pri čemu su α, β, γ i δ redom kutovi pri vrhovima A, B, C i D bicentričnog četverokuta $ABCD$.



Slika 3.8: Yunova nejednakost

Dokaz. U idućem poglavlju, u kojem ćemo se baviti površinom bicentričnih četverokuta, dokazat ćemo sljedeće formule (vidi Korolar 3.4.3):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{bc}{ad}} = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{cd}{ab}} = \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prethodnih formula u trigonometrijske identitete za sinus i kosinus po-

lovičnog kuta

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}}$$

dobivamo

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{bc}{ad+bc}} = \cos \frac{\gamma}{2}, \quad (3.21)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{ad}{ad+bc}} = \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (3.22)$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{cd}{ab+cd}} = \cos \frac{\delta}{2}, \quad (3.23)$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{ab}{ab+cd}} = \sin \frac{\delta}{2}. \quad (3.24)$$

Vrijede sljedeće formule za radijus upisane i opisane kružnice u bicentričnom četverokutu ([2]):

$$r = \frac{2 \cdot \sqrt{abcd}}{a+b+c+d},$$

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}}.$$

Formula za radijus R opisane kružnice bicentričnog četverokuta zapravo je poseban slučaj Parameshvarine formule za radijus opisane kružnice tetivnog četverokuta koja za $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ izgleda ovako:

$$R = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{(a \cdot b + c \cdot d) \cdot (a \cdot c + b \cdot d) \cdot (a \cdot d + b \cdot c)}{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \cdot (s-d)}}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \frac{r\sqrt{2}}{R} &= \frac{8\sqrt{2} \cdot abcd}{(a+b+c+d)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}} \\ &\leq \frac{8\sqrt{2} \cdot abcd}{4 \cdot \sqrt[4]{abcd} \cdot \sqrt{(ab+cd)(ad+bc)} \cdot \sqrt{2}\sqrt{abcd}} \\ &= \frac{2\sqrt{abcd}}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

pri čemu smo dva puta koristili aritmetičko–geometrijsku nejednakost. Sada radi jednostavnosti označimo trigonometrijski izraz koji se nalazi u zagradama u Yunovoj nejednakosti (3.20) sa Σ , odnosno

$$\Sigma = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Formule (3.21), (3.22), (3.23) i (3.24) impliciraju sljedeće:

$$\Sigma = \frac{\sqrt{ab^2c} + \sqrt{bc^2d} + \sqrt{acd^2} + \sqrt{a^2bd}}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}} = \frac{(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})(\sqrt{ad} + \sqrt{bc})}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}}.$$

Iskoristimo li ponovno aritmetičko–geometrijsku nejednakost, dobivamo

$$(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})(\sqrt{ad} + \sqrt{bc}) \geq 2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \cdot 2\sqrt{\sqrt{ad}\sqrt{bc}} = 4\sqrt{abcd}.$$

Stoga,

$$\frac{r\sqrt{2}}{R} \leq \frac{2\sqrt{abcd}}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}} \leq \frac{1}{2}\Sigma.$$

Ovime smo dokazali lijevi dio Yunove nejednakosti. Da bismo dokazali i desni dio, moramo pokazati da vrijedi

$$\frac{(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})(\sqrt{ad} + \sqrt{bc})}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}} \leq 2, \quad (3.26)$$

ali je zbog simetrije dovoljno pokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{\sqrt{ab+cd}} \leq \sqrt{2}.$$

Budući da su i lijeva i desna strana ove nejednakosti pozitivni brojevi, možemo ju zapisati i ovako

$$(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 \leq 2(ab+cd) \Leftrightarrow 2\sqrt{abcd} \leq ab+cd,$$

što je upravo aritmetičko–geometrijska nejednakost. Ovo dovršava naš dokaz Yunove nejednakosti za bicentrične četverokute. \square

Primijetimo da će na lijevoj strani Yunove nejednakosti jednakost vrijediti samo kada su sve stranice bicentričnog četverokuta jednake duljine. Naime, u računu (3.25), koristili smo da je $a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$ pri čemu jednakost vrijedi samo ako je $a = b = c = d$. Na desnoj strani ćemo imati jednakost samo ako je $ab = cd$ i $ad = bc$, što je ekvivalentno s $a = c$ i $b = d$ (vidi (3.26)). Dakle, jednakost na obje strane Yunove nejednakosti se postiže ako i samo ako je bicentrični četverokut kvadrat.

Primijetimo i da se, budući da su nasuprotni kutovi u bicentričnom četverokutu suplementarni, Yunova nejednakost, osim u obliku (3.20), također može izraziti i ovako:

$$\frac{r\sqrt{2}}{R} \leq \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \cos \frac{\delta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \leq 1.$$

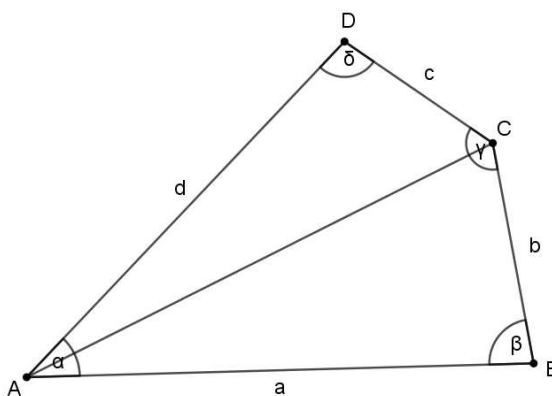
3.4 Površina

U sljedećem teoremu izvest ćemo formulu za površinu bicentričnog četverokuta. Koristimo dokaz iz [11] uz mala proširenja.

Teorem 3.4.1. *Neka su a, b, c i d duljine stranica bicentričnog četverokuta $ABCD$. Za površinu bicentričnog četverokuta $ABCD$ vrijedi*

$$P_{ABCD} = \sqrt{abcd}. \quad (3.27)$$

Dokaz. Neka su α, β, γ i δ uzastopni kutovi pri vrhovima A, B, C i D , redom (kao na Slici 3.9). Dijagonala AC dijeli četverokut $ABCD$ na dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$. Koris-



Slika 3.9: Površina bicentričnog četverokuta

teći kosinusov poučak, imamo

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta. \quad (3.28)$$

S obzirom da je ovaj četverokut tangencijalan, vrijedi Pitotov teorem (Teorem 2.2.3), odnosno

$$a + c = b + d.$$

Jednadžba (3.28) ekvivalentna je

$$(a - b)^2 = (d - c)^2,$$

odnosno

$$a^2 - 2ab + b^2 = d^2 - 2cd + c^2. \quad (3.29)$$

Oduzimanjem (3.29) od (3.28) imamo

$$2ab - 2ab \cos \beta = 2cd - 2cd \cos \delta,$$

a nakon dijeljenja s 2:

$$ab(1 - \cos \beta) = cd(1 - \cos \delta). \quad (3.30)$$

Iz Teorema 2.3.2 znamo da su u tetivnom četverokutu nasuprotni kutovi suplementarni. Zato vrijedi $\cos \delta = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$. Sada jednadžbu (3.30) možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} ab(1 - \cos \beta) &= cd(1 + \cos \beta) \\ (ab + cd) \cdot \cos \beta &= ab - cd. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Za površinu P_{ABCD} bicentričnog četverokuta vrijedi

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{1}{2}ab \sin \beta + \frac{1}{2}cd \sin \delta = \frac{1}{2}ab \sin \beta + \frac{1}{2}cd \sin \beta \\ &= \frac{1}{2}(ab + cd) \sin \beta. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sada koristeći jednadžbe (3.31), (3.32) i osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, za površinu P_{ABCD} bicentričnog četverokuta imamo

$$\begin{aligned} P_{ABCD}^2 &= \frac{1}{4}(ab + cd)^2 \sin^2 \beta = \frac{1}{4}(ab + cd)^2 (1 - \cos^2 \beta) \\ &= \frac{1}{4}(ab + cd)^2 - \frac{1}{4}(ab + cd)^2 \cos^2 \beta = \frac{1}{4}(ab + cd)^2 - \frac{1}{4}(ab - cd)^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot abcd + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot abcd = abcd. \end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo da je površina bicentričnog četverokuta $P_{ABCD} = \sqrt{abcd}$. \square

Sljedeća nam dva korolara i teorem donose neka zanimljiva svojstva bicentričnih četverokuta vezana za površinu. Iste smo preuzeli iz [11].

Korolar 3.4.2. *Bicentrični četverokut $ABCD$ s duljinama stranica a, b, c i d ima površinu*

$$P = ac \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = bd \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

pri čemu je φ kut između dijagonala \overline{AC} i \overline{BD} četverokuta $ABCD$.

Dokaz. Kut φ između dijagonala \overline{AC} i \overline{BD} četverokuta $ABCD$ dan je formulom

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{bd}{ac}$$

preuzetom iz [16]. Otuda, koristeći formulu (3.27) dobivamo:

$$P^2 = abcd = (ac)(bd) = (ac)(bd) \cdot \frac{ac}{ac} = (ac)^2 \cdot \frac{bd}{ac} = (ac)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2},$$

a nakon korjenovanja

$$P = ac \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Na sličan način dobije se i druga formula. □

Korolar 3.4.3. *Za bicentrični četverokut $ABCD$ s duljinama stranica a, b, c, d i kutovima α, β, γ i δ pri vrhovima A, B, C i D redom vrijedi*

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{bc}{ad}} = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{cd}{ab}} = \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Dokaz. Dobro poznata trigonometrijska formula za tangens polovičnog kuta, formula (3.30) i činjenica da je $\cos \delta = -\cos \beta$ daju

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}} = \sqrt{\frac{cd}{ab}}.$$

U tetivnom četverokutu vrijedi da je $\beta = 180^\circ - \delta$, pa je

$$\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \delta}{1 - \cos \delta}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}} = \sqrt{\frac{cd}{ab}}.$$

Analogno dobivamo formulu za α . □

Možemo primijetiti da nije samo površina ta koja ima jednostavne izraze s duljinama stranica. Prethodni korolar nam pokazuje jednostavnu vezu između veličine kutova i duljina stranica. U sljedećem ćemo teoremu vidjeti da površina bicentričnog četverokuta također daje uvjet kada je tangencijalni četverokut tetivni.

Teorem 3.4.4. *Tangencijalni četverokut $ABCD$ s duljinama stranica a, b, c i d također je i tetivni ako i samo ako za njegovu površinu vrijedi $P = \sqrt{abcd}$.*

Dokaz. Neka je dan tangencijalni četverokut $ABCD$. Sa Slike 3.9 vidio da površinu četverokuta možemo zapisati kao zbroj površina trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$. Imamo

$$P = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{1}{2}ab \sin \beta + \frac{1}{2}cd \sin \delta,$$

$$4P = 2ab \sin \beta + 2cd \sin \delta.$$

Primjenom kosinusovog poučka imamo

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos \beta - 2cd \cos \delta.$$

Napokon, kombinacijom svega ranije napisanog, imamo

$$16P^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cos(\beta + \delta),$$

a kada izrazimo $16P^2$:

$$\begin{aligned} 16P^2 &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd \cos(\beta + \delta) \\ &= (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd \cdot (1 + \cos(\beta + \delta)) \\ &= 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - 8abcd \cdot (1 + \cos(\beta + \delta)), \end{aligned}$$

pri čemu je $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. Nadalje je

$$P^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\beta + \delta}{2}\right).$$

Po pretpostavci je četverokut $ABCD$ tangencijalni. Zato znamo da vrijedi da je $a + c = b + d = \frac{1}{2}(a + b + c + d) = s$. Slijedi da je $s - a = c$, $s - b = d$, $s - c = a$ i $s - d = b$. Sada je površina tangencijalnog četverokuta jednaka:

$$P^2 = abcd - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\beta + \delta}{2}\right)$$

$$P = \sqrt{abcd} \cdot \sin\left(\frac{\beta + \delta}{2}\right)$$

Četverokut $ABCD$ će biti i tetivni ako i samo ako je $\beta + \delta = 180^\circ$. Kako je $\sin 90^\circ = 1$, vidimo da je tangencijalni četverokut također i tetivni ako i samo ako je njegova površina $P = \sqrt{abcd}$. \square

U ovoj karakterizaciji važna je formulacija teorema. Tangencijalni i tetivni četverokut ne mogu mijenjati uloge u formulaciji. To se može vidjeti na sljedećem primjeru. Iako je pravokutnik tetivni četverokut čija površina zadovoljava formulu $P = \sqrt{abcd}$ (budući da su mu nasuprotne stranice jednake duljine), on nije i tangencijalni četverokut (jer mu se općenito ne može upisati kružnica).

3.5 Ponceletov porizam

Izvanredan teorem o bicentričnim mnogokutima dao je francuski matematičar Jean-Victor Poncelet u prvoj polovici 19. stoljeća. Teorem je poznat pod imenom Ponceletov teorem zatvaranja, odnosno Ponceletov porizam. Pojam porizma spominje se još u Euklidovo doba te njegova definicija nije skroz precizna. Taj pojam odnosi se na formulaciju uvjeta pod kojima stanovita relacija, na primjer međusobni položaj proizvoljnih geometrijskih objekata, nastupa za beskonačno mnogo početnih vrijednosti. Ovaj teorem nam kaže da ako za neke dvije kružnice k_u i k_o možemo pronaći jedan n -terostrani mnogokut ($n > 2$) koji je istovremeno upisan u k_o (što znači da svi njegovi vrhovi leže na k_o) i opisan oko k_u (što znači da su sve njegove stranice tangentne na k_u), onda ih možemo pronaći beskonačno mnogo. Kraće, Ponceletov teorem govori o tome da ukoliko postoji neki mnogokut koji je upisan vanjskoj konici i opisan unutarnjoj konici, onda postoji beskonačno mnogo takvih mnogokuta. Dokaz teorema preuzet je iz [3].

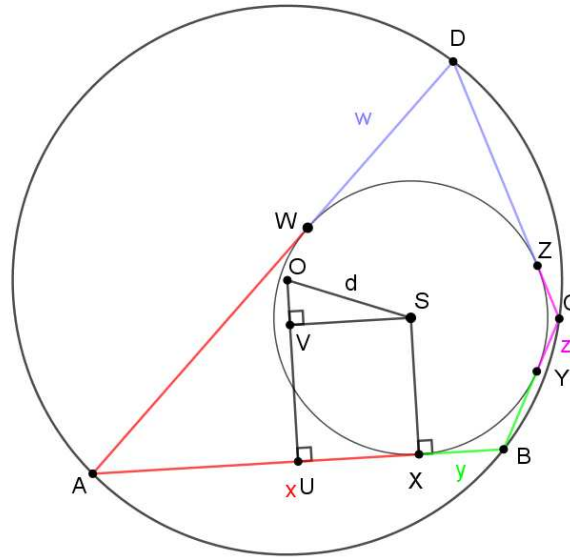
Teorem 3.5.1 (Ponceletov teorem zatvaranja). *Ako su dvije kružnice, jedna unutar druge, upisana i opisana kružnica bicentričnog četverokuta, tada je svaka točka na opisanoj kružnici vrh bicentričnog četverokuta koji ima istu upisanu i opisanu kružnicu.*

Dokaz. Označimo s d udaljenost središta S i O kružnica $k_u(S, r)$ i $k_o(O, R)$. Riješimo li relaciju (3.10), odnosno relaciju iz Fussovog teorema tako da izrazimo duljinu d , dobit ćemo

$$d^2 = R^2 + r^2 - r \sqrt{4R^2 + r^2}. \quad (3.34)$$

Ako ta relacija vrijedi, onda je to dovoljan uvjet za postojanje bicentričnog četverokuta, to jest četverokuta s upisanom kružnicom $k_u(S, r)$ i opisanom kružnicom $k_o(O, R)$. Uvedimo sljedeće oznake: $x = |AX|$, $y = |XB|$, $z = |CZ|$ i $w = |DW|$. Također, neka je $U \in \overline{AB}$ takav da su pravci OU i SX paralelni. Neka je V točka na pravcu OU takva da je $VS \parallel UX$. Sada, primjenom Pitagorinog poučka u pravokutnom trokutu $\triangle OSV$ imamo

$$|UX|^2 + (|XS| - |OU|)^2 = d^2$$



Slika 3.10: Ponceletov teorem

te zbog (3.34) dobivamo

$$\frac{(x-y)^2}{x} + r^2 - 2r|OU| + R^2 - \frac{(x+y)^2}{4} = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2},$$

odnosno

$$r\sqrt{4R^2 + r^2} - xy = r\sqrt{4R^2 - (x+y)^2}.$$

Nakon kvadriranja imamo

$$2rxy\sqrt{4R^2 + r^2} = r^4 + r^2(x+y)^2 + x^2y^2.$$

Na sličan način je i

$$2ryz\sqrt{4R^2 + r^2} = r^4 + r^2(y+z)^2 + y^2z^2.$$

Nakon što se posljednje dvije jednakosti podijele i nakon što izvršimo još malo popratnog računa dobit ćemo sljedeće:

$$r^4 + (y^2 - xz)r^2 - xy^2z = 0 \implies (r^2 - xz)(r^2 + y^2) = 0 \implies xz = r^2.$$

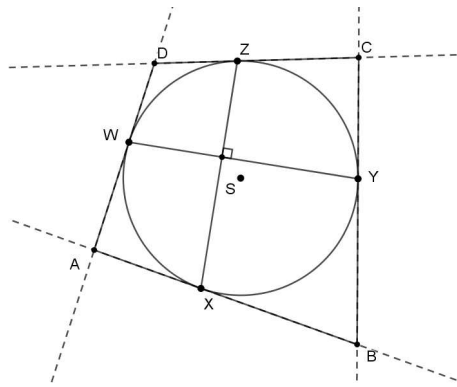
Dakle, $D \in k_o(O, R)$.

□

3.6 Konstrukcija

Vjerojatno najčešće korištena metoda za preciznu konstrukciju bicentričnog četverokuta temelji se na Teoremu 3.2.3 i glasi ovako.

Uzmimo proizvoljnu duljinu r . Prvo ćemo konstruirati upisanu kružnicu $k_u(S, r)$. Zatim u kružnici konstruiramo dvije međusobno okomite tetive \overline{XZ} i \overline{YW} kao na Slici 3.11. U krajnjim točkama tih tetivi X, Y, Z i W konstruiramo tangente na kružnicu k_u . Te tetive sijeku se u točkama A, B, C, D . Konstruirali smo četverokut.



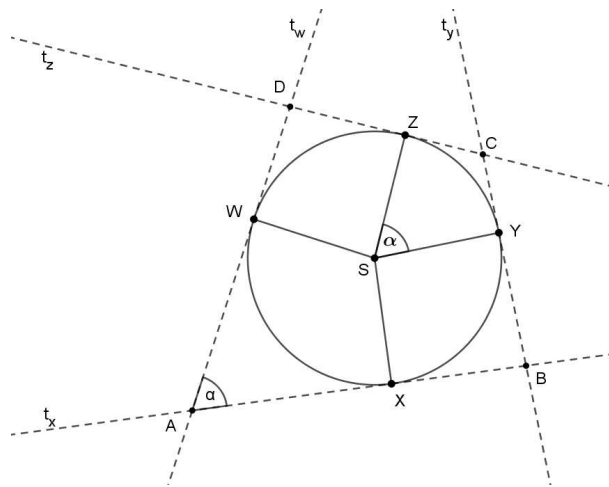
Slika 3.11: Konstrukcija bicentričnog četverokuta pomoću Teorema 3.2.3

Dokaz. Konstruirali smo tangencijalni četverokut s međusobno okomitim tangentskim tetivama. Teorem 3.2.3 nam govori da su u tangencijalnom četverokutu tangentske tetive okomite ako i samo je taj četverokut bicentričan. Time je ovaj dokaz gotov. \square

U nastavku slijedi još jedna jednostavna konstrukcija preuzeta iz [18].

Uzmimo proizvoljnu duljinu r . Započet ćemo s konstrukcijom upisane kružnice $k_u(S, r)$. Na dva proizvoljno konstruirana radijusa \overline{SX} i \overline{SW} konstruiramo tangente t_x i t_w redom. Sjecište ove dvije tangente označimo s A te kut pri vrhu A (između tih dviju tangenti) označimo s α . Nadalje, biramo još jedan proizvoljan radijus \overline{SY} kružnice k_u te ga rotiramo za kut α (kao na Slici 3.12). Novodobiveni radijus jest radijus \overline{SZ} , odnosno tom rotacijom se točka Y preslikala u točku Z . Sada konstruiramo tangente t_y i t_z na kružnicu k_u redom u točkama Y i Z . Točku B dobivamo presjekom tangenti t_x i t_y . Točku D dobivamo presjekom tangenti t_w i t_z . Točku C dobivamo presjekom tangenti t_y i t_z . Time je konstrukcija bicentričnog četverokuta završena.

Dokaz. Četverokut koji smo konstruirali sigurno je tangencijalan. Trebamo pokazati da je i tetivan. Prema konstrukciji je $|\sphericalangle XAW| = |\sphericalangle YSZ| = \alpha$. Sada gledamo četverokut $SYCZ$. Kutovi pri vrhovima Z i Y sukladni su i njihova je mjera 90° zbog svojstva da je



Slika 3.12: Konstrukcija bicentričnog četverokuta na još jedan način

tangenta na kružnicu u nekoj točki okomita na radijus te kružnice u istoj točki. Budući da je zbroj veličina kutova u četverokutu 360° , slijedi da je $|\angle ZCY| = 180^\circ - \alpha$. Posljedica toga je i $|\angle CBA| + |\angle ADC| = 180^\circ$. Teorem 2.3.2 implicira činjenicu da je $ABCD$ tetivni, pa tako i bicentrični četverokut. \square

Poglavlje 4

Ostali bicentrični mnogokuti

4.1 Definicija

Osim što postoje četverokuti kojima se može upisati i opisati kružnica, postoje i drugi mnogokuti koji imaju oba ova svojstva. Slijede definicije.

Definicija 4.1.1. *Konveksni mnogokut kojemu se može upisati kružnica naziva se **tangencijalni mnogokut**.*

Definicija 4.1.2. *Konveksni mnogokut kojemu se može opisati kružnica naziva se **tetivni mnogokut**.*

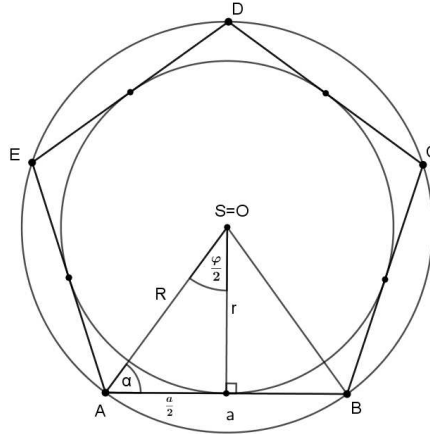
Definicija 4.1.3. *Konveksni mnogokut kojemu se može i upisati i opisati kružnica naziva se **bicentrični mnogokut**.*

Drugim riječima, možemo reći da je bicentrični mnogokut zapravo mnogokut koji je istovremeno i tangencijalni i tetivni. Radijus opisane kružnice označava se s R , dok se radijus upisane kružnice označava s r . Središte opisane kružnice označavat ćemo s O , a središte mnogokutu upisane kružnice sa S . Primjer bicentričnog mnogokuta jest svaki trokut, kao i svaki pravilni mnogokut. U sljedećoj sekciji kratko ćemo se baviti pravilnim mnogokutima.

4.2 Pravilni mnogokuti

U pravilnom mnogokutu, upisana i opisana kružnica imaju središte u istoj točki (koncentrične su) pa je udaljenost između središta upisane kružnice S i središta opisane kružnice O uvijek nula. Zanimaju nas neke formule koje uključuju radijus upisane kružnice r i radijus opisane kružnice R . Na primjeru pravilnog peterokuta pogledajmo koje to formule vrijede za sve pravilne mnogokute.

Svaki pravilni mnogokut koji ima više od tri stranice ima svoj karakteristični trokut. To je trokut $\triangle ABS$, odnosno $\triangle ABO$ prema oznakama na Slici 4.1. Neka je duljina stra-



Slika 4.1: Pravilni peterokut

nice mnogokuta a . Kut φ iznosi $\frac{360^\circ}{n}$, pri čemu je n broj stranica pravilnog n -terokuta. Primijetimo da povlačenjem visine na stranicu \overline{AB} dijelimo karakteristični (jednakokračni) trokut na dva sukladna pravokutna trokuta. Sada možemo koristiti trigonometriju pravokutnog trokuta. Slijedi da je

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{360^\circ}{2n} = \sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \implies R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}},$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{r}{R} \implies R = \frac{r}{\cos \frac{180^\circ}{n}}.$$

To su neke od formula za bicentrične mnogokute koji su pravilni, a da pritom povezuju radijuse r i R .

U sljedećem poglavlju reći ćemo nešto više o svojstvu bicentričnosti ne nužno pravilnih mnogokuta.

4.3 Svojstva bicentričnih mnogokuta

Prema [15] za bicentrične mnogokute postoje relacije između radijusa r mnogokutu upisane kružnice, radijusa R mnogokutu opisane kružnice te udaljenosti d između središta upisane kružnice S i središta opisane kružnice O . Spomenute relacije naravno

ovise o broju stranica mnogokuta. Ako sa n označimo broj stranica mnogokuta, slijedi da za $n = 3$ vrijedi

$$d^2 = R^2 - 2Rr \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d}.$$

Ovo je zapravo Eulerova formula koju smo dokazali u prvom poglavlju kada smo spominjali trokute koji su uvijek bicentrični. Nadalje, za $n = 4$ imamo isto ranije dokazanu Fussovu formulu:

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2) \Leftrightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}.$$

Za $n = 5$ je

$$r \cdot (R - d) = (R + d) \cdot iR - r - d \cdot (iR - r + d + i \cdot 2r).$$

Za $n = 6$ je

$$3 \cdot (R^2 - d^2)^4 = 4r^2(R^2 + d^2)(R^2 - d^2) + 16R^2 d^2 r^4.$$

Kružnice bicentričnih mnogokuta imaju jako zanimljivo svojstvo zvano **Ponceletov porizam**. Njega smo već spominjali kod bicentričnih četverokuta. On nam govori o postojanju mnogokuta koji je istovremeno upisan jednoj, a opisan drugoj konici. Mi se u ovome radu ne bavimo općenito konikama, nego isključivo kružnicama. Ljepše možemo izreći i ovako: ako za neke dvije kružnice k_u i k_o možemo pronaći jedan n -terostrani mnogokut ($n > 2$) koji je istovremeno upisan u k_o (što znači da svi njegovi vrhovi leže na k_o) i opisan oko k_u (što znači da su sve njegove stranice tangentne na k_u), onda ih možemo pronaći beskonačno mnogo. Da bismo to još malo precizirali, definirajmo takozvanu opisanu kružnicu $k_o(O, R)$ i upisanu kružnicu $k_u(S, r)$. Povucimo sada iz proizvoljne točke A_1 na opisanu kružnicu k_o tangentu na upisanu kružnicu k_u . Neka je druga presječna točka ovog pravca s k_o točka A_2 . Sljedeća tangenta iz A_2 na k_u siječe k_o u točki A_3 , i tako dalje. Točka A_{n+1} ovog postupka podudara se s točkom A_1 . Slijed tako nacrtanih segmenata zaustavlja se dakle pri n -tom koraku donoseći nam Ponceletov porizam za kružnice. Ponceletov teorem jedan je od najviše proučavanih teorema u projektivnoj geometriji.

Bibliografija

- [1] *A bicentric quadrilateral ABCD*. dostupno na <https://math.stackexchange.com/questions/3592891/a-bicentric-quadrilateral-abcd> (rujan 2022.).
- [2] Beyer, W. H.: *Standard Mathematical Tables*. CRC Press, Inc., Florida, 1987.
- [3] Drăgan, M.: *Inequalities in bicentric quadrilateral*. Editura Paralela 45, 2020.
- [4] Dörrie, H.: *100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*. Dover Publication, Inc., New York, 1965.
- [5] Grinberg, Darij: *Prove that $R \geq \sqrt{2}r$ in bicentric quadrilateral*. dostupno na <https://artofproblemsolving.com/community/c6h18914> (rujan 2022.).
- [6] Habib, M., W. Pakornrat, L. P. Alonso, C. Lin i J. Khim: *Pitot's Theorem*. dostupno na <https://brilliant.org/wiki/pitots-theorem/> (rujan 2022.).
- [7] Hajja, M.: *A Condition for a Circumscribable Quadrilateral to be Cyclic*. Forum Geometricorum, 8:103–106, 2008.
- [8] Ilišević, D. i M. Bombardelli: *Elementarna geometrija*. skripta, verzija 1.0, 2007.
- [9] Josefsson, M.: *Calculations Concerning the Tangent Lengths and Tangency Chords of a Tangential Quadrilateral*. Forum Geometricorum, 10:123–124, 2010.
- [10] Josefsson, M.: *Characterizations of Bicentric Quadrilaterals*. Forum Geometricorum, 10:165–166, 2010.
- [11] Josefsson, M.: *The Area of a Bicentric Quadrilateral*. Forum Geometricorum, 11:155–163, 2011.
- [12] Josefsson, M.: *A New Proof of Yun's Inequality for Bicentric Quadrilaterals*. Forum Geometricorum, 12:79–82, 2012.
- [13] Loney, S. L.: *Plane Trigonometry*. Cambridge: University Press, England, 1893.

- [14] Merkaš, A.: *Vrste mnogokuta*. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2018.
- [15] Reiman, I.: *International Mathematical Olympiad vol. II*. Anthem Press, London, 2005.
- [16] Robson, A. i C. V. Durell: *Advanced Trigonometry*. Dover Publications, inc., New York, 2003.
- [17] Salazar, J. C.: *Fuss' theorem*. The Mathematical Gazette, 90:306–307, 2006.
- [18] Villiers, M.: *Some other bicentric constructions*. dostupno na <http://dynamicmathematicslearning.com/new-bicentric-construction.html> (rujan 2022.).
- [19] Žužul, M.: *Opća svojstva konveksnog četverokuta*. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2019.

Sažetak

U ovom radu bavili smo se bicentričnim mnogokutima. Dobro je poznato da se svakom trokutu kružnica može i upisati i opisati. Eulerova formula za trokut, koju smo i dokazali, daje nam vezu između polumjera njemu upisane i opisane kružnice. Kao uvod u temu bicentričnih četverokuta, na kojima je u ovome radu naglasak, bilo je važno barem ukratko opisati i dati neke osnovne karakterizacije dviju dobro nam znanih klasa četverokuta, a to su tangencijalni i tetivni četverokuti. Bicentrični četverokuti su četverokuti koji su istovremeno tetivni i tangencijalni. Kao takvi, imaju neke zanimljive karakterizacije, a i rezultate koji se između ostalog odnose na vezu između radijusa upisane i opisane kružnice bicentričnih četverokuta. Prirodno se nametnulo dokazati analogon Eulerove formule za trokute poznat pod imenom Fussov teorem, kao i Yunovu nejednakost koja povezuje unutarnje kutove četverokuta te oba radijusa. Izvanredan teorem koji nam govori o postojanju četverokuta koji je istovremeno upisan jednoj, a opisan drugoj kružnici dao je francuski matematičar Jean-Victor Poncelet, a teorem je poznat pod imenom Ponceletov porizam. On je primjenjiv na sve mnogokute te zbog njega znamo da ukoliko postoji neki mnogokut koji je upisan vanjskoj kružnici i opisan unutarnjoj, onda postoji beskonačno mnogo takvih mnogokuta.

Summary

In this thesis, our main theme was bicentric polygons. It is well known that every triangle possesses both an incircle and a circumcircle. Euler's triangle formula, which we have proven, gives us a relation between the inradius and the circumradius. As an introduction to the main focus of this paper, bicentric quadrilaterals, it was important to, at least briefly, describe and give some basic characterizations of two well-known classes of quadrilaterals: tangential and cyclic quadrilaterals. Bicentric quadrilaterals are quadrilaterals that are cyclic and tangential at the same time. As a result, they have some interesting characterizations and results that, among others, relate to the connection between both the radii of the incircle and circumcircle of bicentric quadrilaterals. Naturally, it was necessary to prove the analogue of Euler's triangle formula known as Fuss's theorem, as well as Yun's inequality, which connects the interior angles of the quadrilateral and both radii. A remarkable theorem that tells us about the existence of a quadrilateral that is simultaneously inscribed in one circle and circumscribed around another one was discovered by the French mathematician Jean-Victor Poncelet, and the theorem is known as Poncelet's porism. It can be applicable to all polygons and that theorem gives us a statement that if there exists a polygon of n -sides which is inscribed in a given circle and circumscribed about another circle, then infinitely many such polygons exist.

Životopis

Rođena sam 25. studenog 1998. godine u Zagrebu. Godine 2005. krenula sam u prvi razred Osnovne škole Lučko u Lučkom. Opću XI. gimnaziju u Zagrebu upisala sam 2013. godine, a po završetku iste, 2017. godine, upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike; nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom Fakultetu u Zagrebu. Tijekom školovanja bavim se sviranjem klavira i orgulja u glazbenoj školi kao i sviranjem tamburice u kulturno umjetničkom društvu. Godine 2020. stječem zvanje univ. bacc. educ. math., a također te godine nastavljam i školovanje na diplomskom studiju istog smjera. Za vrijeme diplomskog studija, u organizaciji fakulteta odradila sam metodičku praksu nastave matematike u osnovnoj školi Dobriše Cesarića i XI. gimnaziji u Zagrebu. Tijekom cijelog studija radila sam razne studentske poslove i aktivno držala individualne poduke učenicima osnovnih i srednjih škola iz matematike i sviranja tamburice. Time sam unaprijedila svoje komunikacijske i organizacijske vještine, radne navike te stekla sposobnost rada u timu.