

# Bisektrise površine i opsega trokuta

---

Mrčela, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:051679>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-13**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ivan Mrčela

**BISEKTRISE POVRŠINE I OPSEGA**  
**TROKUTA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, Rujan, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Osnovni pojmovi</b>	<b>3</b>
1.1 Pojmovi iz elementarne geometrije . . . . .	3
1.2 Bisektrise površine . . . . .	8
1.3 Bisektrise opsega . . . . .	11
1.4 Jednostavni primjeri AP-bisektrisa . . . . .	14
<b>2 Povezanost AP-bisektrise i kvadratne jednadžbe</b>	<b>17</b>
2.1 Generalizirane AP-bisektrise . . . . .	17
2.2 Broj AP-bisektrisa u trokutu . . . . .	25
2.3 Konstrukcija AP-bisektrise . . . . .	29
<b>3 Deltoida kao ovojnica bisektrisa</b>	<b>37</b>
3.1 Deltoida bisektrisa površine . . . . .	38
3.2 Deltoida bisektrisa opsega . . . . .	42
<b>Bibliografija</b>	<b>47</b>

# Uvod

U ovom radu bavit ćemo se zanimljivim svojstvima skupova pravaca koji raspolavljaju trokut u smislu njegove površine ili opsega. Zbog tog svojstva takvi pravci nazivaju se bisektrisama površine ili opsega trokuta, a postoje i skupovi pravaca koji zadovoljavaju oba navedena kriterija te su kao takvi posebno interesantni.

U kombinatornoj geometriji proučavaju se i znatno općenitiji problemi particije ravninskih područja ili prostornih tijela na dijelove koji ispunjavaju zadane uvjete na površinu ili opseg, odnosno na volumen. Jedan tip problema je sljedeći: može li se za svaki zadani prirodni broj  $n$ ,  $n \geq 2$ , bilo koji konveksni poligon podijeliti u  $n$  konveksnih podskupova, tako da svaki od tih dijelova ima jednaku površinu i opseg? Dobro je poznato da je odgovor potvrđan za  $n = 2$ , a ima dosta rezultata i za neke druge vrijednosti  $n$ . Argument za postojanje bisektrisa površine i opsega konveksnih poligona zasniva se na neprekidnosti. Ako se iz bilo koje točke  $P$  na rubu poligona povlače pravci koji spajaju tu točku s drugim točkama na rubu, što se može opisati rotacijom pravca točkom  $P$ , dobivaju se konveksni podskupovi čija površina neprekidno raste od nule do površine cijelog poligona. Postoji jedinstvena točka  $Q$  takva da je pravac  $PQ$  bisektrisa površine poligona. Pritom, opsezi dobivenih konveksnih poligona mogu biti različiti, a tada se promatra funkcija razlike opsega dvaju dijelova kad se točke  $P$  i  $Q$  gibaju duž ruba tako da pravci  $PQ$  ostaju bisektrise površine. Vidi se da ta funkcija poprima vrijednosti suprotnih predznaka kad  $P$  i  $Q$  gibanjem međusobno zamijene položaje pa stoga za neke pozicije  $P$  i  $Q$  mora poprimiti vrijednost 0, što znači da će za te pozicije i opsezi dijelova biti jednaki. Sličan način razmišljanja može se primijeniti i na općenitije ravninske figure, no u ovom radu detaljno se bavimo opisom bisektrisa površine i opsega za trokute. [8]

U prvom poglavlju iskazat ćemo važnije definicije i teoreme iz elementarne geometrije koje ćemo kasnije koristiti u uvođenju novih pojmova i dokazivanju tvrdnji. Iskazat ćemo neke osnovne ideje i teoreme vezane uz bisektrise. Za svaki tip pravaca izložiti ćemo nekoliko primjera različitih trokuta i promatrati koliko postoji određenih bisektrisa. Posebnu pažnju posvetit ćemo pravcima koji imaju oba svojstva istovremeno a koje nazivamo AP-bisektrisama.

U drugom poglavlju, bavit ćemo se povezanošću upravo takvih bisektrisa s kvadratnom jednadžbom. Naime, pokazalo se da određena kvadratna jednadžba uvelike pojednostavljuje opisivanje i prebrojavanje takvih pravaca. Uz prebrojavanje i opisivanje slučajeva trokuta u kojima se pojavljuju različite bisektrise, pokazat ćemo postupak konstrukcije takvih pravaca. Pokazalo se da skup bisektrisa površine i bisektrise opsega čini ovojnici koja svojim oblikom podsjeća na poznatu Steinerovu deltoidu. Pokazat ćemo razliku između Steinerove deltoide i promatranih deltoida u trokutu.

Pokazalo se da skup bisektrisa čini krivulju dobivenu kao ovojnica tangenti na određene hiperbole u slučaju bisektrisa površine, odnosno tangenti parabola u slučaju bisektrisa opsega. Iskazat ćemo svojstva tih deltoida i usporediti razlike između deltoide bisektrisa površine i deltoide bisektrisa opsega. Uz sama svojstva bisektrisa, pokazat ćemo i neke zanimljive trokute kojima su duljine stranica cijeli brojevi a kojima se može konstruirati pravac koji raspolavlja i površinu i opseg.

Rad se temelji na rezultatima iz članaka [1], [5], [6].

# Poglavlje 1

## Osnovni pojmovi

### 1.1 Pojmovi iz elementarne geometrije

U ovom poglavlju ću iskazati i dokazati neke teoreme iz elementarne geometrije koje ću koristiti dalje u iskazivanju novih svojstava pravaca koje ćemo proučavati.

**Teorem 1.1.1** (O potenciji točke). *Neka je  $k$  kružnica, a  $T$  točka ravnine. Neka je  $p$  bilo koji pravac koji prolazi točkom  $T$  i siječe kružnicu  $k$  u točkama  $A$  i  $B$ . Tada je vrijednost izraza  $|TA| \cdot |TB|$  konstantna, tj. ne ovisi o izboru pravca  $p$ .*

*Dokaz.*

1°  $T \in k$

Tada se jedna točka  $A$  ili  $B$  podudara s  $T$ , pa je ili  $|TA| = 0$  ili  $|TB| = 0$ . U oba slučaja je umnožak  $|TA| \cdot |TB| = 0$ .

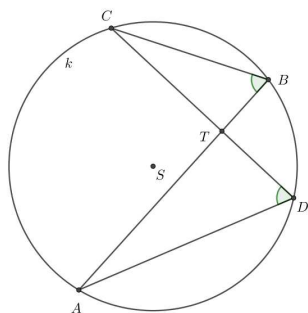
2°  $T$  je unutar kružnice  $k$ . (Slika 1.1)

Neka su kroz točku  $T$  povučena dva pravca. Neka prvi pravac siječe  $k$  u  $A$  i  $B$ , a drugi u  $C$  i  $D$ .

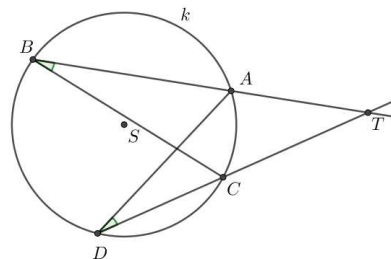
Kako je  $\angle ATD = \angle CTB$  (vršni kutovi) i  $\angle CBT = \angle TDA$  (obodni kutovi nad lukom  $\widehat{AC}$ ), to su trokuti  $\triangle ATD$  i  $\triangle CTB$  slični prema K-K teoremu o sličnosti. Slijedi  $\frac{|TA|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TB|}$  iz čega dobivamo  $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ .

3°  $T$  je izvan kružnice  $k$ . (Slika 1.2)

Neka su kroz točku  $T$  povučena dva pravca. Neka prvi pravac siječe kružnicu  $k$  u  $A$  i  $B$ , a drugi u  $C$  i  $D$ . Trokuti  $\triangle ATD$  i  $\triangle CTB$  imaju zajednički kut pri vrhu  $T$ . Uz to je i  $\angle CBT = \angle TDA$  (obodni kutovi nad  $\widehat{AC}$ ) pa su ti trokuti slični prema K-K teoremu o sličnosti. Slijedi,  $\frac{|TA|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TB|}$ , iz čega dobivamo  $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ .



Slika 1.1: Točka je unutar kružnice



Slika 1.2: Točka je izvan kružnice

□

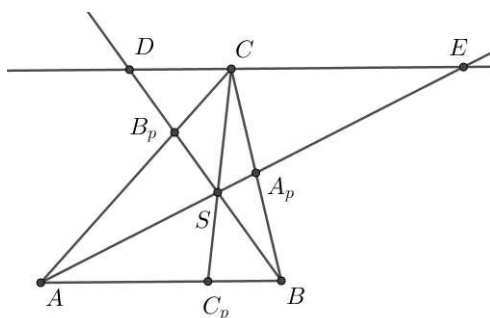
Za danu točku  $T$  i kružnicu  $k$  definira se potencija točke s obzirom na kružnicu  $k$ . Za točku izvan kružnice potencija točke  $T$  je konstantan produkt  $|TA| \cdot |TB|$ , za točku  $T$  unutar kružnice, potencija točke  $T$  je konstantan produkt  $-|TA| \cdot |TB|$ . Ako je točka  $T$  na kružnici, potencija iznosi 0.

**Teorem 1.1.2. (Cevin teorem)** Neka su  $A_p, B_p, C_p$  točke na stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  trokuta  $\triangle ABC$ . Pravci  $AA_p, BB_p, CC_p$  prolaze kroz jednu točku ako i samo ako vrijedi

$$\frac{|AC_p|}{|C_pB|} \cdot \frac{|BA_p|}{|A_pC|} \cdot \frac{|CB_p|}{|B_pA|} = 1. \quad (1.1)$$

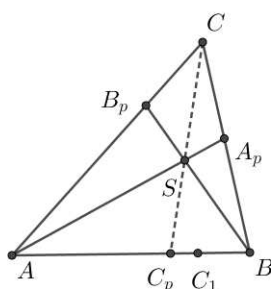
Pravce  $AA_p, BB_p, CC_p$  još zovemo **Cevinim pravcima**.

*Dokaz.* Neka se pravci  $AA_p, BB_p, CC_p$  sijeku u točki  $S$ . Vrhom  $C$  povučemo paralelu s  $AB$ . Neka je  $D$  sjecište te paralele s  $BB_p$ , a  $E$  njeno sjecište s  $AA_p$ . Prema K-K-K teoremu je



Slika 1.3: Cevin teorem





Slika 1.4: Obrat Cevinog teorema

$$\begin{aligned} \triangle CDB_p &\sim \triangle ABB_p, \text{ pa je } \frac{|CB_p|}{|B_pA|} = \frac{|CD|}{|AB|}, \\ \triangle ECA_p &\sim \triangle AA_pB, \text{ pa je } \frac{|BA_p|}{|A_pC|} = \frac{|AB|}{|CE|}, \\ \triangle SAC_p &\sim \triangle SEC_p, \text{ pa je } \frac{|AC_p|}{|CE|} = \frac{|C_pS|}{|CS|}, \\ \triangle CDS &\sim \triangle C_pBS_p, \text{ pa je } \frac{|CD|}{|C_pB|} = \frac{|CS|}{|C_pS|} \end{aligned}$$

Slijedi

$$\frac{|CB_p|}{|B_pA|} \cdot \frac{|BA_p|}{|A_pC|} \cdot \frac{|AC_p|}{|CE|} \cdot \frac{|CD|}{|C_pB|} = \frac{|CD|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|CE|} \cdot \frac{|C_pS|}{|CS|} \cdot \frac{|CS|}{|C_pS|} \quad (1.2)$$

nakon kraćenja imamo:

$$\frac{|AC_p|}{|C_pB|} \cdot \frac{|BA_p|}{|A_pC|} \cdot \frac{|CB_p|}{|B_pA|} = 1. \quad (1.3)$$

Obratno, neka je vrijedi 1.3. Neka je  $S$  presjek pravaca  $AA_p$  i  $BB_p$ , a sa  $C_1$  presjek pravaca  $CO$  i  $AB$ . Slijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_p|}{|A_pC|} \cdot \frac{|CB_p|}{|B_pA|} = 1. \quad (1.4)$$

Dakle,

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_p|}{|A_pC|} \cdot \frac{|CB_p|}{|B_pA|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_p|}{|A_pC|} \cdot \frac{|CB_p|}{|B_pA|} \quad (1.5)$$

pa je

$$\frac{|AC_p|}{|BC_p|} = \frac{|AC_1|}{|BC_1|} \quad (1.6)$$

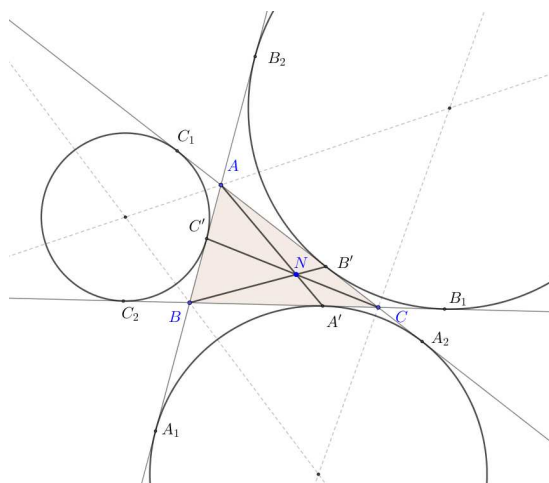
Kako točke  $C_p$  i  $C_1$  leže na dužini  $\overline{AB}$  slijedi da je  $C_p = C_1$   $\square$

**Teorem 1.1.3. (Nagelov teorem)** *Neka su  $A', B', C'$  dirališta pripisanih kružnica trokuta  $\triangle ABC$  redom sa stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ . Tada se pravci  $AA', BB', CC'$  sijeku u jednoj točki.*

*Dokaz.* Vidi sliku 1.5 Neka je  $2s = a + b + c$  opseg trokuta  $\triangle ABC$ . Tada vrijedi  $|BC'| = |CB'| = s - a$ ,  $|AC'| = |CA'| = s - b$ ,  $|AB'| = |BA'| = s - c$ . Slijedi

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} = 1 \quad (1.7)$$

Prema Cevinom teoremu slijedi da se pravci  $AA', BB', CC'$  sijeku u jednoj točki. Tu točku nazivamo **Nagelova točka**.  $\square$

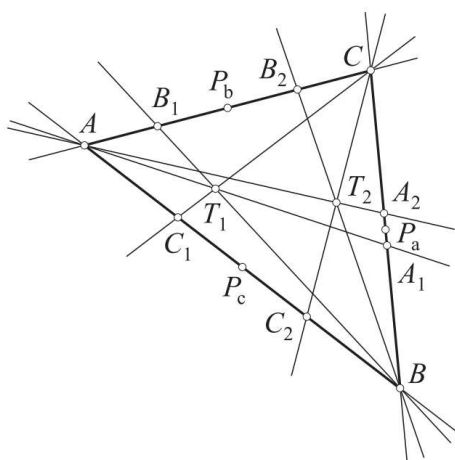


Slika 1.5: Nagelova točka trokuta  $\triangle ABC$

Uz pojam Nagelove točke koristit ćemo izotomične točke pri opisivanju deltoide.

**Definicija 1.1.4.** Neka je zadan trokut  $\triangle ABC$ , te neka su točke  $A_1$  i  $A_2$  točke na pravcu  $BC$ , simetrične u odnosu na polovište  $P_a$  dužine  $\overline{BC}$ . Tada kažemo da su pravci  $AA_1$  i  $AA_2$  izotomični.

**Teorem 1.1.5.** Pravci izotomični Cevinim pravcima trokuta  $\triangle ABC$ , koji su pridruženi bilo kojoj točki  $T_1$  ravnine trokuta, prolaze jednom točkom  $T_2$ .



Slika 1.6: Točke  $T_1$  i  $T_2$  su međusobno izotomične točke, a parovi  $AA_1$  i  $AA_2$ ,  $BB_1$  i  $BB_2$ ,  $CC_1$  i  $CC_2$  su izotomični pravci.

Bilo kojoj po volji odabranoj točki  $T_1$  ravnine može se na ovaj način pridružiti točka  $T_2$ . Očito je točki  $T_2$  na isti način pridružena točka  $T_1$ . Točke  $T_1$  i  $T_2$  zovemo **izotomičnim točkama** trokuta. [7] Definirajmo sada ključni pojam ovog rada, koji se nalazi i u samom naslovu te će se odsad vrlo često koristiti. To je bisektrisa trokuta. Promatrat ćemo tri tipa bisektrisa; bisektrise površine, bisektrise opsega i bisektrise površine i opsega trokuta.

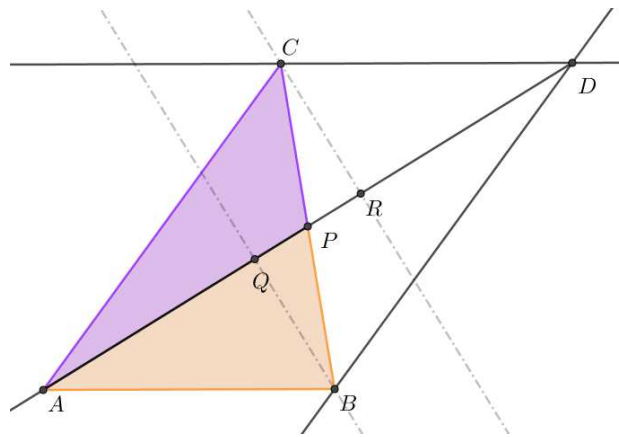
**Definicija 1.1.6.** Neka je zadan trokut  $ABC$  sa stranicama  $|AB| = c, |BC| = a, |AC| = b$  i neka je  $s = \frac{a+b+c}{2}$  poluopseg zadanog trokuta. Neka su točke  $M \in AB$  i  $N \in AC$ . Za pravac  $MN$  kažemo da je

- (i) bisektrisa opsega u odnosu na vrh  $A$  ako vrijedi  $|MA| + |AN| = |MB| + |BC| + |CN| = s$ .
- (ii) bisektrisa površine u odnosu na vrh  $A$  ako vrijedi  $P(MAN) = P(MBCN)$ , gdje je  $MBCN$  četverokut (ili trokut ako pravac  $MN$  prolazi kroz vrh  $A$ ).
- (iii) bisektrisa opsega i površine (**AP-bisektrisa**, od eng. *area-perimeter bisector*) ako ujedno bisektrisa opsega i bisektrisa površine u odnosu na vrh  $A$ .

## 1.2 Bisektrise površine

Svaka ravninska figura ima beskonačan broj pravaca koji raspolavljaju njenu površinu. Štoviše, postoji točno jedna bisektrisa za svaki smjer u ravnini. U slučaju kvadrata i kruga, bisektrise se jednostavno pronađu jer sve prolaze kroz središte kvadrata, odnosno kruga. Slično se konstruiraju i bisektrise paralelograma, elipse te pravilnog mnogokuta općenito. Ali, u slučaju jednakokračnog trokuta nemamo beskonačno mnogo bisektrisa. U slučaju jednakostraničnog trokuta postoje samo tri bisektrise koje prolaze kroz njegovo središte. [3]

Promotrimo sliku 1.7. Pokazat ćemo da je težišnica  $AP$  uistinu bisektrisa koja raspolavlja  $\triangle ABC$  na dva trokuta jednakih površina.



Slika 1.7: Težišnica  $AP$  raspolavlja trokut  $ABC$  na dva trokuta jednakih površina

*Dokaz.* Konstruirajmo proizvoljan  $\triangle ABC$  i polovište  $P$  stranice  $BC$ . Kroz točku  $B$  povučemo paralelan pravac sa  $AC$ , i kroz točku  $C$  paralelan pravac s  $AB$ . Presjek tih paralela je točka  $D$ . Dobivamo paralelogram  $ABCD$ . Promotrimo trokute  $\triangle ABP$  i  $\triangle DCP$ . Prema S-K-S poučku o sukkladnosti trokuta ( $|AP| = |PD|$ ,  $|BP| = |PC|$ ,  $\angle APB = \angle DPC$ ) slijedi  $\triangle ABP \cong \triangle DCP$ . Prema tome, visine tih dvaju trokuta iz vrhova  $B$  i  $C$  su sukladne iz čega slijedi  $P(\triangle ABP) = P(\triangle APC)$ . Analogno se pokaže za ostale težišnice iz vrhova  $B$  i  $C$ .  $\square$

### Veza omjera i bisektrise površine

U članku [6] "Halving a triangle" iz 1972. godine, J. A. Dunn i J. E. Pretty su opisali problematiku "raspolavljanja trokuta". Pokazali su da postoje pravci koji su paralelni s jednom stranicom i odsijecaju originalan trokut na slične trokute u omjeru  $1 : (\sqrt{2} + 1)$ .

**Propozicija 1.2.1.** Neka je zadan trokut  $\triangle ABC$ . Na dužini  $\overline{AB}$  je točka  $M$ , na dužini  $\overline{AC}$  je točka  $N$ , tako da vrijedi  $|BC| : |MN| = 1 : \sqrt{2} + 1$  i  $BC \parallel MN$ . Dobivamo dva slična trokuta  $\triangle ABC$  i  $\triangle AMN$ . Tada vrijedi

$$P(\triangle AMN) = P(\triangle MBCN) \quad (1.8)$$

*Dokaz.* Neka je zadan trokut  $\triangle ABC$  i točke  $M \in AB, N \in AC$  tako da vrijedi  $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{\sqrt{2}+1}{1}$ . Trokut  $\triangle NPC$  je sličan trokutu  $\triangle AMN$ . Tada prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti vrijedi i  $\frac{|AN|}{|NC|} = \frac{|AA'|}{|NN'|} = \frac{|MN|}{|PC|} = \frac{\sqrt{2}+1}{1}$  gdje su  $A', N'$  nožišta visina iz  $A$  i  $N$ . Točka  $P$  dobivena je kao presjek paralele s  $AB$  kroz točku  $N$  (Slika 1.8). Izračunajmo površinu trokuta  $\triangle AMN$ .

$$\begin{aligned} P(\triangle AMN) &= \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |AA'| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot (\sqrt{2} + 1) \cdot |NN'| \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \cdot |MN| \cdot |NN'| \end{aligned}$$

Uočimo paralelogram  $MBPN$ , njegova površina iznosi

$$P(\triangle MBPN) = |MN| \cdot |NN'|$$

Trokut  $\triangle NPC$  ima površinu

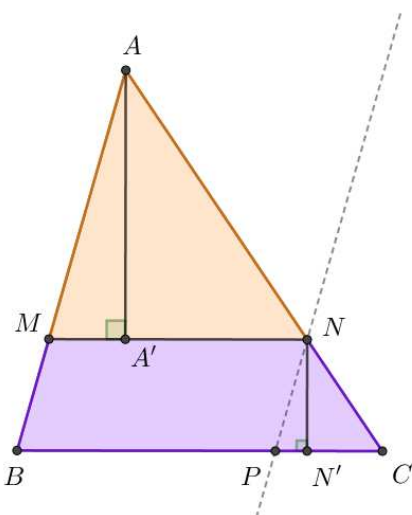
$$\begin{aligned} P(\triangle NPC) &= \frac{1}{2} \cdot |PC| \cdot |NN'| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot |MN| \cdot |NN'| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2} + 2} \cdot |MN| \cdot |NN'| \end{aligned}$$

Ako zbrojimo površine paralelograma  $MBPN$  i trokuta  $\triangle NPC$  dobivamo površinu četverokuta  $MBCN$

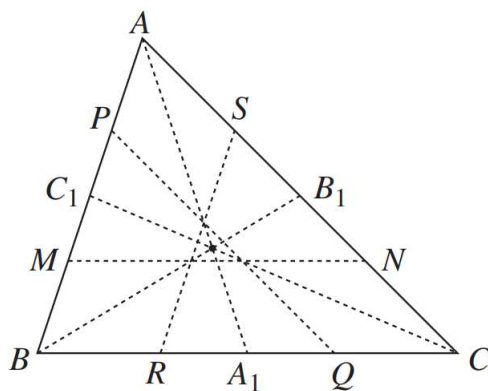
$$\begin{aligned} P(\triangle MBCN) &= \frac{1}{2\sqrt{2} + 2} \cdot |MN| \cdot |NN'| + |MN| \cdot |NN'| \\ &= |MN| \cdot |NN'| \cdot \frac{2\sqrt{2} + 3}{2\sqrt{2} + 2} \\ &= |MN| \cdot |NN'| \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Dokazali smo jednakost površina trokuta  $\triangle AMN$  i četverokuta  $MBCN$ . □

Analogno se pokaže za pravce koji su paralelni s drugim stranicama trokuta  $ABC$ .



Slika 1.8: Pravac  $MN$  je paralela sa  $BC$  koja raspolavlja trokut na dvije jednake površine

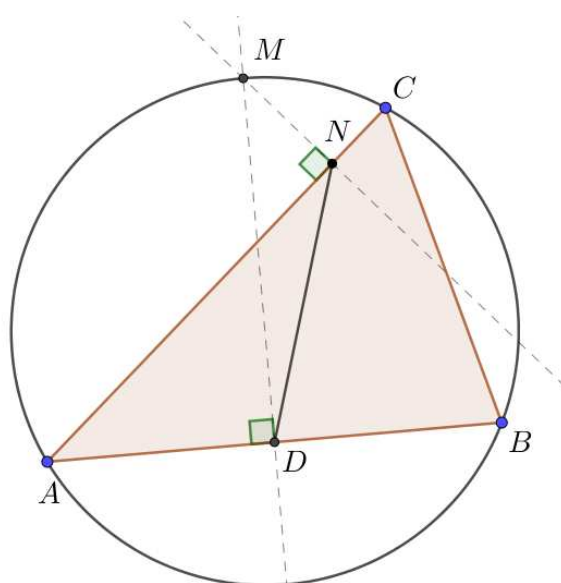


Slika 1.9: Šest pravaca koji raspolavljaju površinu trokuta

### 1.3 Bisektrise opsega

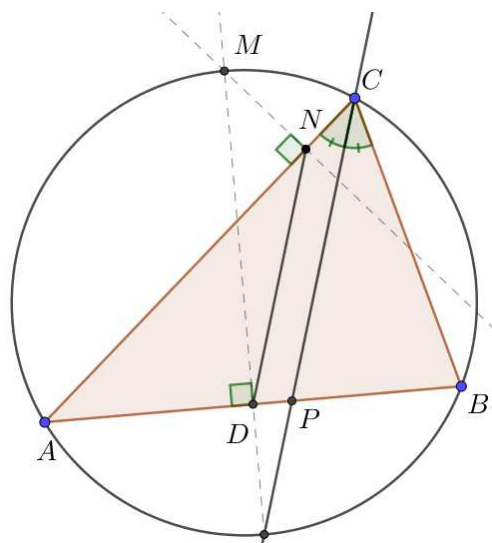
Osim pravaca koji raspolavljaju površinu trokuta možemo promatrati i pravce koji raspolavljaju opseg trokuta. Opisat ćemo kratku konstrukciju takvog pravca. Neka je zadan trokut  $\triangle ABC$ . Odredimo središte opisane kružnice i konstruiramo opisanu kružnicu. Na dužini  $AB$  pronađemo polovište  $D$  simetralom dužine. Simetrala presijeca luk nad tetivom  $AB$  i dobivamo točku  $M$  na kružnici. Povučemo okomicu iz točke  $M$  na  $AC$  i dobivamo točku  $N \in AC$  (Slika 1.10). Kažemo da pravac  $ND$  dijeli opseg trokuta na dva jednaka dijela. [2]. Svaki trokut ima tri bisektrise opsega koje su paralelne sa simetralom kuta.

Kako bi se zorno prikazali pojmovi bisektrise opsega, najprije treba iskazati i dokazati nekoliko pomoćnih teorema i lema koji će se koristiti pri opisivanju takvih pravaca.



Slika 1.10:  $|NA| + |AD| = |DB| + |BC| + |CN|$

**Teorem 1.3.1.** *Neka je  $\triangle ABC$  i neka je  $ND$  bisektrisa opsega u trokutu. Svaka bisektrisa je paralelna sa simetralom kuta kroz vrh koji se nalazi nasuprot raspolovljene stranice trokuta. (Slika 1.11)*

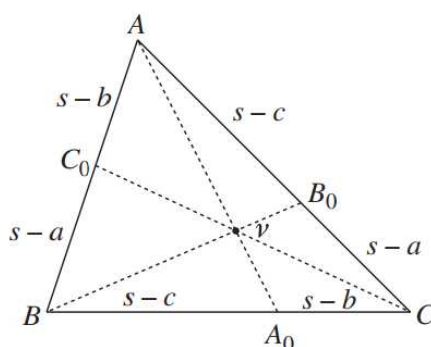
Slika 1.11: Pravci  $ND$  i  $CP$  su paralelni

Mogu se promatrati pravci koji dijele opseg trokuta na dva jednaka dijela. Ako promatramo bisektrise opsega koje prolaze kroz vrhove trokuta, uočavamo da se sijeku u istoj točki. Kako bismo dokazali ovu tvrdnju koristit ćemo poznat teorem iz elementarne geometrije (Teorem 1.1.2).

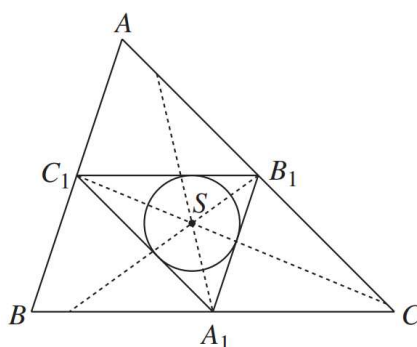
Pravci  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $CC_0$  (Slika 1.12) koji prolaze kroz vrhove trokuta  $\triangle ABC$  su bisektrise opsega trokuta. Prethodno pokazanom tvrdnjom o Nagelovoj točki (Teorem 1.1.3), dobivamo da se ti pravci uistinu sijeku u istoj točki. Odsječci  $|BA_0| = |AB_0| = s - c$ ,  $|AC_0| = |CA_0| = s - b$ ,  $|BC_0| = |CB_0| = s - a$  su korišteni u dokazu za Nagelov teorem. Dakle, postoje tri bisektrise opsega koje prolaze kroz vrhove.

Nadalje, bisektrise koje su paralelne sa simetralama kuta (Teorem 1.3.1) također postoje u svakom trokutu. Zaključujemo da uvijek postoji šest bisektrisa opsega u proizvoljnom trokutu  $\triangle ABC$ .





Slika 1.12: Bisektrise opsega kroz vrhove trokuta su čevijane kroz Nagelovu točku.

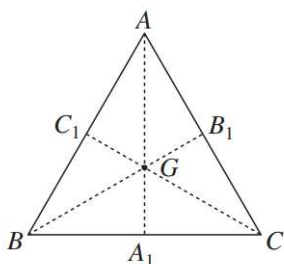


Slika 1.13: Bisektrise opsega koje su paralelne sa simetralama kutova sijeku se u Spiekerovoj točki

**Definicija 1.3.2.** Neka je zadan trokut  $\triangle ABC$  i polovišta stranica  $A_1, B_1, C_1$ . Upisanom trokutu  $\triangle A_1B_1C_1$  upišemo kružnicu. Središte te kružnice naziva se Spiekerova točka (Slika 1.13).

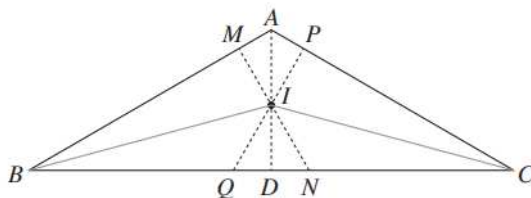
## 1.4 Jednostavni primjeri AP-bisektrisa

**Primjer 1.4.1.** Jednakostraničan trokut  $ABC$  ima težišnice  $AA_1, BB_1, CC_1$ . Težišnice raspolavljaju površinu i opseg trokuta. Težišnice se sijeku u točki  $G$  koja predstavlja težište (Slika 1.14). U ovom radu takve ćemo pravce skraćeno zvati AP-bisektrise (*area-perimeter bisector*).



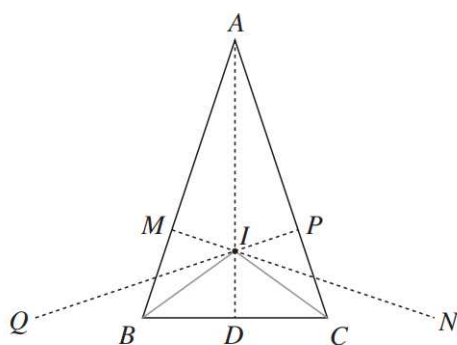
Slika 1.14: Jednakostraničan trokut i njegove AP-bisektrise

**Primjer 1.4.2.** Jednakokrtačan trokut (Slika 1.15) u kojemu je  $|AB| = |AC|$ , ima tri AP-bisektrise; težišnica  $AD$  i dužine  $MN, PQ$ . Težišnica je ujedno i os simetrije stoga očito raspolavlja površinu i opseg trokuta. Ako preslikamo  $\triangle BAD$  u odnosu na simetralu kuta  $\angle CBA$  dobivamo  $\triangle BNM$  pa slijedi da su ti trokuti sukladni. Analogno, preslikavanjem  $\triangle CAD$  u odnosu na simetralu kuta  $\angle ACB$  istim postupkom zaključujemo  $\triangle CAD \cong \triangle CQP$ . Zbog simetrije u trokutu slijedi da se dužine  $AD, MN$  i  $PQ$  sijeku u istoj točki  $I$ . Kako su osi simetrije simetrala kuta, njihovo je sjecište upravo središte upisane kružnice.



Slika 1.15: Jednakokrtačni trokut s tri AP-bisektrise

**Primjer 1.4.3.** Neka je jednakokračan trokut zadan tako da  $|AB| = |AC|$  i  $|AB| > |BC|$ . (Slika 1.16) Ako promatramo simetralu kuta  $\angle ABC$  kao os simetrije, preslikavanjem dužine  $AB$  s obzirom na simetralu dobivamo točke  $M$  i  $P$ . Analogno dobivamo točke  $P$  i  $Q$  preko simetrale  $\angle ACB$ . Kako točke  $Q$  i  $N$  ne leže na trokutu, pravci  $MN$  i  $PQ$  nisu AP-bisektrise. Preostaje samo težišnica  $AD$  koja jest AP-bisektrisa.



Slika 1.16: Jednakokračni trokut s jednom AP-bisektrisom

Promatrajući ove primjere i njihova svojstva, prirodno se nameću sljedeća pitanja:

1. Koliko AP-bisektrisa postoji u zadanom trokutu?
2. Ako postoji konačno mnogo bisektrisa, možemo li odrediti njihovo mjesto presjeka?
3. Prolaze li sve bisektrise kroz istu točku?
4. Ako prolaze, je li ta točka središte upisane kružnice?

U sljedećem poglavlju, odgovorit ćemo na ova pitanja i pokazati neka zanimljiva svojstva.



## Poglavlje 2

# Povezanost AP-bisektrise i kvadratne jednadžbe

### 2.1 Generalizirane AP-bisektrise

U ovom poglavlju će se odgovoriti na prethodno postavljena pitanja o bisektrisama. Berele i Catoiu u svom radu [5] prebrojavaju AP-bisektrise ovisno o duljinama stranica trokuta, što dovodi do još općenitijeg zaključka o generaliziranim AP-bisektrisama. Njihova svojstva opisat ćemo u ovom poglavlju.

Generalizirana AP- bisektrisa trokuta  $\triangle ABC$  površine  $K$  i poluopsega  $s$  je pravac  $MN$  za koji postoji vrh trokuta  $V$  takav da vrijedi

(AP1) Točke  $M$  i  $N$  se nalaze na krakovima iz vrha  $V$  s bilo koje strane vrha.

(AP2)  $|VM| + |VN| = s$

(AP3)  $P(MVN) = \frac{K}{2}$

**Lema 2.1.1.** *Svaka generalizirana AP-bisektrisa trokuta prolazi kroz središte upisane kružnice. Posebno, sve AP-bisektrise prolaze kroz središte upisane kružnice.*

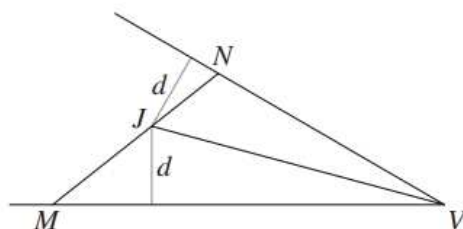
*Dokaz.* Neka je  $MN$  generalizirana AP-bisektrisa trokuta  $\triangle ABC$  i neka je  $V$  odgovarajući vrh te bisektrise. Neka je  $J$  točka na pravcu  $MN$  dobivena presjekom pravca sa simetralom kuta pri vrhu  $V$ , a neka je  $d$  udaljenost točke  $J$  od stranica trokuta. (Slika 2.1). Kako vrijedi (AP3) imamo

$$P(MVN) = \frac{K}{2}. \quad (2.1)$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned}
 P(MVN) &= P(VMJ) + P(VNJ) \\
 &= \frac{(|VM| + |VN|) \cdot d}{2} \\
 &= \frac{sd}{2}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Kako vrijedi (AP2) pišemo  $|VM| + |VN|$  umjesto  $s$ . Izjednačimo jednačbe (2.1) i (2.2). Dobivamo  $d = \frac{K}{s}$ . Vrijedi poznata formula za površinu trokuta  $P = r \cdot s$ , gdje je  $r$  radijus upisane kružnice. Iz te formule dobivamo da je točka  $J$  uistinu središte upisane kružnice.



Slika 2.1: AP-bisektrisa prolazi središtem upisane kružnice

□

Svojstvo (AP3) generalizirane AP-bisektrise trokuta možemo zapisati koristeći poučak o sinusu

$$P(MVN) = \frac{1}{2} |VM| \cdot |VN| \sin \angle MVN \tag{2.3}$$

S druge strane,

$$\frac{K}{2} = \frac{abc}{4v} \cdot \sin \angle MVN \tag{2.4}$$

Iz toga slijedi (AP3) napisano u terminima stranica trokuta kojeg označimo sa **(AP3')**

$$|VM| \cdot |VN| = \frac{abc}{2v} \tag{2.5}$$

Uvjeti (AP2) i (AP3') daju sumu i produkt odsječaka  $\overline{VM}$  i  $\overline{VN}$ . Uzimajući u obzir Vieteove formule za rješenja kvadratne jednačbe dobivamo sljedeću jednačbu gdje je  $x_1 = |VM|, x_2 = |VN|$

$$x^2 - (|VN| + |VM|)x + (|VM| \cdot |VN|) = 0 \tag{2.6}$$

Iz (AP2) i (AP3') slijedi

$$x^2 - sx + \frac{abc}{2v} = 0 \quad (2.7)$$

čija je diskriminanta  $\Delta_v$ . Broj generaliziranih AP-bisektrisa odgovara predznaku diskriminante  $\Delta_v$ . Sljedeća propozicija pokazuje točan broj generaliziranih AP-bisektrisa u odnosu na fiksni vrh  $V$  zadanog trokuta.

**Propozicija 2.1.2.** *Neka je  $V$  fiksna točka i vrh trokuta  $\triangle ABC$  gdje je  $v$  njemu nasuprotna stranica.*

- (i) *Ako je  $MN$  generalizirana AP-bisektrisa u odnosu na vrh  $V$ , tada su duljine dužina  $\overline{VM}$  i  $\overline{VN}$  rješenja kvadratne jednadžbe*

$$x^2 - sx + \frac{abc}{2v} = 0 \quad (2.8)$$

*čija je diskriminanta*

$$\Delta_v = s^2 - 2\frac{abc}{v} \quad (2.9)$$

*Vrijednosti diskriminante su  $\Delta_a = s^2 - 2bc$ ,  $\Delta_b = s^2 - 2ac$ ,  $\Delta_c = s^2 - 2ab$ . Broj generaliziranih AP-bisektrisa u odnosu na vrh  $V$  ovisi o diskriminanti  $\Delta_v$ .*

- a) *Ako je  $\Delta_v < 0$  nema generaliziranih AP-bisektrisa*  
 b) *Ako je  $\Delta_v = 0$  postoji jedna generalizirana AP-bisektrisa*  
 c) *Ako je  $\Delta_v > 0$  postoje dvije generalizirane AP-bisektrise*
- (ii) *Ako postoje dvije različite generalizirane AP-bisektrise u odnosu na vrh  $V$ , tada su one simetrične u odnosu na simetralu kuta  $V$ . Ako je samo jedan pravac AP-bisektrisa, onda je on okomit na simetralu kuta  $V$ .*

*Dokaz.* Tvrdnja (i) slijedi direktno iz postupka provedenog u koracima (2.3) - (2.7).

Tvrdnja (ii) slijedi iz tvrdnje (i). □

Kako bi se lakše dokazao teorem u kojem se prebrojavanju AP-bisektrise prikazat ćemo te stranice preko trokutu upisane kružnice. Neka je zadan  $\triangle ABC$  i njemu upisana kružnica (Slika 2.2). Neka su  $x, y, z$  duljine dužina od vrha do dirališta kružnice tako da vrijedi

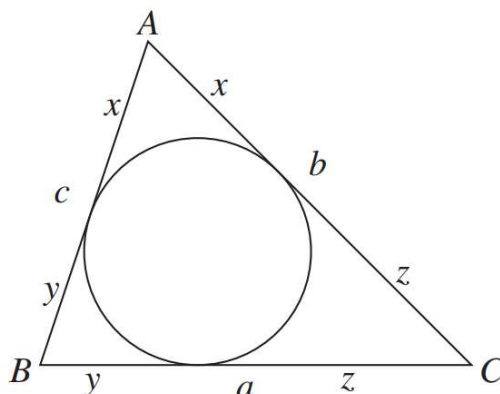
$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad x + z = b. \quad (2.10)$$

Kako je  $s = \frac{a+b+c}{2}$  slijedi  $s = x + y + z$ . Dobivamo

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c \quad (2.11)$$

Nejednakost  $a \geq b \geq c$  je ekvivalentna  $x \leq y \leq z$ . Tada su diskriminante  $\Delta_v$  u odnosu na stranicu  $v$ :

$$\Delta_a = y^2 + z^2 - x^2, \quad \Delta_b = x^2 + z^2 - y^2, \quad \Delta_c = x^2 + y^2 - z^2 \quad (2.12)$$



Slika 2.2: Udaljenosti vrhova trokuta od dirališta upisane kružnice

Kako vrijedi  $a \geq b \geq c$  dobije se da su diskriminante  $\Delta_a$  i  $\Delta_b$  uvijek pozitivne. Dok  $\Delta_c$  može biti negativna, pozitivna ili jednaka nuli.

Neka je  $a = b, c < a$  tada je

$$\Delta_c = \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - 2a^2 \quad (2.13)$$

Dobivamo

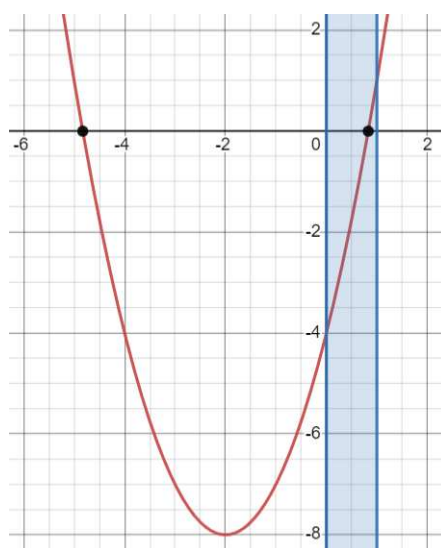
$$\Delta_c = \frac{c^2}{2} + ac - a^2 \quad (2.14)$$

Uvrštavanjem  $c = k \cdot a$  gdje je  $k \in [0, 1]$ . Imamo

$$\Delta_c = a^2 \left(\frac{k^2}{4} + k - 1\right) \quad (2.15)$$

Rješenja kvadratne jednadžbe (2.15) su  $k_1 = -2 - 2\sqrt{2}$  i  $k_2 = -2 + 2\sqrt{2}$  (Slika 2.3). Kako je  $k \in [0, 1]$  promatramo samo nultočku za taj interval. Vrijednosti koje  $\Delta_c$  poprima za  $0 \leq k < k_2$  su negativne, a za  $k_2 < k \leq 1$  su pozitivne. Za  $k = k_2 = -2 + 2\sqrt{2}$  vrijednost diskriminante  $\Delta_c$  iznosi nula. Za sve ostale  $k > 1$  je vrijednost diskriminante pozitivna. Prema tome  $\Delta_c$  poprima vrijednosti veće, jednake ili manje od nule ovisno o  $k$ .





Slika 2.3: Graf kvadratne funkcije 2.15

**Korolar 2.1.3.** Za trokut  $\triangle ABC$  sa stranicama  $a \geq b \geq c$ , postoje dvije različite generalizirane AP-bisektrise u odnosu na vrhove  $A$  i  $B$  i još jedna, dvije ili nijedna takva AP-bisektrisa u odnosu na vrh  $C$ , ovisno o diskriminanti  $\Delta$ .

Sljedeći teorem objedinjuje sve slučajeve s obzirom na diskriminantu jednadžbe. Kako je u teoremu iskazana stranica  $c$  kao najmanja stranica, diskriminante  $\Delta_a$  i  $\Delta_b$  su uvijek pozitivne dok je  $\Delta_c$  ili pozitivna ili negativna ili jednaka nuli.

**Teorem 2.1.4.** Neka je zadan trokut  $\triangle ABC$  sa stranicama  $a \geq b \geq c$ . Diskriminantu trokuta označimo s  $\Delta$ .

(i) Ako  $a > b > c$ , postoje četiri, pet ili šest generaliziranih AP-bisektrisa. Ako je

- a)  $\Delta < 0$  postoje četiri generalizirane AP-bisektrise
- b)  $\Delta = 0$  postoji pet generaliziranih AP-bisektrisa
- c)  $\Delta < 0$  postoji šest generaliziranih AP-bisektrisa

(ii) Ako  $a = b > c$ , postoje tri, četiri ili pet generaliziranih AP-bisektrisa. Ako je

- a)  $\Delta < 0$  postoje tri generalizirane AP-bisektrise
- b)  $\Delta = 0$  postoji četiri generalizirane AP-bisektrise
- c)  $\Delta < 0$  postoji pet generaliziranih AP-bisektrisa

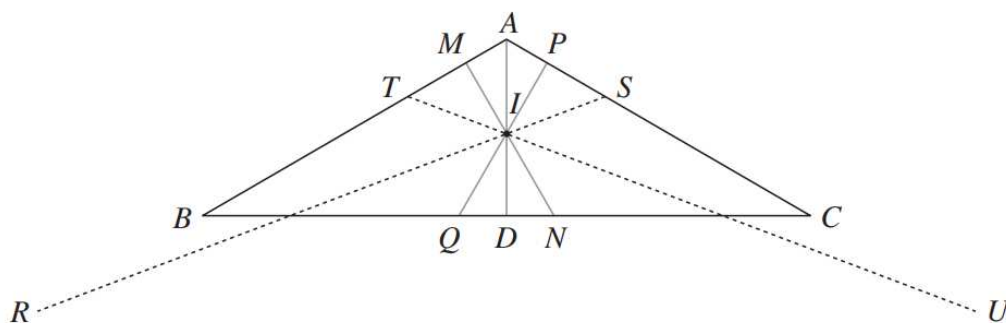
U svim slučajevima postoje tri generalizirane AP-bisektrise u odnosu na  $A$  ili  $B$ ; težišnica iz vrha  $C$  i njene refleksije s obzirom na simetralu kuta  $\angle CAB$  ili  $\angle CBA$ .

(iii) Ako  $a > b = c$ , postoji pet generaliziranih AP-bisektrisa. Dva pravca su AP-bisektrise u odnosu na vrhove  $B$  i  $C$  i njihove slike u odnosu na os simetrije.

(iv) Ako  $a = b = c$ , postoje samo tri generalizirane AP-bisektrise. Ti pravci su težišnice iz vrhova trokuta.

*Dokaz.* Za (i) i (ii), trokut ima četiri, pet ili šest generaliziranih AP-bisektrisa ovisno o diskriminanti  $\Delta_v$ . Za (iii) i (iv), jednakost  $c = b$  je ekvivalentna sa  $\Delta_b > 0$ , stoga su diskriminante za sve stranice pozitivne i najveći moguć broj AP-bisektrisa je  $2 + 2 + 2 = 6$ . Različite generalizirane AP-bisektrise brojimo tako da od najvećeg mogućeg broja oduzemo bisektrise koje brojimo dva ili više puta. Najveći moguć broj AP-bisektrisa se ne mijenja za (i) slučaj. U slučajevima (ii) i (iii), tj. jednakokračnog trokuta, se najveći moguć broj umanjuje za jedan i vrijedi  $2 + 2 + 2 - 1 = 5$ . U slučaju jednakostraničnog trokuta, svi pravci se zapravo "preklope" sa težišnicama i tada se najveći moguć broj umanjuje za tri, tj. vrijedi  $2 + 2 + 2 - 3 = 3$ .  $\square$

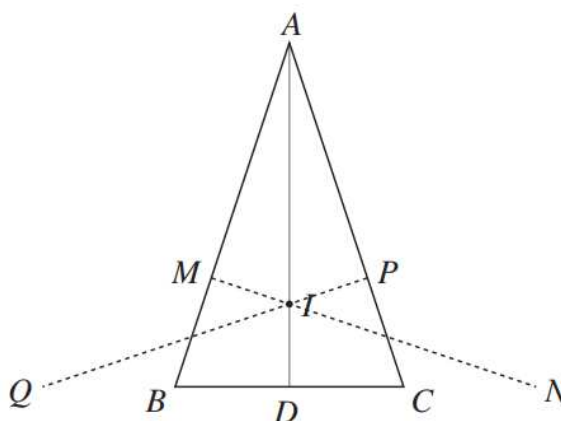
### Primjeri generaliziranih AP-bisektrisa



Slika 2.4: Trokut s pet generaliziranih AP-bisektrisa

**Primjer 2.1.1.** Neka je zadan jednakokračan trokut  $\triangle ABC$  sa stranicama  $a = 8, b = c = 5$ . (Slika 2.4) Prema teoremu 2.1.4(iii) postoji pet generaliziranih AP-bisektrisa. Jedna bisektrisa je težišnica  $AD$  i prema propoziciji 2.1.2(ii) još dva pravca su simetrični pravci u odnosu na simetrale odgovarajućih kutova. Konkretno,  $MN$  i  $PQ$  su dobivene osnom simetrijom pravca  $AD$  s obzirom na simetrale kutova  $\angle ABC$  i  $\angle ACB$ . Postoje još dvije generalizirane AP-bisektrise a to su  $TU$  i  $RS$ . Prema propoziciji 2.1.2(i), krajnje točke tih dužina se nalaze na pravcima  $AC$  i  $AB$ . Računanjem  $|TU|$  ili  $|RS|$  dobivamo da su te duljine

puno veće u odnosu na  $b$  ili  $c$ . Prema tome, te dvije generalizirane AP-bisektrise zapravo nisu AP-bisektrise. Zaključujemo da ovaj trokut ima pet generaliziranih AP-bisektrisa, ali samo tri su AP-bisektrise.



Slika 2.5: Trokut s tri generalizirane i jednom AP-bisektrisom

**Primjer 2.1.2.** Neka je zadan jednakokračan trokut sa stranicama  $a = 2$ ,  $b = c = 3$  kao na slici 2.5. Poluopseg trokuta je  $s = \frac{a+b+c}{2} = 4$ . Diskriminanta trokuta u odnosu na najmanju stranicu je  $\Delta_a = s^2 - 2bc = -2$ . Kako je  $\Delta_a < 0$  prema teoremu 2.1.4(iii) trokut  $\triangle ABC$  ima točno tri generalizirane AP-bisektrise; težišnicu  $AD$  i dva pravca  $MN$  i  $PQ$  dobivena osnom simetrijom pravca  $AD$  s obzirom na simetralu kutova  $\angle ACB$  i  $\angle ABC$ . Zaključujemo da ovaj trokut ima tri generalizirane AP-bisektrise i samo jednu AP-bisektrisu.

**Primjer 2.1.3.** Neka je zadan jednakokračan trokut (Slika 2.6) tako da vrijedi  $\Delta = 0$  iz teorema 2.1.4. Jednakost  $a = b$  je ekvivalentna s  $x = y$ . Iz pretpostavke  $\Delta = 0$  slijedi  $\Delta_c = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . Korjenovanjem i korištenjem formula (2.10) imamo

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

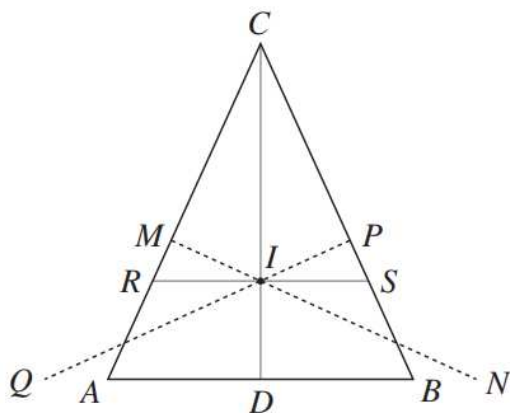
$$2x^2 = z^2$$

$$x\sqrt{2} = z$$

Dobivamo

$$a = b = x(1 + \sqrt{2}) \quad (2.16)$$

$$c = 2x \quad (2.17)$$



Slika 2.6: Jednakokrčan trokut s točno dvije AP-bisektrise

Ako promatramo sličan trokut s duljinama stranica  $1 + \sqrt{2}$ ,  $1 + \sqrt{2}$ ,  $2$  i poluopsegom  $s = 2 + \sqrt{2}$ , prema teoremu 2.1.4(ii), postoje točno četiri generalizirane AP-bisektrise: težišnica  $CD$ , refleksije težišnice  $MN, PQ$  u odnosu na odgovarajuće simetrane kuta i  $RS$  gdje je  $R \in AC$  i  $S \in BC$  takvi da  $CR = CS = \frac{s}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ . Prema teoremu 2.1.4 (iii), samo su dva pravca AP-bisektrise:  $CD$  i  $RS$ .

Primjer 2.1.3 je jedinstven jednakokrčan trokut s točno dvije AP-bisektrise. Naknadno ćemo i konstruirati takav raznostraničan trokut koji ima točno dvije AP-bisektrise i opisati korake konstrukcije.

## 2.2 Broj AP-bisektrisa u trokutu

Kao što je pokazano u prethodnim primjerima generalizirana AP-bisektrisa ne mora uvijek biti AP-bisektrisa. Prema propoziciji 2.1.2 određuje se udaljenost krajnjih točaka AP-bisektrise od fiksnog vrha  $V$ . Pozitivna rješenja jednadžbe (2.8) predstavljaju duljine odsječaka koje bisektrisa odsijeca na krakovima trokuta. Idući teorem dovodi u vezu duljinu stranica i broj bisektrisa u trokutu.

**Teorem 2.2.1.** *Neka je zadan trokut  $\triangle ABC$  sa stranicama  $a \geq b \geq c$  i poluopsegom  $s$ .*

*i. Sve AP-bisektrise koje raspolavljaju površinu i opseg trokuta prolaze kroz središte trokutu upisane kružnice.*

*ii. Trokut ima jednu, dvije ili tri AP-bisektrise ovisno o diskriminanti  $\Delta$ . Ako je*

*i.  $\Delta < 0$  trokut ima jednu bisektrisu  $M_1N_1$*

*ii.  $\Delta = 0$  trokut ima dvije bisektrise  $M_1N_1, M_2N_2$*

*iii.  $\Delta > 0$  trokut ima tri bisektrise  $M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3$*

*iii. Bisektrisa  $MN$  u svakom od navedenih slučajeva ima svojstvo:  $M_1 \in AB, N_1 \in BC$  tako da vrijedi:*

$$|BM_1| = \frac{s - \sqrt{\Delta_b}}{2}, \quad |BN_1| = \frac{s + \sqrt{\Delta_b}}{2}.$$

*Ako je  $\Delta \leq 0$  tada su  $M_2N_2$  i  $M_3N_3$  također bisektrise, gdje je  $M_2, M_3 \in AC$  i  $N_2, N_3 \in BC$  takvi da vrijedi:*

$$|CM_2| = |CN_3| = \frac{s + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad |CM_3| = |CN_2| = \frac{s - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

*Ako je  $\Delta = 0$ , tada  $M_2 = M_3$  i  $N_2 = N_3$ .*

*Dokaz.* Tvrdnja (i) dobiva se direktnom primjenom već dokazane leme 2.1.1.

Kako bi pokazali tvrdnju (ii) prisjetimo se da vrijedi  $a \geq b \geq c \Leftrightarrow x \leq y \leq z$ . Imamo tri tvrdnje:

**(C1)** Sve generalizirane AP-bisektrise u odnosu na  $C$  su AP-bisektrise.

**(C2)** Ne postoje AP-bisektrise u odnosu na  $A$  ako i samo ako  $a > b$ .

**(C3)** Postoji samo jedna AP-bisektrisa u odnosu na  $B$  ako i samo ako  $b > c$ .

Koristeći tvrdnje (C1)-(C3) tvrdnja teorema 2.1.4(ii) slijedi iz teorema 2.1.4 ako ignoriramo generalizirane AP-bisektrise ostaju nam samo AP-bisektrise. Prema tvrdnji (C1) sve generalizirane AP-bisektrise u odnosu na  $A$  i  $B$  se mogu zanemariti. U slučaju 2.1.4(i) izbacujemo tri AP-bisektrise, dvije su u odnosu na vrh  $A$  prema tvrdnji (C2) i jednu bisektrisu u odnosu na vrh  $B$  prema tvrdnji (C3). U slučaju 2.1.4(ii) je  $a = b$  pa se tvrdnja (C3) može primijeniti na vrhove  $A$  i  $B$  kako bi se pokazalo da se samo jedna AP-bisektrisa mora zanemariti u odnosu na te vrhove. Kako je jedina moguća generalizirana AP-bisektrisa koju smo mogli izbaciti u odnosu na oba vrha težišnica iz vrha  $C$  za koju znamo da je AP-bisektrisa, imamo samo jedan pravac kojeg možemo zanemariti u odnosu na svaki od vrhova  $A$  i  $B$ . U slučaju 2.1.4(iii) je  $a > b = c$  pa su zanemarene dvije generalizirane AP-bisektrise u odnosu na vrh  $A$  prema tvrdnji (C2). U slučaju (iv) kada imamo jednakokraničan trokut jasno je da imamo samo 3 AP-bisektrise i to su težišnice iz vrhova.

- *Dokaz tvrdnje (C1).* Prema 2.1.2(i), ekvivalentno je pokazati  $\frac{s \pm \sqrt{\Delta_c}}{2} \leq a$  i  $\frac{s \pm \sqrt{\Delta_c}}{2} \leq b$ . Kako je  $a \geq b$  dovoljno je pokazati da nejednakost vrijedi za  $b$ .

$$\sqrt{\Delta_c} \leq 2b - s$$

Uvrštavanjem (2.10) i (2.12) u nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 - z^2} &\leq 2(x + z) - \frac{a + b + c}{2} \\ \sqrt{x^2 + y^2 - z^2} &\leq 2(x + z) - (x + y + z) \\ x^2 + y^2 - z^2 &\leq (x - y + z)^2 \\ x^2 + y^2 - z^2 &\leq x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz \\ 0 &\leq 2z^2 - 2(xy + yz - xz) \\ 0 &\leq z^2 - xy - yz + xz \\ 0 &\leq (z + x)(z - y) \end{aligned}$$

Korištenjem izraza (2.11) dobivamo

$$\begin{aligned} b(b - c) &\geq 0 \\ b^2 - bc &\geq 0 \end{aligned}$$

Kako je  $a, b, c > 0$  vrijedi

$$b \geq c$$

- *Dokaz tvrdnje (C2).* Prema 2.1.2(i), slično kao i za (C1) ekvivalentno je pokazati  $\frac{1}{2}(s \pm \sqrt{\Delta_a}) > b > c$  a kako je  $b \geq c$ , dovoljno je pokazati da nejednakost vrijedi za  $b$ . Uvrštavanjem izraza (2.10) i (2.12) u nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2 + z^2 - x^2} &> 2(x+z) - (x+y+z) \\ \sqrt{y^2 + z^2 - x^2} &> x+z-y \\ y^2 + z^2 - x^2 &> (x+z-y)^2 \\ y^2 + z^2 - x^2 &> x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz \\ 0 &> 2x^2 - 2(xy + yz - xz) \\ 0 &> x^2 - xy - yz + xz \\ 0 &> (x-y)(x+z) \\ 0 &< (y-x)(x+z)\end{aligned}$$

Korištenjem izraza (2.11) dobivamo

$$\begin{aligned}(a-b)b &> 0 \\ ab - b^2 &> 0\end{aligned}$$

Kako je  $a, b, c > 0$  vrijedi

$$a > b$$

- *Dokaz tvrdnje (C3).* Pretpostavimo  $c = b$ . Tada je  $\triangle ABC$  jednakokračni trokut i prema teoremu 2.1.4 i prema pokazanom u primjeru 2.1.1 ima dvije generalizirane AP-bisektrise. Obratno, ako je  $b > c$  ili ekvivalentno tome  $y < z$ , prema poziciji 2.1.2(i) treba pokazati

$$\frac{1}{2}(s - \sqrt{\Delta_b}) \leq c \leq \frac{1}{2}(s + \sqrt{\Delta_b}) \leq a$$

što je ekvivalentno s

$$-\sqrt{\Delta_b} \leq 2c - s < \Delta_b \leq 2a - s \quad (2.14)$$

Korištenjem izraza (2.10) i kvadriranjem prve nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 + z^2 &\leq (x+y+z)^2 - 4(x+y)(x+y+z) + 4(x+y)^2 \\ 0 &\geq y^2 + yx - xz - yz \\ 0 &\geq (y+x)(y-z) \\ 0 &\leq (s-c-s+b)(s-c+s-a) \\ 0 &\leq (b-c)c \\ c &\leq b\end{aligned}$$

Iz (2.2) također imamo  $c < \frac{1}{2}(s + \Delta_b)$ . Dobivamo  $2c - s > 0$ . Postoji mogućnost da  $2c > s$  ali tada vrijedi nejednakost. Dobivamo

$$\begin{aligned} 0 < 2c - s < \sqrt{\Delta_b} \\ 0 < 4c^2 - 4cs + s^2 < s^2 - 2ac \\ 2c < 2s - a = b + c \end{aligned}$$

Što je istina, jer  $c < b$ .

Za preostale dvije nejednakosti imamo  $2c - s = x + y - z$ . Ako je  $x + y - z \geq 0$ , tada jednadžba (2.2) očito vrijedi. Druga nejednakost je ekvivalentna s  $(2x+2y)(z-y) > 0$

Ako je  $x + y - z < 0$  tada druga nejednakost iz (2.2) zadovoljena. Prva nejednakost je dokazana i ekvivalentna je s  $x^2 - y^2 + z^2 \geq (z - x - y)^2$ , što dovodi do konačne istinite nejednakosti  $(2x + 2y)(z - y) \geq 0$

□

**Lema 2.2.2.** *Neka je  $\triangle ABC$  trokut. AP-bisektrisa prolazi kroz vrh trokuta ako i samo ako je  $\triangle ABC$  jednakokračan trokut.*

*Dokaz.* Ako je  $c = b$ , tada je simetrala kuta  $\angle BAC$  očito AP-bisektrisa u odnosu na  $B$  i  $C$ . Suprotno, neka je  $MN$  AP-bisektrisa u odnosu na vrh  $A$  i prolazi kroz vrh  $C$ . Tada je  $MN = MC$  pa je  $|AN| = |AC| = b$ . Prema teoremu 2.1.4 o AP-bisektrisama slijedi da je  $b$  rješenje kvadratne jednadžbe (2.8), tj

$$\begin{aligned} b^2 - \frac{a+b+c}{2}b + \frac{abc}{2a} &= 0 \\ 2b^2 - (ab + b^2 + cb) + bc &= 0 \\ b^2 - ab - cb + bc &= 0 \\ b(b - a) &= 0 \end{aligned}$$

Kako je  $a, b \neq 0$ , zaključujemo  $a = b$ , tj  $\triangle ABC$  je jednakokračan.

□



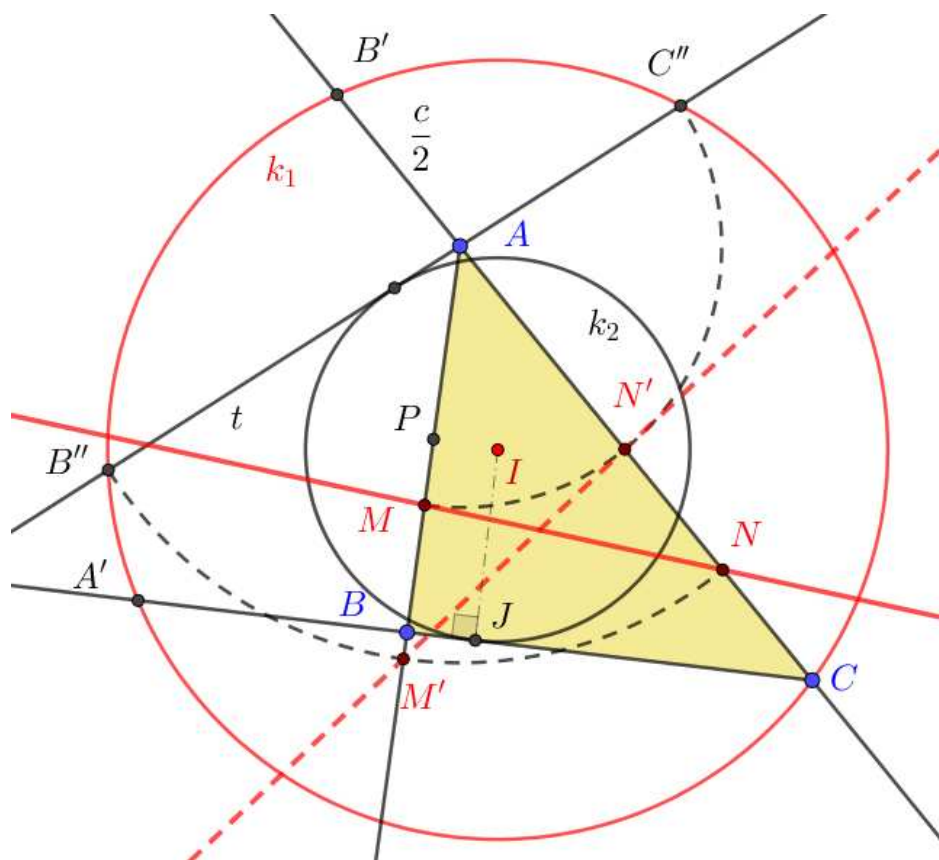
## 2.3 Konstrukcija AP-bisektrise

Sljedeći postupci su opisani u radu [10].

Neka je zadan trokut  $\triangle ABC$ . Opisan postupak je konstrukcija AP-bisektrise u odnosu na vrh A. (Slika 2.7)

1. Produljimo pravce  $AB, AC$  i  $BC$
2. Odredimo polovište  $P$  stranice  $\overline{BA}$
3.  $k(A, |PA|) \cap AC = \{B'\}$
4.  $|CB'| = b + \frac{c}{2}$
5. simetrala  $s_1$  dužine  $B'C$
6. kružnica  $k(C, s) \cap BC = \{A'\}$
7. simetrala  $s_2$  dužine  $CA'$
8.  $s_1 \cap s_2 = \{I\}$
9. kružnica  $k_1 = k(I, |IC|)$
10.  $A', C, B' \in k_1$
11. polovište  $J$  dužine  $A'C$
12. koncentrična kružnica  $k_2 = k(I, |IJ|)$
13. tangenta  $t$  na kružnicu  $k_2$
14.  $t \cap k_1 = \{B'', C''\}$
15. na dužini  $\overline{AB}$  odaberemo točku  $M$  tako da  $|AM| = |AC''|$
16. na dužini  $\overline{AC}$  odaberemo točku  $N$  tako da  $|AN| = |AB''|$
17. pravac  $MN$  je AP-bisektrisa.

Dodatno, mogli smo na pravcu  $AB$  odabrati točku  $M'$  tako da  $|AM'| = |AB''|$  i na pravcu  $AC$  točku  $N'$  tako da  $|AN'| = |AC''|$ . Pravac  $M'N'$  je generalizirana AP-bisektrisa, ali točka  $M'$  koja određuje pravac se ne nalazi na dužini  $\overline{AB}$  već na pravcu  $AB$ . Stoga  $M'N'$  nije AP-bisektrisa.

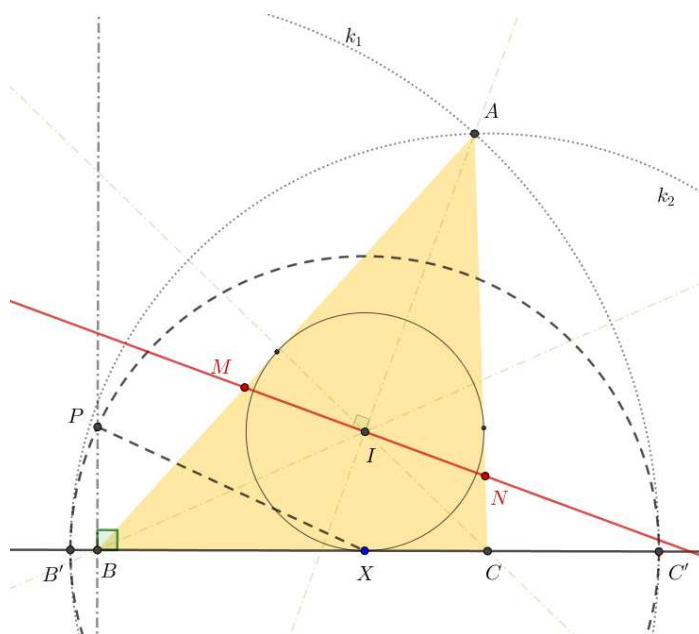
Slika 2.7: Konstrukcija AP-bisektrise  $MN$ 

Konstruirajmo trokut tako da je zadovoljeno svojstvo  $\Delta_a = 0$ . Neka je  $X$  točka na zadanoj dužini  $\overline{BC}$ . Prema teoremu 2.1.4, ukoliko  $\Delta = 0$ , trokut ima točno dvije AP-bisektrise. Neka je točka  $X \in \overline{BC}$

1. u točki  $B$  konstruiramo okomicu na pravac  $BC$
2. nanesimo točku  $P$  na okomicu tako da vrijedi  $|BP| = |XC|$
3. kružnica  $k(X, |XP|)$
4. dobivamo dvije točke,  $k \cap BC = \{B', C'\}$
5. kružnica  $k_1(B, |BC'|)$
6. kružnica  $k_2(C, |CB'|)$

$$7. k_1 \cap k_2 = \{A\}$$

Bisektrisa opsega mora biti okomita na simetralu kuta vrha A. Stoga, AP-bisektrisa također mora biti okomita na simetralu kuta i prolazi kroz središte  $I$  trokutu upisane kružnice; AP-bisektrisa  $MN$ .

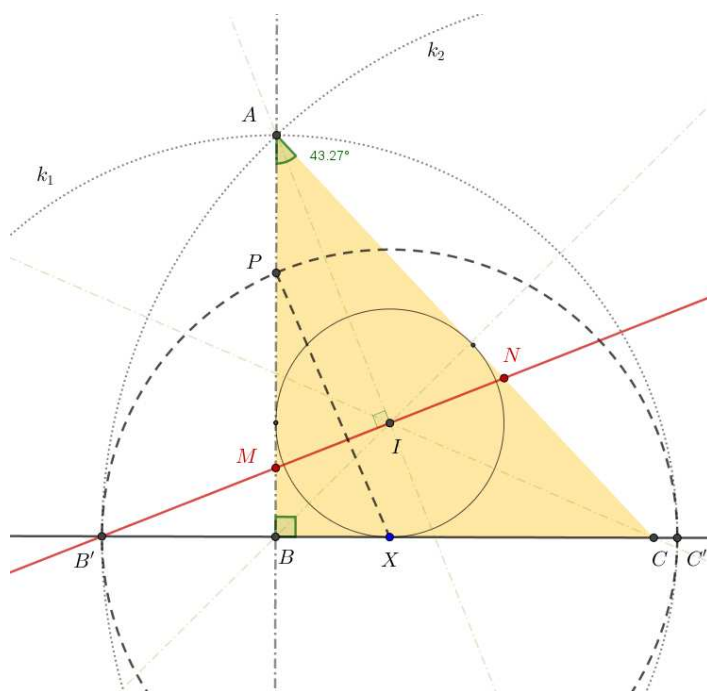


Slika 2.8: Konstrukcija trokuta s točno dvije AP-bisektrise

Ako je radijus kružnice iz 3. koraka manji od  $|XP|$ , tada imamo dvije AP-bisektrise. Ako je radijus iste kružnice veći od  $|XP|$ , ne postoje AP-bisektrise. Jedna od zanimljivosti trokuta koji imaju točno dvije AP-bisektrise je da postoji jedinstveni pravokutan trokut koji zadovoljava  $\Delta_a = 0$ . Ako promatramo duljinu stranica i označimo parametar  $t = \tan \frac{\angle BAC}{2}$ , tada vrijedi  $a : b : c = 2t : 1 - t^2 : 1 + t^2$  i

$$\begin{aligned}\Delta_a &= (t + 1)(2t^3 - 2t^2 + 3t - 1) \\ 0 &= 2t^4 + t^2 + 2t - 1\end{aligned}$$

Realna rješenja ove jednadžbe su  $t_1 = -1$  i  $t_2 \approx 0.396608$ . Za  $t_2$  dobivamo kut  $\angle BAC \approx 43.267^\circ$ . Posebno je zanimljivo promatrati trokute koji imaju cjelobrojne duljine stranica i udaljenosti točaka  $M$  i  $N$  od vrhova.

Slika 2.9: Pravokutni trokut koji zadovoljava  $\Delta_a = 0$ 

### Trokuti za koje vrijedi $\Delta_a < 0$

Neka je  $\Delta_b = s^2 - 2ac = v^2$  za  $v \in \mathbb{N}$ . Iskoristimo notaciju preko (2.11) Slijedi

$$(s - b)^2 + (s - c)^2 = v^2 + (s - a)^2 \quad (2.9)$$

Uvedimo pomoćne varijable  $h_1, h_2, k_1, k_2$  i  $p, q, u, v$  pomoću kojih ćemo pronaći cjelobrojne duljine stranica  $a, b, c$ . Iskažemo jednakost (2.9) u novim terminima  $p^2 + q^2 = u^2 + v^2$ . Imamo

$$d_1^2 = h_1^2 + k_1^2, \quad h_1 > k_1$$

$$d_2^2 = h_2^2 + k_2^2, \quad h_2 > k_2$$

Također, pretpostavimo  $k_1 h_2 < h_1 k_2 < 3k_1 h_2$ . Umnožak  $d_1^2 d_2^2$  je

$$d_1^2 d_2^2 = p^2 + q^2 = u^2 + v^2 \quad (2.10)$$

Gdje su  $p, q, u, v$  definirani

$$\begin{aligned} p &= h_1 h_2 + k_1 k_2, & q &= h_1 k_2 - k_1 h_2 \\ u &= h_1 h_2 - k_1 k_2, & v &= h_1 k_2 + k_1 h_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Također, vrijedi  $p > u > q$ . Uvrštavanjem (2.11) dobivamo

$$\begin{aligned}
 u^2 + q^2 - p^2 &= (h_1h_2 - k_1k_2)^2 + (h_1k_2 - k_1h_2)^2 - (h_1h_2 + k_1k_2)^2 \\
 &= h_1^2k_2^2 + h_2k_1^2 - 6h_1h_2k_1k_2 \\
 &< 2h_1^2k_2^2 - 6h_1h_2k_1k_2 \\
 &= 2h_1k_2(h_1k_2 - 3h_2k_1) \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

Ako se vratimo na oznake stranica i poluopsega možemo zapisati  $s - a = p$ ,  $s - b = u$ ,  $s - c = q$ . Imamo  $\Delta_a < 0$  i  $\Delta_b = (s - c)^2 + (s - a)^2 - (s - b)^2 = v^2$ . Promotrimo četiri najmanje Pitagorine trojke (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25) i (8, 15, 17), dobivamo sljedeću tablicu podataka koja sadrži duljine stranica  $(a, b, c)$ , ostale pomoćne varijable koje koristimo u računu i udaljenosti točaka od vrha  $B$  koje ćemo označiti  $BM_b$  i  $BN_b$ .

Tablica 2.1: Tablica nekih cjelobrojnih trojki  $(a, b, c)$  za koje vrijedi  $\Delta < 0$

$(d_1, h_1, k_1)$	$(d_2, h_2, k_2)$	$(p, q)$	$(u, v)$	$(a, b, c)$	$( BM_b ,  BN_b )$
(5, 4, 3)	(29, 21, 20)	(144, 17)	(24, 143)	(41, 161, 168)	(21, 164)
(13, 12, 5)	(5, 4, 3)	(63, 16)	(33, 56)	(49, 79, 96)	(28, 84)
(13, 12, 5)	(17, 15, 8)	(220, 21)	(140, 171)	(161, 241, 360)	(105, 276)
(13, 12, 5)	(29, 21, 20)	(352, 135)	(152, 345)	(287, 487, 504)	(147, 492)
(17, 15, 8)	(5, 4, 3)	(84, 13)	(36, 77)	(49, 97, 120)	(28, 105)
(17, 15, 8)	(29, 21, 20)	(475, 132)	(155, 468)	(287, 607, 630)	(147, 615)
(25, 24, 7)	(5, 4, 3)	(117, 44)	(75, 100)	(119, 161, 192)	(68, 168)
(25, 24, 7)	(13, 12, 5)	(323, 36)	(253, 204)	(289, 359, 576)	(204, 408)
(25, 24, 7)	(17, 15, 8)	(416, 87)	(304, 297)	(391, 503, 720)	(255, 552)

**Trokuti za koje vrijedi  $\Delta_a = 0$** 

U ovom slučaju promatramo diskriminantu  $\Delta_a = s^2 - 2bc = 0$  tj.

$$y^2 + z^2 = x^2 \quad (2.12)$$

Dovoljno je promatrati  $(a, b, c)$  iz Pitagorinih trojki za  $(x, y, z)$  kada je  $x$  najveća vrijednost. Znamo  $x + y + z = s$  i nadalje preko  $x + s = a$ ,  $y + s = b$ ,  $z + s = c$  dobivamo duljine stranica.

Tablica 2.2: Tablica nekih cjelobrojnih trojki  $(a, b, c)$  za koje vrijedi  $\Delta = 0$

$(x, y, z)$	$(a, b, c)$	$s$
(5, 4, 3)	(7, 8, 9)	12
(13, 12, 5)	(17, 18, 25)	30
(17, 15, 8)	(23, 25, 32)	40
(25, 24, 7)	(31, 32, 49)	56
(29, 21, 20)	(41, 49, 50)	70

Napomena da u ovom slučaju vrijedi  $|AM_a| = |AN_a| = s$ . Također, vrijedi  $\Delta_b = 2z^2$  ali AP-bisektrisa u odnosu na vrh  $B$  ne siječe dužine  $\overline{BC}$  i  $\overline{BA}$ .

**Trokuti za koje vrijedi  $\Delta_a > 0$** 

Diskriminante  $\Delta_a$  i  $\Delta_b$  moraju biti kvadrati cijelih brojeva  $u$  i  $v$ . Izravnim računom provjeri se da vrijedi  $\Delta = (s - a)^2 + (s - b)^2 + (s - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - s^2$ . Dokažimo da je  $\Delta = u^2 + 2(s - a)^2$ , a jednakost  $\Delta = v^2 + 2(s - b)^2$  tada slijedi po analogiji.

*Dokaz.* Treba pokazati da  $a^2 + b^2 + c^2 - s^2 = s^2 - 2bc + 2(s - a)^2$ . Iz  $(2s - a)^2 = (b + c)^2$  slijedi

$$\begin{aligned} 4s^2 - 4sa + a^2 - 2bc &= b^2 + c^2 \\ 2(s - a)^2 + 2s^2 - a^2 - 2bc &= b^2 + c^2 \\ s^2 - 2bc + 2(s - a)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - s^2 \\ \Delta_a + 2(s - a)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - s^2 \end{aligned}$$

Dobivamo

$$(s - a)^2 + (s - b)^2 + (s - c)^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}(ab + bc + ca)$$

to jest,

$$a^2 + b^2 + c^2 - s^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \quad (2.13)$$

□

Diskriminanta  $\Delta$  može se zapisati kao zbroj triju kvadrata (od kojih se jedan ponavlja) na dva različita načina;  $\Delta = u^2 + 2x^2$  i  $\Delta = v^2 + 2y^2$  ako i samo ako je  $\Delta$  djeljiv s dva prosta broja kongruentna 1 ili 3 (mod 8). Neka je takav broj  $i$  vrijedi

$$\Delta = u^2 + 2x^2 = v^2 + 2y^2, \quad x > y$$

Dodatno, ako vrijedi i  $\Delta - x^2 - y^2 = z^2$  gdje su  $x, y, z$  definirani kao u (2.11) dobivamo  $(a, b, c) = (y + z, z + x, x + y)$  za koje  $\Delta_a = u^2$  i  $\Delta_b = v^2$ . Sljedeća tablica prikazuje sve mogućnosti za takve trokuta čije su diskriminante  $\Delta < 10000$ . Ako su  $x, y, z$  svi neparni, tada množimo njihove sume sa  $\frac{1}{2}$  i dobivamo trojke  $(a, b, c)$  bez brojanja kratnosti. To jest, ako dobijemo cjelobrojne trokute za te vrijednosti, dobit ćemo cjelobrojne i za njihove višekratnike. [4]

Tablica 2.3: Tablica cjelobrojnih trojki  $(a, b, c)$  za koje vrijedi  $0 < \Delta < 10000$

$\Delta$	$(x, y, z)$	$(a, b, c)$	$(\frac{s-u}{2}, \frac{s+u}{2})$	$(\frac{s-v}{2}, \frac{s+v}{2})$
1254	(25, 23, 10)	(33, 35, 48)	(28, 30)	(22, 36)
1691	(29, 25, 15)	(20, 22, 27)	$(\frac{33}{2}, 18)$	$(12, \frac{45}{2})$
1971	(31, 29, 13)	(21, 22, 30)	$(\frac{33}{2}, 20)$	$(14, \frac{45}{2})$
2097	(32, 28, 17)	(45, 49, 60)	(35, 42)	(27, 50)
2466	(35, 29, 20)	(49, 55, 64)	(40, 44)	(28, 56)
3894	(43, 37, 26)	(63, 69, 80)	(46, 60)	(36, 70)
4161	(44, 40, 25)	(65, 69, 84)	(46, 63)	(39, 70)
4419	(47, 37, 29)	(33, 38, 42)	$(28, \frac{57}{2})$	$(18, \frac{77}{2})$
5643	(53, 47, 25)	(36, 39, 50)	$(30, \frac{65}{2})$	$(\frac{45}{2}, 40)$
5814	(53, 43, 34)	(77, 87, 96)	(58, 72)	(42, 88)
6059	(55, 53, 15)	(34, 35, 54)	$(30, \frac{63}{2})$	$(\frac{51}{2}, 36)$
6099	(55, 43, 35)	(39, 45, 48)	$(\frac{63}{2}, 35)$	$(21, \frac{91}{2})$
7403	(59, 49, 39)	(44, 49, 48)	$(\frac{63}{2}, 42)$	$(24, \frac{99}{2})$
7491	(61, 59, 17)	(38, 39, 48)	$(\frac{65}{2}, 36)$	$(\frac{57}{2}, 40)$
8899	(63, 57, 41)	(49, 52, 48)	$(\frac{65}{2}, 48)$	$(28, \frac{105}{2})$

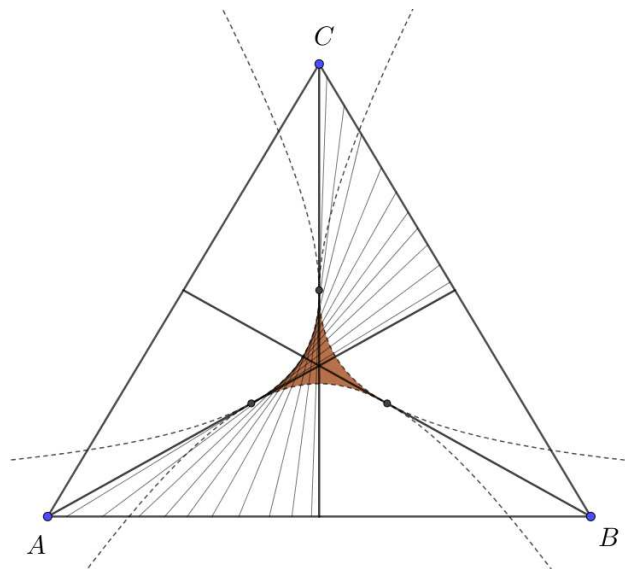




## Poglavlje 3

### Deltoida kao ovojnica bisektrisa

Kao što se ranije navodi u radu, u svakom trokutu postoje tri težišnice koje dijele trokut na dva trokuta jednake površine. Prirodno se nameće pitanje: Postoji li uvijek još pravaca koji dijele trokut na dvije jednake površine a da nisu težišnice trokuta. U prvom dijelu rada opisani su pravci koji su paralelni sa simetralom kuta i dijele površinu trokuta na dva jednaka dijela. U svojem članku [6] iz 1972. godine, J.A. Dunn i J.E. Petty pokazali su da bisektrise površine trokuta omataju krivulju koju ćemo nazivati deltoida. Koristeći svojstva iskazana u [1] opisat ću krivulje ovojnice. Također, kao i za bisektrise površine postoji deltoida koja se dobiva kao ovojnica svih bisektrisa opsega.



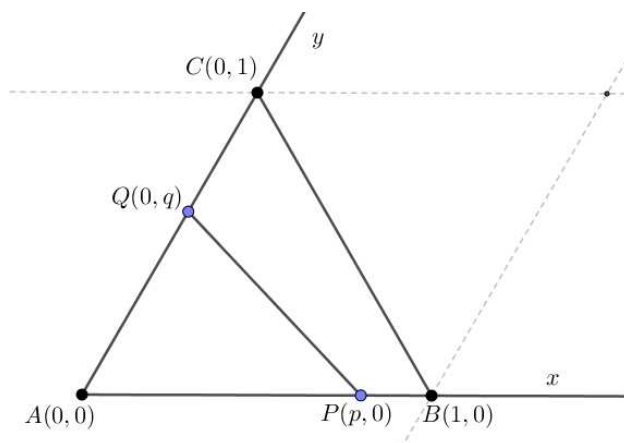
Slika 3.1: Bisektrise kao tangente hiperbole

### 3.1 Deltoida bisektrisa površine

**Definicija 3.1.1.** *Ovojnica (anvelopa) neke familije pravaca je krivulja koja u svakoj svojoj točki tangencijalno dira jedan pravac te familije. Dakle, u svakoj točki ovojnice, postoji pravac koji je tangenta na tu krivulju u toj točki.*

Neka je zadan kut  $\angle BAC$  pri čemu su koordinate vrha  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, 1)$ . Neka su točke  $P(p, 0) \in AB$  i  $Q(0, q) \in AC$ , gdje je  $p \in [0, 1]$ ,  $q \in [0, 1]$  u, ne nužno pravokutnom koordinatnom sustavu, i neka je  $PQ$  bisektrisa površine (Slika 3.2). Kako bismo izveli jednadžbu ovojnice bisektrisa površine ovog trokuta promatrat ćemo omjer duljina  $|AP|$  i  $|AB|$  i omjer površina  $P(APQ)$  i  $P(ABC)$ . Ti omjeri se čuvaju pri linearnoj transformaciji koordinata. U ovako definiranom sustavu jedinica za površinu definirana je kao površina paralelograma  $P(ABCD) = 1$ . Tada je površina trokuta  $\triangle ABC$  jednaka  $P(ABC) = \frac{1}{2}$ , a površina trokuta  $\triangle APQ$  jednaka  $P(APQ) = \frac{1}{2}pq$  po pretpostavci da je  $PQ$  bisektrisa. Dobivamo jednadžbu pravca  $PQ$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad (3.1)$$



Slika 3.2:  $PQ$  je bisektrisa površine

Kako je  $PQ$  bisektrisa površine, imamo

$$\begin{aligned} P(ABC) &= 2 \cdot P(APQ) \\ \frac{1}{2} &= 2 \cdot \frac{1}{2}pq \\ pq &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ako zapišemo jednadžbu pravca  $PQ$  i uvrstimo  $q = \frac{1}{2p}$  dobijemo

$$\frac{x}{p} + 2py = 1 \quad (3.3)$$

Deriviramo po  $p$ , dobivamo  $-\frac{x}{p^2} + 2y = 0$  ili

$$\frac{x}{p} + 2yp = 0 \quad (3.4)$$

Kako bismo odredili jednadžbu ovojnice moramo se riješiti parametra  $p$ . Iz (3.3) i (3.4) dobivamo

$$\begin{cases} 2py = 1 - \frac{x}{p} \\ 2py = \frac{x}{p} \end{cases}$$

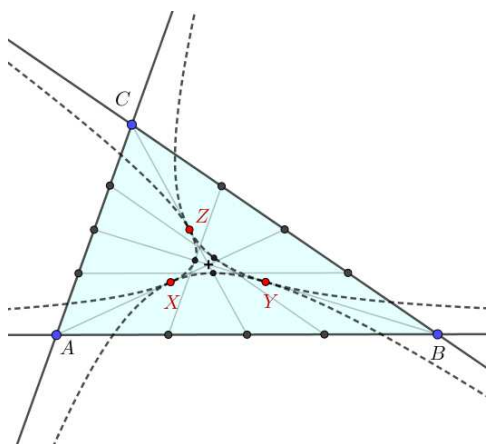
iz čega slijedi

$$4py = 1 = \frac{2x}{p}$$

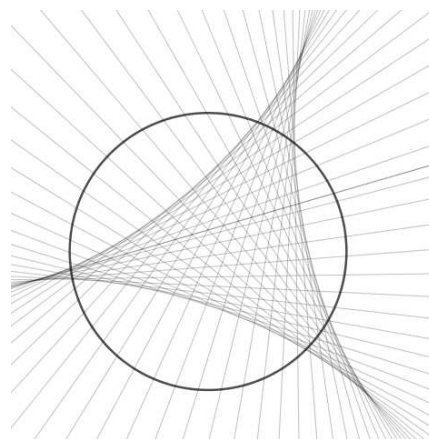
Dobivamo  $2x = p$  i  $1 = 4py$  pa slijedi

$$8xy = 1 \quad (3.5)$$

Dobili smo jednadžbu hiperbole (3.5) u odnosu na kut  $\angle BAC$  koja ima asimptote  $AB$  i  $AC$ . U odnosu na svaki kut trokuta postoji jedna takva hiperbola (Slika 3.3). Lukovi triju hiperbola čine krivulju koja podsjeća na Steinerovu deltoиду (Slika 3.4).



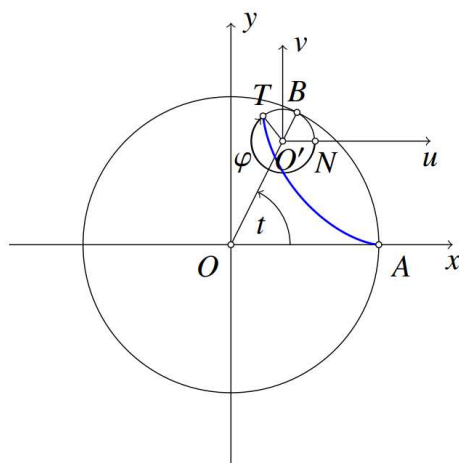
Slika 3.3: Deltoida  $\mathcal{D}_p = XYZ$



Slika 3.4: Steinerova deltoida

**Definicija 3.1.2.** Neka se točka  $T$  nalazi na kružnici  $k$  polumjera  $r$ . Krivulja koju opisuje točka  $T$  dok se kružnica iznutra bez klizanja kotrlja po kružnici polumjera  $R$  zove se hipocikloida i označava se s  $H(R,r)$ . Hipocikloidu čiji su omjeri radijusa kružnica  $\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$  ili  $\frac{R}{r} = \frac{3}{1}$  zovemo **deltoida**.

Izvedimo parametrizaciju Steinerove deltoide.



Slika 3.5: Točka  $T$  iscrtava deltoidu

Neka se kružnica  $k$  bez klizanja kotrlja do točke  $B$ , kao na slici 3.1. Označimo kut  $t = \angle AOB$ . Tada su koordinate središta kružnice  $k$

$$x = (R - r) \cos t$$

$$y = (R - r) \sin t$$

Postavimo koordinatni sustav  $uv$  tako da je ishodište točka  $O'$  u središtu kružnice  $k$ , s  $N$  označimo sjecište kružnice  $k$  i osi  $u$  te kut  $\varphi = \angle NO'T$ . Koordinate točke  $T$  u pomoćnom sustavu  $uv$  su

$$u = r \cos(-\varphi) = r \cos \varphi$$

$$v = r \sin(-\varphi) = -r \sin \varphi$$

To jest, u  $xy$  koordinatnom sustavu

$$x = (R - r) \cos t + r \cos \varphi$$

$$y = (R - r) \sin t - r \sin \varphi$$

(3.6)

Kako su duljine lukova  $\widehat{AB}$  i  $\widehat{BNT}$  jednake, iz  $Rt = r(t + \varphi)$  slijedi

$$\varphi = \frac{R-r}{r}t,$$

što uvršteno u jednadžbu (3.6) daje parametarske jednadžbe Steinerove deltoide.

$$\begin{cases} x(t) = (R-r) \cos t + r \cos \frac{R-r}{r}t \\ y(t) = (R-r) \sin t - r \sin \frac{R-r}{r}t \end{cases}$$

Krivulja koja je dobivena kao ovojnica bisektrisa površina podsjeća na ovako definiranu deltoidu. No promatrana krivulja zapravo nije hipocikloida jer nije dobivena kotrljanjem po kružnici, stoga nije ni deltoida u ovom smislu. U širem smislu, deltoidu definiramo kao ravninsku figuru koja ima tri vrha spojena krivuljama, konkavnima prema interioru, čime je skup unutarnjih točaka nekonveksan.

Krivulju dobivenu kao ovojnicu bisektrisa površine zovemo **deltoida bisektrisa površine** (*eng. deltoid curve*) i označavat ćemo ju  $\mathcal{D}_p$ . R. Whitty u svojem članku [9] eksplicitno izvodi parametrizaciju deltoide bisektrisa površine. Taj postupak nećemo opisivati u ovom radu.

$\mathcal{D}_p$  ima svojstva s oznakom (ABn) koja dolazi od *eng. area-bisecting*:

- (AB1) Pravac je bisektrisa površine ako i samo ako je tangenta na deltoidu  $\mathcal{D}_p$ .
- (AB2) Vrhovi deltoide  $\mathcal{D}_p$  su polovišta težišnica.
- (AB3) Lukovi koji spajaju vrhove deltoide  $\mathcal{D}_p$  su dijelovi hiperbola. Te hiperbole imaju stranice trokuta kao asimptote.
- (AB4) Svaka točka iz interiora deltoide  $\mathcal{D}_p$  se nalazi na tri bisektrise površine. Svaka točka na rubu deltoide (osim vrhova  $X, Y, Z$ ) se nalazi na dvije bisektrise površine. Svaka točka izvan deltoide se nalazi na jednoj bisektrisi površine.
- (AB5) Površina deltoide  $\mathcal{D}_p$  jednaka je umnošku površine trokuta i konstantnog faktora  $\frac{3}{4} \cdot \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.01986038\dots$  Vrijedi:

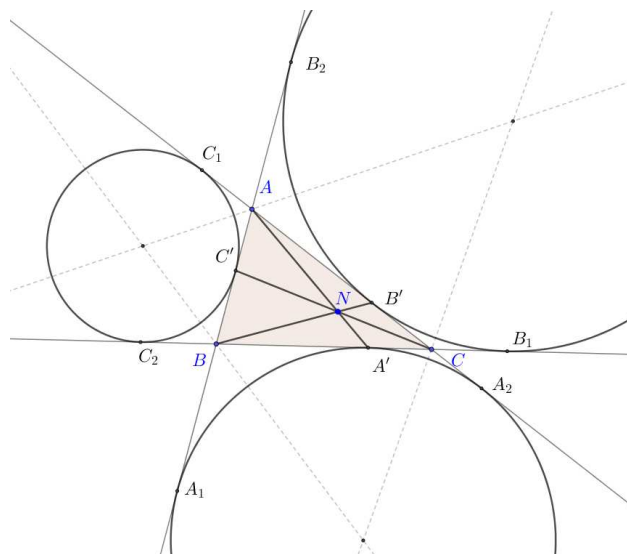
$$\frac{P(\mathcal{D}_p)}{P(\triangle ABC)} = \frac{3}{4} \cdot \ln 2 - \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

- (AB6) Deltoida  $\mathcal{D}_p$  je lokus (geometrijsko mjesto) svih polovišta svih bisektrisa površine.

### 3.2 Deltoida bisektrisa opsega

Iskazat ćemo i svojstva deltoide koja je dobivena kao ovojnica bisektrisa opsega. Takvu deltoidu ćemo označavati s  $\mathcal{D}_o$ . Takva krivulja ima svojstva s oznakom (PBn) koja dolazi od *eng. perimeter-bisecting*.

Neka je zadan trokut  $\triangle ABC$ ,  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$ ,  $c = |AB|$ . Promotrimo ponovo Nagelovu točku (Slika 3.6). Stranice trokuta su tangente na pripisane kružnice i dodiruju pravce  $AB, BC$  i  $AC$  redom u točkama  $C', A'$  i  $B'$ . Poznata su sljedeća svojstva iz teorema 1.1.3.

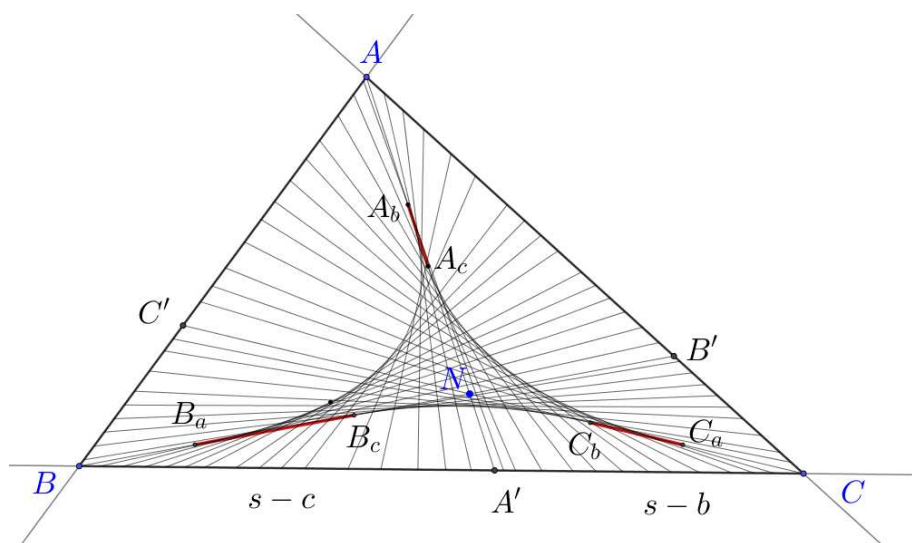


Slika 3.6: Nagelova točka trokuta  $\triangle ABC$

- Pravci  $AA', BB', CC'$  se sijeku u jednoj točki  $N$ .
- Pravci  $AA', BB', CC'$  su ujedno bisektrise opsega trokuta. Konkretno  $|A'C| = s - b$ ,  $|A'B| = s - c$ .
- Točke  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  su dirališta pripisanih kružnica. Tada vrijedi

$$|AA_1| = |AA_2| = |BB_1| = |BB_2| = |CC_1| = |CC_2| = s$$

Čevijane  $AA', BB'$  i  $CC'$  prolaze kroz Nagelovu točku. Prva dva svojstva sugeriraju da je teorija o bisektrisama opsega u trokutu analogon teoriji o bisektrisama površine u trokutu. Pokazuje se da je takva hipoteza istinita. [1]



Slika 3.7: Ovojnica bisektrisa opsega

**(PB1)** Ovojnica bisektrisa opsega trokuta je šesterostrana deltoida  $\mathcal{D}_o$  čije strane alterniraju između segmenata pravaca i segmenata parabola. Prema slici 3.8, dužine  $\overline{A_bA_c}$ ,  $\overline{B_aB_c}$  i  $\overline{C_aC_b}$  i lukovi parabole  $\widehat{A_bC_a}$ ,  $\widehat{B_cC_b}$  i  $\widehat{A_bB_a}$ , gdje su  $A_c, B_c, C_c$  izotomične točke u odnosu na  $A_b, B_a, C_b$ . Ako  $\triangle ABC$  ima dužju stranicu  $\overline{BC}$  i kraću stranicu  $\overline{AB}$ , tada se deltoida sastoji od luka parabole  $\widehat{A_bB_a}$ ;  $\widehat{B_aC_a}$  postaje glatka krivulja koja se sastoji od dužine  $\overline{B_aB_c}$ , luka parabole  $\widehat{B_cC_b}$  i još jedne dužine  $\overline{C_bC_a}$ . Konačno, zadnji dio se sastoji od luka parabole  $\widehat{C_aA_c}$  koji se glatko nastavlja na dužinu  $\overline{A_cA_b}$ .

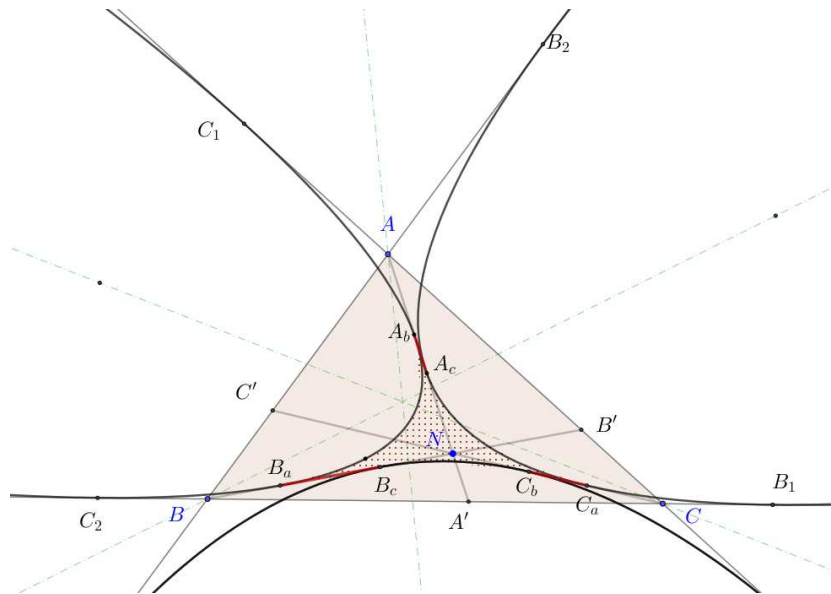
**(PB2)** Točke  $A_b, B_a, C_a$  su opisane omjerima

$$\frac{|A_bA|}{|A_bA'|} = \frac{|CA'|}{|CA|} = \frac{s-b}{b}$$

$$\frac{|A_cA|}{|A_cA'|} = \frac{|BA'|}{|BA|} = \frac{s-c}{c}.$$

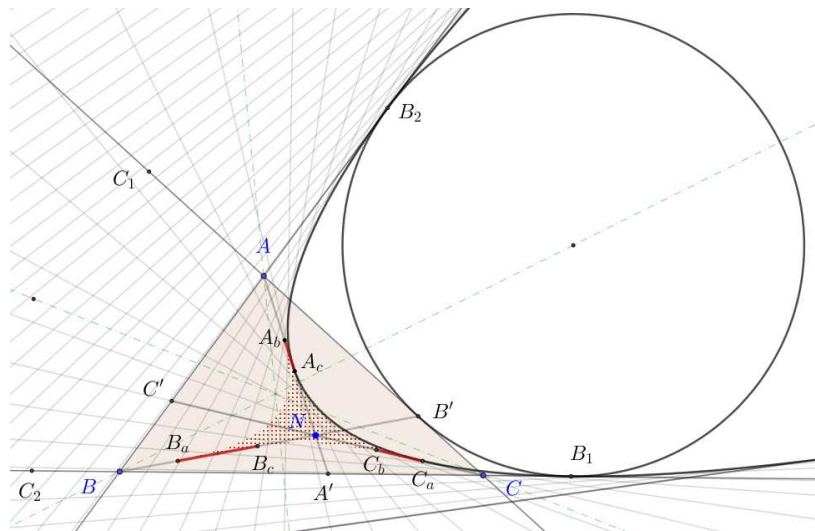
Time su opisane i točke  $A_c, B_c, C_b$  koje su redom izotomične točkama  $A_b, B_a, C_a$  u odnosu na dužine  $\overline{AN}, \overline{BN}, \overline{CN}$ . Konkretno,  $A_c$  i  $A_b$  su međusobno izotomične točke dužine  $\overline{AN}$ , nalaze se na pravcu  $AA'$ .

**(PB3)** Vrhovi deltoide  $\mathcal{D}_o$ ;  $A_b, B_a, C_a$  glatko su povezani s točkama  $A_c, B_c, C_b$  koje su bliže Nagelovoj točki nego vrhovima trokuta.



Slika 3.8: šesterostrana deltoida  $\mathcal{D}_o = A_b B_a B_c C_b C_a A_c$  je ovojnica bisektrisa opsega

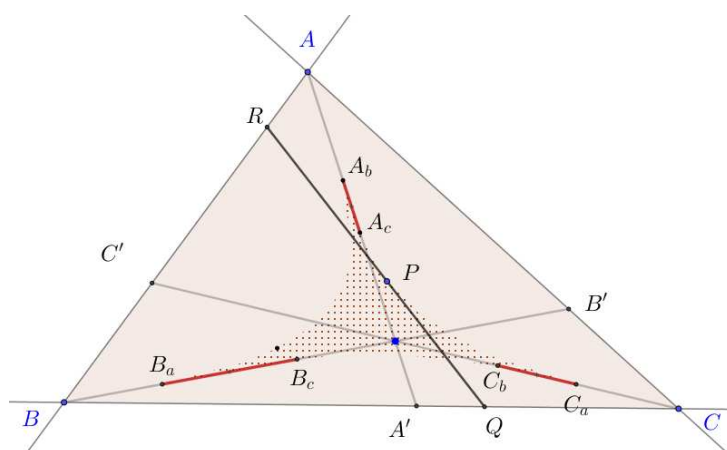
**(PB4)** Parabole koje razapinju lukove deltoide imaju simetrale kuta kao osi simetrije. Parabole prolaze kroz dirališta pripisanih kružnica  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  i diralištima  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  koja se nalaze na pravcima  $AB, BC, AC$ . (Slika 3.9).



Slika 3.9: Svojtvo (PB4), parabola prolazi kroz točke  $B_2, C_a, A_c, B_1$



- (PB5)** Luk parabole koji ima otvor nasuprot najdužoj stranici trokuta glatko spaja obje krajnje točke  $B_c$  i  $C_b$ . Luk parabole nasuprot najkraće stranice ima šiljaste krajnje točke  $A_b$  i  $B_a$ . Treći luk parabole spaja preostale dvije točke  $A_c$  i  $C_a$ , stoga ima glatki i šiljasti spoj pri krajnjim točkama.
- (PB6)** Ako je trokut jednakokrakan tada se jedna od točaka bliža vrhu  $A_b$ ,  $B_c$  ili  $C_a$  podudara s njoj izotomičnom točkom. Ako je trokut jednakostraničan, tada se sve izotomične točke podudaraju.
- (PB7)** U svakom slučaju postoji jedinstvena bisektrisa opsega  $\overline{RQ}$  koja dijeli trokut na jedan manji sličan trokut i četverokut. Deltoida  $\mathcal{D}_o$  je lokus opisan točkom  $P \in \overline{RQ}$  koja dijeli deltoidu u omjeru koji je obrnuto proporcionalan omjeru ostalih stranica manjeg sličnog trokuta. Prema (Slika 3.10) vrijedi  $\frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{|BQ|}{|BR|}$ . Dužine  $\overline{A_bA_c}$ ,  $\overline{B_aB_c}$ ,  $\overline{C_aC_b}$  upotpunjuju deltoidu  $\mathcal{D}_o$ .

Slika 3.10: Svojtvo (PB7), bisektrisa opsega  $RQ$ 

- (PB8)** Svaka točka iz interiora deltoide  $\mathcal{D}_o$  leži na točno tri bisektrise opsega. Svaka točka na rubu deltoide, osim tri šiljasta vrha, leži na točno dvije bisektrise opsega. Svaka točka izvan deltoide leži na jednoj bisektrisi opsega.
- (PB9)** Uz standardnu notaciju stranica, vrhova i kutova te poluopsega trokuta  $\triangle ABC$ , površina deltoide  $\mathcal{D}_o$  računa se prema formuli

$$P(\mathcal{D}_o) = \frac{1}{6s} \cdot [(s-a)^3 \sin \alpha + (s-b)^3 \sin \beta + (s-c)^3 \sin \gamma] \quad (3.8)$$

**(PB10)** Za razliku od deltoide  $\mathcal{D}_p$ , omjer površina deltoide  $\mathcal{D}_o$  i promatranog trokuta nije konstantan. Vrijedi

$$\frac{1}{12} \leq \frac{P(\mathcal{D}_o)}{P(\triangle ABC)} < \frac{1}{3}. \quad (3.9)$$

Donja jednakost se postiže ako je trokut jednakostraničan, tj. ako  $a = b = c$ , tada vrijedi

$$\frac{P(\mathcal{D}_o)}{P(\triangle ABC)} = \frac{1}{12}.$$

Ako je  $\triangle ABC$  pravokutan vrijedi

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P(\mathcal{D}_o)}{P(\triangle ABC)} = \frac{1}{3}$$

Ovim popisom svojstava deltoide bisektrisa opsega završavamo poglavlje. Dokaze tih svojstava ne navodimo jer bi za to bio potreban znatno veći opseg rada.

# Bibliografija

- [1] Berele A. i Catoiu S., *Bisecting the Perimeter of a Triangle*, Mathematics Magazine **91** (2018), br. 2, 121–133, <https://doi.org/10.1080/0025570X.2017.1418589>, posjećena 5.8.2022.
- [2] Dov Avishalom, *The Perimetric Bisection of Triangles*, Mathematics Magazine **36** (1963), br. 1, 60–62, ISSN 0025570X, 19300980, <http://www.jstor.org/stable/2688140>, posjećena 5.8.2022.
- [3] Derek Ball, *Halving Envelopes*, The Mathematical Gazette **64** (1980), br. 429, 166–173, ISSN 00255572, <http://www.jstor.org/stable/3615118>, posjećena 10.8.2022.
- [4] Albert H Beiler, *Recreations in the theory of numbers; the queen of mathematics entertains*, (1964), 274,275, <https://archive.org/details/recreationsinthe00beil/page/274/mode/2up>, posjećena 4.9.2022.
- [5] Allan Berele i Stefan Catoiu, *Area and Perimeter Bisecting Lines of a Triangle*, The College Mathematics Journal **47** (2016), br. 1, 19–28, ISSN 07468342, 19311346, <http://www.jstor.org/stable/10.4169/college.math.j.47.1.19>, posjećena 5.8.2022.
- [6] Jas. A. Dunn i Jas. E. Pretty, *Halving a Triangle*, The Mathematical Gazette **56** (1972), br. 396, 105–108, ISSN 00255572, <http://www.jstor.org/stable/3615256>, posjećena 5.8.2022.
- [7] Helena Halas i Mea Bombardelli, *Izotomične točke trokuta*, Matematičko fizički list **239** (2010), br. 3, 158–165, ISSN 1332-1552.
- [8] N. Ramana Rao R. Nandakumar, *Fair partitions of polygons: An elementary introduction*, Proceedings - Mathematical Sciences **122** (2012), br. 3, 459–467, <https://doi.org/10.1007%2Fs12044-012-0076-5>, posjećena 10.9.2022.

- [9] R. Whitty, *The triangle-halving deltoid envelope*, M500 magazine (2021), br. 300, <https://www.theoremoftheday.org/GeometryAndTrigonometry/DunnPretty/DunnPrettyHyperbolae.pdf>, posjećena 4.9.2022.
- [10] P. Yiu, *Lines Simultaneously Bisecting the Perimeter and Area of a Triangle*, <http://math.fau.edu/yiu/GJARCMG2016.pdf>, posjećena 5.8.2022.

# Sažetak

U ovom radu smo promatrali pravce koji raspolavljaju površinu odnosno opseg trokuta. Pokazano je da u svakom trokutu postoji beskonačno mnogo bisektrisa površine i beskonačno mnogo bisektrisa opsega. Ti skupovi pravaca stvaraju ovojnice koje se zbog svog oblika nazivaju deltoidama. Deltoide su opisane u trećem poglavlju, gdje su iskazana i neka zanimljiva svojstva.

Posebno su promatrani pravci koji su ujedno i bisektrisa opsega i bisektrisa površine, takozvane AP-bisektrise. AP-bisektrisa ima konačno mnogo u svakom trokutu i njihov broj ovisi o međusobnim odnosima duljina stranica trokuta. Konkretno, broj AP-bisektrisa ovisi o predznaku diskriminante kvadratne jednadžbe čija su realna rješenja duljine odsječaka koje bisektrisa čini na stranicama trokuta, s obzirom na neki od vrhova trokuta. Diskusija rješenja pokazuje da za svaki trokut postoji jedna, dvije ili tri AP-bisektrise trokuta ovisno o predznaku diskriminante. Na primjerima su prikazani mogući slučajevi trokuta i broja AP-bisektrisa. Nakon dokazivanja rezultata o bisektrisama, prikazana je konstrukcija takvih pravaca. Također, istraženo je kako se mogu odrediti zanimljivi trokuti s cjelobrojnim duljinama stranica u kojima se može konstruirati AP-bisektrisa.



# Summary

In this paper, we have considered the lines that bisect the area and/or perimeter of the triangle. It has been shown that in any triangle there are infinitely many bisectors of area and infinitely many bisectors of the perimeter. These pairs of lines form envelopes called deltoids because of their shape. Deltoids are described in the third chapter, where some interesting properties are also shown.

The lines that are both perimeter bisectors and area bisectors are called AP-bisectors, and they are of particular interest. There is a finite number of AP-bisectors in each triangle, and this number depends on the relations between the sidelengths of the triangle. Specifically, the number of AP-bisectors depends on the sign of the discriminant of a quadratic equation whose real solutions are the length intercepts formed by the bisector on the sides of the triangle with respect to one of the vertices. A discussion of the solutions shows that for each triangle there is one, two or three AP-bisectors depending on the sign of the discriminant. Possible cases of triangles and their number of AP-bisectors are shown by examples. After proving the results about bisectors, a construction of such lines is shown. Furthermore, an additional analysis including results from number theory is carried out, in order to produce sequences of triangles whose sidelengths, as well as the aforementioned lengths of intercepts formed by AP-bisectors are integers.





# Životopis

Rođen sam 12. travnja 1995. godine u Zagrebu. Pohađao sam Osnovnu školu Luka u Sesvetama. Uz to, pohađao sam i Osnovnu glazbenu školu Zlatka Grgoševića u Sesvetama za gitaru. Nakon osnovne škole sam upisao opću Gimnaziju Sesvete. 2014. godine se upisujem na Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu na nastavnički smjer matematike. Nakon preddiplomskog studija upisao sam diplomski studij; matematika nastavnički smjer.

Uz studij, ispunjavao sam dužnosti demonstratora računarskog praktikuma od 2019. do 2022. godine. Sudjelovao sam u znanstveno-popularizacijskim sadržajima kao što su Otvoreni dani matematike i Znanstveni piknik 2015., 2016. i 2017. godine na kojima sam držao radionice o matematičkim temama. Od 2022. godine radim kao istraživač u Photomathu.