

# Modeliranje usmjerenih podataka

---

Osrečak, Marko

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:971685>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-20**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Marko Osrečak

**MODELIRANJE USMJERENIH  
PODATAKA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Miljenko Huzak

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>6</b>
<b>1 Usmjereni podaci i osnovne cirkularne distribucije</b>	<b>7</b>
1.1 Uvodni primjer . . . . .	7
1.2 Osnovni vjerojatnosni pojmovi za usmjerene podatke . . . . .	9
1.3 Neke populacijske mjere centralne tendencije i disperzije . . . . .	12
1.4 Osnovne cirkularne distribucije . . . . .	17
<b>2 Teorija distribucija i granični teoremi</b>	<b>31</b>
2.1 Teorija karakterističnih funkcija . . . . .	31
2.2 Granični teoremi . . . . .	37
<b>3 Primjeri, primjene i procjene</b>	<b>43</b>
3.1 Cirkularne distribucije . . . . .	43
3.2 Granični teoremi . . . . .	45
3.3 Procjena parametara von Misesove distribucije . . . . .	52
<b>Bibliografija</b>	<b>57</b>

# Uvod

Gauss<sup>1</sup> je modeliranje grešaka u astronomskim mjerenjima sveo na linearne aproksimacije, a činjenica da su odstupanja bila dovoljno mala je uzrokovala da su takve aproksimacije bile zadovoljavajuće i da se linearna teorija proširila u većini statističke analize. No, u brojnim primjerima kao što su sezonalni (periodični) podaci u medicini, smjerovi vjetera u meteorologiji, orijentacija stanica prilikom diobe u biologiji i sl., linearni pristup ne polučuje očekivane i/ili željene rezultate. Dapače, on dovodi do brojnih neočekivanih posljedica kao što je u slučaju aritmetičke sredine kuteva  $1^\circ$  i  $359^\circ$  – ona je jednaka  $180^\circ$ , dok bi prema geometrijskoj intuiciji sredina trebala biti  $0^\circ$ .

Budući da je kružnica zatvorena krivulja i kompaktan skup, a pravac nijedno od navedenog, za očekivati je da će se rezultati koji se baziraju na strukturi prostora u kojemu se promatraju opservacije razlikovati uspoređujemo li distribucije i slučajne varijable na  $\mathbb{R}$  s distribucijama i slučajnim veličinama (tzv. *slučajnim kutevima*) na  $S^1$ . Primjerice, kod definicije distribucija na  $S^1$  (a onda i karakterističnih funkcija, gustoća, momenata itd.) je potrebno uzeti u obzir prirodnu periodičnost koja se pojavljuje na kružnici. Nadalje, uspoređujući  $\mathbb{R}$  i  $S^1$  kao algebarske strukture, na  $S^1$  je smislena samo jedna operacija (zbrajanje modulo  $2\pi$ ) dok su na  $\mathbb{R}$  prisutne dvije standardno poznate operacije (zbrajanje i množenje). Sve te različitosti kulminiraju u bitnim vjerojatnosnim rezultatima kao što je centralni granični teorem za cirkularne distribucije u obliku asimptotske uniformnosti.

## Neki osnovni rezultati teorije vjerojatnosti

Kroz naredna poglavlja se često referira na neke poznate rezultate teorije vjerojatnosti, iznose se usporedbe rezultata za cirkularne distribucije u odnosu na vjerojatnosne distribucije na  $\mathbb{R}$  te se koriste neki poznati rezultati iz teorije mjere. U ovom

---

<sup>1</sup>Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30.4.1777. - Göttingen, 23.2.1855.) njemački matematičar i astronom

dijelu ćemo navesti sve te korištene rezultate, a dokaze istih ćemo izostaviti (većina se može naći u [6], [9], [13]).

**Definicija 0.0.1.** *Neka su  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  i  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  izmjerivi prostori. Preslikavanje  $g: (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  za koje vrijedi:*

$$g^{-1}(F_2) := \{\omega \in \Omega_1 : g(\omega) \in F_2\} \in \mathcal{F}_1, \quad \forall F_2 \in \mathcal{F}_2$$

*nazivamo izmjerivim preslikavanjem (u paru  $\sigma$ -algebri  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ ).*

*Ako su  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1) = (\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}))$  i  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) = (\mathbb{R}^{d_2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2}))$ , tada izmjerivo preslikavanje  $g: \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}^{d_2}$  nazivamo Borelovom funkcijom.*

**Definicija 0.0.2.** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor. Izmjerivo preslikavanje  $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  nazivamo slučajnom veličinom.*

*Kad je  $d = 1$ , za  $X$  kažemo da je slučajna varijabla, a za  $d > 1$  kažemo da je slučajni vektor.*

**Definicija 0.0.3.** *Neka je  $X$  slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .*

(i) *Preslikavanje  $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definirano s:*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in \langle -\infty, x \rangle) := \mathbb{P}(X^{-1}(\langle -\infty, x \rangle]), \quad x \in \mathbb{R}$$

*zovemo funkcijom distribucije slučajne varijable  $X$ .*

(ii) *Za  $X$  kažemo da je apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće vjerojatnosti  $f_X$  ako je  $f_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  nenegativna Borelova funkcija takva da vrijedi:*

$$F_X(x) = \int_{\langle -\infty, x \rangle] f_X(t) d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Definicija 0.0.4.** *Neka je  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  slučajni vektor na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .*

(i) *Preslikavanje  $F_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$  definirano s:*

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} \in \langle -\infty, x_1 \rangle \times \dots \times \langle -\infty, x_k \rangle) \\ &:= \mathbb{P}(\mathbf{X}^{-1}(\langle -\infty, x_1 \rangle \times \dots \times \langle -\infty, x_k \rangle]), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

*zovemo funkcijom distribucije slučajnog vektora  $\mathbf{X}$ .*

(ii) *Za  $\mathbf{X}$  kažemo da je apsolutno neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće vjerojatnosti  $f_{\mathbf{X}}$  ako je  $f_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty)$  nenegativna Borelova funkcija takva da vrijedi:*

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{\langle -\infty, x_1 \rangle \times \dots \times \langle -\infty, x_k \rangle] f_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) d\lambda^k(\mathbf{t}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

**Definicija 0.0.5.** Za dvije slučajne veličine  $\mathbf{X}$  i  $\mathbf{Y}$  (ne nužno definirane na istim vjerojatnosnim prostorima) kažemo da su jednake po distribuciji (i pišemo  $\mathbf{X} \stackrel{D}{=} \mathbf{Y}$ ) ako imaju jednake funkcije distribucije:

$$F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{Y}}.$$

**Definicija 0.0.6.** Za slučajne varijable  $X$  i  $Y$  definirane na istom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  kažemo da su nezavisne ako:

$$\mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) = \mathbb{P}(X \in B_1)\mathbb{P}(Y \in B_2), \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

**Teorem 0.0.7.** (zamjena varijabli za gustoće)

(i) Neka je  $X$  apsolutno neprekidna slučajna varijabla s gustoćom  $f_X$  te neka je  $L := \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$  nosač gustoće od  $X$ . Ako je  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borelova funkcija takva da postoji najviše prebrojivo mnogo disjunktних skupova  $L_i$  u  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  za koje vrijedi:

- (a)  $L = \bigcup_i L_i$ ,
- (b)  $g_i := g|_{L_i}: L_i \rightarrow g(L_i)$  je bijekcija,
- (c)  $g_i^{-1}$  je klase  $C^1$  na  $T_i := g(L_i)$  te  $\frac{d}{dy}g_i^{-1}(y) \neq 0, \forall y \in T_i$ ,

tada je  $Y := g(X)$  apsolutno neprekidna slučajna varijabla s gustoćom:

$$f_Y(y) = \sum_i \mathbb{1}_{T_i}(y) f_X(g_i^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy}g_i^{-1}(y) \right|, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(ii) Neka je  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  apsolutno neprekidan  $k$ -dimenzionalan slučajni vektor s gustoćom  $f_{\mathbf{X}}$  te neka je  $L := \{x \in \mathbb{R}^k : f_{\mathbf{X}}(x) > 0\}$  nosač gustoće od  $\mathbf{X}$ . Ako je  $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  Borelova funkcija takva da postoji najviše prebrojivo mnogo disjunktних skupova  $L_i$  u  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$  za koje vrijedi:

- (a)  $L = \bigcup_i L_i$ ,
- (b)  $g_i := g|_{L_i}: L_i \rightarrow g(L_i)$  je bijekcija,
- (c)  $g_i^{-1}$  je klase  $C^1$  na  $T_i := g(L_i)$  te  $J_{g_i^{-1}}(\mathbf{y}) \neq 0$  za svaki  $\mathbf{y} \in T_i$ ,

tada je  $\mathbf{Y} := g(\mathbf{X})$  apsolutno neprekidan  $k$ -dimenzionalan slučajni vektor s gustoćom:

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \sum_i \mathbb{1}_{T_i}(\mathbf{y}) f_{\mathbf{X}}(g_i^{-1}(\mathbf{y})) |J_{g_i^{-1}}(\mathbf{y})|, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k.$$

**Definicija 0.0.8.** (i) Ako su  $(X_n: n \in \mathbb{N})$  niz slučajnih varijablu na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  te  $X$  slučajna varijabla na istom vjerojatnosnom prostoru takvi da je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \mathbb{P}\text{-s.s. } \omega \in \Omega$$

kažemo da  $(X_n)_n$  konvergira gotovo sigurno prema  $X$  i pišemo:

$$X_n \xrightarrow{g.s.} X, \quad \text{kad } n \rightarrow +\infty.$$

(ii) Ako su  $(X_n: n \in \mathbb{N})$  niz slučajnih varijabli s funkcijama distribucije  $F_n := F_{X_n}, n \in \mathbb{N}$  te  $X$  slučajna varijabla s funkcijom distribucije  $F := F_X$  takvi da vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad x \in C(F),$$

pri čemu je  $C(F)$  skup svih točaka neprekidnosti funkcije  $F$ , kažemo da  $(X_n)_n$  konvergira po distribuciji prema  $X$  i pišemo:

$$X_n \xrightarrow{D} X, \quad \text{kad } n \rightarrow +\infty.$$

**Teorem 0.0.9.** (teorem o monotonj konvergenciji) Neka je  $(X_n: n \in \mathbb{N})$  gotovo sigurno rastući niz gotovo sigurno nenegativnih slučajnih varijabli takvih da  $X_n \xrightarrow{g.s.} X$  kad  $n \rightarrow +\infty$ . Tada vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

**Teorem 0.0.10.** (teorem o dominiranoj konvergenciji) Neka je  $(X_n: n \in \mathbb{N})$  niz slučajnih varijabli takvih da  $X_n \xrightarrow{g.s.} X$  kad  $n \rightarrow +\infty$ . Ako postoji nenegativna slučajna varijabla  $Y$  takva da je  $|X_n| \leq Y$  g.s. za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i  $E[Y] < +\infty$ , tada vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

**Teorem 0.0.11.** (klasičan Fubinijev teorem) Neka je  $X$  slučajna varijabla na produkt-nom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosnih prostora  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$  i  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ . Ako  $\int_{\Omega} X d\mathbb{P}$  postoji, tada vrijedi:

$$\int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} X d\mathbb{P}_1 \right) d\mathbb{P}_2 = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} X d\mathbb{P}_2 \right) d\mathbb{P}_1.$$

**Definicija 0.0.12.** Za preslikavanje  $F: \mathbb{R} \rightarrow \langle -\infty, +\infty \rangle$  kažemo da je ograničena distribucija na  $\mathbb{R}$  ako je  $F$  neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija takva da je  $F(-\infty) = 0$  i  $F(+\infty) < +\infty$ .



**Definicija 0.0.13.** Za niz ograničenih distribucija  $(F_n : n \in \mathbb{N})$  kažemo da konvergira slabo prema ograničenoj distribuciji  $F$  (i pišemo:  $F_n \xrightarrow{w} F$ , kad  $n \rightarrow +\infty$ ) ako vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x), \quad x \in C(F) \cup \{\pm\infty\},$$

gdje je  $C(F)$  skup svih točaka neprekidnosti funkcije  $F$ .

**Definicija 0.0.14.** Karakteristična funkcija ograničene distribucije  $F$  na  $\mathbb{R}$  je funkcija  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definirana s:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Teorem 0.0.15.** (teorija karakterističnih funkcija ograničenih distribucija na  $\mathbb{R}$ )

- (i) (teorem jedinstvenosti) Neka su  $F_1$  i  $F_2$  ograničene distribucije s pripadnim karakterističnim funkcijama  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Vrijedi  $F_1 = F_2$  ako i samo ako  $\varphi_1 = \varphi_2$ .
- (ii) (teorem inverzije za gustoće) Neka je  $F$  ograničena distribucija s pripadnom karakterističnom funkcijom  $\varphi$ . Ako  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt < +\infty$ , tada  $F$  ima gustoću  $f$  danu s:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

te je ovakva gustoća neprekidna i ograničena funkcija.

- (iii) (teorem neprekidnosti) Neka je  $(F_n : n \in \mathbb{N})$  niz vjerojatnosnih distribucija s pripadnim karakterističnim funkcijama  $(\varphi_n : n \in \mathbb{N})$ .
  - (a) Ako postoji vjerojatnosna funkcija distribucije  $F$  s pripadnom karakterističnom funkcijom  $\varphi_F$  takva da  $F_n \xrightarrow{w} F$ , tada  $\varphi_n \rightarrow \varphi_F$  po točkama.
  - (b) Ako za svako  $t \in \mathbb{R}$  postoji limes  $\varphi(t) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t)$  i ako je preslikavanje  $t \mapsto \varphi(t)$  neprekidno u  $t = 0$ , tada postoji vjerojatnosna funkcija distribucije  $F$  čija je  $\varphi$  karakteristična funkcija i vrijedi  $F_n \xrightarrow{w} F$ .
- (iv) Ako su  $X_1, \dots, X_n$  nezavisne slučajne varijable s pripadnim karakterističnim funkcijama  $\varphi_{X_1}, \dots, \varphi_{X_n}$ , tada je karakteristična funkcija od  $S_n := X_1 + \dots + X_n$  dana s:

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Teorem 0.0.16.** (Helly) Neka je  $f$  neprekidna funkcija i neka je  $(F_n : n \in \mathbb{N})$  niz neopadajućih i uniformno ograničenih funkcija koje konvergiraju prema funkciji  $F$  u svim točkama neprekidnosti funkcije  $F$  iz intervala  $[a, b]$ . Tada vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dF_n(x) = \int_a^b f(x) dF(x).$$

**Teorem 0.0.17.** (Riemann-Lebesgue) Neka je  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ . Tada vrijedi:

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{izx} d\lambda(x) = 0.$$

**Lema 0.0.18.** (Schefféova lema) Neka su  $f, f_1, f_2, f_3, \dots$  funkcije u  $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$  takve da je  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$  za  $\lambda$ -skoro svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Tada vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| d\lambda(x) \rightarrow 0 \text{ ako i samo ako } \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| d\lambda(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda(x).$$

**Korolar 0.0.19.** Neka su  $X, X_1, X_2, X_3, \dots$  apsolutno neprekidne slučajne varijable s pripadnim gustoćama  $f, f_1, f_2, f_3, \dots$ . Ako vrijedi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$  za  $\lambda$ -skoro svaki  $x \in \mathbb{R}$ , tada  $X_n \xrightarrow{D} X$ , kad  $n \rightarrow +\infty$ .

# Poglavlje 1

## Usmjereni podaci i osnovne cirkularne distribucije

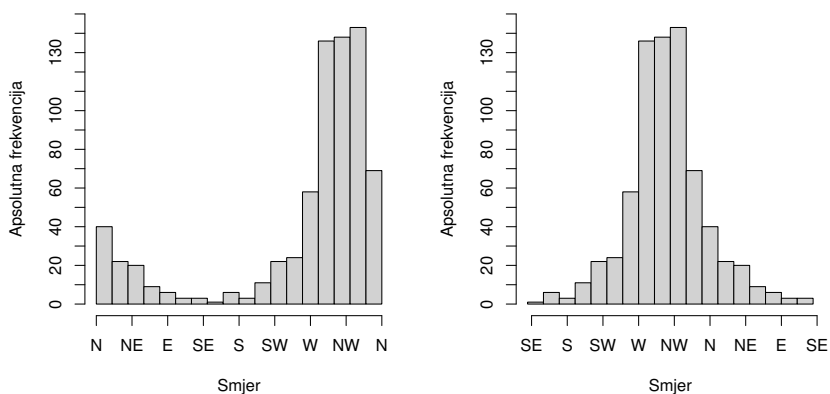
### 1.1 Uvodni primjer

U [8] su navedeni smjerovi u kojima je 714 divljih patki (*Anas platyrhynchos*) krenulo bježati prilikom puštanja.  $0^\circ$  predstavlja sjever,  $90^\circ$  istok,  $180^\circ$  jug, a  $270^\circ$  zapad. Tablica 1.1 predstavlja apsolutne frekvencije tih podataka.

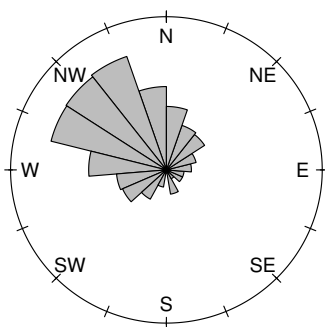
Tablica 1.1: Smjerovi bježanja *Anas platyrhynchos*

Smjer	Broj ptica	Smjer	Broj ptica
$0^\circ - 20^\circ$	40	$180^\circ - 200^\circ$	3
$20^\circ - 40^\circ$	22	$200^\circ - 220^\circ$	11
$40^\circ - 60^\circ$	20	$220^\circ - 240^\circ$	22
$60^\circ - 80^\circ$	9	$240^\circ - 260^\circ$	24
$80^\circ - 100^\circ$	6	$260^\circ - 280^\circ$	58
$100^\circ - 120^\circ$	3	$280^\circ - 300^\circ$	136
$120^\circ - 140^\circ$	3	$300^\circ - 320^\circ$	138
$140^\circ - 160^\circ$	1	$320^\circ - 340^\circ$	143
$160^\circ - 180^\circ$	6	$340^\circ - 360^\circ$	69

Prvi pristup prilikom analiziranja podataka bi mogao biti prikaz histograma frekvencija. No ipak, na histogramu ili bilo kojem drugom linearnom prikazu podataka ne možemo uočiti obilježja stvarne distribucije. Primjerice, na Slici 1.1a su prikazane dvije varijante linearnog histograma. Iako prikazuju svojstva istih podataka, ti grafovi se vizualno značajno razlikuju. Stoga se radi jednoznačnosti cirkularni podaci prikazuju tzv. dijagramom ruža (engl. *rose diagram*) kao na Slici 1.1b koji je vari-



(a) Linearni histogrami



(b) Dijagram ruža

Slika 1.1: Grafički prikazi smjerova bježanja *Anas platyrhynchos*

janta linearnog histograma samo za cirkularne podatke.

U odnosu na opservacije nad  $\mathbb{R}$ , ovaj primjer pokazuje kako i jednostavne podatke možemo interpretirati na kompliciraniji način te kako postoji potreba za uvođenjem složenijih struktura za opisivanje ovakvih podataka. Specijalno, kada nam osim nedostatka uređaja nad promatranim podacima nedostaje i definicija ishodišne vrijednosti (analogna nuli u  $\mathbb{R}$  ili ishodištu u  $\mathbb{R}^n$ ), postavlja se pitanje kako sve informacije koje postoje u podacima pravilno iskoristiti.

## 1.2 Osnovni vjerojatnosni pojmovi za usmjerene podatke

Statistika usmjerenih podataka u centru proučavanja ima opservacije koje čine jedinični vektori u ravnini ili trodimenzionalnom prostoru (iako se teorija prirodno proširuje i na kompliciranije prostore). U takvom slučaju, poznate metode za analizu univarijatnih ili multivarijatnih podataka se ne mogu koristiti, već je potrebno uvesti nove koje uzimaju u obzir inherentnu strukturu tih prostora.

Od sada nadalje (osim ako ne bude eksplicitno rečeno drukčije) promatramo opservacije na  $S^1$ . Budući da je  $S^1$  parametrizabilna jednim parametrom, primjerice onim koji predstavlja kut koji jedinični vektor na kružnici zatvara s pozitivnim dijelom  $x$ -osi, ovakve opservacije ima smisla zvati kutevima. Mi ćemo svaku slučajnu varijablu  $\Theta$  koja predstavlja takav parametar zvati *slučajnim kutem*. Sada je jasno da ako s  $\Phi$  označimo parametrizaciju  $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definiranu s  $\Phi(\theta) = e^{i\theta}$ , tada za slučajni kut  $\Theta$  vrijedi da  $\Phi(\Theta)$  poprima vrijednosti na  $S^1$ . U svim daljnjim koracima ćemo slučajnu varijablu  $Z$  koja poprima vrijednosti na  $S^1 = S^1(\mathbb{C})$  identificirati s  $\Theta$  takvim da je  $Z = e^{i\Theta}$ .

**Definicija 1.2.1.** *Neka je  $\Theta$  slučajni kut na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Preslikavanje  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definirano s:*

$$F(x) = \mathbb{P}(0 < \Theta \leq x), \quad x \in [0, 2\pi] \quad (1.1)$$

$$F(x + 2\pi) - F(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

*nazivamo funkcijom (cirkularne) distribucije slučajnog kuta  $\Theta$ .*

Uočimo kako je jednakost (1.1) analogon standardne definicije funkcije distribucije slučajne varijable, dok (1.2) govori da je vjerojatnost događaja da slučajni kut poprimi vrijednosti u bilo kojem intervalu duljine  $2\pi$  uvijek 1. Funkcije cirkularne distribucije ćemo u nastavku zvati funkcijama distribucije, tj. izostavljat ćemo pridjev „cirkularna“ kad god iz konteksta bude jasno da se referiramo na distribucije slučajnih kuteva.

Neka od svojstava ovako definirane funkcije distribucije su dana u sljedećim propozicijama.

---

<sup>1</sup>Uočimo da je ovako definirano preslikavanje  $\Phi$  neprekidno. Mi nećemo specificirati  $\sigma$ -algebre na  $S^1$  niti ćemo ulaziti u izmjerivost od  $\Phi(\Theta)$ , već ćemo u analizama samo promatrati slučajne kuteve  $\Theta$ .

**Propozicija 1.2.2.** *Neka je  $F$  funkcija distribucije slučajnog kuta  $\Theta$ .  $F$  je zdesna neprekidna funkcija takva da vrijedi:*

$$F(0) = 0 \tag{1.3}$$

$$F(2\pi) = 1 \tag{1.4}$$

$$F(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \tag{1.5}$$

$$F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty \tag{1.6}$$

*Dokaz.* Da je  $F$  neprekidna zdesna slijedi iz neprekidnosti vjerojatnosti na padajuće nizove događaja. Neka je  $x \in [0, 2\pi)$  te neka je  $(x_n)_n$  takav da  $x_n \searrow x$ . Tada postoji  $N \in \mathbb{N}$  takav da je  $x_n \in [0, 2\pi)$  za sve  $n \geq N$ . Jer je  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \langle 0, x_n \rangle = \langle 0, x \rangle$ , iz neprekidnosti vjerojatnosti na padajuće nizove događaja slijedi  $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty, n \geq N} \mathbb{P}(\Theta \in \langle 0, x_n \rangle) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ . Proširenjem po periodičnosti (1.2), tvrdnja vrijedi za sve  $x \in \mathbb{R}$ .

Jednakosti (1.3) i (1.4) sada slijede direktno iz definicije 1.2.1. (1.5) ćemo dokazati koristeći činjenicu da za svaki  $\theta \in [0, 2\pi]$  i svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi:

$$F(\theta + 2n\pi) = F(\theta) + \sum_{k=1}^n [F(\theta + 2k\pi) - F(\theta + 2(k-1)\pi)] \stackrel{(1.2)}{=} F(\theta) + n \geq n$$

Ako je sada  $(x_n)_n$  takav da  $x_n \nearrow +\infty$ , označimo li  $x_n = x'_n + 2k_n\pi$ , pri čemu je  $x'_n \in [0, 2\pi)$  glavna mjera kuta  $x_n$ , vrijedi  $k_n \nearrow +\infty$  pa iz gornje jednakosti slijedi:

$$F(x_n) = F(x'_n + 2k_n\pi) \geq k_n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty$$

iz čega slijedi  $F(+\infty) = +\infty$ .

Analogno se pokazuje i (1.6) jer je  $F(\theta - 2n\pi) = F(\theta) - n \leq 1 - n$  za svaki  $\theta \in [0, 2\pi]$  i svaki  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Propozicija 1.2.3.** *Neka je  $\Theta$  slučajni kut. Tada za svaki  $k \in \mathbb{Z}$  vrijedi:*

$$\Theta + 2k\pi \stackrel{D}{=} \Theta \tag{1.7}$$

*Dokaz.* Sjetimo se da je  $e^{2ik\pi} = 1$  za sve  $k \in \mathbb{Z}$ . Tada za proizvoljni  $k \in \mathbb{Z}$  i za slučajne varijable  $e^{i\Theta}$  i  $e^{i(\Theta+2k\pi)}$  na  $S^1$  vrijedi:

$$e^{i\Theta} = e^{i(\Theta+2k\pi)}$$

pa mora biti  $\Theta \stackrel{D}{=} \Theta + 2k\pi$ . □

Slično kao za distribucije na  $\mathbb{R}$ , ako je  $F$  distribucija slučajnog kuta  $\Theta$ , tada za sve  $\alpha \in \mathbb{R}$  i  $\beta \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$  vrijedi:

$$\mathbb{P}(\alpha < \Theta \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} dF(x) \quad (1.8)$$

Dodatno, ako je  $\beta \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$ , slijedi da postoje  $\alpha', \beta' \in [0, 2\pi]$  te  $k \in \mathbb{Z}$  takvi da je:

$$\alpha = \alpha' + 2k\pi, \quad \beta = \beta' + 2k\pi$$

Tada je  $F(\beta) = F(\beta') + k$  i  $F(\alpha) = F(\alpha') + k$  pa imamo:

$$F(\beta) - F(\alpha) = F(\beta') - F(\alpha') = \mathbb{P}(\Theta \in \langle 0, \beta' \rangle) - \mathbb{P}(\Theta \in \langle 0, \alpha' \rangle) = \mathbb{P}(\Theta \in \langle \alpha', \beta' \rangle)$$

Ovo povlači da razlika  $F(\beta) - F(\alpha)$  ne ovisi o izboru *nultog smjera*<sup>2</sup>. Budući da vrijednosti od  $F$  ovise o izboru nultog smjera, ova dva zaključka kažu kako promjena nultog smjera uzrokuje samo translaciju funkcije distribucije za konstantu kao što bismo i intuitivno pretpostavili. Naime, rotacijom  $R_{2\pi-\theta}: S^1 \rightarrow S^1$  kružnice  $S^1$  za kut  $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$  u negativnom smjeru, kut 0 preslikavamo u kut  $-\theta$ , a funkciju distribucije onda možemo promatrati na intervalu  $[-\theta, 2\pi - \theta]$ . Dakle, zamjenom  $[0, 2\pi]$  s  $[-\theta, 2\pi - \theta]$  u definiciji 1.2.1 dobivamo identična svojstva funkcije distribucije samo na drugom intervalu.

**Definicija 1.2.4.** *Za funkciju distribucije  $F$  kažemo da je apsolutno neprekidna ako postoji Borelova funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da vrijedi:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) d\theta = F(\beta) - F(\alpha), \quad -\infty < \alpha \leq \beta < +\infty. \quad (1.9)$$

Slično kao i kod distribucija na  $\mathbb{R}^n$ , postoji karakterizacija funkcija koje su gustoće cirkularnih distribucija. Borelova funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcija gustoće neke cirkularne distribucije ako i samo ako vrijedi:

- (i)  $f(\theta) \geq 0$ , za skoro svaki  $\theta \in \mathbb{R}$
- (ii)  $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ , za skoro svaki  $\theta \in \mathbb{R}$
- (iii)  $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$ .

---

<sup>2</sup>*Nulti smjer* je kut  $\theta$  kojeg obično biramo da bude iz  $[-\pi, \pi]$  da predstavlja smjer pozitivnog dijela  $x'$ -osi u koji se postavlja  $x', y'$ -koordinatni sustav. Ako je  $\theta = 0$ , tada se  $x', y'$ -koordinatni sustav podudara sa standardnim.

Po uzoru na distribucije na  $\mathbb{R}^n$ , želimo uvesti analogon karakterističnih funkcija. Sjetimo se da je za ograničenu distribuciju  $F$  na  $\mathbb{R}^n$ , preslikavanje  $\mathbf{t} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{t}^\top \mathbf{x}} dF(\mathbf{x})$  bilo dobro definirano jer je  $|e^{i\mathbf{t}^\top \mathbf{x}}| = 1$  pa je  $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i\mathbf{t}^\top \mathbf{x}}| dF(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(\mathbf{x})$  što je konačno budući da je  $F$  ograničena funkcija distribucije. Uočimo da proširenje ovakve definicije na cirkularne distribucije ne bi imalo smisla budući da one prema (1.5) i (1.6) nisu ograničene.

Pogledajmo što se događa kada gornji integral restringiramo samo na  $[0, 2\pi]$ .

Neka je  $F$  funkcija distribucije od  $\Theta$ . Prema propoziciji 1.2.3 vrijedi da je  $F$  distribucija i od  $\Theta + 2\pi$ . Također, budući da je  $|e^{it(\Theta+2\pi)}| = |e^{it\Theta}| = 1$  za svaki  $t \in \mathbb{R}$ , postoje  $\mathbb{E}[e^{it\Theta}]$  i  $\mathbb{E}[e^{it(\Theta+2\pi)}]$ . Ova dva spomenuta svojstva povlače:

$$e^{2\pi it} \mathbb{E}[e^{it\Theta}] = \mathbb{E}[e^{it(\Theta+2\pi)}] = \mathbb{E}[e^{it\Theta}], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Iz ove jednakosti sada slijedi da je ili  $\mathbb{E}[e^{it\Theta}] = 0$  ili  $e^{2\pi it} = 1$ , tj.  $t \in \mathbb{Z}$ . Dakle, karakterističnu funkciju cirkularne distribucije ima smisla definirati na  $\mathbb{Z}$ .

**Definicija 1.2.5.** *Neka je  $F$  funkcija cirkularne distribucije. Preslikavanje  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definirano s:*

$$\varphi(p) = \varphi_p := \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} dF(\theta) \tag{1.10}$$

*nazivamo karakterističnom funkcijom (karakterističnim nizom) cirkularne distribucije  $F$ .*

### 1.3 Neke populacijske mjere centralne tendencije i disperzije

Neka je  $(\varphi_p)_p$  karakteristični niz distribucije  $F$ . Ako za  $p \in \mathbb{Z}$  stavimo:

$$\alpha_p = \int_0^{2\pi} \cos p\theta dF(\theta) \tag{1.11}$$

$$\beta_p = \int_0^{2\pi} \sin p\theta dF(\theta) \tag{1.12}$$

vrijedi:

$$\varphi_p = \alpha_p + i\beta_p. \tag{1.13}$$

Primijetimo da, ako je  $Z = e^{i\Theta}$  kompleksna slučajna varijabla takva da je  $\Theta \sim F^3$ , tada se  $\varphi_p$  podudara s  $p$ -tim momentom od  $Z$ :

$$\mathbb{E}[Z^p] = \mathbb{E}[e^{ip\Theta}] = \mathbb{E}[\cos p\Theta + i \sin p\Theta] = \alpha_p + i\beta_p.$$

---

<sup>3</sup>Radi jedinstvenosti prikaza, u  $Z = e^{i\Theta}$  pretpostavljamo da je  $\arg(Z) = \Theta \in [0, 2\pi)$ .



S druge strane, ako je  $Z = e^{i\Theta} = \cos \Theta + i \sin \Theta$ , slijedi da je:

$$Z^p = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} i^{p-j} (\cos \Theta)^j (\sin \Theta)^{p-j}$$

pa je i:

$$\mathbb{E}[Z^p] = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} i^{p-j} \mathbb{E}[(\cos \Theta)^j (\sin \Theta)^{p-j}].$$

Ovi rezultati ponovno povezuju slučajni kut s pripadnom slučajnom veličinom na  $S^1$ , a izvedene jednostavne formule povlače da je karakteristična funkcija slučajnog kuta vezana uz njegove „trigonometrijske momente“. Uočimo da su  $\cos \Theta$  i  $\sin \Theta$  komponente slučajne veličine na  $S^1$ . Detaljnije o vezama između distribucija i karakterističnih funkcija ćemo govoriti u idućem poglavlju.

Koristeći svojstva sinusa, kosinusa i funkcija distribucija, lako se vidi da:

$$\alpha_{-p} = \alpha_p, \quad \beta_{-p} = -\beta_p, \quad |\alpha_p| \leq 1, \quad |\beta_p| \leq 1. \quad (1.14)$$

Za svaki  $p \in \mathbb{Z}$  za koji je  $\varphi_p \neq 0$  možemo pisati i:

$$\varphi_p = \rho_p e^{i\mu_p}, \quad \rho_p > 0, \quad \mu_p \in [0, 2\pi). \quad (1.15)$$

Za  $p = 1$  ćemo koristiti oznake  $\alpha = \alpha_1$  i  $\beta = \beta_1$ , te, ako je  $\varphi_1 \neq 0$ ,  $\rho = \rho_1$  i  $\mu = \mu_1$ . Takav  $\mu$  nazivamo *srednjim smjerom*, a  $\rho$  *srednjom rezultatnom duljinom*.

**Definicija 1.3.1.** Za slučajni kut  $\Theta$  s vrijednostima u  $[0, 2\pi)$  i karakterističnim nizom  $(\varphi_p)_p$  definiramo  $p$ -ti centralni trigonometrijski moment  $\bar{\alpha}_p + i\bar{\beta}_p$  gdje su:

$$\bar{\alpha}_p = \mathbb{E}[\cos p(\Theta - \mu)], \quad \bar{\beta}_p = \mathbb{E}[\sin p(\Theta - \mu)]. \quad (1.16)$$

Ako je  $\theta_1, \dots, \theta_n$  realizacija slučajnog uzorka duljine  $n$ , tada je uzoračka verzija  $p$ -tog trigonometrijskog momenta dana preko  $\phi_p = a_p + ib_p$  gdje su  $a_p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos p\theta_j$  i  $b_p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin p\theta_j$ . Tada, uz oznaku  $\phi_p = \bar{R}e^{i\bar{\theta}_p}$ ,  $\bar{R}$  i  $\bar{\theta}_p$  predstavljaju uzoračke verzije srednjeg smjera i srednje rezultatne duljine za  $p\theta_1, \dots, p\theta_n$ .

**Lema 1.3.2.** (i) *Srednja rezultatna duljina slučajnog kuta je invarijantna, a srednji smjer ekvivarijantan na rotacije, to jest ako je  $R_{-\psi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rotacija za kut  $-\psi$  definirana s  $R_{-\psi}(\theta) = \theta - \psi$  te  $\Theta$  slučajni kut, tada za srednju rezultatnu duljinu vrijedi  $\rho(R_{-\psi}(\Theta)) = \rho(\Theta)$ , a za srednji smjer  $\mu(R_{-\psi}(\Theta)) = R_{-\psi}(\mu(\Theta)) = \mu(\Theta) - \psi$ .*

(ii) *Za slučajni kut  $\Theta$  vrijedi:*

$$\mathbb{E}[\sin(\Theta - \mu)] = 0. \quad (1.17)$$

*Dokaz.* Neka su  $\varphi_1 = \rho e^{i\mu} = \alpha + i\beta$  i  $\varphi_1^* = \rho^* e^{i\mu^*} = \alpha^* + i\beta^*$  vrijednosti karakterističnih funkcija slučajnih kuteva  $\Theta$  i  $\Theta - \psi$  u točki  $p = 1$ , respektivno.

(i) Računamo:

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \mathbb{E}[\cos(\Theta - \psi)] = \alpha \cos \psi + \beta \sin \psi \\ \beta^* &= \mathbb{E}[\sin(\Theta - \psi)] = \beta \cos \psi - \alpha \sin \psi \\ \implies \begin{bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ \iff \rho^* e^{i\mu^*} &= e^{-i\psi} \rho e^{i\mu} = \rho e^{i(\mu - \psi)}\end{aligned}$$

(ii) Kao u (i) dobivamo:

$$\mathbb{E}[\sin(\Theta - \mu)] = \beta \cos \mu - \alpha \sin \mu$$

Iz  $\rho e^{i\mu} = \alpha + i\beta$  slijedi  $\rho \cos \mu = \alpha$  i  $\rho \sin \mu = \beta$ . Kombinacijom ovih triju jednakosti slijedi tvrdnja. □

Posljednja lema povlači da je prvi centralni trigonometrijski moment realan i jednak  $\bar{\alpha} = \mathbb{E}[\cos(\Theta - \mu)]$ .

**Definicija 1.3.3.** *Neka je  $\Theta$  slučajni kut. Realni broj  $\tilde{\mu}$  definiran s:*

$$\tilde{\mu} = \arg \min_{\mu \in [0, 2\pi)} \mathbb{E}[\pi - |\pi - |\Theta - \mu||] \tag{1.18}$$

*nazivamo medijalnim smjerom (cirkularnim medijanom) od  $\Theta$ .*

Uočimo da je općenito  $\pi - |\pi - x| = \min\{x, 2\pi - x\}$ .

Cirkularni medijan ima analognu geometrijsku interpretaciju kao i linearni medijan: vrijede jednakosti  $\mathbb{P}(\Theta \in [\tilde{\mu}, \tilde{\mu} + \pi)) \geq \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(\Theta \in \langle \tilde{\mu} - \pi, \tilde{\mu}]) \geq \frac{1}{2}$ . Ipak, uočimo da ako  $\mu'_1$  dijeli distribuciju na dva „jednaka“ dijela u smislu prethodnih dvaju nejednakosti, onda i kut  $\mu'_2 = \mu'_1 + \pi$  čini isto. To je posljedica činjenice da  $\mu'_1$  i  $\mu'_2$  zapravo parametriziraju dvije antipodalne točke na  $S^1$  pa pravac kroz ishodište koji prolazi točkom  $(\cos \mu'_1, \sin \mu'_1)$  također sadrži i točku  $(\cos \mu'_2, \sin \mu'_2)$  (i obratno). To znači da izborom bilo kojeg od takvih dvaju kuteva mogu biti zadovoljena svojstva  $\mathbb{P}(\Theta \in [\mu'_j, \mu'_j + \pi)) \geq \frac{1}{2}$  i  $\mathbb{P}(\Theta \in \langle \mu'_j - \pi, \mu'_j]) \geq \frac{1}{2}$ . Zato se prema definiciji izabire onaj od tih dvaju kuteva koji je „bliži“ većini vjerojatnosne mase.

Cirkularni medijan je jedinstven za unimodalne distribucije (dokaz ove tvrdnje se može naći u [7], str. 46-47).

**Definicija 1.3.4.** *Neka je  $\Theta$  slučajni kut. Realni broj  $\nu$  definiran s:*

$$\nu = 1 - \rho = 1 - \mathbb{E}[\cos(\Theta - \mu)] \quad (1.19)$$

*nazivamo cirkularnom varijancom od  $\Theta$ .*

Druga jednakost u definiciji je posljedica leme 1.3.2 (jer je srednja rezultantna duljina od  $\Theta$  jednaka srednjoj rezultantnoj duljini od  $\Theta - \mu$  te je  $\bar{\beta} = 0$ ).

Cirkularna varijanca ima donekle sličnu interpretaciju kao i varijanca slučajnih varijabli. Glavna su razlike što je  $\nu \in [0, 1]$ , tj. uvijek je ograničena, te nije definirana kao srednje kvadratno odstupanje od srednjeg smjera  $\mu$ , već, zbog kosinusa u definiciji, mjeri odstupanje od srednjeg smjera  $\mu$  samo na  $x$ -osi. Razlog zašto je u definiciji negativni predznak kod mjere odstupanja je upravo radi izjednačavanja interpretacije  $\nu = 0$  s  $\text{Var}(Z) = 0$  čija je varijanta za cirkularne distribucije navedena u idućoj propoziciji:

**Propozicija 1.3.5.** *Neka je  $\Theta$  slučajni kut s vrijednostima u  $[0, 2\pi)$  i cirkularnom varijancom  $\nu$ . Tada vrijedi da je  $\nu = 0$  ako i samo ako je  $\Theta = \mu$  g.s.*

*Dokaz.* Iz definicije 1.19 slijedi:

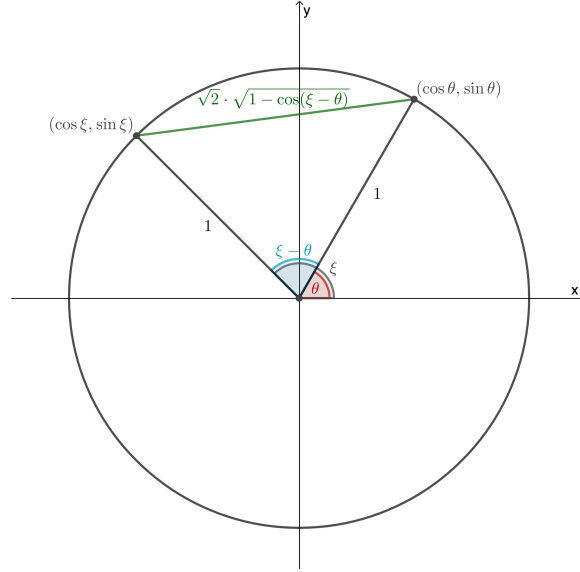
$$\nu = \mathbb{E}[1 - \cos(\Theta - \mu)].$$

Budući da je  $F_{\Theta}$  neopadajuća i nenegativna na  $[0, 2\pi]$  te je slučajna varijabla  $1 - \cos(\Theta - \mu)$  nenegativna, vrijedi da je  $\nu = 0$  ako i samo ako je  $1 - \cos(\Theta - \mu) = 0$  g.s. što je ekvivalentno  $\Theta = \mu$  g.s. □

Suprotno od  $\nu = 0$  je  $\nu = 1$ . Slučaj kad je  $\nu$  blizu 1 odgovara velikoj raspršenosti, a kasnije ćemo vidjeti da  $\nu = 1$  odgovara „maksimalno raspršenoj“ distribuciji.

Postoji još jedna metoda mjerenja udaljenosti kuteva — možemo je smatrati proporcionalnom kvadratu duljine tetive koju zatvaraju pripadne točke na  $S^1$  (Slika 1.2). Takav tip udaljenosti između  $\xi$  i  $\theta$  je dan s  $1 - \cos(\xi - \theta)$ .

Tada udaljenost slučajnog kuta  $\Theta$  od neslučajnog kuta  $\alpha$  možemo mjeriti funkcijom



Slika 1.2: Interpretacija alternativne definicije udaljenosti

$V: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  zadanom formulom  $V(\alpha) = 1 - \mathbb{E}[\cos(\Theta - \alpha)]$ . Vrijedi:

$$\begin{aligned}
 V(\alpha) &= 1 - \mathbb{E}[\cos(\Theta - \mu + \mu - \alpha)] \\
 &= 1 - \mathbb{E}[\cos(\Theta - \mu) \cos(\mu - \alpha) - \sin(\Theta - \mu) \sin(\mu - \alpha)] \\
 &= 1 - \cos(\mu - \alpha) \mathbb{E}[\cos(\Theta - \mu)] + \sin(\mu - \alpha) \underbrace{\mathbb{E}[\sin(\Theta - \mu)]}_{\stackrel{(1.17)}{=} 0} \\
 &= 1 - \cos(\mu - \alpha) \mathbb{E}[\cos(\Theta - \mu)] \\
 &= \underbrace{\mathbb{E}[\cos(\Theta - \mu)]}_{=\rho} (1 - \cos(\mu - \alpha)) + \underbrace{1 - \mathbb{E}[\cos(\Theta - \mu)]}_{=\nu} \\
 &= 2\rho \sin^2\left(\frac{\mu - \alpha}{2}\right) + \nu
 \end{aligned}$$

što je minimalno za  $\alpha = \mu$  i vrijedi  $V(\mu) = \nu$ . Dakle,  $\nu$  je i minimum ovako definirane funkcije udaljenosti.

**Definicija 1.3.6.** Neka je  $\Theta$  slučajni kut s cirkularnom varijancom  $\nu$ . Realni broj  $\sigma$  definiran s:

$$\sigma = (-2 \ln(1 - \nu))^{1/2} \quad (1.20)$$

nazivamo cirkularnom standardnom devijacijom od  $\Theta$ .

Primijetimo da se za male  $\nu$  gornja formula može aproksimirati<sup>4</sup> s:

$$\sigma \approx (2\nu)^{1/2}. \quad (1.21)$$

## 1.4 Osnovne cirkularne distribucije

### Rešetkaste distribucije

**Definicija 1.4.1.** *Neka su  $p_0, \dots, p_{m-1} \geq 0$  realni brojevi takvi da je  $\sum_{j=0}^{m-1} p_j = 1$ . Za slučajni kut  $\Theta$  sa zakonom razdiobe  $\mathbb{P}(\Theta = \xi + \frac{2j\pi}{m}) = p_j, j = 0, \dots, m-1$ , kažemo da ima rešetkastu distribuciju.*

*Ako je  $p_j = \frac{1}{m}$  za sve  $j = 0, \dots, m-1$ , za  $\Theta$  kažemo da ima diskretnu uniformnu distribuciju na skupu  $\{\xi + \frac{2j\pi}{m} : j = 0, \dots, m-1\}$ .*

Uočimo da je za svaku rešetkastu distribuciju karakteristični niz dan s:

$$\varphi_p = \sum_{j=0}^{m-1} e^{ip(\xi + \frac{2\pi j}{m})} p_j = e^{ip\xi} \sum_{j=0}^{m-1} e^{ip\frac{2\pi j}{m}} p_j \quad (1.22)$$

što povlači da je za  $p \equiv 0 \pmod{m}$   $\varphi_p = e^{ip\xi}$ . Specijalno, ako je  $\xi = 0$ , vrijedi  $\varphi_p = 1$  za sve  $p \equiv 0 \pmod{m}$ . Ako je i  $\xi = 0$  i distribucija je uniformna, slijedi bitan rezultat kojeg ćemo formulirati u obliku leme:

**Lema 1.4.2.** *Karakteristični niz  $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  diskretne uniformne distribucije na skupu  $\{\frac{2j\pi}{m} : j = 0, \dots, m-1\}$  je dan s:*

$$\varphi_p = \begin{cases} 1, & p \equiv 0 \pmod{m} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (1.23)$$

*Dokaz.* Kao u prethodnoj diskusiji, iz definicije slijedi da je karakteristični niz:

$$\varphi_p = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} e^{ip\frac{2\pi j}{m}}$$

---

<sup>4</sup>Aproksimacija slijedi iz  $\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n}, x \in [-1, 1)$  pa za  $|x| \ll 1$  vrijedi:

$$\ln(1-x) = -x + O(x^2) \approx -x$$

Označimo  $z_p := e^{i\frac{2\pi p}{m}}$ ,  $p = 0, \dots, m-1$ . Tada je  $\varphi_p = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} z_p^j$ .

Ako je  $z_p = 1$ , što je ekvivalentno  $p \equiv 0 \pmod{m}$ , odmah slijedi da je  $\varphi_p = 1$ .

Ako  $z_p \neq 1$ , računamo:

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} z_p^j \\ &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1 - z_p^m}{1 - z_p} \sum_{j=0}^{m-1} z_p^j \\ &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1 - z_p} \cdot \underbrace{(1 - z_p^m)}_{=1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Iz prethodne leme sada slijedi da je za diskretnu uniformnu distribuciju na skupu koji sadrži 0,  $\varphi_1 = 0$  čim  $m \neq 1$  (tj. čim distribucija nije degenerirana). To povlači da je  $\rho = 0$ , tj. da je cirkularna varijanca takve distribucije  $\nu = 1$ . Dakle, ovakva diskretna uniformna distribucija je zaista „maksimalno raspršena“.

## Cirkularna uniformna distribucija

**Definicija 1.4.3.** Za distribuciju čija je gustoća  $f(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  kažemo da je cirkularna uniformna.

Za slučajni kut  $\Theta$  koji ima cirkularnu uniformnu distribuciju ćemo pisati  $\Theta \sim CU$ .

Iz definicije slijedi da je pripadna funkcija distribucije  $F(\theta) = \frac{\theta}{2\pi}$  te je vidljivo kako se cirkularna uniformna distribucija dobiva kao specijalni slučaj uniformne distribucije na intervalu duljine  $2\pi$ .<sup>5</sup>

**Lema 1.4.4.** Karakteristični niz  $(\varphi_p)_p$  cirkularne uniformne distribucije je  $\varphi_p = \delta_{p,0}$ .

*Dokaz.* Računamo:

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ip\theta}}{ip} \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{e^{2p\pi i} - 1}{2p\pi i} = 0, \quad p \neq 0 \\ \varphi_0 &= \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1. \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>U praksi promatrani interval ne mora nužno biti duljine  $2\pi$  budući da to ovisi o prirodi analiziranih podataka. Primjerice, ukoliko promatramo dnevne podatke u satima, onda bi logičan izbor promatrati sve podatke modulo 24 s obzirom da u danu imamo 24 sata.

Dakle,  $\varphi_p = 1$  ako i samo ako je  $p = 0$ , a inače je  $\varphi_p = 0$  pa slijedi  $\varphi_p = \delta_{p,0}$ .  $\square$

Kao i u diskretnom slučaju, ovo povlači da je cirkularna varijanca  $\nu = 1$ . Cirkularna uniformna razdioba je jedna od najvažnijih cirkularnih distribucija i pojavljuje se u mnoštvu graničnih teorema. Više o tome ćemo vidjeti u poglavlju 2.

## Von Misesova distribucija

**Definicija 1.4.5.** *Neka su  $\mu \in [0, 2\pi)$  i  $\kappa \geq 0$ . Za distribuciju čija je gustoća  $f(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , kažemo da je von Misesova<sup>6</sup> s parametrima  $\mu$  i  $\kappa$ .*

Za slučajni kut  $\Theta$  koji ima von Misesovu distribuciju s parametrima  $\mu$  i  $\kappa$  ćemo pisati  $\Theta \sim M(\mu, \kappa)$ .

**Napomena 1.4.6.** (a)  $I_0(\kappa)$  u definiciji označava modificiranu Besselovu funkciju nultog reda. Mi ćemo ju uglavnom reprezentirati u integralnom obliku kao:

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cos \theta} d\theta$$

ili kao red potencija:

$$I_0(\kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \kappa^{2n}.$$

(b) *Ponekad se za von Misesovu distribuciju kaže i da je „cirkularna normalna distribucija“ i koristi se oznaka  $CN(\mu, \kappa)$  umjesto  $M(\mu, \kappa)$ . Taj naziv dolazi od sličnih svojstava u usporedbi s normalnom razdiobom na  $\mathbb{R}$ .*

Spomenimo neka najvažnija svojstva von Misesove distribucije:

1. Budući da je  $\theta \mapsto \cos \theta$  parna funkcija, iz formule za gustoću slijedi da je distribucija simetrična s obzirom na  $\mu$  i  $\mu + \pi$ .
2. Budući da je  $\arg \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \cos \theta = 0$ , vrijedi da je  $\arg \max_{\theta \in [0, 2\pi)} f(\theta) = \mu$  pa je *cirkularni mod* von Misesove distribucije u  $\theta = \mu$  i vrijedi  $f(\mu) = \frac{e^\kappa}{2\pi I_0(\kappa)}$ .
3. Budući da je  $\arg \min_{\theta \in [0, 2\pi)} \cos \theta = \pi$ , vrijedi da je  $\arg \min_{\theta \in [0, 2\pi)} f(\theta) \in \{\mu \pm \pi\}$  pa je *cirkularni anti-mod* von Misesove distribucije u  $\theta = \mu \pm \pi$  i u tim točkama vrijedi  $f(\mu \pm \pi) = \frac{e^{-\kappa}}{2\pi I_0(\kappa)}$ .

<sup>6</sup>Richard Edler von Mises (Lemberg, 19.4.1883. – Boston, 14.7.1953.) austrijski matematičar i fizičar

4. Označimo s  $I_p$  modificiranu Besselovu funkciju reda  $p \in \mathbb{Z}$  danu u integralnom obliku s  $I_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(p\theta) e^{x \cos \theta} d\theta$ . Odredimo karakteristični niz von Misesove distribucije:

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} f(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} \cdot e^{\kappa \cos(\theta-\mu)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \int_{-\mu}^{-\mu+2\pi} e^{ip(\theta+\mu)} \cdot e^{\kappa \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{e^{ip\mu}}{2\pi I_0(\kappa)} \int_{-\mu}^{-\mu+2\pi} e^{ip\theta} \cdot e^{\kappa \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{e^{ip\mu}}{2\pi I_0(\kappa)} \left( \int_{-\mu}^{-\mu+2\pi} \cos(p\theta) e^{\kappa \cos \theta} d\theta + i \int_{-\mu}^{-\mu+2\pi} \sin(p\theta) e^{\kappa \cos \theta} d\theta \right). \end{aligned}$$

Ako je  $f$  R-integrabilna funkcija s periodom  $\tau > 0$ , za svaki  $c \geq \tau$  imamo:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau f(t) dt - \int_c^{c+\tau} f(t) dt &= \int_0^\tau f(t) dt + \int_\tau^c f(t) dt - \left( \int_\tau^c f(t) dt + \int_c^{c+\tau} f(t) dt \right) \\ &= \int_0^c f(t) dt - \int_\tau^{c+\tau} f(t) dt \\ &= \int_0^c f(t) dt - \int_0^c f(u+\tau) du \\ &= \int_0^c f(t) dt - \int_0^c f(u) du = 0. \end{aligned}$$

Ako je  $0 \leq c < \tau$ , tada koristimo periodičnost funkcije  $f$  da zapišemo  $\int_c^{c+\tau} f(t) dt$  kao  $\int_{c+\tau}^{(c+\tau)+\tau} f(t) dt$  pa uz  $c' = c + \tau > \tau$  dobivamo ekvivalentnu tvrdnju samo za  $\int_{c'}^{c'+\tau} f(t) dt$  umjesto  $\int_c^{c+\tau} f(t) dt$  no ta dva integrala su jednaka pa slijedi tvrdnja. Ako je  $c < 0$ , tvrdnja slijedi koristeći periodičnost analogno kao za  $0 \leq c < \tau$ .

Sve ovo sada pokazuje da integrale funkcija u gornjem raspisu možemo promatrati na proizvoljnom intervalu duljine  $2\pi$ . To sada povlači:

$$\begin{aligned} \int_{-\mu}^{-\mu+2\pi} \cos(p\theta) e^{\kappa \cos \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos(p\theta) e^{\kappa \cos \theta} d\theta = I_p(\kappa) \\ \int_{-\mu}^{-\mu+2\pi} \sin(p\theta) e^{\kappa \cos \theta} d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(p\theta) e^{\kappa \cos \theta} d\theta = 0 \end{aligned}$$

pa je:

$$\varphi_p = \frac{I_p(\kappa)}{I_0(\kappa)} e^{ip\mu}. \quad (1.24)$$



5. Iz (1.24) slijedi da je  $\varphi_1 = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} e^{i\mu}$  pa je srednja rezultantna duljina jednaka  $\rho = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}$ , a srednji smjer  $\mu$ . Uočimo da je ovo slično kao i kod normalne razdiobe  $N(\mu, \sigma)$  koja je simetrična oko  $\mu$  što je jednako prvom momentu te razdiobe.
6. Iz 2. i 3. slijedi  $\frac{f(\mu)}{f(\mu \pm \pi)} = e^{2\kappa}$ . Dakle, kako se  $\kappa$  povećava, tako se povećava koncentracija prema srednjem smjeru  $\mu$ , tj.  $f(\mu)$ , u odnosu na  $f(\mu \pm \pi)$  što je koncentracija u smjeru anti-moda  $\mu \pm \pi$ . Dakle,  $\kappa$  mjeri koncentraciju prema srednjem smjeru  $\mu$ .

**Propozicija 1.4.7.** *Neka su  $\mu \in [0, 2\pi)$  i  $\kappa > 0$  te neka su  $X \sim N(\cos \mu, \frac{1}{\kappa})$  i  $Y \sim N(\sin \mu, \frac{1}{\kappa})$  međusobno nezavisne slučajne varijable. Tada za (slučajne) polarne koordinate  $(R, \Theta)$  slučajnog vektora  $(X, Y)$  vrijedi da je uvjetna distribucija od  $\Theta$  uz dato  $R = 1$  von Misesova na  $\langle 0, 2\pi \rangle$  s parametrima  $\mu$  i  $\kappa$ .*

*Dokaz.* Polarne koordinate od  $(X, Y)$  su dane preko  $X = R \cos \Theta$ ,  $Y = R \sin \Theta$ . Neka je  $g: \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$  definirana s  $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .  $g$  je bijekcija klase  $C^1$  takva da je Jacobijan od  $g$  u točki  $(r, \theta)$ , u oznaci  $J_g(r, \theta)$ , jednak  $r$ . Jer je  $\{(x, 0) : x \geq 0\}$  Borelov skup Lebesgueove mjere 0, vjerojatnosna gustoća slučajnog vektora  $(R, \Theta)$  (takvog da je  $g(R, \Theta) = (X, Y)$ ) je  $\lambda$ -gotovo svuda jednaka:

$$f_{(R, \Theta)}(r, \theta) = \mathbb{1}_{\langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle}(r, \theta) f_{(X, Y)}(g(r, \theta)) |J_g(r, \theta)|.$$

Koristeći da su  $X \sim N(\cos \mu, \frac{1}{\kappa})$  i  $Y \sim N(\sin \mu, \frac{1}{\kappa})$  međusobno nezavisne i  $|J_g(r, \theta)| = J_g(r, \theta) = r > 0$ , slijedi:

$$\begin{aligned} f_{(R, \Theta)}(r, \theta) &= \mathbb{1}_{\langle 0, \infty \rangle}(r) \mathbb{1}_{\langle 0, 2\pi \rangle}(\theta) \frac{r\kappa}{2\pi} e^{-\frac{\kappa}{2}((r \cos \theta - \cos \mu)^2 + (r \sin \theta - \sin \mu)^2)} \\ &= \mathbb{1}_{\langle 0, \infty \rangle}(r) \mathbb{1}_{\langle 0, 2\pi \rangle}(\theta) \frac{r\kappa}{2\pi} e^{-\frac{\kappa}{2}(r^2 + 1 - 2r(\cos \theta \cos \mu + \sin \theta \sin \mu))} \\ &= \mathbb{1}_{\langle 0, \infty \rangle}(r) \mathbb{1}_{\langle 0, 2\pi \rangle}(\theta) \frac{r\kappa}{2\pi} e^{-\frac{\kappa}{2}(r^2 + 1 - 2r \cos(\theta - \mu))} \\ \implies f_{(R, \Theta)}(1, \theta) &= \mathbb{1}_{\langle 0, 2\pi \rangle}(\theta) \frac{\kappa}{2\pi} e^{-\kappa(1 - \cos(\theta - \mu))}. \end{aligned}$$

Slijedi da za marginalnu gustoću od  $R$  (za  $r > 0$ ) vrijedi:

$$\begin{aligned}
 f_R(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(R, \Theta)}(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{r\kappa}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\kappa}{2}(r^2+1-2r\cos(\theta-\mu))} d\theta \\
 &= \frac{r\kappa}{2\pi} e^{-\frac{\kappa}{2}(r^2+1)} \int_0^{2\pi} e^{r\kappa\cos(\theta-\mu)} d\theta \\
 &= r\kappa I_0(r\kappa) e^{-\frac{\kappa}{2}(r^2+1)} \\
 \implies f_R(1) &= \kappa I_0(\kappa) e^{-\kappa}.
 \end{aligned}$$

Tada je uvjetna gustoća od  $\Theta$  uz dano  $R = 1$  jednaka:

$$\begin{aligned}
 f_{\Theta|R=1}(\theta) &= \frac{f_{(R, \Theta)}(1, \theta)}{f_R(1)} \\
 &= \mathbb{1}_{(0, 2\pi)}(\theta) \frac{\frac{\kappa}{2\pi} e^{-\kappa} e^{\kappa\cos(\theta-\mu)}}{\kappa I_0(\kappa) e^{-\kappa}} \\
 &= \mathbb{1}_{(0, 2\pi)}(\theta) \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa\cos(\theta-\mu)} \\
 &= \mathbb{1}_{(0, 2\pi)}(\theta) f_{M(\mu, \kappa)}(\theta).
 \end{aligned}$$

□

**Propozicija 1.4.8.** *Neka je  $\Theta_\kappa \sim M(\mu, \kappa)$ ,  $\kappa > 0$ . Tada vrijedi:*

$$\sqrt{\kappa}(\Theta_\kappa - \mu) \sim AN(0, 1)$$

*kad  $\kappa \rightarrow \infty$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\beta_\kappa = \sqrt{\kappa}(\theta_\kappa - \mu)$ . Tada je za velike  $\kappa$ ,  $\theta_\kappa - \mu = \frac{\beta_\kappa}{\sqrt{\kappa}}$  malo pa iz Maclaurinog razvoja za kosinus možemo koristiti aproksimaciju:

$$\cos(\theta_\kappa - \mu) = \cos\left(\frac{\beta_\kappa}{\sqrt{\kappa}}\right) \approx 1 - \frac{\beta_\kappa^2}{2\kappa}$$

Za velike  $\kappa$  vrijedi<sup>7</sup>  $I_0(\kappa) \approx \frac{e^\kappa}{\sqrt{2\pi\kappa}}$ . Dodatno, za  $\kappa > 0$  linearna funkcija  $g_\kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s  $g_\kappa(\theta) = \sqrt{\kappa}(\theta - \mu)$  je klase  $C^1$  i vrijedi  $\frac{d}{d\beta} g_\kappa^{-1}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} > 0$ . Koristeći

---

<sup>7</sup>Vidi [1], stranica 377.

zamjenu varijabli, za gustoću od  $\sqrt{\kappa}(\Theta_\kappa - \mu)$  vrijedi:

$$\begin{aligned} f_{g_\kappa(\Theta_\kappa)}(\beta) &= \left| \frac{d}{d\beta} g_\kappa^{-1}(\beta) \right| \cdot f_{\Theta_\kappa}(g_\kappa^{-1}(\beta)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \cdot \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\beta\right)} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \cdot \frac{1}{2\pi \frac{e^\kappa}{\sqrt{2\pi\kappa}}} e^{\kappa\left(1 - \frac{\beta^2}{2\kappa}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} \\ &= f_{N(0,1)}(\beta) \end{aligned}$$

kad  $\kappa \rightarrow \infty$ . Tvrđnja sada slijedi iz korolara Schefféove leme 0.0.19.  $\square$

## Kardioidna distribucija

**Definicija 1.4.9.** *Neka su  $\mu \in [0, 2\pi)$  i  $\rho \in \mathbb{R}$  takav da je  $|\rho| < \frac{1}{2}$ . Za distribuciju čija je gustoća  $f(\theta) = \frac{1}{2\pi}(1 + 2\rho \cos(\theta - \mu))$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  kažemo da je kardioidna s parametrima  $\mu$  i  $\rho$ .*

Za slučajni kut  $\Theta$  koji ima kardioidnu distribuciju s parametrima  $\mu$  i  $\rho$  ćemo pisati  $\Theta \sim C(\mu, \rho)$ .

Iz formule za gustoću je vidljivo da je kardioidna distribucija zapravo kosinusna perturbacija cirkularne uniformne distribucije (uz dodatni faktor  $2\rho$ ) — uočimo kako je za male  $\rho$  gustoća blizu gustoće cirkularne uniformne razdiobe.

Za  $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$  računamo:

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{ip\theta}}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)) d\theta \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{ip\theta} d\theta}_{\stackrel{\text{Lema 1.4.4}}{=} \delta_{p,0}} + \frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} \cos(\theta - \mu) d\theta \end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom, uz  $I_p := \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} \cos(\theta - \mu) d\theta$ , slijedi:

$$I_p = \sin(\theta - \mu) e^{ip\theta} \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} - ip \left( -\cos(\theta - \mu) e^{ip\theta} \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + ip I_p \right)$$

iz čega je  $I_p = p^2 I_p$ . Dakle, ako je  $|p| \neq 1$ , onda je  $I_p = 0$ . Ako je  $|p| = 1$ , računamo:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \cos(\theta - \mu) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \cos(\theta - \mu) d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \cos(\theta - \mu) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta) (\cos(\theta) \cos(\mu) + \sin(\theta) \sin(\mu)) d\theta \\
 &\quad + i \int_0^{2\pi} \sin(\theta) (\cos(\theta) \cos(\mu) + \sin(\theta) \sin(\mu)) d\theta \\
 &= \cos(\mu) \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta + \sin(\mu) \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \\
 &\quad + i \cos(\mu) \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta + i \sin(\mu) \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \\
 &= \cos(\mu) \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta + \sin(\mu) \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2} d\theta \\
 &\quad + i \cos(\mu) \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2} d\theta + i \sin(\mu) \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
 &= \cos(\mu)\pi + i \sin(\mu)\pi
 \end{aligned}$$

Jer je  $I_{-1} = \overline{I_1}$ , slijedi  $I_{-1} = \cos(\mu)\pi - i \sin(\mu)\pi$ . Dakle,  $I_p = \pi e^{ip\mu}$  za  $|p| = 1$  pa imamo:

$$\varphi_p = \delta_{p,0} + \rho e^{ip\mu} \delta_{|p|,1}$$

Budući da je  $\varphi_1 = \rho e^{i\mu}$ , srednji smjer jednak je  $\mu$ , a srednja rezultantna duljina jednaka je  $\rho$ .

## Projicirana normalna distribucija

Ako je  $\mathbf{X}$  dvodimenzionalni slučajni vektor takav da je  $\mathbb{P}(\mathbf{X} = \mathbf{0}) = 0$ , tada slučajni vektor  $\mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$  poprima vrijednosti na jediničnoj kružnici g.s. pa je parametriziran slučajnim kutem. Posebni slučaj ovakve projicirane distribucije je kada promatramo slučajni vektor  $\mathbf{X}$  koji ima bivarijatnu normalnu razdiobu:

**Definicija 1.4.10.** *Neka  $\mathbf{X} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  ima bivarijatnu normalnu razdiobu s vektorom očekivanja  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^2$  i kovarijacijskom matricom  $\boldsymbol{\Sigma} > 0$ . Tada za distribuciju slučajnog kuta  $\Theta$  takvog da je  $\|\mathbf{X}\|^{-1}\mathbf{X} = e^{i\Theta}$  kažemo da je projicirana normalna distribucija s parametrima  $\boldsymbol{\mu}$  i  $\boldsymbol{\Sigma}$  te pišemo  $\Theta \sim PN(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ .*

Općenito, ako su  $(R, \Theta)$  polarne koordinate apsolutno neprekidnog slučajnog vektora  $(X, Y)$ , tada gustoću slučajnog kuta koji reprezentira projekciju od  $(X, Y)$  na  $S^1$

možemo dobiti integriranjem gustoće od  $(R, \Theta)$  po svim  $r$  koji se nalaze u nosaču gustoće od  $(R, \Theta)$ . Uočimo da će gustoća od  $(R, \Theta)$  postojati iz teorema o zamjeni varijabli, dok se gustoća slučajnog kuta dobiva integriranjem po svim  $r > 0$  budući da se za fiksni  $\theta \in [0, 2\pi)$  sve točke s polarnim koordinatama iz skupa  $\{(r, \theta) : r > 0\}$  projiciraju u istu točku na  $S^1$ .

Ako s  $f_{N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}$ ,  $\Phi$  i  $f_{N(0,1)}$  označimo, redom, funkciju gustoće bivarijatne normalne distribucije s vektorom očekivanja  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$  i kovarijacijskom matricom  $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} > 0$ , funkciju distribucije jedinične normalne distribucije te funkciju gustoće jedinične normalne distribucije, može se pokazati da je gustoća projicirane normalne distribucije dana s:

$$f(\theta; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{C(\theta)} \left( f_{N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})}(\boldsymbol{\mu}) + aD(\theta)\Phi(D(\theta))f_{N(0,1)} \left( \frac{a}{\sqrt{C(\theta)}} \boldsymbol{\mu}^\top \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} \right) \right),$$

pri čemu su:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}}, \rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \\ C(\theta) &= a^2 (\sigma_2^2 \cos^2 \theta - \rho \sigma_1 \sigma_2 \sin(2\theta) + \sigma_1^2 \sin^2 \theta) \\ D(\theta) &= \frac{a^2}{\sqrt{C(\theta)}} (\mu_1 \sigma_2 (\sigma_2 \cos \theta - \rho \sigma_1 \sin \theta) + \mu_2 \sigma_1 (\sigma_1 \sin \theta - \rho \sigma_2 \cos \theta)) \end{aligned}$$

Specijalno, ako je  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  te  $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$  dobivamo:

$$f(\theta; \rho) = \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{2\pi(1 - \rho \sin(2\theta))}, \quad (1.25)$$

a ako je  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  te  $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$  dobivamo:

$$f(\theta; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{\sqrt{1 - b^2}}{2\pi(1 - b \cos(2\theta))}, \quad b = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, |b| \leq 1. \quad (1.26)$$

Ako je  $\boldsymbol{\mu} = (\mu, 0)$  te  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_2$  dobivamo:

$$f(\theta; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_{N(0,1)}(\mu) + \mu \cos(\theta) f_{N(0,1)}(\mu \sin \theta) \Phi(\mu \cos \theta). \quad (1.27)$$

Uočimo da iz (1.26) slijedi da je za  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  te  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}_2$ :

$$f(\theta; \sigma) = \frac{1}{2\pi},$$

to jest da je  $WN(\mathbf{0}, \sigma \mathbf{I}_2) \equiv CU$ .

## Distribucije dobivene namatanjem realne osi na $S^1$

S  $x \mapsto x \pmod{2\pi}$ , odnosno  $x \mapsto e^{ix}$ , je definirano namatanje realnog pravca na  $S^1$ . Ako je  $X$  slučajna varijabla s vrijednostima u  $\mathbb{R}$ , tada je  $\mathbf{X} = e^{iX}$  slučajna veličina na  $S^1$  pa postoji pripadni slučajni kut  $\Theta$  koji parametrizira  $\mathbf{X}$ .

Ako je  $F_X$  funkcija distribucije od  $X$ , tada je funkcija distribucije od  $\Theta$  dana s:

$$F_{\Theta}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (F_X(\theta + 2k\pi) - F_X(2k\pi)), \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (1.28)$$

Slično, ako je  $f_X$  vjerojatnosna funkcija gustoće od  $X$ , tada je funkcija gustoće od  $\Theta$  dana s:

$$f_{\Theta}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_X(\theta + 2k\pi), \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (1.29)$$

Ako je  $\phi$  karakteristična funkcija od  $F_X$ , tada za karakteristični niz od  $F_{\Theta}$  vrijedi:

$$\varphi_p = \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} dF_{\Theta}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} e^{ip\theta} dF_X(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\theta} dF_X(\theta) = \phi(p).$$

Ako je  $\phi$  k tome i integrabilna, iz Teorema inverzije znamo da tada  $F_X$  ima gustoću te da je ista dana s  $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t) dt$ . Tada iz (1.29) slijedi da je gustoća od  $\Theta$  dana s:

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_p \cos(p\theta) + \beta_p \sin(p\theta)) \right), \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (1.30)$$

Prethodno opisanim postupkom je demonstrirano kako svakom distribucijom na  $\mathbb{R}$  namatanjem (na  $S^1$ ) možemo generirati cirkularnu distribuciju. S druge strane, postupak „razmatanja“ cirkularnih distribucija može generirati više različitih distribucija na  $\mathbb{R}$ . Primjerice, ako je  $f_c$  funkcija gustoće neke cirkularne distribucije, te  $(p_r)_{r \in \mathbb{Z}} \subset [0, 1]$  dvostruki niz (u smislu da je indeksiran po  $\mathbb{Z}$ ) u  $[0, 1]$  takav da je  $\sum_{r=-\infty}^{\infty} p_r = 1$ , definiramo funkciju  $f$  s:

$$f(\theta) := p_r f_c(\theta), \quad 2r\pi < \theta \leq 2(r+1)\pi, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Iz definicije je  $f \geq 0$  te vrijedi  $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{(2r\pi, 2(r+1)\pi]} f d\lambda = 1$ . Također, jasno je da je namotana distribucija pridružena distribuciji s gustoćom  $f$  točno cirkularna distribucija s gustoćom  $f_c$ . Dakle, promjenom težina  $(p_r)_r$  dobivamo različite distribucije na  $\mathbb{R}$  koje dolaze od iste distribucije  $f_c$  na  $S^1$ .

Neka je  $m \in \mathbb{N}$ . Uočimo da  $x \mapsto 2\pi x \pmod{2\pi m}, x \in \mathbb{Z}$  odnosno  $x \mapsto e^{i\frac{2\pi x}{m}}, x \in \mathbb{Z}$ , preslikava cijele brojeve na skup  $m$ -tih korijena jedinice. Takvim namotavanjem iz

svake distribucije s vrijednostima u  $\mathbb{Z}$  dobivamo rešetkastu distribuciju na skupu  $\left\{\frac{2j\pi}{m} : j = 0, \dots, m-1\right\}$ . Tada je zakon razdiobe slučajnog kuta  $\Theta$  dobiven ovakvim namotavanjem slučajne varijable  $X$  s vrijednostima u  $\mathbb{Z}$  dan s:

$$\mathbb{P}\left(\Theta = \frac{2\pi j}{m}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = j + km), \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.31)$$

Spomenuta namatanja ( $\mathbb{R}$  na  $S^1$  te  $\mathbb{Z}$  na  $\sqrt[m]{1}$ ) su homomorfizmi u sljedećem smislu: ako s  $X_w$  označimo slučajni kut dobiven namotanjem slučajne varijable  $X$ , tada je  $(X + Y)_w = X_w + Y_w$  za sve slučajne varijable  $X$  i  $Y$  definirane na istom vjerojatnosnom prostoru.

**Definicija 1.4.11.** *Neka je  $m \in \mathbb{N}, m > 1$  te neka je  $X \sim P(\lambda)$  slučajna varijabla koja ima Poissonovu razdiobu s parametrom  $\lambda > 0$  (i očekivanjem  $\lambda$ ). Tada za distribuciju slučajnog kuta  $\Theta$  takvog da je  $e^{i\frac{2\pi X}{m}} = e^{i\Theta}$  kažemo da je namotana Poissonova distribucija s parametrima  $m$  i  $\lambda$ .*

Za  $X \sim P(\lambda)$  i  $m \in \mathbb{N}, m > 1$  iz (1.31) slijedi da je funkcija gustoće slučajnog kuta  $\Theta$  koji parametrizira  $X$  namotanu na  $\sqrt[m]{1}$ :

$$\mathbb{P}\left(\Theta = \frac{2\pi j}{m}\right) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+km}}{(j+km)!}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Pokazuje se (vidi [2]) da se ove vjerojatnosne mase mogu izraziti i kao:

$$\mathbb{P}\left(\Theta = \frac{2\pi j}{m}\right) = \frac{1}{m} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{m-1} e^{\omega^k \lambda} \omega^{-kj},$$

pri čemu je  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ .

**Definicija 1.4.12.** *Neka su  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$  te  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  slučajna varijabla koja prati normalnu razdiobu s očekivanjem  $\mu$  i varijancom  $\sigma^2$ . Tada za distribuciju slučajnog kuta  $\Theta$  takvog da je  $e^{iX} = e^{i\Theta}$  kažemo da je namotana normalna distribucija s parametrima  $\mu$  i  $\rho := e^{-\sigma^2/2}$  te pišemo  $\Theta \sim WN(\mu, \rho)$ .*

Za  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  iz (1.31) slijedi da je funkcija gustoće slučajnog kuta  $\Theta$  koji parametrizira  $X$  namotanu na  $S^1$ :

$$f_{WN(\mu, \rho)}(\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\theta + 2k\pi - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Budući da je karakteristična funkcija od  $X$  dana s  $\phi_X(t) = \exp\left\{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , slijedi da je karakteristični niz od  $\Theta$  upravo  $\left(\exp\left\{i\mu p - \frac{\sigma^2 p^2}{2}\right\}\right)_{p \in \mathbb{Z}}$  iz čega su realni i imaginarni dijelovi od  $\varphi_p$  upravo:

$$\alpha_p = e^{-\frac{\sigma^2 p^2}{2}} \cos(p\mu), \quad \beta_p = e^{-\frac{\sigma^2 p^2}{2}} \sin(p\mu).$$

Specijalno, iz  $\varphi_1 = e^{-\frac{\sigma^2}{2}} e^{i\mu}$  čitamo da je srednji smjer jednak  $\mu \pmod{2\pi}$ , a srednja rezultantna duljina  $e^{-\frac{\sigma^2}{2}} = \rho$ . Dodatno, iz jednakosti (1.30) slijedi da se funkcija gustoće od  $\Theta$  može izraziti kao:

$$\begin{aligned} f_{\Theta}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \left( e^{-\frac{\sigma^2 p^2}{2}} \cos(p\mu) \cos(p\theta) + e^{-\frac{\sigma^2 p^2}{2}} \sin(p\mu) \sin(p\theta) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 p^2}{2}} \cos(p(\mu - \theta)) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \rho^{p^2} \cos(p(\mu - \theta)) \right). \end{aligned}$$

U praksi, kad je  $\sigma^2 < 2\pi$ ,  $f_{\Theta}$  se aproksimira s  $f_{N(0,1)}$ , a kad je  $\sigma^2 \geq 2\pi$ ,  $f_{\Theta}$  se aproksimira s prva tri člana reda  $\frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \rho^{p^2} \cos(p(\mu - \theta)) \right)$ .

Iz formule za gustoću vrijedi da  $WN(\mu, \rho) \rightarrow CU$  kad  $\rho \rightarrow 0$ . Slično, kad  $\rho \rightarrow 1$  (odnosno  $\sigma^2 \rightarrow 0$ ), tada  $N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \mu$  pa i  $WN(\mu, \rho) \rightarrow \mu \pmod{2\pi}$ .

**Definicija 1.4.13.** *Neka su  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  te  $X \sim C(a, \mu)$  slučajna varijabla koja prati Cauchyjevu razdiobu (s funkcijom gustoće  $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x-\mu)^2}$ ). Tada za distribuciju slučajnog kuta  $\Theta$  takvog da je  $e^{iX} = e^{i\Theta}$  kažemo da je namotana Cauchyjeva distribucija s parametrima  $\mu$  i  $\rho := e^{-a}$  te pišemo  $\Theta \sim WC(\mu, \rho)$ .*

Za  $X \sim C(a, \mu)$  je karakteristična funkcija od dana s  $\phi_X(t) = e^{i\mu t - a|t|}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , pa je na temelju (1.30) funkcija gustoće od  $\Theta$  dana s:

$$\begin{aligned} f_{\Theta}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \left( e^{-ap} \cos(p\mu) \cos(p\theta) + e^{-ap} \sin(p\mu) \sin(p\theta) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \rho^p \cos(p(\mu - \theta)) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2\Re \left( \sum_{p=1}^{\infty} \rho^p e^{-ip(\theta - \mu)} \right) \right). \end{aligned}$$



Budući da je  $a > 0$  i  $|\rho e^{-i(\theta-\mu)}| = \rho$ , slijedi da je  $0 < \rho = e^{-a} < 1$  pa red  $\sum_{p \geq 1} (\rho e^{-i(\theta-\mu)})^p$  konvergira. Sada slijedi da je:

$$\begin{aligned}
f_{\Theta}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2\Re \left( \sum_{p=1}^{\infty} (\rho e^{-i(\theta-\mu)})^p \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2\Re \left( \frac{1}{1 - \rho e^{-i(\theta-\mu)}} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( 2\Re \left( \frac{1}{1 - \rho \cos(\theta - \mu) + i\rho \sin(\theta - \mu)} \right) - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( 2 \cdot \frac{1 - \rho \cos(\theta - \mu)}{|1 - \rho \cos(\theta - \mu) + i\rho \sin(\theta - \mu)|^2} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( 2 \cdot \frac{1 - \rho \cos(\theta - \mu)}{1 - 2\rho \cos(\theta - \mu) + \rho^2 \cos^2(\theta - \mu) + \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( 2 \cdot \frac{1 - \rho \cos(\theta - \mu)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \mu)} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \mu)}.
\end{aligned}$$

Iz  $\varphi_p = \rho^{|p|} e^{ip\mu}$  čitamo da je srednji smjer jednak  $\mu \pmod{2\pi}$ , a srednja rezultatna duljina  $\rho$ .

Iz formule za gustoću vrijedi da  $WC(\mu, \rho) \rightarrow CU$  kad  $\rho \rightarrow 0$ . Slično, kad  $\rho \rightarrow 1$  (odnosno  $a \rightarrow 0^+$ ), tada  $C(a, \mu) \rightarrow \mu$  pa i  $WC(\mu, \rho) \rightarrow \mu \pmod{2\pi}$ .

Na koncu, spomenimo još i dva važna teorema za namotane Cauchyjeve distribucije:

**Teorem 1.4.14.** (*Kent, Tyler, Mardia*) Neka je  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} > 0$ . Ako je  $\Theta \sim PN_2(\mathbf{0}, \Sigma)$ , tada je  $2\Theta \sim WC(\mu, \rho)$ , pri čemu su  $\rho^2 = \frac{\text{tr}(\Sigma) - 2\det(\Sigma)^{1/2}}{\text{tr}(\Sigma) + 2\det(\Sigma)^{1/2}}$  i  $\text{tg } \mu = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 - \sigma_2}$ .

**Teorem 1.4.15.** (*McCullagh*) Neka je  $\Theta \sim WC(\mu, \rho)$ ,  $\rho > 0$ , s karakterističnim nizom  $(\varphi_p)_p$ . Tada za svaku neprekidnu funkciju  $g : \overline{K}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  koja je analitička na  $K(0, 1)$  vrijedi:

$$\mathbb{E}[g(e^{i\Theta})] = g(\rho e^{i\mu}) = g(\varphi_1).$$



# Poglavlje 2

## Teorija distribucija i granični teoremi

### 2.1 Teorija karakterističnih funkcija

U definiciji 1.10 smo vidjeli kako su karakteristične funkcije cirkularnih distribucija zapravo dvostruki nizovi (indeksirani po  $\mathbb{Z}$ ) kompleksnih brojeva. Osim što su karakteristične funkcije snažan alat za analizu cirkularnih distribucija (kao i za distribucije na  $\mathbb{R}^n$ ), činjenica da je riječ o nizovima daje i jače rezultate u odnosu na (ograničene) distribucije na  $\mathbb{R}^n$ . Ovdje ćemo pokazati da vrijede analogoni teorema jedinstvenosti i teorema inverzije za karakteristične funkcije i još neke rezultate koji su specifičniji za cirkularne distribucije.

Koristeći generaliziranu funkciju  $\mathbb{I}_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \cdot \frac{nt}{T}}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  i (1.29) se pokazuje da za funkciju gustoće  $f_{\Theta}$  slučajnog kuta  $\Theta$  dobivenog namatanjem apsolutno neprekidne slučajne varijable  $X$  na  $S^1$  s karakterističnom funkcijom  $\varphi$  vrijedi:

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \varphi(p) e^{-ip\theta}, \quad t \in [0, 2\pi). \quad (2.1)$$

**Teorem 2.1.1.** (*Teorem jedinstvenosti*) *Svaki karakteristični niz definira jedinstvenu cirkularnu distribuciju. Točnije, ako su  $(\varphi_p)_p$  i  $(\psi_p)_p$  dva karakteristična niza pridružena cirkularnim distribucijama  $F_{\varphi}$  i  $F_{\psi}$  takva da je  $\varphi_p = \psi_p, \forall p \in \mathbb{Z}$ , tada je  $F_{\varphi} = F_{\psi}$ .*

*Dokaz.* Za  $0 \leq \rho < 1$  promatramo funkciju  $u_{\rho}(\xi) := \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \varphi_p \rho^{|p|} e^{-ip\xi}$ . Budući da je  $(\varphi_p)_p$  ograničen niz, slijedi da je  $u_{\rho}(\xi)$  dobro definirana jer red  $\sum_{p \in \mathbb{Z}} \varphi_p \rho^{|p|} e^{-ip\xi}$  konvergira (apsolutno) za sve  $\xi \in [0, 2\pi)$ . Dodatno, jer je riječ o sumi reda neprekidnih funkcija u varijabli  $\xi$ , slijedi da je i limes neprekidna funkcija u  $\xi$ .

Budući da je  $\varphi_\rho = \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} dF_\varphi(\theta)$ , primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi da je:

$$u_\rho(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} \rho^{|p|} e^{-ip\xi} dF_\varphi(\theta) \stackrel{\text{TODK}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-ip(\xi-\theta)} \rho^{|p|} dF_\varphi(\theta).$$

Sada iz (2.1) i definicije namotane Cauchyjeve razdiobe slijedi da  $u_\rho$  možemo zapisati kao:

$$u_\rho(\xi) = \int_0^{2\pi} f_{WC(0,\rho)}(\xi - \theta) dF_\varphi(\theta).$$

Tvrdimo da je  $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_0^\theta u_\rho(\xi) d\xi = F_\varphi(\theta)$ .

Računamo:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_0^\theta u_\rho(\xi) d\xi &= \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_0^\theta \left( \int_0^{2\pi} f_{WC(0,\rho)}(\xi - t) dF_\varphi(t) \right) d\xi \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\theta f_{WC(0,\rho)}(\xi - t) d\xi \right) dF_\varphi(t) \\ &= [x = \xi - t \iff \xi = x + t] \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} \left( \int_{-t}^{\theta-t} f_{WC(0,\rho)}(x) dx \right) dF_\varphi(t) \\ &\stackrel{\text{TODK}}{=} \int_0^{2\pi} \left( \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_{-t}^{\theta-t} f_{WC(0,\rho)}(x) dx \right) dF_\varphi(t), \end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi jer je:

$$\int_{-t}^{\theta-t} f_{WC(0,\rho)}(x) dx = \int_0^{2\pi} f_{WC(0,\rho)}(x) \underbrace{\mathbb{1}_{[-t,\theta-t]}(x)}_{\leq 1} dx \leq \int_0^{2\pi} f_{WC(0,\rho)}(x) dx = 1.$$

Sjetimo se da kako  $\rho \nearrow 1$ , distribucija  $WC(0, \rho)$  konvergira prema degeneriranoj distribuciji u 0. Dakle,  $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_{-t}^{\theta-t} f_{WC(0,\rho)}(x) dx$  je jednak 1 ako je  $-t \leq 0 \leq \theta - t$ , a 0 inače. Slijedi:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_0^\theta u_\rho(\xi) d\xi = \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(t) dF_\varphi(t) = F_\varphi(\theta).$$

Dakle,  $F_\varphi$  je jedinstveno određena funkcijama  $u_\rho$  koje su pak jedinstveno određene karakterističnim nizom što povlači tvrdnju.  $\square$

Dokaz prethodnog teorema daje poseban rezultat kojeg ćemo zbog svoje važnosti i različitosti u odnosu na distribucije na  $\mathbb{R}$  iskazati kao teorem:

**Teorem 2.1.2.** *Svaka cirkularna distribucija je (jedinstveno) određena svojim trigonometrijskim momentima.*

Uočimo da iz teorema jedinstvenosti i formule (2.1) slijedi i sljedeći rezultat:

**Teorem 2.1.3.** *(Teorem inverzije za gustoće) Ako je  $(\varphi_p)_{p \geq 1}$  podniz karakterističnog niza  $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  cirkularne distribucije  $F$  takav da je red  $\sum_{p \geq 1} |\varphi_p|^2$  konvergentan, tada  $F$  ima gustoću  $f$  danu s:*

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \varphi_p e^{-ip\theta}. \quad (2.2)$$

*Dokaz.* Koristeći iste oznake kao u dokazu teorema jedinstvenosti, za  $\theta$  i  $h > 0$  takve da su  $\theta, \theta + h$  točke neprekidnosti funkcije  $F$  imamo:

$$\begin{aligned} F(\theta + h) - F(\theta) &= \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \left( \int_0^{\theta+h} u_\rho(\xi) d\xi - \int_0^\theta u_\rho(\xi) d\xi \right) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \varphi_p \rho^{|p|} \int_\theta^{\theta+h} e^{-ip\xi} d\xi \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \left( h + \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - e^{-iph}}{ip} \varphi_p \rho^{|p|} e^{-ip\theta} \right). \end{aligned}$$

Ako je  $(\varphi_p)_{p \geq 1} \in \ell^2$ , tada je  $(\varphi_p \rho^{|p|})_{p \in \mathbb{Z}} \in \ell^1$  za sve  $\rho \in [0, 1)$ . Sada iz teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi:

$$F(\theta + h) - F(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left( h + \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - e^{-iph}}{ip} \varphi_p e^{-ip\theta} \right).$$

Konačno, dobivamo da tada limes  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\theta+h) - F(\theta)}{h}$  postoji i jednak je:

$$F'(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \varphi_p e^{-ip\theta} = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_p \cos(p\theta) + \beta_p \sin(p\theta)) \right).$$

□

Gornji uvjet za konvergenciju reda  $\sum_{p \geq 1} |\varphi_p|^2$  se može iskazati koristeći 1.13 ili 1.15 kao  $\sum_{p=1}^{\infty} \rho_p^2 = \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_p^2 + \beta_p^2) < \infty$ .

**Napomena 2.1.4.** *Navedimo par rezultata iz geometrije kompleksne ravnine:*

(a) U terminima kompleksnih brojeva, rotacija na  $S^1$  za kut  $\psi$  u pozitivnom smjeru se može formulirati kao preslikavanje  $e^{i\theta} \mapsto e^{i(\theta+\psi)}$ .

(b) U terminima kompleksnih brojeva, zrcaljenje na  $S^1$  s obzirom na pravac  $ax + by = 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , se može formulirati kao preslikavanje  $e^{i\theta} \mapsto \left(\frac{b-ai}{|b-ai|}\right)^2 e^{-i\theta}$ .

Naime, zrcaljenje možemo zapisati kao kompoziciju triju preslikavanja: 1. preslikavanje pravca  $ax + by = 0$  na realnu os, 2. zrcaljenje u odnosu na realnu os, 3. preslikavanje realne osi natrag na  $ax + by = 0$ :

1. Uočimo da je  $(b, -a)$  točka na pravcu  $ax + by = 0$ .  $(b, -a)$  predstavlja kompleksni broj  $b - ai$ . Tada pravac  $ax + by = 0$  jednostavno preslikavamo na realnu os funkcijom  $z \mapsto \frac{z}{b-ai}$ .

2. Zrcaljenje s obzirom na realnu os je zadano formulom  $z \mapsto \bar{z}$ .

3. Analognogno kao u 1., realnu os preslikavamo u pravac  $ax + by = 0$  funkcijom  $z \mapsto (b - ai)z$ .

Sada 1., 2. i 3. zajedno povlače da je traženo preslikavanje:

$$z \mapsto (b - ai) \overline{\left(\frac{z}{b - ai}\right)} = (b - ai) \frac{\bar{z}}{b + ai} = \left(\frac{b - ai}{|b - ai|}\right)^2 \bar{z}.$$

(c) Koristeći (b), ako je  $e^{i\xi} \in S^1$ , tada se zrcaljenje sfere  $S^1$  s obzirom na pravac kroz 0 i  $e^{i\xi}$  postiže preslikavanjem:

$$e^{i\theta} \mapsto e^{2i\xi} e^{-i\theta} = e^{(2\xi - \theta)i}.$$

(d) Iz (a) i (c) slijedi da se kompozicija dvaju uzastopnih zrcaljenja od  $S^1$  (s obzirom na dva pravca koja prolaze ishodištem) može reprezentirati jednom rotacijom.

**Teorem 2.1.5.** Cirkularna uniformna distribucija je jedinstvena cirkularna distribucija koja je invarijantna na rotacije i zrcaljenja.

*Dokaz.* Neka je  $F$  distribucija na  $S^1$  invarijantna na rotacije. Tada za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi:

$$\begin{aligned} 1 = F(2\pi) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( F\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right) - F\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( F\left(\frac{2\pi}{n}\right) - F(0) \right) \\ &= n \left( F\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 0 \right) \\ &= nF\left(\frac{2\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi da je  $F\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Nadalje, ako su  $m, n \in \mathbb{N}$  takvi da je  $m \leq n$ , imamo:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{2\pi m}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \left( F\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right) - F\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right) \\ &= m \left( F\left(\frac{2\pi}{n}\right) - F(0) \right) \\ &= \frac{m}{n} \end{aligned}$$

što pak povlači da:

$$F(2\pi q) = q, \quad \forall q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Neka je  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Tada postoje rastući niz  $(q_n)_n \subset \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  takav da  $q_n \nearrow \frac{\theta}{2\pi}$ , kad  $n \rightarrow \infty$ , te  $\Theta \sim F$  i vrijedi:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \mathbb{P}(\Theta \in [0, \theta]) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\Theta \in [0, 2\pi q_n]\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Theta \in [0, 2\pi q_n]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F(2\pi q_n) - F(0)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \\ &= \frac{\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

Dakle  $F$  je funkcija distribucije cirkularne uniformne distribucije.

Neka je  $F$  invarijantna na zrcaljenja. Uzmimo  $\Theta \sim F$ . Tada prema prethodnoj Napomeni 2.1.4 vrijedi:

$$\Theta \stackrel{D}{=} \xi_1 - \Theta \stackrel{D}{=} \xi_2 - (\xi_1 - \Theta) = \Theta - (\xi_1 - \xi_2), \quad \forall \xi_1, \xi_2.$$

Sada dokaz slijedi analogno kao i za rotacijsku invarijantnost. □

**Korolar 2.1.6.** *Neka je  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih kuteva s uniformnom razdiobom. Tada je  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiran s  $S_n = \Theta_1 + \dots + \Theta_n \pmod{2\pi}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , niz jednako distribuiranih slučajnih kuteva iz uniformne razdiobe.*

*Dokaz.* Neka je  $(\varphi_p)_p$ ,  $\varphi_p = \delta_{p,0}$  karakteristični niz od  $\Theta_1$ . Budući da je  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih kuteva, vrijedi da je karakteristični niz od  $S_n$  upravo  $(\varphi_p^n)_p$ ,  $\varphi_p^n = \delta_{p,0}^n = \delta_{p,0}$  pa tvrdnja slijedi iz teorema jedinstvenosti. □

Analognom argumentacijom kao u prethodnom dokazu možemo zaključiti da je suma dvaju nezavisnih slučajnih kuteva od kojih barem jedan ima cirkularnu uniformnu razdiobu također uniformno distribuirana:

**Korolar 2.1.7.** *Neka su  $\Theta_1 \sim CU$  i  $\Theta_2$  nezavisni slučajni kutevi. Tada slučajni kut  $\Theta_1 + \Theta_2 \pmod{2\pi}$  ima cirkularnu uniformnu razdiobu.*

Kao i u slučaju distribucija na  $\mathbb{R}$ , može se pokazati da vrijedi teorem neprekidnosti, no uz jednostavnije pretpostavke. Smanjenje uvjeta u teoremu neprekidnosti je zapravo posljedica sljedeće leme:

**Lema 2.1.8.** *Točkovni limes niza karakterističnih nizova  $(\varphi^{(n)})_n$  je karakteristični niz, to jest ako je  $(\varphi^{(n)})_n$  niz karakterističnih nizova takav da za svaki  $p \in \mathbb{Z}$  vrijedi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_p^{(n)} = \varphi_p$ , tada je  $(\varphi_p)_p$  karakteristični niz neke cirkularne distribucije.*

Gornja lema slijedi iz Fubinijevog teorema i karakterizacije karakterističnih nizova.

**Teorem 2.1.9.** *(Karakterizacija karakterističnih nizova) Niz  $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  je karakteristični niz neke cirkularne distribucije ako i samo ako je  $\varphi_0 = 1$  i  $(\varphi_p)_p$  je pozitivno semidefinitan niz kompleksnih brojeva, tj.*

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\forall z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}) \sum_{p,q=1}^m \varphi_{p-q} z_p \bar{z}_q \geq 0.$$

Za pojedinosti o prethodnom teoremu, vidi [10].

**Teorem 2.1.10.** *(Teorem neprekidnosti) Neka je  $(F_n)_n$  niz cirkularnih distribucija te  $(\varphi^{(n)})_n$  niz karakterističnih nizova takav da je  $\varphi_{F_n} = \varphi^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tada vrijedi:*

$$F_n \xrightarrow{w} F \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_p^{(n)} = \varphi_p, \quad \forall p \in \mathbb{Z},$$

pri čemu je  $F$  neka cirkularna distribucija, a  $(\varphi_p)_p$  njen karakteristični niz.

*Dokaz.* Ako  $F_n \xrightarrow{w} F$ , tada točkovna konvergencija karakterističnih nizova  $\varphi^{(n)} \rightarrow \varphi$  slijedi iz Hellyjevog teorema.

Obratno, neka za sve  $p \in \mathbb{Z}$  vrijedi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_p^{(n)} = \varphi_p$ . Jer je  $(\varphi_p)_p$  točkovni limes niza karakterističnih nizova, iz Leme 2.1.8 slijedi da je i  $(\varphi_p)_p$  karakteristični niz. Neka je  $F$  cirkularna distribucija takva da je  $\varphi_F = \varphi$  (takva postoji i jedinstvena je iz teorema jedinstvenosti). Pokažimo još da  $F_n \xrightarrow{w} F$  kad  $n \rightarrow \infty$ . Po kontradikciji, pretpostavimo da je  $\xi \in [0, 2\pi)$  točka neprekidnosti funkcije  $F$  u kojoj  $F_n(\xi) \not\rightarrow F(\xi)$ . Budući da je  $(F_n(\xi))_n$  uniformno ograničen niz, to postoji njegov podniz  $(F_{n_k}(\xi))_k \subset (F_n(\xi))_n$  koji konvergira prema limesu koji nije  $F(\xi)$ . Pretpostavimo da je  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(\xi) > F(\xi)$ .



Tada dijagonalnim postupkom možemo odabrati podniz  $(F_{n_{k_l}})_l \subset (F_{n_k})_k$  za koji je  $\lim_{l \rightarrow \infty} F_{n_{k_l}}(\theta) = G(\theta)$  za sve  $\theta \in [0, 2\pi) \cap C(G)$  i da je  $G$  funkcija distribucije, pri čemu je  $C(G)$  skup svih točaka neprekidnosti funkcije  $G$ , tj.  $F_{n_{k_l}} \xrightarrow{w} G$  kad  $l \rightarrow \infty$ . Po pretpostavci vrijedi i  $\varphi^{(n_{k_l})} \rightarrow \varphi$  kad  $l \rightarrow \infty$ , a zbog  $F_{n_{k_l}} \xrightarrow{w} G$  kad  $l \rightarrow \infty$  i prvog dijela teorema vrijedi da  $F$  i  $G$  imaju iste karakteristične nizove pa je  $F = G$ . No, tada dobivamo kontradikciju jer:

$$F(\xi) < \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(\xi) = \lim_{l \rightarrow \infty} F_{n_{k_l}}(\xi) = G(\xi).$$

□

## 2.2 Granični teoremi

Pretpostavimo da je  $(\Theta_n)_n$  niz nezavisnih slučajnih kuteva. Za  $n \in \mathbb{N}$  definiramo  $S_n := \Theta_1 + \dots + \Theta_n \pmod{2\pi}$ . Zanima nas što sve možemo reći o distribuciji od  $S_n$ . Kroz prethodne rezultate smo vidjeli kako je dovoljno da je samo jedan od kuteva u nizu  $(\Theta_n)_n$ , recimo  $\Theta_N$ , uniformno distribuiran da bi i  $S_n$  imao uniformnu distribuciju za sve  $n \geq N$ . Dakle, možemo reći da u tom slučaju  $(F_{S_n})_n$  konvergira prema  $F_{CU}$  po točkama pa i  $S_n \xrightarrow{D} CU$  kad  $n \rightarrow \infty$ .

No što ako niti jedan slučajni kut u spomenutom nizu nije uniformno distribuiran? Pokazuje se da uz jednaku distribuiranost i samo još jednu dodatnu i relativno slabu pretpostavku vrijedi isti rezultat kao u prethodnom razmatranju. Da bismo dokazali taj granični teorem, prvo ćemo pokazati jedan tehnički rezultat.

**Lema 2.2.1.** *Neka je  $F$  cirkularna distribucija s karakterističnim nizom  $(\varphi_p)_p$ .  $F$  je rešetkasta ako i samo ako postoji  $p \neq 0$  takav da je  $|\varphi_p| = 1$ .*

*Dokaz.* Ako je  $F$  rešetkasta, tada iz (1.22) slijedi da je:

$$\varphi_p = e^{ip\xi} \sum_{j=0}^{m-1} e^{ip \frac{2\pi j}{m}} p_j$$

za neke  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p_0, \dots, p_{m-1} \in [0, 1]$ ,  $\sum_{j=0}^{m-1} p_j = 1$ . Tada za sve  $p \in \mathbb{Z}$  takve da  $p \equiv 0 \pmod{m}$  vrijedi da je  $\varphi_p = e^{ip\xi}$  što povlači tvrdnju.

Obratno, neka je  $|\varphi_{p_0}| = 1$  za neki  $p_0 \neq 0$ . Tada postoji  $\eta \neq 0$  takav da je  $\varphi_{p_0} = e^{ip_0\eta}$ . Iz  $\varphi_{p_0} = \int_0^{2\pi} e^{ip_0\theta} dF(\theta)$  onda slijedi da je  $\int_0^{2\pi} e^{ip_0\theta} dF(\theta) = e^{ip_0\eta}$ , odnosno:

$$e^{ip_0\eta} \int_0^{2\pi} (1 - e^{ip_0(\theta-\eta)}) dF(\theta) = 0.$$

Dijeljenjem jednadžbe s  $e^{ip_0\eta}$  i izjednačavanjem realnih dijelova slijedi:

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos(p_0(\theta - \eta))) dF(\theta) = 0.$$

Jer su  $F$  i  $\theta \mapsto 1 - \cos(p_0(\theta - \eta))$  nenegativne i  $\theta \mapsto 1 - \cos(p_0(\theta - \eta))$  je k tome i neprekidna, gornji uvijek vrijedi samo ako  $F$  iščezava na  $[\eta, \eta + 2\pi]$  svugdje osim u multočkama funkcije  $\theta \mapsto 1 - \cos(p_0(\theta - \eta))$ . U tom slučaju slijedi da je  $F$  rešetkasta jer mora biti da je  $F(\theta) \neq 0$  samo ako je  $\theta = \eta + \frac{2\pi j}{p_0}$  (za  $j = 0, 1, \dots, p_0 - 1$ ).  $\square$

**Teorem 2.2.2.** (Centralni granični teorem za nerešetkaste distribucije) Neka je  $(\Theta_n)_n$  niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih kuteva čija distribucija nije rešetkasta. Ako je  $S_n := \Theta_1 + \dots + \Theta_n \pmod{2\pi}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tada  $S_n \xrightarrow{D} CU$ , kad  $n \rightarrow \infty$ .

*Dokaz.* Neka je  $\Theta \sim F$  i  $\varphi = \varphi_F$ . Tada je karakteristični niz od  $S_n$  točno  $(\varphi_p^n)_p$ . Budući da  $F$  nije rešetkasta distribucija, iz Leme 2.2.1 slijedi da je  $|\varphi_p| < 1$  čim  $p \neq 0$  pa imamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_p^n = 0, \quad \forall p \neq 0.$$

Budući da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ , slijedi da je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_p^n = \delta_{p,0}$$

što je točno karakteristični niz cirkularne uniformne distribucije. Tvrdnja sada slijedi iz teorema neprekidnosti.  $\square$

**Teorem 2.2.3.** (Centralni granični teorem za rešetkaste distribucije) Neka je  $(\Theta_n)_n$  niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih kuteva čija je distribucija rešetkasta na skupu  $\left\{\frac{2j\pi}{m} : j = 0, \dots, m-1\right\}$  koji sadrži nulu. Ako je  $S_n := \Theta_1 + \dots + \Theta_n \pmod{2\pi}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tada  $S_n$  ima asimptotski diskretnu uniformnu razdiobu na skupu  $\left\{\frac{2j\pi}{m} : j = 0, \dots, m-1\right\}$  kad  $n \rightarrow \infty$ .

*Dokaz.* Neka je  $p_j := \mathbb{P}\left(\Theta_1 = \frac{2j\pi}{m}\right)$  za  $j = 0, \dots, m-1$  te  $p_0 > 0$ . Tada iz (1.22) slijedi da je karakteristični niz od  $\Theta_1$  dan s:

$$\varphi_p = \sum_{j=0}^{m-1} e^{ip \frac{2j\pi}{m}} p_j.$$

Od prije znamo da će biti  $\varphi_p = 1$  čim je  $p \equiv 0 \pmod{m}$ . Tvrdimo da je  $|\varphi_p| < 1$  ako  $p \not\equiv 0 \pmod{m}$ .

Označimo  $\xi_j := e^{i\frac{2\pi j}{m}}$ . Tada je  $\varphi_p = \sum_{j=0}^{m-1} p_j \xi_j^p$ .

Neka je  $|\varphi_p| = 1$ . Vrijedi:

$$\begin{aligned} 1 &= \left| p_0 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j \xi_j^p \right|^2 \\ &= \left| p_0 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j \cos\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) + i \sum_{j=1}^{m-1} p_j \sin\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) \right|^2 \\ &= \left( p_0 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j \cos\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{m-1} p_j \sin\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) \right)^2 \end{aligned}$$

S druge strane, jer je  $\sum_{j=0}^{m-1} p_j = 1$ , imamo:

$$\left( p_0 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j \right)^2 = \left( p_0 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j \cos\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{m-1} p_j \sin\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) \right)^2.$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \left( p_0 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j \right)^2 &= p_0^2 + 2p_0 \sum_{j=1}^{m-1} p_j + \sum_{j,j'=1}^{m-1} p_j p_{j'} \\ \left( p_0 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j \cos\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) \right)^2 &= p_0^2 + 2p_0 \sum_{j=1}^{m-1} p_j \cos\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) \\ &\quad + \sum_{j,j'=1}^{m-1} p_j p_{j'} \cos\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) \cos\left(\frac{2\pi j'}{m}p\right) \\ \left( \sum_{j=1}^{m-1} p_j \sin\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) \right)^2 &= \sum_{j,j'=1}^{m-1} p_j p_{j'} \sin\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) \sin\left(\frac{2\pi j'}{m}p\right). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem proširenih izraza i korištenjem svojstava trigonometrijskih funkcija slijedi:

$$\begin{aligned} 2p_0 \sum_{j=1}^{m-1} p_j + \sum_{j,j'=1}^{m-1} p_j p_{j'} &= 2p_0 \sum_{j=1}^{m-1} p_j \cos\left(\frac{2\pi j}{m}p\right) + \sum_{j,j'=1}^{m-1} p_j p_{j'} \cos\left(\frac{2\pi(j-j')}{m}p\right) \\ \iff 2p_0 \sum_{j=1}^{m-1} p_j \underbrace{\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{m}p\right)\right)}_{=2\sin^2\left(\frac{\pi j}{m}p\right)} &+ \sum_{j,j'=1}^{m-1} p_j p_{j'} \underbrace{\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi(j-j')}{m}p\right)\right)}_{=2\sin^2\left(\frac{\pi(j-j')}{m}p\right)} = 0 \end{aligned}$$

što je ekvivalentno s:

$$2p_0 \sum_{j=1}^{m-1} p_j \sin^2 \left( \frac{\pi j}{m} p \right) + \sum_{j,j'=1}^{m-1} p_j p_{j'} \sin^2 \left( \frac{\pi(j-j')}{m} p \right) = 0$$

pa mora vrijediti:

$$\sin \left( \frac{\pi j}{m} p \right) = \sin \left( \frac{\pi(j-j')}{m} p \right) = 0, \quad j, j' = 0, \dots, m-1.$$

To je ekvivalentno s  $p \equiv 0 \pmod{m}$ .

Dakle,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_p^n = \begin{cases} 1, & p \equiv 0 \pmod{m} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$  pa tvrdnja slijedi iz teorema neprekidnosti. □

**Napomena 2.2.4.** *Prethodno dokazani rezultat vrijedi ako je 0 u nosaču gustoće rešetkaste distribucije. Ukoliko to ne vrijedi, distribucija od  $S_n$  ne mora biti asimptotski diskretna uniformna.*

Neka je  $c \in \langle 0, \pi \rangle \setminus \mathbb{Q}$  i  $p_c \in \langle 0, 1 \rangle$ . Neka je distribucija niza  $(\Theta_n)_n$  dana s:

$$\mathbb{P}(\Theta_1 = c) = p_c, \quad \mathbb{P}(\Theta_1 = c + \pi) = 1 - p_c.$$

Tada je karakteristični niz te distribucije dan s:

$$\begin{aligned} \varphi_p &= e^{ipc} p_c + e^{ip(c+\pi)}(1 - p_c) \\ &= e^{ipc} (p_c + e^{ip\pi}(1 - p_c)) \\ &= e^{ipc} (p_c + (-1)^p(1 - p_c)) \\ &= \begin{cases} e^{ipc}, & p \text{ paran} \\ e^{ipc}(2p_c - 1), & p \text{ neparan} \end{cases} \end{aligned}$$

pa je karakteristični niz od  $S_n$ :

$$\varphi_p^n = \begin{cases} e^{inpc}, & p \text{ paran} \\ e^{inpc}(2p_c - 1)^n, & p \text{ neparan.} \end{cases}$$

Budući da  $|2p_c - 1| < 1$ , imamo da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{2p+1}^n = 0$ . No, podniz  $(\varphi_{2p}^n)_n$  nije konvergentan ako  $p \neq 0$ .

**Teorem 2.2.5.** *Neka je  $(\Theta_n)_n$  niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih kuteva definiranih na  $\langle -\pi, \pi \rangle$  sa zajedničkom distribucijom  $F$  takav da je  $\mathbb{E}[\Theta_1] = 0$ .*

*Tada za  $S_n^* := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \Theta_j \pmod{2\pi}$  vrijedi:*

$$S_n^* \xrightarrow{D} WN(0, \rho), \quad n \rightarrow \infty,$$

pri čemu je  $\sigma^2 = \mathbb{E}[\Theta_1^2]$  i  $\rho = e^{-\sigma^2/2}$ .

*Dokaz.* Za  $n \in \mathbb{N}$ , uočimo da su  $\frac{1}{\sqrt{n}}\Theta_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\Theta_n$  nezavisni i jednako distribuirani slučajni kutevi pa je karakteristični niz od  $S_n^*$  dan s:

$$\varphi_p^* = \left( \mathbb{E} \left[ e^{ip \frac{1}{\sqrt{n}}\Theta_1} \right] \right)^n = \left( \mathbb{E} \left[ \cos \left( p \frac{1}{\sqrt{n}}\Theta_1 \right) + i \sin \left( p \frac{1}{\sqrt{n}}\Theta_1 \right) \right] \right)^n.$$

Jer vrijedi  $\cos \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{x^2}{2n} + o \left( \frac{1}{n} \right)$ ,  $\sin \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) = \frac{x}{\sqrt{n}} + o \left( \frac{1}{n} \right)^1$  i  $\mathbb{E}[\Theta_1] = 0$ , možemo zapisati:

$$\varphi_p^* = \left( 1 - \frac{p^2\sigma^2}{2n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right)^n.$$

Budući da  $g_n(p) := -\frac{p^2\sigma^2}{2n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \rightarrow 0$  kad  $n \rightarrow \infty$  te  $ng_n(p) \rightarrow -\frac{p^2\sigma^2}{2}$  kad  $n \rightarrow \infty$ , za  $\varphi_p^*$  vrijedi:

$$\varphi_p^* = \left( (1 + g_n(p))^{1/g_n(p)} \right)^{ng_n(p)} \rightarrow e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

pa tvrdnja slijedi iz teorema neprekidnosti.  $\square$

Promotrimo za kraj ovog poglavlja jedan drugi tip rezultata. Pretpostavimo da je  $X$  realna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti sa značajnim vjerojatnostima na nekom širokom intervalu u  $\mathbb{R}$ . Intuitivno, slučajni kut dobiven namatanjem od  $X$  na  $S^1$  bi trebao imati približno uniformnu distribuciju.

**Teorem 2.2.6.** (*Poincaré*) *Neka je  $X$  apsolutno neprekidna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti na skupu realnih brojeva. Za  $c \in \mathbb{R}$  definiramo  $X' := cX$ . Tada za slučajni kut  $X'_w$  dobiven namatanjem od  $X'$  na  $S^1$  vrijedi da  $X'_w \xrightarrow{D} CU$  kad  $c \rightarrow \infty$ .*

Neka su  $f$  i  $t \mapsto \varphi(t)$ , redom, gustoća i karakteristična funkcija od  $X$ . Tada je  $t \mapsto \varphi(ct)$  karakteristična funkcija od  $X'$  pa je  $(\varphi(cp))_{p \in \mathbb{Z}}$  karakteristični niz od  $X'_w$ . Budući da je  $X$  apsolutno neprekidna slučajna varijabla, iz Riemann-Lebesgueovog teorema slijedi:

$$0 = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \varphi(t)$$

<sup>1</sup>Oznaku  $o(t)$  koristimo umjesto ostatka za koji vrijedi:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0.$$

U ovom smislu, iz Taylorovog teorema srednje vrijednosti možemo dobiti da je:

$$\cos \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{x^2}{2n} + o \left( \frac{x^2}{n} \right), \quad \sin \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) = \frac{x}{\sqrt{n}} + o \left( \frac{x^2}{n} \right),$$

a onda vrijedi da  $o(x^2/n)$  možemo zamijeniti s  $o(1/n)$  kad  $n \rightarrow \infty$ .

pa onda i niz  $(\varphi(cp))_p$  iščezava u beskonačnosti:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \varphi(cp) = 0, \quad p \neq 0$$

što povlači da  $\varphi(cp) \rightarrow \delta_{p,0}$  kad  $c \rightarrow \infty$ . Tvrdnja slijedi iz teorema neprekidnosti.

# Poglavlje 3

## Primjeri, primjene i procjene

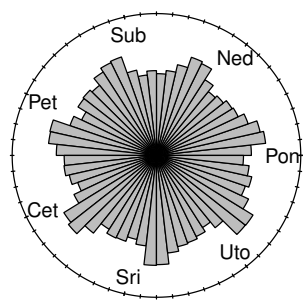
U ovom poglavlju ćemo na konkretnim primjerima i simulacijama pokazati neke od definiranih statistika i dokazanih graničnih teorema iz prethodnih dvaju poglavlja. Dodatno, pokazat ćemo kako bismo procijenili parametre von Misesove distribucije metodom maksimalne vjerodostojnosti.

### 3.1 Cirkularne distribucije

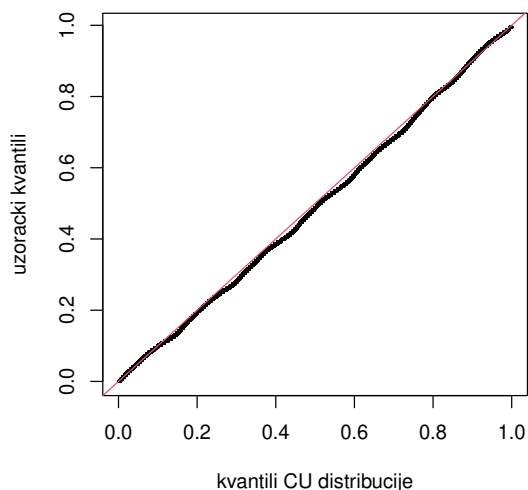
**Primjer 3.1.1.** *Promotrimo uzorak o broju `commit` radnji u operacijskom sustavu `FreeBSD` koje se izvršavaju svaka 3 sata. Podaci (vidi [4]) se promatraju po tjednima. Na Slici 3.1a možemo vidjeti da potencijalno postoji više različitih cirkularnih modova u distribuciji, ali i da je empirijska distribucija približno invarijantna na specifične rotacije. Cirkularna varijanca izračunana na temelju ovog uzorka iznosi  $\hat{\nu} \approx 0.97$  što je približno jednako 1. U konačnici, na Slici 3.1b vidimo kako su na uniformnom vjerojatnosnom grafu uzorački kvantili i teoretski kvantili cirkularne uniformne razdiobe grupirani približno oko pravca  $y = x$  što vizualno daje za naslutiti kako bi distribucija mogla biti i uniformna.*

Spomenimo samo kako je u prethodnom primjeru moguće testirati da je poplacijska distribucija  $F$  iz koje dolazi uzorak uniformna, tj. testirati nul-hipotezu  $H_0: F \sim CU$ , no mi ovdje nećemo provoditi testove hipoteza.

**Primjer 3.1.2.** *(von Misesova distribucija) Promatramo uzorak od 104 smjerova paleostruje u sedimentnim teksturama u Pakistanu (vidi [12]) pri čemu  $0^\circ$  predstavlja sjever. Na Slici 3.2a je prikazan dijagram uzorka s dodatnim značajkama (procijenjena von Misesova gustoća, procjena gustoće koristeći von Misesovu jezgru i srednji smjer uzorka zajedno sa dijametrom simetrije). Iz procjene gustoće i empirijske funkcije distribucije na Slici 3.2b grafički možemo argumentirati kako bi distribucija pale-*



(a) Dijagram ruža



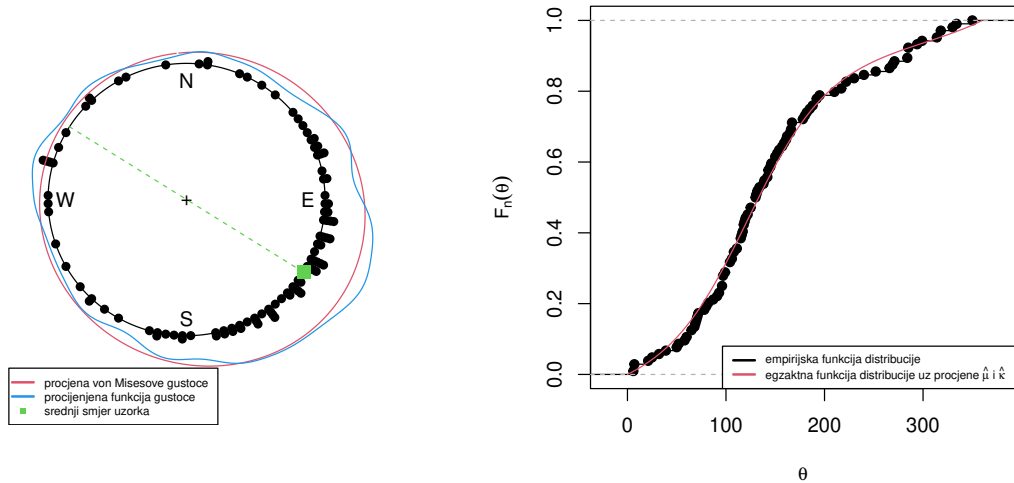
(b) Uniformni vjerojatnosni graf

Slika 3.1: Broj commit radnji u *FreeBSD*-u

ostruja bila iz von Misesova familije  $M(\mu, \kappa)$ , pri čemu bi srednji smjer čija procjena iznosi  $122.29^\circ$  bio kandidat za parametar  $\mu$ . Uočimo još i kako je distribucija uzorka djelomično simetrična oko  $122.29^\circ$  što je konzistentno sa svojstvima von Misesove distribucije.

Pokazano je (vidi [11]) da se von Misesova i namotana normalna distribucija međusobno mogu vrlo dobro aproksimirati. U praksi se to očituje u čestom odabiru von Misesove distribucije (ako su i namotana normalna i von Misesova kandidati) budući da veliki broj testova hipoteza ima kao pretpostavku pripadnost populacijske razdiobe nekoj von Misesovoj distribuciji. S druge strane, jasno je kako bismo generirali (pseudoslučajni) uzorak iz namotane normalne distribucije koristeći generator normalne distribucije. Iz svih prethodnih zaključaka je tada jasno zašto se i u simulacijskim studijama često generiranje von Misesove distribucije svede na generiranje namotane normalne distribucije.





(a) Grafički prikaz uzorka

(b) Usporedba empirijske i procijenjene von Misesove funkcije distribucije

Slika 3.2: Smjerovi paleostruja

## 3.2 Granični teoremi

**Primjer 3.2.1.** (*centralni granični teorem za nerešetkaste distribucije*) Generiramo  $N = 1000$  ponavljanja od po  $n = 10, 20, 50, 100, 200$  uzoraka iz von Misesove distribucije s parametrima  $(\mu, \kappa) = (0, 1)$ , projicirane normalne distribucije s parametrima  $(\mu, \Sigma) = (\mathbf{0}, \mathbf{I}_2)$  i namotane Cauchyjeve distribucije s parametrima  $(\mu, \rho) = (0, e^{-1})$ :

### Algoritam 1: Simulacijska studija za CGT

**Ulaz:**  $N, n, D, seed$

**Rezultat:** sredina  $(\bar{C}, \bar{S})$  realizacije od  $S_n$  dobivene na temelju  $N$  generiranih uzoraka duljine  $n$  iz distribucije  $D$  uz sjeme  $seed$

$set\_seed(seed)$ ;

**za**  $i \leftarrow 1$  **do**  $N$  **čini**

$x^{(i)} \leftarrow$  slučajni uzorak duljine  $n$  iz distribucije  $D$ ;

$S_n^{(i)} \leftarrow \sum_{j=1}^n x_j^{(i)} \pmod{2\pi}$ ;

**kraj**

$plot(S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(N)})$ ;

$(\bar{C}, \bar{S}) \leftarrow$  sredina uzorka  $S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(N)}$  duljine  $N$ ;

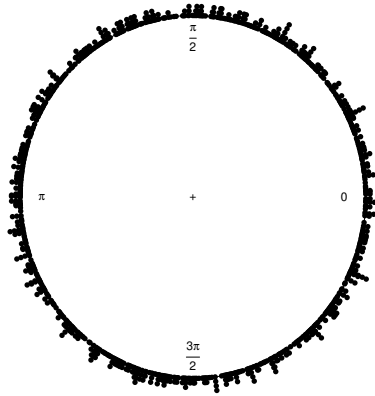
U Tablici 3.1 su prikazane koordinate težišta  $(\bar{C}, \bar{S})$  za svaki od uzoraka. Za slučajni uzorak iz uniformne distribucije bismo kao očekivali težište točno  $(0, 0)$  (ovaj zaključak slijedi iz teorijskog rezultata o  $\rho = 0$ ).

Tablica 3.1: Vrijednosti  $(\bar{C}, \bar{S})$  na temelju simulacija uz sjeme 123144

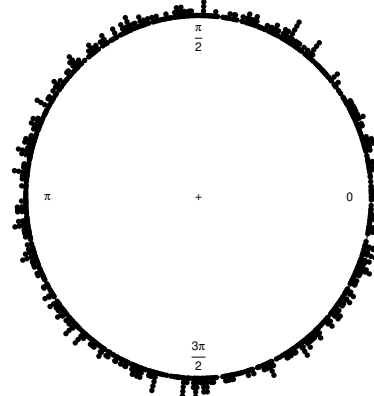
		distribucija		
		$M(0, 1)$	$PN(\mathbf{0}, \mathbf{I}_2)$	$WC(0, e^{-1})$
$n$	10	(-0.010, 0.005)	(0.012, -0.009)	(-0.020, 0.030)
	20	(-0.001, 0.005)	(0.010, 0.025)	(0.016, -0.007)
	50	(0.058, 0.021)	(0.018, 0.010)	(-0.016, -0.039)
	100	(0.006, -0.024)	(0.011, 0.033)	(0.016, -0.020)
	200	(-0.014, -0.005)	(0.022, -0.023)	(0.030, 0.020)

Grafički prikaz 1000 vrijednosti od  $S_n$  dobivenih simulacijama za slučajeve  $n = 10$  i  $n = 100$  možemo vidjeti na Slici 3.3. Inspekcijom vrijednosti težišta i vizualnom analizom se čini da vrijednosti od  $S_n$  uistinu prate distribuciju nalik na uniformnu što smo i očekivali.

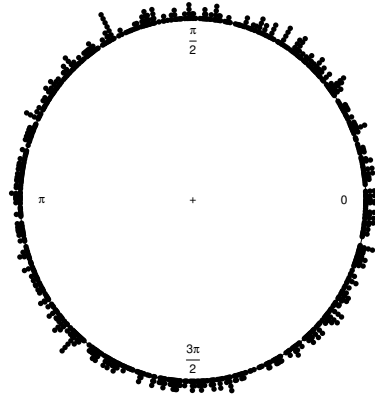
$S_n$  za  $N=1000$  uzoraka duljine  $n=10$  iz von Misesove distribucije



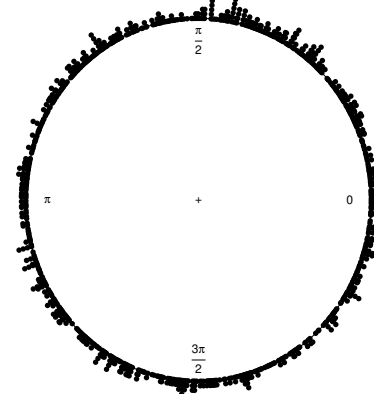
$S_n$  za  $N=1000$  uzoraka duljine  $n=100$  iz von Misesove distribucije



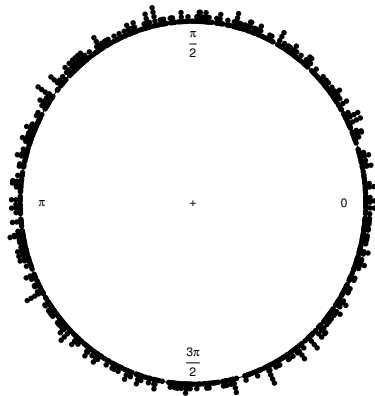
$S_n$  za  $N=1000$  uzoraka duljine  $n=10$  iz projicirane normalne distribucije



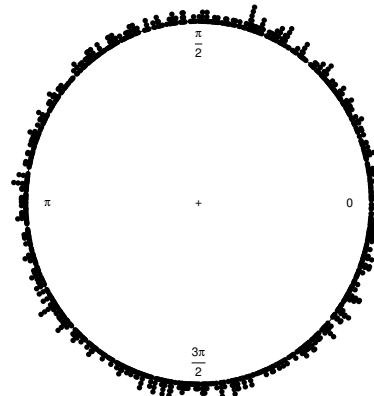
$S_n$  za  $N=1000$  uzoraka duljine  $n=100$  iz projicirane normalne distribucije



$S_n$  za  $N=1000$  uzoraka duljine  $n=10$  iz namotane Cauchyjeve distribucije



$S_n$  za  $N=1000$  uzoraka duljine  $n=100$  iz namotane Cauchyjeve distribucije



Slika 3.3: Prikaz simuliranih vrijednosti od  $S_n$

**Primjer 3.2.2.** (*Poincaréov teorem*) Generiramo uzorak  $\mathbb{X}$  duljine  $n = 10, 100, 1000$  iz standardne normalne, Cauchyjeve  $C(0, 1)$  i eksponencijalne  $Exp(1)$  distribucije. Za  $c = 1, 2, 5$  određujemo realizaciju od  $c\mathbb{X}_w$ :

**Algoritam 2:** Simulacijska studija za Poincaréov teorem

**Ulaz:**  $n, c, D, seed$

**Rezultat:** sredina  $(\bar{C}, \bar{S})$  realizacije od  $cX_w$  dobivene namatanjem na temelju uzorka duljine  $n$  iz distribucije  $D$  uz sjeme  $seed$

$set\_seed(seed);$

$x \leftarrow$  slučajni uzorak duljine  $n$  iz distribucije  $D$ ;

$cx \leftarrow c \cdot x$ ;

$cx_w \leftarrow cx \pmod{2\pi}$ ;

$plot(cx_w)$ ;

$(\bar{C}, \bar{S}) \leftarrow$  sredina uzorka  $cx_w$  duljine  $n$ ;

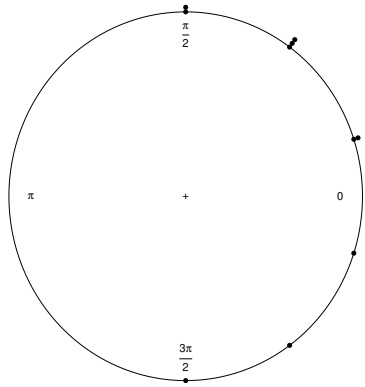
U Tablici 3.2 su prikazane koordinate težišta  $(\bar{C}, \bar{S})$  za svaki od uzoraka.

Tablica 3.2: Vrijednosti  $(\bar{C}, \bar{S})$  uzorka  $c\mathbb{X}_w$  na temelju simulacija uz sjeme 123144

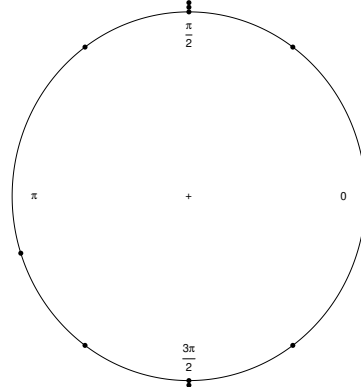
		$n$			
		10	100	1000	
distribucija	$N(0, 1)$	$c = 1$	(0.53, 0.29)	(0.63, -0.09)	(0.60, -0.01)
		$c = 2$	(-0.12, 0.28)	(0.20, -0.07)	(0.15, 0.01)
		$c = 5$	(-0.05, 0.10)	(0.11, 0.02)	(0.02, 0.02)
	$C(0, 1)$	$c = 1$	(0.45, -0.04)	(0.26, 0.11)	(0.36, 0.00)
		$c = 2$	(0.32, -0.39)	(0.09, -0.03)	(0.14, 0.00)
		$c = 5$	(-0.37, 0.01)	(0.00, 0.12)	(0.02, 0.05)
	$Exp(1)$	$c = 1$	(0.43, 0.46)	(0.46, 0.48)	(0.51, 0.50)
		$c = 2$	(0.37, 0.41)	(0.13, 0.36)	(0.19, 0.42)
		$c = 5$	(0.11, 0.14)	(0.13, 0.16)	(0.03, 0.21)

Uočimo da rezultati ukazuju na ono što smo intuitivno pretpostavili prije dokaza Poincaréovog teorema. Naime, kako  $c$  raste, u slučaju kad  $X$  dolazi iz simetrične distribucije čiji je nosač širok interval (u slučaju  $N(0, 1)$  i  $C(0, 1)$ ), namatanjem od  $cX$  na  $S^1$  se dobiva distribucija čije je težište blizu  $(0, 0)$ . Slično vrijedi i kod asimetričnih distribucija kao što je  $Exp(1)$  (s nosačem  $[0, \infty)$ ), samo što je ovdje potreban veći  $c$  za slično ponašanje. Ove zaključke možemo vizualno istražiti na slikama 3.4, 3.5 i 3.6.

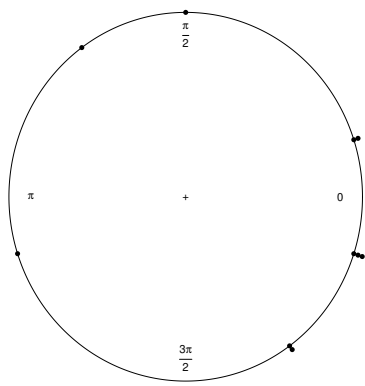
uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=10$  dobiven namatanjem distribucije  $N(0,1)$  uz  $c=1$



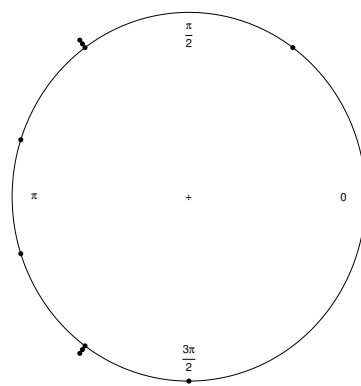
uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=10$  dobiven namatanjem distribucije  $N(0,1)$  uz  $c=5$



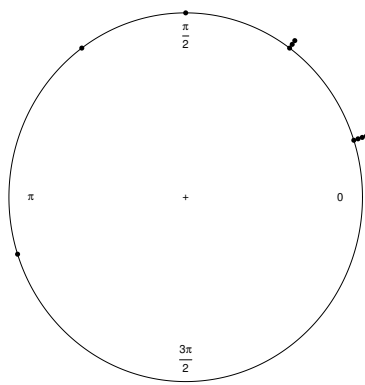
uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=10$  dobiven namatanjem distribucije  $C(0,1)$  uz  $c=1$



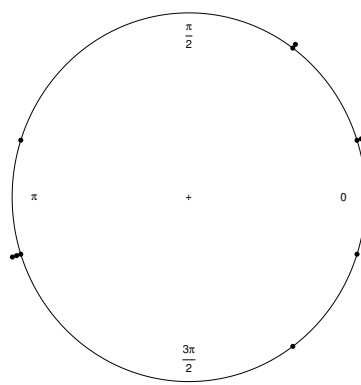
uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=10$  dobiven namatanjem distribucije  $C(0,1)$  uz  $c=5$



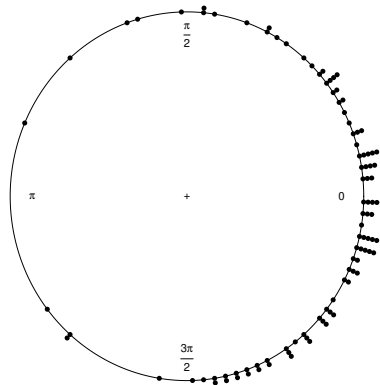
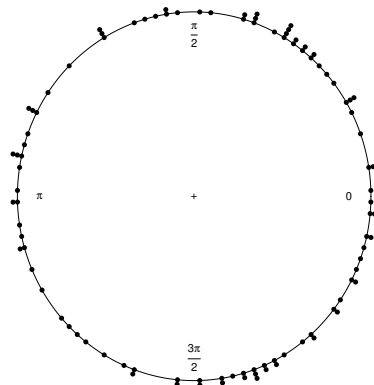
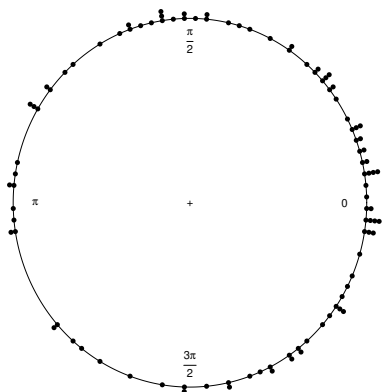
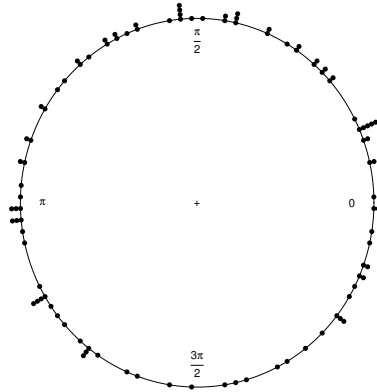
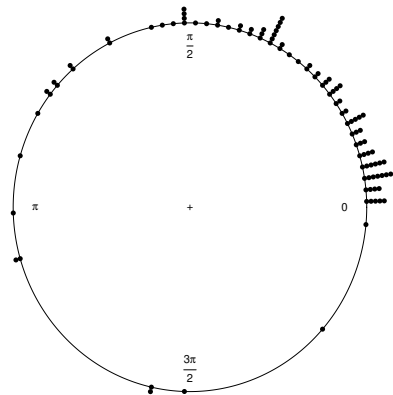
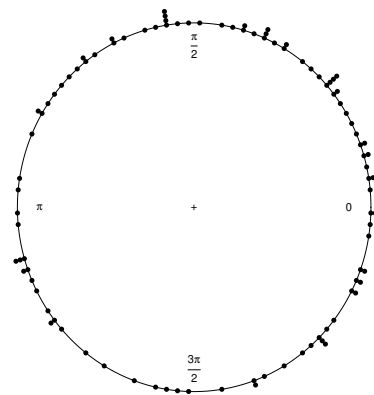
uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=10$  dobiven namatanjem distribucije  $\text{Exp}(1)$  uz  $c=1$

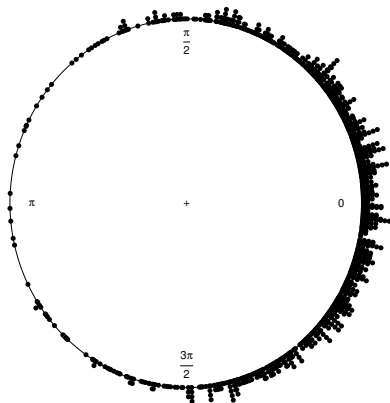
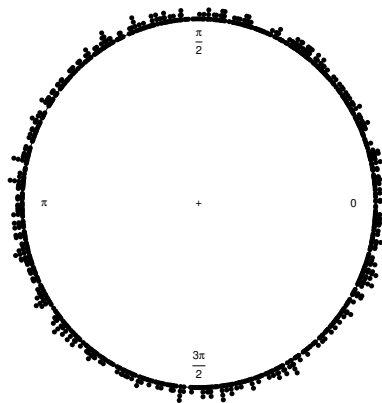
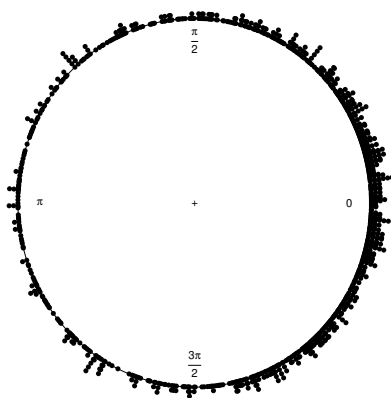
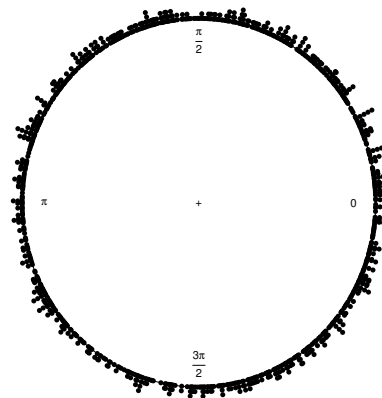
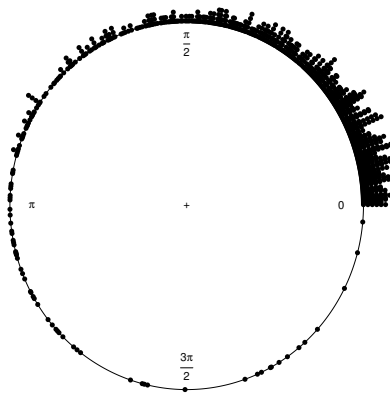
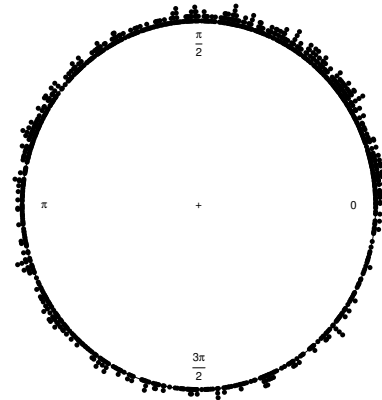


uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=10$  dobiven namatanjem distribucije  $\text{Exp}(1)$  uz  $c=5$



Slika 3.4: Grafički prikaz simuliranih uzoraka duljine  $n = 10$

uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=100$  dobiven namatanjem distribucije  $N(0,1)$  uz  $c=1$ uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=100$  dobiven namatanjem distribucije  $N(0,1)$  uz  $c=5$ uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=100$  dobiven namatanjem distribucije  $C(0,1)$  uz  $c=1$ uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=100$  dobiven namatanjem distribucije  $C(0,1)$  uz  $c=5$ uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=100$  dobiven namatanjem distribucije  $\text{Exp}(1)$  uz  $c=1$ uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=100$  dobiven namatanjem distribucije  $\text{Exp}(1)$  uz  $c=5$ Slika 3.5: Grafički prikaz simuliranih uzoraka duljine  $n = 100$

uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=1000$  dobiven namatanjem distribucije  $N(0,1)$  uz  $c=1$ uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=1000$  dobiven namatanjem distribucije  $N(0,1)$  uz  $c=5$ uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=1000$  dobiven namatanjem distribucije  $C(0,1)$  uz  $c=1$ uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=1000$  dobiven namatanjem distribucije  $C(0,1)$  uz  $c=5$ uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=1000$  dobiven namatanjem distribucije  $\text{Exp}(1)$  uz  $c=1$ uzorak za  $cX_w$  duljine  $n=1000$  dobiven namatanjem distribucije  $\text{Exp}(1)$  uz  $c=5$ Slika 3.6: Grafički prikaz simuliranih uzoraka duljine  $n = 1000$

### 3.3 Procjena parametara von Misesove distribucije

#### Procjena metodom maksimalne vjerodostojnosti

Neka je  $\mathbb{T}_n = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  realizacija slučajnog uzorka  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  iz distribucije  $M(\mu, \kappa)$ . Želimo procijeniti parametre  $\mu$  i  $\kappa$  von Misesove distribucije maksimizacijom vjerodostojnosti  $L$  parametra  $(\mu, \kappa)$  na osnovi  $\mathbb{T}_n$ :

$$L(\mathbb{T}_n; \mu, \kappa) = \prod_{j=1}^n f_{M(\mu, \kappa)}(\theta_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta_j - \mu)} = \frac{1}{(2\pi I_0(\kappa))^n} e^{\kappa \sum_{j=1}^n \cos(\theta_j - \mu)}$$

Tada je pripadna *log*-vjerodostojnost dana s:

$$\ell(\mu, \kappa) = \ln L(\mathbb{T}_n; \mu, \kappa) = -n \ln(2\pi) - n \ln(I_0(\kappa)) + \kappa \sum_{j=1}^n \cos(\theta_j - \mu)$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} \nabla \ell(\mu, \kappa) &= \left( \frac{\partial \ell}{\partial \mu}(\mu, \kappa), \frac{\partial \ell}{\partial \kappa}(\mu, \kappa) \right) \\ &= \left( \kappa \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \mu), -\frac{n}{I_0(\kappa)} I_0'(\kappa) + \sum_{j=1}^n \cos(\theta_j - \mu) \right) \\ &= \left( \kappa \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \mu), -n \underbrace{\frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}}_{=: A_1(\kappa)} + \sum_{j=1}^n \cos(\theta_j - \mu) \right) \\ &= \left( \kappa \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \mu), -n A_1(\kappa) + \sum_{j=1}^n \cos(\theta_j - \mu) \right), \\ H_\ell(\mu, \kappa) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2}(\mu, \kappa) & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \kappa \partial \mu}(\mu, \kappa) \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu \partial \kappa}(\mu, \kappa) & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \kappa^2}(\mu, \kappa) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\kappa \sum_{j=1}^n \cos(\theta_j - \mu) & \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \mu) \\ \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \mu) & -n A_1'(\kappa) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Želimo pronaći stacionarne točke od  $\ell$ . Koristit ćemo rezultate navedene i dokazane u [3] čije varijante iskazujemo u sljedećoj lemi.

**Lema 3.3.1.** (i)  $\kappa \mapsto \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}$  je strogo rastuća na  $\langle 0, +\infty \rangle$ .



(ii) Za sve  $\kappa > 0$  vrijedi:

$$0 < \operatorname{cth}(\kappa) - \frac{1}{\kappa} < \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} < \operatorname{th}(\kappa) < 1.$$

Prethodna lema i teorem o sendviču povlače  $\lim_{\kappa \rightarrow 0^+} A_1(\kappa) = 0$ ,  $\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} A_1(\kappa) = 1$  te da (neprekidna) funkcija  $A_1|_{(0, +\infty)}$  sadrži cijeli interval  $\langle 0, 1 \rangle$  u svojoj slici.

Ako je  $\nabla \ell(\hat{\mu}, \hat{\kappa}) = \mathbf{0}$ , tada je  $\sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \hat{\mu}) = 0$  i  $A_1(\hat{\kappa}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(\theta_j - \hat{\mu})$  pa je  $H_\ell(\hat{\mu}, \hat{\kappa}) = \begin{bmatrix} -n\hat{\kappa}A_1(\hat{\kappa}) & 0 \\ 0 & -nA_1'(\hat{\kappa}) \end{bmatrix}$  i može se pokazati da je ta Hesseova matrica negativno definitna pa je  $(\hat{\mu}, \hat{\kappa})$  zaista lokalni maksimum.

Na  $S^1$  promatramo točke  $P_1, \dots, P_n$  takve da je  $P_j = (\cos \theta_j, \sin \theta_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Označimo s  $(\bar{C}, \bar{S})$  težište tih točaka, tj. definirajmo  $\bar{C} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \theta_j$  i  $\bar{S} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin \theta_j$ . Neka je još  $\bar{R} := (\bar{C}^2 + \bar{S}^2)^{1/2}$  duljina radij-vektora težišta. Neka je još  $\bar{x}_0$  kut koji predstavlja rezultantu svih smjerova  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , to jest, neka je  $\bar{x}_0$  rješenje jednadžbi  $\bar{C} = \bar{R} \cos(x)$  i  $\bar{S} = \bar{R} \sin(x)$  u  $x$  dobiveno kao onaj kut koji parametrizira točku  $(\bar{C}, \bar{S}) \in S^1$ . Vrijedi:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \bar{x}_0) &= \sum_{j=1}^n (\sin(\theta_j) \cos(\bar{x}_0) - \cos(\theta_j) \sin(\bar{x}_0)) \\ &= \cos(\bar{x}_0) \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j) - \sin(\bar{x}_0) \sum_{j=1}^n \cos(\theta_j) \\ &= n\bar{S} \cos(\bar{x}_0) - n\bar{C} \sin(\bar{x}_0) \\ &= n\bar{R} \sin(\bar{x}_0) \cos(\bar{x}_0) - n\bar{R} \cos(\bar{x}_0) \sin(\bar{x}_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pa za  $\hat{\mu} = \bar{x}_0$  vrijedi  $\frac{\partial \ell}{\partial \mu}(\hat{\mu}, \kappa) = 0$ . Ako sada tražimo i  $\hat{\kappa}$  takav da je  $\nabla \ell(\hat{\mu}, \hat{\kappa}) = \mathbf{0}$ , znamo da mora vrijediti  $A_1(\hat{\kappa}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(\theta_j - \hat{\mu})$  pa uz  $\hat{\mu} = \bar{x}_0$  računamo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \cos(\theta_j - \bar{x}_0) &= \sum_{j=1}^n (\cos(\theta_j) \cos(\bar{x}_0) + \sin(\theta_j) \sin(\bar{x}_0)) \\ &= \cos(\bar{x}_0) \sum_{j=1}^n \cos(\theta_j) + \sin(\bar{x}_0) \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j) \\ &= n\bar{C} \cos(\bar{x}_0) + n\bar{S} \sin(\bar{x}_0) \\ &= n\bar{R} \cos^2(\bar{x}_0) + n\bar{R} \sin^2(\bar{x}_0) \\ &= n\bar{R}. \end{aligned}$$

$\bar{R}$  je očito jedinstveno određen uzorkom. Budući da je  $A_1$  strogo rastuća na  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  $\hat{\kappa}$  koji zadovoljava  $\nabla \ell(\hat{\mu}, \hat{\kappa}) = \mathbf{0}$  je također jedinstven.

Promotrimo još dva specijalna slučaja —  $\bar{R} = 0$  te  $\bar{R} = 1$ . Ako je  $\bar{R} = 0$ , onda  $A_1(0) = 0$  povlači da je  $\hat{\kappa} = 0$  procjena za parametar  $\kappa$  što je poseban slučaj von Misesove distribucije — cirkularna uniformna distribucija. Takva procjena populacijske distribucije odgovara i prirodi ovakvih podataka. Naime,  $\bar{R} = 0$  znači da se točke parametrizirane s  $\theta_1, \dots, \theta_n$  nalaze u vrhovima nekog pravilnog  $n$ -terokuta na  $S^1$ . U slučaju  $\bar{R} = 1$  su svi podaci koncentrirani u jednoj točki pa je procjena populacijske distribucije von Misesovim modelom na temelju takvog uzorka besmislena.

**Propozicija 3.3.2.** *MLE procjena  $(\hat{\mu}, \hat{\kappa})$  za parametre  $(\mu, \kappa)$  von Misesove distribucije na temelju realizacije  $\theta_1, \dots, \theta_n$  slučajnog uzorka  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  zadovoljava:*

$$\bar{R} \cos(\hat{\mu}) = \bar{C}, \quad \bar{R} \sin(\hat{\mu}) = \bar{S}, \quad A_1(\hat{\kappa}) = \bar{R},$$

pri čemu su:

$$\begin{aligned} \bar{C} &:= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \theta_j \\ \bar{S} &:= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin \theta_j \\ \bar{R} &:= (\bar{C}^2 + \bar{S}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

$\bar{R}e^{i\hat{\mu}}$  predstavlja težište točaka na  $S^1$  parametriziranih smjerovima  $\theta_1, \dots, \theta_n$ .

Prethodno pokazana propozicija nam omogućuje da ML-procjenju parametra  $\mu$  relativno jednostavno odredimo iz podataka. No, postavlja se pitanje kako riješiti jednadžbu  $A_1(\hat{\kappa}) = \bar{R}$  nakon dobivanja procjene  $\hat{\mu}$ . Egzaktno rješenje općenito ne postoji, a aproksimacije se dobivaju na razne načine — često se koriste tablični rezultati ili različite aproksimacije od  $A_1$  ili  $A_1^{-1}$  u ovisnosti o magnitudi vrijednosti  $\bar{R}$ .

## EM algoritam

Specifičnost von Misesove distribucije je unimodalnost. U praksi se nerijetko pojavljuju multimodalni podaci koje onda nema smisla prilagođavati unimodalnom modelu, no često se tom problemu doskače promatrajući konveksne kombinacije gustoća unimodalnih razdioba — tzv. *miješane razdiobe*. Ako su  $f_1, \dots, f_K$  vjerojatnosne gustoće te  $\pi_1, \dots, \pi_K \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^K \pi_k = 1$ , tada je s  $f(x) = \sum_{k=1}^K \pi_k f_k(x)$  zadana vjerojatnosna gustoća i takav model nazivamo miješanom razdiobom.

Ovdje ćemo demonstrirati pristup procjene parametara koji se svodi na iterativni algoritam koji se može primijeniti i za varijante von Misesove distribucije na višedimenzionalnim prostorima i miješane razdiobe.

Pretpostavimo da podatke  $\theta_1, \dots, \theta_n$  prilagođavamo nekom miješanom von Misesovom modelu oblika:

$$f(\theta; \pi_1, \dots, \pi_K, \mu_1, \dots, \mu_K, \kappa_1, \dots, \kappa_K) = \sum_{k=1}^K \pi_k f_{M(\mu_k, \kappa_k)}(\theta), \quad (3.1)$$

gdje su  $\pi_k \geq 0, k = 1, \dots, K, \sum_{k=1}^K \pi_k = 1$ . Intuitivno,  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_K)$  generira neku diskretnu razdiobu koja definira „mjere kontaminacije“ za svaku od distribucija  $M(\mu_k, \kappa_k)$ . Primjerice, ako je  $K = 2$ , te ako označimo  $p := \pi_1$ , tada je  $\Pi = (p, 1 - p)$  te možemo reći da je miješani von Misesov model (3.1) „kontaminirani“ von Misesov model  $M(\mu_1, \kappa_1)$  u kojem proporcija  $p$  dolazi iz  $M(\mu_1, \kappa_1)$ , a ostatak iz  $M(\mu_2, \kappa_2)$ . Log-vjerodostojnost parametara  $(\Pi, \mu, \kappa)$  uz  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_K), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_K), \kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_K)$ , na osnovi  $\mathbb{T}_n$  za (3.1) je:

$$l(\Pi, \mu, \kappa) = \ln \left( \prod_{j=1}^n f(\theta_j; \Pi, \mu, \kappa) \right) = \sum_{j=1}^n \ln \left( \sum_{k=1}^K \pi_k f_{M(\mu_k, \kappa_k)}(\theta_j) \right)$$

Proširimo  $f_{M(\mu_k, \kappa_k)}(\theta_j)$  aposterionim masama:

$$\beta_{jk} := \frac{\pi_k f_{M(\mu_k, \kappa_k)}(\theta_j | \mu_k, \kappa_k)}{\sum_{l=1}^K \pi_l f_{M(\mu_l, \kappa_l)}(\theta_j | \mu_l, \kappa_l)} \quad (3.2)$$

da dobijemo:

$$l(\Pi, \mu, \kappa) = \sum_{j=1}^n \ln \left( \sum_{k=1}^K \beta_{jk} \frac{\pi_k f_{M(\mu_k, \kappa_k)}(\theta_j)}{\beta_{jk}} \right)$$

Budući da je  $x \mapsto \ln x$  konkavna funkcija,  $\beta_{j1}, \dots, \beta_{jK} \geq 0$  i  $\sum_{k=1}^K \beta_{jk} = 1$ , koristeći Jensenovu nejednakost dobivamo:

$$l(\Pi, \mu, \kappa) \geq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K \beta_{jk} \ln \left( \frac{\pi_k f_{M(\mu_k, \kappa_k)}(\theta_j)}{\beta_{jk}} \right) \quad (3.3)$$

i ideja EM (engl. *Expectation-Maximization*) algoritma je maksimizirati ovu donju među.

Na prvi pogled nije jasno zašto bismo dodali aposteriorne vjerojatnosti u razmatranje s obzirom da je  $\sum_{k=1}^K \pi_k f_{M(\mu_k, \kappa_k)}(\theta_j)$  već konveksna kombinacija pa je i na ishodnom izrazu za log-vjerodostojnost primjenjiva Jensenova nejednakost te je moguće dobiti donju među za log-vjerodostojnost i primijeniti istu ideju. No, uvođenje aposteriornih vjerojatnosti vodi do smislenije iterativne metode u kojem se svaki korak ažurira s novim saznanjem o boljoj aproksimaciji parametara:

1. definiramo početnu aproksimaciju za parametre  $(\hat{\Pi}^{(0)}, \hat{\mu}^{(0)}, \hat{\kappa}^{(0)})$
2. ( $E$ -korak) koristeći aproksimacije parametara  $(\hat{\Pi}^{(m)}, \hat{\mu}^{(m)}, \hat{\kappa}^{(m)})$  iz  $m$ -te iteracije, dobiti  $\beta_{jk}^{(m)}$  iz (3.2) za sve  $j = 1, \dots, n$  i  $k = 1, \dots, K$ .
3. ( $M$ -korak) maksimizacija donje međe u (3.3) za koju se može pokazati (vidi [5]) da se svodi na određivanje:

$$r_k^{(m)} = \sum_{j=1}^n \beta_{jk}^{(m)} \theta_j, \quad \bar{r}_k^{(m)} = \frac{\|r_k^{(m)}\|}{\sum_{j=1}^n \beta_{jk}^{(m)}}$$

$$\hat{\mu}_k^{(m+1)} = \frac{1}{\|r_k^{(m)}\|} r_k^{(m)}, \quad \hat{\kappa}_k^{(m+1)} = A_1^{-1}(\bar{r}_k^{(m)}), \quad \hat{\pi}_k^{(m+1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \beta_{jk}^{(m)},$$

za sve  $k = 1, \dots, K$ .

U praksi se koristi i ubrzani EM algoritam koji skraćuje  $E$ -korak na način da se  $\beta_{jk}$  definiraju kao:

$$\beta_{jk} = \begin{cases} 1, & k = \arg \max_{k'=1, \dots, K} \ln \pi_{k'} + \ln f(\theta_j | \mu_{k'}, \kappa_{k'}) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

# Bibliografija

- [1] M. Abramowitz i I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, 1970.
- [2] Frank Ball i Paul Blackwell, *A finite form for the wrapped Poisson distribution*, *Advances in Applied Probability* **24** (1992), br. 1, 221–222.
- [3] Árpád Baricz, *Bounds for modified Bessel functions of the first and second kinds*, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **53** (2010), 575 – 599.
- [4] Jon Eyolfson, Lin Tan i Patrick Lam, *Do Time of Day and Developer Experience Affect Commit Bugginess?*, *Proceedings of the 8th Working Conference on Mining Software Repositories (New York, NY, USA), MSR '11*, Association for Computing Machinery, 2011, str. 153–162, ISBN 9781450305747, <https://doi.org/10.1145/1985441.1985464>.
- [5] T. Hastie, R. Tibshirani i J.H. Friedman, *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*, Springer series in statistics, Springer, 2009, ISBN 9780387848846.
- [6] E. Lukacs, *Characteristic Functions*, Griffin books of cognate interest, Hafner Publishing Company, 1970, ISBN 9780852641705, <https://books.google.hr/books?id=uGEPQAAMAAJ>.
- [7] K. V. Mardia, *Statistics of Directional Data*, sv. 37, [Royal Statistical Society, Wiley], 1975, <http://www.jstor.org/stable/2984782>.
- [8] G. V. T. Matthews, “*NONSENSE*” *ORIENTATION IN MALLARD ANAS PLATYRHYNCHOS AND ITS RELATION TO EXPERIMENTS ON BIRD NAVIGATION*, *Ibis* **103a** (1961), br. 2, 211–230, <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1474-919X.1961.tb02435.x>.
- [9] Nikola Sarapa, *Teorija Vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002, ISBN 953-0-30816-7.

- [10] J. A. Shohat i J. D. Tamarkin, *The Problem of Moments*, American Mathematical Society, 1970.
- [11] M. A. Stephens, *Random walk on a circle*, *Biometrika* **50** (1963), br. 3-4, 385–390, ISSN 0006-3444, <https://doi.org/10.1093/biomet/50.3-4.385>.
- [12] Abdul Waheed i Neil A. Wells, *Changes in paleocurrents during the development of an obliquely convergent plate boundary (Sulaiman fold-belt, southwestern Himalayas, west-central Pakistan)*, *Sedimentary Geology* **67** (1990), br. 3, 237–261, ISSN 0037-0738, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/003707389090037T>.
- [13] David Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, 1991.

# Sažetak

Cilj rada je navesti osnovne vjerojatnosne rezultate vezane uz distribucije na  $S^1$  u svrhu statističke analize podataka takve prirode. Na početku će se navesti osnovni vjerojatnosni pojmovi vezani uz distribucije na  $S^1$  (kao što su funkcija distribucije, funkcija gustoće, karakteristična funkcija), definirati neke osnovne vjerojatnosne distribucije na  $S^1$  te dati pregled osnovnih mjera sredine i varijabilnosti.

Koristeći teoriju karakterističnih funkcija, dokazuju se varijante bitnih teorema poznatih za distribucije na  $\mathbb{R}$  (teorem jedinstvenosti, teorem neprekidnosti) te osnovnih graničnih teorema za cirkularne distribucije od kojih se većina očituje u obliku asimptotske uniformnosti.

U posljednjem poglavlju će se na konkretnim primjerima grafički prikazivati cirkularni podaci i uspoređivati njihove karakteristike s ranije uvedenim distribucijama te će se simulacijama ilustrirati rezultati dijela dokazanih graničnih teorema. Naposljetku se izvodi procjena parametara von Misesove distribucije metodom maksimalne vjerodostojnosti i navodi varijanta algoritma maksimizacije očekivanja koji se koristi za procjenu parametara u miješanim von Misesovim modelima.





# Summary

The aim of the paper is to provide some results related to probability theory of circular distributions for the purpose of statistical analysis of directional data on a unit circle. At the beginning, some concepts related to distributions on  $S^1$  are presented (such as cumulative distribution function, probability density function, characteristic function), several probability distributions on  $S^1$  are defined, and a brief overview of basic measures of center and dispersion is shown.

Later, some fundamental theorems known for distributions on  $\mathbb{R}$  (uniqueness theorem, continuity theorem) and a few limit theorems for circular distributions are proved using the theory of characteristic functions.

In the last chapter, real-life examples of circular data are graphically represented and their characteristics are compared with the previously introduced distributions. Additionally, the results of some of the proven limit theorems are illustrated using simulation techniques. Finally, maximum likelihood estimates of parameters of the von Mises distribution are derived and a version of the EM algorithm used for point estimation of parameters in von Mises mixtures is presented.



# Životopis

Marko Osrečak rođen je 17. svibnja 1997. u Zagrebu. Nakon završetka osnovne škole upisuje Prirodoslovnu školu Vladimira Preloga gdje školske godine 2015./16. završava obrazovni program „prirodoslovna gimnazija“. Akademske godine 2016./17. upisuje Preddiplomski studij matematike pri Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, a akademske godine 2020./21. Diplomski studij matematičke statistike na istom fakultetu.

Tijekom studija razvija interes za teoriju vjerojatnosti i matematičku statistiku, a od studenog 2019. uz studij radi u hrvatskom *startupu Photomath*. Na Matematičkom odsjeku je tijekom studija bio demonstrator iz kolegija *Vektorski prostori* i *Kompleksna analiza*.